

Надежность и эффективность В ТЕХНИКЕ

Справочник в десяти томах

Надежность и эффективность в технике

Справочник в десяти томах

Редакционный совет:

*В.С. АВДУЕВСКИЙ, акад. АН СССР
(председатель);*

*Н.А. СЕВЕРЦЕВ, д-р техн. наук
(зам. председателя)*

В.И. КУЗНЕЦОВ, акад. АН СССР;

Н.Д. КУЗНЕЦОВ, акад. АН СССР;

В.А. МЕЛЬНИКОВ, акад. АН СССР;

В.П. МИШИН, акад. АН СССР;

В.Ф. УТКИН, акад. АН СССР;

К.В. ФРОЛОВ, акад. АН СССР;

Б.В. ГНЕДЕНКО, акад. АН УССР;

И.Н. КОВАЛЕНКО, акад. АН УССР;

Б.Ф. ЛОМОВ, чл.-корр. АН СССР

Том
6

*Экспериментальная
отработка
и испытания*

Под редакцией
д-ра техн. наук
Р.С. СУДАКОВА,
д-ра техн. наук
О.И. ТЕСКИНА



Москва
«МАШИНОСТРОЕНИЕ»
1989

ББК 30.14
Н17
УДК 621.192 (035)

Авторы тома: И. З. Аронов, Б. В. Бодин, В. А. Лapidус, Э. К. Лецкий, Я. П. Лумельский, И. В. Павлов, А. И. Рембеза, Г. С. Садыхов, Н. А. Северцев, Ю. С. Слотин, Р. С. Судаков, О. И. Тескин, А. Н. Шабалин, Г. А. Ярыгин

Рецензент д-р техн. наук В. Г. Воробьев

Надежность и эффективность в технике: Справочник:
Н17 В 10 т./Ред. совет: В. С. Авдеевский (пред.) и др. — М.: Машиностроение, 1989. — (В пер.).

Т. 6: Экспериментальная отработка и испытания/Под общ. ред. Р. С. Судакова, О. И. Тескина. — 376 с.: ил. — 1 р. 80 к.

Рассмотрены модели отработочных испытаний, изложены методы экспериментальной отработки, а также методы оценки и контроля надежности по результатам испытаний простых технических устройств и сложных систем с учетом априорных данных и результатов испытаний их элементов.

Предназначен для инженерно-технических работников, занятых проектированием, изготовлением, испытаниями и эксплуатацией техники. Будет полезен студентам и преподавателям высших учебных заведений.

Н $\frac{2702000000-601}{038(01)-89}$ Подписное

ББК 30.14

Оглавление

Предисловие (Тескин О. И.)	9	Качественные требования	26
РАЗДЕЛ I		Взаимосвязь задач нормирования и контроля качества	26
ИСПЫТАНИЯ. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ	10	Глава 5. ТРЕБОВАНИЯ К МЕТОДАМ КОНТРОЛЯ НАДЕЖНОСТИ (В. А. Липидус, Н. А. Северцев)	28
Глава 1. ЗАДАЧИ И ВИДЫ ИСПЫТАНИЙ (Б. В. Бодин, Г. А. Ярыгин).	10	Общие требования	28
Глава 2. ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ (ОТРАБОТОЧНЫЕ) ИСПЫТАНИЯ ОПЫТНЫХ ОБРАЗЦОВ ИЗДЕЛИЙ (Б. В. Бодин, Г. А. Ярыгин)	13	Требования к контролю надежности в процессе эксплуатации изделий	30
Особенности отработочных испытаний	13	Арбитражная корректность процедур контроля	31
Требования к планированию экспериментальной отработки	14	Устойчивость процедур контроля	34
Глава 3. ОРГАНИЗАЦИЯ КОНТРОЛЯ ЗА ВЫПОЛНЕНИЕМ ПРОГРАММ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ОТРАБОТКИ (Г. А. Ярыгин)	20	Глава 6. ПРИНЦИП РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИОРИТЕТОВ — ОРГАНИЗАЦИОННО - МЕТОДИЧЕСКАЯ ОСНОВА КОНТРОЛЯ НАДЕЖНОСТИ (КАЧЕСТВА) ПРОДУКЦИИ (В. А. Липидус)	35
Показатели уровня отработанности	20	Подходы к планированию контроля надежности	35
Критерии завершенности экспериментальной отработки	22	Формулировки принципа распределения приоритетов	37
Глава 4. ТРЕБОВАНИЯ К НАДЕЖНОСТИ ИЗДЕЛИЙ (В. А. Липидус, Н. А. Северцев)	23	Структуры правил принятия решений	39
Количественные требования	23	РАЗДЕЛ II	
Интерпретация групповых показателей надежности	24	ОЦЕНКА И КОНТРОЛЬ НАДЕЖНОСТИ ИЗДЕЛИЙ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИХ ИСПЫТАНИЙ (экспериментальные методы)	45
Номенклатура показателей надежности	25		

Глава 7. ОЦЕНКА ПОКАЗАТЕЛЕЙ БЕЗОТКАЗНОСТИ ПРИ БИНОМИАЛЬНОМ ПЛАНЕ ИСПЫТАНИЙ (Р. С. Судakov)	45	Глава 10. ОЦЕНКА ПОКАЗАТЕЛЕЙ ДОЛГОВЕЧНОСТИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ПЛАНАХ ИСПЫТАНИЙ (О. И. Тескин, Г. С. Садыхов)	111
Предварительные замечания	45	Непараметрические модели оценивания	112
Исходные определения и допущения	46	Параметрические модели, основанные на информации о ресурсе изделия	118
Оценка вероятности безотказной работы	50	Параметрические модели, основанные на информации об определяющем параметре	123
Обобщение биномиальной схемы испытаний	54	Остаточный ресурс и методы его оценки	125
Глава 8. ОЦЕНКА ПОКАЗАТЕЛЕЙ БЕЗОТКАЗНОСТИ ПРИ ПЛАНАХ ИСПЫТАНИЙ С ИЗМЕРЕНИЕМ НАРАБОТКИ (И. З. Аронов)	60	Глава 11. ПЛАНИРОВАНИЕ ИСПЫТАНИЙ И КОНТРОЛЬ НАДЕЖНОСТИ ПО ДВУМ КОНТРОЛЬНЫМ УРОВНЯМ (Я. П. Лумельский)	129
Основные задачи оценивания показателей безотказности	60	Постановка и общее решение задачи	129
Классификация планов испытаний с измерением наработки	60	Планы контроля показателей надежности типа вероятности	135
Планирование определительных испытаний	64	Планы контроля показателей надежности типа наработки	146
Оценка показателей безотказности на основе параметрических методов	67	Заключительные замечания	151
Оценка показателей безотказности на основе непараметрических методов	77	Глава 12. КОНТРОЛЬ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ БЕЗОТКАЗНОСТИ ВОССТАНАВЛИВАЕМЫХ ИЗДЕЛИЙ В ПРОЦЕССЕ ЭКСПЛУАТАЦИИ (В. А. Лапидус)	153
Оценка показателей безотказности в случае утяжеленных испытаний	81	Глава 13. ПЛАНИРОВАНИЕ ИСПЫТАНИЙ И КОНТРОЛЬ НАДЕЖНОСТИ ПО ОДНОМУ КОНТРОЛЬНОМУ УРОВНЮ (Р. С. Судakov, О. И. Тескин)	156
Глава 9. ОЦЕНКА ПОКАЗАТЕЛЕЙ БЕЗОТКАЗНОСТИ ПРИ ИСПЫТАНИЯХ С ИЗМЕРЕНИЕМ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ (О. И. Тескин, Н. А. Северцев)	83	Планирование биномиальных испытаний	156
Классификация моделей отказов	83	Планирование объемов испытаний при измерении наработки до отказа	164
Статические модели (допусковые)	85		
Статические модели непревышений	90		
Динамические модели отказов	93		

Планирование объемов испытаний в утяжеленных режимах	166	Глава 16. ОЦЕНКА ПОКАЗАТЕЛЕЙ ДОЛГОВЕЧНОСТИ СИСТЕМ (О. И. Тескин, Н. А. Северцев)	225
РАЗДЕЛ III		Общие соотношения	225
ОЦЕНКА И КОНТРОЛЬ НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЙ ИХ ЭЛЕМЕНТОВ (расчетно-экспериментальные методы)	180	Параметрические модели, основанные на информации о наработке до отказа	228
Глава 14. ОЦЕНКА ПОКАЗАТЕЛЕЙ БЕЗОТКАЗНОСТИ СИСТЕМ ПРИ БИНОМИАЛЬНОМ ПЛАНЕ ИСПЫТАНИЙ (Р. С. Судаков)	180	Параметрические модели, основанные на измерениях определяющих параметров	233
Интервальная оценка вероятности безотказной работы системы с последовательным соединением элементов	180	Глава 17. ПЛАНИРОВАНИЕ ИСПЫТАНИЙ И КОНТРОЛЬ НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМ ПО ИСПЫТАНИЯМ ИХ ЭЛЕМЕНТОВ (И. В. Павлов, О. И. Тескин)	237
Интервальная оценка вероятности безотказности работы системы с параллельным соединением элементов	185	Планирование и контроль по двум контрольным уровням	237
Интервальная оценка вероятности безотказной работы систем с последовательно-параллельным соединением элементов	187	Планирование и контроль по одному контрольному уровню	248
Интервальная оценка вероятности безотказной работы системы при известных коэффициентах функциональной избыточности	189	РАЗДЕЛ IV	
Глава 15. ОЦЕНКА ПОКАЗАТЕЛЕЙ БЕЗОТКАЗНОСТИ ПРИ ПЛАНАХ ИСПЫТАНИЙ С ИЗМЕРЕНИЕМ НАРАБОТОК ДО ОТКАЗА (О. И. Тескин, И. В. Павлов, Р. С. Судаков)	191	ПЛАНИРОВАНИЕ И ОЦЕНКА ЗАВЕРШЕННОСТИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ОТРАБОТКИ	258
Системы с последовательной ССН	191	Глава 18. ПЛАНИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ОТРАБОТКИ СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ (Ю. С. Слотин, А. И. Рембеза, А. Н. Шабалин, Г. А. Ярыгин)	258
Системы с последовательно-параллельными и параллельно-последовательными ССН (системы с П-структурой)	201	Основные задачи экспериментальной отработки	258
Системы с монотонной структурой	223	Основные этапы экспериментальной отработки и оценка соответствия условий испытаний изделий условиям их эксплуатации	259
		Планирование и анализ экспериментальной отработки по обеспечению работоспособности изделий	260

Планирование экспериментальной отработки по критерию максимальной надежности	267		
Глава 19. ОПТИМАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ МНОГОФАКТОРНЫХ ИСПЫТАНИЙ НА НАДЕЖНОСТЬ (Э. К. Лецкий)	270	Глава 20. МОДЕЛИ РОСТА НАДЕЖНОСТИ И ОЦЕНКА ЗАВЕРШЕННОСТИ ОТРАБАТЫВАЕМЫХ СИСТЕМ (Н. А. Северцев, А. Н. Шабалин, Г. А. Ярыгин)	300
Методы обработки данных многофакторных испытаний	272	Классификация моделей роста надежности	300
Оптимальное планирование испытаний при построении многофакторных моделей процессов изменения определяющего параметра объекта	275	Параметрические модели роста ВБР	301
Оптимальное планирование испытаний при построении многофакторных моделей для показателя надежности (параметра распределения наработки до отказа)	289	Параметрические модели роста средней наработки на отказ	307
Каталог оптимальных планов многофакторных испытаний	293	Непараметрические модели роста надежности	312
		Прогнозирование роста надежности отработываемых систем для оценки завершенности	314
		Приложение	317
		Список литературы	367
		Предметный указатель	371

Предисловие

Данный том энциклопедического десятилетнего справочника «Надежность и эффективность в технике» посвящен испытаниям изделий.

Исходя из целей, которые решают с помощью испытаний, их подразделяют на исследовательские и отработочные (автономные и комплексные), контрольные (предварительные, приемочные) и сравнительные. По результатам испытаний заказчик принимает решение о завершенности опытно-конструкторских работ, приемке и постановке на серийное (массовое) производство созданных комплексов и систем. Всесторонняя экспериментальная отработка (автономные и комплексные испытания) является основой достижения и поддержания требуемого уровня качества и надежности изделий. Поскольку любые испытания изделия дают определенные сведения о его свойствах, в том числе о его надежности, то результаты практически всех проведенных испытаний могут быть использованы для оценки уровня надежности. В последнее десятилетие широкое распространение получил программно-целевой подход к обеспечению требуемого уровня надежности изделий, на основе которого разрабатывают методики контроля и оценки этого уровня при наличии ограниченного числа испытываемых образцов.

Указанный подход предусматривает применение комплексных испытаний

с одновременной имитацией различных воздействующих факторов. По различным видам техники наряду с общими требованиями существует своя специфика организации и проведения испытаний в условиях, близких к реальным.

В данном томе справочника сделана попытка собрать воедино практически все известные в настоящее время и апробированные модели и методы анализа показателей надежности сложных технических изделий (комплексов, систем), оценки фактического уровня их надежности в условиях статистических экспериментальных данных, полученных на ограниченном количестве испытываемых объектов. Акцент сделан на вопросы, связанные с упорядочением организации и проведения экспериментальной отработки изделий в процессе их создания с точки зрения достижения и подтверждения заданного уровня надежности на малом числе потребных для этого опытных образцов изделий. Большое внимание уделено методам учета априорной информации для повышения достоверности принимаемых решений и методам контроля надежности систем по результатам испытаний их составных частей и элементов, подробно рассмотрены модели испытаний с учетом многофакторных воздействий и утяжелением эксплуатационных режимов в ходе испытаний.

Раздел I

ИСПЫТАНИЯ. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Глава 1. Задачи и виды испытаний

Предварительные замечания. Оценка и контроль показателей надежности проводятся по результатам испытаний или наблюдений изделий в процессе эксплуатации.

При испытаниях и наблюдениях за эксплуатируемыми изделиями получают данные о характеристиках, определяющих свойства качества изделий, например, целевые (точность, устойчивость, мощность, быстродействие), конструктивные (прочность, герметичность), эксплуатационные (грузоподъемность, скорость движения) и др.

Данные о соответствии характеристик качества требуемым значениям в заданных условиях эксплуатации и в течение требуемого времени (наработки), полученные в альтернативном виде («соответствует—не соответствует», «успех—отказ») или в виде измеренных значений характеристик, используются для оценки и контроля надежности.

Надежность является комплексным свойством, характеризуемым безотказностью, долговечностью, ремонтпригодностью и сохраняемостью. Под испытаниями на надежность обычно понимают испытания на безотказность с оценкой и контролем соответствующих показателей безотказности, вычисляемых по статистическим данным о результатах испытаний. Специальные испытания на надежность с оцен-

кой и контролем показателей безотказности для сложных и дорогостоящих изделий в целом, как правило, не проводятся. В этих случаях практикуется совмещение испытаний, при которых определение (контроль) показателей надежности проводится одновременно с экспериментальным исследованием других характеристик изделия.

Специальные испытания по заранее выбранным планам оценки и контроля надежности организуются для комплектующих элементов, несложных узлов и приборов, выпускаемых в массовом производстве.

Оценка и контроль надежности могут проводиться непосредственно по результатам испытаний или наблюдений за функционированием изделия как единого целого. Такой подход, называемый иногда прямым методом оценки надежности, для сложных изделий возможен при натурных испытаниях и при эксплуатации. При ограниченных объемах испытаний изделий или невозможности испытания изделия в целом, например, на ранних стадиях экспериментальной отработки, используют косвенные методы оценки надежности с использованием аналитических или имитационных моделей надежности. В этом случае объединяются результаты испытаний отдельных элементов (узлы, приборы, агрегаты, системы) путем получения

оценок надежности элементов непосредственно по результатам их испытаний с последующим расчетом показателей надежности изделия в целом. Иногда такие методы называют расчетно-экспериментальными.

Среди испытаний с оценкой и контролем показателей надежности особо выделяют испытания на долговечность (ресурсные испытания), ремонтпригодность и сохраняемость.

Для сложных изделий к испытаниям на надежность могут быть приравнены испытания на выявление «слабого элемента», утяжеленные (форсированные) испытания, испытания на работоспособность при неблагоприятных сочетаниях внешних и внутренних действующих факторов.

При оценке и контроле надежности важным является понятие «зачетного» и «незачетного» отказа. К незачетным отказам с точки зрения оцениваемых показателей надежности относятся отказы изделий, причины которых однозначно установлены и устранены. Эффективность принятых мер по устранению причин отказа подтверждена необходимыми исследованиями и испытаниями.

Не учитываются также при определении (контроле) надежности отказы, возникшие в результате специальных испытаний с провоцированием отказа, а также отказы, связанные с внешними воздействиями, не предусмотренными технической документацией на изделие, или возникшие вследствие ошибок обслуживающего персонала. К незачетным относятся также отказы, не влияющие на определяемый показатель надежности.

Виды испытаний (определения видов испытаний см. в т. 1, с 191—197). Могут быть проведены следующие виды испытаний: исследовательские (отрабочные), контрольные и сравнительные.

К исследовательским испытаниям относятся все отработочные испытания, проводимые в соответствии с конструкторской документацией в процессе экспериментальной отработки опытного изделия. Эти испытания по своим конечным целям подразделяются на автономные и комплексные.

Основными целями автономных испытаний опытных изделий являются: отработка конструкторской документации и проверка функционирования отдельных изделий в условиях, близких к реальным;

отработка технологической документации и контроля качества изготовления изделий;

выявление и устранение ненадежных изделий и недопустимых режимов работы электрорадиоизделий и комплектующих элементов;

определение границ (запасов) работоспособности, оценка соответствия характеристик опытных изделий требованиям ТЗ по результатам испытаний;

корректировка и присвоение конструкторской документации литеры «О» на изделия, которые подвергаются только комплексным испытаниям, проводятся по результатам этих испытаний.

Автономным испытаниям следует подвергать все вновь создаваемые, модернизируемые, дорабатываемые изделия, а также заимствованные изделия, для которых изменены условия функционирования, предусматривая при этом проведение основного объема экспериментальной отработки. Такой подход позволяет провести всю экспериментальную отработку с минимальными материальными и временными затратами.

Комплексные испытания проводят при экспериментальной отработке взаимного функционирования нескольких опытных изделий на соответствие требованиям ТЗ. Отнесение испытаний к автономным или комплексным конструктор выполняет при формировании комплексной программы экспериментальной отработки опытного изделия. При этом испытания отдельного опытного изделия в целом могут быть отнесены к комплексным испытаниям (по отношению к входящим в него изделиям) или к автономным испытаниям (по отношению к изделию более крупной структуры). Решение по этому вопросу принимают исходя из намеченных целей испытаний.

Основными целями комплексных испытаний опытных изделий являются

совместная отработка опытных изделий и проверка [в том числе на предельно допустимых (экспериментальных) режимах] их взаимного функционирования в условиях, близких к реальным, с одновременной имитацией различных воздействующих факторов; отработка программ и алгоритмов для вычислительных машин; выявление и устранение конструкторских и производственных дефектов на стыках сопрягаемых (смежных) систем, агрегатов, приборов;

проверка отработанности технологии изготовления, достаточности и эффективности контроля качества изделий, достаточности и правильности выбора испытательного оборудования и контрольно-измерительных средств и дальнейшая отработка технологии серийного изготовления (если изделия в дальнейшем будут изготавливаться серийно);

соответствующая отработка конструкторской и технологической документации;

проверка работоспособности изделий при имитации аварийных ситуаций, которые технически и безопасно можно осуществить на стендах;

предварительная оценка соответствия основных характеристик опытных изделий ТЗ (ТУ на опытные изделия), в том числе выполнение требований к надежности в порядке, определенном ТЗ и программой обеспечения надежности, а также оценка обеспечения заданных ресурсов работы изделий;

проверка полноты и степени отработки комплекта конструкторской и технологической документации.

Все изделия, прошедшие автономные испытания, как правило, подвергаются комплексным испытаниям.

К контрольным испытаниям опытных изделий относятся предварительные (приемосдаточные) и приемочные (межведомственные и государственные) испытания.

К предварительным испытаниям относятся все контрольные испытания, определенные конструкторской документацией, которым должны подвергаться те изделия, которые подлежат поставке на испытания в изделиях более крупной структуры. При-

мером таких испытаний являются контрольно-выборочные испытания (КВИ), контрольно-технологические испытания (КТИ), испытания конкретного образца при приемосдаточных испытаниях и на контрольно-испытательных стендах.

На приемочных испытаниях опытных изделий проверяют соответствие характеристик и параметров этих изделий требованиям тактико-технического задания (ТТЗ) заказчика в условиях, максимально приближенных к условиям применения по назначению (эксплуатации), и определения возможности постановки их на серийное (массовое) производство.

К контрольным испытаниям серийных изделий и изделий, выпускаемых в массовом производстве, относятся: приемосдаточные испытания, периодические испытания, типовые испытания, инспекционные испытания, аттестационные испытания, испытания установочной партии изделий или головного образца.

Испытания установочной партии изделий или головного образца проводятся с целью подтверждения отработанности серийной технологии и оценки готовности предприятия-изготовителя к серийному (массовому) производству изделий.

Следует отметить, что с целью сокращения сроков освоения серийного или массового производства изделий систему технического контроля качества их изготовления (объекты контроля, перечень контролируемых операций и последовательность их выполнения, техническое оснащение этих операций, режимы, методы, средства механизации и автоматизации контроля и другие компоненты системы) отработывают в процессе опытного производства и проведения экспериментальной отработки этих изделий, а будущим предприятиям—изготовителям серийных изделий поручают изготавливать опытные изделия (один или несколько экземпляров), которые должны пройти приемочные испытания (межведомственные или натурные испытания).

Методы оценки и контроля надежности по результатам испытаний изложены в последующих разделах справочника.

Глава 2. Исследовательские (отработочные) испытания опытных образцов изделий

ОСОБЕННОСТИ ОТРАБОТОЧНЫХ ИСПЫТАНИЙ

Наиболее всестороннюю и ценную информацию для оценки и контроля надежности дают исследовательские испытания, а также эксплуатация изделий.

Исследовательские (лабораторные, отработочные, конструкторско-доводочные) испытания являются неотъемлемой частью процесса создания изделия. Эти испытания необходимы для проверки физических процессов и принципов функционирования, правильности, полноты и эффективности принятых конструкторских и технологических решений, определения рациональных путей достижения, подтверждения и демонстрации соответствия параметров и характеристик опытных изделий заданным значениям, оценки эффективности и достаточности мероприятий, принимаемых и реализуемых в процессе производства, экспериментальной отработки и приемочных испытаний опытных изделий.

Особенности исследовательских (отработочных) испытаний определяются, в первую очередь, целевым назначением техники, а также сложностью создаваемых изделий и их технико-экономических показателей, степенью преемственности конструкторских и технологических решений, стандартизации и унификации и наличием необходимой для полной отработки изделий экспериментальной базы и ее ведомственной принадлежности.

Сравнительно простые и недорогие изделия чаще всего выгоднее отрабатывать сразу, изготовив и собрав все изделия, т. е. отработка составных частей изделия проводится одно-

временно с отработкой всего изделия в целом. Сложные дорогостоящие изделия, состоящие из совокупности в различной сочетаемости механических, пневмогидравлических, электро-механических, радиоэлектронных и т.п. систем и агрегатов, вычислительных машин, отрабатываются последовательно, а именно: сначала отработка ведется автономно для отдельных приборов, элементов конструкции, агрегатов на соответствие требованиям выданных на них ТЗ, а затем комплексно для всего изделия в целом или крупных его составных частей. При автономных испытаниях допускается аналогия с указанной выше отработкой для сравнительно простых изделий. На эту часть отработки приходится наибольшая доля запланированного объема экспериментальной отработки, хотя бы потому, что она обходится дешевле, для нее легче и оперативнее вводить в строй экспериментальную базу и испытательные средства, проще с точки зрения габаритов и стоимости обеспечить имитацию реальных условий функционирования.

По мере усложнения объекта испытания и в соответствии с иерархической структурой изделия усложняются испытательные средства и средства имитации реальных условий функционирования. Объем и требуемое количество материальной части для испытаний уменьшаются и выбираются путем оптимизации достигаемого при испытаниях уровня надежности и технико-экономических показателей. При этом более укрупненные сборки по своему составу следует выбирать таким образом, чтобы их испытания обеспечивали отработку отдельных, законченных по своему научно-техни-

ческому смыслу и названию частей или всей циклограммы функционирования изделия в реальных условиях. Оработка изделия считается полной, если экспериментально проверена циклограмма его функционирования и последние испытания (серии испытаний) прошли без отказов.

ТРЕБОВАНИЯ К ПЛАНИРОВАНИЮ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ОТРАБОТКИ

С целью определения объемов и видов, режимов и продолжительности испытаний используются модели, устанавливающие взаимосвязь показателей надежности с характеристиками изделия, запасами работоспособности, условиями испытания, затрачиваемыми ресурсами на испытания. Особое место среди этих моделей занимают модели надежности и модели планирования многофакторных испытаний. Указанные модели и методы их применения изложены в разд. IV данного справочника.

Поскольку надежность является обобщенным свойством изделия, кроме формализованных моделей и методов планирования испытаний с учетом количественных требований к надежности, важное место при планировании экспериментальной отработки занимают вопросы организации отработки и учета накопленного инженерного опыта проведения отработки предшествующих изделий.

Планирование экспериментальной отработки включает определение целей, задач и объектов испытаний, этапов, видов, условий, объемов, последовательности и методов испытаний, определение перечня измеряемых параметров объекта испытаний и окружающей среды, состава измерительных и испытательных средств, а также средств и методов регистрации и обработки данных, определение технологии проведения каждого испытания, затрат на испытания и продолжительность этапов отработки.

Вопросы планирования экспериментальной отработки отражаются в ТЗ, технических предложениях и эскизном проекте изделия, программе

обеспечения надежности и более подробно в комплексной программе экспериментальной отработки изделия (КПЭО), а также в программах и методиках испытаний элементов. Объем испытаний и обеспечивающие его выполнение организационно-технические мероприятия в обязательном порядке приводятся в едином сквозном плане создания изделий.

На рис. 1 приведена схема планирования и контроля процесса экспериментальной отработки.

Обобщающим программным документом, организующим испытания, определяющим полноту и достаточность объема отработки изделия до начала приемочных испытаний, является КПЭО. В программах испытаний КПЭО занимает такое же место, как сборочный чертеж общего вида в комплекте чертежей. КПЭО разрабатываются на этапе «Разработка рабочей документации на опытные изделия» предприятиями-разработчиками, согласовываются и утверждаются согласно действующим по каждому виду техники нормативно-техническим документам. К ПЭО разрабатываются на основе требований программ обеспечения надежности и другой конструкторской документации.

Предприятия—разработчики составных частей изделия разрабатывают КПЭО на эти составные части и в сроки, определенные едиными сквозными планами разработки изделий, направляют их предприятиям-разработчикам, выдавшим ТЗ, для составления КПЭО на изделия более крупной структуры. КПЭО на сложные изделия, как правило, должны быть согласованы головными НИИ с заказчиком и утверждены Советом главных конструкторов по этим изделиям.

КПЭО должны содержать:

- перечень и состав изделий, подвергаемых автономным, комплексным и межведомственным испытаниям;

- цели и задачи испытаний, порядок и последовательность их выполнения при проведении автономных, комплексных и межведомственных испытаний;

- порядок и объем отработки комплектов конструкторской и технологической документации на макетах и опытных образцах;

виды автономных и комплексных испытаний, число изделий, распределенное по видам и этапам отработки, с учетом выполнения требований к надежности и число испытаний;

порядок и объем отработки взаимного функционирования сопряженных (смежных) агрегатов (приборов) и систем при одновременной имитации различных воздействующих факторов;

порядок подтверждения требований к надежности, а также порядок и объем отработки для подтверждения основных эксплуатационных характеристик;

порядок и объем отработки технологии изготовления изделия;

порядок и объем отработки математического и информационного обеспечения (алгоритмов, программ) вычислительных машин (если они используются в составе изделия или в контрольно-проверочной аппаратуре);

порядок отработки средств и методов обеспечения безопасности работы и эксплуатации изделия; реализации мероприятий метрологического обеспечения, поставок объектов испытаний, оборудования, документации;

перечень программ, методик проведения и оценки результатов испытаний и другой технической документации на испытания, методические указания по выполнению особо важных испытаний и измерений, а также испытаний, связанных с повышенной степенью опасности;

перечень средств испытаний, измерений (стендов, оборудования, систем измерений);

основные требования по точности изделий и перечень средств обработки информации;

требования по обеспечению максимальной имитации реальных условий функционирования и по проведению испытаний изделий на предельно допустимых (экстремальных) режимах функционирования, заданных в ТЗ или определенных в КПЭО;

отчетность по проведенным испытаниям.

На виды испытаний, определенные КПЭО, предприятия-разработчики создают соответствующие более подробные для проведения испытаний

программы. Требования и правила оформления и содержания этих программ определяются действующими по каждому виду техники нормативно-техническими документами.

Иерархическая структура сложного изделия определяет иерархическую структуру построения комплексной программы экспериментальной отработки. При этом КПЭО изделия представляет собой единую систему самостоятельных программно-технических документов, включая программы экспериментальной отработки всех видов создаваемых, модернизируемых изделий, а также заимствованных изделий, для которых изменены условия функционирования, объединенных единством целей и задач, общностью идеологии принципов проведения испытаний.

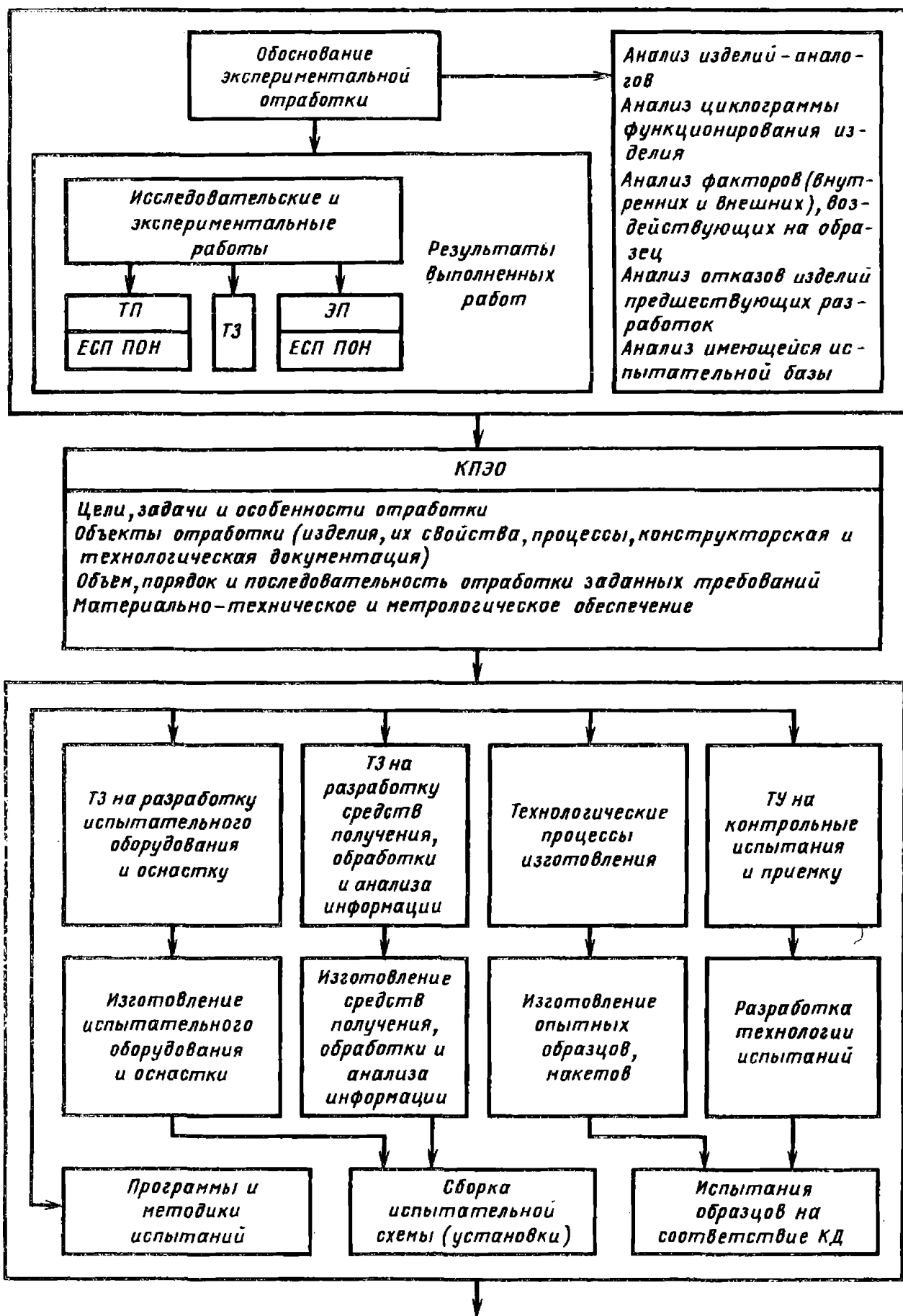
Экспериментальная отработка изделий организуется и планируется на основе следующих принципов.

1. Выполнение основного объема отработки с помощью экспериментальных средств (стенды, установки, модели и т. п.) до начала испытаний готовых (штатных) изделий в реальных условиях функционирования (натурные испытания). На натурные испытания рекомендуется переносить ту отработку, которая с помощью экспериментальных средств технически невыполнима или экономически нецелесообразна в заданные сроки.

2. Проведение экспериментальной отработки в условиях, максимально приближенных к реальным условиям эксплуатации. При этом требуется проводить испытания на предельно допустимых режимах работоспособности с обеспечением одновременной имитации различных воздействующих факторов и моделированием взаимодействия изделий друг с другом.

3. Всесторонняя увязка всех видов испытаний изделий на различных уровнях иерархической структуры изделия с учетом значений обрабатываемых характеристик, точности измерения, воспроизводимости испытаний на стендах, а также требований к завершенности испытаний.

4. Оценка достаточности и правильности выбора испытательного оборудования, контрольно-измерительных



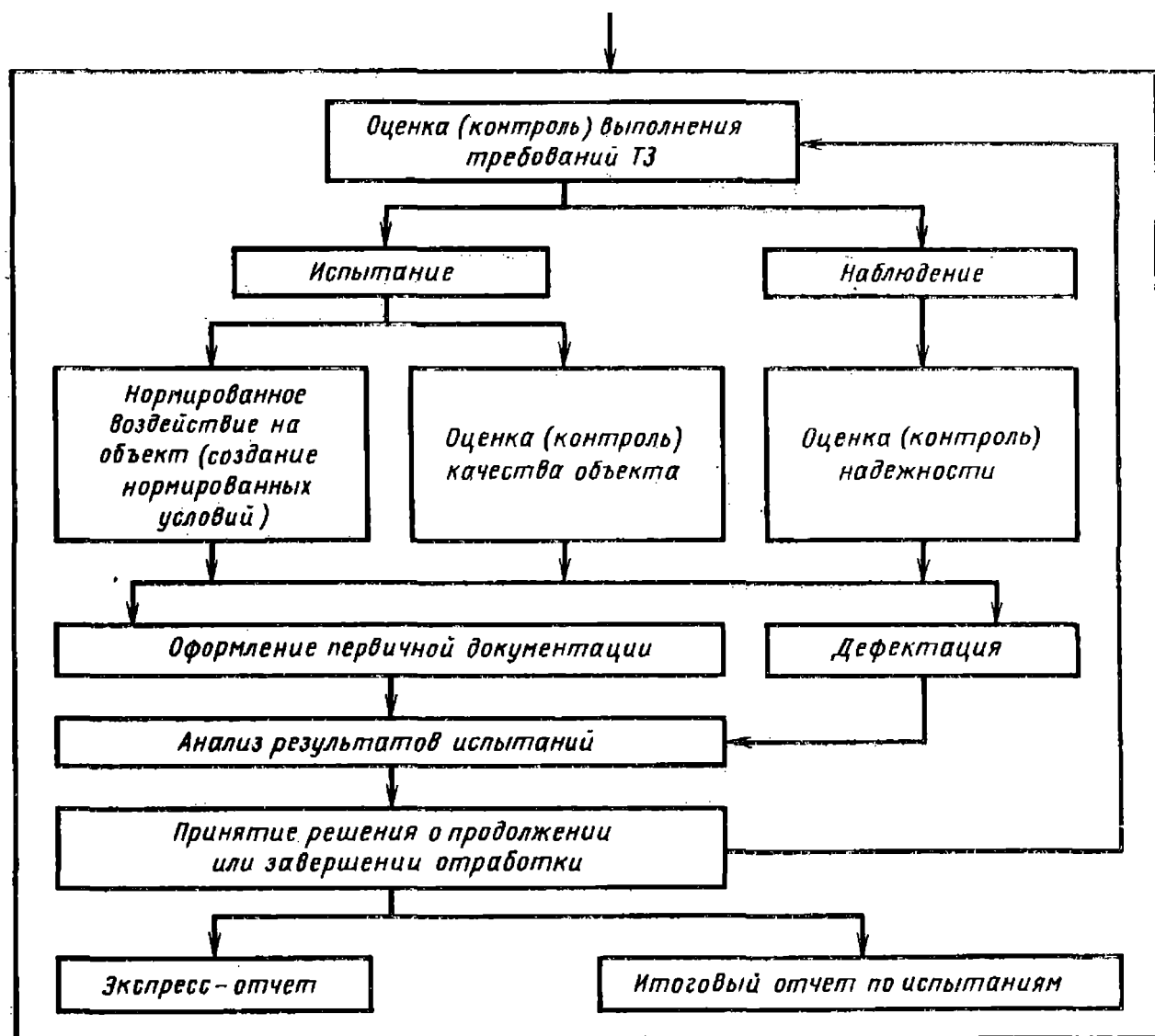


Рис. 1. Структурная схема планирования и контроля процесса экспериментальной отработки (ТЗ — техническое задание; ТП — технические предложения; ЭП — эскизный проект; ЕСП — единый сквозной план; ПОН — программа обеспечения надежности; КПОЭ — комплексная программа экспериментальной отработки; КД — конструкторская документация; ТУ — технические условия)

средств, средств диагностики, математического и программного обеспечения. Ввод в действие испытательного оборудования и измерительных средств до начала соответствующих испытаний.

5. Исследование выявленных отказов, анализ их влияния на работу изделия в целом, оценка (если она предусмотрена в ТЗ) промежуточных уровней надежности и уровня экспериментальной отработки изделия.

6. Сокращение сроков и затрат на отработку при удовлетворении требований к техническим характеристикам и надежности изделия, автоматизации

процесса испытаний и управление процессом отработки.

Планирование экспериментальной отработки проводится одновременно с определением варианта построения, функционирования, производства и эксплуатации изделия.

В качестве исходных данных для определения объемов экспериментальной отработки испытаний используются:

данные ТЗ, включающие требования к техническим характеристикам и показателям надежности и требования к порядку их подтверждения;

материалы эскизного и технического проектов по выбору конструктивных и других параметров, комплектующих изделий, материалов, технологии изготовления;

структурные, функциональные схемы, схемы компоновки и взаимного расположения систем в изделии;

циклограмма функционирования изделия, включая хранение, транспортирование, подготовку к применению, применение изделия;

перечень внешних и внутренних воздействующих факторов, нагрузки;

данные о структуре, составе, характеристиках и условиях применения, отказах (дефектах) изделий-аналогов;

данные о заимствовании на вновь создаваемом изделии отработанных технических решений, узлов, систем, агрегатов с изделий-аналогов;

сведения о составе и характеристиках экспериментальной базы, характеристиках средств регистрации и измерений, которые должны быть использованы для отработки изделия.

Материалы по планированию экспериментальной отработки целесообразно группировать по следующим подразделам:

определение задач, объемов и объектов испытаний;

анализ внешних и внутренних воздействующих факторов и нагрузок;

анализ возможностей и определение требований к экспериментальной базе;

состав и значения планируемых показателей, используемых для оценки завершенности экспериментальной отработки;

данные об аналогах и прототипах, используемых при планировании отработки;

перечень документов, содержащих исходные данные для обоснования экспериментальной отработки.

При выборе аналога (прототипа) создаваемого изделия проводится анализ изделий данного класса, находящихся в эксплуатации, или существующих перспективных изделий у нас и за рубежом. Проводится сравнение изделий по техническим характеристикам, физическим принципам работы, выполняемым функциям и условиям эксплуатации, конструктивным реше-

ниям, технологии изготовления, применяемым материалам. С целью обоснования выбора аналога могут использоваться количественные методы оценки подобия, изложенные в четвертом томе настоящего справочника. Для предварительного обоснования объемов испытаний определяется уровень новизны создаваемого изделия и учитываются требования к надежности.

При этом следует учитывать:

виды и число объектов испытаний должны обеспечивать подтверждение промежуточных уровней надежности, установленных в ТЗ для отдельных этапов экспериментальной отработки с использованием накопленного опыта создания аналогичных изделий;

виды и число объектов испытаний должны обеспечивать воспроизведение явлений и процессов, возникающих при применении, транспортировании и хранении изделия;

объекты испытаний должны позволять определение физических запасов работоспособности по параметрам и действующим факторам;

требования к видам, комплектности, характеристикам объектов испытаний должны учитывать реальные возможности по их изготовлению в установленные сроки, размещению и отработке на имеющейся экспериментальной базе (с учетом перспектив ее развития).

При исследовании возможных отказов и непредусмотренных (нештатных) ситуаций следует проводить анализ циклограмм функционирования, структурно-функциональной, электрической и других схем изделия, взаимодействия систем и агрегатов.

При формировании требований к экспериментальной базе устанавливаются возможности экспериментальной базы по воспроизведению режимов функционирования изделий, внешних воздействующих факторов, размещению изделий на стендах и экспериментальных установках, защищенности стендов и экспериментальных установок от последствий возможных отказов при испытаниях.

В специальном подразделе ТЗ выделяются показатели, используемые

для оценки завершенности экспериментальной отработки.

Программа испытаний является обязательным к выполнению организационно-методическим документом, дополняющим КПО и определяющим объект и цель испытаний, виды и перечень проводимых проверок (оценок) и их последовательность, условия проведения испытаний и форму отчетности в соответствии с действующими нормативно-техническими документами.

Методика испытаний является обязательным к выполнению методическим документом по проведению испытаний, в котором изложена совокупность способов, методов, приемов для последовательного наиболее целесообразного выполнения операций по проверке (оценке) конкретной характеристики (свойства, показателя, параметра) изделия.

Условия функционирования определяются или характеризуются воздействующими на изделие факторами

как внешнего, так и внутреннего происхождения.

Под воздействующими факторами понимаются явления или процессы, источники которых могут быть вне или внутри изделия, которые вызывают или могут вызвать ограничение или потерю работоспособности изделия или его составных частей в процессе применения изделия по назначению, хранения, транспортирования.

Внешние воздействующие факторы (ВВФ) подразделяются на следующие классы: механические, климатические, биологические, радиационные, электромагнитные, термические, специальные среды. Каждый класс делится на группы, а каждая группа — на виды с соответствующими каждому виду характеристиками. Характеристики условий эксплуатации и соответствующие им воздействующие факторы, воспроизводимые при экспериментальной отработке, приведены в десятом томе настоящего справочника.

Глава 3. Организация контроля за выполнением программ экспериментальной отработки

Ограниченное число образцов, выделяемых на испытания, и сжатые сроки экспериментальной отработки сложных технических систем не позволяют накопить статистические данные в объеме, достаточном для проведения достоверной оценки показателей надежности. Получаемая статистическая информация о результатах физического моделирования, макетирования и испытаний небольшого числа, часто единичных, образцов оказывается разнородной и ограниченной по объему. В связи с этим для контроля выполнения программ экспериментальной отработки используются методы, основанные на совместном применении детерминированных и статистических показателей качества процесса отработки, а также качественных и количественных критериев оценки завершенности отдельных этапов отработки.

ПОКАЗАТЕЛИ УРОВНЯ ОТРАБОТАННОСТИ

Методы определения. Показатели уровня отработанности определяются путем сравнения фактически достигнутых в процессе отработки значений технических характеристик и показателей надежности с их требуемыми значениями. Уровень отработанности служит для оценки завершенности экспериментальной отработки. Эта оценка производится путем сравнения фактических значений технических характеристик и показателей надежности изделия с базовыми значениями. В качестве базовых выбираются значения характеристик и показателей, записанные в технические задания на разработку изделия, технические условия и программы экспериментальной отработки (программы испытаний).

Дифференциальный метод оценки уровня отработанности состоит в определении отдельных относительных показателей V_i , причем $0 \leq V_i \leq 1$. Эти показатели соответствуют следующим основным условиям:

1) задано базовое значение y_i^6 для i -й характеристики $y_i(t)$, где $0 \leq t \leq T$. При этом требуется, чтобы выполнялось условие по одностороннему допуску $y_i(t) \geq y_i^6$ при $0 \leq t \leq T$ или $y_i \leq y_i^6$, где y_i — максимальное значение $y_i(t)$ при $0 \leq t \leq T$;

2) увеличение значений характеристики $y_i(t)$ вплоть до границы допуска y_i^6 считается желательным;

3) по физическому смыслу характеристика $y_i(t)$ является неотрицательной: $y_i(t) \geq 0$, а $y_i^6 \neq 0$.

Если условия 1—3 выполняются, то полагаем $V_i = y_i/y_i^6$ при $y_i \leq y_i^6$ и $V_i = 1$ при $y_i = y_i^6$.

Отметим, что показатели V_i используются лишь для приближенной количественной оценки уровня отработанности изделия. Возможный разброс величин V_i и их распределение при этом не учитываются.

При комплексном методе оценки уровня отработанности изделия используется обобщенный показатель. Расчет обобщенного показателя проводится по следующим приближенным формулам:

$$V = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \alpha_i V_i, \quad (1)$$

где α_i — весовые коэффициенты;

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, \alpha_i > 0, \text{ или}$$

$$V = \prod_{i=1}^m V_i. \quad (2)$$

Смешанный метод основан на совместном применении комплексного и дифференциального методов. В этом случае для определенной группы показателей применяется комплексный показатель, а отдельные важные по значимости относительные показатели рассматриваются как единичные. На основе полученной совокупности комплексного и единичных показателей оценивается уровень отработанности дифференциальным методом.

Оценка уровня отработанности изделия взаимосвязана с полнотой планируемой экспериментальной отработки. По отношению к требованиям технического задания полнота программы отработки оценивается с помощью комплексного показателя

$$U_{\Pi} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 U_i. \quad (3)$$

Входящие в выражение (3) единичные показатели определяют полноту экспериментальной отработки технических характеристик (U_1), отработки на внешние воздействующие факторы (U_2), отработки ресурсных характеристик (U_3).

Показатель U_1 определяется по формуле

$$U_1 = N_1/N,$$

где N — число технических характеристик изделия, подтверждение которых запланировано в результате выполнения программы экспериментальной отработки; N_1 — общее число технических характеристик, подтверждение которых предусмотрено техническим заданием.

Показатель U_2 определяется по формуле

$$U_2 = M_1/M,$$

где M_1 — число внешних факторов и режимов работы, воздействие которых предусмотрено программой экспериментальной отработки при подтверждении технических характеристик изделия; M — общее число внешних факторов и режимов работы, оговоренных в техническом задании на изделие.

Показатель U_3 определяется по формуле

$$U_3 = T_{\Sigma}/T_{\Sigma}^{\text{TP}},$$

где T_{Σ} — суммарная наработка при ресурсных испытаниях, предусмотренная в программе экспериментальной отработки; T_{Σ}^{TP} — требования к ресурсу в техническом задании или суммарной наработке при ресурсных испытаниях в нормах испытаний. Величины T_{Σ} и T_{Σ}^{TP} измеряются в единицах времени или в циклах наработки.

Обобщенный показатель выполнения программы с учетом показателя U_{Π} полноты запланированной отработки определяется по формуле

$$K = U_{\Pi}V, \quad (4)$$

где V определяют из выражений (1) или (2); U_{Π} — из (3).

Поскольку U_{Π} и V изменяются в интервале от нуля до единицы, программа отработки на лабораторно-стендовой базе будет выполнена полностью при $K = 1$.

Для сложных технических систем и изделий важным является своевременно организованная автономная отработка узлов и агрегатов систем. Такому порядку отработки соответствует ускоренный рост показателя V на начальных этапах выполнения программы отработки. В связи с этим является целесообразным вычисление значений показателей V и K по ходу отработки с целью контроля динамики процесса отработки и своевременного вмешательства в его ход.

КРИТЕРИИ ЗАВЕРШЕННОСТИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ОТРАБОТКИ

Оценка завершенности экспериментальной отработки проводится с использованием качественных (неформализованных) и количественных (детерминированных и вероятностных) критериев.

К качественным критериям завершенности отработки относятся:

выполнение программы отработки в полном объеме при устранении всех источников отказов (дефектов), выявленных в ходе отработки;

наличие соответствующей отчетной документации о проведенных экспериментальных исследованиях и испытаниях, оформленной и утвержденной в установленном порядке;

присвоение соответствующей литеры конструкторской документации (КД), которая определяет готовность КД к производству изделий.

Количественным критерием завершенности отработки является мера соответствия определенных по результатам испытаний технических характеристик и показателей надежности их требуемым значениям в техническом задании и соответственно программе экспериментальной отработки.

При количественной оценке завершенности отработки вычисляются относительные значения показателей уровня отработанности V_i для технических характеристик, действующих возмущающих факторов и показателей надежности. Если заданы требуемые запасы работоспособности, которые необходимо подтвердить для технических характеристик и действующих возмущающих факторов, вычисляются показатели V_i уровня отработанности запасов работоспособности.

В общем случае условие завершенности отработки с использованием относительных показателей V_i уровня отработанности формируется в форме

$$V_i \geq V_i^{\text{тр}}, \quad i = \overline{1, m};$$

при этом возможно использование одного критерия $V \geq V^{\text{тр}}$.

После вычисления V_i , V и $U_{\text{п}}$, а также обобщенного показателя K для контроля выполнения программы экспериментальной отработки используется также критерий $K \geq K^{\text{тр}}$.

Требуемые значения $V_i^{\text{тр}}$, $V^{\text{тр}}$ и $K^{\text{тр}}$ назначаются с учетом опыта отработки изделия-аналога.

Оценка показателей уровня отработанности и примеры оценки завершенности экспериментальной отработки подробно рассмотрены в гл. 20.

Глава 4. Требования к надежности изделий

Требования к надежности изделий и методы контроля их выполнения являются основными элементами механизма управления надежностью продукции. Требования определены в соответствующих документах (технических заданиях, стандартах, технических условиях и т. п.). По окончании каждого этапа разработки, постановки на производство или изготовления изделий проводят контрольные испытания с целью проверки выполнения установленных требований.

Требования к надежности изделий являются также элементом системы регулирования отношений изготовителей и потребителей при предъявлении претензий в связи с приобретением ненадежных изделий.

Различают количественные и качественные требования к надежности изделий.

КОЛИЧЕСТВЕННЫЙ ТРЕБОВАНИЯ

Количественные требования устанавливаются в виде соответствующих норм на показатели надежности.

Применение показателей надежности предполагает возможность проведения определенных экспериментов — контрольных испытаний, в ходе которых количественно оцениваются те или иные свойства изделий при выполнении предназначенных для них задач и функций в соответствующих условиях внешней среды.

Показатели надежности изделий имеют некоторую специфику, отличающую их от других показателей качества продукции.

Первичные характеристики свойств надежности, такие, как отказ, наработка, время устранения отказа, имеют

случайный характер проявления, и получать устойчивые количественные характеристики можно, как правило, лишь при достаточно больших объемах статистических данных, наблюдая изделия в течение продолжительного времени или (и) наблюдая достаточно большие совокупности изделий.

В связи с этим для количественного описания свойств изделий, обеспечивающих надежное выполнение их функций, широко применяются вероятностно-статистические понятия, такие, как вероятность безотказной работы, математические ожидания наработки и ресурса и другие первичные характеристики.

Различают индивидуальные и групповые показатели надежности.

Индивидуальные показатели характеризуют надежность каждого отдельного изделия, групповые — надежность совокупностей продукции, например партий.

Индивидуальные показатели и соответствующие требования используются для регулирования отношений между предприятием-изготовителем и потребителями каждого конкретного изделия.

Групповые показатели надежности и соответствующие требования применяются в механизмах управления надежностью изделий на этапах их создания и эксплуатации, а также при регулировании отношений между изготовителями и потребителями в случае оптовых поставок.

В качестве индивидуальных показателей надежности используются наработка до отказа, ресурс до капитального ремонта или описания изделия и т. п., получившие название установленных безотказных наработок, установленных ресурсов и т. п.

Задание требования к установленной безотказной наработке предполагает, что каждое изделие должно иметь наработку до отказа не менее заданной в нормативно-технической документации величины. Если отказ наступает раньше, то данное изделие считается браком по показателю безотказности.

Аналогично этому каждое изделие должно проработать до капитального ремонта или списания не менее, чем определено требованием к установленному ресурсу.

Для восстанавливаемых изделий показатели вероятностно-статистического типа, такие, как вероятность безотказной работы, средние наработки, ресурсы и т. п., могут применяться для нормирования как требований к отдельным изделиям и иметь при этом смысл индивидуальных показателей, так и требований к совокупностям изделий, являясь при этом групповыми показателями.

На основе вероятностно-статистических показателей, трактуемых как индивидуальные показатели, должно рассчитываться предельно допустимое число отказов данного изделия за время гарантийного обслуживания. При превышении данного числа отказов изделие считается браком по показателям типа: вероятности безотказной работы, средней наработки на отказ и т. п. и должно подлежать замене.

Любой индивидуальный показатель типа установленной безотказной наработки или установленного ресурса далее будет обозначаться ξ (с указанием множества J_ξ его возможных значений, т. е. $\xi \in J_\xi$), а индивидуальный и групповой показатель вероятностно-статистического типа, т. е. $R \in J_R$, где J_R — множество возможных значений R .

Примерами R являются вероятность безотказной работы, где J_R — отрезок $[0, 1]$, средняя наработка на отказ, где J_R — множество вещественных положительных чисел.

Требования к показателям ξ и R (нормам) задаются путем указания предельных значений $\xi_{тр}$, $R_{тр}$, выполнение которых является обязательным для организаций-разработ-

чиков и (или) изготовителей продукции.

В задачах нормирования показателей надежности применяются, как правило, односторонние нормы вида $\xi \leq \xi_{тр}$ или $\xi \geq \xi_{тр}$; $R \leq R_{тр}$ или $R \geq R_{тр}$. Характер неравенства определяется физическим смыслом показателя: для наработки, ресурса использования условия вида «не меньше»; для интенсивности отказов — «не больше».

В целях удобства математической обработки данных контрольных испытаний на ЭВМ требования целесообразно записывать в виде соответствующих подмножеств H в множествах значений показателей R и ξ , например:

$$H_R = \{R : R > R_{тр}, R \in J_R\}; \quad (1)$$

$$H_\xi = \{\xi : \xi \leq \xi_{тр}, \xi \in J_\xi\}. \quad (2)$$

Записи (1) и (2) означают, что если R или ξ принадлежат соответственно к H_R или H_ξ , то объекты контроля соответствуют сформулированным к ним требованиям, и наоборот.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ГРУППОВЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ

При проведении контрольных испытаний необходимо четко определить объект контроля и тем самым установить, на какую совокупность (группу, партию) продукции следует распространять требования к надежности и результаты контроля.

На этапе приемочных испытаний опытных образцов показатели надежности следует рассматривать как групповые показатели будущей серийной продукции, надежность которой обусловлена техническими решениями, внесенными в конструкторскую документацию. Опытные образцы являются выборкой из этой совокупности. При проведении квалификационных испытаний установочной партии принимаются решения о готовности производства к серийному изготовлению изделий. Здесь групповые показатели надежности также должны трактоваться как показатели будущей серийной продукции, надежность которой обу-

словлена как конструкторскими, так и технологическими решениями, занесенными в технологическую документацию.

При периодических испытаниях требования к надежности в виде норм на групповые показатели следует трактовать как требования к совокупности изделий, выпускаемых за определенный календарный период. Во всех указанных выше случаях должно проверяться соответствие группового показателя надежности установленному требованию, т. е. условие $R \geq R_{тр}$ ($R < R_{тр}$); при этом значение $R_{тр}$ является единым для всех видов испытаний, если требования не корректировались в процессе создания изделий.

Нормы на групповые показатели $R_{тр}$ должны быть согласованы с нормами на индивидуальные показатели $\xi_{тр}$. Наиболее удобно использовать групповой показатель — допустимая доля изделий, установленные показатели которых не соответствуют индивидуальным нормам.

Если считать установленные показатели разных изделий случайными величинами, то указанный групповой показатель совпадает с вероятностью невыполнения требований к установленным индивидуальным показателям.

Здесь имеется аналогия с показателями качества. На каждое изделие принято задавать индивидуальные требования, т. е. нормировать соответствующие индивидуальные показатели, например геометрические размеры, электрические характеристики, мощность и т. п., задавая соответствующие допуски. При регулировании процессов изготовления продукции используют групповые показатели, такие, как, например, доля дефектных изделий, т. е. доля изделий, не соответствующих требованиям к индивидуальным показателям.

НОМЕНКЛАТУРА ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ

Показатели надежности делятся на единичные, т. е. характеризующие одно из свойств, составляющих надежность изделий, и комплексные показатели надежности, характеризующие не-

1. Номенклатура показателей надежности

Свой-ство надеж-ности	Показатели
Комплексные	
Надеж-ность в целом	Коэффициент сохранения эффективности Коэффициент оперативной готовности Коэффициент технического использования Коэффициент готовности Объединенная удельная продолжительность (трудоемкость) технического обслуживания (ТО) и ремонта Удельная суммарная продолжительность (трудоемкость) технического обслуживания (ремонта) Удельное суммарное время восстановления работоспособного состояния
Единичные	
Безот-каз-ность	Удельная суммарная трудоемкость восстановления работоспособного состояния Вероятность безотказной работы Интенсивность отказов Средняя наработка до отказа Гамма-процентная наработка до отказа Установленная безотказная наработка Средняя наработка на отказ (наработка на отказ) Параметр потока отказов
Ремон-топри-год-ность	Среднее время восстановления работоспособного состояния Вероятность восстановления работоспособного состояния

Продолжение табл. 1

Свой-ство надеж-ности	Показатели
Долго-веч-ность	Средний ресурс
	Гамма-процентный ресурс
	Назначенный ресурс
	Установленный ресурс (ре-сурс)
	Средний срок службы
Сохра-няе-мость	Гамма-процентный срок службы
	Назначенный срок службы
	Установленный срок служ-бы (срок службы)
	Средний срок сохраняемо-сти
	Гамма-процентный срок сохраняемости
	Назначенный срок хране-ния
	Установленный срок сохра-няемости (срок сохраняе-мости)

сколько свойств, составляющих на-дежность изделия. Комплексные пока-затели являются функциями единич-ных показателей.

Примерами единичных показателей являются средняя наработка, среднее время восстановления, средний ре-сурс, вероятность безотказной работы за заданную наработку. Примером комплексных показателей является коэффициент готовности.

Стандартная номенклатура показа-телей надежности приведена в табл. 1.

Данные определения являются по существу своему математическими, в основе их лежат определенные мате-матические модели испытаний и (или) эксплуатации, и при нормировании, и особенно при контроле, прежде всего нужно определить вид этой модели.

КАЧЕСТВЕННЫЕ ТРЕБОВАНИЯ

Этот вид требований устанавливают к конструкционным, производствен-ным и эксплуатационным способам обеспечения надежности.

К конструкционным способам от-носятся требования:

к видам и кратности резервирования, к расположению и связям элементов конструкции;

к ограничению номенклатуры изде-лий и материалов;

к аппаратуре встроенного контроля технического состояния и индикации отказов и т. п.

К производственным способам от-носятся требования:

к организации входного, операцион-ного и приемочного контроля качества комплектующих и сборочных единиц;

к методам испытаний на надежность;

к способам технологического прогно-на изделий;

к производственной дисциплине и т. п.

К эксплуатационным способам обе-спечения надежности относятся требо-вания:

к системе технического обслужива-ния и ремонта;

к составу ЗИП (запасных частей);

к численности и квалификации пер-сонала, обслуживающего и ремонти-рующего изделия;

к системе учета, сбора, обработки и представления информации о надеж-ности изделий.

Проверка выполнения качественных требований осуществляется эксперт-ным путем. Как правило, она выпол-няется в процессе контрольных испы-таний на надежность.

**ВЗАИМОСВЯЗЬ ЗАДАЧ
НОРМИРОВАНИЯ И КОНТРОЛЯ
НАДЕЖНОСТИ**

Требования к надежности и методы контроля являются частью механизма управления надежностью продукции, что обуславливает их взаимосвязь. В этой взаимосвязи существуют два подхода к нормированию надежно-сти.

В рамках первого подхода требова-ния записываются непосредственно в в тех величинах, которые наблюдаются при испытаниях, — в наработке, числе отказов, времени восстановления и т. п.

Например, требования заданы к показателю вида арифметического среднего наработок $\bar{T}$:

$$\bar{T} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i$$

где t_i — наработка до отказа; N — число испытанных изделий.

В этом случае установление нормы $\bar{T} \geq \bar{T}_{\text{ср}}$ одновременно определяет всю процедуру контроля.

Такой способ нормирования обладает высокой конкретностью, обеспечивает определенную воспроизводимость, но приводит к тому, что показатели, построенные для различных процедур контроля, практически становятся несопоставимыми.

Развитие теории надежности привело к широкому применению в качестве показателей надежности таких понятий, как математическое ожидание наработки, ресурс, вероятность безотказной работы и т. п.

В рамках подхода, использующего для нормирования надежности показатели, определенные строго математически, осуществляется разделение задач нормирования и контроля. Это позволяет решать задачи нормирования и контроля надежности на разных уровнях управления. Как правило, нормирование надежности осуществляется в документах государственного уровня — ГОСТах.

Установление конкретных методов и планов контроля при определенных принципах планирования контроля может осуществляться в документах более низкого уровня — программах-методиках испытаний. Разработка, согласование и утверждение программ-методик осуществляется на уровне прямых отношений поставщиков и потребителей, в ряде случаев на отраслевом уровне.

Последний подход позволяет обеспечить разнообразие методов и планов контроля при единых требованиях к надежности продукции. Это дает возможность оптимизировать методы и планы контроля применительно к конкретным условиям изготовителей и потребителей.

Показатели надежности, имеющие смысл математических ожиданий некоторых случайных величин или вероятностей некоторых случайных событий, не могут быть точно определены в процессе контроля и испытаний, вследствие чего решения принимаются на основе их оценок, полученных с той или иной точностью, или первичных данных — наработок, отказов и т. п.

В этой связи возникают вопросы выбора планов контроля, определяющих точность оценок показателей и правильность принятых решений, рассмотрение которых проводится в гл. 5 и 6.

Глава 5. Требования к методам контроля надежности

Экспериментальные методы контроля надежности применяются в процессе контрольных испытаний, проводимых на стадиях разработки, постановки на производство, производства и эксплуатации продукции.

Наиболее часто контроль надежности проводится при приемочных и предварительных испытаниях опытных образцов, а также при периодических испытаниях изделий в условиях установившегося производства.

Достаточно распространен контроль надежности при эксплуатационных испытаниях и в ходе контрольной эксплуатации.

Основной задачей контрольных испытаний на надежность является экспериментальная проверка (в ряде случаев расчетно-экспериментальная) соответствия или несоответствия фактических значений показателей надежности установленным нормам.

В данной главе рассматриваются требования к методам контроля надежности, выдвигаемые с позиций управления надежностью и регулирования отношений между изготовителями (разработчиками) и потребителями (заказчиками) продукции в части надежности продукции.

Одной из форм управления надежностью является применение к изготовителям (разработчикам) определенных санкций, штрафов и т. п., если в процессе контроля надежности будет установлен факт невыполнения норм на показатели надежности.

В основе регулирования отношений между изготовителями и потребителями в сфере надежности продукции лежит следующее правило: продукция, которая по результатам контроля надежности признана несоответствующей нормам надежности, не должна по-

ставляться потребителю, а при обнаружении этого несоответствия потребителем может быть возвращена как нестандартная.

Испытания на надежность имеют много специфических черт, отличающих их от других задач контроля качества продукции. Прежде всего, испытания на надежность, как правило, носят длительный характер, являются весьма дорогостоящими и требуют привлечения квалифицированных специалистов для планирования, организации и проведения испытаний, обработки их результатов и принятия решений. Эти обстоятельства выдвигают дополнительные требования к методам контроля надежности.

ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ

Несмотря на большое разнообразие изделий машиностроения и приборостроения, их испытания на надежность имеют много общего.

Как правило, на испытания ставится несколько экземпляров (образцов) изделий, которые в течение определенного времени испытываются в натуральных (полигонных) или лабораторных (стендовых) условиях.

В последнем случае режимы и условия испытаний могут быть ужесточены по отношению к нормальным (стандартным) с целью сокращения продолжительности испытаний и (или) увеличения количества получаемой информации.

Испытания проводят по определенной программе-методике (ПМ) испытаний, являющейся их организационно-методической основой. ПМ устанавливает план испытаний, методы обработки данных, правила принятия решений.

План испытаний определяет число испытываемых изделий (образцов), продолжительность и (или) критерий прекращения испытаний, число ступеней контроля, характер действий с отказавшими (достигшими предельного состояния) изделиями (образцами) — замена, восстановление и т. п.

Виды и определения конкретных планов контроля надежности даны в [48].

Принятие решений должно осуществляться по определенным правилам, которые с математической точки зрения являются индикаторными (характеристическими) функциями от результатов и планов контроля, принимающими значения 1 или 0. Положительное решение (1) означает соответствие, а отрицательное (0) — несоответствие контролируемых показателей заданным требованиям (нормам).

Выдвигаемые далее требования относятся к организационно-методическим вопросам планирования, обработки данных контроля и принятия решений.

Установление объекта контроля надежности. Эффективность методов контроля и корректность принимаемых решений в значительной мере зависят от четкого определения объектов контроля надежности.

Объектом контроля следует считать всю совокупность продукции, на которую распространяются решения, принимаемые по результатам испытаний.

В гл. 4 приведены объекты контроля для приемочных, квалификационных и периодических испытаний. В зависимости от объекта контроля методы обработки данных испытаний даже одних и тех же видов изделий могут отличаться.

Точность и достоверность результатов испытаний. Точность испытаний на надежность обусловлена двумя факторами. Во-первых, она связана с четкостью и однозначностью критериев отказов, сбоев, восстановления, предельного состояния и т. п.

Во-вторых, точность испытаний определяется объемом статистических данных, полученных в процессе испытаний.

Неоднозначность критериев опре-

деления того или иного состояния изделия делает первичные данные зависимыми от субъективных факторов. Уменьшать указанную неоднозначность следует за счет увеличения четкости формулировок критериев состояний, повышения квалификации испытателей.

Порядок регламентации критериев отказов и предельных состояний в нормативно-технических документах установлен в [48].

Статистические понятия точности и достоверности связаны с понятиями доверительных интервалов, рисков потребителя и изготовителя (поставщика).

В частности, средняя ширина доверительного интервала или среднее отклонение одной из его границ от истинного значения показателя могут служить показателем точности, а уровни доверия и (или) рисков — показателями достоверности. Наиболее часто требования к точности и достоверности испытаний задаются с помощью так называемых приемочного R_α и браковочного R_β уровней надежности и риска поставщика (разработчика, изготовителя) α и потребителя (заказчика) β (см. гл. 6).

При этом β является предельно допустимой вероятностью принятия положительного решения при $R = R_\beta$, а α — предельной вероятностью отрицательного решения при $R = R_\alpha$.

Величины α и β характеризуют достоверность испытаний, а R_α — R_β — их точность.

Вопросы количественного нормирования требований к точности и достоверности испытаний в виде соответствующих рисков, уровней доверия, относительной ширины доверительного интервала и т. п. во многом связаны с требованиями к воспроизводимости результатов контроля надежности.

Воспроизводимость результатов контроля надежности. Поскольку методы контроля надежности являются основой регулирования отношений разработчиков, изготовителей и потребителей в вопросах предъявления претензий к надежности продукции и их разрешения, необходимо потребовать, чтобы методы контроля при пов-

торных результатах контроля тех же самых объектов давали совпадающие решения независимо от того, кто их проводит.

Количественно воспроизводимость результатов контроля описывается так называемой арбитражной характеристикой — вероятностью положительного решения при контроле, организуемом изготовителем, и отрицательного решения при контроле у потребителя, — рассматриваемой как функция показателей надежности и планов контроля.

Методы контроля должны обеспечивать малое значение арбитражной характеристики при любых значениях показателей надежности.

Количественные требования к арбитражной характеристике приведены ниже.

Экономичность испытаний. Как правило, испытания на надежность являются длительными, дорогостоящими процессами. В связи с этим организация испытаний, включая установление их планов, должна обеспечивать минимальные трудовые, энергетические и материальные затраты при ограничениях на их продолжительность и достоверность получаемых результатов. Задачу планирования контрольных испытаний целесообразно ставить как задачу минимизации указанных суммарных затрат при заданных ограничениях на вероятность успешного результата испытаний и ряде других ограничений, обусловленных конкретными обстоятельствами.

Четкость, ясность и однозначность правил, по которым принимаются решения. Учитывая, что решения, принимаемые по результатам контроля надежности, затрагивают интересы различных сторон — разработчиков, изготовителей, потребителей, — правила принятия решений должны иметь простую и ясную форму, не допускать многозначности решений и неопределенности толкований. В противном случае стороны могут не соглашаться с решениями, принятыми другой стороной.

В гл. 6 приводятся основные формы правил принятия решений, в том числе правила, определяемые на основе

доверительных границ для показателей надежности.

Достоверность априорной информации. Как правило, методы обработки результатов испытаний на надежность являются расчетно-экспериментальными, т. е. учитывающими определенные априорные данные. Это могут быть сведения о структуре изделия, о моделях случайных величин, справочные данные о надежности элементов, результаты теоретических исследований и предыдущих испытаний.

Для использования этих сведений необходимо обеспечить оценку их достоверности и взаимное признание всеми заинтересованными сторонами. Последнее достигается путем стандартизации указанных расчетно-экспериментальных методов контроля и согласования используемой исходной информации с соответствующими организациями.

Рациональность структуры документов, регламентирующих испытания. Выполнение указанных выше требований достигается путем регламентации в количественной или качественной форме соответствующих положений в нормативно-технической документации (НТД), а также в рамках систем управления качеством и надежностью изделий.

При регламентации требований к испытаниям следует обеспечить рациональную структуру и объем НТД. Это обусловлено необходимостью сокращения и упорядочения нормативно-технической и методической литературы, темпы роста которой имеют экспоненциальные тенденции.

ТРЕБОВАНИЯ К КОНТРОЛЮ НАДЕЖНОСТИ В ПРОЦЕССЕ ЭКСПЛУАТАЦИИ ИЗДЕЛИЙ

Контроль надежности изделий в процессе их эксплуатации позволяет получить оценку надежности изделий в реальных условиях, в отличие от испытаний, где условия эксплуатации моделируются на соответствующих стендах и (или) полигонах.

Но реальные условия эксплуатации могут отличаться от нормированных (стандартных) условий испытаний, в

расчете на которые создавались изделия, и, кроме того, эксплуатация может осуществляться с нарушениями соответствующих инструкций, например, с использованием топлива более низкого качества, несоблюдением стабильности тока и напряжений источников питания, невыполнением обязательных профилактических работ и т. п.

Эти обстоятельства становятся принципиальными при принятии решений по результатам эксплуатации.

Обеспечение достоверности решений требует осуществления контроля за соблюдением потребителем регламентированных условий эксплуатации.

Наиболее простым способом выполнения данного требования является техническое обслуживание и ремонт, когда предприятие-изготовитель само осуществляет контроль за соблюдением условий эксплуатации. При организации контрольной эксплуатации следует предусматривать специальные методы обеспечения достоверности данных о надежности и методы контроля за соблюдением инструкций по эксплуатации изделий.

АРБИТРАЖНАЯ КОРРЕКТНОСТЬ ПРОЦЕДУР КОНТРОЛЯ

Рассматривается двоякая процедура контроля надежности изделий: контроль, организуемый поставщиком, например, при периодических испытаниях, и контроль, организуемый заказчиком (потребителем), например, при входном контроле или в процессе контрольной эксплуатации.

Контроль изготовителем (поставщиком) проводится по плану с параметрами $\rho_{\text{и}} \in J_{\rho}$; контроль потребителем (заказчиком) — по плану с параметрами $\rho_{\text{з}} \in J_{\rho}$ [$\rho_{\text{и}}, \rho_{\text{з}}$ — векторы, например: $\rho_{\text{и}} = (N, T)$; $\rho_{\text{з}} = (N, r, T)$, где N — число изделий; T — продолжительность испытаний; r — предельное число отказов, по достижении которого испытания прекращают].

Множество допустимых планов J_{ρ} определяется физическими возможностями методов и ограничениями, установленными в НТД.

Результаты испытаний на надежность, как правило, считаются векторной случайной величиной X^{ρ} . При плане $[NUN]$ $X^{\rho} = (X_1, X_2, \dots, X_N)$, при плане $[NUT]$ $X^{\rho} = (X_1, X_2, \dots, X_r, r)$, где $X_1, X_2, \dots, X_r$ — наработки r изделий, отказавших за продолжительность T . Аналогично записывается X^{ρ} для других планов контроля.

Правила принятия решений о соответствии или несоответствии продукции требованиям к надежности записываются в виде индикаторной функции $\chi(X^{\rho}, \rho)$, где χ принимает значения 1 (соответствие) или 0 (несоответствие).

Случайная величина X имеет распределение $F(x, R)$, где $R \in J_R$ — параметр распределения (является показателем надежности); J_R — априорное множество возможных значений R .

На показатель R задано требование $R \geq R_{\text{тр}}$ или, что то же самое, задано подмножество H_R :

$$H_R = \{R : R \geq R_{\text{тр}}, R \in J_R\}.$$

Арбитражная характеристика $A(R, \rho_{\text{и}}, \rho_{\text{з}})$ определяется следующим образом:

$$A(R, \rho_{\text{и}}, \rho_{\text{з}}) = E_R [\chi_{\text{и}}(X^{\rho_{\text{и}}}) (1 - \chi_{\text{з}}(X^{\rho_{\text{з}}}))], \quad (1)$$

где $E_R [\cdot]$ — знак математического ожидания; $\chi_{\text{и}}(\cdot)$, $\chi_{\text{з}}(\cdot)$ — функции, определяющие правила принятия решений соответственно у поставщика (изготовителя) и потребителя (заказчика), т. е. арбитражная характеристика является зависимостью вероятности принять решение 1 (или 0) от показателя надежности (качества) R и параметров планов контроля $\rho_{\text{и}}$ (для изготовителя) и $\rho_{\text{з}}$ (для заказчика).

При независимости результатов контроля у поставщика и потребителя

$$A(R, \rho_{\text{и}}, \rho_{\text{з}}) = L(R, \rho_{\text{и}}) [1 - L(R, \rho_{\text{з}})],$$

где $L(R, \rho_{\text{и}})$, $L(R, \rho_{\text{з}})$ — семейства оперативных характеристик планов

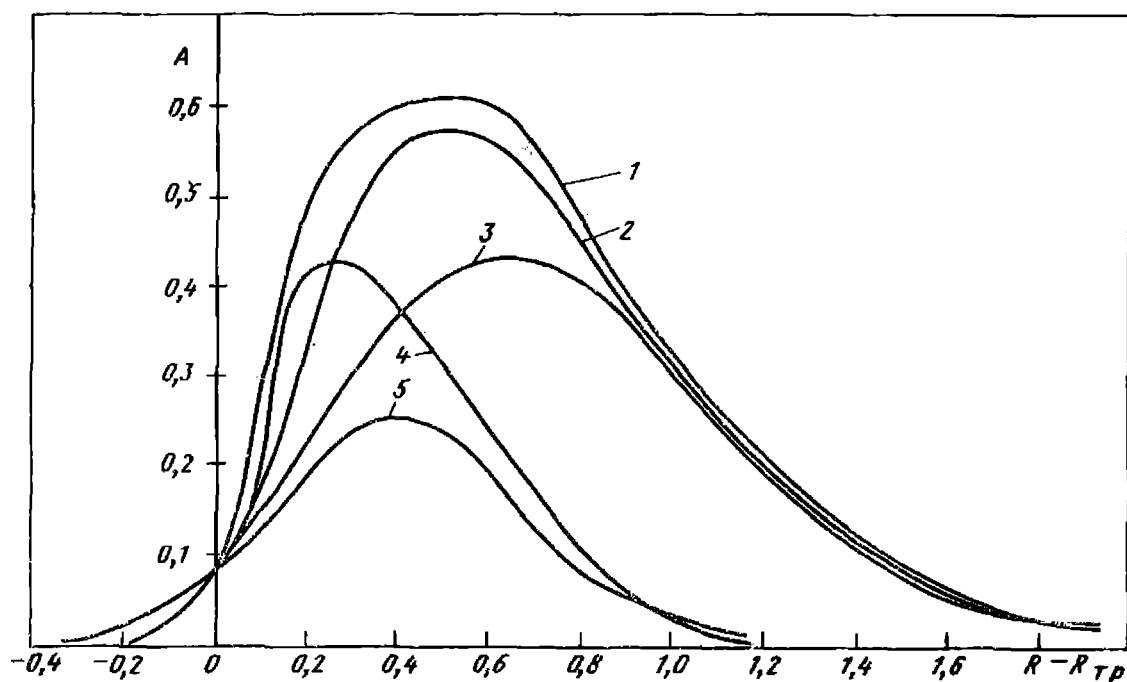


Рис. 1. Арбитражные характеристики для единых правил принятия решений по НДГ уровня $\gamma = 0,9$ ($v = 0,9$) и разных объемов контроля у изготовителя и у заказчика:

1 — $n_{\text{и}} = 50$; $n_{\text{з}} = 3$; 2 — $n_{\text{и}} = 25$; $n_{\text{з}} = 3$; 3 — $n_{\text{и}} = 10$; $n_{\text{з}} = 3$; 4 — $n_{\text{и}} = 50$; $n_{\text{з}} = 10$; 5 — $n_{\text{и}} = n_{\text{з}} = 10$

контроля соответственно у изготовителя и заказчика (см. гл. 6).

В случае возникновения арбитражной ситуации ($\chi_{\text{и}} = 1$; $\chi_{\text{з}} = 0$) потенциально возможен спор между сторонами в отношении надежности (качества) продукции и его арбитражное рассмотрение. Методы контроля в соответствии с изложенным выше должны обеспечивать малую вероятность возникновения арбитражной ситуации. Процедуры контроля арбитражно корректны, если

$$A(R, \rho_{\text{и}}, \rho_{\text{з}}) \leq q; \quad \forall R \in J_R; \\ \forall \rho_{\text{и}} \rho_{\text{з}} \in J_{\rho}, \quad (2)$$

где q — малое, наперед заданное число.

Величина q устанавливается на основе анализа возможностей проведения арбитража соответствующими органами. Практически при $q \lesssim 10^{-2}$ и обеспечении требования арбитражной корректности (2) доля возможных разногласий из-за невоспроизводимости результатов контроля будет несущественной на фоне других причин, вызывающих необходимость арбитража.

Арбитражная корректность мето-

дов контроля обеспечивается путем регламентации правил принятия решений и планов контроля в соответствующих документах.

Если выбор конкретных планов $\rho_{\text{и}}$ и $\rho_{\text{з}}$ не регламентирован и стороны определяют их значения индивидуально из J_{ρ} (здесь значение J_{ρ} обусловлено ограничениями физической природы), а правила принятия решений регламентированы и едины, т. е. $\chi_{\text{и}}(x_{\text{и}}; \rho_{\text{и}}) = \chi_{\text{з}}(x_{\text{з}}; \rho_{\text{з}})$ (при $x_{\text{и}} = x_{\text{з}}$ и $\rho_{\text{и}} = \rho_{\text{з}}$), то

$$\bar{A} = \max_{R \in J_R; \rho_{\text{и}} \text{ и } \rho_{\text{з}} \in J_{\rho}} A(R, \rho_{\text{и}}, \rho_{\text{з}}) \geq 0,5 \quad (3)$$

и при определенных условиях $\bar{A}$ может достигать значений, близких к единице.

На рис. 1 показаны арбитражные характеристики для единых правил у изготовителя и заказчика, но при разных объемах испытаний. Расчеты выполнены для правил следующего вида:

$$\chi(x^0, \rho) = \begin{cases} 1, & \underline{R}_{\gamma}(x^0) \geq R_{\text{Тр}}; \\ 0, & \underline{R}_{\gamma}(x^0) < R_{\text{Тр}}; \end{cases} \quad (4)$$

где $R_\gamma(x^p)$ — нижняя доверительная граница (НДГ) уровня γ для показателя надежности R .

При расчете арбитражных характеристик выбран план $[NUN]$ ($\rho = N$) и принято нормальное распределение X с единичной дисперсией $\sigma^2 = 1$, а в качестве R рассматривается математическое ожидание X .

В случае, когда едины и правила (в указанном выше смысле) и планы $\rho_H = \rho_3$, т. е. методики контроля полностью идентичны у изготовителя и заказчика, $\bar{A} = 0,25$ для всех $\rho_H = \rho_3 \in J_\rho$.

Это говорит о том, что невозможно обеспечить арбитражную корректность процедур контроля при единых (для изготовителя и заказчика) ρ и $\chi(\cdot)$, т. е. при стандартизованных правилах принятия решений и планах контроля.

При учете смещения результатов контроля, осуществляемого изготовителями или заказчиками в пределах неопределенности трактовки критериев отказа, предельных состояний и т. п. или в пределах применения измерительных средств с соответствующей систематической погрешностью, величина A при единых планах и правилах может достигать значений порядка 0,5 и выше. Это видно из рис. 2, где показаны арбитражные характеристики для нормальной случайной величины с дисперсией $\sigma^2 = 1$ и различных систематических смещений Δ (кривые 1, 2). При расчете кривых считается, что смещение Δ результатов контроля у изготовителя и заказчика одинаково по величине, но имеет разные знаки.

Если у изготовителя и заказчика использовать разные правила, для которых выполняются ограничения

$$\begin{aligned} P_R, \rho_H(\chi_H = 1) &\leq \beta, \quad \forall R \notin H_R, \\ \forall \rho_H \in J_\rho; \\ P_R, \rho_3(\chi_3 = 0) &\leq \alpha, \quad \forall R \in H_R, \\ \forall \rho_3 \in J_\rho, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\bar{A} \leq \max\{\alpha, \beta\} \quad \forall \rho_H, \rho_3 \in J_\rho,$$

где α и β — риск соответственно поставщика и потребителя.

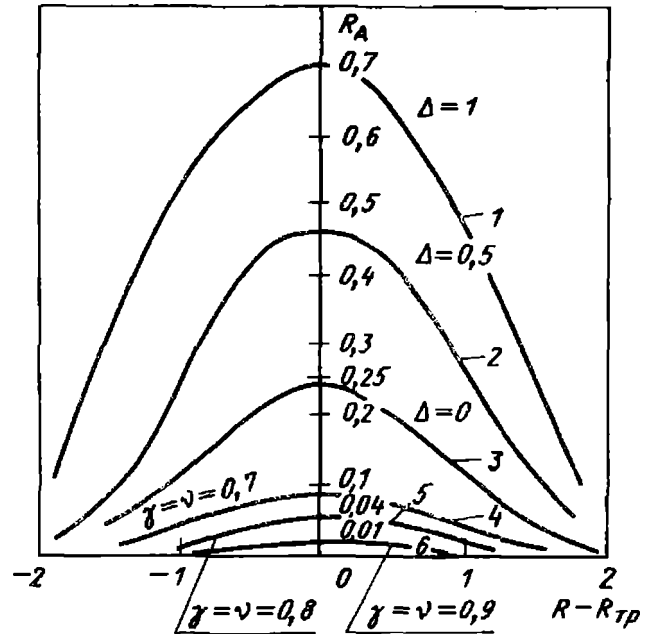


Рис. 2. Арбитражные характеристики для различных правил принятия решений:

1—3 соответствуют единым правилам $\chi_H(x, \rho) = \chi_3(x, \rho) =$

$$= \begin{cases} 1, & \bar{x} \geq R_{Tp}, \\ 0, & \bar{x} < R_{Tp} \end{cases} \quad \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

и планам контроля $\rho_H = \rho_3$ при наличии преднамеренного смещения; 4—6 соответствуют правилам на основе ПРП (см. гл. 6) для уровней доверия $P_H = \gamma$ и $P_3 = 1 - \gamma$

Последнее неравенство показывает, что если выполнены ограничения на риски для соответствующих (разных) правил, то выбором соответствующих α и β можно обеспечить арбитражную корректность процедур контроля без регламентации планов контроля ρ_H , ρ_3 , и предоставляя свободу выбора планов той стороне, которая организует контроль.

На рис. 2 показаны также арбитражные характеристики для различных правил принятия решений (кривые 4—6), удовлетворяющих условиям (5) при нормальном распределении с дисперсией, равной единице. В гл. 6 изложен подход, позволяющий обеспечить арбитражную корректность. Согласно этому подходу нужно регламентировать требования в виде (5) только на правила принятия решений, а планы испытаний могут свободно устанавливаться стороной, планирующей испытания.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОЦЕДУР КОНТРОЛЯ

Выбор планов контроля влияет на характеристики точности контроля. В частности, увеличение объемов испытаний приводит к повышению точности контроля, и наоборот. Правила принятия решений и подходы к планированию контроля при определенных обстоятельствах могут стимулировать поставщиков или потребителей стремиться к уменьшению точности испытаний.

Пусть применяются правила принятия решения вида (4). В случае, когда контроль надежности и выбор плана контроля осуществляет потребитель, ему выгодно устанавливать минимальные объемы испытаний, так как при этом его затраты на испытания минимальны, а правило (4) ужесточается.

Последнее заставляет изготовителя увеличивать запас по надежности изделий с тем, чтобы с достаточно высокой вероятностью сдавать продукцию.

Для нормального распределения X запас по надежности

$$R - R_{\text{тр}} = (Z_{1-\alpha} + Z_{\gamma}) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad (6)$$

где $1 - \alpha$ — вероятность получения положительного решения; $Z_{1-\alpha}$ и Z_{γ} — квантили стандартного нормального распределения соответственно для уровней $1 - \alpha$ и γ ; σ — среднее квадратическое отклонение. Здесь $R - R_{\text{тр}}$ максимален при $n = 1$.

При применении правил принятия решений вида

$$\mathbb{I}(x^0, \rho) = \begin{cases} 1, & \bar{R}_v(x, \rho) \geq R_{\text{тр}}; \\ 0, & \bar{R}_v(x, \rho) < R_{\text{тр}} \end{cases} \quad (7)$$

в широком диапазоне случаев изготовителю становится выгодно использовать минимальные объемы испытаний, так как при прочих равных условиях это приводит к увеличению вероятности приемки продукции.

Следовательно, если у изготовителя и потребителя применяются единые правила принятия решений вида (4) или (7) и при этом стороны могут определять планы испытаний самостоятельно, то хотя бы одной стороне становится выгодным уменьшать точность испытаний.

Требование устойчивости процедур контроля надежности состоит в том, чтобы примененные подходы к планированию контроля и правила принятия решений не побуждали ни одну из сторон (ни изготовителя, ни заказчика, ни любую третью контролируемую организацию) уменьшать точность (увеличивать неопределенность) контроля.

Обеспечение устойчивости процедур контроля возможно, если применять различные правила принятия решений при контроле поставщиком и при контроле потребителем. В частности, если у поставщика применять правила (4), а у потребителя — правила (7) (при требованиях $R \geq R_{\text{тр}}$), то при достаточно больших γ и ν обе стороны заинтересованы повышать точность контроля (см. гл. 6).

Глава 6. Принцип распределения приоритетов — организационно-методическая основа контроля надежности (качества) продукции

Принцип распределения приоритетов (ПРП) устанавливает порядок планирования контроля качества и надежности продукции и требования к правилам принятия решений, включая методы обработки данных контроля.

ПОДХОДЫ К ПЛАНИРОВАНИЮ КОНТРОЛЯ НАДЕЖНОСТИ

В теории и практике контроля показателей надежности (качества) продукции известно несколько подходов к планированию контроля, построению правил принятия решений, обработке данных. Некоторые из них стандартизованы.

Наибольшее распространение получил подход на основе задания в качестве исходных данных двух уровней (браковочного и приемочного) и двух рисков: поставщика (изготовителя) и потребителя (заказчика), далее он будет называться двухуровневым.

Математически двухуровневый подход соответствует определению множества допустимых планов контроля J_p на основе следующих соотношений:

$$\left. \begin{aligned} P(\chi(x^p, \rho) = 1/R = R_\alpha) &\geq 1 - \alpha \\ P(\chi(x^p, \rho) = 1/R = R_\beta) &\leq \beta \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где $P(\chi(x^p, \rho) = 1/R = R_\alpha)$ — вероятность принять решение $\chi = 1$ при условии, что $R = R_\alpha$; $P(\chi(x^p, \rho) = 1/R = R_\beta)$ — то же, при условии, что $R = R_\beta$; x^p — результаты контроля, полученные по плану $\rho \in J_p$; $\chi(x^p, \rho)$ — правило принятия решений.

В целом планы контроля совместно с правилами принятия решений принято характеризовать семействами оперативных характеристик $L(R, \rho)$, которые определяются как зависимость вероятности принять решение $\chi(x^p, \rho) = 1$ от показателей надежности R и планов контроля ρ [38], т. е.

$$L(R, \rho) = P_{R, \rho}(\chi(x, \rho) = 1). \quad (2)$$

Ограничения на риски (1) определяют также допустимый класс оперативных характеристик, соответствующих множеству допустимых планов J_p .

Так, для случая равенства в ограничениях (1) оперативные характеристики (если они существуют при этом) должны проходить через точки $\{R_\alpha, \alpha\}$ и $\{R_\beta, \beta\}$. В общем случае семейства оперативных характеристик должны проходить не выше точки $\{R_\beta, \beta\}$ и не ниже точки $\{R_\alpha, \alpha\}$ (рис. 1). Сплошная линия соответствует оперативной характеристике, проходящей через точки $\{R_\alpha, \alpha\}$, $\{R_\beta, \beta\}$, штриховые линии — допустимым оперативным характеристикам.

Из множества допустимых планов J_p , определяемого условиями (1), выбирается план, соответствующий некоторому критерию оптимальности, например минимальности объема или минимальной средней продолжительности испытаний.

В табл. 14 приложения приведены планы, соответствующие минимальному объему испытаний при определенных значениях $R_\alpha, R_\beta, \alpha, \beta$.

Применение двухуровневого подхода на практике встречает ряд орга-

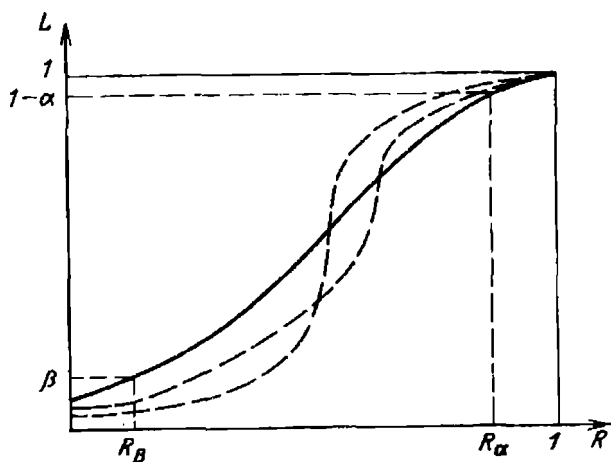


Рис. 1. Примеры оперативных характеристик из допустимого класса при двухуровневом подходе к планированию контроля надежности

низационно-методических трудностей, обусловленных тем, что он не устанавливает, как связаны R_β , R_α и $R_{тр}$.

Существует несколько точек зрения на этот вопрос. Часто предлагается (как основное правило) $R_{тр}$ совмещать с R_β , а в ряде других случаев устанавливать $R_{тр} = R_\alpha$ или располагать R_β и R_α таким образом, чтобы R было между ними [24].

Отсутствие единства в этом вопросе порождает отсутствие единства в стандартных методах контроля, применяемых на практике, и может привести к невоспроизводимости результатов контроля.

Достаточно широкое распространение получил также подход, основанный на задании ограничений на один риск — риск потребителя

$$P(\chi(x^p, \rho) = 1/R = R_\beta) \leq \beta. \quad (3)$$

Ограничение (3) определяет множество допустимых планов, из которых конкретный план выбирается на основе технико-экономических критериев оптимальности.

Применение последнего подхода предполагает обычно использование правил принятия решений на основе сопоставления доверительных границ для показателя R с $R_{тр}$ или R_β .

Ограничение (3) часто дополняется правилом принятия решений, например, вида

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x = 0; \\ 0, & x > 0, \end{cases} \quad (4)$$

где x — число отказов в течение заданной наработки.

В этом случае из ограничения (3) можно получить конкретный план.

В рамках данного подхода также остается открытым вопрос о соотношении R_β и $R_{тр}$, хотя на практике их часто совмещают.

Кроме указанных подходов, существуют так называемые байесовские подходы, которые используют априорные распределения показателей R , а в качестве критерия оптимальности применяют минимум апостериорных функций средних потерь, включающих затраты на испытания и средние потери от ошибочных решений.

Применение байесовских подходов к планированию контрольных испытаний на практике наталкивается на определенные трудности, связанные со сложностью отыскания априорного распределения.

Ниже излагается подход, позволяющий выполнить выдвинутые в гл. 5 требования к методам контроля; он дает возможность также уточнить сферу и порядок применения рассмотренных выше подходов.

Основу подхода составляет принцип распределения приоритетов (ПРП) между поставщиком (изготовителем, разработчиком) и потребителем (заказчиком) продукции, который устанавливает организационно-методические основы контроля качества и надежности продукции. ПРП является альтернативой принципу применения единых методов, планов контроля и единых правил принятия решений у всех сторон, проводящих контроль данной продукции (у поставщика, потребителя, контролирующих органов).

Единство методов, планов и правил возможно обеспечить путем их жесткой регламентации, что связано с большими затратами, но не приводит к радикальному решению проблемы обеспечения воспроизводимости результатов контроля (см. гл. 5).

ПРП позволяет обеспечить единство и воспроизводимость (взаимное при-

знание) решений, принимаемых по результатам контроля, при свободном выборе методов и планов контроля теми сторонами, которые организуют и проводят контроль.

ФОРМУЛИРОВКИ ПРИНЦИПА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИОРИТЕТОВ

Для формулировки ПРП необходимо уточнить понятие неопределенности (неоднозначности) результатов контроля.

Данное понятие является обобщением понятий неточность, погрешность и т. п.; оно отражает явление невоспроизводимости результатов при повторных испытаниях. При контроле показателей, определяемых численно, неопределенность результатов контроля учитывается путем представления их в виде некоторого множества численных значений. Это множество прогнозирует возможные результаты повторных процедур контроля.

Примерами таких множеств являются доверительные интервалы или интервалы, полученные смещением результата точечного измерения показателя в сторону его уменьшения и увеличения на соответствующие величины погрешностей.

Конкретное представление неопределенности результатов контроля (измерений, испытаний) зависит от вида применяемой шкалы измерений (возможны: абсолютная шкала, шкала отношений, интервалов и т. д.), от свойств повторных экспериментов, от способа формирования выборки (например, случайный равновероятный или преднамеренный отбор изделий в выборку) и т. п.

Ниже дается несколько формулировок ПРП.

Первая формулировка носит концептуальный характер, она приводится без применения математических понятий и количественного описания неопределенности результатов контроля, так как сфера применения ПРП распространяется и на контроль по качественным признакам, например, органолептическими методами.

Концептуальная формулировка ПРП. При организации и планировании контроля качества и надежности про-

дукции между сторонами — поставщиком (разработчиком, изготовителем) и потребителем (заказчиком) — устанавливаются следующие приоритеты.

1. Сторона (поставщик или потребитель), которой поручено организовать контроль или организующая его самостоятельно, получает право в одностороннем порядке выбирать методики контроля, включая планы и средства контроля из числа аттестованных, т. е. имеющих установленные характеристики неопределенности (неоднозначности) результатов контроля.

2. При принятии решений неопределенность результатов контроля трактуется в пользу противоположной стороны.

3. Регламентацию положений 1 и 2, включая установление характеристик неопределенности и вида правил принятия решений, аттестацию методик контроля, надзор за соблюдением положений 1 и 2, а также арбитраж в случае разногласий в отношении результатов контроля осуществляют специальные государственные или ведомственные органы, а в рамках международных отношений — соответствующие международные организации.

Данная формулировка уточняется в зависимости от того, кто проводит контроль — поставщик или потребитель.

При приемочном контроле, контрольных испытаниях, в том числе на надежность, проводимых поставщиком, право выбора средств, методик и планов контроля получает последний, а неопределенность относится в пользу потребителя. При входном контроле или эксплуатационном контроле (испытаниях) приоритеты меняются местами.

В определенном смысле ПРП возлагает обязанность доказывать соответствие качества и надежности продукции установленным требованиям на ее разработчиков и изготовителей (поставщиков). При этом, если потребители продукции считают целесообразным проводить свой контроль качества и надежности, то от них, в случае предъявления претензий к поставщикам, требуется доказатель-

ство несоответствия продукции требованиям к ее качеству. Но в обоих случаях выбор методов, средств и планов контроля осуществляет сторона, на которую возложено «бремя доказывания».

Конструктивное изложение принципа связано с регламентацией структуры (общего вида) правил принятия решений о соответствии или несоответствии объектов контроля предъявляемым к ним требованиям, с уточнением степеней свободы при выборе методов, средств и планов контроля, а также порядка, правил и методов установления характеристик неопределенности, точности, воспроизводимости, достоверности контроля.

Структура (общий вид) правила принятия решений считается заданной, если задается зависимость принимаемых решений от результатов и планов контроля, а также от характеристик точности, воспроизводимости и достоверности методов контроля.

Конкретное правило устанавливает зависимость решений только от результатов контроля; точностные характеристики методов и планы контроля в этом случае должны иметь численные значения.

Для показателей качества и надежности, определяемых количественно, в соответствии с ПРП применяются две формы построения правил принятия решений.

Первая (основная) форма учитывает неопределенность результатов контроля путем обработки и представления их в виде подмножеств во множестве значений показателей качества и надежности продукции, для скалярного показателя — в виде интервалов с заданным уровнем достоверности, включающих в себя истинное значение показателя. Указанные интервалы получили название интервалов неопределенности (ИН). Частным случаем ИН являются доверительные интервалы.

Правило принятия решений строится на основе сопоставления полученного по результатам контроля ИН с границами требований к качеству и надежности (допусков).

Вторая (допустимая) форма учитывает неопределенность результатов

контроля путем пересчета требований к непосредственно измеряемым характеристикам — точечным оценкам показателей качества и надежности — и соответствующего сужения или расширения границ допусков (построения приемочных допусков).

Конструктивная формулировка ПРП (для одномерных показателей качества и надежности и первой формы построения правил принятия решений). 1. При контроле, организуемом поставщиком, решение о соответствии принимается, если построенный по результатам контроля ИН включается в интервал требуемых значений соответствующего показателя (в допуск), который устанавливается в стандартах, ТЗ или ТУ. Если хотя бы одна из границ выходит за пределы интервала требуемых значений (допуска), то принимается решение о несоответствии.

2. При контроле, организуемом потребителем, решение о несоответствии принимается, если ИН не имеет общих точек с интервалом требуемых значений. При наличии у них хотя бы одной общей точки принимается решение о соответствии.

3. Выбор методик контроля в первом случае осуществляет поставщик, а во втором — потребитель.

Выбранная методика должна удовлетворять единственному требованию: результаты контроля, полученные с ее помощью, должны быть представлены в виде ИН.

Последнее требование выполняется, если методика контроля аттестована. Аттестацию методик контроля должны осуществлять органы стандартизации.

Аттестация методик измерений и испытаний, используемых при контроле, состоит в установлении их предельных погрешностей и периодической поверки, осуществляемой специальными службами.

Аттестация выборочных статистических методов контроля состоит в установлении методик расчетов доверительных интервалов или соответствующих рисков (поставщика, потребителя), а в общем случае — оперативных характеристик планов контроля.

На рис. 2 показаны возможные случаи взаимосвязи результатов контроля в виде ИН и требований к качеству продукции.

В ситуациях, соответствующих рис. 2, а и б, решения принимаются однозначно:

для случая, показанного на рис. 2, а, следует принять решение о соответствии показателя качества установленным требованиям, независимо от того, кто проводил контроль. Здесь практически достоверно, что истинное значение показателя качества (надежности) лежит внутри допуска;

для случая, показанного на рис. 2, б, следует принять решение о несоответствии, также независимо от того, кто проводил контроль, так как истинное значение показателя, что также достоверно, находится вне допуска.

Ситуации, показанные на рис. 2, в и г, имеют неоднозначный характер: истинное значение показателя качества (надежности) может находиться как внутри, так и вне допуска.

ПРП уточняет правила принятий решений для последних двух случаев: при контроле, организуемом поставщиком, следует принять решение о несоответствии, а при контроле, организуемом потребителем, — решение о соответствии качества (надежности) продукции заданным требованиям, т. е. сторона, организующая контроль, должна относить неопределенность результатов в пользу противоположной стороны.

Во многих практических случаях контрольные испытания проводятся поставщиком и потребителем совместно. Причем анализ результатов испытаний и принятие решений осуществляется, как правило, специальными комиссиями, куда входят представители всех заинтересованных сторон.

В соответствии с сформулированным выше принципом при проведении совместного контроля, независимо от его формы, должна быть выделена сторона, ответственная за организацию контроля, которая получает приоритет в выборе методов, средств и планов контроля (испытаний); решения принимаются по правилам ПРП.

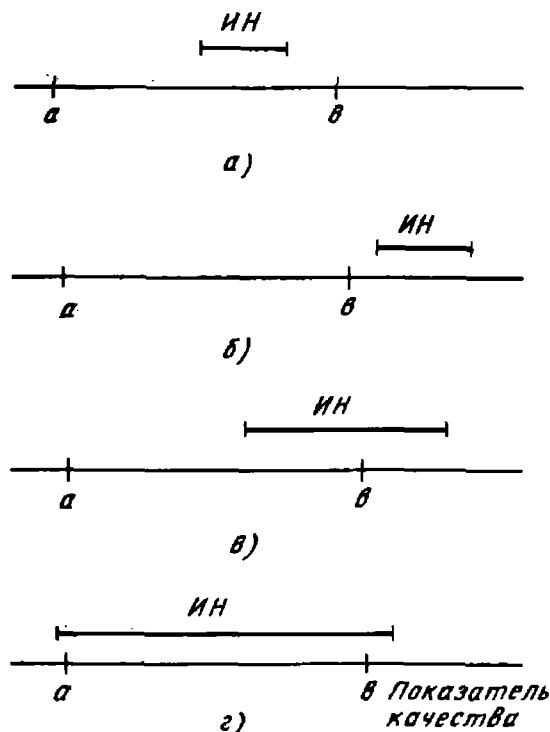


Рис. 2. Возможные соотношения результатов контроля, представленных ИН, и требований к качеству в виде двустороннего допуска $[a, в]$

Так, при проведении приемочных испытаний приоритет выбора методов, средств и планов испытаний должен принадлежать разработчику, а при проведении квалификационных, периодических и приемосдаточных испытаний, приемочного контроля — изготовителю. Проведение испытаний может осуществляться совместно несколькими сторонами.

При арбитражном (повторном) проведении контроля качества продукции третьей стороной по ПРП контроль должен проводиться по методике стороны, обратившейся в арбитраж; при этом неопределенность результатов контроля относится в пользу противоположной стороны.

СТРУКТУРЫ ПРАВИЛ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

В соответствии с ПРП единство и воспроизводимость решений, принимаемых по результатам контроля, обеспечиваются путем регламентации структуры (общего вида) правил принятия решений.

С математической точки зрения структурой правила принятия решений является индикаторная функция от результатов контроля, характеристик их методов и планов контроля.

По ПРП устанавливаются две единые структуры: для контроля, организуемого поставщиком (изготовителем, разработчиком), и контроля, организуемого потребителем (заказчиком). Последняя структура должна применяться также при контроле, проводимом специальными контролирующими органами.

Запись структур правил принятия решений может быть осуществлена в двух приводимых ниже формах: первой (основной) и второй (допустимой).

Обработка данных контроля (испытаний) для основной формы записи правил принятия решений. Пусть в результате контроля (испытаний) продукции, проведенного по плану ρ , получены наблюдения X^{ρ} , где X^{ρ} — в общем случае вектор или матрица. Обработка данных контроля осуществляется на основе модели, устанавливающей связь между наблюдениями X^{ρ} и показателем качества (надежности) R .

Данная модель зависит от методики измерения или испытания, правила отбора изделий в выборку и т. п.

При контроле индивидуальных показателей качества широкое распространение имеют модели неопределенных величин, например, следующего вида:

$$|x - R| \leq \Delta(R), \quad (5)$$

где x — результат измерения (число); R — контролируемый показатель качества; $\Delta(R)$ — абсолютная погрешность измерения, зависящая от измеряемой величины R .

На практике, как правило, используют зависимости $\Delta(R) = \Delta$ или $\Delta(R) = \delta R$, где δ — относительная погрешность измерения.

Обработка данных контроля для двух последних случаев состоит в построении интервалов $[x - \Delta, x + \Delta]$ или $[x/(1 + \delta), x/(1 - \delta)]$, которым R принадлежит достоверно, т. е.

$$P(x - \Delta \leq R \leq x + \Delta) = 1;$$

$$P\left(\frac{x}{1 + \delta} \leq R \leq \frac{x}{1 - \delta}\right) = 1.$$

При проведении n повторных измерений строится пересечение интервалов, полученных на основе отдельных измерений x :

$$\max_{1 \leq i \leq n} x_i - \Delta, \quad \min_{i \in \overline{1, n}} x_i + \Delta$$

или

$$\max_{1 \leq i \leq n} x_i/(1 + \delta), \quad \min_{i \in \overline{1, n}} x_i/(1 - \delta).$$

При этом R достоверно принадлежит этим интервалам.

При выборочном контроле групповых показателей надежности и качества продукции обычно считается, что наблюдения являются реализациями случайных величин X с функцией распределения $F(x; R) = P_R(X \leq x)$, параметр которой является соответствующим показателем качества или его функцией.

В этом случае обработка данных контроля x^{ρ} , полученных по плану ρ , состоит в построении доверительных интервалов (множеств) $G(x^{\rho}, \rho)$, накрывающих истинное значение R с доверительной вероятностью (достоверностью), не меньшей γ :

$$P_R(R \in G(x^{\rho}, \rho)) \geq \gamma. \quad (6)$$

На практике могут иметь место ситуации, когда для установления связи между наблюдениями и показателями качества (надежности) следует применять комбинации указанных выше моделей.

В общем случае обработка должна состоять в построении интервала неопределенности (подмножества) $G(x^{\rho}, \rho)$, который с достоверностью, не меньше наперед заданной величины γ , накрывает R .

Структура правил принятия решений. Основная форма записи. В случае контроля, планируемого и организуемого поставщиком,

$$\chi_{\pi}(x^{\rho_{\pi}}, \rho_{\pi}) =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{если } G(x^{\rho_{\pi}}, \rho_{\pi}) \subset H_R; \\ 0, & \text{если } G(x^{\rho_{\pi}}, \rho_{\pi}) \not\subset H_R. \end{cases} \quad (7)$$

где H_R — требования к качеству (надежности) продукции, например $H_R = \{R : R \geq R_{\text{тр}}, R \in J_R\}$, т. е. решение о соответствии $\chi = 1$ принимается, если множество $G(x^{\rho_H}, \rho_H)$ включается во множество требуемых значений показателей надежности (является подмножеством) H_R ; решение о несоответствии $\chi_H = 0$ принимается, если $G(x^{\rho_H}, \rho_H)$ не включается в (не является подмножеством) H_R ;

в случае контроля, планируемого и организуемого потребителем (заказчиком),

$$\chi_3(x^{\rho_3}, \rho_3) = \begin{cases} 1, & \text{если } G(x^{\rho_3}, \rho_3) \cap H_R \neq \emptyset; \\ 0, & \text{если } G(x^{\rho_3}, \rho_3) \cap H_R = \emptyset, \end{cases} \quad (8)$$

т. е. решение $\chi_3 = 1$ принимается, если пересечение множеств $G(x^{\rho_3}, \rho_3)$ и H_R не пусто (имеет общие элементы); решение $\chi_3 = 0$ принимается, если пересечение $G(x^{\rho_3}, \rho_3)$ и H_R пусто. Правила $\chi_H(x^{\rho_H}, \rho_H)$ и $\chi_3(x^{\rho_3}, \rho_3)$ различны, что подчеркнуто соответствующими индексами.

Уровни достоверности в правилах (7) и (8) могут не совпадать.

Для требований к надежности вида $H_R = \{R : R \geq R_{\text{тр}}, R \in J_R\}$ правила (7) и (8) соответственно имеют вид (см. рис. 1):

$$\chi_H(x^{\rho_H}, \rho_H) = \begin{cases} 1, & \text{если } \underline{R}_\gamma(x^{\rho_H}, \rho_H) \geq R_{\text{тр}}; \\ 0, & \text{если } \underline{R}_\gamma(x^{\rho_H}, \rho_H) < R_{\text{тр}}, \end{cases} \quad (9)$$

где $\underline{R}_\gamma(x^{\rho_H}, \rho_H)$ — нижняя доверительная граница для уровня γ ;

$$\chi_3(x^{\rho_3}, \rho_3) = \begin{cases} 1, & \text{если } \bar{R}_\gamma(x^{\rho_3}, \rho_3) \geq R_{\text{тр}}; \\ 0, & \text{если } \bar{R}_\gamma(x^{\rho_3}, \rho_3) < R_{\text{тр}}, \end{cases} \quad (10)$$

где $\bar{R}_\gamma(x^{\rho_3}, \rho_3)$ — верхняя доверительная граница для R уровня γ .

Допустимая форма записи правил принятия решений. При контроле индивидуальных показателей качества и модели (5) правилу (6) эквивалентны правила, полученные сужением допуска при контроле поставщиком и расширением допуска при контроле потребителем; положительное решение принимается, если x попадает в построенный допуск.

Для $\Delta(R) = \Delta$ границы допуска смещаются на величину Δ . Для $\Delta(R) = \delta R$ при контроле поставщиком нижняя граница допуска увеличивается в $(1 + \delta)$ раз, а верхняя — уменьшается в $(1 - \delta)^{-1}$ раз; при контроле потребителем нижняя граница допуска уменьшается в $(1 - \delta)^{-1}$ раз, а верхняя — увеличивается в $(1 + \delta)$ раз.

При выборочном статистическом контроле правила могут быть записаны на языке, принятом в теории проверки статистических гипотез, где устанавливается подмножество $D(\rho, H_R)$ в пространстве наблюдений x^ρ :

$$\chi_H(x^{\rho_H}, \rho_H) = \begin{cases} 1, & \text{если } x^{\rho_H} \in D_H(\rho_H, H_R); \\ 0, & \text{если } x^{\rho_H} \notin D_H(\rho_H, H_R), \end{cases} \quad (11)$$

$$\chi_3(x^{\rho_3}, \rho_3) = \begin{cases} 1, & \text{если } x^{\rho_3} \in D_3(\rho_3, H_R); \\ 0, & \text{если } x^{\rho_3} \notin D_3(\rho_3, H_R). \end{cases} \quad (12)$$

В записи $D(\rho, H_R)$ подчеркнуто, что данное подмножество зависит от подмножества H_R .

Правила (11) и (12) устанавливаются при следующих ограничениях:

$$P_R, \rho_H(\chi_H = 1) \leq \beta \quad \forall R \in H_R, \quad \forall \rho_H \in J_\rho; \quad (13)$$

$$P_R, \rho_3(\chi_3 = 0) \leq \alpha \quad \forall R \in H_R, \quad \forall \rho_3 \in J_\rho. \quad (14)$$

Данные соотношения являются количественной формулировкой второго положения ПРП, относящего неопределенность результатов кон-

троля в пользу стороны, противоположной стороне, организующей контроль.

Неравенства (13) и (14) являются ограничениями на риск заказчика, т. е. вероятность принятия решения $\chi_1 = 1$; при невыполненных требованиях к надежности (β) и на риск поставщика — вероятность принятия решения $\chi_2 = 0$ при выполненных требованиях к надежности (α).

Фактически ограничение (13) защищает потребителя от приемки некачественной (ненадежной) продукции, а (14) защищает поставщика от возвращения ему качественной (надежной) продукции.

При $\beta = 1 - \gamma$, $\alpha = 1 - \nu$ правила (7), (8), (11) и (12) допускают преобразования друг в друга, причем ограничения (13) и (14) выполняются и для правил (7), (8).

Ограничения (13), (14) на риски относятся к разным правилам, в отличие от двухуровневой схемы, где аналогичные ограничения задаются на одно правило.

Величины рисков (β , α) или уровни доверия (γ , ν) являются объектами регламентации и должны устанавливаться в соответствующих документах.

Максимальное значение арбитражной характеристики при выполнении (13), (14) для различных планов контроля лежит в интервале $[\alpha \cdot \beta, \max \{\alpha, \beta\}]$.

К значению $\max \{\alpha, \beta\}$ верхняя граница арбитражной характеристики приближается, когда у одной из сторон объемы контроля на порядок и более превышают объемы контроля у другой стороны. При близких (покомпонентно) планах контроля арбитражная характеристика незначительно превосходит $\alpha \cdot \beta$.

В соответствии с этим целесообразно устанавливать α и β из интервалов $[0,1; 0,3]$; рекомендуемые значения $\alpha = \beta = 0,2$.

Применение правил принятия решений по ПРП обеспечивает стремление сторон, планирующих контроль, к повышению точности процедур контроля.

Правила (7), (8) и (11), (12) в математическом плане эквивалентны, но с организационной точки зрения более

удобны правила (7), (8), так как структура правил принятия решений является объектом стандартизации. При этом структура (7), (8) универсальна по отношению к множеству H_R , в то время как в (11), (12) область $D(\rho, H_R)$ зависит от H_R , и для каждого требования H_R нужно строить и стандартизовать новую область $D(\rho, H_R)$.

Для структур правил в виде (7), (8) объектом стандартизации при статистическом контроле качества и надежности являются методы построения доверительных множеств $G(x^0, \rho)$; для одномерных показателей надежности — доверительных интервалов.

Эти правила позволяют принимать решения и в случае проведения контроля с отклонениями от намеченных планов. Кроме того, использование правил, основанных на доверительных границах, больше отвечает требованиям инженерной психологии.

ПРП устанавливает порядок и правила применения двухуровневого подхода к планированию контроля. При планировании контроля поставщиком требуемое (нормируемое) значение показателя надежности, установленное в техническом задании, стандарте или ТУ, совмещается с браковочным уровнем, т. е. $R_\beta = R_{тр}$, величина риска потребителя (заказчика) β определяется соответствующим стандартом, приемочный уровень и риск поставщика α устанавливает в одностороннем порядке сам поставщик. Эти последние два параметра носят информационный характер, т. е. не являются объектами регламентации или согласования и указываются в программах и методиках испытаний поставщиком для определения плана контроля на основе всех четырех величин. Величина R_α может использоваться как наиболее вероятное значение R (но не гарантируемое) для проведения расчетов по необходимой стратегии технического обслуживания и ремонта.

При планировании контроля потребителем нормируемое значение показателя (надежности) совмещается с приемочным уровнем $R_\alpha = R_{тр}$, величина риска поставщика α регламен-

тируется соответствующим стандартом.

Браковочный уровень R_β и риск потребителя β в одностороннем порядке устанавливает потребитель, указывая их как информационные данные.

ПРП также устанавливает сферу применения подхода на основе задания одного ограничения — на риск потребителя (3). Этот подход должен применяться только при испытаниях, организуемых поставщиком, причем должно выполняться условие $R_\beta = R_{тр}$, а величина β должна устанавливаться соответствующими стандартами на виды продукции.

При применении байесовских подходов в рамках ПРП следует обеспечить выполнение ограничений (13), (14) на риски. В силу предоставления поставщикам и потребителям прав в одностороннем порядке устанавливать планы контроля, изменяется характер целевых функций при оптимизации — они должны отражать интересы соответствующих сторон, например, в виде апостериорной средней функции потерь изготовителя, включающей средние затраты на испытания и потери, возникающие при принятии отрицательных решений.

Пример 1. Поставщиком планируется контроль показателя R (средняя наработка), на который задано требование $H_R = \{R : R \geq R_{тр}\}$, индивидуальные наработки τ имеют экспоненциальное распределение $F_R(t) = 1 - e^{-t/R}$.

В стандартах задано $\gamma = 0,8$; $\nu = 0,8$ или $\alpha = \beta = 0,2$. Поставщик на основании своих критериев оптимальности выбрал (см. гл. 14) план $[NUN]$, $N = 3$; тогда правило имеет вид:

$$\chi_{\Pi}(t_1, t_2, t_3, N = 3) =$$

$$= \begin{cases} 1, & \underline{R}_\gamma(t_1, t_2, t_3, N = 3) \geq R_{тр}; \\ 0, & \underline{R}_\gamma(t_1, t_2, t_3, N = 3) < R_{тр}, \end{cases} \quad (15)$$

$$\text{где } \underline{R}_\gamma(t_i, N = 3) = 0,7 \frac{t_1 + t_2 + t_3}{3} =$$

$$= 0,7 \cdot \bar{t}; \quad \bar{t} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i,$$

При контроле данного показателя заказчиком последний также на основании своих критериев оптимальности выбрал план $[NUr]$, где $N = 5$, $r = 3$; при этом применяется следующее правило:

$$\chi_3(t_1, t_2, t_3, N = 5, r = 3) =$$

$$= \begin{cases} 1, & \bar{R}_\nu(t_1, t_2, t_3, N = 5, r = 3) \geq R_{тр}; \\ 0, & \bar{R}_\nu(t_1, t_2, t_3, N = 5, r = 3) < R_{тр}, \end{cases} \quad (16)$$

$$\text{где } \bar{R}_\nu(t_1, t_2, t_3, N = 5, r = 3) = 3,3 \frac{t_1 + t_2 + t_3}{5} = 3,3\bar{t}.$$

При этом максимальное значение арбитражной характеристики $\bar{A} \approx 0,05$.

При многоступенчатых или последовательных планах контроля для записи правил принятия решений на основе доверительных интервалов следует использовать двусторонние многоступенчатые и последовательные доверительные интервалы [43].

Подход к организации контроля надежности (качества) на базе ПРП является реализацией децентрализованных принципов управления производством, позволяющих решать вопросы контроля надежности (качества) на уровне прямых отношений между поставщиками и потребителями продукции, минимально привлекая государственные органы, такие, как Госстандарт и Госарбитраж.

В рамках централизованного подхода методы, средства и планы контроля надежности (качества) яв-

ляются объектами государственной стандартизации и должны быть едиными у поставщиков, потребителей и контролирующих органов.

Централизованный подход требует разработки чрезмерно большого числа стандартов по контролю качества и создания громоздкого аппарата по надзору за соблюдением указанных стандартов.

Но, как указывалось выше, этот подход не обеспечивает арбитражную корректность процедур контроля, в его рамках велики издержки на разработку и согласование документов, отсутствует возможность оптимизации планов и методов контроля с учетом индивидуальных особенностей сторон, проводящих контроль.

Децентрализованный механизм контроля надежности и качества продук-

ции на основе ПРП обеспечивает целый ряд преимуществ:

- расширяет права организаций, проводящих контроль, в части выбора методов и планов контроля и повышает их ответственность за достоверность принимаемых решений;

- обеспечивает арбитражную корректность процедур контроля и их устойчивость;

- позволяет упростить многие организационные вопросы, в частности вопросы согласования документов по контролю между заинтересованными сторонами;

- позволяет повысить экономичность процедур контроля за счет расширения возможностей учета индивидуальных особенностей сторон, планирующих контроль.

Раздел II

ОЦЕНКА И КОНТРОЛЬ НАДЕЖНОСТИ ИЗДЕЛИЙ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИХ ИСПЫТАНИЙ (ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ)

Глава 7. Оценка показателей безотказности при биномиальном плане испытаний

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Объект, подвергаемый биномиальным испытаниям, может быть любым, лишь бы выполнялись условия схемы Бернулли, сформулированные ниже. Физическая природа объекта испытаний не имеет значения, важно лишь, чтобы информация, получаемая из испытаний, регистрировалась в виде совокупности двух величин: 1) объем N (число) испытаний; 2) число l отказов в N испытаниях.

Структурные особенности объекта испытаний также не принимаются во внимание. Поэтому объект испытаний называется системой, состоящей из одного элемента (далее — системой). Понятие отказа в одном испытании определяется как некоторое событие $\bar{A}$ и может иметь произвольное определение. Событие A , противоположное $\bar{A}$, состоит в безотказной работе системы в одном испытании.

Пример 1. Пусть ξ — случайная величина, равная времени до возникновения отказа (т. е. ξ — наработка до отказа), а $[0, t_0]$ — заданный интервал работы системы. Тогда событие A состоит в том, чтобы выполнялось условие $\xi > t_0$, т. е.

$$A = \{\xi > t_0\}. \quad (1)$$

Здесь событие A задается с помощью случайной величины ξ .

Пример 2. Пусть e_0 — совокупность условий, определяющих расчетный (номинальный) режим работы системы на заданном интервале $[0, t_0]$ времени ее функционирования, а $\Pi_t^0 = \Pi_t(e_0)$ — несущая способность (прочность) системы к воздействию номинальной нагрузки $H_t^0 = H_t(e_0)$ в момент времени t , причем Π_t^0 и H_t^0 — случайные процессы при $t \in [0, t_0]$. Тогда событие A состоит в том, чтобы выполнялось условие $\Pi_t^0 > H_t^0$ для всех $t \in [0, t_0]$, т. е.

$$A = \{\Pi_t^0 > H_t^0, t \in [0, t_0]\}. \quad (2)$$

Здесь, в отличие от примера 1, событие A задается с помощью рассмотрения случайных процессов Π_t^0 и H_t^0 на $[0, t_0]$. Условие $\Pi_t^0 > H_t^0$, $t \in [0, t_0]$ при $H_t^0 > 0$ может быть записано также в виде $\xi^0 = \xi^0(e_0) > t_0$ или

$$h_{t_0}^0 = \min_{0 \leq t \leq t_0} \frac{\Pi_t^0}{H_t^0} > 1.$$

Причем

$$h_{t_0}^0 > 1 \Leftrightarrow \xi^0 > t_0 \Leftrightarrow (\Pi_t^0 > H_t^0, t \in [0, t_0]), \quad (3)$$

где $h_{t_0}^0$ — случайная величина, называемая запасом системы по несущей

способности на $[0, t_0]$ в режиме ε_0 ; ξ^0 — время до разрушения (наработка до отказа) при воздействии номинальной нагрузки H_t^0 .

В силу соотношений (2) и (3) вероятность $P = P(A)$ безотказной работы системы на $[0, t_0]$ в режиме ε_0 в рассматриваемом случае записывается в виде

$$P = P(A) = P(\Pi_t^0 > H_t^0, 0 \leq t \leq t_0) = P(h_{t_0}^0 > 1) = P(\xi^0 > t_0) \quad (4)$$

или

$$P = P(h_{t_0}^0 > 1) = 1 - G(1) = 1 - F(t_0). \quad (5)$$

Здесь G и F — функции распределения величин $h_{t_0}^0$ и ξ_0 .

Определение 1. Пусть выполняются следующие условия.

1. Вероятность P безотказной работы системы на интервале $[0, t_0]$ времени в номинальном режиме ε_0 выражается с помощью соотношений (4) и (5).

2. Функция G распределения величины $h_{t_0}^0$ содержится в классе F всех ВСФИ-распределений, т. е. $G(x)$ имеет плотность $f(x) = G'(x)$. Причем $G(0) = 0$, а функция интенсивности $\lambda(x) = f(x)/(1 - G(x))$ либо возрастает, либо чередует участки возрастания с участками своих постоянных значений. В классе F содержатся, например, усеченное нормальное на $[0, \infty)$, экспоненциальное, гамма-распределение, а также распределения Рэлея, Вейбулла при значении параметра формы $\alpha \geq 1$ и др.

3. В процессе испытаний на $[0, t_0]$ возможно осуществление утяжеленного режима ε^* , состоящего в реализации повышенной нагрузки $H_t(\varepsilon^*) = H_t^* = \kappa H_t^0 > 0$, где κ — фиксированный коэффициент утяжеления (коэффициент повышения нагрузки); $t \in [0, t_0]$.

4. При воздействии повышенной нагрузки H_t^* несущая способность не возрастает, т. е. $\Pi_t(\varepsilon^*) = \Pi_t^* \leq \Pi_t^0$ при $0 \leq t \leq t_0$.

При выполнении условий 1—4 будем говорить, что реализуется режим ε^* утяжеленных испытаний с коэффициентом κ утяжеления. Режимы ε_0 и ε^* считаются совпадающими, если $\kappa = 1$.

Первое из условий ограничивает схему утяжеленных испытаний учетом лишь одной действующей нагрузки, в то время как во многих случаях следует принимать во внимание воздействие нескольких различных нагрузок.

Рассмотрим случайную величину

$$h_{t_0}^* = \min_{0 \leq t \leq t_0} \frac{\Pi_t^*}{H_t^*} = \min_{0 \leq t \leq t_0} \frac{\Pi_t^*}{\kappa H_t^0},$$

представляющую собой запас системы по несущей способности на $[0, t_0]$ в режиме ε^* . Если $\xi^* = \xi(\varepsilon^*)$ — наработка на отказ при воздействии нагрузки $H_t^* = \kappa H_t^0$, то

$$P_* = P(h_{t_0}^* > 1) = P(\xi^* > t_0) \quad (6)$$

— вероятность безотказной работы системы на $[0, t_0]$ в режиме ε^* .

Пусть вероятность P определяется из условия (5). Тогда из условий определения 1 согласно [66] следует неравенство

$$P^* \geq P_*, \quad (7)$$

которое, в частности, при $\kappa = 2$ означает следующее: вероятность P_* безотказной работы на $[0, t_0]$ при воздействии удвоенной нагрузки $H_t^* = 2H_t^0$ не больше, чем вероятность P^* безотказной работы на $[0, t_0]$ при воздействии двух независимых циклов нагружения номинальной нагрузкой. Четвертое из допущений определения 1 означает, что в нем не рассматриваются системы с адаптацией к воздействию повышенной нагрузки.

ИСХОДНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ДОПУЩЕНИЯ

Выше сделаны предварительные замечания, относящиеся к биномиальному плану испытаний. Здесь приводятся точные формулировки исходных допущений, а также основные расчетные соотношения.

Определение биномиального плана испытаний. В основе биномиального плана лежат следующие допущения биномиальной схемы испытаний Бернулли.

1. Испытаниям подвергается произвольная система, для которой условие безотказной работы в одном испытании (событие A) определяется произвольным образом.

2. Испытания проводятся в заранее назначенном фиксированном их числе N , которое называется также объемом испытаний. В каждом i -м из них возможно возникновение одного из двух событий A_i или $\bar{A}_i$, где A_i состоит в безотказном исходе i -го испытания, а $\bar{A}_i$ — в отказе ($\bar{A}_i$ — событие, противоположное A_i). События $A_1, A_2, \dots, A_N$ предполагаются независимыми. Вероятности $P(A_i)$ событий A_i считаются равными между собой:

$$P(A_1) = P(A_2) = \dots = P(A_N) = P = \text{const.} \quad (8)$$

Далее P называется вероятностью безотказной работы системы в одном ее испытании.

3. В качестве исхода N испытаний принимается число l событий $\bar{A}_i$ (т. е. число l отказов в N испытаниях).

По биномиальному плану испытаний может испытываться N идентичных образцов системы или один ее образец. В последнем случае допущение 2 означает, что при испытаниях не происходит накопления повреждений, а также доработок или восстановления отказов, т. е. не происходит никаких процессов, которые могли бы нарушить условие (8). Допущение о независимости событий A_i при $i = \overline{1, N}$ означает, что вероятность безотказной работы системы в N испытаниях равна P^N .

Пример 3. В условиях примера 1 успех A_i в i -м испытании означает выполнение условия $\xi_i > t_0$, где ξ_i — наработка до отказа (время до возникновения отказа) системы в i -м испытании. Согласно допущениям биномиального плана, величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ независимы и имеют одну и ту же функцию распределения $F(x) = P(\xi_i \leq x)$, $i = \overline{1, N}$, причем

$$P = P(A_i) = P(\xi_i > t_0) = 1 - F(t_0), \quad i = \overline{1, N}. \quad (9)$$

Подчеркнем, что конкретный вид функции F распределения из (9) в биномиальном плане испытаний не оговаривается. Обозначим τ_i момент остановки i -го испытания. В рассматриваемом случае $\tau_i = \xi_i$, если $\xi_i \leq t_0$, т. е. если при испытаниях на $[0, t_0]$ возникает отказ. В случае успешного исхода j -го испытания $\tau_j = t_0$, т. е.

$$\begin{aligned} \tau_i &= \xi_i, & \text{если } \xi_i \leq t_0; \\ \tau_j &= t_0, & \text{если } \xi_j > t_0. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь наработка до отказа не устанавливается и известно лишь, что $\xi_j > t_0$. При этом l — число величин $\xi_i \leq t_0$, т. е. l — число отказов на $[0, t_0]$. На рис. 1 продолжительность i -го испытания изображена отрезком длины τ_i , момент возникновения отказа отмечен *. Таким образом, согласно (10), при испытаниях системы по биномиальному плану в условиях примера 4 значения $\tau_i > t_0$ не регистрируются.

Функция биномиального распределения и ее свойства. Вероятность того, что при проведении N испытаний по биномиальному плану случайная величина l , равная числу возникающих отказов, не превысит фиксированное число x , называется функцией биномиального распределения с параметрами N и P .

Она находится из выражения

$$F_b(x) = P(l \leq x) = \sum_{k=0}^{[x]} \binom{N}{k} P^k \times P^{N-k} (1 - P)^k = \text{Bi}(N, P, x), \quad (11)$$

где $\text{Bi}(N, P, x)$ — дополнительное обозначение для функции F_b биномиального распределения. Здесь P — вероятность безотказной работы системы в одном испытании; $[x]$ — целая часть числа x ; $\binom{N}{k} = \frac{N!}{(N-k)! k!}$ — биномиальный коэффициент.

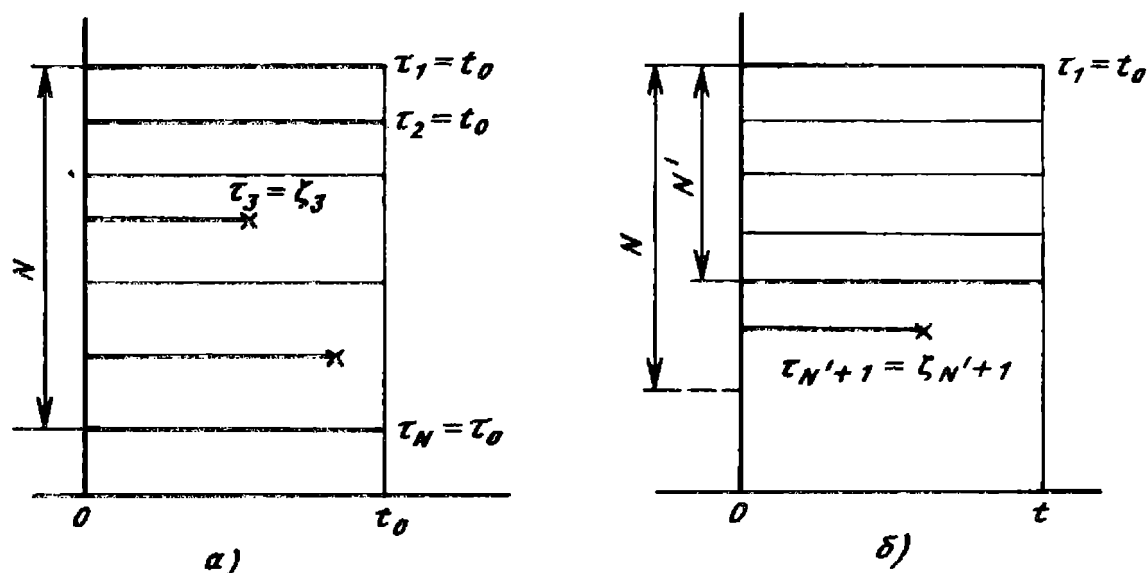


Рис. 1. Биномиальный план испытаний (а) и биномиальный план испытаний с остановкой (б)

Свойства функции $Bi(N, P, x)$ при $0 \leq x \leq N$ для целого x следующие:

1. $Bi(N, P, 0) = P^N$.
2. $Bi(N, P, N) = 1$.
3. Выполняются неравенства [66]:

$$P^N \leq Bi(N, P, x) \leq \binom{N}{x} P^{N-x};$$

$$P^{N-x} \leq Bi(N, P, x) \leq \left(\frac{P}{\hat{P}}\right)^{N-x} \times$$

$$\times \left(\frac{1-P}{1-\hat{P}}\right)^x, \quad \hat{P} = 1 - \frac{x}{N};$$

$$Bi(N, P, x) \leq (x+1)(N-x)^x \times$$

$$\times P^{(N-x)}, \quad x > 0;$$

$$Bi(N, P, x) \leq \frac{(N-x+1)^x}{x+1} \times$$

$$\times P^{N-x-1}, \quad x \geq 1.$$

4. Функция биномиального распределения из (11) при целых $N - [x] = a$, $[x] + 1 = b$ совпадает со значениями неполной бета-функции:

$$J_P(a, b) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^P y^{a-1} \times$$

$$\times (1-y)^{b-1} dy,$$

где

$$a > 0; \quad b > 0; \quad P \in [0, 1]; \quad B(a, b) =$$

$$= \int_0^1 y^{a-1} (1-y)^{b-1} dy = \frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

т. е.

$$Bi(N, P, x) = J_P(N - [x], [x] + 1).$$

При этом

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx \text{ — гамма-функция;}$$

$$B(N - [x], [x] + 1) =$$

$$= \frac{1}{(N - [x]) \binom{N}{[x]}},$$

а неполная бета-функция удовлетворяет соотношениям:

$$J_P(a, b) = 1 - J_{1-P}(b, a);$$

$$J_P(a, b) = P J_P(a-1, b) +$$

$$+ (1-P) J_P(a, b-1);$$

$$J_P(a, b) = \frac{1}{P} (J_P(a, b) - (1-P) \times$$

$$\times J_P(a+1, b-1)), \quad P > 0.$$

На рис. 2 показан характер изменения неполной бета-функции $J_P(a, b)$

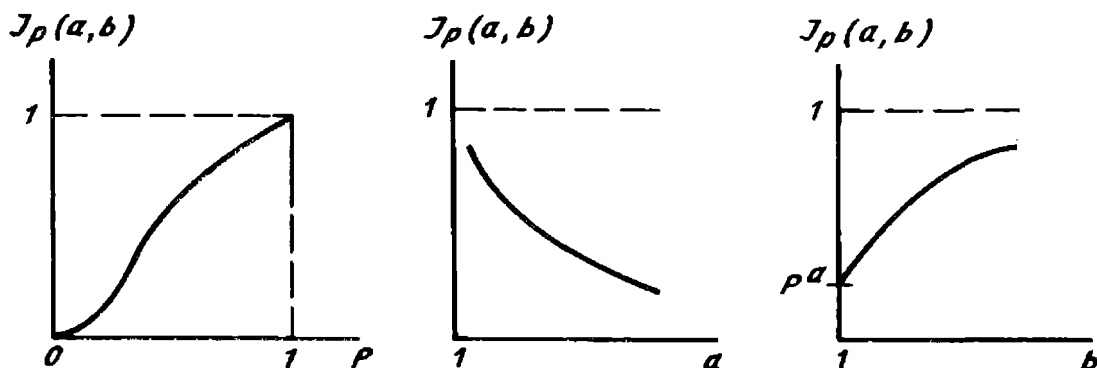


Рис. 2. Характер изменения неполной бета-функции $J_P(a, b)$ по различным аргументам (соответственно по P , a и b)

по различным аргументам; выполняются следующие неравенства:

$$P^a \leq J_P(a, b) \leq (1+a)^{b-1} P^a, \\ b \geq 2;$$

$$(J_{Pt}(a, b))^{\frac{1}{t}} \leq J_P(a, b) \leq \\ \leq (J_{P^{1/t}}(a, b))^t, \quad t \geq 1;$$

$$J_P(a, b) \leq b a^{b-1} P^a, \quad b > 1;$$

$$J_P(a, b) \leq \left(\frac{P}{P'}\right)^a J_{P'}(a, b),$$

$$P \geq P' \neq 0.$$

5. Случайная величина $F_6(l) = \text{Bi}(N, P, l)$ удовлетворяет неравенству [26]

$$P(F_6(l) \leq c) \leq c \leq P(F_6(l-0) = \\ = \text{Bi}(N, P, l-1) \leq c),$$

где c — фиксированное число из $[0, 1]$.

Если ψ — случайная величина, имеющая равномерное распределение на $[0, 1]$ (т. е. если $\psi \sim [0, 1]$), причем величины l и ψ независимы, то согласно [26] случайная величина

$$\psi' = \psi \text{Bi}(N, P, l-1) + \\ + (1-\psi) \text{Bi}(N, P, l)$$

равномерно распределена на $[0, 1]$.

График функции биномиального распределения приведен на рис. 3, а и б, где также показан характер изменения

$\text{Bi}(N, P, x)$ при $x \in [0, N]$ при возрастании P от значения $P = 0$ до $P = 1$.

$$6. \binom{N}{k} P^{N-k} (1-P)^k = J_P(N-k, \\ k+1) - J_P(N-k+1, k).$$

7. Выполняются неравенства Островского [66]:

$$\binom{N}{k} P^{N-k} (1-P)^k < \\ < e^{-2N \left(q - \frac{k}{N}\right)^2}; \quad q = 1-P;$$

$$\binom{N}{k} P^{N-k} (1-P)^k \leq \\ \leq \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{N-1} e^{-2N \left(q - \frac{k}{N}\right)^2}, \\ 1 \leq k \leq N-1.$$

Пример 4. Технической документацией на приемку системы устанавливается, что партия из $N = 10$ ее образцов принимается, если число l отказов не превысит $x = 1$, т. е. если $l = 0$ или $l = 1$. Вероятность безотказной работы одного образца известна и равна 0,99. Условия испытаний удовлетворяют допущениям биномиальной схемы Бернулли. Требуется найти вероятность P_0 приемки.

Решение. Приемка в данном случае означает выполнение условия $l \leq 1$. Поэтому искомая вероятность определится как значение функции бино-

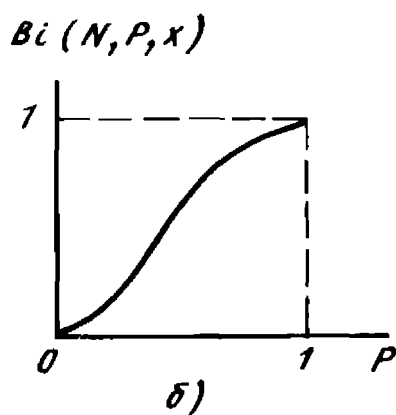
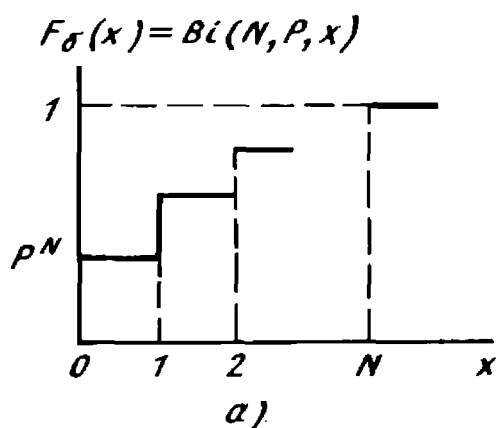


Рис. 3. Функция биномиального распределения

миального распределения при $x = 1$, т. е.

$$\begin{aligned} P_0 &= \text{Bi}(N, P, 1) = \\ &= P^N + \binom{N}{1} P^{N-1} (1 - P) = \\ &= 0,99^{10} + 10 \cdot 0,99^9 \cdot 0,01 = 0,91. \end{aligned}$$

Пример 5. Рассматривается система, составленная из N одинаковых элементов, соединенных параллельно. Вероятность безотказной работы каждого элемента одинакова и равна P (A_i) = P , а события A_i при $i = \overline{1, N}$ независимы. Система функционирует безотказно, если число l ее элементов, выходящих из строя, не превышает фиксированное число $x \leq N - 1$. Требуется найти вероятность $\mathcal{P}$ безотказной работы системы.

Решение. Так как допущения системы испытаний Бернулли в условиях примера выполняются, то искомая вероятность выражается в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \sum_{k=0}^x \binom{N}{k} P^{N-k} (1 - P)^k = \\ &= \text{Bi}(N, P, x). \end{aligned}$$

При $x = N - 1$ $\mathcal{P} = \text{Bi}(N, P, N - 1) = 1 - (1 - P)^N$.

ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ

В примерах 4 и 5 считалось, что вероятность P безотказной работы системы в одном ее испытании известна. Во многих случаях это допущение не выполняется, а задача как раз состоит в том, чтобы, получая в N биномиальных испытаниях значения числа l возникающих отказов, найти оценку (приближенное опытное значение) для неизвестной вероятности P . В числе таких оценок выделяют точечную и интервальную.

Примечание. Обозначим буквой Δ_i случайную величину, равную нулю, если i -е испытание оказывается успешным, и равную единице при возникновении отказа в i -м испытании. Тогда число отказов $l = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_N = l(\Delta)$, где $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N)$ — случайная выборка объема N , образованная из случайных величин Δ_i . Всякая числовая функция от выборки, в том числе и $l = l(\Delta)$, называется статистикой. В силу случайности выборки статистика, в свою очередь, является случайной величиной.

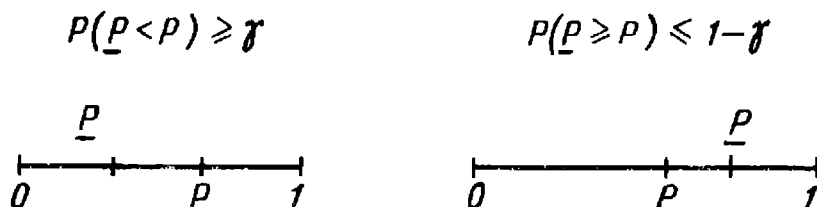
Точечная оценка. Статистика

$$\hat{P} = 1 - \frac{l}{N}, \quad (12)$$

где l — число отказов в N испытаниях, называется НСМ-точечной оценкой для неизвестной вероятности P . Она обладает свойствами: несмещенности, состоятельности и минимальности границы дисперсии (отсюда сокращение НСМ).

Несмещенность точечной оценки $\hat{P}$ означает, что если в каждой серии из N испытаний определять значения $\hat{P}$ по формуле (12) и рассмотреть все возможные исходы $l = 0, 1, \dots, N$, реали-

Рис. 4. Гарантированная оценка $\underline{P}$ для вероятности P



вующиеся с различными вероятностями

$$P_k^* = P(l = k) = \binom{N}{k} P^{N-k} \times \\ \times (1 - P)^k, \quad k = 0, 1, \dots, N,$$

то среднее значение $M\hat{P}$ статистики $\hat{P}$ совпадает с неизвестной вероятностью P , т. е.

$$M\hat{P} = \sum_{k=0}^N \left(1 - \frac{k}{N}\right) P_k^* = P.$$

Состоятельность оценки $\hat{P}$ означает увеличение ее точности с увеличением объема N испытаний и выражается в том, что при $N \rightarrow \infty$ оценка $\hat{P}$ по вероятности сходится к P .

Минимальность границы дисперсии оценки $\hat{P}$ означает, что дисперсия $\sigma^2 = P(1 - P)/N$ статистики $\hat{P}$ совпадает с минимальной границей дисперсии всех несмещенных оценок для P (таких оценок бесконечно много), установленной Рао и Крамером.

Несмотря на наличие указанных положительных свойств, точечная оценка $\hat{P}$ из (12) обладает рядом недостатков. Так, точечная оценка $\hat{P}$ примерно с одинаковой вероятностью может оказаться как больше, так и меньше неизвестной вероятности P . На практике в ряде случаев необходимо иметь также и гарантированные оценки $\underline{P}$ и $\bar{P}$, для которых

$$\underline{P} < P \quad \text{и} \quad \bar{P} > P.$$

Эти неравенства должны выполняться с наперед заданной и достаточно большой доверительной вероятностью γ (рис. 4). При этом неизвестная вероятность $P \in [\underline{P}, \bar{P}]$ с вероятностью $\geq \gamma' = 1 - 2(1 - \gamma)$, если $\gamma >$

$> 0,5$. Случайный интервал $[\underline{P}, \bar{P}]$ называется γ' -доверительным интервалом для P , а его границы $\underline{P}$ и $\bar{P}$ называются γ -нижней и γ -верхней границами для параметра P биномиального распределения, а также интервальными оценками для P .

Интервальные оценки. По определению, статистики $\underline{P}$ и $\bar{P}$ должны удовлетворять неравенствам

$$\text{Вер}(\underline{P} < P) \geq \gamma; \quad \text{Вер}(\bar{P} > P) \geq \gamma, \quad (13)$$

где $\underline{P}$ и $\bar{P}$ находятся по результатам испытаний; P — неизвестная вероятность безотказной работы в одном испытании; γ — заданная доверительная вероятность (обычно принимают $\gamma = 0,80 \div 0,99$). Задача нахождения $\underline{P}$ и $\bar{P}$ по опытным данным может иметь несколько решений. Одно из них — классическое, принадлежит Клопперу и Пирсону. Если рассмотреть уравнения

$$1 - \gamma = \sum_{k=0}^l \binom{N}{k} x^{N-k} (1 - x)^k = \\ = J_x(N - l, l + 1)$$

и

$$\gamma = \sum_{k=0}^{l-1} \binom{N}{k} x^{N-k} (1 - x)^k = \\ = J_x(N - l + 1, l),$$

разрешая их относительно $x \in [0, 1]$ при данных N , γ и получаемых из опыта значений l , то полученные корни $x_1 = \underline{P}$ и $x_2 = \bar{P}$ удовлетворяют соотношениям (13).

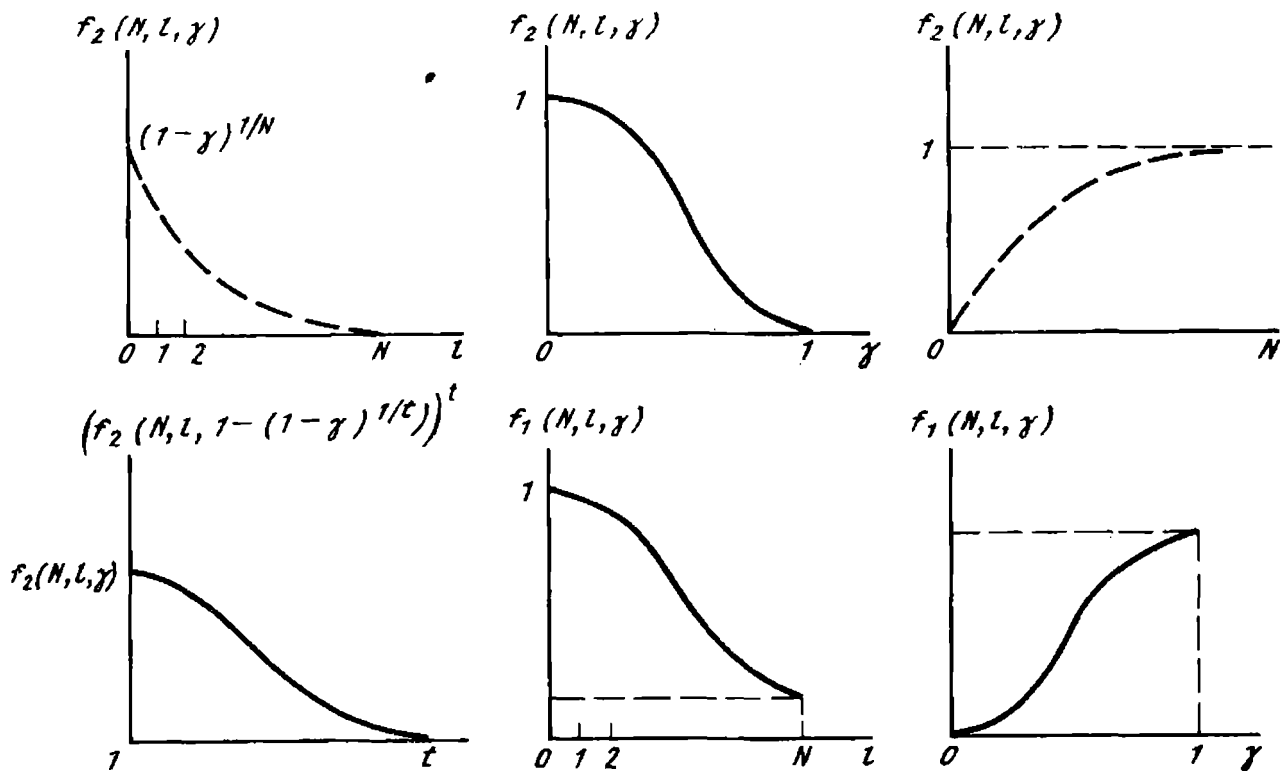


Рис. 5. Функция Клоппера—Пирсона

Эти корни обозначим так:

$$\underline{P} = f_2(N, l, \gamma); \quad \bar{P} = f_1(N, l, \gamma). \quad (14)$$

Краткие таблицы для f_1 и f_2 приведены в приложении.

При числе отказов, равном нулю, частные значения γ -границ следующие:

$$\underline{P} = (1 - \gamma)^{1/N}; \quad \bar{P} = 1; \quad l = 0. \quad (15)$$

При $l = 1$ имеем также $\bar{P} = \gamma^{1/N}$. Зависимость статистик $\underline{P}$ и $\bar{P}$ из (14) от различных переменных иллюстрируется рис. 5.

Статистики $\underline{P}$ и $\bar{P}$ выражаются также в виде

$$\underline{P} = \frac{\hat{P}}{\hat{P} + \left(\hat{q} + \frac{1}{N}\right) F_{1-\gamma}},$$

$$\bar{P} = \frac{\hat{P}^*}{\hat{P}^* + \left(\hat{q} + \frac{1}{N}\right) \frac{1}{F^*}};$$

$$\hat{q} = 1 - \hat{P}, \quad \hat{q}^* = 1 - \hat{P}^*,$$

где $\hat{P}^* = 1 - \frac{l-1}{N}$; $l \geq 1$; $F_{1-\gamma}^* =$

$= F_{1-\gamma}(v_2, v_1)$ — квантиль уровня функции $1 - \gamma$ распределения Фишера со степенями свободы $v_1 = 2(N - l + 1)$, $v_2 = l$; $F_{1-\gamma} = F_{1-\gamma}(v_1, v_2)$ — квантиль уровня $1 - \gamma$ функции распределения Фишера со степенями свободы

$v_1 = 2(N - l)$ и $v_2 = 2(l + 1)$.

Используются также приближенные формулы вида

$$\underline{P} \simeq 1 - \frac{\chi_\gamma^2(2l+2)}{2N - l + \frac{1}{2}\chi_\gamma^2(2l+2)};$$

$$\bar{P} \simeq 1 - \frac{\chi_{1-\gamma}^2(2l)}{2N - l + \frac{1}{2}\chi_\gamma^2(2l)},$$

где $\chi_\gamma^2(k)$ — квантиль χ^2 -распределения с k степенями свободы уровня γ . Хорошие (но, как правило, несколько завышенные) результаты дает следующая приближенная формула, не

требующая использования специальных таблиц:

$$P = \hat{P} (1 - \gamma)^{\frac{1}{N-l}}, \quad \hat{P} = 1 - \frac{l}{N}. \quad (16)$$

Функция $P = f_2(n, l, \gamma)$ удовлетворяет следующим неравенствам [66]:

1. Если $\hat{P} = 1 - \frac{l}{N}$, $\hat{q} = \frac{l}{N}$, $t = \frac{q}{\hat{P}}$, то

$$\begin{aligned} \underline{x}_1 &= \hat{P} \hat{q}^t (1 - \gamma)^{\frac{1}{N-l}} \leq \underline{P} = \\ &= f_2(N, l, \gamma) \leq (1 - \gamma)^{\frac{1}{N-l}} = \underline{x}_1^*. \end{aligned} \quad (17)$$

2. При $k = 2, 3, \dots$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \underline{x}_k &= \left(\frac{1 - \gamma}{\varphi(\underline{x}_{k-1})} \right) \leq \underline{P} = f_2(N, l, \gamma) \leq \\ &\leq \left(\frac{1 - \gamma}{\varphi(\underline{x}'_{k-1})} \right)^{\frac{1}{N-l}} = \underline{x}_k^*. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{k=0}^l \binom{N}{k} x^{l-k} (1-x)^k = \\ &= x^l + Nx^{l-1}(1-x) + \\ &+ \dots + \binom{N}{l} (1-x)^l, \end{aligned}$$

причем

$$f_2(N, l, \gamma) = \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}_k^*.$$

3. При $t \geq 1$

$$\begin{aligned} \left(f_2 \left(N, l, 1 - (1 - \gamma)^{\frac{1}{t}} \right) \right)^t &\leq \\ &\leq f_2(N, l, \gamma) \leq \\ &\leq \left(f_2 \left(N, l, 1 - (1 - \gamma)^t \right) \right)^{\frac{1}{t}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t^{-\frac{1}{N-l}} f_2(N, l, 1 - t(1 - \gamma)) &\leq \\ &\leq f_2(N, l, \gamma) \leq t^{\frac{1}{N-l}} f_2 \times \\ &\times \left(N, l, 1 - \frac{1 - \gamma}{t} \right). \end{aligned}$$

Функция $\bar{P} = f_1(N, l, \gamma)$ удовлетворяет следующим неравенствам.

Если

$$\hat{P}^* = 1 - \frac{l-1}{N}; \quad \hat{q}^* = 1 - \hat{P}^*$$

$$l \geq 1; \quad t' = q^*/\hat{P}^*,$$

$$\text{то } \bar{y}_1 = \hat{P}^* \hat{q}^{*t'} \gamma^{\frac{1}{N-l+1}} \leq \bar{P} =$$

$$= f_1(N, l, \gamma) \leq \gamma^{\frac{1}{N-l+1}} = \bar{y}_1^*$$

$$\bar{y}_k = \left(\frac{\gamma}{\varphi_1(\bar{y}_{k-1})} \right)^{\frac{1}{N-l+1}} \leq \bar{P} =$$

$$= f_1(N, l, \gamma) \leq$$

$$\leq \left(\frac{\gamma}{\varphi_1(\bar{y}'_{k-1})} \right)^{\frac{1}{N-l+1}} = \bar{y}_k',$$

где $k = 2, 3, \dots$, причем

$$\bar{P} = f_1(N, l, \gamma) = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{y}_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{y}_k'.$$

Пример 6. По схеме Бернулли проведено $N = 10$ испытаний системы, в которых зарегистрирован один отказ ($l = 1$).

Требуется найти значения γ -границ для неизвестной вероятности P безотказной работы системы в одном испытании при заданной доверительной вероятности $\gamma = 0,90$.

Решение. Из табл. 1 приложения получим

$$\underline{P} = f_2(N, l, \gamma) = 0,663;$$

$$\bar{P} = f_1(N, l, \gamma) = 0,990.$$

По приближенной формуле (16) получаем

$$\underline{P} \simeq 0,90 \cdot 0,1^{0,11} = 0,693.$$

Используя приведенные выше неравенства, находим

$$x_1 = 0,53 = \hat{P} \hat{q}^l (1 - \gamma)^{\frac{1}{N-l}} \leq \underline{P} \leq \\ \leq (1 - \gamma)^{\frac{1}{N-l}} = 0,77 = x'_1$$

(первое приближение) и, продолжая вычисления, в качестве второго приближения получаем

$$0,659 = \left(\frac{0,1}{0,53 + 10 \cdot 0,47} \right)^{1/9} \leq \underline{P} \leq \\ \leq \left(\frac{1 - \gamma}{0,77 + 10 \cdot 0,23} \right)^{1/9} = 0,684.$$

ОБОБЩЕНИЕ БИНОМИАЛЬНОЙ СХЕМЫ ИСПЫТАНИЙ

Во многих практических ситуациях некоторые допущения биномиальной схемы Бернулли являются стесняющими или даже неприемлемыми. Обобщение этой схемы состоит в ослаблении допущений, а также в отказе от некоторых из них.

Схема биномиальных испытаний с остановкой. Пусть биномиальные испытания проводятся последовательно одно за другим, а их общий объем N , согласно исходным допущениям (см. с. 47), является фиксированным и выбран заранее — до проведения испытаний. Введем в рассмотрение случайную величину N' , равную N при $l = 0$ и равную числу испытаний до первого отказа при $l > 0$. При возникновении первого отказа в испытаниях с номером $N' + 1 < N$ схема Бернулли предписывает их продолжение до исчерпания назначенного объема N . Однако на практике часто ситуация складывается иначе: в случае возникновения отказа испытания прекращаются с целью доработки конструкции системы и технологии ее изготовления. После этого испытывается следующая серия образцов системы.

Поэтому наряду со схемой Бернулли рассмотрим схему биномиальных испытаний с остановкой [66].

Определение 2. Будем говорить, что система испытывается по плану биномиальных испытаний с остановкой,

если выполняются следующие условия: 1) испытания проводятся последовательно друг за другом с постоянной вероятностью P безотказной работы в каждом из них, причем $P = P(A_i)$, а события A_i независимы при $i = \overline{1, N}$; 2) наибольший (максимальный) объем N испытаний назначается до их проведения; 3) испытания прекращаются в двух случаях: по исчерпанию объема N испытаний, если $l = 0$, или после наступления первого отказа при $l > 0$. В качестве результатов испытаний принимаются значения случайной величины $N' = N$ при $l = 0$ и равной числу испытаний до первого отказа при $l > 0$.

Оказывается, что в рассматриваемом случае γ -нижняя граница $\underline{P}$ для P находится в явном виде.

В схеме биномиальных испытаний с остановкой статистика

$$\underline{P} = (1 - \gamma)^{1/N'} \quad (19)$$

является γ -нижней границей для неизвестной вероятности P безотказной работы системы в одном испытании. Данная формула может быть использована также и в схеме испытаний Бернулли, так как и в этом случае она удовлетворяет неравенству $P (\underline{P} < < P) \geq \gamma$ [66].

На рис. 1 приведена сравнительная иллюстрация биномиального плана испытаний и биномиальной схемы испытаний с остановкой в случае, когда вероятность безотказной работы системы в одном испытании находится по формуле (9). При безотказных испытаниях значение $\underline{P} = (1 - \gamma)^{1/N}$ совпадает со значением γ -нижней границы $\underline{P} = f_2(N, l, \gamma)$ для $l = 0$. Однако в схеме Бернулли статистика $P = f_2(N, l, \gamma)$ при $l > 0$ может оказаться более устойчивой к исходам испытаний, чем γ -нижняя граница (19). Так, при $N = 10$, $l = 1$ и $\gamma = 0,90$ независимо от того, в каком испытании произошел отказ, $\underline{P} = f_2(N, l, \gamma) = 0,66$. В случае использования формулы (19) при возникновении отказа в первом (в последнем) испытании получаем $\underline{P} = 0$ ($\underline{P} = 0,77$). Вместе с тем в схеме биномиальных испытаний

с остановкой статистика $\underline{P} = f_2(N, l, \gamma)$ не может быть применена. Формула (19) имеет еще одну самостоятельную область использования (см. ниже). Оказывается, кроме того, что неравенство $P(\underline{P} < \bar{P}) \geq \gamma$ сохраняется и в том случае, если при $l = 0$, $\gamma = 1 - 1/(N + 1)$ в (19) положить $\underline{P} = 1$ вместо $\underline{P} = (1 - \gamma)^{1/N}$.

Циклические испытания одного образца системы. В схеме Бернулли математически неразличимы случай испытания N одинаковых образцов системы и случай N циклических испытаний одного образца системы при условии, что в каждом цикле вероятность P безотказной работы остается неизменной. Последнее допущение, как правило, не выполняется в силу работы, осуществляемой процессами накопления повреждений, что не позволяет использовать статистики Клоппера — Пирсона $\underline{P} = f_2(N, l, \gamma)$ и $\bar{P} = f_1(N, l, \gamma)$ для оценки вероятности P по результатам циклических испытаний одного образца системы.

Формула (19) может быть также использована и в случае, если циклическим испытаниям подвергается один образец системы с накоплением повреждений или с преобладанием работы сил накопления повреждений.

Определение 3. Пусть проводятся циклические биномиальные испытания на одном образце системы, в процессе которых может предусматриваться восстановление возникающих отказов, а максимальный объем испытаний назначен заранее и равен N циклам. Будем говорить, что при испытаниях происходит накопление повреждений или что работа процессов накопления превалирует над работой процессов восстановления, если при любом $k = \overline{1, N}$ выполняется соотношение

$$P\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right) = P(A_1)P(A_2/A_1) \dots P \times \\ \times \left(A_k / \bigcap_{j=1}^{k-1} A_j\right) \leq P^k, \quad P = P(A_1),$$

где A_i — событие, состоящее в безотказной работе системы в i -м цикле, т. е. если вероятность безотказной работы системы в k циклах одного ее образца меньше или равна вероятности P^k безотказной работы k одинаковых независимых образцов системы.

Пример 8. Испытывается пружина, на которую подается циклическая нагрузка на сжатие. Продолжительность одного цикла — фиксированная величина t_0 . Назначенный максимальный объем испытаний составляет $N = 200$ циклов. По результатам испытаний необходимо найти значение γ -нижней границы $\underline{P}$ для неизвестной вероятности P безотказной работы на первом цикле $[0, t_0]$ при $\gamma = 0,90$, если известно, что от цикла к циклу происходит потеря упругих свойств пружины. Известно также, что между циклами после окончания первого из них возможно восстановление (придание пружине первоначальной формы, укрепление мест заделки, замена элементов крепления и т. д.). Однако несмотря на это при испытаниях в целом работа процессов накопления повреждений превалирует над работой процессов восстановления в смысле определения 3. Пусть после проведения $N' = 50$ циклов, т. е. на 51-м цикле, пружина потеряла упругие свойства до такого уровня, когда она должна считаться некондиционной. Тогда из (19) получаем искомое значение $\underline{P} = 0,1^{0,02} = 0,95$.

Данный пример легко сформулировать и для любой другой системы многократного применения с циклическим характером функционирования и с накоплением повреждений (радиоэлектронная аппаратура, тепловые машины и т. п.), для которой предусматриваются доработки, замена комплектующих элементов, восстановление.

Схема утяжеленных биномиальных испытаний. Биномиальный план испытаний, для которого вероятность P безотказной работы системы на $[0, t_0]$ в номинальном режиме ε_0 определяется из соотношений (4) и (5), а каждое из испытаний проводится на $[0, t_0]$ в утяжеленном режиме ε^* с коэффициентом повышения нагрузки κ (см. определе-

ние 1), называется утяжеленным биномиальным планом испытаний на $[0, t_0]$.

Пусть l^* — число отказов в N испытаниях, проводимых на $[0, t_0]$ по утяжеленному биномиальному плану. Тогда согласно [66] статистика

$$\underline{P} = (f_2(N, l^*, \gamma))^{\frac{1}{\kappa}} \quad (20)$$

является γ -нижней границей для вероятности P безотказной работы системы в одном испытании на $[0, t_0]$ в номинальном режиме ε_0 .

При безотказных испытаниях, проводимых по утяжеленному биномиальному плану ($l^* = 0$), из (20) следует частное значение

$$\underline{P} = (1 - \gamma)^{\frac{1}{N\kappa}} \quad (21)$$

Формула (21) указывает на то, в какой мере может быть повышено значение (15) γ -нижней границы Клоппера — Пирсона за счет выявления повышенной выносливости системы при реализации утяжеленного режима ε^* испытаний с коэффициентом κ утяжеления.

Пример 8. Проводятся $N = 20$ испытаний по утяжеленному биномиальному плану с коэффициентом $\kappa = 2$ повышения нагрузки, т. е. при нагрузке, удвоенной по сравнению с номинальной. Требуется найти значение γ -нижней границы $\underline{P}$ для вероятности P безотказной работы системы в одном испытании на $[0, t_0]$ в номинальном режиме при заданном $\gamma = 0,90$, если в N утяжеленных испытаниях зарегистрирован один отказ ($l^* = 1$), т. е. требуется найти значение γ -нижней границы $\underline{P}$ для вероятности P из (4).

Решение. По приближенной формуле (16) находим

$$f_2(N, l^*, \gamma) \simeq \left(1 - \frac{1}{20}\right) \times \\ \times (1 - \gamma)^{\frac{1}{19}} = 0,84$$

и, используя этот результат, из формулы (20) получаем

$$\underline{P} = (f_2(N, l^*, \gamma))^{1/2} \simeq \sqrt{0,84} = 0,92$$

(точное значение $f_2(N, l^*, \gamma) = 0,82$ и, значит, $P = \sqrt{0,82} = 0,91$).

Определение 4. Биномиальный план испытаний с остановкой (см. определение 2), для которого вероятность P безотказной работы системы на $[0, t_0]$ в номинальном режиме ε_0 определяется посредством соотношений (4) и (5), а каждое из испытаний проводится на $[0, t]$ в утяжеленном режиме ε^* с коэффициентом повышения нагрузки κ (см. определение 1), называется утяжеленным биномиальным планом испытаний с остановкой на $[0, t_0]$.

Пусть N есть наибольший объем (число) утяжеленных биномиальных испытаний с остановкой на $[0, t_0]$, назначаемый до их проведения; l^* — число возникающих отказов; $N'_* = N$, если $l^* = 0$ (N'_* — число испытаний до первого отказа при $l^* > 0$). Тогда согласно [66] статистика

$$\underline{P} = (1 - \gamma)^{\frac{1}{N'_*\kappa}} \quad (22)$$

является γ -нижней границей для вероятности P безотказной работы системы в одном испытании на $[0, t_0]$ в номинальном режиме ε_0 . В частном случае при $l^* = 0$ из (22) следует значение (21). Из (22) при $\kappa = 1$ следует формула (19). Статистика (22) может быть использована для нахождения γ -нижней границы $\underline{P}$ не только в схеме утяжеленных биномиальных испытаний N образцов с остановкой, но и в схеме утяжеленных биномиальных испытаний с остановкой одного образца с накоплением повреждений (см. определение 3), а также в схеме утяжеленных биномиальных испытаний Бернулли.

Пример 9. Пусть в условиях примера 8 пружина испытывалась в утяжеленном режиме ε_* при утроенной (по сравнению с номинальной) нагрузке так, что $\kappa = 3$, и на 48-м цикле она потеряла упругие свойства (т. е. $N'_* = 47$). Требуется найти значение γ -нижней границы $\underline{P}$ для неизвестной вероятности P безотказной работы пружины на первом цикле $[0, t_0]$ в номинальном режиме ε_0 для заданного $\gamma = 0,90$.

Решение. Из (22) находим искомое значение

$$\underline{P} = 0,1^{\frac{1}{3 \cdot 47}} = 0,98.$$

Случай несовпадения интервала $[0, t_1]$ времени одного испытания и интервала $[0, t_0]$ времени функционирования системы. До сих пор рассматривалась ситуация, когда $t_1 = t_0$, т. е. когда заданное время t_0 безотказной работы одного образца системы и время t_1 его испытания равны. Остановимся теперь на случае $t_1 = T \geq t_0$, при котором биномиальные испытания проводятся на большем интервале $[0, T] \supset [0, t_0]$ (рис. 6, а).

Определение 5. Пусть вероятность P безотказной работы системы на заданном интервале $[0, t_0]$ времени функционирования в номинальном режиме ε_0 работы определяется из формул (4) и (5), причем функция F распределения наработки $\xi^0 = \xi(\varepsilon_0)$ на отказ имеет плотность $f(t) = F'(t)$ и $F(0) = 0$. Система является стареющей на $[0, T] \supset [0, t_0]$, если выполняется одно из следующих условий.

1. На $[0, T]$ не предусматривается восстановление системы, в силу чего функция интенсивности отказов $\lambda(t) = f(t)/(1 - F(t))$ постоянна или возрастает на $[0, T]$.

2. На $[0, T]$ предусматривается слабое восстановление, позволяющее лишь на отдельных интервалах $[t'_1, t'_2] \subset [0, T]$ стабилизировать техническое состояние системы, в силу чего функция $\lambda(t)$ интенсивности на $[0, T]$ чередует участки возрастания с участками постоянства своих значений.

3. На $[0, t_0]$ выполняются условия 1 или 2 (с заменой $[0, T]$ на $[0, t_0]$), а на $[t_0, T]$ предусматривается восстановление системы, позволяющее на отдельных интервалах $[t'_1, t'_2] \subset [t_0, T]$ снизить интенсивность отказов $\lambda(t)$. Однако процессы накопления повреждений превалируют над процессами их восстановления. Это выражается в том, что

$$\int_{t_0}^T (\lambda(t) - \lambda(t_0)) dt \geq 0.$$

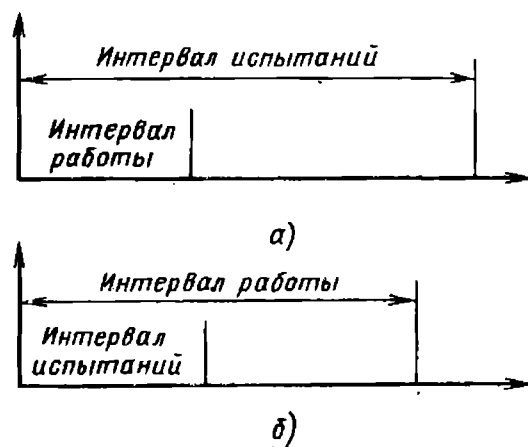


Рис. 6. Случаи испытаний:

а — на большем интервале; б — на меньшем интервале

Пусть стареющая на $[0, T]$ система испытывается по утяжеленному биномиальному плану (см. определение 3), причем каждое из N испытаний проводится на $[0, T] \supset [0, t_0]$ в режиме ε^* с коэффициентом утяжеления κ , а $l^*(T)$ — число отказов на $[0, T]$ в N испытаниях. Тогда согласно [66] статистика

$$\underline{P} = (f_2(N, l^*(T), \gamma))^{\frac{1}{\kappa \eta_0}}, \quad \eta_0 = \frac{T}{t_0} \quad (23)$$

является γ -нижней границей для неизвестной вероятности P из (4). При безотказных испытаниях на $[0, T]$ из (23) следует частное значение

$$\underline{P} = (1 - \gamma)^{\frac{1}{N \kappa \eta_0}}, \quad (24)$$

обобщающее (15) и (21).

Пример 10. Пусть в условиях примера 8 испытания проводятся на интервале $[0, T]$ времени, втрое превышающем по длительности интервал $[0, t_0]$ времени функционирования системы ($T = 3t_0$; $\eta_0 = 3$). В $N = 20$ таких испытаниях зарегистрирован один отказ [$l^*(T) = 1$].

Требуется найти значение γ -нижней границы $\bar{P}$ для вероятности P безотказной работы системы на $[0, t_0]$ в номинальном режиме ε_0 при заданном $\gamma = 0,90$.

Решение. Используя результаты расчетов, полученные в примере 8

по формуле (23) находим искомое значение

$$\underline{P} = 0,91 \frac{1}{\eta_0} = 0,91 \frac{1}{3} = 0,97.$$

Пусть стареющая на $[0, T]$ система испытывается по утяжеленному биномиальному плану с остановкой (см. определение 4), причем каждое из испытаний проводится на $[0, T] \supset [0, t_0]$ в режиме ε^* с коэффициентом утяжеления κ . Тогда согласно [66] статистика

$$\underline{P} = (1 - \gamma) \frac{1}{N_*^* \kappa \eta_0},$$

$$\eta_0 = \frac{T}{t_0} \geq 1 \quad (25)$$

является γ -нижней границей для вероятности P безотказной работы системы на $[0, t_0]$ в номинальном режиме ε_0 . В (25) случайная величина $N_*^* = N_*^*(T)$ определяется так. Пусть N — наибольший объем утяжеленных биномиальных испытаний на $[0, T]$ с остановкой, назначаемый до их проведения, а $l^*(T)$ — число возникающих на $[0, T]$ отказов. Тогда $N_*^*(T) = N$, если $l^*(T) = 0$ ($N_*^*(T)$ — число испытаний до первого отказа при $l^*(T) > 0$).

Статистика (25) может быть использована для нахождения γ -нижней границы $\underline{P}$ не только в схеме утяжеленных биномиальных испытаний с остановкой, но и в схеме утяжеленных биномиальных испытаний с остановкой одного образца с накоплением повреждений (в смысле определения 3), а также в схеме утяжеленных биномиальных испытаний Бернулли.

Пример 11. Пусть в условиях примеров 7 и 9 пружина испытывалась в утяжеленном режиме ε^* при $\kappa = 3$, причем $\eta_0 = 2$, т. е. продолжительность T каждого цикла превышает в 2 раза продолжительность t_0 рабочего цикла ($T = 2t_0$). Требуется найти значение γ -нижней границы $\underline{P}$ для вероятности P безотказной работы пружины на первом цикле $[0, t_0]$ в номинальном режиме ε_0 при заданном $\gamma = 0,90$, если зарегистрировано значение $N_*^*(T) = 40$.

Решение. Используя формулу (25), получаем искомое значение

$$\underline{P} = 0,1 \frac{1}{3 \cdot 40 \cdot 2} = 0,1 \frac{1}{240} = 0,99.$$

Рассмотрим теперь случай, когда время t_1 испытаний системы меньше заданного времени t_0 их безотказной работы (см. рис. 6, б).

Пусть система предназначена для использования на интервале $[0, t_0]$ времени в номинальном режиме ε_0 , а вероятность ее безотказной работы из (4) и (5)

$$P = P(t_0) = P(\xi^0 > t_0) =$$

$$= P(\Pi_t^0 > H_t^0, 0 \leq t \leq t_0) \quad (26)$$

подлежит оценке по результатам испытаний на меньшем интервале $[0, t_1] \subset [0, t_0]$, проводимым в утяжеленном режиме ε^* с коэффициентом κ повышения нагрузки.

Определение 6. Пусть вероятность $P(t_0)$ безотказной работы системы на заданном интервале $[0, t_0]$ времени функционирования в номинальном режиме ε_0 работы определяется из (26), причем функция F распределения наработки $\xi^0 = \xi(\varepsilon_0)$ на отказ имеет плотность $f(t) = F'(t)$ и $F(0) = 0$. Будем говорить, что система является молодой на $[0, t_0]$, если выполняется хотя бы одно из следующих условий.

1. На $[0, t_0]$ предусматривается эффективное восстановление системы, в силу чего функция $\lambda(t) = f(t)/(1 - F(t))$ интенсивности отказов постоянна или убывает на $[0, t_0]$.

2. На $[0, t_0]$ предусматривается восстановление системы, в силу чего $\lambda(t)$ либо убывает, либо постоянна на отдельных промежутках из $[0, t_0]$.

3. На некотором интервале $[0, t_1] \subset [0, t_0]$ выполняются условия 1 или 2, а на $[t_1, t_0]$ предусматриваются восстановительные работы, которые на отдельных промежутках из $[t_1, t_0]$ не могут сдерживать процесс накопления повреждений, что выражается в возрастании $\lambda(t)$ на этих промежутках. Однако работа процессов восстановления превалирует над работой процессов

накопления повреждений в том смысле, что

$$\int_{t_1}^{t_0} (\lambda(t) - \lambda(t_1)) dt \leq 0.$$

Если система является молодой на $[0, t_0]$, то согласно [66] в качестве γ -нижней границы для вероятности P из (26) можно принять статистику

$$P(t_0) = P_*^{\frac{\eta_0}{\kappa}}, \quad \eta_0 = \frac{t_0}{t_1} \geq 1,$$

где $P_* = P_*(t_1)$ — статистика, представляющая собой γ -нижнюю границу для вероятности P_* безотказной работы на $[0, t_1]$ в режиме ε^* .

Если на $[0, t_1]$ в режиме ε^* проводятся N испытаний по биномиальному плану, а l^* — число возникающих в них отказов, то

$$P(t_0) = (f_2(N, l^*, \gamma))^{\frac{\eta_0}{\kappa}} \quad (27)$$

При $l^* = 0$ из (27) получаем частное значение

$$P(t_0) = (1 - \gamma)^{\frac{1}{N} \frac{t_0}{t_1 \kappa}}.$$

Если на $[0, t_1]$ в режиме ε^* проводятся испытания молодой системы по биномиальному плану с остановкой с получением значений N'_* [см. формулу (25)], то статистика

$$P(t_0) = (1 - \gamma)^{\frac{1}{N'_*} \frac{t_0}{t_1 \kappa}}$$

является γ -нижней границей для вероятности $P(t_0)$ из (26).

Формула (25) допускает следующее усиление [66]. Пусть стареющая на $[0, T]$ система испытывается на $[0, T] \supset [0, t_0]$ в режиме ε^* по утяжеленному биномиальному плану с остановкой. Тогда при выборе доверительной вероятности γ из условия

$$(1 - \gamma)^{1/\kappa \eta_0} = \frac{1}{N + 1} \quad \text{или}$$

$$N = \frac{1}{(1 - \gamma)^{1/\kappa \eta_0}} - 1$$

статистика

$$P = \begin{cases} (1 - \gamma)^{1/N'_* \kappa \eta_0} & \text{при } N'_* < N; \\ 1 & \text{при } N'_* = N \end{cases}$$

является γ -нижней границей для вероятности P безотказной системы на $[0, t_0]$ в номинальном режиме ε_0 .

Глава 8. Оценка показателей безотказности при планах испытаний с измерением наработки

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ОЦЕНИВАНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ БЕЗОТКАЗНОСТИ

Испытания на надежность с измерением наработки применяют в тех случаях, когда необходима большая, чем при биномиальных планах испытаний, точность оценки показателей безотказности и, кроме того, имеется техническая возможность учета наработки испытываемых изделий.

В результате проведения испытаний вычисляются оценки показателей надежности для внесения их в нормативно-техническую документацию на изделие. В зависимости от того, что известно о функции распределения $F(t)$ наработки до отказа, возможны следующие варианты постановки задачи оценивания показателей безотказности.

1. Известен вид функции распределения $F(t)$ и неизвестны значения всех или некоторых параметров распределения. В этом случае вычисление показателей безотказности включает: оценку неизвестных параметров по выборочным значениям наработки испытываемых изделий; оценку показателей безотказности по вычисленным оценкам параметров закона распределения.

Такой подход для вычисления оценок показателей надежности называется параметрическим. Применение параметрического подхода предполагает проверку гипотезы о согласии теоретического закона распределения с опытными данными с помощью критериев согласия.

2. Вид функции распределения $F(t)$ неизвестен, предполагается лишь ее непрерывность.

3. Вид функции распределения $F(t)$ неизвестен, но известен класс распределений, к которому она относится. Здесь будут рассмотрены следующие классы распределений: распределения с возрастающей функцией интенсивности отказов (ВФИ-распределения); распределения с возрастающей в среднем функцией интенсивности отказов (ВСФИ-распределения).

Для двух последних вариантов оценка показателей безотказности вычисляется непосредственно по выборочным значениям наработки испытываемых изделий. Такой подход для вычисления показателей надежности называется непараметрическим.

Процедуры оценивания показателей безотказности, рассмотренные ниже, пригодны и для вычисления оценок показателей долговечности.

КЛАССИФИКАЦИЯ ПЛАНОВ ИСПЫТАНИЙ С ИЗМЕРЕНИЕМ НАРАБОТКИ

Для оценки показателей безотказности применяют 14 планов испытаний с измерением наработки, имеющих следующие условные обозначения:

1. $[NUN]$, $[NUR]$, $[NUT]$, $[NU(r, T)]$, $[NU(r_1, n_1, \dots, r_{k-1}, n_{k-1})]$, $[NU(T_1, n_1, \dots, T_{k-1}, n_{k-1})]$, $[NU_z]$;

2. $[NR_r]$, $[NRT]$, $[NR(r, T)]$;

3. $[NM_r]$, $[NMT]$, $[NMT_\Sigma]$, $[NM(r, T_\Sigma)]$.

Обозначения: N — объем выборки изделий, предназначенных для испытаний; U — планы испытаний, в которых отказавшие изделия не заменяются и не восстанавливаются; R — отказавшие изделия заменяются новыми;

M — работоспособность изделия восстанавливается после каждого отказа. Третья буква (сочетание букв) указывает на признак окончания испытаний: N — отказ всех N изделий; r — отказ r изделий ($r \leq N$) или наступление r отказов; T — по истечении времени (наработки) T ; (r, T) — отказ r изделий или истечение времени T в зависимости от того, какое из этих событий наступит ранее; $(r_1, n_1) \dots (r_{k-1}, n_{k-1}) r_k$ — при отказе r_1 изделий с испытаний снимают n_1 неотказавших изделий, после возникновения r_2 отказов с испытаний снимают n_2 неотказавших изделий и т. д., испытания прекращают после возникновения r_k отказов; $(T_1, n_1) \dots (T_{k-1}, n_{k-1}) T_k$ — по истечении времени T_1 с испытаний снимают n_1 неотказавших изделий (если число неотказавших изделий больше n_1) и т. д., испытания прекращают при истечении времени (наработки) T_k ; z — при наработке z_i каждого изделия, где

$$z_i = \min(t_i, \tau_i), \quad i = \overline{1, N}$$

(t_i — наработка до отказа i -го изделия; τ_i — наработка до снятия с испытаний работоспособного i -го изделия); T_Σ — суммарная наработка всех испытываемых изделий; (r, T_Σ) — наступление r отказов или достижение суммарной наработки T_Σ .

Пример 1. Рассмотрим план испытаний $[15 \ U \ (10,8) \ (40,2) \ 60]$. Этот план трактуется следующим образом: испытывают 15 однотипных изделий, при отказе объекта работоспособное состояние изделия не восстанавливается, отказавшие изделия новыми не заменяют; спустя 10 ч с испытаний снимают восемь работоспособных объектов (если за 10 ч отказало восемь и более объектов, испытания прекращают), спустя 40 ч после начала испытаний снимают два изделия (если к этому моменту осталось менее двух работоспособных объектов, испытания прекращают), испытания прекращают по истечении 60 ч. Рассматриваемый план характеризуется шестью параметрами: числом испытываемых объектов $N = 15$; числом снимаемых работоспособных объектов $n_1 = 8$ и $n_2 = 2$; продолжительностью $T_1 = 10$ ч

испытаний до первой остановки; до второй — $T_2 = 40$ ч и общей продолжительностью испытаний $T = 60$ ч.

В табл. 1 приведены рекомендуемые планы испытаний для оценки основных показателей надежности. Выбор конкретного плана является предметом планирования испытаний и рассмотрен ниже.

Далее рассматриваются планы типа $[... \ U \ ...]$. Результаты испытаний по планам $[... \ R \ ...]$ сводимы к результатам по планам $[... \ U \ ...]$ путем переноса начала испытаний каждого объекта к некоторому условному началу испытаний всех объектов.

Планы типа $[... \ M \ ...]$ можно интерпретировать как планы $[... \ U \ ...]$, если положить, что каждая наработка между отказами соответствует некоторому условному невосстанавливаемому объекту; восстановление работоспособного состояния объекта после отказа полное.

Планы типа $[... \ U \ ...]$, кроме плана $[NUN]$, предусматривают прекращение испытаний до наступления отказов всех испытываемых объектов.

Событие, приводящее к прекращению испытаний объекта до наступления отказа (предельного состояния) изучаемого характера, называется *цензурированием*. Причинами, приводящими к цензурированию, могут быть: одновременность начала и (или) окончания испытаний объектов; снятие с испытаний некоторых изделий по организационным причинам или в результате отказов их составных частей, надежность которых не исследуется; перевод в процессе испытания изделия из одного режима применения в другой.

Различают три типа цензурирования (прекращения испытания): тип I — при заданной наработке; тип II — при заданном числе отказов; тип III — случайное.

Приведем еще некоторые термины и определения, относящиеся к цензурированию.

Нарботка до цензурирования — наработка объекта от начала испытаний до наступления цензурирования. В некоторых случаях, особенно при проведении эксплуатационных испытаний, нет возможности измерять на-

1. Рекомендуемые планы испытаний на надежность

Показатель надежности	План испытаний	Примечание
Невосстанавливаемое изделие		
Средняя наработка до отказа	$[NUN], [NUR], [NUT], [NRr], [NRT], [NU (r_1n_1) (r_2n_2) \dots (r_{k-1}n_{k-1}) r_k], [NU (T_1n_1) (T_2n_2) \dots (T_{k-1}n_{k-1}) T_k], [NUz]$	—
Гамма-процентная наработка до отказа	$[NUR], [NUT], [NRr], [NRT]$	
Вероятность безотказной работы	$[NU (r_1n_1) (r_2n_2) \dots (r_{k-1}n_{k-1}) r_k], [NU (T_1n_1) (T_2n_2) \dots (T_{k-1}n_{k-1}) T_k], [NUz]$	
Восстанавливаемое изделие		
Средняя наработка до отказа	$[NMr], [NMT]$	При испытании необходимо учитывать наработки до первого отказа
Средняя наработка на отказ	$[NMr], [NMT]$	—
Средний ресурс (средний срок службы)	$[NUN], [NUR], [NUT], [NU (r_1n_1) (r_2n_2) \dots (r_{k-1}n_{k-1}) r_k], [NU (T_1n_1) (T_2n_2) \dots (T_{k-1}n_{k-1}) T_k], [NUz]$	Планы рассматривают применительно к предельному состоянию
Гамма-процентный ресурс (гамма-процентный срок службы)	$[NUR], [NUT], [NU (r_1n_1) (r_2n_2) \dots (r_{k-1}n_{k-1}) r_k], [NU (T_1n_1) (T_2n_2) \dots (T_{k-1}n_{k-1}) T_k], [NUz]$	

Продолжение табл. 1

Показатель надежности	План испытаний	Примечание
Среднее время восстановления	$[NM_r], [NMT]$	Планы рассматривают применительно к отказавшим объектам и переходят к плану $[rUr]$
Коэффициент готовности	$[NM_r], [NMT]$	—
Средний срок сохраняемости (гамма-процентный срок сохраняемости)	$[NUT]$	Планы рассматривают для невозстанавливаемых и восстанавливаемых изделий

2. Классификация выборок, порождаемых планами испытаний на безотказность

План испытаний	Тип цензурирования	Выборка
$[NUN]$	—	Полная
$[NUT]$	I	Однократно цензурированная
$[NU_r]$	II	То же
$[NU(r, T)]$	I или II	»
$[NU(T_i, n_i) r_k]$	I (прогрессивное)	Многократно цензурированная
$[NU(r_i n_i) T_k]$	II (прогрессивное)	То же
$[NU_z]$	III (случайное)	Случайно цензурированная

Примечание. Выборки, порождаемые планом $[NU_z]$, обобщают выборки, реализуемые по другим планам типа $[... U ...]$ [2].

работку. В этой ситуации речь должна идти о календарной продолжительности испытаний до цензурирования.

Цензурированная выборка — выборка, элементами которой служат значения наработки до отказа и наработки до цензурирования.

Однократно цензурированная выборка — цензурированная выборка, в которой значения всех наработок до цензурирования равны между собой.

Множественно цензурированная выборка — цензурированная выборка, в которой значения наработок до цензурирования не равны между собой. С учетом типа цензурирования классифицируют выборки, порождаемые соответствующими планами испытаний на безотказность. Классификация выборок представлена в табл. 2.

ПЛАНИРОВАНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ

Выбор типа плана испытаний. Данная задача планирования решается путем сравнения эффективности того или иного плана испытаний. С этой целью вводится некоторый критерий эффективности W . Тогда выбор типа плана испытаний из множества планов $\Pi = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k\}$ сводится к решению задачи [28]

$$W(\pi) \rightarrow \text{extr}, \pi \in \Pi \quad (1)$$

на множестве ограничений $\Omega(\pi)$.

В качестве критерия эффективности $W(\pi)$ выбирают следующие параметры: среднюю продолжительность испытаний, число испытываемых объектов, среднюю стоимость испытаний и т. п.

Достоверность оценки характеризуется величиной доверительной вероятности (уровнем) q для некоторого доверительного интервала оцениваемого показателя.

Точность оценки, вычисленной по выборке объема N , характеризуется величиной предельной относительной погрешности δ в оценке показателя R :

$$\delta = \max \left(\frac{\Delta R}{\hat{R}}, \frac{\Delta \bar{R}}{\bar{R}} \right), \quad (2)$$

где $\Delta R = \hat{R} - R$; $\Delta \bar{R} = \bar{R} - \hat{R}$ ($\hat{R}$, R , $\bar{R}$ — соответственно точечная оценка, нижняя (НДГ) и верхняя (ВДГ) границы односторонних доверительных интервалов показателя надежности R).

З а м е ч а н и е. Если результаты определительных испытаний предполагается использовать для контроля показателей надежности, то вместо предельной относительной погрешности следует применять предельную погрешность относительно ВДГ (для показателей безотказности типа «интенсивность отказов») или относительно НДГ (для показателей безотказности типа «вероятность безотказной работы», «средняя наработка до отказа» и др.).

Задача (1) решается перебором значений $W(\pi_i)$ для всех планов $\pi_i \in \Pi$ на множестве ограничений $\Omega(\pi)$.

Пример 2. Из множества планов $[NUN]$, $[NUR]$ и $[NUZ]$ выбрать план испытаний для оценки средней наработки до отказа, чтобы средняя продолжительность испытаний была минимальной при условиях $N \leq N_0$, степень цензурирования $v \leq v_0$. Распределение наработки до отказа предполагается экспоненциальным.

Решение. Сравним средние продолжительности испытаний по планам $[NUN]$ и $[NUR]$. Для плана $[NUR]$ средняя продолжительность испытаний [42]:

$$T_1 \simeq \frac{1}{\lambda} \ln \frac{N + 0,5}{N - r + 0,5}, \quad (3)$$

где λ — параметр экспоненциального распределения.

Для плана $[NUN]$ средняя продолжительность испытаний

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \simeq \frac{1}{\lambda} (\ln N + C) = \\ &= \frac{1}{\lambda} \ln 1,781N, \end{aligned}$$

где C — постоянная Эйлера; $C = 0,5772$.

При фиксированных $N_0 \geq 6$ и $v_0 \leq 0,9$ $T_1 < T_2$.

Сравним средние продолжительности испытаний по планам $[Nur]$ и $[NUz]$. Дополнительно будем считать, что наработка до цензурирования изделий для плана $[NUz]$ подчиняется экспоненциальному распределению с параметром μ .

В этом случае распределение случайной величины $z = \min(t, \tau)$ также является экспоненциальным с параметром $\Lambda = \lambda + \mu$.

Тогда для плана $[NUz]$ средняя продолжительность испытаний

$$T_z \approx \frac{1}{\lambda + \mu} \ln 1,781N. \quad (4)$$

Сопоставляя (3) и (4), получаем

$$\frac{T_z}{T_1} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{\ln 1,781N}{\ln \frac{N + 0,5}{N - r + 0,5}} \approx \approx v \frac{\ln 1,781N}{\ln \frac{1}{1 - v}} > 1 \text{ при } N \geq 6,$$

$$\text{где } v = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{r}{N} \leq 0,9.$$

Следовательно, план $[Nur]$ эффективнее планов $[NUz]$ и $[NUN]$ по критерию минимума средней продолжительности испытаний при фиксированных значениях N и v .

В табл. 3 приведены номера эффективных планов испытаний на безотказность при парном сравнении по крите-

3. Результаты парного сравнения планов (номера эффективных планов) испытаний на безотказность по критерию минимума средней продолжительности испытаний

Номер плана	Тип плана	Номер плана для парного сравнения					
		1	2	3	4	5	6
1	$[Nur]$	—	1	1,3	1	5	6
2	$[NUN]$	1	—	3	4	5	6
3	$[NUT]$	3,1	3	—	4	5	6
4	$[NUz]$	1	4	3	—	5	6
5	$[NRR]$	5	5	5	5	—	5,6
6	$[NRT]$	6	6	6	6	6,5	—

рию минимума средней продолжительности испытаний при ограничениях $N \leq N_0, v \leq v_0$.

Определение параметров планов испытаний. Для вычисления параметров выбранного плана испытаний используют выражение (2), связывающее точность (δ) и достоверность (q) с результатами испытаний.

В табл. 4 приведены формулы для расчета параметров планов испытаний $[NUN]$, $[Nur]$ и $[NUz]$ для оценки средней наработки до отказа.

При планировании предполагаются заданными значения коэффициента вариации v наработки до отказа и степени цензурирования v .

Для плана $[NUT]$ параметры плана N и T определяют по следующей схеме:

для заданных значений погрешности δ , доверительной вероятности q и коэффициента вариации v (для распределений Вейбулла и нормального) по табл. 4 определяют параметры N и r плана $[Nur]$:

для найденных параметров N и r вычисляют коэффициент $\kappa = T/T_{cp}$ по формулам:

для распределения Вейбулла

$$\kappa = \left[\ln \frac{N + 0,5}{N + 0,5 - r} \right]^{1/b} \times \times [\Gamma(1 + 1/b)]^{-1};$$

для нормального распределения

$$\kappa = 1 + U_v v,$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция; U_v — квантиль нормального распределения уровня v ; b — параметр формы распределения Вейбулла, однозначно связанный с коэффициентом вариации (см. табл. 4)

После этого для ожидаемого значения T_{cp} находят

$$T = \kappa T_{cp}.$$

После проведения испытаний (за исключением случая экспоненциального распределения) необходимо проверить соблюдение условия $\hat{v} \leq v$, где $\hat{v}$ — оценка коэффициента вариации, вычисленная по результатам испытаний.

Если окажется, что оценка $\hat{v} > v$, то испытания необходимо перепланировать.

4. Формулы для расчета параметров планов испытаний для оценки средней наработки до отказа

План испытаний, его параметры, вид функции распределения	Формула для определения параметров плана испытаний	Примечание
$[NUN];$ $N;$ $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$	$\frac{2N}{\chi^2_{1-q}(2N)} = \delta + 1$	$\chi^2_{1-q}(2N)$ определяют по табл. 8 приложения
$[NUN];$ $N;$ $F(t) = 1 - e^{-(t/a)^b}$	$\frac{2N}{\chi^2_{1-q}(2N)} = (\delta + 1)$	$v = \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{b+2}{b}\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{b+1}{b}\right)\right]^2} - 1}$
$[NUN];$ $N;$ $F(t) = \Phi\left(\frac{t-a}{\sigma}\right)$	$\frac{t_q(N-1)}{\sqrt{N}} = \frac{\delta}{v}$	$t_q(N-1)$ определяют по табл. 9 приложения
$[NUN];$ $N;$ $F(t) = \Phi\left(\frac{\ln t - a}{\sigma}\right)$	$N = \left(\frac{u_q}{\delta}\right)^2 \cdot \ln(v^2 + 1) \times$ $\times [1 + 0,5 \ln(v^2 + 1)]$	u_q определяют по табл. 7 приложения
$[NUR];$ $N, r;$ $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$	$\frac{2r}{\chi^2_{1-q}(2r)} = \delta + 1;$ $N = r/v$	$\chi^2_{1-q}(2r)$ определяют по табл. 8 приложения
$[NUR];$ $N, r;$ $F(t) = 1 - e^{-(t/a)^b}$	$\frac{2r}{\chi^2_{1-q}(2r)} = (\delta + 1)^b;$ $N = r/v$	—
$[NUR];$ $N, r;$ $F(t) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$	$\frac{t_q(r-1)}{\sqrt{r}} = \frac{\delta}{v};$ $N = r/v$	$t_q(r-1)$ определяют по табл. 9 приложения
$[NUZ];$ $N;$ $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$	$\frac{2N}{\chi^2_{1-q}(2N)} = \delta + 1$	—

Примечание. $\chi^2_p(l)$ и $t_p(l)$ — квантили соответственно распределения χ^2 и распределения Стьюдента с числом степеней свободы l уровня p .

5. Рекомендации по выбору значений δ и q

Объект испытаний	Предельная относительная погрешность δ	Доверительная вероятность q
Изделие в целом; деталь, обуславливающая внешний вид изделия	0,15—0,20	0,80—0,90
Базовая деталь	0,10—0,15	0,90—0,95
Детали, обеспечивающие безопасность изделия	0,05	0,95—0,99

Пример 3. Определить объем выборки N , необходимый для оценки средней наработки до отказа по плану $[NUN]$ с предельной относительной погрешностью $\delta = 0,1$ и доверительной вероятностью $q = 0,8$ в предположении, что наработка до отказа распределена логарифмически нормально с коэффициентом вариации $v = 0,4$.

Решение. По табл. 4 (см. п. 4) для $v = 0,4$, $\delta = 0,1$ и $q = 0,8$ находим $N \simeq 10$. Пусть по результатам испытаний десяти объектов вычислено $\hat{v} = 0,5$. Так как получилось $\hat{v} > v$, то испытания необходимо перепланировать.

Для $\hat{v} = 0,5$, $\delta = 0,1$ и $q = 0,8$ находим $N \simeq 20$. Следовательно, на испытания необходимо поставить дополнительно десять объектов.

Рекомендации по выбору значений δ и q даны в табл. 5. Значения коэффициента вариации v в зависимости от вида предельного состояния объекта испытаний приведены ниже.

Необходимость проведения капитального ремонта	0,3—0,6
Предельный износ	0,3—0,4

Разрушение:

обусловленное сочетанием износа, усталости, коррозии	0,3—0,4
от усталости при изгибе, кручении	0,3—0,5
крепежных соединений	0,7—0,8
от контактной усталости	0,6—0,7

ОЦЕНКА ПОКАЗАТЕЛЕЙ БЕЗОТКАЗНОСТИ НА ОСНОВЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

Под оценками показателей надежности понимают значения показателей, определяемые по результатам испытаний. За значение показателя принимают точечную оценку или (и) границы (НДГ и ВДГ) доверительного интервала, который с заданной вероятностью покрывает истинное значение показателя.

При применении параметрических методов оценивания полагают, что вид закона распределения наработки до отказа известен до испытаний; выборка, по которой оценивают показатели безотказности, статистически однородна. Проверка гипотезы о виде закона распределения осуществляется с помощью критериев согласия.

Точечные оценки показателей безотказности рассчитывают по формулам, приведенным в табл. 6, по точечным оценкам параметров закона распределения.

Общий метод вычисления интервальных оценок показателей надежности заключается в нахождении функции (статистики) $\Phi(z_1, \dots, z_N, R)$, где $z_1, \dots, z_N$ — результаты испытаний; R — оцениваемый показатель надежности. Распределение F_Φ этой функции обусловлено видом исходного распределения наработки до отказа (но не значением показателя R). Если такая статистика найдена, то границы доверительного интервала показателя надежности R для уровня q вычисляют из следующих уравнений (при условии, что функция Φ не убывает монотонно по R):

$$\Phi(z_1, \dots, z_N, \underline{R}) = F_\Phi^{-1}(1 - q'); \quad (5)$$

$$\Phi(z_1, \dots, z_N, \bar{R}) = F_\Phi^{-1}(q'), \quad (6)$$

6. Формулы для вычисления точечных оценок показателей надежности

Закон и вид функции распределения	Оценка показателя надежности			
	средней наработки до отказа $T_{\text{ср}}$	гамма-процентной наработки до отказа T_{γ}	вероятности безотказной работы $P(t)$	интенсивности отказов $\lambda(t)$
Экспоненциальный $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$	$1/\hat{\lambda}$	$\frac{1}{\hat{\lambda}} \ln 1/\gamma$	$e^{-\hat{\lambda} t}$	$\hat{\lambda}$
Вейбулла $F(t) = 1 - e^{-(t/a)^b}$	$a \Gamma(1 + 1/b)$	$a (\ln 1/\gamma)^{1/b}$	$e^{-(t/a)^b}$	$\frac{b}{a^b} t^{b-1}$
Нормальный $F(t) = \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)$	$\hat{\mu}$	$\hat{\mu} - u_{\gamma} \hat{\sigma}$	$\Phi\left(\frac{\hat{\mu} - t}{\hat{\sigma}}\right)$	$\frac{f(t)}{\Phi\left(\frac{\hat{\mu} - t}{\hat{\sigma}}\right)}$
Логарифмически нормальный $F(t) = \Phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)$	$e^{\hat{\mu} + \hat{\sigma}^2/2}$	$e^{\hat{\mu} - u_{\gamma} \hat{\sigma}}$	$\Phi\left(\frac{\hat{\mu} - \ln t}{\hat{\sigma}}\right)$	$\frac{f(t)}{\Phi\left(\frac{\hat{\mu} - \ln t}{\hat{\sigma}}\right)}$

где $F_{\Phi}^{-1}(q')$ — квантиль распределения F_{Φ} уровня q' (для одностороннего доверительного интервала $q' = q$; для двустороннего — $q' = (1 + q)/2$).

Если функция $\Phi(z_1, \dots, z_N, R)$ неизвестна, то для нахождения приближенных интервальных оценок показателей безотказности используют нормальную аппроксимацию распределения оценки $\hat{R}$ показателя R [31].

Метод максимального правдоподобия. Вычисление точечных оценок параметров распределения методом максимального правдоподобия сводится к решению уравнений правдоподобия относительно неизвестных параметров $\theta_1, \dots, \theta_k$:

$$\frac{\partial \ln l(\theta_1, \dots, \theta_k)}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = \overline{1, k}, \quad (7)$$

где $l(\cdot)$ — функция правдоподобия.

При соблюдении условий регулярности оценки (7) оказываются состоятельными, асимптотически эффективными, распределенными асимптотически нормально.

Точечные оценки параметров распределения методом максимального правдоподобия рекомендуется вычислять при следующих условиях [2]:

$$\begin{aligned} 6 &< N < 10, \quad r/N \geq 0,5; \\ 10 &\leq N < 20, \quad r/N \geq 0,3; \\ 20 &\leq N < 50, \quad r/N \geq 0,2; \\ 50 &\leq N < 100, \quad r/N \geq 0,1. \end{aligned}$$

В тех случаях, когда эти условия не выполняются, необходимо вычислять только НДГ параметров распределения (и соответственно показателей надежности).

Интервальные оценки вычисляют по формулам (5), (6).

Экспоненциальное распределение. Плотность распределения имеет вид

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0, \quad t \geq 0.$$

Оценке подлежит параметр λ .

Формулы для вычисления точечной оценки $\hat{\lambda}$ в зависимости от плана испытаний приведены в табл. 7.

Формулы для вычисления интервальной оценки параметра λ приведены в табл. 8.

Формулы для вычисления интервальных оценок показателей безотказности приведены в табл. 9.

Распределение Вейбулла. Плотность распределения имеет вид

$$f(t) = \frac{b}{a} \left(\frac{t}{a}\right)^{b-1} e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^b},$$

где $a > 0$; $b > 0$; $t \geq 0$. Оценке подлежат параметры a и b .

Формулы для вычисления точечных оценок параметров a и b в зависимости от плана испытаний приведены в табл. 10. Оценки $\hat{a}$ и $\hat{b}$ этих параметров являются состоятельными, асимптотически несмещенными и эффективными.

Нахождение оценок $\hat{a}$ и $\hat{b}$ начинается с решения уравнения относительно b . Уравнение решают методом итераций в следующей последовательности (приведена для плана [NUz]; для остальных планов последовательность решения уравнения такая же).

1. Находят вспомогательный коэффициент A :

$$A = \frac{\sum_{i=1}^r \ln t_i}{r}.$$

2. Вычисляют начальное приближение оценки b :

$$b_0 = \frac{r+1}{(A - \ln t_{(1)}) (0,23r + 3,71)}.$$

3. Вычисляют следующее приближение b_{k+1} ($k = 0, 1, 2, \dots$):

$$b_{k+1} = \left[\frac{\sum_{i=1}^r \ln t_i \cdot t_i^{b_k} + \sum_{j=1}^n \ln \tau_j \tau_j^{b_k}}{\sum_{i=1}^r t_i^{b_k} + \sum_{j=1}^n \tau_j^{b_k}} - A \right]^{-1}$$

4. Процесс нахождения приближений прекращают, когда

$$\left| \frac{b_{k+1} - b_k}{b_k} \right| < \varepsilon, \quad (8)$$

где $\varepsilon \leq 0,1$ (ε — требуемая точность решения уравнения).

Приближенное значение b_{k+1} , удовлетворяющее условию (8), принимают в качестве искомой оценки $\hat{b}$.

Оценка $\hat{a}$ находится прямой подстановкой оценки $\hat{b}$ в формулы для оценки $\hat{a}$ (см. табл. 10).

З а м е ч а н и е. Оценка параметра b в некоторых случаях оказывается слишком большой ($\hat{b} > 4$) или малой ($\hat{b} < 0,5$). Это свидетельствует о том, что распределение наработки до отказа не подчиняется закону Вейбулла, и (или) объем выборки недостаточен, и (или) отношение r/N мало. В этих случаях следует: проверить правильность гипотезы о виде распределения; использовать дополнительную информацию о наработках; применять непараметрические методы оценивания.

Интервальные оценки показателей безотказности вычисляют по формулам табл. 11.

Пример 4. Оценить среднюю наработку до отказа и вероятность безотказной работы (вычислить точечную оценку и НДГ показателей уровня $q = 0,9$) по результатам испытаний 15 изделий, проведенных по плану [NUr] до десяти отказов. Нарботка, для которой вычисляется вероятность безотказной работы, равна 0,4.

Нарботки до отказа испытанных изделий были равны: 0,743; 0,768; 0,826; 1,001; 1,069; 1,265; 1,305; 1,345; 1,422; 1,685.

7. Формулы для вычисления точечной оценки параметра λ [20]

План испытаний	Оценка параметра λ	Свойства оценки	Примечание
[NUN]	$\frac{N-1}{s}, N > 1$	Состоятельная, несмещенная, асимптотически эффективная	$s = \sum_{i=1}^N t_i$
	$\frac{1}{t_1}, N = 1$	Смещенная	
[NUr]	$\frac{r-1}{s}, r > 1$	Состоятельная, несмещенная, асимптотически эффективная	$s = \sum_{i=1}^r t_i + (N-r) t_{(r)}$ где $t_{(i)}$ — i -порядковая статистика
	$\frac{1}{Nt_{(1)}}, r = 1$	Смещенная	
[NUT]	$\frac{r}{s}, r > 0$	Состоятельная, смещенная, асимптотически эффективная	$s = \sum_{i=1}^r t_i + (N-r) T$
[NU2]	$\frac{rN}{s(N-1)}$	Состоятельная, асимптотически эффективная, несмещенная, если наработка до цензурирования распределена экспоненциально	$s = \sum_{i=1}^r t_i + \sum_{j=1}^n \tau_j,$ $r + n = N$

8. Формулы для вычисления интервальной оценки параметра λ [20]

План испытаний	Формулы для вычисления	
	НДГ уровня q	ВДГ уровня q
[NUN]: при N > 1	$\frac{\hat{\lambda}^2 \chi^2_{1-q} 2N}{2(N-1)}$	$\frac{\lambda^2 \chi^2_q 2N}{2(N-1)}$
при N = 1	$\frac{1}{2t_{(1)}} \chi^2_{1-q}(2) = -\frac{1}{t_{(1)}} \ln q$	$\frac{1}{2t_{(1)}} \chi^2_q(2) = -\frac{1}{t_{(1)}} \ln(1-q)$

Продолжение табл. 8

План испытаний	Формулы для вычисления	
	НДГ уровня q	ВДГ уровня q
[NУr]:		
при $r > 1$	$\frac{\hat{\lambda} \chi_{1-q}^2(2r)}{2(r-1)}$	$\frac{\hat{\lambda} \chi_q^2(2r)}{2(r-1)}$
при $r = 1$	$\frac{\hat{\lambda} \chi_{1-q}^2(2)}{2} = \frac{1}{Nt_{(1)}} \ln \frac{1}{q}$	$\frac{\hat{\lambda} \chi_q^2(2)}{2} = \frac{1}{Nt_{(1)}} \ln \frac{1}{1-q}$
[NУT]:		
при $r > 0$	$\frac{\chi_{1-q}^2(2r)}{2r}$	$\frac{\hat{\lambda} \chi_q^2(2r+2)}{2r}$
при $r = 0$	0	$\frac{\chi_q^2(2)}{2NT} = \frac{1}{NT} \ln \frac{1}{1-q}$
[NУz] *	$\frac{\hat{\lambda} \chi_{1-q}^2(2N)}{2N}$	$\frac{\hat{\lambda} \chi_q^2(2N)}{2N}$

* Формулы для плана [NУz] получены в предположении, что распределение наработки до цензурирования является экспоненциальным.

9. Формулы для вычисления интервальной оценки показателей безотказности при экспоненциальном распределении

Показатели надежности	НДГ уровня q	ВДГ уровня q
Средняя наработка $T_{ср}$ до отказа	$\frac{1}{\bar{\lambda}}$	$\frac{1}{\underline{\lambda}}$
Гамма-процентная наработка T_γ до отказа	$(1/\bar{\lambda}) \ln (1/\gamma)$	$(1/\underline{\lambda}) \ln (1/\gamma)$
Вероятность $P(t)$ безотказной работы	$e^{\bar{\lambda}t}$	$e^{-\underline{\lambda}t}$
Интенсивность λ отказов	$\underline{\lambda}$	$\bar{\lambda}$

10. Формулы для вычисления оценок $\hat{a}$ и $\hat{b}$ параметров a и b [2]

План испытаний	a	b
[NUN]	$\left(\frac{\sum_{i=1}^N t_i^b}{N} \right)^{1/b}$	$\left(\frac{N}{b} + \sum_{i=1}^N \ln t_i \right) \sum_{i=1}^N t_i^b - N \sum_{i=1}^N \ln t_i = 0$
[NUR]	$\left[\frac{\sum_{i=1}^r t_i^b + (N-r) t_m^b}{r} \right]^{1/b}$	$\left(\frac{r}{b} + \sum_{i=1}^r \ln t_i \right) \left[\sum_{i=1}^r t_i^b + (N-r) t_m^b \right] -$
[NUT]		$- r \left[\sum_{i=1}^r t_i^b \ln t_i + (N-r) t_m^b \ln t_m \right] = 0$
[NU ₂]	$\left(\frac{\sum_{i=1}^r t_i^b + \sum_{j=1}^n \tau_j^b}{r} \right)^{1/b}$	$\left(\frac{r}{b} + \sum_{i=1}^r \ln t_i \right) \left(\sum_{i=1}^r t_i^b + \sum_{j=1}^n \tau_j^b \right) -$
		$- r \left(\sum_{i=1}^r t_i^b \ln t_i + \sum_{j=1}^n \tau_j^b \ln \tau_j \right) = 0$

Примечание. $t_m = t_{(r)}$ для плана [NUR]; $tm = T$ для [NUT].

Решение. 1. Определяем оценку параметра b (полагая $\varepsilon \leq 0,1$):

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{10} \ln t_i}{10} = \frac{0,987}{10} = 0,0987;$$

$$b_0 = \frac{11}{(0,0987 + 0,297) 6,01} = 4,625;$$

$$b_1 = \left(\frac{10,256 + 5 \cdot 0,5218 \cdot 11,169}{28,917 + 5 \cdot 11 \cdot 169} - \right. \\ \left. - 0,0987 \right)^{-1} = 2,732;$$

$$\left| \frac{b_1 - b_0}{b_0} \right| > 0,1;$$

$$b_2 = \left(\frac{4,462 + 5 \cdot 0,5218 \cdot 4,160}{15,717 + 5 \cdot 4,160} - \right.$$

$$\left. - 0,0987 \right)^{-1} = 3,118;$$

$$\left| \frac{b_2 - b_1}{b_1} \right| > 0,1;$$

$$b_3 = \left(\frac{5,3 + 5 \cdot 0,5218 \cdot 5,088}{17,599 + 5 \cdot 5,088} - \right.$$

$$\left. - 0,0987 \right)^{-1} = 3,004.$$

Так как $\left| \frac{b_3 - b_2}{b_2} \right| < 0,1$, то $b = b_3 \simeq 3$.

2. Определяем оценку параметра a :

$$a = \left(\frac{17,008 + 5 \cdot 1,685^3}{10} \right)^{1/3} \simeq 1,60.$$

11. Формулы для вычисления интервальных оценок показателей безотказности при распределении Вейбулла [29]

Показатель надежности	НДГ уровня q	ВДГ уровня q	Примечание
Средняя наработка $T_{\text{ср}}$ до отказа	$\hat{T}_{\text{ср}} \exp \left(-\frac{V_q}{\hat{b}} \right)$	$\hat{T}_{\text{ср}} \exp \left(-\frac{V_{1-q}}{\hat{b}} \right)$	Значения V_q см. табл. 12 приложения
Гамма-процентная наработка T_γ до отказа	$\exp \left(\ln \hat{a} - V_q^\gamma / \hat{b} \right)$	$\exp \left(\ln \hat{a} - V_{1-q}^\gamma / \hat{b} \right)$	Значения V_q^γ см. табл. 12 приложения
Вероятность $P(t)$ безотказной работы	$L(q, \hat{b} \ln \hat{a} / t)$	$L(1 - q, \hat{b} \ln \hat{a} / t)$	Значения $L(q, x)$ определяются по рис. 11—16 приложения

Примечания: 1. Интервальные оценки для средней наработки до отказа при известном значении параметра b являются точными, при неизвестном — приближенными.

2. При определении значений V_q , V_q^γ и $L(\cdot)$ для плана $[NUz]$ следует полагать $r = [N(1 - \hat{P}(t_r))]$, где $[\cdot]$ — целая часть.

3. Найдем оценку $T_{\text{ср}}$:

$$\hat{T}_{\text{ср}} = \hat{a} \Gamma(1 + 1/\hat{b}) = 1,6 \cdot 0,8934 \simeq 1,43.$$

4. Вычислим НДГ средней наработки до отказа

$$\underline{T}_{\text{ср}} = \hat{T}_{\text{ср}} \exp \left(-\frac{V_{0,9}}{\hat{b}} \right) = 1,43 \exp \left(-\frac{0,42}{3} \right) \simeq 1,24.$$

5. Вычислим точечную оценку $P(t)$

$$\hat{P}(t) = e^{-(t/\hat{a})^{\hat{b}}} = e^{-\left(\frac{0,4}{1,6}\right)^3} = 0,984.$$

6. Из табл. 11, а также рис. 12 приложения имеем

$$\underline{P}(t) = L\left(0,9; 3 \ln \frac{1,6}{0,4}\right) \simeq 0,92.$$

В случае $r = 0$ можно вычислить НДГ для $T_{\text{ср}}$ и T_γ в предположении, что параметр b известен:

$$\underline{T}_{\text{ср}} = \Gamma(1 + 1/b) \left[-\frac{\sum_{i=1}^N \tau_i^b}{\ln(1 - q)} \right]^{1/b},$$
$$\underline{T}_\gamma = (-\ln \gamma)^{1/b} \left[-\frac{\sum_{i=1}^N \tau_i^b}{\ln(1 - q)} \right]^{1/b}$$

При этом для плана испытаний $[NUT]$ $\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_N = T$.

Нормальное распределение. Плотность распределения имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

где $\mu > 0$; $\sigma > 0$; $\sigma/\mu \leq 0,3$; $t \geq 0$.
Оценке подлежат параметры μ и σ .

12. Формулы для вычисления коэффициентов уравнения правдоподобия

Параметр	План	
	[NUT] или [NUT]	[NUz]
A	$\sum_{i=1}^r t_i + 0,64 (N - r) t_m$	$\sum_{i=1}^r t_i + 0,64 \sum_{j=1}^n \tau_j$
B	$r + 0,64 (N - r)$	$r + 0,64n$
C	$\sum_{i=1}^r t_i^2 + 0,64 (N - r) t_m^2$	$\sum_{i=1}^r t_i^2 + 0,64 \sum_{j=1}^n \tau_j^2$
D	$0,8 (N - r)$	$0,8n$
E	$0,8 (N - r) t_m$	$0,8 \sum_{j=1}^n \tau_j$
$F_k (F_0 = 0)$	$(N - r) \Delta'_k t_m$	$\sum_{j=1}^n \Delta_{jk} \tau_j$
$\Delta_k (\Delta_0 = 0)$	$(N - r) \Delta'_k$	$\sum_{j=1}^n \Delta_{jk}$
Δ'_k, Δ_{jk}	$\lambda_k - 0,8 - 0,64z_k$	$\lambda_{jk} - 0,8 - 0,64z_{jk}$
z_k, z_{jk}	$\frac{t_m - \hat{\mu}_{k-1}}{\hat{\sigma}_{k-1}}$	$\frac{\tau_j - \hat{\mu}_{k-1}}{\hat{\sigma}_{k-1}}$
λ_k, λ_{jk}	$\frac{e^{-z_k^2/2}}{\int_{z_k}^{\infty} e^{-y^2/2} dy}$	$\frac{e^{-z_{jk}^2/2}}{\int_{z_{jk}}^{\infty} e^{-y^2/2} dy}$

Примечание. См. примечание к табл. 10.

Для плана испытаний $[NUN]$ оценки параметров μ и σ равны соответственно:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i;$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (t_i - \hat{\mu})^2}.$$

Оценка $\hat{\mu}$ является несмещенной, оценка $\hat{\sigma}$ смещена.

Для планов испытаний $[NUR]$, $[NUT]$ и $[NUz]$ оценки $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}$ определяют из следующих уравнений:

$$\sum_{i=1}^r \frac{t_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} + \sum_{j=1}^n f\left(\frac{\hat{\mu} - \tau_j}{\hat{\sigma}}\right) \Phi\left(\frac{\hat{\mu} - \tau_j}{\hat{\sigma}}\right) = 0;$$

$$(9)$$

$$r - \sum_{i=1}^r \left(\frac{t_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)^2 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\hat{\mu} - \tau_j}{\hat{\sigma}}\right) \frac{f\left(\frac{\hat{\mu} - \tau_j}{\hat{\sigma}}\right)}{\Phi\left(\frac{\hat{\mu} - \tau_j}{\hat{\sigma}}\right)} = 0.$$

З а м е ч а н и е. Для планов $[NUR]$ и $[NUT]$ $\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_n = t_m$.

Уравнения (9) решаются с помощью следующей итеративной процедуры:

$$\hat{\sigma}_k = 1/2r \left[E + F_k - A \left(\frac{D + \Delta_k}{B} \right) + \sqrt{\left[E + F_k - A \left(\frac{D + \Delta_k}{B} \right) \right]^2 + 4r \left(C - \frac{A^2}{B} \right)} \right];$$

$$(10)$$

$$\hat{\mu}_k = \frac{A}{B} + \left(\frac{D + \Delta_k}{B} \right) \hat{\sigma}_k,$$

где k — шаг итерации, $k = 0, 1, \dots$

Коэффициенты, входящие в уравнения (10), вычисляют по формулам, приведенным в табл. 12.

Интервальные оценки показателей безотказности вычисляют по формулам табл. 13 в зависимости от плана испытаний.

В случае логарифмически нормального распределения наработки до отказа точечные и интервальные оценки показателей надежности вычисляют по формулам для нормального распределения, заменяя значения наработок их натуральными логарифмами.

Метод линейного оценивания. Этот метод применяют для вычисления показателей безотказности по результатам испытаний небольшого числа объектов. Метод обеспечивает состоятельность и несмещенность оценок параметров распределения.

Распределение Вейбулла. Точечные оценки параметров вычисляют по формулам [29]:

$$\hat{a} = \exp \left[\sum_{i=1}^r A_i \ln t_{(i)} + \frac{P}{1-L} \sum_{i=1}^r C_i \ln t_{(i)} \right];$$

$$(11)$$

$$\hat{b} = \frac{1-L}{\sum_{i=1}^r C_i \ln t_{(i)}}.$$

Для плана $[NUN]$ $r = N$.

Значения коэффициентов A_i , C_i , P , L для планов испытаний $[NUN]$, $[NUR]$, $[NUT]$ приведены в работе [29], для плана $[NUz]$ — в работе [2].

Интервальные оценки показателей безотказности вычисляют по формулам, приведенным в табл. 11.

Пример 5. Пользуясь данными примера 4, вычислить среднюю наработку до отказа методом линейного оценивания.

Решение. 1. Вычисляем точечные оценки параметров распределения Вейбулла. Коэффициенты A_i , C_i , L , P при $N = 15$, $r = 10$ равны [29]:

$A_1 = -0,0196$; $A_2 = -0,0134$; $A_3 = -0,0053$; $A_4 = 0,0043$; $A_5 = 0,0155$; $A_6 = 0,0282$; $A_7 = 0,0428$; $A_8 = 0,0596$; $A_9 = 0,0791$; $A_{10} = 0,8087$; $C_1 = -0,0863$; $C_2 = -0,0897$; $C_3 = -0,0883$; $C_4 = -0,0838$; $C_5 =$

13. Формулы для вычисления интервальных оценок показателей безотказности при нормальном распределении

Показатель надежности	НДГ уровня q	ВДГ уровня q	Примечание
Средняя наработка $T_{\text{ср}}$ до отказа	$\hat{\mu} - t_q(r-1) \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{r}}$	$\hat{\mu} + t_q(r-1) \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{r}}$	Значения $t_q(r-1)$ приведены в табл. 9 приложения
Гамма-процентная наработка T_γ до отказа	$\hat{T}_{\text{ср}} - K(\gamma, q, r) \hat{\sigma}$	$\hat{T}_{\text{ср}} + K(\gamma, 1 - q, r) \hat{\sigma}$	Значения $K(\gamma, q, r)$ приведены в табл. 11 приложения
Вероятность $P(t)$ безотказной работы	$\Phi(\underline{h})$	$\Phi(\bar{h})$	$\underline{h} \simeq \bar{h} - u_q \times \sqrt{\frac{1}{r} \left(1 + \frac{\bar{h}^2}{2}\right)};$ $\bar{h} \simeq \bar{h} + u_q \times \sqrt{\frac{1}{r} \left(1 + \frac{\bar{h}^2}{2}\right)};$ $\bar{h} = \frac{t - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}$

Примечания: 1. Для плана [NUN] $r = N$.
2. Для планов [NUr], [NUT] и [NUz] оценки являются приближенными.
3. Для плана [NUz] $r = [N(1 - \hat{P}(t_r))]$.

$= -0,0765; C_6 = -0,0663; C_7 = -0,0529; C_8 = -0,0360; C_9 = 0,0149; C_{10} = 0,5948; L = 0,0819; P = 0,0218.$

Находим точечные оценки параметров a и b по формулам (11):

$$\sum_{i=1}^{10} A_i \ln t_{(i)} = 0,4961;$$

$$\sum_{i=1}^{10} C_i \ln t_{(i)} = 0,3254;$$

$$a = \exp \left(0,4961 + \frac{0,0218}{1 - 0,0819} \right) = 1,68;$$

$$b = \frac{1 - 0,0819}{0,3254} = 2,82.$$

2. Вычисляем точечную оценку $T_{\text{ср}}$:
$$\hat{T}_{\text{ср}} = 1,68 \cdot \Gamma(1 + 1/2,82) = 1,49.$$

3. Определяем НДГ средней наработки до отказа
$$T_{\text{ср}} = \hat{T}_{\text{ср}} \exp \left(-\frac{V_{0,9}}{b} \right) = 1,49 \cdot \exp \left(-\frac{0,42}{2,82} \right) = 1,28.$$

Нормальное распределение. Точечные оценки параметров μ и σ при планах испытаний [NUN], [NUr] и [NUT]

вычисляют по следующим формулам [15]:

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^r \alpha_i t_{(i)}; \quad \hat{\sigma} = \sum_{i=1}^r \beta_i t_{(i)}. \quad (12)$$

Для плана испытаний [NUN] $r = N$.

Значения коэффициентов α_i, β_i приведены в [15].

Оценки (12) являются несмещенными для планов [NUN] и [NUR].

В случае плана [NUz] и $N \leq 6$ для оценки показателей безотказности можно воспользоваться формулами (11) для распределения Вейбулла. Смещение оценки средней наработки до отказа не более 10–15 %.

Интервальные оценки показателей безотказности по результатам испытаний, проводимых по планам [NUN], [NUR] и [NUT], вычисляют по формулам, приведенным в табл. 13, по плану [NUz] при $N \leq 6$ — в табл. 11.

ОЦЕНКА ПОКАЗАТЕЛЕЙ БЕЗОТКАЗНОСТИ НА ОСНОВЕ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

Непараметрические методы позволяют оценить показатели безотказности при отсутствии информации о виде закона распределения наработки до отказа без существенной потери эффективности оценок.

Общим для непараметрических методов является вычисление оценки функции распределения наработки до отказа по общему вариационному ряду, в котором наработки до отказа и до цензурирования выстроены в порядке неубывания. Показатели надежности вычисляют как некоторые функции от оценки функции распределения.

Особую группу непараметрических методов составляют методы, использующие информацию о классе закона распределения. Ниже будут рассмотрены эти методы оценивания применительно к ВФИ (ВСФИ)-распределениям.

Множительная оценка показателей безотказности. Эту оценку показателей безотказности вычисляют в тех слу-

чаях, когда неизвестны вид распределения наработки до отказа и его класс.

Точечные оценки показателей безотказности вычисляют по формулам, приведенным в табл. 14.

Оценки $\hat{P}(t_i)$ и $\hat{F}(t_i)$ вычисляют в следующей последовательности [7, 58]:

1. Нарботки до отказа и до цензурирования выстраивают в общий вариационный ряд в порядке неубывания наработок.

2. Если в вариационном ряду некоторые значения наработки до цензурирования равны значениям наработки до отказа, то сначала указывают наработки до отказа, затем наработки до цензурирования.

3. Для каждой наработки до отказа $t_i, i = \overline{1, r}$ вычисляют оценки вероятности безотказной работы $\hat{P}(t_i)$ и функции распределения $\hat{F}(t_i)$:

для планов [NUN], [NUR], [NUT]

$$\hat{P}(t_i) = 1 - i/N; \quad (13)$$

для плана [NUz]

$$\hat{P}(t_i) = \prod_{t_k \leq t_i} [1 - 1/(N_k + 1)]; \quad (14)$$

$$\hat{F}(t_i) = 1 - P(t_i),$$

где N_k — число работоспособных изделий после отказа при наработке t_k ;

для планов [NUN], [NUR] и [NUT] оценка (14) переходит в оценку (13).

Формулы для вычисления интервальных оценок показателей безотказности приведены в табл. 15. Значения d'_1 и d'_2 , входящие в табл. 15, вычисляют по следующим формулам:

$$d'_1 = \frac{1 - \gamma - \bar{F}(t_{i-1})}{\bar{F}(t_i) - \bar{F}(t_{i-1})};$$

$$d'_2 = \frac{1 - \gamma - F(t_{i-1})}{F(t_i) - F(t_{i-1})}.$$

Интервальные оценки вероятности безотказной работы и функции распре-

14. Формулы для вычисления точечных оценок показателей безотказности непараметрическим методом

Показатель надежности	Точечная оценка	Примечание *
Средняя наработка $T_{\text{ср}}$ до отказа	$\sum_{i=1}^r t_i [\Delta F(t_i)] + [1 - \hat{F}(t_r)] z_N, t_0 = 0$	$z_N = \max(t_r, \tau_n);$ $\Delta F(t_i) = \hat{F}(t_i) - \hat{F}(t_{i-1})$
Гамма-процентная наработка T_γ до отказа	$d_1 t_i + (1 - d_1) t_{i-1}$ $i = \overline{1, r}; t_0 = 0$	$\hat{F}(t_{i-1}) \leq 1 - \gamma \leq \hat{F}(t_i);$ $d_1 = \frac{1 - \gamma - \hat{F}(t_{i-1})}{\hat{F}(t_i) - \hat{F}(t_{i-1})}$
Вероятность $P(t)$ безотказной работы	$d_2 \hat{P}(t_i) + (1 - d_2) \hat{P}(t_{i-1})$ $i = \overline{1, r}, t_0 = 0$	$t_{i-1} \leq t \leq t_i, t \leq t_r;$ $d_2 = \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}$

* При небольших объемах выборки и высоких значениях γ ($\gamma > \hat{P}(t_1)$) оценка гамма-процентной наработки до отказа оказывается заниженной.

деления при наработках $t_i, i = \overline{1, r}$ вычисляют по формулам [63]:

$$\underline{P}(t_i) = f_2(N, i, q),$$

$$\overline{P}(t_i) = f_1(N, i, q); \quad (15)$$

$$\underline{F}(t_i) = 1 - \overline{P}(t_i), \quad \overline{F}(t_i) = 1 - \underline{P}(t_i).$$

Значения $f_1(N, i, q), f_2(N, i, q)$ приведены в табл. 1—4 приложения и [63]. Оценки $\underline{P}(t_i), \overline{P}(t_i)$ для плана [NUz] являются приближенными, причем $i = [N(1 - \hat{P}(t_i))]$.

Пример 6. Оценить среднюю наработку до отказа и вероятность безотказной работы за наработку 250 ч по результатам испытаний шести изделий, проведенных по плану [NUz]. Нарботки испытанных изделий до отказа равны 246, 253, 264, 283 и 307 ч. Один объект был снят с испытаний в работоспособном состоянии при наработке 272 ч.

Решение. 1. Нарботки до отказа и до цензурирования выстраиваем в вариационный ряд:

$$246 < 253 < 264 < 272^* < 283 < 307.$$

Нарботка до цензурирования отмечена символом *:

2. Вычисляем оценку $\hat{P}(t_i) i = \overline{1, 5}$:

$$\hat{P}(t_1) = \hat{P}(246) = \left(1 - \frac{1}{6}\right) = 0,833;$$

$$\hat{P}(t_2) = \hat{P}(253) = \left(1 - \frac{1}{6}\right) \times$$

$$\times \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 0,667;$$

$$\hat{P}(t_3) = \hat{P}(264) = \left(1 - \frac{1}{6}\right) \times$$

$$\times \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 0,5;$$

15. Формулы для вычисления интервальных оценок показателей безотказности непараметрическим методом

Показатель надежности	НДГ уровня q	ВДГ уровня q
Средняя наработка $T_{\text{ср}}$ до отказа	$\hat{T}_{\text{ср}} - u_q \sqrt{\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \Delta F(t_i) \times \sqrt{(t_i - \hat{T}_{\text{ср}})^2}}$	$\hat{T}_{\text{ср}} + u_q \times \sqrt{\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \Delta F(t_i) (t_i - \hat{T}_{\text{ср}})^2}$
Гамма-процентная наработка T_γ до отказа	$d'_1 t_i + (1 - d'_1) t_{i-1}$ $i = \overline{1, r}; t_0 = 0;$ $\bar{F}(t_{i-1}) \leq 1 - \gamma \leq \bar{F}(t_i)$	$d''_1 t_i + (1 - d''_1) t_{i-1}$ $i = \overline{1, r}; t_0 = 0;$ $\underline{F}(t_{i-1}) \leq 1 - \gamma \leq \underline{F}(t_i)$
Вероятность $P(t)$ безотказной работы	$d_2 \underline{P}(t_i) + (1 - d_2) \underline{P}(t_{i-1})$ $t_{i-1} \leq t \leq t_i$	$d_2 \bar{P}(t_i) + (1 - d_2) \bar{P}(t_{i-1})$ $t_{i-1} \leq t \leq t_i; t \leq t_r$

$$\hat{P}(t_4) = \hat{P}(283) = \left(1 - \frac{1}{6}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 0,25;$$
$$\hat{P}(t_5) = \hat{P}(307) = 0.$$

Находим оценку средней наработки до отказа:

$$\hat{T}_{\text{ср}} = 246 \left(\frac{1}{6} - 0\right) + 253 \left(\frac{2}{6} - \frac{1}{6}\right) + 264 \left(\frac{3}{6} - \frac{2}{6}\right) + 283 \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{6}\right) + 307 \left(1 - \frac{3}{4}\right) = 275 \text{ ч.}$$

Так как $t_1 = 246 \text{ ч} < t = 250 \text{ ч} < t_2 = 253 \text{ ч}$, то

$$d_2 = \frac{250 - 246}{253 - 246} = 0,571;$$
$$\hat{P}(t_1) = \hat{P}(246) = 0,833;$$
$$\hat{P}(t_2) = \hat{P}(253) = 0,667.$$

Следовательно, оценка вероятности безотказной работы за наработку 250 ч равна:

$$\hat{P}(250) = 0,571 \cdot 0,667 + (1 - 0,571) \cdot 0,833 = 0,738.$$

3. Интервальные оценки показателей безотказности вычисляем по формулам, приведенным в табл. 15.

НДГ средней наработки до отказа для $q = 0,9$ ($u_q = 1,282$) равна:

$$T_{\text{ср}} = 275 - 1,282 \times \sqrt{\frac{1}{5} (841 \cdot 0,167 + 484 \cdot 0,167 + \dots + 121 \cdot 0,167 + 64 \cdot 0,25 + \dots + 1024 \cdot 0,25)} = 262 \text{ ч.}$$

Вычисляем НДГ уровня $q = 0,9$ вероятности безотказной работы при

16. Формулы для вычисления НДГ показателей безотказности при ВФИ-распределении [2, 7, 66]

Показатель надежности	НДГ показателя безотказности уровня q	Примечание
Средняя наработка $T_{\text{ср}}$ до отказа	$\frac{2-\gamma}{2 \ln 1/\gamma} T_{\gamma}$	$e^{-1} \leq \gamma \leq 0,6$
Гамма-процентная наработка T_{γ} до отказа	$\min \left(-\frac{2 \ln \gamma}{\chi_q^2(2k)}; \frac{1}{N} \right) s_k$	k — наибольшее число, при котором $-\frac{2 \ln \gamma}{\chi_q^2(2k)} \geq \frac{1}{N};$ s_k — суммарная наработка до k -го отказа
Вероятность $P(t)$ безотказной работы	$e^{-\lambda t}$ (приближенно)	Для наработки t , меньшей математического ожидания наработки до отказа
	$f_2(N, N_t, q)^{1/\eta}$	$\eta = z/t$, где z — значение наработки, следующей за наработкой t ; N_t — число изделий, отказавших и работоспособных до наработки t

наработках t_1 и t_2 по формуле (15) и табл. 2 приложения:

$$\underline{P}(t_1) = \underline{P}(246) = f_2(6; 1; 0,9) = 0,4897;$$

$$\underline{P}(t_2) = \underline{P}(253) = f_2(6; 2; 0,9) = 0,3332.$$

НДГ вероятности безотказной работы за наработку 250 ч равна:

$$\underline{P}(250) = 0,571 \cdot 0,4897 + (1 - 0,571) \cdot 0,3332 = 0,423.$$

Оценка показателей безотказности в случае ВФИ (ВСФИ)-распределения. Если известно, что распределение наработки до отказа относится к классу ВФИ-распределений, то точечные оценки гамма-процентной наработки до

отказа и вероятности безотказной работы вычисляют по формулам, приведенным в табл. 14.

Точечную оценку средней наработки до отказа вычисляют по приближенной формуле [2]

$$\widehat{T}_{\text{ср}} = \frac{2-\gamma}{2 \ln 1/\gamma} \widehat{T}_{\gamma},$$

где $\widehat{T}_{\gamma}$ — точечная оценка гамма-процентной наработки до отказа при $e^{-1} \leq \gamma \leq 0,6$.

НДГ показателей безотказности вычисляют по формулам, приведенным в табл. 16.

Пример 7. По данным примера 6 вычислить интервальные оценки показателей безотказности, полагая, что распределение наработки до отказа относится к классу ВФИ-распределений.

Решение. 1. Для вычисления $T_{\text{ср}}$ полагаем $\gamma = 0,5$.

Вычислим $T_{0,5}$ при $q = 0,9$:

$$\text{при } k = 1 \quad - \frac{2 \ln 0,5}{\chi_{0,9}^2(2)} = 0,301 >$$

$$> \frac{1}{N} = \frac{1}{6};$$

$$\text{при } k = 2 \quad - \frac{2 \ln 0,5}{\chi_{0,9}^2(4)} = 0,178 > \frac{1}{6};$$

$$\text{при } k = 3 \quad - \frac{2 \ln 0,5}{\chi_{0,9}^2(6)} = 0,130 < \frac{1}{6};$$

поэтому выбираем $k = 2$.

Тогда суммарная наработка

$$s_2 = t_{(1)} + 5t_{(2)} = 1511 \text{ ч};$$

$$T_{0,5} = \frac{s_2}{N} = \frac{1511}{6} = 252 \text{ ч.}$$

Следовательно, НДГ средней наработки до отказа

$$T_{\text{ср}} = -0,5 \frac{252 \cdot (2 - 0,5)}{\ln 0,5} = 272 \text{ ч.}$$

2. Для вычисления НДГ вероятности безотказной работы за наработку 250 ч $P(250)$ предварительно находим η и N_t .

Число отказавших и работоспособных изделий до наработки 250 ч равно единице, поэтому значение $N_t = 1$. Так как за наработкой 250 ч следует наработка 253 ч, то

$$\eta = \frac{z}{t} = \frac{253}{250} = 1,01.$$

Тогда

$$P(250) = [f_2(6; 1; 0,9)]^{1/1,01} = (0,4897)^{1/1,01} = 0,493.$$

Пример носит иллюстративный характер.

Если известно, что распределение наработки до отказа относится к классу ВСФИ-распределений, то точечные оценки показателей безотказности вычисляют по формулам, приведенным в табл. 14.

НДГ гамма-процентной наработки до отказа и вероятности безотказной работы вычисляют по формулам, приведенным в табл. 16.

ОЦЕНКА ПОКАЗАТЕЛЕЙ БЕЗОТКАЗНОСТИ В СЛУЧАЕ УТЯЖЕЛЕННЫХ ИСПЫТАНИЙ

В гл. 7 приведены формулы (23) и (25), которые позволяют находить НДГ для вероятности P безотказной работы в режиме e_0 на интервале $[0, t_0]$ системы, стареющей на $[0, T] \supset [0, t_0]$ по результатам биномиальных испытаний на интервале $[0, T]$. Однако при таких испытаниях согласно формуле (10), гл. 7 значения τ_i моментов остановок испытаний, превышающих t_0 , не регистрируются.

Рассмотрим случай, когда такая возможность имеется, а испытания стареющей на интервале $[0, T]$ системы проводятся по плану $\{NUz\}'$. Здесь штрих подчеркивает определенное обобщение плана $\{NUz\}$.

Определение 1. Планом $\{NUz\}'$ называется утяжеленный биномиальный план испытаний на фиксированном интервале $[0, T] \supset [0, t_0]$ времени (см. гл. 7, определение 4), в котором дополнительно предполагается:

1) остановка испытания на интервале $[0, t_0]$ происходит только в связи с возникновением отказа на этом интервале;

2) остановка i -го испытания на интервале $[t_0, T]$ при $\tau_i > t_0$ происходит, если на интервале $[0, T]$ в i -м испытании отказа не происходит (и тогда момент остановки соответствует $\tau_i = T$) или если испытание прекращается в связи с возникновением отказа на интервале $[t_0, T]$, а также в связи с какими-либо другими причинами.

Если испытания проводятся в номинальном режиме, то этот случай рассматривается как частный при $\kappa = 1$ (см. табл. 16). В данном определении фиксированное число T выступает в роли максимальной продолжительности каждого из испытаний, которая устанавливается из условий их реализации.

Результатами N испытаний по плану $[NUz]'$ являются: число $l_* = l_*(t_0)$ отказов на интервале $[0, t_0]$ и запас по ресурсу

$$\eta = z/t_0. \quad (16)$$

Если стареющая на интервале $[0, T]$ система испытывается по плану $[NUz]'$, то в качестве НДГ для вероятности P безотказной работы на интервале $[0, t_0]$ в режиме ϵ_0 из формул (4) и (5), приведенных в гл. 7, можно принять статистику [66]

$$\underline{P} = [f_2(N, l_*(t_0), q)]^{\frac{1}{N\eta}}. \quad (17)$$

При безотказных испытаниях на интервале $[0, t_0]$ отсюда следует частное выражение

$$\underline{P} = (1 - q)^{\frac{1}{N\eta}}.$$

Обобщая план $[NU(1, T)]$, приходим к следующему.

Определение 2. Планом $[NU(1, T)]'$ называется утяжеленный биномиальный план с остановкой на фиксированном интервале $[0, T] \supset [0, t_0]$ времени (см. гл. 7, определение 4), в котором дополнительно предполагаются определения 1.

Результатами испытаний по плану $[NU(1, T)]'$ являются: число N_* испытаний до возникновения первого отказа, которое при $l(t_0) = 0$ полагается равным N , а также запас η

по ресурсу, определяемый в соответствии с (16). Если стареющая на интервале $[0, T]$ система испытывается по плану $[NU(1, T)]'$, то в качестве P для вероятности P из формул (4) и (5) гл. 7 можно принять статистику [66]

$$\underline{P} = (1 - q)^{\frac{1}{N_*\eta}}. \quad (18)$$

Соотношение (18) может быть использовано для нахождения НДГ не только при испытаниях по плану $[NU(1, T)]'$, но и при испытаниях по плану $[NUz]'$, а также в случае, когда по плану $[NU(1, T)]'$ испытывается один образец системы с накоплением (см. гл. 7, определение 3).

В отличие от формул (23) и (25), гл. 7 в выражениях (17) и (18), гл. 8 величина η является случайной. Кроме того, в (17) используется число $l_*(t_0)$ отказов на интервале $[0, T_0]$, в то время, как в (23), гл. 7 используется число $l_*(T)$ отказов на интервале $[0, T]$. Соотношения (17) и (18) имеют более широкую область применения, чем формула для $\underline{P}$, приведенная в табл. 16, так как последняя может применяться только для невозстанавливаемых изделий, а формулы (17) и (18) справедливы для стареющих систем, для которых допускается восстановление отказов в смысле определения 6, гл. 7. Техника расчета по формулам (17), (18), гл. 8 и (23), (25), гл. 7 одинакова (см. гл. 7, примеры 11 и 12).

Глава 9. Оценка показателей безотказности при испытаниях с измерением определяющих параметров

Предварительные замечания. В данной главе изложены методы расчета точечных и интервальных оценок показателей безотказности изделия по результатам испытаний в том случае, когда условие его работоспособности можно выразить в терминах некоторых количественных характеристик, называемых обычно определяющими параметрами (ОП).

Модели отказов, использующие определяющие параметры изделия, называют также параметрическими моделями надежности, а надежность изделия, оцениваемую на основе этих моделей, — параметрической надежностью. Использование таких моделей (там, где это возможно) позволяет проводить оценку параметрической надежности изделия по результатам измерений ОП, не дожидаясь появления отказов изделия, т. е. позволяет прогнозировать уровень его надежности.

Параметрические модели надежности широко используются как для электромеханических изделий, так и для изделий радиоэлектроники на этапе проектирования.

В данной главе приводятся алгоритмы расчета не только точечных, но и интервальных оценок показателей параметрической надежности (безотказности), учитывающие объемы реальных испытаний изделий.

КЛАССИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ ОТКАЗОВ

В общем случае состояние изделия в произвольный момент t определяется набором параметров $X_1(t), X_2(t), \dots, X_m(t)$, а условие его работоспособности за заданный промежуток времени (наработку) $[0, t_0]$ задается системой неравенств:

$$\begin{aligned} \psi_1 [X_{11}(t), X_{12}(t), \dots, X_{1m}(t)] &\geq 0; \\ \psi_2 [X_{21}(t), X_{22}(t), \dots, X_{2m}(t)] &\geq 0; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\psi_r [X_{r1}(t), X_{r2}(t), \dots, X_{rm}(t)] \geq 0, \quad t \in [0, t_0],$$

где $X_{ij}(t)$ — ОП изделия, учитывающие как свойства изделия, так и условия его нагружения и эксплуатации; $i = \overline{1, r}$; $j = \overline{1, m}$; ψ_i — известные функции, имеющие либо аналитическое представление, либо заданные алгоритмически. Переменные $X_{ij}(t)$ обычно являются случайными процессами либо даже случайными полями.

Частными случаями условий (1) работоспособности, которые широко используются на практике, являются модели отказов типа «непревышений» и «нагрузка—прочность», классификация которых представлена в табл. 1.

Если отдельное условие в системе (1) обозначить через событие $A_i(t_0)$, т. е.

$$A_i(t_0) = \{ \psi_i [X_{i1}(t), X_{i2}(t), \dots, X_{im}(t)] \geq 0, \quad t \in [0, t_0] \}, \quad i = \overline{1, r}, \quad (2)$$

то совместное наступление событий

$$A_i(t_0) \text{ есть событие } A(t_0) = \bigcap_{i=1}^r A_i(t_0),$$

а показатель надежности (параметрической) изделия, представляющий собой вероятность безотказной работы (ВБР) изделия за промежуток $[0, t_0]$, представляется в виде

$$P(t_0) = \mathcal{P} \{ A(t_0) \}. \quad (3)$$

1. Классификация моделей отказов

Модель отказов		Условие работоспособности	Вид показателя ВБР	Примечание
Одно- мерная	Стати- ческая	$A = \begin{cases} X \in D \\ X_1 - X_2 \geq 0 \end{cases}$	$P = \mathcal{P} \{A\}$	$D = \begin{cases} (a, \infty) \\ (-\infty, b) \\ (a, b) \end{cases} \text{ — допустимая область для ОП } X;$ X — значение ОП в критический момент; X_1 и X_2 — значения «прочности» и «нагрузки» в критический момент; $X(t)$, $X_1(t)$ и $X_2(t)$ — ОП, «прочность» и «нагрузка» в момент $t \in [0, t_0]$
	Дина- миче- ская	$A(t_0) = \begin{cases} X(t) \in D \\ X_1(t) - X_2(t) \geq 0, \\ t \in [0, t_0] \end{cases}$	$P(t_0) = \mathcal{P} \{A(t_0)\}$	
Много- мерная	Стати- ческая	$A_m = \bigcap A_i$ $A_i = \begin{cases} X_i \in D_i \\ X_{1i} - X_{2i} \geq 0 \end{cases}$	$P = \mathcal{P} \left\{ \bigcap A_i \right\}$ $P = \prod P_i(A_i) \text{ — при независимых } A_i$	$D_i = \begin{cases} (a_i, \infty) \\ (-\infty, b_i) \\ (a_i, b_i) \end{cases} \text{ — допустимая область для } X_i, i = \overline{1, m};$ X_i, X_{1i} и X_{2i} — значения i-го ОП, i-й «прочности» и i-й «нагрузки» в критический момент; $X_i(t)$, $X_{1i}(t)$ и $X_{2i}(t)$ — значения i-го ОП, i-й «прочности» и i-й «нагрузки» в момент $t \in [0, t_0]$
	Дина- миче- ская	$A_m(t_0) = \bigcap A_i(t_0)$ $A_i(t_0) = \begin{cases} X_i(t) \in D \\ X_{1i}(t) - X_{2i}(t) \geq 0, \\ t \in [0, t_0] \end{cases}$	$P(t_0) = \mathcal{P} \left\{ \bigcap A(t_0) \right\}$ $P(t_0) = \prod P_i(t_0) \text{ — при независимых } A_i(t_0)$	

В случае независимости событий $A_i(t_0)$ формула (3) упрощается и принимает вид

$$P(t_0) = \prod_{i=1}^r P_i(t_0), \quad (4)$$

где $P_i(t_0) = \mathcal{P}\{A_i(t_0)\}$.

Для вероятности $P(t_0)$ можно выписать многомерный интеграл по области, заданной условиями (1), от совместной плотности распределения вектора $(X_{i1}(t), \dots, X_{im}(t))$.

Задача статистической оценки надежности (точнее, безотказности) изделия в рассматриваемой постановке состоит в расчете точечной оценки $\hat{P} = \hat{P}(t_0)$ показателя $P(t_0)$ и его доверительных границ (ДГ) уровня γ : $\underline{P} = \underline{P}(t_0)$ — нижней (НДГ) и $\bar{P} = \bar{P}(t_0)$ — верхней (ВДГ) или хотя бы одной из них — НДГ, по статистическим данным, полученным в результате испытаний ограниченного числа образцов N с учетом, быть может, различной априорной информации (АИ).

Для ряда частных моделей отказов, представленных в табл. 1, известны решения задачи в статистической постановке. Эти решения изложены ниже.

СТАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ (ДОПУСКОВЫЕ)

Здесь приведены расчетные соотношения для вычисления точечной и интервальных оценок ВБР $P(t_0)$ в случае, когда условие работоспособности изделия имеет вид (см. табл. 1)

$$A = \{X \in D\} \quad \text{или} \quad A_m = \bigcap_{i=1}^m A_i;$$

$$A_i = \{X_i \in D_i\},$$

где X или X_i — определяющий параметр (ОП) изделия, рассматриваемый в некоторый критический момент времени на интервале $[0, t_0]$ (t_0 — заданная продолжительность функционирования изделия).

Нормальный закон распределения ОП. Предполагается, что ОП X имеет усеченный нормальный закон распределения на некотором промежутке (x_0, ∞) , $x_0 \geq 0$, т. е. плотность распределения $f_y(x)$ ОП X имеет вид

$$f_y(x) =$$

$$\begin{cases} c_0 f(x); & f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \times \\ & \times \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad \text{при } x \geq x_0; \\ 0 & \text{при } x < x_0, \end{cases}$$

где $c_0 = 1 / \int_{x_0}^{\infty} f(x) dx$ — нормиру-

ющий множитель, при котором $f_y(t)$ является плотностью распределения.

Как правило, $x_0 = 0$, а среднее значение $\mu \gg 3\sigma$. Тогда можно принять $c_0 = 1$, а показатель ВБР вычислять по формуле

$$P = \Phi(h), \quad (5)$$

где $\Phi(h) = 1/\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^h \exp(-t^2/2) dt$ —

функция Лапласа, значения которой приведены в табл. 7 приложения; h — нормированный допуск. В зависимости от вида области D

$$h = \begin{cases} (\mu - a)/\sigma, & \text{если } D = (a, \infty); \\ (b - \mu)/\sigma, & \text{если } D = (-\infty, b). \end{cases} \quad (6)$$

Случай двустороннего допуска $D = \{a < x < b\}$ будет рассмотрен ниже при изложении многомерной модели.

В случае, когда рассматривается усечение нормального закона на промежутке (x_0, ∞) , $x_0 > 0$ (например, при наличии входного контроля ОП), вычисление ВБР P_y следует производить по формуле

$$P_y = \begin{cases} 1 - c_0(1 - P), & \text{если } D = \\ = (a, \infty), & a > x_0; \\ c_0 P, & \text{если } D = (x_0, b), x_0 < b, \end{cases} \quad (7)$$

где показатель P определяется по формуле (5). Следовательно, вычисление оценок показателя P_y сводится к вычислению оценок P .

Оценивание показателя P для одномерной модели. Пусть по результатам испытаний N образцов получены N

выборочных значений параметра X : $x_1, x_2, \dots, x_N$.

По этим данным вычисляют выборочные оценки параметров μ , σ и h :

$$\mu \simeq \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i;$$

$$\sigma^2 \simeq S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2; \quad (8)$$

$$\bar{h} = (\bar{x} - a)/S \quad \text{или} \quad \bar{h} = (b - \bar{x})/S,$$

а затем точечную оценку $\hat{P}$ на основе формулы (5):

$$\hat{P} = \Phi(\bar{h}). \quad (9)$$

Найденная оценка $\hat{P}$ имеет небольшое смещение, несущественное при $N \geq 5 \div 10$. При необходимости можно вычислить несмещенную оценку, имеющую значительно более сложное выражение [17].

Точные значения для НДГ ($\underline{P}$) и ВДГ ($\bar{P}$) уровней γ показателя P определяются в виде

$$\underline{P} = \Phi(\underline{h}); \quad \bar{P} = \Phi(\bar{h}), \quad (10)$$

где $\underline{h}$ и $\bar{h}$ — соответственно НДГ и ВДГ уровней γ для параметра h , определяемые на основе таблиц нецентрального распределения Стьюдента в виде

$$\underline{h} = \frac{1}{\sqrt{N}} \delta(h, N, \gamma),$$

$$\bar{h} = \frac{1}{\sqrt{N}} \delta(h, N, 1 - \gamma). \quad (11)$$

В выражениях (11) величины $\delta(h, N, \gamma)$ и $\delta(h, N, 1 - \gamma)$ есть ДГ для параметра смещения δ нецентрального распределения Стьюдента, определяемые по таблицам, приведенным в работе [10]. В табл. 10 приложения даны значения $\underline{h}$ и $\bar{h}$ для $N = 2(1), 10, 20, 50$; $\bar{h} = 0,5 \div 10,0$ и $\gamma = 0,8; 0,9; 0,95$.

Например, при $N = 5$, $\bar{h} = 1,9$ и $\gamma = 0,9$ по табл. 10 находим $\underline{h} = 0,75$, $\bar{h} = 2,85$. Затем по табл. 7 приложения находим значения оценок ВБР:

$$\hat{P} = \Phi(1,9) = 0,97; \quad \underline{P} = \Phi(0,75) = 0,773; \quad \bar{P} = \Phi(2,85) = 0,9978.$$

Вместо точных формул (11) можно при $N \geq 5 \div 10$ пользоваться следующими приближенными формулами, основанными на нормальной аппроксимации нецентрального распределения Стьюдента [17]:

$$\underline{h} \simeq \bar{h} - u_\gamma \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2} \bar{h}^2\right) / (N-1)}; \quad (12)$$

$$\bar{h} \simeq \bar{h} + u_\gamma \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2} \bar{h}^2\right) / (N-1)}.$$

Пользуясь формулами (12), в условиях предыдущего примера получим следующий ответ (определив по табл. 7 приложения $u_\gamma = 1,28$):

$$\underline{h} \simeq 1,9 - 1,28 \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2} 1,9^2\right) / 4} = 0,83 \quad \text{и} \quad \bar{h} = 1,9 +$$

$$+ 1,28 \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2} 1,9^2\right) / 4} = 2,97,$$

т. е.

$$\underline{P} = \Phi(0,83) = 0,797 \quad \text{и}$$

$$\bar{P} = \Phi(2,97) = 0,9985.$$

Примечание. Если найдены односторонние ДГ $\underline{P}$ и $\bar{P}$ уровней $\gamma_1 = 1 - \varepsilon_1$ и $\gamma_2 = 1 - \varepsilon_2$, то интервал $(\underline{P}, \bar{P})$ является двусторонним ДИ уровня $\tilde{\gamma} = 1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \gamma_1 + \gamma_2 - 1$. При $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ $\tilde{\gamma} = 2\gamma - 1$. Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь односторонних ДГ.

Пример 1. Электрическая «прочность» изоляции X по ТУ должна удовлетворять требованию $a < X$, где $a = 360$ (в некоторых условных единицах) после использования по назначению в течение наработки t_0 .

По результатам испытаний $N = 4$ образцов после наработки t_0 были измерены следующие напряжения пробоя: $x_1 = 720$; $x_2 = 840$; $x_3 = 970$; $x_4 = 1040$.

Требуется оценить ВБР изоляции P за наработку t_0 , если распределение X можно принять нормальным с нормирующим множителем $c_0 = 1$.

Решение. По выборочным значениям X находим оценки параметров μ ,

σ и h по формулам (8): $\bar{x} = 892,5$; $s = 141,7$; $h = 3,76$.

По формуле (9) с использованием табл. 7 приложения находим точечную оценку ВБР:

$$\hat{P} = \Phi(3,76) = 0,99991.$$

По табл. 10 приложения находим НДГ (например, уровня $\gamma = 0,9$) для h по величинам $N = 4$, $h = 3,76$ и $\gamma = 0,9$ (производя линейную интерполяцию): $\underline{h} = 1,54$, откуда НДГ

$$\underline{P} = \Phi(1,54) = 0,938.$$

Использование приближенной формулы (12) дает такой ответ:

$$\underline{h} \simeq 3,76 - 1,28 \times$$

$$\times \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2} \cdot 3,76^2\right)} / 3 = 1,66,$$

$$\text{т. е. } \underline{P} = \Phi(1,66) = 0,95.$$

Оценивание показателя P для многомерной модели. Многомерная допусковая модель (см. табл. 1) имеет вид:

$$A_m = \bigcap_{i=1}^m A_i, \quad A_i = \{X_i \in D_i\},$$

$$i = \overline{1, m}.$$

Предполагая, что каждый ОП X_i имеет нормальный закон распределения с параметрами μ_i , σ_i (причем вероятностью событий $X_i < 0$, $i = \overline{1, m}$ можно пренебречь) и все параметры некоррелированы, показатель ВБР можно записать в виде¹

$$P = \prod_{i=1}^M \Phi(h_i), \quad (13)$$

где h_i — нормированный допуск на i -й ОП, определяемый по формуле (6) для каждого $i = \overline{1, m}$.

Число сомножителей в произведении (13) $M = m$, если на каждый из m ОП задан односторонний допуск (нижний или верхний), и $M = m_1 + 2m_2$,

если среди m параметров m_1 имеют односторонний допуск и m_2 — двусторонний. Это объясняется тем, что в случае двустороннего допуска на параметр X_j , $1 \leq j \leq m$ можно записать приближенное равенство

$$P_j = \mathcal{P}\{a_j < X_j < b_j\} \simeq \mathcal{P}\{a_j < X_j\} \mathcal{P}\{X_j < b_j\},$$

погрешность которого не превышает величины q^2 , если вероятность выхода X_j за любую из границ a_j , b_j не более q , т. е. при $q \leq 0,1$ погрешность $q^2 \leq 0,01$.

Заметим, что предположение о некоррелированности ОП приводит к оценке снизу для ВБР, если корреляция между ОП положительна.

Пусть по результатам испытаний N_i образцов получены выборочные значения параметра X_i : X_{i1} , X_{i2} , ..., X_{ij} , ..., X_{iN_i} , $i = \overline{1, m}$. Если на каждом из N образцов можно одновременно измерять значения всех m ОП, то, очевидно, все $N_i = N$.

По этим данным определяются вначале выборочные оценки параметров μ_i , σ_i и h_i [по формулам (8)]:

$$\mu_i \simeq \bar{x}_i = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} x_{ij}, \quad \sigma_i^2 \simeq S_i^2 = \frac{1}{N_i - 1} \sum_{j=1}^{N_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2,$$

$$h_i = (\bar{x}_i - a_i)/S_i \quad \text{или}$$

$$h_i = (b_i - \bar{x}_i)/S_i.$$

Точечная оценка $\hat{P}$ ВБР определяется подстановкой $\hat{h}_i$ в формулу (13):

$$\hat{P} = \prod_{i=1}^M \Phi(\hat{h}_i). \quad (14)$$

Приближенные выражения для НДГ и ВДГ показателя P имеют тот же вид, что и в одномерном случае [17], если принять в качестве N величину $N_0 = \min(N_i)$, а в качестве h величину $\hat{H}$,

$$\hat{H} = \Phi^{-1}(\hat{P}), \quad (15)$$

¹ В случае коррелированных параметров с известными коэффициентами корреляций приближенный метод оценки показателя P изложен в [17].

где $\Phi^{-1}(x)$ — функция, обратная функции Лапласа, значения которой приведены в табл. 7 приложения.

Таким образом, имеем

$$\underline{P} = \Phi(\underline{h}) \quad \text{и} \quad \bar{P} = \Phi(\bar{h}), \quad (16)$$

где ДГ $\underline{h}$ и $\bar{h}$ для параметра $h = \Phi^{-1} \times \left(\prod_{i=1}^M P_i \right)$ определяются либо по табл. 10 приложения (по заданным значениям $\bar{h}$, N и γ), либо при $N \geq 5 \div 10$ по приближенным формулам, аналогичным (12):

$$\underline{h} \simeq \bar{h} - u_\gamma \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2} \bar{h}^2\right) / (N-1)},$$

$$\bar{h} \simeq \bar{h} + u_\gamma \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2} \bar{h}^2\right) / (N-1)}. \quad (17)$$

Формулы (17) справедливы при условии $\bar{P} > 0,9$, и тем точнее, чем выше значения $\bar{P}_i = \Phi(\bar{h}_i)$ (практически достаточно при $M \leq 10$, чтобы $\bar{P}_i \geq 0,99$, $i = \overline{1, M}$).

Все расчетные формулы (7)–(17) сведены в табл. 2, где представлены и другие законы распределения ОП.

Пример 2. Требуется оценить ВБР изделий типа осветительной ракеты, работоспособное состояние которых определяется следующими параметрами: силой света X_1 , временем работы X_2 и скоростью вылета X_3 . В ТЗ заданы следующие границы допусков на X_i : 1) $a_1 < X_1$; $a_1 = 1000$ кд, 2) $a_2 < X_2$; $a_2 = 20$ с, 3) $a_3 < X_3 < b_3$; $a_3 = 15$ м/с; $b_3 = 20$ м/с.

Результаты испытаний позволили определить следующие оценки параметров $\mu_i = M X_i$ и $\sigma_i = \sqrt{D X_i}$, $i = \overline{1, 3}$:

- 1) по $N_1 = 9$ образцам найдены $\bar{x}_1 = 1084$; $S_1 = 28,3$;
- 2) по $N_2 = 12$ $\bar{x}_2 = 22,4$; $S_2 = 0,8$;
- 3) по $N_3 = 9$ $\bar{x}_3 = 18,6$; $S_3 = 1,19$.

Предполагается, что распределение каждого из параметров X_i можно аппроксимировать нормальным.

Решение. Показатель ВБР изделия в данном случае определяется по формуле (14):

$$P = \prod_{i=1}^4 \Phi(h_i),$$

где

$$h_1 = (\mu_1 - a_1)/\sigma_1; \quad h_2 = (\mu_2 - a_2)/\sigma_2;$$

$$h_3 = (\mu_3 - a_3)/\sigma_3; \quad h_4 = (b_3 - \mu_3)/\sigma_3.$$

С учетом оценок параметров μ_i и σ_i , найденных выше по результатам испытаний, находим оценки h_i :

$$\bar{h}_1 = 2,97; \quad \bar{h}_2 = 2,99; \quad \bar{h}_3 = 3,04;$$

$$\bar{h}_4 = 2,89,$$

а затем (используя табл. 7 приложения) находим последовательно

$$\bar{P}_1 = \Phi(\bar{h}_1) = 0,9985;$$

$$\bar{P}_2 = \Phi(\bar{h}_2) = 0,9986;$$

$$\bar{P}_3 = \Phi(\bar{h}_3) = 0,9988;$$

$$\bar{P}_4 = \Phi(\bar{h}_4) = 0,9981$$

и, следовательно,

$$\bar{P} = \prod_{i=1}^4 \bar{P}_i = 0,9938, \quad \text{а}$$

$$\bar{H} = \Phi^{-1}(0,9938) = 2,5.$$

По табл. 10 приложения при $\bar{H} = 2,5$, $N = \min(N_i) = 9$ и $\gamma = 0,9$ находим НДГ:

$$\underline{H} = \frac{1}{\sqrt{N}} \delta(\bar{H}, N, \gamma) = 1,54 \quad \text{и}$$

$$\underline{P} = \Phi(\underline{H}) = 0,938.$$

Приближенная формула (17) дает значения $\underline{H} = 1,58$ и $\underline{P} = \Phi(1,58) = 0,943$.

Законы распределения ОП, отличные от нормального закона. Рассмотрим случай, когда каждый из ОП имеет закон распределения, близкий к логарифмически нормальному или закону Вейбулла. Этими законами достаточно точно можно аппроксимировать асимметричные распределения ОП.

Если ОП X распределен по логарифмически нормальному закону, то его преобразованная величина $X' = \ln X$ имеет нормальный закон распределения с параметрами μ и σ . Следовательно, все формулы, изложенные в предыдущем случае, можно использовать и здесь, если вместо X рассматривать

2. Определение оценок ВБР в случае статической модели отказов (допусковой) и нормальном законе распределения определяющих параметров

Модель отказов	Вид показателя ВБР и условия работоспособности	Точечная оценка ВБР	Интервальные оценки уровня γ		Примечание
			НДГ	ВДГ	
Одномерная	$P = \Phi(h),$ где $h = \begin{cases} (\mu - a)/\sigma \\ (b - \mu)/\sigma \end{cases}$ Условия работоспособности: $X \in D; X \sim N(\mu, \sigma)$	$\hat{P} = \Phi(\hat{h}),$ где $\hat{h} = \begin{cases} (\bar{x} - a)/S \\ (b - \bar{x})/S \end{cases}$	$\underline{P} = \Phi(\underline{h}),$ где $\underline{h} = \frac{1}{\sqrt{N}} \delta(\hat{h}, N, \gamma);$ $\underline{h} \simeq \hat{h} - u_\gamma \times \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2} \hat{h}^2}{N-1}}$	$\bar{P} = \Phi(\bar{h}),$ где $\bar{h} = \frac{1}{\sqrt{N}} \delta(\hat{h}, N, 1-\gamma);$ $\bar{h} \simeq \hat{h} + u_\gamma \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2} \hat{h}^2}{N-1}}$	$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i;$ $S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$
	$P = \prod_{i=1}^M \Phi(h_i),$ где $h_i = \begin{cases} (\mu_i - a_i)/\sigma_i \\ (b_i - \mu_i)/\sigma_i \end{cases}$ Условия работоспособности: $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i), i = \overline{1, m};$ $A_m = \bigcap_{i=1}^m (X_i \in D_i);$ $D_i = \begin{cases} (a_i, \infty) \\ (-\infty, b_i) \\ (a_i, b_i); \end{cases}$ $M = m_1 + 2m_2$	$\hat{P} = \prod_{i=1}^M \Phi(\hat{h}_i),$ где $\hat{h}_i = \begin{cases} (\bar{x}_i - a_i)/S_i \\ (b_i - \bar{x}_i)/S_i; \end{cases}$ $\hat{h} = \Phi^{-1}(\hat{P})$	$\underline{P} = \Phi(\underline{h}),$ где $\underline{h} = \frac{1}{\sqrt{N}} \delta(\hat{h}, N, \gamma)$ (см. приложение, табл. 10) или $\underline{h} \simeq \hat{h} - u_\gamma \times \sqrt{\frac{1 + \frac{\hat{h}^2}{2}}{N-1}}$	$\bar{P} = \Phi(\bar{h}),$ где $\bar{h} = \frac{1}{\sqrt{N}} \delta(\hat{h}, N, 1-\gamma)$ (см. приложение, таблица 10) или $\bar{h} \simeq \hat{h} + u_\gamma \times \sqrt{\left(1 + \frac{\hat{h}^2}{2}\right) / (N-1)}$	$\bar{x}_i = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} x_{ij},$ $i = \overline{1, m};$ $S_i^2 = \frac{1}{N_i-1} \times \sum_{j=1}^{N_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2;$ $N = \min(N_i);$ $m = m_1 + m_2$ (m_1 и m_2 — число ОП соответственно с односторонним и двусторонним ограничением)

$X' = \ln X$, а вместо допусков a и b — допуски $a' = \ln a$ и $b' = \ln b$.

Аналогичные изменения производятся и при рассмотрении многомерной модели отказов для каждого определяющего параметра X_i , $i = \overline{1, m}$.

Если ОП X имеет распределение, близкое к распределению Вейбулла, то схема расчета оценок показателя ВБР совпадает с той, которая изложена в гл. 8 для плана испытаний с измерением наработки до отказа, имеющей распределение Вейбулла.

При рассмотрении многомерной модели, в которой каждый из m ОП имеет распределение Вейбулла и все они независимы, схема расчета оценок ВБР изложена в гл. 15. Там же представлена и общая схема расчета оценок ВБР системы с последовательным соединением элементов, когда законы распределения наработок до отказа у разных элементов различны, а также различны и планы испытаний элементов различных типов.

Эта схема расчета использует изложенный в гл. 15 метод эквивалентных испытаний, который может быть применен и к рассматриваемой многомерной модели отказов в том случае, когда у разных ОП законы распределения разные. Кратко эта схема сводится к следующему.

Пусть по каждому из ОП X_i , $i = \overline{1, m}$ найдены оценки ВБР: $\hat{P}_i$ — точечная оценка и $\bar{P}_i$ — НДГ некоторого уровня γ_i , $i = \overline{1, m}$. Тогда в соответствии с методом эквивалентных испытаний (см. гл. 15) для каждого ОП X_i , $i = \overline{1, m}$ можно найти по табл. 1—4 приложения эквивалентные объемы испытаний $\tilde{N}_i$, $i = \overline{1, m}$, после чего точечная оценка ВБР определяется в виде

$$\hat{P} = \prod_{i=1}^m \hat{P}_i, \quad (18)$$

а НДГ уровня γ для P находится по табл. 1—4 приложения в виде

$$P = f_2(\tilde{N}, \bar{P}, \gamma), \quad \tilde{N} = \min(\tilde{N}_i). \quad (19)$$

СТАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕПРЕВЫШЕНИЙ

Ниже изложены расчетные соотношения для вычисления оценок показателя ВБР в случае, когда условие работоспособности изделия имеет вид (см. табл. 1)

$$A = X_1 - X_2 \geq 0 \quad \text{или} \quad A_m = \prod_{i=1}^m A_i, \\ A_i = X_{1i} - X_{2i} \geq 0,$$

где X_1 или X_{1i} — «прочность» изделия или его i -го элемента в некоторый критический момент времени на интервале $[0, t_0]$; X_2 или X_{2i} — «нагрузка» на изделие или его i -й элемент в тот же момент времени.

Оценивание показателя P для одномерной модели отказов. Предполагается, что X_1 и X_2 являются случайными величинами, распределенными по нормальному закону с параметрами μ_1 , σ_1 и μ_2 , σ_2 соответственно (причем $\mu_i \gg 3\sigma_i$, $i = 1, 2$, т. е. усеченностью распределений можно пренебречь).

Тогда показатель безотказности (ВБР) изделия при условии независимости X_1 и X_2 определяется в виде¹

$$P = \Phi(H), \quad H = (\mu_1 - \mu_2) / \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}. \quad (20)$$

Пусть по результатам испытаний опытных образцов получено N_1 выборочных значений случайной величины X_1 : $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1N_1}$ и N_2 выборочных значений случайной величины X_2 : $x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2j}, \dots, x_{2N_2}$, по которым обычным образом определяются выборочные оценки параметров μ_i и σ_i , $i = 1, 2$:

$$\mu_1 \simeq \bar{x}_1 = \frac{1}{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} x_{1j};$$

$$\mu_2 \simeq \bar{x}_2 = \frac{1}{N_2} \sum_{j=1}^{N_2} x_{2j};$$

¹ В случае коррелированности X_1 и X_2 можно определить ВБР в аналогичном (20) виде, лишь в выражение для H будет входить коэффициент корреляции ρ [17].

$$\sigma_1 \simeq S_1 = \left[\frac{1}{N_1 - 1} \sum_{j=1}^{N_1} (x_{1j} - \bar{x}_1)^2 \right]^{1/2},$$

$$\sigma_2 \simeq S_2 = \left[\frac{1}{N_2 - 1} \sum_{j=1}^{N_2} (x_{2j} - \bar{x}_2)^2 \right]^{1/2}$$

По найденным оценкам $\bar{x}_i$ и S_i в зависимости от соотношения объема выборок N_1 и N_2 и информации о величине $\theta = \sigma_2^2/\sigma_1^2$ определяются по табл. 3 точечная оценка $\hat{H}$ и ДГ уровня γ — $\underline{H}$ и $\bar{H}$ для показателя H , после чего точечная оценка ВБР рассчитывается по формуле

$$\bar{P} = \Phi(\bar{H}), \quad (21)$$

а односторонние НДГ и ВДГ уровня γ для ВБР P определяются в виде

$$\underline{P} = \Phi(\underline{H}); \quad \bar{P} = \Phi(\bar{H}). \quad (22)$$

Пример 3. Для оценки надежности конструкции используется модель отказов «нагрузка—прочность»; прочность X_1 и нагрузка X_2 имеют нормальные законы распределения с параметрами μ_1 , σ_1 и μ_2 , σ_2 соответственно (причем $\mu_i > 3\sigma_i$, $i = 1, 2$). По результатам $N_1 = 5$ испытаний образцов найдены оценки μ_1 и σ_1 : $\bar{x}_1 = 13$, $S_1^2 = 0,8$ (в условных единицах), а по результатам $N_2 = 11$ испытаний действующей нагрузки определены оценки $\bar{x}_2 = 9$, $S_2^2 = 1,6$ параметров μ_2 , σ_2 .

Требуется найти точечную оценку и НДГ уровня $\gamma = 0,9$ для вероятности неразрушения конструкции P .

Решение. Поскольку отношение дисперсий $\sigma_2^2/\sigma_1^2 = \theta$ априори неизвестно и $N_1 \neq N_2$, используем расчетные формулы для определения точечной оценки $\hat{H}$ параметра H и его НДГ $\underline{H}$ (см. табл. 3).

Находим (учитывая, что $v_1 = N_1 - 1 = 4$, $v_2 = N_2 - 1 = 10$)

$$\hat{H} = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) / \sqrt{S_1^2 + S_2^2} = 2,58 \quad \text{и}$$

$$\hat{H}' = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) / \sqrt{S_1^2/v_1 + S_2^2/v_2} = 6,7,$$

по которым определяется эквивалентный объем испытаний

$$\hat{N} = (\hat{H}'/\hat{H})^2 = 6,74.$$

Затем по величине $\hat{\theta} = S_2^2/S_1^2 = 2$ находим значение

$$\tilde{v} = (1/\hat{\theta}N_1 + 1/N_2)^2 / [1/\hat{\theta}^2 N_1^2 (N_1 - 1) + 1/N_2^2 (N_2 - 1)] = 11,$$

и, наконец, определяем величину НДГ уровня $\gamma = 0,9$ (с учетом того, что $z_\gamma = z_{0,9} = 1,28$ — по табл. 7)

$$\underline{H} = \hat{H} - z_\gamma \sqrt{1/\tilde{N} + (1/2\tilde{v})} \hat{H}^2 = 1,72.$$

Зная $\hat{H} = 2,58$ и $\underline{H} = 1,72$, по формулам (21) и (22) находим [используя табл. 7 (см. приложение)] значения

$$\bar{P} = 0,995 \quad \text{и} \quad \underline{P} = 0,956.$$

Оценивание показателя P в случае многомерной модели отказов. Многомерная модель отказов (непревышений) имеет вид (см. табл. 1)

$$A_m = \prod_{i=1}^m A_i, \quad A_i = X_{1i} - X_{2i} \geq 0, \quad i = \overline{1, m},$$

где A_i — условие работоспособности изделия по i -му виду нагрузки X_{2i} , обеспечиваемое i -м видом «несущей способности» изделия X_{1i} в некоторый критический момент на интервале $[0, t_0]$.

Предполагается, что распределения случайных величин X_{1i} и X_{2i} близки к нормальному закону с параметрами μ_{1i} , σ_{1i} и μ_{2i} , σ_{2i} соответственно, причем для всех $i = \overline{1, m}$ $\mu_{1i} > 3\sigma_{1i}$ и $\mu_{2i} > 3\sigma_{2i}$ (т. е. усеченностью распределений можно пренебречь).

Принимая также допущение о некоррелированности случайных величин $u_i = X_{1i} - X_{2i}$, $i = \overline{1, m}$, показатель безотказности изделия (ВБР) можно записать в виде

$$P = \prod_{i=1}^m \Phi(H_i), \quad (23)$$

где

$$H_i = (\mu_{1i} - \mu_{2i}) / \sqrt{\sigma_{1i}^2 + \sigma_{2i}^2}. \quad (24)$$

Заметим, что предположение о некоррелированности случайных пере-

3. Определение оценок ВБР в случае статической модели отказов типа «нагрузка—прочность»

Вид показателя ВБР; исходные предположения	Выражения для $\hat{H}$ и $\underline{H}$, $\bar{H}$ уровня γ	Примечание
$P = \Phi(H);$ $\sigma_2^2/\sigma_1^2 = \theta$ — известно, N_1 и N_2 — любые (≥ 2)	$\hat{H} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S \sqrt{1 + \theta}};$ $\underline{H} = \hat{H} - u_\gamma \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{1}{2v} \hat{H}^2};$ $\bar{H} = \hat{H} + u_\gamma \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{1}{2v} \hat{H}^2}$	$S^2 = \alpha S_1^2 + (1 - \alpha) S_2^2;$ $\alpha = (N_1 - 1)/(N_1 + N_2 - 2);$ $N = (1 + \theta)/(1/N_1 + \theta/N_2);$ $v = N_1 + N_2 - 2$
$P = \Phi(H);$ $\sigma_2^2/\sigma_1^2 = \theta$ — неизвестно, но $N_1 = N_2 = N$	$\hat{H} = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)/\sqrt{S_1^2 + S_2^2};$ $\underline{H} = \hat{H} - u_\gamma \sqrt{D\hat{H}};$ $\bar{H} = \hat{H} + u_\gamma \sqrt{D\hat{H}};$ $\sqrt{D\hat{H}} =$ $= \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{1}{2(N-1)}} \times$ $\rightarrow \dots \times \hat{H}^2 (S_1^4 + S_2^4)/(S_1^2 + S_2^2)^2$	$\bar{x}_1, \bar{x}_2, S_1$ и S_2 — выборочные оценки параметров μ_1, μ_2, σ_1 и σ_2 ; u_γ определяется по табл. 7 приложения
$P = \Phi(H);$ $\sigma_2^2/\sigma_1^2 = \theta$ — неизвестно и $N_1 \neq N_2$ ($N_1 < N_2$)	$\hat{H} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}};$ $\hat{H}' = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{S_1^2/v_1 + S_2^2/v_2}};$ $\tilde{N} = (\hat{H}'/\hat{H})^2; \quad v_1 = N_1 - 1;$ $v_2 = N_2 - 1; \quad \underline{H} = \hat{H} -$ $- u_\gamma \sqrt{\frac{1}{\tilde{N}} + \frac{2}{2\tilde{v}} \hat{H}^2};$ $\bar{H} = \hat{H} + u_\gamma \sqrt{\frac{1}{\tilde{N}} + \frac{1}{2\tilde{v}} \hat{H}^2}$	$\tilde{v} = \frac{(1/\hat{\theta} N_1 + 1/N_2)^2}{1/\hat{\theta}^2 N_1^2 (N_1 - 1) +}$ $\dots \frac{1/N_1^2 (N_2 - 1)}{\hat{\theta} = S_2^2/S_1^2}$
$P = \prod_{i=1}^m \Phi(H_i)$ (многомерная модель отказов); отказы по различным параметрам независимы	$\hat{H} = \Phi^{-1}(\hat{P}); \quad \hat{P} = \prod_{i=1}^m \Phi(\hat{H}_i)$ $\underline{H} = \hat{H} - u_\gamma \sqrt{\frac{1}{N_0} + \frac{1}{2v_0} \hat{H}^2};$ $\bar{H} = \hat{H} + u_\gamma \sqrt{\frac{1}{N_0} + \frac{1}{2v_0} \hat{H}^2}$	$\hat{H}_i$ определяются из табл. 3 для всех $i = \overline{1, m}$; $N_0 = \min_{1 \leq i \leq m} (N_i, \tilde{N}_i);$ $v_0 = \min(v_i, \tilde{v}_i), 1 \leq i \leq m$ Формулы для $\underline{H}$ и $\bar{H}$ справедливы при $\hat{P} > 0,9$

менных u_i , как и выше, приводит к оценке снизу для ВБР, если имеет место положительная корреляция между u_i .

Пусть по результатам испытаний для каждого i -го условия работоспособности $A_i = X_{1i} - X_{2i} > 0$ в соответствии с предыдущим разделом найдены величины (см. табл. 3)

$\hat{N}_i$, N_i (или $\tilde{N}_i$) и v_i (или $\tilde{v}_i$),
 $i = \overline{1, m}$.

Тогда точечная оценка ВБР изделия определяется по формуле

$$\hat{P} = \prod_{i=1}^m \Phi(\hat{N}_i), \quad (25)$$

а ДГ $\underline{P}$ и $\bar{P}$ уровня γ по аналогии с многомерной допусковой моделью отказов можно найти следующим образом.

Используя [см. табл. 7 приложения] функцию Лапласа, находим оценку $\hat{N}$, соответствующую точечной оценке $\hat{P}$ ВБР изделия:

$$\hat{N} = \Phi^{-1}(\hat{P}), \quad (26)$$

и определяем минимальные значения $(N_i, \tilde{N}_j)$ и $(v_i, \tilde{v}_j)$, т. е. находим

$$N_0 = \min_{1 \leq i, j \leq m} (N_i, \tilde{N}_j) \text{ и} \\ v_0 = \min_{1 \leq i, j \leq m} (v_i, \tilde{v}_j). \quad (27)$$

На основании найденных значений $\hat{N}$, N_0 и v_0 приближенно определяются ДГ уровня γ для параметра $H = \Phi^{-1} \left[\prod_{i=1}^m \Phi(N_i) \right]$ в виде, аналогичном одномерному случаю:

$$\underline{H} = \hat{H} - u_\gamma \sqrt{\frac{1}{N_0} + \frac{1}{2v_0}} \hat{H}^2 \text{ и} \\ \bar{H} = \hat{H} + u_\gamma \sqrt{\frac{1}{N_0} + \frac{1}{2v_0}} \hat{H}^2, \quad (28)$$

а затем и ДГ уровня γ для ВБР по формулам (22)

$$\underline{P} = \Phi(\underline{H}), \quad \bar{P} = \Phi(\bar{H}).$$

Формулы (28) получены при условии достаточно высокой надежности изделия (практически при $\hat{P} > 0,9$).

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОТКАЗОВ

Здесь рассмотрены одномерные и многомерные допусковые модели отказов (см. табл. 1), для которых условие работоспособности имеет вид

$$A(t_0) = \{X(t) \in D, t \in [0, t_0]\}$$

или

$$A_m(t_0) = \prod_{i=1}^m A_i(t_0), \quad A_i(t_0) = \\ = \{X_i(t) \in D_i, t \in [0, t_0]\},$$

где $X(t)$ или $X_i(t)$ — определяющий параметр, меняющийся во времени t на заданном интервале работы $[0, t_0]$; D или D_i — допустимая область изменения ОП (см. табл. 1).

Показатель безотказности $P = P(t_0)$ в данном случае имеет вид $P(t_0) = \mathcal{P}\{A(t_0)\}$ или $P(t_0) = \mathcal{P}\{A_m(t_0)\}$ и представляет собой вероятность события $A(t_0)$ или $A_m(t_0)$, означающего, что на промежутке $[0, t_0]$ ОП $X(t)$ или все ОП $X_i(t)$, $i = \overline{1, m}$ ни разу не выйдут за пределы допуска D или D_i , $i = \overline{1, m}$.

Для оценки показателя P нужно располагать значительной априорной информацией (АИ) как о структуре случайного процесса $X(t)$, являющегося моделью изменения ОП $X(t)$, так и о его вероятностных характеристиках.

Имеется большое число решений данной задачи (задачи о «выбросах» случайного процесса), которые, однако, не позволяют найти оценки показателя $P(t_0)$ в зависимости от объема выборки N , по которой определяются вероятностные характеристики $X(t)$. Такие решения назовем вероятностными (а не статистическими). Некоторые из них приведены ниже. Статистические решения задачи, позволяющие определить ДГ для показателя $P(t_0)$, удается получить лишь для некоторых частных случаев.

Вероятностные решения задачи оценивания показателя безотказности. Ограничимся рассмотрением верхнего одностороннего допуска, т. е. положим $D = (-\infty, b)$. Тогда $A(t_0) = \{X(t) <$

$< b, t \in [0, t_0]$ и показатель безотказности

$$P(t_0) = \mathcal{P}\{A(t_0)\}.$$

В работе [22] получено следующее приближенное выражение для показателя $P(t_0)$:

$$P(t_0) = (1 - W_{t_0}) \exp[-\exp(-z_{t_0})] + W_{t_0} F(b), \quad (29)$$

где $F(x)$ — одномерная функция распределения ординаты случайного процесса $X(t)$, $t \in [0, t_0]$;

$$W_{t_0} = \frac{4}{\pi t_0^2} \int_0^{t_0} [t_0 - r(\tau)] \arcsin r(\tau) d\tau;$$

$$z_{t_0} = W_{t_0} [2 \ln N_b(t_0)]^{1/2} - 2 \ln N_b(t_0);$$

$r(\tau)$ — нормированная корреляционная функция; $N_b(t_0)$ — среднее число выбросов за уровень b в течение времени t_0 .

Если известна корреляционная функция $r(\tau)$ стационарного процесса, то среднее число выбросов находится по формуле

$$N_b(t_0) = \frac{t_0}{2\pi} \sqrt{-r''(0)} \times \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right)^2\right], \quad (30)$$

где μ и σ — среднее значение и среднее квадратическое отклонение процесса $X(t)$.

При наличии статистических данных по N реализациям случайного процесса $X(t)$ в качестве оценки величины $N_b(t_0)$ принимают

$$\tilde{N}_b(t_0) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N N_{b_i}, \quad (31)$$

где N_{b_i} — число выбросов за уровень b в i -й реализации ($i = \overline{1, N}$).

Если случайный процесс является эргодическим, то оценку среднего числа выбросов $X(t)$ можно получить по одной реализации на большом промежутке времени $[0, t_0]$ в виде

$$\tilde{N}_b(t_0) = N_b(\tilde{t}_0) t_0 / \tilde{t}_0, \quad (32)$$

где $N_b(\tilde{t}_0)$ — число выбросов одной наблюдаемой реализации за время $\tilde{t}_0 \gg t_0$.

Оценка $\hat{P}(\tau)$ корреляционной функции определяется обычными методами [17].

Таким образом, формула (29) позволяет найти приближенно оценку $\hat{P}(t_0)$ вероятности $P(t_0)$, если входящие в нее величины $r(\tau)$ и $N_b(t_0)$ заменить их оценками. Точность найденной таким образом оценки определить сложно.

Приведем некоторые оценки снизу для искомой вероятности $P(t_0)$.

Для широкого класса нестационарных процессов имеет место следующая оценка снизу [22]:

$$P(t_0) \geq \exp\left\{\int_0^{t_0} \ln[F(b) - N(t)] dt\right\}, \quad (33)$$

где $N(t)$ — среднее число выбросов $X(t)$ за уровень b в единицу времени.

Для нестационарных гауссовских процессов (у которых $F_b(t) = \Phi[(b - m(t))/\sqrt{D(t)}]$) среднее число выбросов в единицу времени находится из выражения [22]

$$N_b(t) = \frac{\sqrt{D_1(1 - r_1^2)}}{2\pi\sigma(t)} \times \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{b - m(t)}{\sigma(t)}\right)^2\right] \times \left\{\exp\left(-\frac{1}{2} M^2\right) + \sqrt{2\pi} M F(M)\right\}. \quad (34)$$

В формуле (34)

$$M = \frac{1}{\sqrt{1 - r_1^2(t)}} \left[\frac{m_1(t)}{\sqrt{D_1(t)}} + \frac{b - m(t)}{\sigma(t)} r_1(t) \right],$$

где

$$m_1(t) = \frac{dm(t)}{dt}; \quad D_1(t) = -\sigma^2(t) r''(0);$$

$m(t)$, $\sigma(t)$ — среднее значение и среднее квадратическое отклонение процесса; $r(t)$ — коэффициент взаимной корреляции между случайным процессом $X(t)$ и его производной.

Если вычисление $N(t)$ по формуле (34) вызывает большие затруднения, то оценку $P(t_0)$ вместо неравенства (33) можно приближенно производить по формуле

$$P(t_0) \simeq \exp \left[\int_0^{t_0} \ln F(t) dt \right]. \quad (35)$$

Для стационарных процессов оценка (33) существенно упрощается и принимает вид

$$P(t_0) \geq [F_b - N_b]^{t_0}, \quad (36)$$

или еще более простой вид

$$P(t_0) \geq F_b - N_b t_0, \quad (37)$$

если величина $N_b t_0 = N_b(t_0) \ll 1$.

В некоторых случаях полезно иметь верхнюю оценку для вероятности $P(t_0)$.

Для нестационарных процессов такую оценку можно записать в виде [22]

$$P(t_0) \leq \exp \left[- \int_0^{t_0} \frac{N_b(t)}{F_b(t)} dt \right], \quad (38)$$

которая переходит для стационарных процессов в следующую оценку (при условии, что $N_b t_0 \leq F(b)$):

$$P(t_0) \leq \exp \left[- \frac{N_b t_0}{F_b} \right]. \quad (39)$$

Итак, наличие информации о функции распределения $F(t)$ ординаты случайного процесса в момент времени t , а также о величине среднего числа выбросов $X(t)$ за уровень b в единицу времени $N_b(t)$ позволяет дать двусторонние оценки для ВБР изделия $P(t_0)$:

для нестационарного процесса

$$\exp \left\{ \int_0^{t_0} \ln (F_b(t) - N_b(t)) dt \right\} \leq$$

$$\leq P(t_0) \leq \exp \left[- \int_0^{t_0} \frac{N_b(t)}{F_b(t)} dt \right];$$

для стационарного процесса

$$(F_b - N_b)^{t_0} \leq P(t_0) \leq \exp \left[- \frac{N_b t_0}{F_b} \right].$$

Довольно часто случайный процесс $X(t)$, характеризующий поведение ОП, может быть представлен следующим образом:

$$X(t) = m(t) + Y(t), \quad (40)$$

где $m(t)$ — некоторая детерминированная функция; $Y(t)$ — стационарный случайный процесс с нулевым средним значением.

В этом случае условие работоспособности для нестационарного процесса $X(t)$

$$A(t_0) = \{m(t) + Y(t) < b, t \in [0, t_0]\}$$

превращается в условие работоспособности для стационарного процесса $Y(t)$ вида

$$\tilde{A}(t_0) = \{Y(t) < \tilde{b} = b - m(t), t \in [0, t_0]\},$$

в силу чего для оценки ВБР $P(t_0)$ можно воспользоваться формулами (36), (39), где вместо постоянного уровня b следует рассматривать переменный уровень $\tilde{b}(t)$. Для монотонно возрастающей функции $m(t)$ достаточно рассмотреть значение $\tilde{b}(t)$ при $t = t_0$. Для немонотонной функции $m(t)$ нужно в качестве верхнего допуска взять $\tilde{b}^* = \max_{0 \leq t \leq t_0} \tilde{b}(t)$.

Фактически приведенные формулы используются при определении двусторонних границ для точечной оценки $\hat{P}(t_0)$ искомой вероятности $P(t_0)$ путем замены вероятностных характеристик $F_b(t)$ и $N_b(t)$ на их точечные оценки $\hat{F}_b(t)$ и $\hat{N}_b(t)$, определяемые по реализациям случайного процесса $X(t)$. Однако степень рассеяния самих границ в зависимости от объема выборки N при испытаниях остается при этом неизвестной. Поэтому при

веденные формулы могут служить лишь некоторым ориентиром при анализе надежности, но не основой для принятия решений при контроле надежности.

Пример 4. Глубину коррозионной каверны в трубопроводе можно представить в виде

$$X(t) = \delta(t) + Y(t).$$

При этом детерминированная составляющая $\delta(t)$ аппроксимируется зависимостью

$$\delta(t) = \delta_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{T_0}\right) \right],$$

где $\delta_0 = 2$ мм; $T_0 = 1,09$ года; $Y(t)$ стационарный гауссовский процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$r(\tau) = 0,0625 \exp(-39,7\tau^2),$$

откуда $\sigma_y^2 = r(0) = 0,0625$.

Требуется найти вероятность $P(t_0)$ того, что в течение $t_0 = 5$ лет толщина корродирующего слоя будет меньше $b = 3$ мм.

Решение. Используя монотонность зависимости для $\delta(t)$, найдем ее значение при $t_0 = 5$ лет

$$\delta(t_0) = 2 \left[1 - \exp\left(-\frac{5}{1,09}\right) \right] = 1,98 \text{ мм.}$$

Далее находим допустимую границу $\tilde{b}$ для случайной составляющей $Y(t)$ на момент $t_0 = 5$ лет:

$$\tilde{b} = b - \delta(t_0) = 3 \text{ мм} - 1,98 \text{ мм} = 1,02 \text{ мм.}$$

Таким образом, необходимо найти вероятность непревышения случайным процессом $Y(t)$ значения $\tilde{b} = 1,02$. Оценим ее снизу по формуле (36). Для этого сначала найдем

$$F_{\tilde{b}} = \Phi\left(\frac{\tilde{b} - m_y}{\sigma_y}\right) = \Phi\left(\frac{1,02 - 0}{0,25}\right) = \Phi(4,1) \approx 0,9999.$$

Среднее число выбросов за уровень $\tilde{b}$ в единицу времени определяется для гауссовского стационарного процесса с высоким уровнем по формуле

$$N_{\tilde{b}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{-\frac{r''(0)}{r(0)}} \times \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{b} - m_y}{\sigma_y}\right)^2\right] = 0,0002,$$

так как

$$\sqrt{-r''(0)/r(0)} = \sqrt{39,7} = 6,3 \text{ и}$$

$$N_{\tilde{b}} = \frac{6,3}{6,28} \exp(-8,4).$$

По формуле (36) находим искомую оценку для $P(T_0)$:

$$P(T_0) \geq (0,9999 -$$

$$- 0,0002)^5 = 0,9982.$$

Следует подчеркнуть, что найденная величина не является доверительной границей для $P(T_0)$. Ее следует понимать как некоторую границу снизу для точечной оценки $\hat{P}(T_0)$ показателя $P(T_0)$.

Статистические оценки безотказности при измеряемых реализациях ОП. Предполагается, что в ходе испытаний производятся наблюдения за N реализациями определяющего параметра (одного или нескольких). Исходные данные, получаемые при этих наблюдениях, и исходные допущения оговорены ниже.

Модель поведения ОП. Считается, что ОП $X(t)$ допускает так называемое каноническое представление:

$$X(t) = \alpha_1 \varphi_1(t) + \dots + \alpha_n \varphi_n(t)$$

или

$$X(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j(t), \quad t \in [0, t_0], \quad (41)$$

где $\varphi_j(t)$ — выбранные заранее линейно независимые функции (базисные функции), монотонные на промежутке $J_0 = [0, t_0]$; $\vec{\alpha} = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]^T$ — вектор случайных коэффициентов, распределенных по нормальному закону с неизвестным средним значением $\vec{\mu} = [\mu_1 \dots \mu_k]^T$ и дисперсионной матрицей вида $\sigma^2 \Theta$, где σ^2 — неизвестный множитель, а Θ — известная симметричная положительно определенная матрица размера $(k \times k)$ (здесь и далее буква t означает операцию транспонирования).

Примером представления (41) является модель

$$X(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t, \quad (42)$$

где $\varphi_1(t) \equiv 1$, $\varphi_2(t) = t$, а матрица $\Theta = \|\theta_{ij}\|$ в данном случае имеет вид

$$\Theta = \begin{vmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{vmatrix}$$

и означает, что заранее известны отношения $D(\alpha_1)/\sigma^2 = \theta_{11}$, $D(\alpha_2)/\sigma^2 = \theta_{22}$ и $K_{12}/\sigma^2 = \theta_{12}$, где K_{12} — ковариация α_1 и α_2 .

Если обозначить $D(\alpha_1) = \sigma^2$, т. е. положить $\theta_{11} = 1$, то все остальные элементы матрицы Θ будут отношениями дисперсий и ковариаций величин α_i к дисперсии $D(\alpha_1)$. Элементы матрицы Θ θ_{ij} могут быть оценены на основе некоторых предварительных испытаний с измерением ОП $X(t)$. Например, $\theta_{22} \simeq \hat{\theta}_{22} = \hat{D}(\alpha_2)/\hat{D}(\alpha_1)$.

В дальнейшем можно считать коэффициенты α_i независимыми, а следовательно, матрицу Θ диагональной.

Для обеспечения монотонности ОП $X(t)$ кроме монотонности функций $\varphi_i(t)$, $t \in J_0$ (для определенности $\varphi_i(t)$ будем считать убывающими, так как случай возрастающих $\varphi_i(t)$ рассматривается аналогично) потребуем, чтобы α_j были практически положительны, т. е. $P(\alpha_j < 0) \simeq 0$.

При сделанных допущениях и условии работоспособности изделия вида $A(t_0) = \{X(t) > x_0, t \in [0, t_0]\}$ показатель безотказности $P(t)$ примет вид

$$P(t_0) = \Phi[H(t_0)], \quad (43)$$

где

$$H(t_0) = \left\{ \sum_{j=1}^k \mu_j \varphi_j(t) - x_0 \right\} / \sigma B(t_0). \quad (44)$$

Здесь $\Phi(z)$ — табулированная функция Лапласа (см. табл. 7 приложения), а множитель $B(t_0)$ зависит только от известных величин и вычисляется по формуле

$$B(t_0) = [\varphi^T(t_0) \Theta \varphi(t_0)]^{1/2}, \quad \varphi(t_0) = [\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_k(t_0)]^T. \quad (45)$$

Например, для линейной модели (42) множитель $B(t_0)$ будет иметь вид

$$B(t_0) = \left\{ [1, t_0] \begin{vmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{vmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t_0 \end{bmatrix} \right\}^{1/2} = \sqrt{\theta_{11} - 2\theta_{12}t_0 + \theta_{22}t_0^2}. \quad (46)$$

В случае многомерного ОП $\vec{X}(t) = [X_1(t), \dots, X_m(t)]^T$ предполагается, что все компоненты вектора $\vec{X}(t)$ независимы и каждый из них допускает представление (41) со своими базисными функциями $\vec{\varphi}_i(t)$, коэффициентами $\vec{\alpha}_i$ и их числом K_i . Для них справедливы все принятые в одномерном случае допущения. В этой ситуации условие работоспособности изделия имеет вид

$$A_m(t_0) = \bigcap_{i=1}^m \{X_i(t_0) > X_{i0}\},$$

а ВБР за промежуток времени $J_0 = [0, t_0]$ представляется в виде

$$P(t_0) = \prod_{i=1}^m \Phi[H_i(t_0)], \quad (47)$$

где каждая из величин $H_i(t_0)$, $i = 1, m$ вычисляется по формуле (44) со своими векторами $\vec{\mu}_i$, $\vec{\varphi}_i(t_0)$, уровнями X_{i0} и множителями σ_i , $B_i(t_0)$.

Исходные данные для расчета оценок $\hat{P}(t_0)$ и $P(t_0)$. Для расчета точечной оценки $\hat{P}(t_0)$ показателя $P(t_0)$ и его НДГ уровня γ $P(t_0)$ используются результаты независимых измерений N ($N \geq 2$) реализаций ОП $X(t)$ в заранее назначенные моменты времени $t_1 < t_2 < \dots < t_l$ ($l \geq k$).

Моменты $t_1, \dots, t_l$ могут быть сосредоточены не на всем промежутке $J_0 = [0, t_0]$, а лишь на его начальном участке $J_\tau = [0, \tau]$, $\tau < t_0$, что позволяет говорить о прогнозировании НДГ $P(t_0)$ для $P(t_0)$. При этом отношение $\rho = t_0/\tau$ является показателем глубины прогноза, а величина НДГ $\underline{P}(t_0)$ характеризует достоверность прогноза.

Допускается, что измерения могут включать в себя аддитивные случайные ошибки, которые независимы и

распределены нормально с нулевым средним значением и дисперсией вида $\sigma^2 \Delta^2$, где Δ^2 — заданная величина (примерно равная отношению дисперсии ошибки измерений к оценке дисперсии α_1). При $\Delta^2 \neq 0$ следует брать число точек измерений $l > k$. При $\Delta^2 = 0$ можно взять $l = k$, но лучше иметь некоторый избыток числа наблюдений l над числом неизвестных параметров k .

Данные измерений можно представить в виде N независимых векторов (по каждой из N реализаций ОП) размерности l :

$$\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_j, \dots, \vec{y}_N, \quad (48)$$

где

$$\vec{y}_j = [y_{j1}, \dots, y_{jS}, \dots, y_{jl}]^T; \quad y_{jS} = X_j(t_S) + e_{jS}; \quad j = \overline{1, N}; \quad S = \overline{1, l}.$$

В представлении (48) величина $X_j(t_S)$ есть значение j -й реализации ОП $X(t)$ в момент t_S , а e_{jS} — погрешность измерения этой реализации в момент $t = t_S$, распределенная нормально с $M e_{jS} = 0$ и $D e_{jS} = \sigma^2 \Delta^2$.

В случае наблюдения за несколькими ОП $X_i(t)$, $i = \overline{1, m}$ все сказанное выше относится к каждому из ОП.

З а м е ч а н и е 1. Вместо модели изменения ОП вида (41) можно использовать более общую модель вида

$$Z(t) = X(t) + \xi(t), \quad (49)$$

где $X(t)$ — процесс, заданный своим каноническим представлением в виде (41), а $\xi(t)$ — не зависящий от него стационарный слабо коррелированный процесс (шум) с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2 \Delta^2$. В этом случае погрешность измерения можно трактовать как значение соответствующей реализации этого процесса в один из заданных моментов времени, а измерения предполагать точными. При этом во всех последующих соотношениях необходимо взять вместо $B(t_0)$ величину

$$\tilde{B}(t_0) = \sqrt{B^2(t_0) + \Delta^2}. \quad (50)$$

Расчетные соотношения для одномерного процесса ($m = 1$) [75]. То-

точная оценка ВБР определяется по формуле

$$\hat{P}(t_0) = \Phi[\hat{H}(t_0)], \quad (51)$$

где $\hat{H}(t_0)$ определяется в виде

$$\hat{H}(t_0) = \left\{ \sum_{j=1}^k \hat{\mu}_j \varphi_j(t_0) - x_0 \right\} / \hat{\sigma}_B(t_0). \quad (52)$$

Оценки $\hat{\mu}_j$ и $\hat{\sigma}$ определяются на основе обобщенного метода наименьших квадратов по формулам, использующим матричное умножение:

$$\begin{aligned} \hat{\vec{\mu}} &= [\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_j, \dots, \hat{\mu}_r]^T = \\ &= [F^T W F]^{-1} F^T W \vec{Y}; \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{Nl - k} \sum_{j=1}^N (\vec{y}_j - F \hat{\vec{\mu}})^T \times \\ &\times W (\vec{y}_j - F \hat{\vec{\mu}}), \end{aligned} \quad (54)$$

где $W = (W_0)^{-1} = (F \Theta F^T + \Delta^2 I_l)^{-1}$; I_l — единичная матрица порядка l ; $\vec{y} = \frac{1}{N} (\vec{y}_1 + \dots + \vec{y}_N)$ — среднее арифметическое результатов измерений N реализаций ОП.

Матрица F (F^T — матрица, транспонированная к F) определяется значениями базисных функций $\varphi_1(t), \dots, \varphi_k(t)$ в точках наблюдений $t_1, t_2, \dots, t_l$ и имеет вид:

$$F = \begin{bmatrix} \varphi_1(t_1) & \varphi_2(t_1) & \dots & \varphi_k(t_1) \\ \varphi_1(t_2) & \varphi_2(t_2) & \dots & \varphi_k(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(t_l) & \varphi_2(t_l) & \dots & \varphi_k(t_l) \end{bmatrix}. \quad (55)$$

Матрица Θ предполагается известной, а множитель $B(t_0)$ определяется по формуле (45).

НДГ уровня γ для ВБР определяется по формуле

$$\underline{P}(t_0) = \Phi[\underline{H}(t_0)], \quad (56)$$

где НДГ уровня γ для $H(t_0)$ определяется через НДГ для параметра нецентральности δ нецентрального распределения Стьюдента в виде

$$\underline{H}(t_0) = \frac{1}{\sqrt{N(t_0)}} \times \times \delta[\hat{H}(t_0) \sqrt{N(t_0)}, \nu, \gamma]. \quad (57)$$

Приведенный объем испытаний $N(t_0)$ в (57) определяется по формуле

$$N(t_0) = N \{ \vec{\varphi}^T(t_0) \Theta \vec{\varphi}(t_0) / \vec{\varphi}^T(t_0) \times \times (F^T W F)^{-1} \vec{\varphi}(t_0) \}, \quad (58)$$

где $\nu = Nl - k$ есть число степеней свободы нецентрального распределения Стьюдента, а величина $\delta[\cdot, \nu, \gamma]$ определяется по специальным таблицам [10] или по табл. 10 приложения.

Вместо точной формулы (57) можно при $\nu = Nl - k > 5$ пользоваться аппроксимацией функции $\delta[\cdot, \nu, \gamma]$, что приводит к следующему выражению для $\underline{H}(t_0)$:

$$\underline{H}(t_0) \simeq \hat{H}(t_0) - u_\gamma \times \times \sqrt{\frac{1}{N(t_0)} + \frac{1}{2(Nl - k)}} \hat{H}^2(t_0), \quad (59)$$

где u_γ — квантиль уровня γ нормального закона распределения (см. табл. 7 приложения).

Все расчетные формулы сведены в табл. 4.

З а м е ч а н и е 2. Все формулы, приведенные выше для модели (41) и измерений (48), справедливы и для случая, когда принимается модель вида (49) с аддитивным шумом, нужно лишь заменить величину $B(t_0)$, определяемую формулой (45), и $N(t_0)$, определяемую формулой (58), на $\tilde{B}(t_0)$ из формулы (50) и на $\tilde{N}(t_0)$, вычисленную по следующей формуле:

$$\tilde{N}(t_0) = N \{ [\vec{\varphi}^T(t_0) \Theta \vec{\varphi}(t_0) + \Delta^2] / \vec{\varphi}^T(t_0) \times \times (t_0) (F^T W F)^{-1} \vec{\varphi}(t_0) \}. \quad (60)$$

З а м е ч а н и е 3. Для процессов с возрастающими реализациями в качестве поля допуска берется верхнее

ограничение X^0 на ОП $X(t)$, т. е. условие работоспособности имеет вид $A(t_0) = \{X(t) < X^0, t \in [0, t_0]\}$,

а показатель ВБР $P(t_0) = \Phi[\tilde{H}(t_0)]$, где

$$\tilde{H}(t_0) = \{X^0 - \sum \mu_i \varphi_i(t_0)\} / \sigma B(t_0) = = -H(t_0).$$

Отсюда следует, что для возрастающих ОП $X(t)$ справедливы все приведенные выше формулы, если вместо $H(t_0)$ и $\hat{H}(t_0)$ брать

$$\tilde{H}(t_0) = -H(t_0) \text{ и } \hat{H}(t_0) = -\hat{H}(t_0).$$

Пример 5. Исследуем по результатам испытаний надежность системы, работоспособность которой определяется скалярным параметром $X(t)$, для которого принята модель изменения вида

$$X(t) = \alpha - \beta t + \xi(t), \quad (61)$$

в которой α и β — независимые нормально распределенные случайные коэффициенты с известным отношением дисперсий $\theta = D(\beta)/D(\alpha) = 0,0001$, а $\xi(t)$ — не зависящий от α и β слабо коррелированный случайный шум, дисперсия которого удовлетворяет условию

$$\Delta^2 = D[\xi(t)]/D(\alpha) = 0,01.$$

Нужно по данным измерений $N = 3$ реализаций процесса $X(t)$ в моменты времени $t_1 = 0$; $t_2 = 5$; $t_3 = 10$; $t_4 = 15$ мес. оценить ВБР изделий этого типа в течение промежутка $t_0 = 15, 20$ и 30 мес. при уровне доверия $\gamma = 0,9$, если нижняя допустимая граница изменения параметра $X(t)$ равна $x_0 = 0,7$ усл. ед.

Решение. Представим данные об измерении рассматриваемого параметра в указанные моменты времени в виде трех векторов $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3$, компоненты которых есть измеренные значения реализаций процесса $X(t)$ в эти моменты:

$$\vec{y}_1 = \| 2,456; 2,352; 2,312; 2,311 \|^T;$$

$$\vec{y}_2 = \| 1,500; 1,667; 1,648; 1,575 \|^T;$$

$$\vec{y}_3 = \| 2,607; 2,484; 2,391; 2,234 \|^T.$$

4. Оценка безотказности при измеряемых реализациях ОП

Модель изменения ОП и результаты измерений	Вид показателя ВБР	Точечная оценка ВБР	НДГ уровня γ для ВБР
Модель изменения ОП: $X(t) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \varphi_i(t);$ $\alpha_i \sim N(\mu_i, \sigma \theta_i);$ $\Theta = \begin{bmatrix} \theta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \theta_k \end{bmatrix};$ $\varphi_i(t) \downarrow, P(\alpha_i < 0) \simeq 0$ Результаты измерений: $\vec{y}_j = [y_{j1}, \dots, y_{jS}, \dots, y_{jl}]^T;$ $y_{jS} = X_j(t_S) + \varepsilon_{jS}$ $j = \overline{1, N}$ [N — число реализаций случайного процесса $X(t)$]; $S = \overline{1, l}$ (l — число измерений)	$P(t_0) = \Phi[H(t_0)],$ где $H(t_0) = \frac{\sum_{i=1}^k \mu_i \varphi_i(t_0) - x_0}{\sigma B(t_0)};$ $B(t_0) = \sqrt{\vec{\varphi}^T(t_0) \Theta \vec{\varphi}(t_0)};$ $\vec{\varphi}(t_0) = [\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_k(t_0)]^T$	$\hat{P}(t_0) = \Phi[\hat{H}(t_0)],$ где $\hat{H}(t_0) = \frac{\sum_{i=1}^k \hat{\mu}_i \varphi_i(t_0) - x_0}{\hat{\sigma} B(t_0)};$ $\hat{\mu} = (F^T W F)^{-1} F^T W \vec{Y};$ $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{Nl - k} \sum_{j=1}^N (\vec{y}_j - F \hat{\mu})^T \times$ $\times W (\vec{y}_j - F \hat{\mu});$ $\vec{y} = \frac{1}{N} (\vec{y}_1 + \dots + \vec{y}_N);$ $W = (F \Theta F^T + \Delta^2 I_l)^{-1};$ $F = \begin{bmatrix} \varphi_1(t_1) & \varphi_2(t_1) \dots \varphi_k(t_1) \\ \varphi_1(t_2) & \varphi_2(t_2) \dots \varphi_k(t_2) \\ \vdots & \vdots \\ \varphi_1(t_l) & \varphi_2(t_l) \dots \varphi_k(t_l) \end{bmatrix}$	$\underline{P}(t_0) = \Phi[\underline{H}(t_0)],$ где $\underline{H}(t_0) = \frac{1}{\sqrt{N(t_0)}} \times$ $\times \delta(\hat{H} \sqrt{N(t_0)}, v, \gamma);$ $N(t_0) = \frac{N \vec{\varphi}^T(t_0) \Theta \vec{\varphi}(t_0)}{\vec{\varphi}^T(t_0) (F^T W F)^{-1} \vec{\varphi}(t_0)};$ $v = Nl - k;$ $\underline{H}(t_0) \simeq \hat{H}(t_0) -$ $- U_\gamma \sqrt{D\hat{H}(t_0)};$ $D\hat{H}(t_0) \simeq \frac{1}{N(t_0)} +$ $+ \frac{1}{2(Nl - k)} \hat{H}^2(t_0)$

В рассматриваемом примере базисными функциями являются $\varphi_1(t) \equiv 1$, $\varphi_2(t) = -t$, т. е. $k = 2$, число реализаций (каждая измеряется на отдельном образце) $N = 3$, число измерений на одной (каждой реализации) $l = 4$; $\Delta^2 = 0,01$, а матрицы

$$\Theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,0001 \end{bmatrix};$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \end{bmatrix}^T.$$

Для вычисления оценок $\hat{P}(t_0)$ и $\hat{P}(t_0)$ по формулам (51) и (56) предварительно найдем оценки $\hat{H}(t_0)$ и $\hat{N}(t_0)$ по формулам (52), (57), (59), для чего необходимо выполнить следующие действия.

1. Вычислить вспомогательные матрицы $W = (F\Theta F^T + \Delta^2 I_l)^{-1}$ из (53), (54) и $(F^T W F)^{-1}$:

$$W = (F\Theta F^T + \Delta^2 I_l)^{-1} = \begin{bmatrix} 50,249 & -33,167 & -16,584 & 0 \\ -33,167 & 72,332 & -22,167 & -16,667 \\ -16,584 & -22,167 & 72,250 & -33,333 \\ 0 & -16,667 & -33,333 & 50,000 \end{bmatrix};$$

$$(F^T W F)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,995 & -3,318 \\ -3,318 & 5566,62 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} +1,007 & 0,0006 \\ 0,0006 & 0,00018 \end{bmatrix}.$$

2. Вычислить точечные оценки неизвестного вектора средних значений $\vec{\mu} = \|\mu_1, \mu_2\|^T$ по формуле (53) и множителя $\hat{\sigma}^2$ — по формуле (54), для чего предварительно найти вектор средних выборочных

$$\begin{aligned} \vec{y} &= \frac{1}{N} (\vec{y}_1 + \vec{y}_2 + \vec{y}_3) = \\ &= \|2,218; 2,167; 2,117; 2,040\|^T. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \hat{\vec{\mu}} &= (F^T W F)^{-1} F^T W \vec{y} = \\ &= \|2,223; 0,012\|^T; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{Nl - k} \sum_{j=1}^3 (\vec{y}_j - F\hat{\vec{\mu}})^T \times \\ &\times W (\vec{y}_j - F\hat{\vec{\mu}}) = \frac{1}{10} \cdot 2,903 = \\ &= 0,2903 \rightarrow \hat{\sigma} = 0,539. \end{aligned}$$

3. Подставляя полученные значения в выражения (52) и (60), находим $\hat{H}(t_0)$ и $\hat{N}(t_0)$; при этом $B(t_0)$ следует заменить на $\hat{B}(t_0)$ [из формулы (50)]. Для произвольного момента t_0 имеем:

$$\begin{aligned} \hat{N}(t_0) &= \frac{N [\vec{\varphi}^T \Theta \vec{\varphi} + \Delta^2]}{\vec{\varphi}^T (F^T W F)^{-1} \vec{\varphi}} = \\ &= \frac{3 [1,00 + (0,01t_0)^2 + 0,01]}{1,007 + 0,120 (0,01t_0) + 1,8 (0,01t_0)^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{H}(t_0) &= \frac{\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 t_0 - X_0}{\hat{\sigma} \sqrt{\hat{B}^2(t_0) + \Delta^2}} = \\ &= \frac{2,223 - 0,012t_0 - 0,7}{0,539 \sqrt{1 + (0,01t_0)^2 + 0,01}}; \end{aligned}$$

для заданных значений $t_0 = 15, 20$ и 30 мес.

$$\begin{aligned} \hat{H}(15) &= 2,461; \quad \hat{H}(20) = 2,335; \\ \hat{H}(30) &= 2,074; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{N}(15) &= 1,705; \quad \hat{N}(20) = 1,690; \\ \hat{N}(30) &= 1,655. \end{aligned}$$

4. Найденные значения используются для вычисления НДГ $\hat{H}(t_0)$ и $\hat{P}(t_0)$ при доверительном уровне $\gamma = 0,9$ и точечной оценки $\hat{P}(t_0)$ для заданных значений $t_0 = 15, 20$ и 30 мес. Результаты расчетов представлены в табл. 5.

5. Значения оценок ВБР

t_0	$\hat{H}(t_0)$	$\hat{P}(t_0)$	$\underline{H}(t_0)$	$\underline{P}(t_0)$	$\overline{H}^*(t_0)$	$\overline{P}(t_0)$
			Точные		Приближенные	
15	2,461	0,993	1,414	0,921	1,431	0,924
20	2,335	0,9902	1,304	0,904	1,324	0,907
30	2,074	0,981	1,07	0,857	1,098	0,864

Сравнивая значения точных и приближенных ДГ, видим, что формула (50) может применяться даже для случая небольших выборок.

Можно также отметить, что ответ существенно зависит от глубины прогноза $\rho = t_0/t_4$, где $t_4 = 15$ мес. есть момент последнего наблюдения. При прогнозировании на 30 % сверх времени наблюдения (при $\rho = 20/15 = 1,33$) НДГ P уменьшилась на величину $(0,924 - 0,904)/(1 - 0,924) = 0,22$, т. е. на 22 %, а при прогнозе на 100 % (при $\rho = 30/15 = 2$) — на $(0,924 - 0,857)/(1 - 0,924) = 0,88$, т. е. на 88 %.

В следующем примере показано, как по результатам предварительных испытаний можно получить оценки параметров θ и Δ^2 , которые в данном примере были приняты известными.

Пример 6. По результатам испытаний, приведенным в примере 5, требуется оценить коэффициенты θ и Δ^2 пропорциональности дисперсий, считая их неизвестными, а модель изменения ОП $X(t)$ в виде (61) заданной.

Решение. Рассмотрим вначале отдельно каждый вектор наблюдений $\vec{y}_j$, $j = \overline{1, N}$ за j -й реализацией ОП $X(t)$. Он представляет собой набор значений отклика в регрессионной модели вида $\vec{y}_j = F\vec{\alpha}_j + \vec{\varepsilon}_j$, $j = \overline{1, N}$,

где вектор ошибок $\vec{\varepsilon}_j$ имеет дисперсионную матрицу $\sigma^2 \Delta^2 I_l$ ($l = 4$), а вектор $\vec{\alpha}_j = \|\alpha_j, \beta_j\|^T$ предполагается постоянным.

Задача оценивания множителя $\Sigma^2 = \sigma^2 \Delta^2$ и компонент вектора $\vec{\alpha}_j$ есть

традиционная задача регрессионного анализа, когда матрица дисперсий вектора ошибок пропорциональна единичной. В этом случае для любого $j = 1, 2, 3$ можно найти оценки $\alpha_j, \beta_j, \Sigma_j^2$ по методу наименьших квадратов, согласно которому (индекс j опущен)

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_j \\ \hat{\beta}_j \end{bmatrix} = (F^T F)^{-1} F^T \vec{y}_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$\hat{\Sigma}_j^2 = \frac{1}{3} \sum_{s=1}^4 (y_{js} - \hat{\alpha}_j - \hat{\beta}_j t_{js})^2,$$

$$j = 1, 2, 3,$$

где $t_{j1} = 0$, $t_{j2} = 5$, $t_{j3} = 10$, $t_{j4} = 15$ мес.

В данном примере

$$\hat{\alpha}_1 = 2,429, \quad \hat{\beta}_1 = 0,0095,$$

$$\hat{\Sigma}_1^2 = 0,0014;$$

$$\hat{\alpha}_2 = 1,629, \quad \hat{\beta}_2 = 0,0013,$$

$$\hat{\Sigma}_2^2 = 0,0029;$$

$$\hat{\alpha}_3 = 2,611, \quad \hat{\beta}_3 = 0,0243,$$

$$\hat{\Sigma}_3^2 = 0,0004.$$

На основе значений $\hat{\Sigma}_j^2$ можно найти совокупную оценку множителя Σ^2

$$\text{как } \hat{\Sigma}^2 = \frac{1}{3} (\hat{\Sigma}_1^2 + \hat{\Sigma}_2^2 + \hat{\Sigma}_3^2) = 0,00154.$$

Если теперь обратиться к случайным величинам α и β , то можно получить

$$D(\hat{\alpha}) = D(\alpha) + \sum^2 \cdot 0,7;$$

$$D(\hat{\beta}) = D(\beta) + \sum^2 \cdot 0,008.$$

Исходя из значений $\hat{\alpha}_j$ и $\hat{\beta}_j$ для различных реализаций $X(t)$ можно оценить дисперсии оценок $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ обычным образом:

$$\hat{D}(\hat{\alpha}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 (\hat{\alpha}_j - \bar{\hat{\alpha}})^2 = 0,272;$$

$$\hat{D}(\hat{\beta}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 (\hat{\beta}_j - \bar{\hat{\beta}})^2 = 0,00014,$$

а значит,

$$\hat{D}(\alpha) = 0,272 - 0,00154 \cdot 0,7 = 0,2714;$$

$$\hat{D}(\beta) = 0,00014 - 0,00154 \cdot 0,008 = 0,00012.$$

Поделив $\hat{D}(\beta)$ и $\hat{\Sigma}^2$ на оценку $\hat{D}(\alpha)$, получим оценочные значения $\hat{\theta} \simeq 0,00045$ и $\hat{\Delta}^2 \simeq 0,0057$.

Полученные оценки $\hat{\theta}$ и $\hat{\Delta}^2$ можно использовать в качестве значений θ и Δ^2 при расчете $\underline{P}(t_0)$ по данным, полученным в ходе другого эксперимента. Если же подсчитать НДГ $\underline{P}(t_0)$ по приведенным в примере 5 данным с использованием вместо θ и Δ^2 найденных оценок $\hat{\theta}$ и $\hat{\Delta}^2$, то можно показать, что ее отличие от вычисленных ранее невелико, т. е. предложенный метод достаточно устойчив при отклонениях выбранных значений θ и Δ^2 от истинных.

Расчетные соотношения для многомерного процесса ($m > 1$)

Пусть условие работоспособности изделия определяется m -мерным ОП $\hat{X}(t) = \{X_1(t), \dots, X_m(t)\}$ с независимыми компонентами. При испытаниях N_i образцов изделий измеряется N_i реализаций каждой компоненты $X_i(t)$ в точках $t_{1i}, t_{2i}, \dots, t_{li}, i = 1, m$ и по этим данным в со-

ответствии с методикой, изложенной выше, для каждого $i = \overline{1, m}$ найдены величины $\hat{H}_i(t_0)$, $N_i(t_0)$, и $v_i = N_i l_i - k_i, i = \overline{1, m}$.

Тогда точечная оценка $\hat{P}(t_0)$ ВБР изделия $P(t_0)$ определяется по формуле

$$\hat{P}_m(t_0) = \prod_{i=1}^m \Phi[\hat{H}_i(t_0)]. \quad (62)$$

Зная точечную оценку $\hat{P}_m$, а также величины $N_i(t_0)$ (или $\tilde{N}(t_0)$) и $v_i = N_i l_i - k_i$, можно найти гарантированные ДГ $\underline{P}(t_0)$ и $\bar{P}(t_0)$ заданных уровней q_1 и q_2 , если выполнены условия

$$\hat{P}_m \geq 0,9 \quad \text{и} \quad [N_i(t_0) - 1] \cdot (N_i l_i - k_i) / N_i(t_0) \leq 9. \quad (63)$$

При нарушении условий (63) можно также пользоваться приведенными ниже формулами (при этом они становятся приближенными).

Для определения ДГ $\underline{P}(t_0)$ и $\bar{P}(t_0)$ уровней q_1 и q_2 , соответственно, определяем величину

$$\hat{H}_m = \Phi^{-1}[\hat{P}_m(t_0)]. \quad (64)$$

Далее по таблицам нецентрального распределения Стьюдента (см. табл. 10 приложения) находим ДГ для параметра нецентральности δ для каждого $i = \overline{1, m}$ в виде

$$\underline{\delta}_i = \underline{\delta}(v_i; \hat{H}_m \sqrt{N_i(t_0)}; 1 - q_1) \quad \text{и} \quad \bar{\delta}_i = \bar{\delta}(v_i; \hat{H}_m \sqrt{N_i(t_0)}; q_2). \quad (65)$$

По найденным значениям $\underline{\delta}_i$ и $\bar{\delta}_i, i = \overline{1, m}$ находим окончательно

$$\underline{P}(t_0) = \min_{1 \leq i \leq m} \Phi[\underline{\delta}_i / \sqrt{N_i(t_0)}] \quad \text{и} \quad \bar{P}(t_0) = \max_{1 \leq i \leq m} \Phi[\bar{\delta}_i / \sqrt{N_i(t_0)}]. \quad (66)$$

Вместо точных формул (65) можно использовать следующие приближен-

6. Таблица исходных данных

t_i	$y_1^{(1)}$	$y_2^{(1)}$	$y_3^{(1)}$	$y_1^{(2)}$	$y_2^{(2)}$	$y_3^{(2)}$	$y_1^{(3)}$	$y_2^{(3)}$	$y_3^{(3)}$
0	6,765	6,769	6,708	2,813	2,914	2,923	625,5	625,4	569,8
50	6,599	6,549	6,443	2,683	2,795	2,707	604,3	573,1	546,4
100	6,353	6,155	6,199	2,564	2,720	2,523	567,7	525,6	517,9

ные формулы, если $\min (v_i) \geq 5$,
 $\bar{P}_m = \Phi(\hat{H}_m) \geq 0,9$:

$$P(t_0) = \min_{1 \leq i \leq m} \Phi \left(\hat{H}_m - z_{q_i} \times \sqrt{\frac{1}{N_i(t_0)} + \frac{1}{2(N_i l_i - k_i)} \hat{H}_m^2} \right) \quad (67)$$

и

$$\bar{P}(t_0) = \max_{1 \leq i \leq m} \Phi \left(\hat{H}_m + z_{q_i} \times \sqrt{\frac{1}{N_i(t_0)} + \frac{1}{2(N_i l_i - k_i)} \hat{H}_m^2} \right). \quad (68)$$

Пример применения изложенной методики приведен в работе [75].

Пример 7. Определим нижнюю доверительную границу ВБР изделия, работоспособность которого определяется пребыванием трехмерного параметра $\vec{X}(t)$ в пределах поля допуска, заданного для каждой компоненты допустимыми уровнями снизу: $X_{10} = 5$; $X_{20} = 2,3$; $X_{30} = 400$. (Каждый скалярный ОП и его допуск измеряются в некоторых своих условных единицах измерения.)

Предварительные исследования позволяют для компонент вектора $\vec{X}(t)$ принять следующие модели изменения:

$$X_1(t) = \alpha_1 - \beta_1 t + \xi_1(t);$$

$$X_2(t) = \alpha_2 - \beta_2 \ln(t+1) + \xi_2(t);$$

$$X_3(t) = \alpha_3 - \beta_3 t + \xi_3(t),$$

где все α_i , β_i и $\xi_i(t)$ независимы;
 $\theta_1^2 = D(\beta_1)/D(\alpha_1) = (0,01)^2$; $\theta_2^2 = D(\beta_2)/D(\alpha_2) = (0,005)^2$; $\theta_3^2 = D(\beta_3)/D(\alpha_3) = (0,008)^2$ — коэф-

фициенты пропорциональности дисперсий случайных величин α_i и β_i ; отношения дисперсий случайных шумов

$$\Delta_1^2 = D[\xi_1(t)]/D(\alpha_1) = (0,1)^2;$$

$$\Delta_2^2 = D[\xi_2(t)]/D(\alpha_2) = (0,3)^2;$$

$$\Delta_3^2 = D[\xi_3(t)]/D(\alpha_3) = (0,1)^2.$$

Требуется определить НДГ уровня $q = 0,9$ для ВБР $P(t_0)$ в течение $t_0 = 120$ и 140 ч по результатам измерений значений ОП для трех образцов в моменты времени $t_1 = 0$, $t_2 = 50$ и $t_3 = 100$ ч. Данные, полученные при измерениях, сведены в табл. 6 ($y_1^{(i)}$, $y_2^{(i)}$, $y_3^{(i)}$ — значения i -й компоненты на $N = 3$ образцах).

Решение. В соответствии с методикой, изложенной выше, проводим следующие вычисления.

1. Для каждой из трех компонент ($m = 3$) вектора ОП $\vec{X}(t)$ составляем матрицы Θ :

$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0,01)^2 \end{bmatrix};$$

$$\Theta_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0,005)^2 \end{bmatrix};$$

$$\Theta_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0,008)^2 \end{bmatrix}.$$

Затем определяем вспомогательные матрицы F_i , учитывая, что объем испытаний $N_i = 3$, число измерений

7. Значения оценок

T	$\hat{H}_1(t_0)$	$\tilde{N}_1(t_0)$	$\hat{H}_2(t_0)$	$\tilde{N}_2(t_0)$	$\hat{H}_3(t_0)$	$\tilde{N}_3(t_0)$
120	2,375	1,725 ²	2,417	1,593 ²	2,508	1,685 ²
140	1,957	1,724 ²	2,357	1,589 ²	2,056	1,680 ²

$l_i = 3$ и число базисных функций $k_i = 2$ для всех $i = 1, 2, 3$:

$$F_1 = F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -50 \\ 1 & -100 \end{bmatrix}; \quad F_2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \ln 51 \\ 1 & \ln 101 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3,932 \\ 1 & 4,615 \end{bmatrix}.$$

2. Для каждого i вычисляем вспомогательные матрицы W_i и $(F_i^T W_i F_i)^{-1}$:

$$W_1 = \begin{bmatrix} 18,32 & -33,06 & 15,56 \\ -33,06 & 66,78 & -33,38 \\ 15,56 & -33,38 & 17,67 \end{bmatrix};$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} 7,49 & -3,58 & -3,58 \\ -3,58 & 7,51 & -3,60 \\ -3,58 & -3,60 & 7,50 \end{bmatrix};$$

$$W_3 = \begin{bmatrix} 18,84 & -33,06 & 15,03 \\ -33,06 & 66,78 & -33,38 \\ 15,03 & -33,39 & 18,20 \end{bmatrix};$$

$$(F_1^T W_1 F_1)^{-1} = \begin{bmatrix} 1,0085 & 0,0001 \\ 0,0001 & 0,0001 \end{bmatrix};$$

$$(F_2^T W_2 F_2)^{-1} = \begin{bmatrix} 1,089 & 0,021 \\ 0,021 & 0,0073 \end{bmatrix};$$

$$(F_3^T W_3 F_3)^{-1} = \begin{bmatrix} 1,008 & 0,0001 \\ 0,0001 & 0,00007 \end{bmatrix}.$$

3. По формулам (53) и (54) определим векторы средних значений для каждой компоненты: $\vec{y}^{(1)} = (6,747; 6,530; 6,236)^T$; $\vec{y}^{(2)} = (2,883; 2,728; 2,602)^T$; $\vec{y}^{(3)} = (606,9; 574,6; 537,1)^T$ и оценки $\hat{\mu}_i$ и $\hat{\sigma}_i^2$

$$\hat{\mu}_1 = (6,760; 0,0052)^T; \quad \hat{\mu}_2 = (2,889; 0,053)^T;$$

$$\hat{\mu}_3 = (607,8 \quad 0,698)^T;$$

$$\hat{\sigma}_1 = 0,304; \quad \hat{\sigma}_2 = 0,132; \quad \hat{\sigma}_3 = 35,59.$$

4. Вычисляем значения $\hat{H}_i(t_0)$ и $\tilde{N}_i(t_0)$ соответственно по формулам (52) и (60):

$$\hat{H}_1(t_0) = \frac{6,76 - 0,0052t_0 - 5}{0,304 \sqrt{1,01 + (0,01t_0)^2}};$$

$$\tilde{N}_1(t_0) = \frac{3[1 + (0,01t_0)^2 + 0,01]}{1,0084 + 0,02(0,01t_0) + (0,01t_0^2)};$$

$$\hat{H}_2(t_0) = \frac{2,889 - 0,053t_0 - 2,3}{0,132 \sqrt{1,09 + [0,005 \ln(t_0 + 1)]^2}};$$

$$\tilde{N}_2(t_0) = \frac{3[1 + (0,005 \ln(t_0 + 1))^2 + 0,09]}{1,089 + 8,264[0,005 \ln(t_0 + 1) + 2,8(0,005 \ln^2(t_0 + 1))]};$$

$$\hat{H}_3(t_0) = \frac{607,8 - 0,698t_0 - 400}{35,59 \sqrt{1,01 + (0,008t_0)^2}};$$

$$\tilde{N}_3(t_0) = \frac{3[1 + (0,008t_0)^2 + 0,01]}{1,00812 + 0,025(0,008t_0) + 1,094(0,008t_0)^2}.$$

Для моментов времени $t_0 = 120$ и 140 ч значения $\hat{H}_i(t_0)$ и $\tilde{N}_i(t_0)$ сведены в табл. 7.

5. По формуле (62) находим значения точечных оценок ВБР $P(t_0)$:

$$\hat{P}_3(120) = \Phi(2,375) \Phi(2,417) \times \times \Phi(2,508) = 0,978;$$

$$\hat{P}_s(140) = \Phi(1,957) \Phi(2,357) \times \\ \times \Phi(2,056) = 0,947$$

и убеждаемся, что условия (63) выполнены, так как при $N_i = l_i = 3$ и $k_i = 2$ $[\tilde{N}_i(t_0) - 1] \cdot 7 / \tilde{N}_i(t_0) < 9$ и $\hat{P}_s(t_0) > 0,9$.

Следовательно, по формуле (64)

$$\hat{H}_m(120) = \Phi^{-1}(0,978) = 2,014 \text{ и}$$

$$\hat{H}_m(140) = \Phi^{-1}(0,947) = 1,616.$$

Используя таблицы нецентрального распределения Стьюдента (см. табл. 10 приложения), по формуле (66) находим

$$\underline{P}_{0,9}(120) = \min_{i=1, 2, 3} \Phi \times \\ \times \left[\frac{1}{\sqrt{\tilde{N}_i(120)}} \delta(7; 2014 \sqrt{\tilde{N}_i(120)}; \right. \\ \left. 0,1) \right] = \Phi(0,898) = 0,815;$$

$$\underline{P}_{0,9}(140) = \min_{i=1, 2, 3} \Phi \times \\ \times \left[\frac{1}{\sqrt{\tilde{N}_i(140)}} \delta(7; 1,616 \times \right. \\ \left. \times \sqrt{\tilde{N}_i(t_0)}; 0,1) \right] = \Phi(0,592) = \\ = 0,723.$$

Используя приближенную формулу (67), получим следующие значения НДГ:

$$\underline{P}_{0,9}(120) = \min_{i=1, 2, 3} \Phi \left(2,014 - \right. \\ \left. - 1,28 \sqrt{\frac{1}{\tilde{N}_i(120)} + \frac{(2,014)^2}{2 \cdot 7}} \right) = \\ = \Phi \left(2,014 - 1,28 \times \right. \\ \left. \times \sqrt{\frac{1}{(1,593)^2} + \frac{(2,014)^2}{14}} \right) = \\ = \Phi(0,954) = 0,830;$$

$$\underline{P}_{0,9}(140) = \min_{i=1, 2, 3} \Phi \left(1,616 - \right. \\ \left. - 1,28 \sqrt{\frac{1}{\tilde{N}_i(140)} + \frac{(1,616)^2}{2 \cdot 7}} \right) = \\ = \Phi \left(1,616 - \right. \\ \left. - 1,28 \sqrt{\frac{1}{(1,589)^2} + \frac{(1,616)^2}{14}} \right) = \\ = \Phi(0,638) = 0,738,$$

что достаточно близко к точным значениям НДГ при таком малом объеме данных ($N_i l_i - k_i = 7$).

Статистические оценки безотказности при неизмеряемых реализациях ОП. В ряде случаев в ходе испытаний N образцов изделия не имеется возможности производить измерения ОП даже в отдельные моменты времени на интервале наблюдений $J_\tau = [0, \tau] < [0, t_0] = J_0$. Информация, получаемая по результатам испытаний, сводится к подсчету числа тех реализаций из их общего числа N , которые на промежутке J_τ вышли за назначенный в ТУ допуск a или за некоторый контрольный (более жесткий) допуск a' ($a' < a$, если речь идет о верхнем допуске).

В указанной ситуации можно дать решение задачи прогнозирования ВБР изделия $P(t_0)$ для следующих двух случаев, в определенном смысле дополняющих друг друга [75].

Случай 1. Случайный процесс $X(t)$, моделирующий поведение ОП изделия, представим каноническим разложением (41) со всеми допущениями, которые были оговорены выше. В этом случае показатель ВБР $P(t_0)$ можно записать в виде

$$P(t_0) = \Phi[h(t_0)], \quad (69)$$

где

$$h(t_0) = \frac{\left[\sum_{i=1}^k \eta_i \Phi_i(t_0) - 1 \right]}{\left[v \sum_{i=1}^k \eta_i \Phi_i(t_0) \right]},$$

где $\eta_i = \mu_i/x_0$ — «запас» по i -му пара-

метру модели (41), $i = \overline{1, k}$; $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_k)$ — вектор «запасов» (до проведения испытаний неизвестен); v — коэффициент вариации случайной величины $X(t_0)$ или его верхняя граница (определяется по результатам предварительных испытаний или испытаний образцов-аналогов).

Случай 2. Случайный процесс $X(t)$ является стационарным гауссовским, со средним значением μ и дисперсией σ^2 , а значение x_0 нижнего допуска на $x(t)$ является достаточно «низким», так что поток выбросов $X(t)$ за уровень X_0 можно считать пуассоновским. Тогда ВБР изделия $P(t_0)$ на промежутке $J_0 = [0, t_0]$ можно представить в виде

$$P(t_0) = \exp \left\{ -\frac{t_0 \theta}{2\pi} \times \right. \\ \left. \times \exp \left[-\frac{1}{2v^2} \left(1 - \frac{1}{\eta} \right)^2 \right] \right\}, \quad (70)$$

где $\eta = \mu/x_0$ — «запас» ОП $X(t)$ по отношению к допуску на него; $v = \sigma/\mu$ — коэффициент вариации или его верхняя граница (предполагаемая известной на основе предварительных испытаний); $\theta^2 = \sigma_1^2/\sigma^2$ — отношение дисперсий производной процесса $X(t)$ и самого процесса $X(t)$ или его верхняя граница (также предполагаемая априори известной).

Исходные данные для расчета оценок $\hat{P}$ и $\underline{P}$. Для расчета точечной оценки $\hat{P}$ показателя $P = P(t_0)$ и его НДГ $\underline{P}$ уровня γ используются результаты биномиальных испытаний N_1 образцов изделий в течение времени $J_1 = [0, t_1]$, $t_1 < t_0$, т. е. число отказавших d_1 образцов из N_1 образцов, поставленных на испытания. При этом отказом изделия за промежуток J_1 считается выход ОП $X(t)$ не за допустимый уровень x_0 , а за «ужесточенный» уровень x_0^1 ($x_0^1 > x_0$). Показатель $\kappa_1 = x_0^1/x_0$ назовем коэффициентом «ужесточения» испытаний в момент t_1 .

В более общем случае вместо одной выборки N_1 могут рассматриваться несколько независимых выборок $N_1, \dots, N_S$, из которых фиксируется число отказавших образцов $d_1, \dots, d_S$, соот-

ветственно, за промежутки времени $J_1 = [0, t_1]$, $J_2 = [0, t_2]$, ..., $J_S = [0, t_S]$.

При этом, как и выше, отказом изделия считается выход ОП $X(t)$ за «ужесточенный» уровень x_0^1 на промежутке J_1 , x_0^2 на промежутке J_2 и т. д. до x_0^S на промежутке J_S . Таким образом, для каждой i -й выборки N_i выбирается свой коэффициент «ужесточения» испытаний κ_i , $i = \overline{1, S}$. Следует иметь в виду, что для случая 2 дополнительное ограничение состоит в том, что значения коэффициентов «ужесточения» κ_i , $i = \overline{1, S}$ предполагаются не слишком большими, а именно такими, чтобы поток выбросов $X(t)$ за «ужесточенный» уровень $x_0^i > x_0$ оставался пуассоновским.

Основные расчетные соотношения при $S = 1$. Пусть контроль работоспособности N_1 образцов производится в единственный момент t_1 ($t_1 < t_0$) и из N_1 образцов зафиксировано d_1 образцов, для которых на промежутке $[0, t_1] = J_1$ наблюдался выход процесса $X(t)$ за допуск $x_0^1 > x_0$. Допуск $x_0^1 = \kappa_1 x_0$,

где κ_1 — коэффициент «ужесточения» (назначается заранее из таких соображений, чтобы, как правило, имел место исход испытаний $d_1 = 0$).

По данным N_1 и d_1 на момент $t = t_1$ можно обычным образом (см. гл. 7) найти точечную оценку $\hat{P}_1$ и НДГ $\underline{P}_1$ уровня γ для ВБР $P = P(t_1)$.

Напомним, что $\hat{P}_1 = 1 - d_1/N_1$, $\underline{P}_1 = f_2(N_1, \hat{P}_1, \gamma)$ (см. табл. 1—4 приложения).

В наиболее частом случае, когда $d_1 = 0$, имеем:

$$\hat{P}_1 = 1, \quad \underline{P}_1 = (1 - \gamma)^{1/N_1}.$$

Определив $\hat{P}_1$ и $\underline{P}_1$ по табл. 1—4 приложения, находим соответствующие значения функции Лапласа:

$$\hat{z}_1 = \Phi^{-1}(\hat{P}_1); \quad \underline{z}_1 = \Phi^{-1}(\underline{P}_1). \quad (71)$$

Зная величины $\hat{z}_1$ и $\underline{z}_1$, а также оценив на основании априорных данных

8. Оценка безотказности при неизмеряемых реализациях ОП

Предположения о виде $X(t)$	Условие работоспособности и исходные данные	Точечная и интервальная оценки ВБР (НДГ уровня γ)	Примечание
$X(t) =$ $= \sum_{i=1}^k \alpha_i \varphi_i(t);$ $\alpha_i \sim N(\mu_i, \sigma_i);$ $\varphi_i(t) \downarrow,$ $P(\alpha_i < 0) \approx 0$	$A(t_0) = \{X(t_0) > x_0^1 > x_0\};$ $\frac{x_0^1}{x_0} = \kappa_1 > 1;$ $v = \sqrt{DX(t_0)}/MX(t_0);$ $N_1, d_1 — \text{результаты испытаний на интервале}$ $J_1 = [0, t_1], t_1 < t_0$	$\hat{P}(t_0, t_1) = \Phi[\hat{h}(t_0, t_1)];$ $\underline{P}(t_0, t_1) = \Phi[\underline{h}(t_0, t_1)],$ где $\hat{h}(t_0, t_1) =$ $= \frac{1}{v} \left\{ 1 - \frac{1 - \hat{z}_1 v}{\kappa_1} \max_{1 \leq i \leq k} [\varphi_i(t_1)/\varphi_i(t_0)] \right\};$ $\underline{h}(t_0, t_1) =$ $= \frac{1}{v} \left\{ 1 - \frac{1 - \underline{z}_1 v}{\kappa_1} \max_{1 \leq i \leq k} [\varphi_i(t_1)/\varphi_i(t_0)] \right\}$	$\hat{z}_1 = \Phi^{-1}(\hat{P}_1);$ $\underline{z}_1 = \Phi^{-1}(\underline{P}_1);$ $\hat{P}_1$ и $\underline{P}_1$ определяют по N_1 и d_1
$X(t)$ — стационарный гауссовский случайный процесс на интервале $J_0 = [0, t_0]$ $MX(t) = \mu;$ $DX(t) = \sigma^2$	$A(t_0) = \{X(t) > x_0^1 > x_0, t \in J_0\};$ $\frac{x_0^1}{x_0} = \kappa_1 > 1;$ $\frac{\sigma}{\mu} \leq v — \text{верхняя граница коэффициента вариации};$ $\frac{\sigma_1^2}{\sigma^2} \leq \theta — \text{верхняя граница отношения } DX'(t)/DX(t);$ $N_1, d_1 — \text{результаты испытаний на интервале } J_1 = [0, t_1]$	$\hat{P}(t_0, t_1) =$ $= \exp \left\{ -\frac{t_0 \theta}{2\pi} \exp \left[-\frac{1}{2v^2} \left(1 - \frac{1}{\hat{\eta}_1} \right)^2 \right] \right\};$ $\underline{P}(t_0, t_1) =$ $= \exp \left\{ -\frac{t_0 \theta}{2\pi} \exp \left[-\frac{1}{2v^2} \left(1 - \frac{1}{\underline{\eta}_1} \right)^2 \right] \right\},$ где $\hat{\eta}_1 = \kappa_1 / \{1 - v [2 \ln(t_1 \theta / 2\pi) \ln \hat{P}^{-1}]^{1/2}\};$ $\underline{\eta}_1 = \kappa_1 / \{1 - v [2 \ln(t_1 \theta / 2\pi) \ln \underline{P}^{-1}]^{1/2}\}$	v и θ определяют с учетом априорных данных; $\hat{P}_1$ и $\underline{P}_1$ определяют по N_1 и d_1

9. Значения НДГ уровня $\gamma = 0,9$ для ВБР $P(t_0)$

Объем испытаний при $t = t_1$	$\underline{P}(t_1) = (1-\gamma)^{1/N}$	$t_1 = 1; t_0 = 3$		$t_1 = 2; t_0 = 3$	
		$\kappa_1 = 1,3$	$\kappa_1 = 1,5$	$\kappa_1 = 1,3$	$\kappa_1 = 1,5$
$N = 3$	0,469	0,881	0,991	0,985	0,9993
$N = 10$	0,794	0,896	0,992	0,988	0,9995

верхнюю границу коэффициента вариации v и параметра θ , легко найти точечную оценку $\hat{P}(t_0, t_1)$ и НДГ уровня γ $\underline{P}(t_0, t_1)$ для ВБР $P(t_0)$ по результатам испытаний N_1 образцов до момента t_1 ($t_1 < t_0$). Расчетные формулы приведены в табл. 8.

Расчетные соотношения при $S > 1$. Пусть контроль работоспособности изделий осуществляется в моменты $t_k \in J_\tau = [0, \tau]$, $\tau < t_0$, $k = \overline{1, S}$ и для каждого момента t_k найдены точечные оценки $\hat{P}_k$ и НДГ $\underline{P}_k$ уровня γ для ВБР изделия в эти моменты. При этом возможны два варианта.

1. Испытания не являются разрушающими и проводятся на одной и той же выборке $N_1 = N_2 = \dots = N_S = N$ изделий в моменты t_k , $k = \overline{1, S}$. В этом случае для каждого момента t_k , $k = \overline{1, S}$ нужно вычислить оценки $\hat{P}(t_0, t_k)$ и $\underline{P}(t_0, t_k)$ в соответствии с изложенным выше и выбрать из них наилучшие, т. е. в качестве точечной оценки ВБР взять

$$\hat{P}(t_0) = \max_{1 \leq k \leq S} \hat{P}(t_0, t_k), \quad (72)$$

а в качестве НДГ уровня γ взять

$$\underline{P}(t_0) = \max_{1 \leq k \leq S} \underline{P}(t_0, t_k). \quad (73)$$

2. В каждый момент контроля t_k , $k = \overline{1, S}$ наблюдаются независимые выборки образцов объемом N_k , $k = \overline{1, S}$. В этом случае можно объединить всю информацию о поведении ОП $X(t)$, полученную в каждый из моментов t_k , $k = \overline{1, S}$, используя эквивалентные объемы испытаний

$$\tilde{N}_k = [\ln(1-\gamma)/\ln \underline{P}(t_0, t_k)], \quad k = \overline{1, S}. \quad (74)$$

Суммируя величины $\tilde{N}_k$, находим суммарный эквивалентный объем испытаний $\tilde{N} = \sum_{k=1}^S \tilde{N}_k$, а затем и эквивалентную (по всем испытаниям) НДГ уровня γ для ВБР изделия

$$\underline{P}(t_0) = (1-\gamma)^{1/\tilde{N}}, \quad \tilde{N} = \sum_{k=1}^S \tilde{N}_k. \quad (75)$$

Точечную оценку в случае 2 можно вычислить усреднением оценок $\hat{P}(t_0, t_k)$, т. е.

$$\hat{P}(t_0) = 1/S \sum_{k=1}^S \hat{P}(t_0, t_k).$$

Пример 8. Пусть определяющий параметр $X(t)$ изделия представлен следующей моделью (α_i — случайные величины):

$$X(t) = \alpha_1 + \alpha_2 e^{-0,1t} + \alpha_3 t^{-1/2}.$$

В некоторых условных единицах заданы величины $t_0 = 3$ и нижний допуск $x_0 = 1$. Для коэффициента вариации случайной величины $X(t_0)$ известно значение верхней границы $v = 0,1$.

Требуется определить НДГ уровня $\gamma = 0,9$ для ВБР изделия $P(t_0) = \mathcal{P}\{X(t) > x_0; t \in [0, t_0]\}$, если к моменту $t_1 = 1$ (или $t_1 = 2$) были проведены безотказные испытания при коэффициентах «ужесточения» допуска $\kappa_1 = 1,3$ или $\kappa_1 = 1,5$.

Результаты расчетов по формулам табл. 8 приведены в табл. 9.

10. Значения НДГ уровня $\gamma = 0,9$ для ВБР $P(t_0)$

Объем испытаний при $t = t_1$	$\underline{P}(t_1) =$ $= (1-\gamma)^{1/N}$	$t_1 = 10; t_0 = 30$		$t_1 = 20; t_0 = 30$	
		$\kappa_1 = 1,3$	$\kappa_1 = 1,5$	$\kappa_1 = 1,3$	$\kappa_1 = 1,5$
$N = 3$	0,469	0,976	0,9991	0,993	0,9998
$N = 10$	0,794	0,987	0,9995	0,999	0,99995

Пример 9. Пусть определяющий параметр $X(t)$ изделия является стационарным гауссовским процессом, о котором известно по результатам испытаний изделий-аналогов, что параметр $\theta < 1$, а коэффициент вариации $\nu \leq 0,1$.

Требуется определить НДГ уровня $\gamma = 0,9$ для ВБР $P(t_0) = \mathcal{P}\{X(t) >$

$> a, t \in [0, t_0]\}$ при $t_0 = 30$ усл. ед., если проведены безотказные испытания трех образцов в моменты $t_1 = 10$ или $t_1 = 20$ усл. ед. при коэффициенте «ужесточения» $\kappa_1 = 1,3$ или $\kappa_1 = 1,5$.

Результаты расчетов по формулам табл. 8 приведены в табл. 10.

Глава 10. Оценка показателей долговечности при различных планах испытаний

Предварительные замечания. В качестве основных показателей долговечности будем рассматривать два (из всего набора возможных, приведенных в государственных стандартах): средний ресурс T , определенный как математическое ожидание ресурса, т. е. наработки объекта от начала его эксплуатации или ее возобновления после ремонта определенного вида до перехода в предельное состояние; гамма-процентный ресурс T_γ , определяемый как наработка, в течение которой объект не достигнет предельного состояния с заданной вероятностью γ , выраженной в процентах.

Все остальные показатели долговечности (такие, как средний срок службы, гамма-процентный срок службы и сохраняемости) имеют совершенно аналогичный смысл, и их рассмотрение не вносит ничего нового в правила оценивания.

Для удобства записи не будем в дальнейшем вероятность выражать в процентах, хотя термин «гамма-процентный ресурс» сохраним.

Кроме указанных показателей долговечности, в случае продления сроков эксплуатации объектов целесообразным оказывается введение следующих показателей (их определение и методы оценки приведены ниже): средний остаточный ресурс $T(\tau)$; гамма-процентный остаточный ресурс $T_\gamma(\tau)$, где τ — наработка, после которой производится оценка указанных показателей.

Пусть ξ — случайная величина, характеризующая ресурс изделия, имеющая функцию распределения $F(t) = \text{Вер}(\xi < t)$.

Тогда ВБР изделия, или его функция надежности,

$$P(t) = 1 - F(t), \quad t \geq 0,$$

а показатели T и T_γ связаны с $P(t)$ следующим образом:

$$T = \int_0^\infty P(t) dt,$$

а T_γ есть корень уравнения $P(t) = \gamma$, т. е. $P(T_\gamma) \equiv \gamma$ или $F(T_\gamma) \equiv 1 - \gamma$.

Показатель T_γ есть квантиль уровня $\delta = 1 - \gamma$ распределения ресурса $F(t)$.

Оценивание показателей долговечности T и T_γ по результатам испытаний может быть сведено к оцениванию функции надежности изделия, что было рассмотрено в предыдущих главах. Однако для наиболее употребительных на практике случаев удается получить готовые выражения для оценок показателей долговечности непосредственно — без использования функции надежности. Эти результаты и будут изложены ниже.

Исходными данными для оценки показателей долговечности изделия являются результаты испытаний N образцов изделий по планам типа $[NUR]$ и $[NUt]$, рассмотренных в гл. 8.

В достаточно общем случае результаты таких испытаний представляются в виде:

выборочных значений наработки до предельного состояния (до отказа) $t_1, t_2, \dots, t_r$;

выборочных значений наработки до цензурирования $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$, причем $N = r + n$.

План испытаний, при котором одновременно испытывают N объектов, причем отказавшие во время испытаний объекты не восстанавливают и не заменяют, а каждый объект испы-

тывают в течение наработки $z_i = \min(t_i, \tau_i)$, $i = \overline{1, N}$, называется планом $[NUz]$ или планом с многократным цензурированием (см. гл. 8).

В частном случае все τ_i могут совпадать. Если все τ_i совпадают с моментом последнего (r -го) отказа, то план испытаний обозначается $[Nur]$ и называется планом с однократным цензурированием. В частности, испытания N образцов могут проводиться до отказа всех объектов (план испытаний $[NUN]$). Указанные планы испытаний являются наиболее употребительными при ресурсных испытаниях технических объектов.

По этим исходным данным, а также с учетом возможной априорной информации о виде или характере закона распределения наработки до отказа ξ требуется определить точечные оценки $\hat{T}$, $\hat{T}_r$ показателей T и T_r , а также их доверительные границы (ДГ) заданного уровня q ($q = 0,8 \div 0,95$): нижние (НДГ) — $\underline{T}_q$, $\underline{T}_{rq}$ и верхние (ВДГ) — $\overline{T}_q$, $\overline{T}_{rq}$.

Если найдены односторонние (нижняя и верхняя) ДГ уровня q_1 и q_2 соответственно, что двусторонняя ДГ уровня $\bar{q}_1 = q_1 + q_2 - 1$. В частности, при $q_1 = q_2 = q$ имеем $\bar{q} = 2q - 1$ или $q = (1 + \bar{q})/2$. Следовательно, достаточно указать правило определения односторонних ДГ.

В зависимости от того, какая априорная информация имеется о законе распределения ресурса изделия, рассматриваются следующие модели оценивания показателей долговечности:

непараметрические модели оценивания, когда о функции распределения $F(t)$ ресурса либо ничего не известно (кроме ее непрерывности), либо известна ее принадлежность к некоторому непараметрическому классу распределений (например, к классу ВФИ-распределений);

параметрические модели оценивания, когда заданы заранее параметрический вид, либо функции распределения $F(t)$ ресурса изделия, либо функции распределения определяющего параметра (ОП) изделия (с указанием модели изменения ОП и т. д.).

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОЦЕНИВАНИЯ

Непараметрические модели оценивания показателей T и T_r долговечности изделия следует использовать в том случае, когда нет априорной информации о виде закона распределения ресурса, а объем имеющихся данных не позволяет достаточно обоснованно выбрать какое-либо параметрическое семейство распределений.

Различают непараметрические методы оценивания общего вида, справедливые для произвольных функций распределения $F(t)$ ресурса (от функции $F(t)$ требуется лишь непрерывность, которая практически всегда имеет место), и непараметрические модели частного вида (от функции $F(t)$ требуется принадлежность к некоторому непараметрическому семейству распределений). Это семейство выделяется некоторым качественным признаком, наличие которого проверяется исходя либо из некоторых общих соображений, либо с помощью специальных статистических критериев.

Наиболее важные для прикладных задач результаты получены для непараметрических семейств из класса ВФИ- или (ВСФИ) распределений (см. гл. 7, 8).

В табл. 1—5 приведены выражения для определения точечных и интервальных оценок, а также для односторонних ДГ уровня q показателей T и T_r при различных планах испытаний и различных предположениях относительно функции распределения ресурса $F(t)$.

Для использования формул из табл. 1—4, справедливых для функций распределения $F(x)$ из класса ВФИ-распределений, нужно вначале проверить, являются ли результаты испытаний выборкой для ВФИ-распределений.

Достаточно простой критерий такой проверки основан на F -распределении Фишера (таблица его квантилей приведена в работе [10] и состоит в следующем.

Пусть испытания N образцов изделия проводятся по плану $[Nur]$

1. Точечные оценки среднего ресурса T [4, 58]

План испы- таний	$F(t)$	Точечная оценка сред- него ресурса	Примечание
$[NUN]$	Произволь- ного вида	$\hat{T} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_{(i)}$	$t_{(i)}$ — i -ый член вариаци- онного ряда из наработок
$[NUz]$	Произволь- ная непре- рывная функция	$\hat{T} = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{v=b_i}^{a_i} t_v / N_i \right) +$ $+ [1 - \hat{F}(t_{N-n_m})] t_{N-n_m}$	$b_i = n_0 + \sum_{j=1}^{i-1} (n_j + r_j),$ $a_i = b_i + r_i;$ $\hat{F}(t_v) = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{r_j}{N_j} +$ $+ \frac{v - \sum_0^{i-1} n_j - \sum_1^{i-1} r_j}{N_i};$ $N_{i+1} = N_i \times$ $\times \left[1 - \frac{n_i}{N - \sum_0^{i-1} n_j - \sum_1^{i-1} r_j} \right];$ $n_0 = 0, \text{ если } t_1 \text{ — наработ-}$ $\text{ка до отказа; } N_1 = N - n_0$
	Из класса ВФИ-рас- пределений $F(0) = 0$	$\frac{M}{2 \ln 2} \leq \hat{T} \leq \frac{M}{\ln 2}$	$M = \begin{cases} t_{(N/2)}, & \text{если } N \text{ — чет-} \\ & \text{ное число} \\ t_{\left(\frac{N+1}{2}\right)}, & \text{если } N \text{ — не-} \\ & \text{четное число} \end{cases}$

и вычислены значения S_i ($i = \overline{1, r}$) суммарной наработки между отказами по формуле

$$S_i = (N - i + 1) (t_i - t_{i-1}),$$
$$t_0 = 0, \quad i = \overline{1, r},$$

где t_i — моменты отказов.

Разобьем r отказов на две группы r_1 и r_2 произвольным образом ($r_1 \approx r_2$), так что $r_1 + r_2 = r$, и вычислим

$$\sum_{i=1}^{r_1} S_i \text{ и } \sum_{i=r_1+1}^r S_i.$$

Отношение

$$\varphi(r_1, r_2) = r_2 \sum_{i=1}^{r_1} S_i / r_1 \sum_{i=r_1+1}^r S_i \sim$$
$$\sim F(2r_1, 2r_2) \tag{1}$$

имеет F -распределение Фишера с $2r_1$ и $2r_2$ степенями свободы, если интен-

2. Интервальные оценки среднего ресурса T [7, 25]

План испы- таний	$F(t)$	Доверительные границы (односторонние) для T (уровня q)	
		Нижняя	Верхняя
[NUN]	Произволь- ного вида	$\underline{T} = \hat{T} - u_q \hat{\sigma}_T / \sqrt{N};$ $\hat{\sigma}_T^2 = \frac{1}{N-1} \sum (t_{(i)} - \hat{T})^2$	$\bar{T} = \hat{T} + u_q \hat{\sigma}_T / \sqrt{N};$ $\hat{\sigma}_T^2 = \frac{1}{N-1} \times$ $\times \sum (t_{(i)} - \hat{T})^2$
		$\underline{T} = \hat{T} / \{1 + u_q \sqrt{N}\}$	$\bar{T} = \hat{T} / \{1 - u_q \sqrt{N}\}$
[NUz]	Из класса ВФИ-рас- пределений $F(0) = 0$	При любом $i > \frac{N}{2}$ $\underline{T} \geq \left\{ T_{(i)} \frac{1 - R_i}{\ln(1/R_i)} \right\},$ где $R_i = f_2(N, i, q)$ — см. табл. 1—4 приложения	—

3. Точечные оценки гамма-процентного ресурса T_γ [25, 79]

План испытаний	$F(t)$	Точечные оценки гамма-процентного ресурса $\bar{T}_\gamma$
[NUN]	Произволь- ного вида	$T_{(i)} \leq \hat{T}_\gamma \leq T_{(i+1)},$ где i определяется из условия $1 - \frac{i}{N} < \gamma < 1 - \frac{i-1}{N}$
		$\hat{T}_\gamma = (1 - \alpha) T_{(i-1)} + \alpha T_{(i)},$ где i определяется из условия $1 - \hat{F}(T_{(i-1)}) < \gamma < 1 - \hat{F}(T_{(i)});$ $\alpha = [1 - \gamma - \hat{F}(T_{(i-1)})] / [\hat{F}(T_{(i)}) - \hat{F}(T_{(i-1)})]$
[NUz]	Из класса ВСФИ-рас- пределений $F(0) = 0$	$\hat{T}_\gamma \geq T_{(i)} \ln \gamma / \ln \frac{N-i+1}{N+1},$ где i определяется из условия $\gamma > \frac{N-i+1}{N+1}$

4. Интервальные оценки гамма-процентного ресурса T_γ [7, 8, 25]

План испытаний	$F(t)$	Доверительные границы (односторонние) для T_γ		Примечание
		Нижняя	Верхняя	
[NUr]	Произвольного вида	— $\underline{T}_\gamma \geq t_{(k)}$, где $k = \max_{1 \leq i \leq r} \{i : J_{1-\gamma}(i, N-i+1) \geq q\}$	$\bar{T}_\gamma \leq t_{(k)}$, где $k = \min_{1 \leq i \leq r} \{i : J_{1-\gamma}(i, N-i+1) \leq 1-q\}$	Значение функции $J_{1-\gamma}(\cdot, \cdot)$ — см. [10, 63]
		$T_\gamma \geq \min \left\{ \frac{2 \ln(1/\gamma)}{\chi_q^2(2r)}, \frac{1}{N} \right\} S_r$, где $S_r = \sum_{i=1}^r t_{(i)} + (N-r) t_{(r)}$	—	Рекомендуется при $r = 1$ или таком, что $\frac{2 \ln(1/\gamma)}{\chi_q^2(2r)} \approx \frac{1}{N}$
[NUz]	Из класса ВСФИ-распределений $F(0) = 0$	$T_\gamma \geq \left\{ t_{(1)} \frac{\ln \gamma}{\ln g_{(1)}} \right\}$	—	Рекомендуется при $N \leq 20$ Значения g приведены в табл. 5
		$\underline{T}_\gamma \geq \min \left\{ \frac{2 \ln(1/\gamma)}{\chi_q^2(2r)}, \frac{1}{N} \right\} S_z$, где $S_z = \sum_{i=1}^r t_{(i)} + \sum_{i=1}^n \tau_{(i)}$	—	Значения функции $\chi_q^2(2r)$ — см. табл. 8 приложения

5. Значения g из табл. 4

Доверительная вероятность q	Число N испытываемых образцов	$W = t(N)/t(1)$ ($t(N)$ и $t(1)$ — соответственно максимальная и минимальная наработки)						
		3	3,5	4	4,5	5	6	7
0,9	3	—	—	—	0,613	0,655	0,704	0,738
	4	0,599	0,630	0,656	0,677	0,695	0,726	0,751
	5	0,672	0,673	0,688	0,703	0,716	0,740	0,761
	6	0,694	0,703	0,713	0,724	0,734	0,753	0,770
0,8	3	0,665	0,696	0,720	0,741	0,759	0,787	0,789
	4	0,717	0,729	0,745	0,759	0,772	0,794	0,808
	5	0,744	0,754	0,765	0,775	0,785	0,802	0,818
	6	0,772	0,778	0,785	0,792	0,799	0,812	0,825

сивность отказов изделия $\lambda(t) = \text{const}$. Если задать уровень значимости $\alpha = 5 \div 10\%$ и найти по табл. 12 приложения соответствующее ему табличное значение $F_{1-\alpha}(2r_1, 2r_2) = F_{\text{таб}}$, то гипотеза о постоянстве $\lambda(t)$ должна приниматься на уровне значимости α , если

$$\psi(r_1, r_2) = \max\{\varphi(r_1, r_2), 1/\varphi(r_1, r_2)\} < F_{\text{таб}}. \quad (2)$$

В противном случае делается вывод о том, что $\lambda(t) \neq \text{const}$, причем $\lambda(t)$ возрастает, если вычисленное значение $\varphi(r_1, r_2)$ больше предельно допустимого $F_{\text{таб}}$, т. е. при

$$\varphi(r_1, r_2) > F_{\text{таб}},$$

и $\lambda(t)$ убывает, если $\varphi(r_1, r_2)$ слишком мало — меньше предельно допустимого $1/F_{\text{таб}}$, т. е. при

$$\varphi(r_1, r_2) < 1/F_{\text{таб}}.$$

В последнем случае делается вывод о том, что функция распределения относится к классу УФИ-распределений с убывающей функцией интенсивности отказов.

Пример 1. При испытаниях $N = 50$ образцов некоторого изделия по плану $[Nur]$ было зафиксировано $r = 6$ отказов, а значения S_i суммарных наработок до i -го отказа ($i = \overline{1,6}$) оказались равными, ч: $S_1 = 4500$; $S_2 =$

$= 56\,350$; $S_3 = 165\,600$; $S_4 = 61\,100$; $S_5 = 5060$; $S_6 = 6300$.

Требуется установить, принадлежит или нет распределение наработки до отказа изделий данного типа к классу ВФИ-распределений.

Решение. Полагаем $r_1 = r_2 = 3$; по формуле (1) вычисляем

$$\begin{aligned} \varphi(r_1, r_2) &= 3(4500 + 56\,350 + \\ &+ 165\,600)/3(61\,100 + 5060 + \\ &+ 6300) = 3,125. \end{aligned}$$

При уровне значимости $\alpha = 0,1$ находим по табл. 10 $F_{\text{таб}} = F_{1-\alpha}(2r_1, 2r_2) = F_{0,9}(6,6) = 3,05$.

Поскольку условие (2) выполнено: $\varphi(r_1, r_2) = 3,125 > F_{\text{таб}}$, то приходим к выводу, что распределение наработки до отказа данного типа изделий можно отнести к классу ВФИ-распределений.

Пример 2. При испытаниях $N = 8$ образцов некоторого изделия по плану $[Nur]$ было зафиксировано $r = 6$ отказов и следующие наработки, ч: $t_{(1)} = 2$; $t_{(2)} = 220$; $t_{(3)} = 223$; $t_{(4)} = 251$; $t_{(5)} = 260$; $t_{(6)} = t_{(7)} = t_{(8)} = 265$.

Требуется вычислить оценки среднего ресурса T и 80 %-ного ресурса T_γ , $\gamma = 0,8$, с учетом того, что $F(t)$ относится к классу ВФИ-распределений, а требуемая доверительная вероятность $q = 0,9$.

Решение. 1. Определение точечных оценок $\hat{T}$ и $\hat{T}_\gamma$. План $[NUr]$ является частным случаем плана $[NUz]$, поэтому величину точечной оценки $\hat{T}$ находим из третьей строки табл. 1. Так как N — четное число, то $t_{(N/2)} = t_4$ и, следовательно,

$$t_{(4)}/2 \ln 2 < \hat{T} < t_{(4)}/\ln 2 \text{ или}$$

$$181 < \hat{T} < 362,1.$$

Из табл. 3 находим величину точечной оценки $\hat{T}_\gamma$, приняв $i = 2$ [так как при $i = 2$ условие $(N - i + 1)/(N + 1) < \gamma$ выполнено и при этом $i = 2$ наименьшее из возможных: $(8 - 2 + 1)/(8 + 1) \approx 0,78 < 0,9$]:

$$\begin{aligned} \hat{T}_\gamma &\geq t_{(2)} \ln \gamma / \ln \frac{N - i + 1}{N + 1} = \\ &= 220 \ln 0,8 / \ln 0,78 = 195. \end{aligned}$$

2. Определение НДГ T и T_γ уровня $q = 0,9$. Из табл. 2 находим НДГ для T (с учетом того, что $u_{0,9} = 1,28$):

$$\begin{aligned} T &= \hat{T} (1 - u_q \sqrt{N}) = \\ &= 181 (1 - 1,28/\sqrt{8}) = 99,1. \end{aligned}$$

Из табл. 4 находим НДГ для $T_\gamma = T_{0,8}$, определив по табл. 8 приложения $\chi_{q, 2r}^2 = \chi_{0,9, 12}^2 = 18,5$, а также вычислив $S_r = \sum t_{(i)} + (N - r)t_{(r)} = 1949$:

$$\begin{aligned} T_\gamma &> \min \left\{ \frac{2 \ln (1/\gamma)}{\chi_{0,9}^2(2r)}, \frac{1}{N} \right\} S_r = \\ &= \min \left\{ \frac{2 \ln (1/0,8)}{18,5}, \frac{1}{8} \right\} 1949 = 47. \end{aligned}$$

Пример 3. Пусть имеется некоторое изделие, испытания 50 образцов которого проводились по плану $[NUz]$. Результаты испытаний удержаны в виде вариационного ряда наработок, ч:

$$\begin{aligned} T_{(1)} &= 900; \quad T_{(2)} = 2050; \\ T_{(3)} &= 5500; \quad T_{(4)} = 6800; \\ T_{(5)} &= 6910; \quad T_{(6)} = 7050; \\ T_{(7)} &= \dots = T_{(24)} = 7600^* (18); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{(25)} &= 7900; \quad T_{(26)} = 8000; \\ T_{(27)} &= 8010; \quad T_{(28)} = 8400; \\ T_{(29)} &= 8900; \\ T_{(30)} &= T_{(31)} = \dots = T_{(50)} = \\ &= 9000^* (21). \end{aligned}$$

Звездочкой указаны моменты цензурирования испытаний, а число в скобках соответствует числу снятых с испытаний изделий.

Требуется найти точечные оценки показателей T и T_γ при $\gamma = 0,95$ и НДГ уровня $q = 0,9$ для показателя T_γ .

Решение. Требуемые оценки найдем, используя соотношения, приведенные в табл. 1 и 4, полагая, что $F(t)$ — произвольная непрерывная функция.

Значение оценки $\hat{T}$ определяем из табл. 1.

Число интервалов наблюдений примем по числу моментов цензурирования, т. е. $m = 2$; тогда число наработок до отказа на первом интервале будет равно $r_1 = 6$, а на втором — $r_2 = 5$.

Вариационный ряд начинается с наработки до отказа; поэтому $n_0 = 0$, число цензурирований на первом и втором интервалах наблюдений равно соответственно $n_1 = 18$ и $n_2 = 21$.

По формулам, приведенным в графе «Примечание» табл. 1, найдем:

$$N_1 = N - n_0 = 50;$$

$$\begin{aligned} N_2 &= N_1 \left[1 - \frac{n_1}{N - n_0 - r_1} \right] = \\ &= 50 \left[1 - \frac{18}{50 - 6} \right] = 29,5; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{F}(t_{(N-n_2)}) &= \\ &= \frac{r_1}{N_1} + \frac{N - n_2 - n_1 - r_1}{N_2} = \\ &= \frac{6}{50} + \frac{50 - 21 - 18 - 6}{29,5} = 0,29; \end{aligned}$$

$$b_1 = n_0 + \sum_{j=1}^{1-1} (n_j + r_j) = 0;$$

$$b_2 = n_0 + n_1 + r_1 = 18 + 6 = 24;$$

$$a_1 = b_1 + r_1 = 6;$$

$$a_2 = b_2 + r_2 = 24 + 5 = 29;$$

$$\begin{aligned}\widehat{T} &= \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{v=b_i}^{a_i} t_{(v)}/N_i \right) + \\ &+ [1 - \widehat{F}(t_{(N-n_2)})] t_{(N-n_2)} = \\ &= \frac{1}{50} \sum_{v=1}^6 t_{(v)} + \\ &+ \frac{1}{29,5} \sum_{v=24}^{29} t_{(v)} + (1 - 0,29) \cdot 8900 = \\ &= 584,2 + 1956,7 + 6319 = 8859,9.\end{aligned}$$

Вычисленные значения $\widehat{F}(T_{(l)})$ при $l = 1, 2, 9$ для оценивания гамма-процентного ресурса приведены ниже.

l	$\widehat{F}(T_{(l)})$	l	$\widehat{F}(T_{(l)})$
1	0,02	25	0,124
2	0,04	26	0,188
3	0,06	27	0,220
4	0,08	28	0,260
5	0,10	29	0,290
6	0,12		

Отсюда видно, что условие $1 - \widehat{F}(T_{(i-1)}) < 0,95 < 1 - \widehat{F}(T_{(i)})$ (см. табл. 3) выполняется при $i = 3$; тогда

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1 - \gamma - \widehat{F}(T_{(i-1)})}{\widehat{F}(t_{(i)}) - \widehat{F}(t_{(i-1)})} = \\ &= \frac{0,05 - 0,04}{0,06 - 0,04} = 0,5 \text{ и,}\end{aligned}$$

следовательно,

$$\widehat{T}_\gamma = 0,5 \cdot 2050 + 0,5 \cdot 5500 = 3775.$$

НДГ уровня $q = 0,9$ для гамма-процентного ресурса определяем из соотношения $T_\gamma \geq t_h$ (см. табл. 4).

Значения функции $J_{0,05}(i, 50 - i + 1)$ при первых трех значениях i следующие [63]:

i	1	2	3
$J_{0,05}(i, 50 - i + 1)$	0,92	0,79	0,48

В данном случае $K = \max \{i : J_{0,05}(i, 50 - i + 1) \geq 0,9\} = 1$; поэтому НДГ гамма-процентного ресурса при доверительной вероятности 0,9 является первый член вариационного ряда, т. е. $T_\gamma \geq 900$.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ОСНОВАННЫЕ НА ИНФОРМАЦИИ О РЕСУРСЕ ИЗДЕЛИЯ

Параметрические модели оценивания показателей долговечности изделия T и T_γ рекомендуется использовать в том случае, когда удастся обосновать вид закона распределения ресурса $F(t)$.

Наиболее употребительными законами распределения ресурса (которыми можно ограничиться в большинстве случаев) являются: экспоненциальный $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ ($t \geq 0, \lambda > 0$); Вейбулла $F(t) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{t}{a}\right)^b\right\}$ ($t > 0, a > 0, b > 0$); нормальный (усеченный) $F(t) = \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)$ ($t \geq 0, \mu > 0, \sigma > 0, \mu > 3\sigma$); логарифмически нормальный $F(t) = \Phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)$ ($t > 0, \mu > 0, \sigma > 0$).

Правила выбора вида закона распределения ресурса по имеющимся статистическим данным рассмотрены в гл. 8.

Выражения для точечных оценок $\widehat{T}, \widehat{T}_\gamma$ среднего ресурса T и гамма-процентного ресурса T_γ в случае указанных выше законов распределения ресурса приведены в табл. 6. Значения гамма-функции $\Gamma(x)$ даны в табл. 7.

В табл. 8 приведены выражения доверительных границ (односторонних) уровня q для показателей T и T_γ .

Для оценивания показателей T и T_γ необходимо предварительно найти точечные оценки параметров указанных выше распределений в соответствии с правилами, изложенными в гл. 8.

При рассмотрении логарифмически нормального закона можно применять все формулы, приведенные в табл. 8

6. Точечные оценки для среднего T и гамма-процентного T_γ ресурсов

Закон распределения с функцией распре- деления	Точечная оценка		Примечание
	для T	для T_γ	
Экспоненциальный $F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$ $(t \geq 0, \lambda > 0)$	$\hat{T} = 1/\hat{\lambda}$	$\hat{T}_\gamma = \frac{1}{\hat{\lambda}} \ln \frac{1}{\gamma}$	$\hat{\lambda}$ — см. табл. 7 гл. 8
Вейбулла $F(t) = 1 -$ $-\exp\left\{-\left(\frac{t}{a}\right)^b\right\}$ $(t \geq 0, a > 0, b > 0)$	$\hat{T} = \hat{a}\Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right)$ См. табл. 7	$\hat{T}_\gamma = \hat{a} \times$ $\times \left(\ln \frac{1}{\gamma}\right)^{1/b}$	$\hat{a}$ и $\hat{b}$ — см. табл. 10 гл. 8
Нормальный (усечен- ный) $F(t) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$ $(t \geq 0, \mu > 3\sigma)$	$\hat{T} = \hat{\mu}$	$\hat{T}_\gamma = \hat{\mu} - u_\gamma \hat{\sigma}$	$\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}$ — см. гл. 8; u_γ — см. табл. 7 приложения
Логарифмически нор- мальный $F(t) =$ $= \Phi((\ln t - \mu)/\sigma)$	$\hat{T} = e^{\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}}$	$\hat{T}_\gamma = e^{\hat{\mu} - u_\gamma \hat{\sigma}}$	То же

7. Значения гамма-функции $\Gamma(x)$

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
1,00	1,000	1,40	0,887	1,76	0,921
1,05	0,973	1,45	0,886	1,80	0,931
1,10	0,951	1,50	0,887	1,85	0,945
1,15	0,933	1,55	0,889	1,90	0,962
1,20	0,918	1,60	0,893	1,92	0,969
1,25	0,906	1,65	0,900	1,95	0,980
1,30	0,897	1,70	0,908	1,97	0,988
1,35	0,891	1,75	0,919	2,00	1,000

8. Интервальные оценки для среднего T и гамма-процентного T_γ ресурсов

Закон распределения	План испытаний	Односторонние ДГ для T (уровня q)		Односторонние ДГ для T_γ (уровня q)		Примечание
		$\underline{T}$ (НДГ)	$\overline{T}$ (ВДГ)	$\underline{T}_\gamma$ (НДГ)	$\overline{T}_\gamma$ (ВДГ)	
Экспоненциальный	$[NU(R)r]$	$\frac{1}{\lambda_B} \quad (v=r-1)$	$\frac{1}{\lambda_H} \quad (v=r-1)$	$\frac{1}{\lambda_B} \ln \frac{1}{\gamma} \quad (v=r-1)$	$\frac{1}{\lambda_H} \ln \frac{1}{\gamma} \quad (v=r-1)$	$\lambda_B = \frac{\hat{\lambda}}{2v} \chi_q^2 (2v+2)$
	$[NU(R)T]$	$\frac{1}{\lambda_B} \quad (v=d)$	$\frac{1}{\lambda_H} \quad (v=d)$	$\frac{1}{\lambda_B} \ln \frac{1}{\gamma} \quad (v=d)$	$\frac{1}{\lambda_H} \ln \frac{1}{\gamma} \quad (v=d)$	$\lambda_H = \frac{\hat{\lambda}}{2v} \chi_{1-q}^2 (2v+2)$ $\hat{\lambda}$ — см. табл. 7 гл. 8
Вейбулла	$3 \leq N \leq 20$	$\hat{a} \exp \{-V_q/b\} \times \Gamma \left(1 + \frac{1}{b}\right)$	$\hat{a} \exp \{-V_{1-q}/b\} \times \Gamma \left(1 + \frac{1}{b}\right)$	$\hat{a} \exp \{-V_q^\gamma/b\}$	$\hat{a} \exp \{-V_{1-q}^\gamma/b\}$	$\hat{a}$ и b — см. табл. 10 гл. 8 V_x и V_x^γ — см. табл. 12 приложения
	$[NUz]$			$\hat{T}_\gamma (1 + \varepsilon_H)$	$\hat{T}_\gamma (1 + \varepsilon_B)$	$\varepsilon_H, \varepsilon_B$ — см. рис. 5—10 приложения
Нормальный	$[NUN]$	$\hat{T} - t_q (N-1) \times \hat{\sigma} / \sqrt{N}$	$\hat{T} + t_q (N-1) \times \hat{\sigma} / \sqrt{N}$	$\hat{T} - K(\gamma, q, N) \hat{\sigma}$	$\hat{T} + K(\gamma, q, N) \hat{\sigma}$	$\hat{T}, \hat{\sigma}$ — см. гл. 8 $z_q (N-1)$ — см. табл. 9 приложения
	$[NUR]$	$\hat{T} - t_q (r-1) \times \hat{\sigma} / \sqrt{r}$	$\hat{T} + t_q (r-1) \times \hat{\sigma} / \sqrt{r}$	$\hat{T} - K(\gamma, q, r) \hat{\sigma}$	$\hat{T} + K(\gamma, q, r) \hat{\sigma}$	$K(\gamma, g, r)$ — см. табл. 11 приложения и формулу (3)
	$[NUz]$	(приближенная)	(приближенная)	(приближенная)	(приближенная)	

для нормального закона с заменой наработок t_i и τ_i на их натуральные логарифмы. Коэффициент K (γ, q, N) приближенно определяют по формуле

$$K(\gamma, q, N) =$$

$$= \frac{u_\gamma + u_q \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{1}{2} u_\gamma^2\right)}{N} - \frac{u_q^2}{2N}}}{1 - u_\gamma^2/N} \quad (3)$$

Пример 4. Были проведены испытания на долговечность по плану $[NUr]$ автомобильных покрышек одного типа. Под наблюдением находилось $N = 15$ изделий, наблюдения проводились до появления $r = 10$ отказов. Нарботки (тыс. км) до отказа каждого изделия следующие: 74,3; 76,8; 82,6; 100,1; 106,5; 126,5; 130,5; 134,5; 142,2; 168,5.

Требуется определить точечные оценки и НДГ уровня $q = 0,9$ среднего ресурса T и гамма-процентного ресурса T_γ ($\gamma = 90\%$), если предварительный анализ показал, что распределение ресурса хорошо согласуется с распределением Вейбулла.

Решение. 1. Определение точечных оценок $\hat{T}$ и $\hat{T}_\gamma$. В соответствии с алгоритмом (см. с. 72) находим точечные оценки параметров a и b распределения Вейбулла: $\hat{a} = 1,64$; $\hat{b} = 3,06$.

Из второй строки табл. 6 находим формулы для определения $\hat{T}$ и $\hat{T}_\gamma$. Предварительно по табл. 7 находим $\Gamma(1 + 1/b) = \Gamma(1 + 1/3,06) \approx 0,894$.

Имеем:

$$\hat{T} = \hat{a} \Gamma(1 + 1/b) = 1,64 \cdot 0,894 = 146,6;$$

$$\begin{aligned} \hat{T}_\gamma &= \hat{a} \left(\ln \frac{1}{\gamma} \right)^{1/b} = \\ &= 1,64 \left(\ln \frac{1}{0,9} \right)^{1/3,06} = 78,6. \end{aligned}$$

2. Для определения доверительных границ для T и T_γ уровня $q = 0,9$ воспользуемся табл. 8 (вторая строка, план $[NUr]$).

Для $N = 15$ и $r = 10$ по табл. 12 приложения находим множители $V_q = V_{0,9} = 0,42$ и $V_{1-q} = V_{0,1} = -0,59$. По формулам табл. 8 находим односторонние ДГ уровня $q = 0,9$ для показателя T :

$$\begin{aligned} T_{0,9} &= \hat{a} \exp \{-V_q/b\} \Gamma(1 + 1/b) = \\ &= 164 \exp \{-0,42/3,06\} 0,894 = \\ &= 127,8 \approx 128; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_{0,9} &= \hat{a} \exp \{-V_{1-q}/b\} \Gamma(1 + 1/b) = \\ &= 164 \exp \{0,59/3,06\} 0,894 = \\ &= 198,9 \approx 199. \end{aligned}$$

Одновременно найден доверительный интервал (128; 199) для T уровня $\tilde{q} = 2q - 1 = 0,8$.

Далее по табл. 12 приложения находим для $N = 15$, $r = 10$ и $\gamma = 0,9$ значения $V_q^\gamma = V_{0,9}^{0,9} = 3,76$ и $V_{1-q}^\gamma = V_{0,1}^{0,9} = 1,69$, а затем по формулам табл. 6 вычисляем

$$\begin{aligned} T_{\gamma q} &= \hat{a} \exp \{-V_q^\gamma/b\} = \\ &= 164 \exp \{-3,76/3,06\} = 48; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_{\gamma q} &= \hat{a} \exp \{-V_{1-q}^\gamma/b\} = \\ &= 164 \exp \{-1,69/3,06\} = 94,4 \approx 94. \end{aligned}$$

Имеем доверительный интервал (48,0; 94,0) уровня $\tilde{q} = 2q - 1 = 0,8$ для 90 %-ного ресурса.

Пример 5. На испытания поставлены $N = 10$ изделий, причем отказавшие изделия не ремонтируют и не заменяют. В процессе испытаний были зафиксированы следующие наработки (тыс. км) до отказа: 4,2; 4,7; 5,5; 7,1; 10,2.

Остальные изделия по разным причинам были сняты с испытаний со следующими наработками (до цензурирования): 10,3; 23,6; 11,9; 5,9; 4,5.

Требуется определить точечные оценки и двусторонние доверительные интервалы уровня $q = 0,9$ для среднего ресурса и 90 %-ной наработки до отказа, если наработка подчиняется распределению Вейбулла.

Решение. Из условий примера видно, что испытания проводились по плану

[NUz]. Поэтому находим сначала точечные оценки $\hat{a}$ и $\hat{b}$ параметров распределения Вейбулла (см. табл. 10 гл. 8): $\hat{a} = 15,54$ и $\hat{b} = 1,33$.

1. Определение точечных оценок $\hat{T}$ и $\hat{T}_\gamma$ производится по формулам табл. 8:

$$\hat{T} = \hat{a} \Gamma(1 + 1/\hat{b}) = 15,54 \Gamma(1 + 1/1,33) = 11,7;$$

$$\hat{T}_\gamma = \hat{a} \left(\ln \frac{1}{\gamma} \right)^{1/\hat{b}} = 15,54 \left(\ln \frac{1}{0,9} \right)^{1/1,33} = 2,9.$$

2. Определение доверительных интервалов уровня $q = 0,9$ для T и T_γ производится по нижним формулам второй строки табл. 8. Предварительно по рис. 2—10 приложения определяем величины ϵ_H и ϵ_B , вычислив вначале коэффициент вариации $v = \sqrt{\Gamma(1 + 2/\hat{b})/\Gamma^2(1 + 1/\hat{b})} - 1$, для чего можно использовать вспомогательную табл. 7. Для $\hat{b} = 1,33$ находим $v \simeq 0,75$.

Для вычисления $\underline{T}_q$ определяем ϵ_H и ϵ_B по рис. 2—10 приложения, где входом служат величины $N = 10$, $r/N = 0,5$ и $\tilde{q} = 0,95$ (так как заданная доверительная вероятность $q = 0,9$ связана с доверительной вероятностью $\tilde{q}$ односторонней ДГ зависимостью $q = 2\tilde{q} - 1$). Интерполируя, приближенно находим $\epsilon_H = -0,56$, $\epsilon_B = 1,4$, откуда

$$\underline{T}_{0,95} = \hat{T}(1 + \epsilon_H) = 11,7 \cdot 0,44 = 5,1;$$

$$\overline{T}_{0,95} = \hat{T}(1 + \epsilon_B) = 11,7 \cdot 2,4 \simeq 28.$$

Таким образом, доверительный интервал уровня $q = 0,9$ для средней наработки T равен (5,1; 28).

Аналогично по той же номограмме для $N = 10$; $r/N = 0,5$; $\gamma = 0,9$; $q = 0,95$ находим $\epsilon_H = -0,52$; $\epsilon_B = 2,10$. Следовательно,

$$\underline{T}_{\gamma 0,95} = \hat{T}_\gamma(1 + \epsilon_H) = 2,9 \cdot 0,48 \simeq 1,4;$$

$$\overline{T}_{\gamma 0,95} = \hat{T}_\gamma(1 + \epsilon_B) \simeq 9,$$

т. е. доверительный интервал уровня $q = 0,9$ для 90 %-ного ресурса равен (1,4; 9).

Пример 6. Для оценки долговечности на испытания выделено $N = 18$ изделий. Из них в ходе испытаний до предельного состояния дослужили $r = 11$ изделий с наработками (тыс. км): 221; 242; 246; 253; 264; 283; 303; 307; 313; 348; 356, а $n = 7$ изделий были сняты с испытаний со следующими наработками (до цензурирования): 236; 272; 280; 287; 300; 302; 326.

Предварительный анализ данных показал, что распределение наработки до отказа хорошо согласуется с нормальным законом.

Требуется определить точечные оценки и НДГ уровня $q = 0,9$ для 90 %-ного ресурса.

Решение. Поскольку испытания проводились по плану [NUz], то оценки параметров μ и σ нормального закона, которому подчиняется ресурс изделия, определяются в соответствии с методикой, изложенной на с. 75, и равны $\hat{\mu} = 302,9$; $\hat{\sigma} = 44,7$. Заметим, что условие $\hat{\mu} > 3\hat{\sigma}$ выполняется, поэтому усеченностью нормального закона можно пренебречь.

1. Определение точечных оценок T_γ ($\gamma = 0,9$) производится по формулам табл. 8 (предварительно по табл. 7 приложения находим $u_\gamma = u_{0,9} = 1,28$):

$$\hat{T}_\gamma = \hat{\mu} - u_\gamma \hat{\sigma} = 302,9 - 1,28 \cdot 44,7 = 245,7.$$

2. Определение НДГ для T_γ с доверительным уровнем $q = 0,9$ производится по формулам табл. 8.

Предварительно по табл. 11 приложения значение толерантного множителя $K(\gamma, q, r) = K(0,9; 0,9; 11) = 2,01$. Приближенная формула (3) дает значение $K(0,9; 0,9; 11) = 1,96$.

Окончательно имеем:

$$T_{\gamma 0,9} = \hat{T} - K(\gamma, q, r) \hat{\sigma} = 302,9 - 2,01 \cdot 44,7 = 213,1.$$

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ОСНОВАННЫЕ НА ИНФОРМАЦИИ ОБ ОПРЕДЕЛЯЮЩЕМ ПАРАМЕТРЕ

В том случае, когда условие работоспособности изделия можно выразить через некоторый определяющий параметр (ОП) $X(t)$, например в виде (подробнее см. гл. 9)

$$A(t) = \{X(x) > a, x \in [0, t]\},$$

появляется возможность прогнозировать величину среднего и гамма-процентного ресурса изделия по результатам измерения величины ОП (не дожидаясь появления отказов изделия).

Примем, как и в гл. 9, следующее представление для ОП $X(t)$:

$$X(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_i(x), x \in [0, t],$$

где α_i — случайные нормально распределенные величины с неизвестными средними значениями μ_i и дисперсиями σ_i^2 , $i = 1, m$; $\varphi_i(x)$ — выбранные заранее базисные функции, монотонно меняющиеся на промежутке $[0, t]$ (для определенности — убывающие).

С учетом предположений и обозначений, оговоренных в гл. 9, функция надежности изделия (ВБР изделия за время t) имеет вид

$$P(t) = \Phi[H(t)],$$

$$\text{где } H(t) = \left\{ \sum_{i=1}^m \mu_i \varphi_i(t) - a \right\} / \sigma B(t).$$

Величина $B(t)$ определена в гл. 9 и выражается через известные величины: $\vec{\varphi}(t) = \|\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)\|^T$ и матрицу Θ порядка m , задающую отношения θ_i дисперсий $D\alpha_i$ к неизвестному параметру σ^2 .

Как показано в гл. 9 (см. с. 98), по измерениям N реализаций ОП в точках $t_1, t_2, \dots, t_l$ на некотором промежутке $J_\tau = [0, \tau]$, $\tau < t$ можно определить оценки $\hat{\mu}_i, \hat{\sigma}$ параметров μ_i, σ и найти выражения для точечной оценки и НДГ уровня q показателя $P(t)$ в следующем виде:

$$\hat{P}(t) = \Phi[\hat{H}(t)]; \quad (4)$$

$$\underline{P}_q(t) = \Phi[\underline{H}_q(t)], \quad (5)$$

где точечная $\hat{H}(t)$ и интервальная $\underline{H}(t)$ оценки величины $H(t)$ имеют следующие выражения:

$$\hat{H}(t) = \left\{ \sum_{i=1}^m \hat{\mu}_i \varphi_i(t) - a \right\} / \hat{\sigma} B(t); \quad (6)$$

$$\underline{H}(t) = \frac{1}{C(t)} \delta(v, 1 - q, C(t) \hat{H}(t)).$$

В формуле (6) $\delta(\cdot)$ — параметр нецентральности нецентрального распределения Стюдента, определяемый по табл. 10 приложения в зависимости от $v = Nl - m$, $1 - q$ и $\hat{H}(t) C(t)$, где $C(t)$ определяется выражением (см. с. 99)

$$C(t) = N \{ \vec{\varphi}^T(t) \Theta \vec{\varphi}(t) / \vec{\varphi}^T(t) \times \\ \times (F^T W F)^{-1} \vec{\varphi}(t) \}.$$

Для $v > 10$ вместо второй формулы (6) можно использовать более простое выражение

$$\underline{H}(t) \simeq \hat{H}(t) - u_q \times \\ \times \sqrt{\frac{1}{C(t)} + \frac{1}{2v} \hat{H}^2(t)}. \quad (7)$$

На основании полученных оценок (4) и (5) для ВБР $P(t)$ можно определить точечные и интервальные оценки для показателей долговечности T и T_γ .

В общем случае (т. е. для функций $\varphi_i(t)$ произвольного вида) для принятой модели изменения ОП точечные оценки $\hat{T}$ и $\hat{T}_\gamma$ определяются как корни следующих уравнений (где u_γ — квантиль нормального закона уровня γ):

$$\hat{H}(t) = 0 \text{ и } \hat{H}(t) = u_\gamma \quad (8)$$

и НДГ уровня q $\underline{T}_q$ и $\underline{T}_{\gamma q}$ для T и T_γ — как корни уравнений

$$\underline{H}(t) = 0 \text{ и } \underline{H}(t) = u_\gamma. \quad (9)$$

Корни уравнений (8) и (9) в силу монотонного убывания функций $\hat{H}(t)$ и $\underline{H}(t)$ нетрудно найти одним из численных методов, например мето-

дом хорд, согласно которому последовательные приближения для корня уравнения $f(t) = 0$ определяются как

$$t_{k+1} = t_k - \frac{(t_k - t_i) f(t_k)}{f(t_k) - f(t_i)}, \quad (10)$$

где i выбирается как наибольшее $i < k$, такое, что $f(t_i)$ и $f(t_k)$ имеют разные знаки. При этом можно взять $t_0 = 0$, а в качестве t_1 некоторую достаточно большую величину, для которой $f(t_1) < 0$ [так как $f(t_0) > 0$]. Применение этого метода показано ниже на числовом примере.

В частном случае, когда ОП $X(t)$ изменяется линейно, т. е.

$$X(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t,$$

решения уравнений (8) и (9), а следовательно, и оценки $\hat{T}$ и $\underline{T}_\gamma$ можно записать в явном виде.

Решение уравнения (8) определяет точечную оценку среднего ресурса T в виде

$$\hat{T} = (a - \hat{\mu}_1) / \hat{\mu}_2. \quad (11)$$

Выражения для точечной оценки показателя T_γ , а также для НДГ уровня q показателей T и T_γ имеют один и тот же вид, отличаясь лишь значениями z :

$$T_* = \frac{(\hat{\mu} - a) \hat{\mu}_2}{\hat{\mu}_2 - z^2 \hat{\sigma}^2 \theta} - \frac{\sqrt{(\hat{\mu}_1 - a)^2 \theta - (\hat{\mu}_2^2 - z \hat{\sigma}^2 \theta)}}{\hat{\mu}_2 - z^2 \hat{\sigma}^2 \theta}, \quad (12)$$

$$T_* = \begin{cases} \hat{T}_\gamma & \text{при } z = u_\gamma; \\ \underline{T}_q & \text{при } z = u_\gamma / \sqrt{1/N - u_q/2vN}; \\ \underline{T}_{\gamma q} & \text{при } z = \left\{ u_\gamma + u_q \times \right. \\ & \left. \times \sqrt{(1/N + u_\gamma^2/2v) - u_q^2/2vN} \right\} \\ & \left. \frac{1}{(1 - u_q^2/2v)} \right\}. \end{cases} \quad (13)$$

где $\theta = D\alpha_2/D\alpha_1$ — отношение дисперсий случайных величин α_2 и α_1 из (10), предполагаемое известным.

Напомним, что $v = Nl - 2$ (l — число точек, в которых измеряется определяющий параметр на N его реализациях; $l \geq 2$).

Пример 7. Условие работоспособности изделия можно определить как $X(t) > a$, где ОП $X(t)$, как показали предварительные исследования, можно представить в виде

$$X(t) = \alpha_1 - \alpha_2 t - \alpha_3 t^2,$$

где α_i — нормально распределенные случайные величины с неизвестными средними значениями μ_i и дисперсиями σ^2 , $\sigma^2 \theta_2$ и $\sigma^2 \theta_3$, причем $\theta_2 \leq \leq 0,01$; $\theta_3 \leq 0,001$ и $a = 2$ усл. ед.

По точным измерениям $N = 4$ реализаций процесса $X(t)$ в моменты времени $t_1 = 0$; $t_2 = 3$ и $t_3 = 6$ мес. (т. е. $l = 3$) в соответствии с методикой, изложенной в гл. 9,

$$\begin{aligned} \hat{H}(t) &= \frac{\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 t - \hat{\mu}_3 t^2 - a}{\hat{\sigma} \sqrt{1 + \theta_2^2 t^2 + \theta_3^2 t^4}} = \\ &= \frac{5,9 - 0,042t - 0,0017t^2}{\sqrt{1 + 0,0001t^2 + 0,000001t^4}}. \end{aligned}$$

Требуется найти точечные оценки среднего ресурса T и гамма-процентного ресурса T_γ ($\gamma = 0,8$), а также их НДГ уровня $q = 0,9$.

Решение. 1. Определение точечных оценок $\hat{T}$ и $\hat{T}_\gamma$.

На основании уравнения (8) находим $\hat{H}(t) = 0$, откуда $5,9 - 0,042t - 0,0017t^2 = 0$, т. е. $\hat{T} = 47,8$ мес.

Из уравнения (8)

$$\hat{H}(t) = u_\gamma \text{ или } \hat{H}(t) = 0,79 \quad (u_{0,8} = u_\gamma = 0,79)$$

методом последовательных приближений получим [взяв в качестве начальных приближений $T_0 = 0$, $\hat{H}(T_0) > 0$ и $T_1 = 50$, $\hat{H}(T_1) < 0$] в соответствии с выражением (10) следующие приближения к $\hat{T}_\gamma$: $T_2 = 42,1$; $T_3 = 40,14$; $T_4 = 40$.

Отсюда видно, что уже для четвертого приближения получаем относительную погрешность $|T_4 - T_3|/T_4 <$

$< 0,5\%$, поэтому полагаем $\hat{T}_\gamma = T_4 = 40$ мес.

2. Определение НДГ уровня $q = 0,9$ для T и T_γ . Значения НДГ $\underline{T}_q$ и $\underline{T}_{\gamma q}$ находим аналогично предыдущему, как подходящие приближения корней уравнений (9), в которых $\underline{H}(t)$ определяем по формуле (7), где $v = Nl - m = 4 \cdot 3 - 3 = 9$, $u_q = u_{0,9} = 1,28$, а вместо $C(t)$, определяемой по формуле 58, гл. 9, можно приближенно взять $C(t) \approx N = 4$, т. е.

$$\underline{H}(t) \simeq \hat{H}(t) - 1,28 \times \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2 \cdot 9} \hat{H}^2(t)}.$$

С относительной погрешностью $\varepsilon < 5\%$ получаем $\underline{T}_{0,9} = 42$ мес.; $\underline{T}_{\gamma 0,9} = 35$ мес.

Заметим, что в процессе испытаний $N = 4$ образцов изделия на промежутке наработки $[0; 6]$, где проводились измерения ОП $X(t)$, все реализации процесса $X(t)$ могли ни разу не пересечь допустимый уровень $a = 2$ усл. ед., т. е. отказы в ходе испытаний могли не наблюдаться.

ОСТАТОЧНЫЙ РЕСУРС И МЕТОДЫ ЕГО ОЦЕНКИ

Опыт эксплуатации технических объектов показывает, что назначенные показатели долговечности и сохраняемости для многих видов объектов весьма занижены, что приводит к преждевременному прекращению применения объектов по назначению и, как следствие, к неэффективному использованию материальных средств, затраченных на разработку, производство и эксплуатацию таких объектов. В связи с этим возникает задача оценки остаточного ресурса (срока службы, срока сохраняемости) по данным испытаний объектов, либо по результатам лидерной их эксплуатации.

Под остаточным (после времени τ) ресурсом объекта понимается его наработка, начиная с момента τ до перехода в предельное состояние при установленных режимах применения и условиях эксплуатации.

Если ξ — наработка объекта от начала эксплуатации до перехода его в предельное состояние, то остаточный ресурс ξ_τ после времени τ равен $\xi_\tau = \xi - \tau$, где $\xi \geq \tau$.

Поскольку ξ_τ является случайной величиной, то можно говорить о ее числовых характеристиках.

В качестве основных показателей остаточной долговечности принято рассматривать следующие:

средний остаточный ресурс $T(\tau)$, определяемый как математическое ожидание остаточного ресурса после времени τ ;

гамма-процентный остаточный ресурс $T_\gamma(\tau)$, определяемый как наработка, начиная с некоторого момента времени τ , в течение которой безотказно проработавший объект будет иметь значение условной ВБР

$$\frac{P[\tau + T_\gamma(\tau)]}{P(\tau)}, \text{ равное } \gamma \text{ [56].}$$

Другие показатели остаточной долговечности и сохраняемости (такие, как средний остаточный срок службы, средний остаточный срок сохраняемости и т. д.) определяются аналогично. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только средний остаточный ресурс $T(\tau)$ и гамма-процентный остаточный ресурс $T_\gamma(\tau)$ в предположении, что распределение наработки до отказа относится к классу ВФИ-распределений.

Пусть $P_\tau(t) = \frac{P(\tau + t)}{P(\tau)}$ — условная ВБР объекта на интервале наблюдения $[\tau, \tau + t]$; тогда

$$T(\tau) = \int_0^\infty P_\tau(t) dt$$

или

$$T(\tau) = \frac{1}{P(\tau)} \int_\tau^\infty P(t) dt, \quad (14)$$

а $T_\gamma(\tau)$ есть корень уравнения

$$P_\tau(t) = \gamma \quad (15)$$

относительно t ($t = T_\gamma(\tau)$) при заданном значении γ .

Пример 8. Определить средний остаточный ресурс объекта после назна-

ченного ресурса, равного 2500 ч, при условии, что функция надежности равна $P(t) = e^{-2\sqrt{t}}$.

Решение. Согласно (14) имеем

$$T(\tau) = e^{2\sqrt{\tau}} \int_{\tau}^{\infty} e^{-2\sqrt{t}} dt.$$

Поскольку

$$\int_{\tau}^{\infty} e^{-2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} e^{-2\sqrt{\tau}} (1 + 2\sqrt{\tau}),$$

$$\text{то } T(\tau) = \frac{1}{2} (1 + 2\sqrt{\tau}),$$

откуда при $\tau = 2500$ ч получим $T(\tau) = 55,5$ ч.

Пример 9. Определить гамма-процентный остаточный ресурс $T_{\gamma}(\tau)$ при $\gamma = 90\%$ объекта после назначенного ресурса, равного 2500 ч, при условии, что функция надежности равна $P(t) = e^{-\sqrt{t}}$.

Решение. Согласно (15) при $\gamma = 0,9$ имеем

$$P_{\tau}(t) \equiv e^{-(\sqrt{\tau+t} - \sqrt{\tau})} = 0,9,$$

откуда получим $\sqrt{\tau+t} - \sqrt{\tau} = 0,10536$.

Решая уравнение относительно t при $\tau = 2500$ ч, получим $T_{90}(\tau) = 11,5$ ч.

Приведем гарантированные оценки показателей $T(\tau)$ и $T_{\gamma}(\tau)$ через показатели T и T_{γ} :

$$T(\tau) \geq \frac{T - \tau}{P(\tau)}; \quad (16)$$

$$T_{\gamma}(\tau) \geq T_{\gamma} - \tau. \quad (17)$$

В случае, когда функция надежности $P(t)$ на интервале $(0, \tau)$ выпукла книзу, справедлива следующая оценка:

$$T(\tau) \geq \frac{T - \tau/2 [1 + P(\tau)]}{P(\tau)}, \quad (18)$$

которая точнее, чем оценка (16).

Оценками (16)–(18) можно пользоваться, если известны соответствующие точечные оценки или односторонние ДГ показателей T и T_{γ} . Однако при больших значениях τ эти оценки теряют смысл.

В табл. 9 приведены расчетные формулы для точечных оценок показателей $T(\tau)$ и $T_{\gamma}(\tau)$ их НДГ [56].

Пример 10. Пусть наработки до предельного состояния десяти однотипных объектов по результатам испытаний составили следующий ряд чисел, ч: 250; 12 050; 12 500; 14 100; 14 450; 16 050; 17 100; 18 950; 19 200; 19 700. Требуется оценить средний остаточный ресурс после 10 000 ч работы.

Решение. Для оценки остаточного ресурса воспользуемся формулой, приведенной в табл. 9. Из условия примера имеем $N = 10$; $k = 1$; $\tau = 10 000$ ч. Тогда $\hat{P}(\tau) = 0,9$. Поскольку $K_N(\tau) = 1 - (0,1)^{10}$, то

$$\hat{T}(\tau) = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 z_i,$$

в результате получим $\hat{T}(\tau) = 6011$ ч.

Пример 11. Произвести точечную оценку гамма-процентного остаточного ресурса $T_{\gamma}(\tau)$ при $\gamma = 95\%$ после времени τ по результатам испытаний 25 объектов при условии, что наработки отказавших объектов составили, ч: $\tau + 400$; $\tau + 200$; $\tau + 500$.

Решение. Сначала определим необходимое число отказов для расчета $\hat{T}_{\gamma}(\tau)$ по формуле, приведенной в табл. 9.

Так как $\hat{P}_{\tau}(z_1) = 24/25 = 0,96$; $\hat{P}_{\tau}(z_2) = 23/25 = 0,92$, то необходимое число отказов равно двум.

Следовательно, имеем

$$\hat{T}_{\gamma}(\tau) = \frac{3z_{(1)} + z_{(2)}}{4},$$

9. Формулы для определения точечных и интервальных оценок остаточного ресурса

Точечные оценки для показателей $T(\tau)$ и $T_\gamma(\tau)$	Нижние ДГ для показателей $T(\tau)$ и $T_\gamma(\tau)$ уровня q
$\hat{T}(\tau) = \frac{\sum_{i=k+1}^N z_i}{K_N(\tau)(N-k)},$ где $z_i = t_i - \tau$; $K_N(\tau) = 1 - [1 - \hat{P}(\tau)]^N$ $[\hat{P}(\tau)$ — см. гл. 7]; k — число отказавших объектов на интервале $(0, \tau)$	$\underline{T}_q(\tau) = \frac{1}{r} \left[\sum_{i=1}^p z_i + (r - \rho) t \right] - \frac{t}{2} \sqrt{\frac{q}{r(1-q)}}$ при $r \leq 30$; $\underline{T}_q(\tau) = \frac{\frac{1}{r} \left[\sum_{i=1}^p z_i + (r - \rho) t \right]}{1 + u_q / \sqrt{r}}$ при $r > 30$ Здесь t — продолжительность наблюдения после τ; r и ρ — число объектов на интервале $[\tau, \tau + t]$ соответственно наблюдаемых и отказавших; u_q — по табл. 7 приложения
$\hat{T}_\gamma(\tau) = z_{m-1} + \frac{(z_{(m)} - z_{(m-1)}) [\hat{P}_\tau(z_{(m-1)}) - \gamma]}{\hat{P}_\tau(z_{(m-1)}) - \hat{P}_\tau(z_{(m)})},$ где $z_{(1)} < z_{(2)} < \dots < z_{(m-1)} < z_{(m)}$ — вариационный ряд остаточных наработок; $z_{(m-1)}$ и $z_{(m)}$ — остаточные наработки, для которых выполнено $\hat{P}_\tau(z_{(m)}) \leq \gamma < \hat{P}_\tau(z_{(m-1)});$ $\hat{P}_\tau(t) = \frac{\hat{P}(\tau + t)}{\hat{P}(\tau)}$	При $r > 30$ $\underline{T}_{\gamma q}(\tau) = \frac{\hat{T}_\gamma(\tau)}{1 + u_q \Phi(\gamma, r)},$ где $\Phi(\gamma, r) = \frac{1}{\ln 1/\gamma} \sqrt{\frac{1/\gamma - 1}{r}}$

откуда при $z_{(1)} = 200$ ч, $z_{(2)} = 400$ ч, $\gamma = 0,9$ получим искомую оценку $\hat{T}_\gamma(\tau) = 250$ ч.

Пример 12. В результате лидерной эксплуатации девяти однотипных объектов в течение 4000 ч после назначенного ресурса τ было обнаружено три отказа в следующие моменты вре-

мени: $(\tau + 3970)$ ч, $(\tau + 3980)$ ч, $(\tau + 3990)$ ч. Определить НДГ среднего остаточного ресурса после τ при доверительной вероятности $q = 0,9$.

Решение. Поскольку $r = 9$, $\rho = 3$, $t = 4000$ ч и $q = 0,9$, то согласно формуле, приведенной в табл. 9, по-

лучим искомую оценку, равную $\underline{T}_q(\tau) = 1993$ ч.

Пример 13. Оценить НДГ гамма-процентного остаточного ресурса $T_\gamma(\tau)$ при $\gamma = 90\%$ при условии, что число лидерных объектов равно 31 ($q = 0,9$), наработки отказавших лидерных объектов после назначенного ресурса τ следующие, ч: 1000; 3000; 5000. При этом известно, что интенсивность отказов монотонно растет после назначенного ресурса τ .

Решение. Сначала рассчитаем точечную оценку $T_\gamma(\tau)$. Так как

$$\frac{\widehat{P}(\tau + 5000)}{\widehat{P}(\tau)} = \frac{28}{31} = 0,9,$$

то согласно табл. 9 имеем $\widehat{T}_{90}(\tau) = 5000$ ч.

Теперь определим $\varphi(\gamma, r)$ при $\gamma = 0,9$ и $r = 31$; согласно формуле, приведенной в табл. 9, имеем $\varphi(0,9; 31) = 0,5682$.

Далее из табл. 7 приложения находим $u_q = 1,28$ при $q = 0,9$.

Следовательно, получим $\underline{T}_{\gamma q} = 2895$ ч (см. табл. 9).

Итак, оценка НДГ гамма-процентного остаточного ресурса при доверительной вероятности 0,9 равна 2895 ч.

Глава 11. Планирование испытаний и контроль надежности по двум контрольным уровням

В данной главе приведены правила выбора параметров планов контроля надежности на основе следующих исходных данных:

браковочный уровень контролируемого показателя надежности $R_{бр}$;

приемочный уровень $R_{пр}$;

допустимые значения рисков заказчика (потребителя) β и разработчика (поставщика или изготовителя) α .

Правила и порядок выбора указанных величин изложены в гл. 5.

Под планом контроля Π показателя надежности R понимают совокупность данных, включающих число испытываемых изделий, способ проведения испытаний (с восстановлением отказавших образцов или без него), правила прекращения испытаний и т. п.

Величины $R_{бр}$, $R_{пр}$, α и β определяют исходные данные для контроля надежности изделия (по показателю R) на основе двух контрольных уровней — $R_{бр}$ и $R_{пр}$. Задача планирования контрольных испытаний на надежность в этом случае состоит в определении параметров некоторого (выбранного по определенным соображениям) плана контроля Π по заданным значениям величин $R_{бр}$, $R_{пр}$, α и β .

Пример 1. Показателем надежности изделия является $P(t) = P$ — вероятность безотказной работы (ВБР) за заданное время $t = 100$ ч. Требования к показателю P имеют следующий вид: $R_{пр} = 0,99$; $R_{бр} = 0,95$. Допустимые значения рисков $\alpha = 0,05$; $\beta = 0,05$. Для контроля надежности изделий решено использовать одноступенчатый план контроля $\Pi^I(N, c)$, при котором N образцов изделия испытываются в течение заданного времени $t = 100$ ч работы изделия; если при этом число отказавших изделий (из общего числа N) $y \leq c$, то

требования к надежности изделия подтверждены, в противном случае (при $y > c$) — не подтверждены. Требуется определить параметры плана контроля N и c — соответственно объем выборки и контрольный норматив для числа отказов y .

ПОСТАНОВКА И ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Пусть контроль показателя надежности R производится по плану Π . Результаты наблюдений на основе плана Π обозначим X , $X \in \mathfrak{X}$. Условия испытаний и свойства изделий таковы, что результаты наблюдений X являются случайной величиной (скалярной или векторной), распределение которой принадлежит некоторому параметрическому семейству распределений $\mathcal{P}_{\theta}^{\mathfrak{X}}$, $\theta \in \Theta$ (например, биномиальному, экспоненциальному, нормальному и др.). Показатель надежности R является монотонной функцией неизвестного скалярного параметра распределения θ , т. е. $R = g(\theta)$, $R_{пр} = g(\theta_0)$ и $R_{бр} = g(\theta_1)$, $\theta \in \Theta$. При таком подходе сформулированная выше задача сводится к задаче математической статистики о проверке двух простых гипотез — нулевой $H_0: \theta = \theta_0$ и конкурирующей $H_1: \theta = \theta_1$ ($\theta_0 = g^{-1}(R_{пр})$, $\theta_1 = g^{-1}(R_{бр})$) при заданных α и β вероятностях ошибок первого и второго рода (см., например [20]) по результатам наблюдений X , $X \in \mathfrak{X}$.

Если случайная величина X является непрерывной, то параметрическое семейство распределений $\mathcal{P}_{\theta}^{\mathfrak{X}}$, $\theta \in \Theta$ задается плотностью $f(x/\theta)$. Если X — дискретная случайная ве-

личина, то заданы вероятности $P_\theta \times \times (X = x) \equiv p(x/\theta)$. В каждом из указанных случаев выполнено одно из следующих соотношений:

$$\int_{\mathfrak{X}} f(x/\theta) dx = 1, \\ \sum_{x \in \mathfrak{X}} p(x/\theta) = 1, \forall \theta \in \Theta. \quad (1)$$

При выбранном классе планов контроля Π на основе заданных величин $R_{\text{пр}}, R_{\text{бр}}(\theta_0, \theta_1), \alpha, \beta$ требуется разделить пространство результатов наблюдений $\mathfrak{X}$ на две непересекающиеся части $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ таким образом: при $X \in \mathfrak{X}_1$ изделия принимаются (результаты испытаний считаются удовлетворительными), а при $X \in \mathfrak{X}_2$ — бракуются (результаты испытаний считаются неудовлетворительными). Вероятность принятия решения, что результаты испытаний являются удовлетворительными при показателе надежности R (значения параметра θ), носит название оперативной характеристики плана контроля $\Pi(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)$ и обозначается $L(R/\Pi)$ ($L(\theta/\Pi)$). В задачах теории надежности показатель R (параметр семейства распределения θ) обычно выбирается так, что оперативная характеристика $L(R/\Pi)$ ($L(\theta/\Pi)$) является монотонно возрастающей функцией показателя надежности R (параметра семейства распределений θ).

Оперативная характеристика плана Π в случае дискретных и непрерывных распределений случайной величины X имеет, соответственно, вид:

$$L(\theta/\Pi) = \sum_{x \in \mathfrak{X}_1} p(x/\theta), \theta \in \Theta; \quad (2)$$

$$L(\theta/\Pi) = \int_{\mathfrak{X}_1} f(x/\theta) dx, \theta \in \Theta. \quad (3)$$

Риски поставщика α и потребителя β через оперативную характеристику плана контроля выражаются следующим образом:

$$\alpha = 1 - L(R_{\text{пр}}/\Pi) = 1 - L(\theta_0/\Pi); \quad (4)$$

$$\beta = L(R_{\text{бр}}/\Pi) = L(\theta_1/\Pi). \quad (5)$$

Пример 2. В условиях примера 1 оперативная характеристика одноступенчатого плана $\Pi^1(N, c)$ контроля показателя надежности P выражается формулой

$$L(P/\Pi^1) = \sum_{y=0}^c C_N^y P^{N-y} (1-P)^y, \\ P \in [0, 1] \quad (6)$$

и представляет собой сумму биномиальных вероятностей, зависящих от параметра P этого дискретного распределения. Минимальные значения N и c , удовлетворяющие двум контрольным уровням: $P_{\text{пр}} = P_0 = 0,990$; $P_{\text{бр}} = P_1 = 0,950$; $\alpha = 0,05$; $\beta = 0,05$, в общем случае найдем как решения неравенств

$$1 - \sum_{y=0}^c C_N^y P_0^{N-y} (1-P_0)^y \leq \alpha; \quad (7)$$

$$\sum_{y=0}^c C_N^y P_1^{N-y} (1-P_1)^y \leq \beta. \quad (8)$$

В данном примере уравнения (4) и (5) заменены на неравенства (7) и (8), так как в силу дискретности биномиального распределения заданные значения рисков α и β , возможно, не смогут быть точно реализованы ни при каких N, c . Естественно, в качестве решений неравенств (7) и (8) следует брать наименьшие N и c .

Отметим, что при решении неравенств (7), (8) на ЭВМ удобно использовать представление суммы биномиальных вероятностей через неполную бета-функцию следующего вида:

$$\sum_{y=0}^c C_N^y P^{N-y} (1-P)^y = \\ = I_P(N-c; c+1), \quad (9)$$

где

$$I_P(N-c; c+1) = \\ = \frac{N!}{c!(N-c-1)!} \int_0^P t^{N-c-1} \times \\ \times (1-t)^c dt.$$

Задача построения плана контроля показателя надежности по двум контрольным уровням сводится к задаче проверки двух гипотез.

При проверке двух простых гипотез на основе результатов наблюдений необходимо установить, какое из двух утверждений следует предпочесть — $H_0: R = R_{\text{пр}} \ (\theta = \theta_0)$ или $H_1: R = R_{\text{бр}} \ (\theta = \theta_1)$ ($R_{\text{бр}} > R_{\text{пр}}$, $R = g(\theta)$, $\theta_0 = \theta_1$).

При проверке сложных гипотез — $H_0: R \geq R_{\text{пр}}$ или $H_1: R \leq R_{\text{бр}}$. Для конкретных схем планов контроля показателей надежности, приведенных ниже, функции $R = g(\theta)$ монотонные, и решающие правила, сформулированные для проверки простых гипотез, обычно могут быть применены для проверки сложных гипотез [40].

При одноступенчатом плане Π^1 объем выборки N и результаты наблюдений X ($X \in \mathfrak{X}$) являются фиксированными, в частности, $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ — независимая повторная выборка, что имеет место, например, когда испытание надежности осуществляется по плану (NUT).

Пусть результаты наблюдений X по одноступенчатому плану контроля представляют собой непрерывную случайную величину с плотностью распределения $f(x/\theta)$. В этом случае задача проверки двух простых гипотез сводится к разбиению пространства $\mathfrak{X}$ на две непересекающиеся части — $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$. Если $X \in \mathfrak{X}_1$, принимается нулевая гипотеза H_0 , а при $X \in \mathfrak{X}_2$ нулевая гипотеза H_0 отвергается (принимается конкурирующая гипотеза H_1). При одноступенчатом плане контроля в общем случае при фиксированном объеме выборки ни при каком разбиении $\mathfrak{X}$ на две части (что эквивалентно выбору области $\mathfrak{X}_2$, называемой критической) невозможно сделать риски α и β одновременно сколь угодно малыми.

Оптимальным, по Нейману — Пирсону, называется такое разбиение $\mathfrak{X}$ на две части (такое решающее правило построения критической области $\mathfrak{X}_2$ для проверки двух простых гипотез), при использовании которого риск α принимает заданное значение, а риск β минимален [вероятность $(1 - \beta)$ максимальна].

Оптимальное, по Нейману — Пирсону, решающее правило основывается на отношении правдоподобия

$$I(X) = \frac{f(X/\theta_1)}{f(X/\theta_0)} \quad (10)$$

и выражается формулами:

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_1: I(X) &\leq K_\alpha; \\ \mathfrak{X}_2: I(X) &> K_\alpha. \end{aligned} \quad (11)$$

Значение константы K_α зависит от заданного риска α и значений параметров θ_0 и θ_1 . В случае дискретных распределений, при $I(X) = K_\alpha$, гипотеза H_0 принимается с некоторой вероятностью, лежащей между нулем и единицей.

Если $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ — независимая повторная выборка, то, последовательно увеличивая N и пользуясь решающим правилом Неймана—Пирсона, можно достичь заданного значения β при наименьшем возможном объеме выборки N . При построении решающего правила, в случае независимой повторной выборки, вместо отношения правдоподобия (10) удобнее применять логарифм отношения правдоподобия

$$\begin{aligned} \ln I(X) &= \ln I(X_1, \dots, X_N) = \\ &= \ln \frac{\prod_{i=1}^N f(X_i/\theta_1)}{\prod_{i=1}^N f(X_i/\theta_0)} = \sum_{i=1}^N z_i, \end{aligned} \quad (12)$$

сравнивая его с $\ln K_\alpha$. В формуле (12) каждое слагаемое представляет собой

$$z_i = \ln \frac{f(X_i/\theta_1)}{f(X_i/\theta_0)}. \quad (13)$$

Пример 3. Показатель надежности изделия является функцией от математического ожидания нормального распределения. Значения μ_0 и μ_1 отвечают соответственно приемочному и браковочному уровням показателя надежности, а дисперсия σ^2 нормального распределения известна. Требуется построить оптимальное решающее правило Неймана—Пирсона для проверки двух простых гипотез — $H_0: \mu = \mu_0$; $H_1: \mu = \mu_1$ ($\mu_1 > \mu_0$) при заданном риске α по независимой пов-

торной выборке $(X_1, X_2, \dots, X_N)$, являющейся результатами испытаний N изделий.

Нулевую гипотезу H_0 следует принимать, когда

$$\ln I(X_1, X_2, \dots, X_N) \leq \ln K_\alpha. \quad (14)$$

В случае нормального распределения при известной дисперсии σ^2 согласно формуле (12) левая часть неравенства (14) имеет вид

$$\begin{aligned} \ln I(X_1, \dots, X_N) &= \\ &= \frac{N}{\sigma^2} (\mu_1 - \mu_0) \bar{X} - \frac{N}{2\sigma^2} (\mu_1^2 - \mu_0^2), \end{aligned} \quad (15)$$

где $\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$. Подставляя логарифм отношения правдоподобия (15) в соотношение (14), после тождественных преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{N}}{\sigma} (\bar{X} - \mu_0) &\leq \frac{\sigma \ln K_\alpha}{\sqrt{N} (\mu_1 - \mu_0)} + \\ &+ \frac{\sqrt{N}}{\sigma} (\mu_1 - \mu_0). \end{aligned} \quad (16)$$

Учитывая, что левая часть неравенства (16) имеет стандартное нормальное распределение, получим соотношение для нахождения величины $u_{1-\alpha}$

$$P \left\{ \frac{\sqrt{N}}{\sigma} (\bar{X} - \mu_0) \leq u_{1-\alpha} \right\} = 1 - \alpha, \quad (17)$$

обеспечивающей заданную вероятность ошибки первого рода (риск поставщика α). Величину $u_{1-\alpha}$ найдем по табл. 7 приложения функции распределения стандартного нормального распределения

$$\begin{aligned} \Phi(u_{1-\alpha}) &= 1 - \alpha, \quad \Phi(z) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \end{aligned}$$

Нулевая гипотеза принимается, если $\frac{\sqrt{N}}{\sigma} (\bar{X} - \mu_0) \leq u_{1-\alpha}$, и отвергается при $\frac{\sqrt{N}}{\sigma} (\bar{X} - \mu_0) > u_{1-\alpha}$.

Вероятность ошибки второго рода (риск потребителя) находится следующим образом:

$$\beta = \Phi \left(u_{1-\alpha} - \frac{\sqrt{N}}{\sigma} (\mu_1 - \mu_0) \right). \quad (18)$$

Вероятность ошибки второго рода β убывает как с ростом разности $\mu_1 - \mu_0$, так и при увеличении объема выборки N .

Соотношения (17) и (18) показывают, что можно найти такое значение объема выборки N , при котором при проверке двух простых гипотез обеспечиваются заданные значения α и β . При $\mu_0 > \mu_1$ неравенство (16) заменяется на противоположное.

Рассмотрим другую постановку задачи проверки двух простых гипотез — $H_0: \theta = \theta_0$; $H_1: \theta = \theta_1$. Пусть известны априорные вероятности p_0 и $1 - p_0$ гипотез H_0 и H_1 соответственно, а также неотрицательные коэффициенты $c(1/0)$ и $c(0/1)$, характеризующие ущерб от принятия неправильного решения при проверке гипотез: $c(1/0)$ — ущерб от ошибочного отклонения нулевой гипотезы, когда она верна; $c(0/1)$ — ущерб от принятия нулевой гипотезы, когда верна конкурирующая гипотеза. Для проверки двух простых гипотез требуется построить решающее правило, минимизирующее общий ущерб:

$$p_0 c(1/0) \alpha + (1 - p_0) c(0/1) \beta. \quad (19)$$

Пусть, как и ранее, результаты наблюдения X ($X \in \mathfrak{X}$) являются непрерывной случайной величиной с плотностью $f(x/\theta)$. Тогда решающее правило, минимизирующее ущерб (19), имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_1: \ln I(X) &\leq \ln K_0; \\ \mathfrak{X}_2: \ln I(X) &> \ln K_0, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$K_0 = \frac{(1 - p_0) c(0/1)}{p_0 c(1/0)}.$$

Отметим, что величина K_0 зависит не от значений ущербов $c(0/1)$ и $c(1/0)$, а от их отношения.

Пример 4. Построить оптимальное решающее правило (19), минимизирующее общий ущерб, в условиях примера 3, когда вероятность появления партий с приемочным уровнем показателя надежности μ_0 равна 0,9, а отношение ущербов от принятия партий с браковочным уровнем показателя надежности μ_1 к ущербу от забраковывания партии с приемочным уровнем μ_0 равно пяти.

Условия примера: $p_0 = 0,9$; $1 - p_0 = 0,1$; $c(0/1)/c(1/0) = 5$. Тогда $K_0 = \frac{0,1}{0,9} \cdot 5 = 0,5556$. Подставляя в формулу (20) логарифм отношения правдоподобия (15), получим следующее оптимальное решающее правило:

$$\bar{x}_1 : \frac{N}{\sigma^2} (\mu_1 - \mu_0) \bar{X} - \\ - \frac{N}{2\sigma^2} (\mu_1^2 - \mu_0^2) \leq \ln 0,5556.$$

Требования о показателе надежности считаются подтвержденными, если среднее арифметическое $\bar{X}$ удовлетворяет неравенству

$$\bar{X} \leq \frac{\sigma^2 \ln 0,5556}{N (\mu_1 - \mu_0)} + \frac{\mu_1 + \mu_0}{2}.$$

В примере 4, так же как и в предшествующем, легко вычисляются значения α и β .

До сих пор рассматривались при двусторонних требованиях к надежности одноступенчатые планы контроля, у которых фиксировано число контролируемых изделий N . Нередко при испытаниях на надежность применяются последовательные планы контроля, при использовании которых не фиксируется число контролируемых изделий (оно зависит от результатов контрольных испытаний).

При использовании последовательных планов важно, чтобы существовали организационно-технические возможности последовательного контроля надежности, поскольку в этом случае второе изделие начинает контролироваться лишь тогда, когда известны

результаты контроля первого изделия; в общем случае изделие $(N + 1)$ может контролироваться лишь после контроля N изделий, если результаты контроля N изделий удовлетворяют определенным заранее требованиям ($N = 1, 2, \dots$).

Как правило, если контрольные испытания надежности каждого изделия требуют небольшого времени, но связаны с большими затратами, то последовательные планы применимы. Если же срок принятия решения по результатам контроля надежности соизмерим со сроком контроля надежности одного изделия, то применять можно лишь одноступенчатые планы, например план (NUT) . Поясним сказанное на примерах.

Пусть время контроля одного изделия 2 ч, но контроль является дорогостоящим, поскольку испытания разрушающие и стоимость проведения контрольных испытаний каждого изделия велика. Время, отведенное на принятие решения о результатах контроля надежности, один месяц. За это время можно проконтролировать с учетом сменности работы испытательной службы 250 изделий. Для сокращения расходов по контролю надо принять решение о возможности использования последовательного плана контроля. Решение может быть положительным, если при заданных двух контрольных уровнях существует такой последовательный план, который требует контроля не более 250 изделий при любых возможных показателях надежности.

В предшествующем примере время контрольных испытаний одного изделия 100 ч. В отведенный срок можно испытать лишь пять изделий, поэтому следует предпочесть одноступенчатый план контроля надежности, подвергнув контрольным испытаниям случайную выборку из N изделий.

Пусть результаты испытания на надежность каждого изделия являются случайной величиной X с плотностью распределения $f(x/\theta)$ [с вероятностями для дискретной случайной величины $p(x/\theta)$]. Результаты последовательного контроля надежности N изделий представляют собой независимую повторную выборку $X_1, X_2, \dots$

X_N ($N = 1, 2, \dots$), и требуется проверить простые гипотезы — $H_0: \theta = \theta_0$; $H_1: \theta = \theta_1$ при заданных значениях рисков α и β , когда число контролируемых изделий заранее не фиксировано.

Вальдовские последовательные планы строятся на основе логарифма отношения правдоподобия:

$$U_N = \ln I(X) = \sum_{i=1}^N z_i, \quad N = 1, 2, \quad (21)$$

Здесь величина z_i для непрерывной случайной величины определяется из формулы (13); в дискретном случае

$$z_i = \ln \frac{p(X_i/\theta_1)}{p(X_i/\theta_0)}. \quad (22)$$

Правила принятия решения по вальдовскому последовательному плану при каждом значении N задаются следующим образом.

Нулевая гипотеза принимается, если $U_N \leq -W(\alpha; \beta)$, (23)

$$\text{где } W(A; B) = \ln \frac{1-A}{B}.$$

Нулевая гипотеза отвергается, если $U_N \geq W(\beta; \alpha)$. (24)

Если

$$-W(\alpha; \beta) < U_N < W(\beta; \alpha), \quad (25)$$

то следует контролировать надежность еще одного $(N+1)$ -го изделия.

Описанное правило обеспечивает приближенно заданные значения рисков α , β и при $\theta = \theta_0$, $\theta = \theta_1$ позволяет существенно уменьшить число контролируемых изделий (в два раза и более) по сравнению с одноступенчатым планом, имеющим такие же вероятности ошибочных решений. Оптимальные свойства вальдовских последовательных планов описаны в работах [14, 88].

Число контролируемых изделий ξ до принятия решения при вальдовском последовательном плане Π^N является случайной величиной с математическим ожиданием

$$M_\theta(\xi/\Pi^N) = \sum_{N=1}^{\infty} NP_\theta(\xi = N), \quad (26)$$

где $P_\theta(\xi = N)$ — вероятность остановки контроля при N наблюдениях и фиксированном значении параметра θ , $\theta \in \Theta$.

Нередко используются усеченные вальдовские последовательные планы $\Pi_{\text{ус}}^N$, у которых правила остановки контроля (23)–(25) дополняются еще одним: контроль заканчивается при $\xi = N_0$. В этом случае задается еще такая величина U_0 , что если $U_{N_0} \leq U_0$, то принимается нулевая гипотеза, а при $U_{N_0} > U_0$ — конкурирующая. Значения N_0 , U_0 подбираются такими, чтобы величины рисков α' , β' у плана $\Pi_{\text{ус}}^N$ мало отличались от заданных рисков α , β при плане Π^N .

Пример 5. Требуется при заданных α и β построить вальдовский последовательный план Π^N контроля надежности изделий, когда время наработки изделия до отказа является случайной величиной τ , имеющей экспоненциальное распределение с плотностью

$$f(t|\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & \text{если } t \geq 0; \\ 0, & \text{если } t < 0, \end{cases} \quad (27)$$

где $\lambda > 0$ и при $H_0: \lambda = \lambda_0$, $H_1: \lambda = \lambda_1$ ($\lambda_0 < \lambda_1$).

Учитывая, что величины $W(\alpha; \beta)$, $W(\beta; \alpha)$ в решающем правиле (23)–(25) не зависят от закона распределения случайной величины, требуется лишь найти величину U_N по независимым наблюдениям $T_1, T_2, \dots, T_N$ (T_i — время наработки до отказа i -го изделия, $i = 1, 2, \dots, N$). Логарифм отношения правдоподобия имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} U_N &= \sum_{i=1}^N \ln \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_1 T_i}}{\lambda_0 e^{-\lambda_0 T_i}} = \\ &= (\lambda_0 - \lambda_1) \sum_{i=1}^N T_i + N \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}. \end{aligned} \quad (28)$$

1. Значения функции $W(A; B) = \ln \frac{1-A}{B}$

A	B					
	0,001	0,005	0,01	0,02	0,05	0,10
0,001	6,90575	5,29732	4,60417	3,91102	2,99473	2,30158
0,005	6,90274	5,29330	4,60016	3,90701	2,99072	2,29757
0,01	6,89770	5,28827	4,59512	3,90197	2,98568	2,29253
0,02	6,88755	5,27811	4,58497	3,89182	2,97553	2,28238
0,05	6,85646	5,24702	4,55388	3,86073	2,94444	2,25129
0,10	6,80239	5,19296	4,49981	3,80666	2,89037	2,19722

Нулевая гипотеза принимается, если

$$\bar{T} \geq \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_0} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} + \frac{W(\alpha; \beta)}{N(\lambda_1 - \lambda_0)}, \quad (29)$$

а при

$$\bar{T} \leq \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_0} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - \frac{W(\alpha; \beta)}{N(\lambda_1 - \lambda_0)} \quad (30)$$

отвергается.

Значения функции $W(A; B)$ приведены в табл. 1. Эта таблица позволяет вычислить оба граничных значения в неравенствах (23)–(25), используемых для построения вальдовского последовательного плана по двум контрольным уровням в случае любых распределений вероятностей.

ПЛАНЫ КОНТРОЛЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ ТИПА ВЕРОЯТНОСТИ

К таким показателям надежности относятся следующие вероятностные характеристики изделия: вероятность безотказной работы; вероятность безотказного хранения; вероятность восстановления и т. п. При построении планов контроля показателей типа вероятности не предполагается знание закона распределения наработки до отказа или между отказами. В этом случае решение о надежности при контроле по плану П принимается на основе следующих результатов испыта-

ний, проведенных за заданное время t_0 : испытывалось N изделий и получено y отрицательных исходов (отказавших, невосстановленных и т. п. изделий). Для удобства изложения будем полагать, что P — вероятность безотказной работы в течение времени t_0 ; N — число испытываемых изделий; y — число изделий, отказавших ранее времени t_0 .

Итак, при заданных, соответственно, значениях P_0 и P_1 — приемочного и браковочного уровней вероятности безотказной работы ($P_0 > P_1$) и заданных рисков α и β требуется в определенном заранее классе планов найти тот план контроля, который отвечает установленным требованиям.

Одноступенчатые планы. При контроле по одноступенчатому плану $\Pi^1(N; c)$ нулевая гипотеза принимается: $P = P_0$ (P_0 — приемочный уровень вероятности безотказной работы), когда число отказавших изделий $y \leq c$; нулевая гипотеза отвергается: $P = P_1$ (P_1 — браковочный уровень вероятности безотказной работы) при $y > c$.

Значения параметров плана $\Pi^1(N; c)$ находятся по формулам (7) и (8). В табл. 2 приведены одноступенчатые планы контроля при $P_0, P_1 = 0,999; 0,995; 0,990; 0,950; 0,90; 0,85; 0,80; 0,75; 0,70; \dots$ ($P_0 > P_1$) и $\alpha, \beta = 0,05; 0,10; 0,20 \dots$

Пример 6. Найти одноступенчатые планы контроля при $P_0 = 0,995; P_1 = 0,950$, если $\alpha = \beta = 0,05$.

По табл. 2 при $\alpha = \beta = 0,05$ $N = 124$ $c = 2$.

2. Одноступенчатые планы контроля показателя надежности типа вероятности

P_0	P_1	$\alpha = 0,05;$ $\beta = 0,05$		$\alpha = 0,05;$ $\beta = 0,10$		P_0	P_1	$\alpha = 0,10;$ $\beta = 0,10$		$\alpha = 0,10;$ $\beta = 0,20$	
		N	c	N	c			N	c	N	c
0,999	0,995	1829	4	1365	3	0,999	0,995	1061	2	599	1
	0,990	628	2	400	1		0,990	229	1	160	0
	0,970	157	1	70	0						
0,995	0,990	3135	22	2464	18	0,995	0,990	1891	13	1251	9
	0,970	256	3	180	2		0,970	128	1	99	1
	0,950	124	2	80	1		0,950	45	0	32	0
	0,930	66	1	55	1	0,990	0,970	307	5	182	3
0,990	0,970	480	8	398	7		0,950	105	2	59	1
	0,950	182	4	136	3		0,930	55	1	42	1
	0,930	88	2	75	2		0,900	22	0	15	0
	0,900	61	2	40	1	0,950	0,900	175	12	124	9
0,950	0,900	312	22	246	18		0,870	79	6	51	4
	0,870	138	11	108	9		0,850	52	4	36	3
	0,850	93	8	76	7		0,800	25	2	20	2
	0,800	50	5	39	4		0,750	20	2	11	1
	0,750	35	4	25	3		0,700	12	2	9	1
	0,700	24	3	16	2	0,900	0,800	81	11	56	8
	0,800	153	22	123	18		0,750	40	6	26	4
0,900	0,750	75	12	60	10		0,700	25	4	17	3
	0,700	45	8	37	7						

Усеченный одноступенчатый план.

Усеченный одноступенчатый план $\Pi_{\text{ус}}^1$ ($N - c$; $c + 1$) является одним из видов плана, при котором реализуется последовательный контроль надежности изделий. Если контроль закончился, когда число положительных исходов $x = N - c$, а в этот момент число отказов $y \leq c$, то приемочный уровень вероятности P_0 безотказной работы считается подтвержденным. Если контроль заканчивается при $y = c + 1$ и $x < N - c$, то принимается решение $P = P_1$. Планы Π^1 (N ; c) и $\Pi_{\text{ус}}^1$ ($N - c$; $c + 1$) имеют одинаковые оперативные характеристики, а следовательно, им отвечают одинаковые значения рисков α и β при заданных P_0 и P_1 .

При плане $\Pi_{\text{ус}}^1$ ($N - c$; $c + 1$) число контролируемых изделий ξ является случайной величиной. Математическое ожидание ξ определяется из формулы [44]:

$$M_P(\xi/\Pi_{\text{ус}}^1) = \frac{1}{1-P} \sum_{y=0}^c y C_N^y P^{N-y} (1-P)^y + \frac{c+1}{1-P} \times \left[1 - \sum_{y=0}^c C_N^y P^{N-y} (1-P)^y \right]. \quad (31)$$

Преимущества плана $\Pi_{\text{ус}}^1$ ($N - c$; $c + 1$) по сравнению с планом Π^1 (N ; c) в сокращении числа контролируемых изделий. Это следует из соотношения

$$M_P(\xi/\Pi_{\text{ус}}^1) < N, \quad \forall P \in (0; 1). \quad (32)$$

Пример 7. Найти одноступенчатый и усеченный одноступенчатый планы при $P_0 = 0,995$; $P_1 = 0,950$; $\alpha = 0,05$;

$\beta = 0,10$. Определить оперативную характеристику $L(P)$ этих планов, а также значения $M_P(\xi/\Pi^1_{yc})$.

По табл. 2 находим $N = 80$; $c = 1_2$

т. е. $\Pi^1(80; 1)$; $\Pi^1_{yc}(79; 2)$.

Вычисления дают следующие значения:

$L(P)$	0	0,05	0,10	0,20	0,50
P	0	0,9421	0,9522	0,9630	0,9791
$M_P(\xi/\Pi^1_{yc})$	2	33,51	39,35	47,32	62,77

$L(P)$	0,80	0,90	0,95	1
P	0,9897	0,9933	0,9955	1
$M_P(\xi/\Pi^1_{yc})$	73,60	76,57	77,92	79

Из примера 7 видно, что если $P = P_1$ при плане Π^1_{yc} , то число контролируемых изделий по сравнению с планом Π^1 можно сократить более чем в 2 раза. При $P = P_0$ такое сокращение составляет более 2,5 %.

Двухступенчатые и многоступенчатые планы. План $\Pi^2(N_1; N_2; c_1; c_2; c_3)$ характеризуется объемами N_1, N_2 первой и второй выборки и числами c_1, c_2, c_3 .

Контроль по плану Π^2 осуществляется следующим образом. Отбирается случайным образом N_1 изделий. Если $y(N_1) \leq c_1$, то результаты испытаний на надежность подтверждают приемочный уровень вероятности безотказной работы P_0 , а при $y(N_1) > c_2$ следует, что $P = P_1$.

Когда $c_1 < y(N_1) \leq c_2$, отбирается вторая выборка. Если суммарное число отрицательных исходов при испытании на надежность изделий двух выборок $y(N_1 + N_2) \leq c_3$, то $P = P_0$, а при $y(N_1 + N_2) > c_3$ имеем $P = P_1$.

Если сравниваются планы Π^1 и Π^2 с одними и теми же значениями P_0, P_1, α, β , то плану Π^2 отвечает меньшее значение математического ожидания числа контролируемых изделий, т. е. $M_P(\xi/\Pi^2) < N, P = P_0, P_1$.

Задача нахождения плана Π^2 с той же оперативной характеристикой, что и у плана Π^1 при всех значениях P ($P \in [0; 1]$), в общем случае является неразрешимой, так как невозможно совпадение $L(P/\Pi^1)$ и $L \times \times (P/\Pi^2)$ — полиномов от P степеней N и $N_1 + N_2$ соответственно. При

заданном плане Π^1 существует множество планов Π^2 , имеющих те же значения P_0, P_1, α, β . Для сужения множества таких планов Π^2 можно положить $N_1 = N_2$ или $c_2 = c_3$.

Оперативная характеристика и математическое ожидание числа контролируемых изделий при плане $\Pi^2(N_1; N_2; c_1; c_2; c_3)$ определяются следующими выражениями:

$$L(P/\Pi^2) = \sum_{y_1=0}^{c_1} C_{N_1}^{y_1} P^{N_1-y_1} \times \\ \times (1-P)^{y_1} + \sum_{y_2=c_1+1}^{c_3} \sum_{h=c_1+1}^{c_2} C_{N_1}^h \times \\ \times C_{N_2}^{y_2-h} P^{N_1+N_2-y_2} (1-P)^{y_2}; \quad (33)$$

$$M_P(\xi/\Pi^2) = N_1 + \\ + N_2 \sum_{y_1=c_1+1}^{c_2} C_{N_1}^{y_1} P^{N_1-y_1} (1-P)^{y_1}. \quad (34)$$

Пример 8. Найти план двухступенчатого контроля $\Pi^2(N_1; N_2; c_1; c_2; c_3)$ при заданных величинах: $P_0 = 0,9996$; $P_1 = 0,9940$; $\alpha = 0,05$; $\beta = 0,05$. Вычислить характеристику (34) при некоторых фиксированных значениях $L(P/\Pi^2)$.

Решение неравенств, аналогичных (4) и (5) для двухступенчатого плана, приводит к плану $\Pi^2(500; 500; 0; 1; 1)$. Вычисления по формулам (33) и (34), проведенные на ЭВМ, дают следующие результаты:

$L (P/\Pi^2)$	0	0,05	0,10	0,20	0,50
P	0	0,9938	0,9950	0,9965	0,9980
$M_P (\xi/\Pi^2)$	500	568,87	603,42	644,80	684,12

$L (P/\Pi^2)$	0,80	0,90	0,95	1
P	0,9990	0,9994	0,9996	1
$M_P (\xi/\Pi^2)$	649,25	613,85	584,01	500

Многоступенчатый план Π^l , включающий l ступеней контроля, выглядит следующим образом:

$$\Pi^l (N_1; N_2; \dots; N_l; c_1; c'_1; \dots; c_{l-1}; c'_{l-1}; c_l),$$

где параметры плана Π^l — целые положительные числа, удовлетворяющие естественным ограничениям, в частности, $c_i < c'_i$, $i = \overline{1, l-1}$.

Пусть $y_r = y$ ($N_1 + N_2 + \dots + N_r$) — число отрицательных исходов при контрольных испытаниях первых r выборок ($r < l$). Если $y_r \leq c_r$, то признается, что $P = P_0$, а при $y_r > c'_r$ $P = P_1$.

Когда $c_r < y_r \leq c'_r$, берется $r+1$ выборка. В случае проверки выборки l при $y_l \leq c_l$ принимается решение $P = P_0$, при $y_l > c_l$ — решение $P = P_1$.

План Π^l при $l > 2$ в практике контроля надежности принимается редко, так как при возможности последовательной проверки надежности изделий план Π^l может быть с успехом заменен вальдовским последовательным планом Π^n .

Усеченные двухступенчатые и многоступенчатые планы. Каждому многоступенчатому плану Π^l можно поставить в соответствие усеченный многоступенчатый план Π^l_{yc} с такой же оперативной характеристикой. Способ построения плана Π^l_{yc} по исходному Π^l приведен в работе [44].

Рассмотрим усеченный двухступенчатый план Π^2_{yc} , при использовании которого последовательно испытываются изделия и фиксируется число x положительных исходов и число y

отрицательных исходов ($x+y$ — общее число испытываемых изделий). Плану Π^2 ($N_1; N_2; c_1; c_2; c_3$) соответствует план Π^2_{yc} ($N_1 - c_1; c_2 + 1; N_1 + N_2 - c_3; c_3 + 1$).

При усеченном двухступенчатом плане решение о соответствии уровня вероятности приемочному уровню принимается в следующих случаях: если число испытываемых изделий не более N_1 ($x+y \leq N_1$); если число положительных исходов $x = N_1 - c_1$ ($y \leq c_1$); при числе испытываемых изделий от $N_1 + 1$ до $N_1 + N_2$, когда $x = N_1 + N_2 - c_3$ ($y \leq c_3$).

Решение о несоответствии уровня вероятности приемочному принимается при $x+y \leq N_1$, если $y = c_2 + 1$, а при $N_1 + 1 \leq x+y \leq N_1 + N_2$, если $y = c_3 + 1$.

Усеченный двухступенчатый план Π^2_{yc} в отличие от плана Π^2 не требует полной проверки выборок N_1 и N_2 и дает существенное уменьшение числа испытываемых изделий, если принимается решение о несоответствии вероятности приемочному уровню. Математическое ожидание числа контролируемых изделий при плане Π^2_{yc} находится по формуле:

$$M_P (\xi/\Pi^2_{yc}) = (c_2 + 1) \sum_{x=0}^{N_1 - c_2 - 1} C_{x+c_2}^x P^x q^{c_2} + \frac{1}{q} \times \\ \times \sum_{y=0}^{c_1} y C_{N_1 - c_1 + y - 1}^y P^{N_1 - c_1} q^y + (c_3 + 1) \sum_{x=N_1 - c_3}^{N_1 + N_2 - c_3 - 1} \sum_{k=N_1 - c_3}^{N_1 - c_1 - 1} C_{N_1}^k \times$$

$$\begin{aligned} & \times C_{x+c_1-N_1}^{x-k} P^x q^{c_1} + \\ & + \frac{1}{q} \sum_{y=c_1+1}^{c_2} \sum_{h=c_1+1}^{\min(c_2, y)} y C_{N_1}^h \times \\ & \times C_{N_2-c_2+y-1}^{y-h} P^{N_1+N_2-c_2} q^y; \\ & q = 1 - P. \end{aligned}$$

У планов Π^2 и Π_{yc}^2 математические ожидания числа контролируемых изделий удовлетворяют неравенству

$L(P/\Pi^2) = L(P/\Pi_{yc}^2).$	0	0,05	0,10	0,20	0,50	0,80	0,90	0,95	1
$M_P(\xi/\Pi^2)/M_P(\xi/\Pi_{yc}^2).$	250	1,90	1,70	1,50	1,20	1,08	1,06	1,04	1

При приемочном и браковочном уровнях вероятности уменьшение числа контролируемых изделий при плане Π_{yc}^2 составляет соответственно 1,04 и 1,9 раза, а при $P < P_1 = 0,9940$ такое уменьшение изменяется от двух до десятков раз.

Вальдовские последовательные планы. Если возможна последовательная проверка надежности изделий и контролируемый показатель надежности представляет собой вероятность P , логарифм отношения правдоподобия (21) имеет следующий вид:

$$U_N = x \ln \frac{P_1}{P_0} + y \ln \frac{q_1}{q_0},$$

$$q_i = 1 - P_i, \quad i = 0, 1, \quad (35)$$

где x — число положительных, а y — число отрицательных результатов испытаний при N испытываемых изделиях.

Формулу (35) можно записать иначе:

$$U_N = N \ln \frac{P_1}{P_0} + y \left(\ln \frac{q_1}{q_0} - \ln \frac{P_1}{P_0} \right). \quad (36)$$

Неравенства, при выполнении которых принимаются соответственно решения $P = P_0$, $P = P_1$, определяются на основе соотношений (23), (24). Эти неравенства, построенные с помощью формулы (36), можно записать выражениями

$$M_P(\xi/\Pi_{yc}^2) < M_P(\xi/\Pi^2),$$

$$\forall P \in (0; 1).$$

Пример 9. По условиям примера 8 возможна последовательная проверка надежности изделий и решено было использовать план Π_{yc}^2 . Определить, к какому уменьшению математического ожидания числа контролируемых изделий это приведет.

Вычисления, проведенные на ЭВМ, дают следующие результаты:

$$y \leq aN - b_1; \quad (37)$$

$$y \geq aN + b_2, \quad (38)$$

где

$$a = \frac{\ln \frac{P_0}{P_1}}{\ln \frac{q_1}{q_0} + \ln \frac{P_0}{P_1}};$$

$$b_1 = \frac{W(\alpha; \beta)}{\ln \frac{q_1}{q_0} + \ln \frac{P_0}{P_1}};$$

$$b_2 = \frac{W(\beta, \alpha)}{\ln \frac{q_1}{q_0} + \ln \frac{P_0}{P_1}}. \quad (39)$$

Если неравенства (37) и (38) не выполняются, то испытывается изделие $(N+1)$.

При $\alpha = \beta$ $b_1 = b_2 = b$ и число параметров плана Π^n сокращается до двух (a и b).

На основе формул (37) и (38) записываются линейные уравнения прямых приемки и забраковывания плана:

$$y = aN - b_1; \quad (40)$$

$$y = aN + b_2. \quad (41)$$

Формулы (40), (41) позволяют при каждом N вычислить те значения $y_{пр}$ и $y_{бр}$, при которых следует принять или отвергнуть решение $P = P_0$. При заданных величинах P_0 , P_1 , α , β

параметры a , b_1 , b_2 биномиального последовательного плана Π^n вычисляются по формуле (39). Такие вычисления могут быть выполнены с применением простейших вычислительных средств.

Пример 10. Найти параметры плана Π^n при заданных двусторонних требованиях: $P_0 = 0,9933$; $P_1 = 0,9522$; $\alpha = \beta = 0,1$.

Проведя вычисления, получим

$$a = \frac{\ln \frac{P_0}{P_1}}{\ln \frac{q_1}{q_0} + \ln \frac{P_0}{P_1}} = \frac{\ln \frac{0,9933}{0,9522}}{\ln \frac{1-0,9522}{1-0,9933} + \ln \frac{0,9933}{0,9522}} \approx 0,021;$$

$$b = b_1 = b_2 = \frac{W(\alpha, \beta)}{\ln \frac{q_1}{q_0} + \ln \frac{P_0}{P_1}} = \frac{\ln \frac{1-0,1}{0,1}}{2,01663} \approx 1,09.$$

Легко составить таблицу биномиальных планов Π^n при заданных величинах: P_0 , P_1 , α , β ($P_0 > P_1$). На практике часто бывает более удобно использовать усеченные последовательные планы Π_{yc}^n . Такой план включает дополнительно еще два параметра: N_0 и c_0 . Когда при контроле N_0 изделий y ($N_0 \leq c_0$), то принимается решение $P = P_0$, а при $y = c_0 + 1$ это решение отвергается. Величина N_0 подбирается такой, чтобы значения рисков α и β не изменились существенно при переходе от плана Π^n к плану Π_{yc}^n .

Оперативная характеристика $L \times \times (P/\Pi^n)$ вальдовского последовательного плана Π^n находится приближенно в соответствии с рекомендациями [43] в пяти точках: $P = 0$, $P = P_1$, $P = 1 - a$ [a — угловой коэффициент прямых (40), (41)], $P = P_0$, $P = 1$ следующим образом:

$$L(0/\Pi^n) = 0; \quad L(P_1/\Pi^n) = \beta;$$

$$L(P_0/\Pi^n) = 1 - \alpha; \quad (42)$$

$$L(1 - a/\Pi^n) = \frac{b_2}{b_1 + b_2}; \quad L(1/\Pi^n) = 1.$$

Математическое ожидание случайной величины ξ , равной числу контролируемых изделий, $M_P(\xi/\Pi^n)$.

Приближенные значения $M_P \times \times (\xi/\Pi^n)$ в вышеуказанных пяти точках согласно [43] равны:

$$M_0(\xi/\Pi^n) = \frac{b_2}{a} \frac{\ln \frac{P_0}{P_1}}{\ln \frac{q_1}{q_0}};$$

$$M_1(\xi/\Pi^n) = \frac{b_1}{a};$$

$$M_{P_1}(\xi/\Pi^n) = \frac{\beta \ln \frac{\beta}{1-\alpha} + (1-\beta) \ln \frac{1-\alpha}{\beta}}{P_1 \ln \frac{P_1}{P_0} + q_1 \ln \frac{q_1}{q_0}}; \quad (43)$$

$$M_{P_0}(\xi/\Pi^n) = \frac{(1-\alpha) \ln \frac{\beta}{1-\alpha} + \alpha \ln \frac{1-\beta}{\alpha}}{P_0 \ln \frac{P_1}{P_0} + q_0 \ln \frac{q_1}{q_0}};$$

$$M_{1-a}(\xi/\Pi^n) = \frac{\ln \frac{1-\alpha}{\beta} \ln \frac{1-\beta}{\alpha}}{\ln \frac{P_0}{P_1} \ln \frac{q_1}{q_0}}.$$

Параметры N_0 и c_0 усеченного плана Π_{yc}^n в соответствии с рекомендациями Вальда [14] найдем следующим образом:

$$N_0 = [k M_{1-a}(\xi/\Pi^n)], \quad k = 2; 3, \quad (44)$$

$$c_0 = \left[a N_0 + \frac{b_2 - b_1}{2} \right]. \quad (45)$$

Здесь $[A]$ — целая часть числа A .

Пример 11. Для плана Π^n примера 10 найти дополнительные параметры N_0 и c_0 усеченного плана $\Pi_{ус}^n$ при $k = 3$. По формулам (43)–(45) получим

$$N_0 = \left[3 \frac{\left(\ln \frac{1-0,1}{0,1} \right)^2}{\ln \frac{0,9933}{0,9522} \ln \frac{1-0,9522}{1-0,9933}} \right] = 174,$$

$$c_0 = [a \cdot 174 + 0] = [3,646] = 3.$$

Усечение плана Π^n приводит к тому, что у плана $\Pi_{ус}^n$ риски поставщика и потребителя отличаются от тех значений α и β , на основе которых построен план Π^n . Это отличие при $k = 3$, как правило, не превышает $0,5\alpha$ и $0,5\beta$.

В табл. 3 приведены параметры a , b_1 , b_2 , N_0 , c_0 планов $\Pi_{ус}^n$ при $k = 3$, α и $\beta = 0,05; 0,10; 0,20$ и некотором наборе значений P_0 и P_1 .

Существуют планы Π^n , Π^1 , $\Pi_{ус}^1$, Π^2 , $\Pi_{ус}^2$ и др., отвечающие одним и тем же двум контрольным уровням: P_0 , P_1 , α , β . Отметим, что у плана Π^1 (N , c) по сравнению с Π^n

$$N > M_P(\xi/\Pi^n), \quad P \in [0; 1]. \quad (46)$$

Причем N в два-три раза больше правой части неравенства (46).

Оптимальные свойства вальдовских последовательных планов по сравнению с планами фиксированного объема выборки в довольно общих схемах исследовались в работе [88]. Сравнение планов Π^n и $\Pi_{ус}^1$ проведено в работе [43].

Формулы (42) и (43), предложенные Вальдом, дают приближенные значения величин $L(P/\Pi^n)$ и $M_P(\xi/\Pi^n)$. Какова точность этих приближенных формул? Известны методы точного вычисления указанных выше величин, когда $1/a = k$ — натуральное число [14].

В работе [81] предложены простые соотношения для вычисления $L(P/\Pi^n)$

и $M_P(P\xi/\Pi^n)$ при всех значениях $P \in [0; 1]$, когда $\frac{b_1}{a}$, $\frac{b_2}{a}$, $\frac{1}{a} = k$ — натуральные числа. В этом случае оперативная характеристика и математическое ожидание числа контролируемых изделий вычисляются следующим образом:

$$L(P/\Pi^n) = \frac{P^{kb_1}}{B_m} B_{m-kb_1}; \quad (47)$$

$$M_P(\xi/\Pi^n) = L(P/\Pi^n) \sum_{r=1}^m \frac{B_{r-1}}{P^r} - \sum_{r=1}^{m-kb_1} \frac{B_{r-1}}{P^r}. \quad (48)$$

Здесь $m = kb_1 + kb_2 - 1$;

$B_r =$

$$= \begin{cases} \left[\frac{r}{k} \right] \sum_{j=0}^{\left[\frac{r}{k} \right]} (-qP^{k-1})^j C_{r-(k-1)}^j, & \text{если } r \geq 0, \\ 0 & \text{, если } r < 0, \end{cases}$$

$$B_r = B_{r-1} - qP^{k-1}B_{r-k}, \quad q = 1 - P.$$

Пример 12. При требованиях к надежности $P_0 = 0,90$; $P_1 = 0,6655$; $\alpha = 0,0488$; $\beta = 0,00227$ найти последовательный вальдовский план и вычислить $L(P/\Pi^n)$ и $M_P(\xi/\Pi^n)$ по точным и приближенным формулам соответственно при $P = P_0$, $1 - a$, P_1 .

Вычисления, аналогичные проведенным выше, дают следующие параметры вальдовского последовательного плана: $a = 0,2 = 1/5$; $b_1 = 4$; $b_2 = 2$. В табл. 4 приведены точные и приближенные значения требуемых характеристик плана Π^n .

Погрешность в вычислении по приближенным формулам (42) и (43) достигает 10 %.

Вальдовские последовательные планы Пойа, обобщающие вальдовские последовательные биномиальные планы, рассмотрены в работе [43]. Последовательные планы Пойа позволяют учесть конечность контролируемой пар-

3. Усеченные последовательные планы контроля показателей надежности типа вероятности

P_0	P_1	a	b_1	b_2	N_0	c_0
$\alpha = 0,05; \beta = 0,05$						
0,999	0,997	0,00182	2,675	2,675	11 812	21
	0,995	0,00249	1,825	1,825	4 027	10
	0,993	0,00309	1,508	1,508	2 218	6
	0,990	0,00391	1,274	1,274	1 248	4
	0,970	0,00859	0,8583	0,8583	259	2
0,997	0,993	0,00472	3,459	3,459	7 635	36
	0,990	0,00582	2,431	2,431	3 066	17
	0,970	0,01178	1,264	1,264	411	4
	0,950	0,01687	1,029	1,029	191	3
0,995	0,990	0,00722	4,217	4,217	7 448	53
	0,970	0,01400	1,620	1,620	570	7
	0,950	0,01970	1,254	1,254	244	4
	0,930	0,02496	1,088	1,088	145	3
0,993	0,970	0,01585	1,991	1,991	762	12
	0,950	0,02202	1,465	1,465	298	6
	0,930	0,02768	1,243	1,243	172	4
0,990	0,970	0,01824	2,631	2,631	1 160	21
	0,950	0,02499	1,784	1,784	391	9
	0,930	0,03113	1,466	1,466	213	6
	0,900	0,03975	1,228	1,228	118	4
0,970	0,930	0,04735	3,311	3,311	728	34
	0,900	0,05857	2,302	2,302	288	16
	0,870	0,06908	1,869	1,869	163	11
	0,850	0,07583	1,691	1,691	122	9
	0,800	0,09220	1,409	1,409	71	6
	0,750	0,10819	1,238	1,238	47	5
	0,700	0,12409	1,120	1,120	34	4
0,950	0,900	0,07236	3,941	3,941	694	50
	0,870	0,08430	2,822	2,822	309	26
	0,850	0,09193	2,434	2,434	212	19
	0,800	0,11029	1,890	1,890	109	12
	0,750	0,12807	1,595	1,595	68	8
	0,700	0,14562	1,404	1,404	47	6
0,930	0,870	0,09726	4,294	4,294	629	61
	0,850	0,10566	3,456	3,456	379	40
	0,800	0,12454	2,453	2,453	164	20
	0,750	0,14456	1,979	1,979	94	13
	0,700	0,16334	1,693	1,693	62	10
0,900	0,800	0,14524	3,631	3,631	318	46
	0,750	0,16596	2,680	2,680	155	25
	0,700	0,18617	2,181	2,181	94	17

Продолжение табл. 3

P_0	P_1	α	b_1	b_2	N_0	c_0
0,870	0,750 0,700	0,18498 0,20634	3,670 2,794	3,670 2,794	267 143	49 29
0,850	0,750 0,700	0,19680 0,21882	4,630 3,318	4,630 3,318	406 193	79 42
$\alpha = 0,05; \quad \beta = 0,10$						
0,999	0,997 0,995 0,993 0,990 0,970	0,00192 0,00249 0,00309 0,00391 0,00859	2,045 1,395 1,153 0,9739 0,6562	2,626 1,791 1,481 1,250 0,8425	8866 3023 1665 936 194	16 7 5 3 1
0,997	0,993 0,990 0,970 0,950	0,00472 0,00582 0,01178 0,01687	2,644 1,859 0,9662 0,7867	3,395 2,387 1,240 1,010	5731 2301 308 143	27 13 3 2
0,995	0,990 0,970 0,950 0,930	0,00722 0,01400 0,01970 0,02496	3,224 1,239 0,9585 0,8318	4,140 1,591 1,231 1,068	5590 428 183 109	40 6 3 2
0,993	0,970 0,950 0,930	0,01585 0,02202 0,02768	1,522 1,120 0,9507	1,955 1,438 1,221	572 224 129	9 5 3
0,990	0,970 0,950 0,930 0,900	0,01824 0,02499 0,03113 0,03975	2,012 1,364 1,121 0,9389	2,583 1,751 1,439 1,205	870 294 160 88	16 7 5 3
0,970	0,930 0,900 0,870 0,850 0,800 0,750 0,700	0,04735 0,05857 0,06908 0,07583 0,09220 0,10819 0,12409	2,531 1,760 1,429 1,293 1,077 0,9469 0,8564	3,250 2,260 1,835 1,660 1,383 1,216 1,100	547 216 122 91 53 35 25	26 12 8 7 5 3 3
0,950	0,900 0,870 0,850 0,800 0,750 0,700	0,07236 0,08430 0,09193 0,11029 0,12807 0,14562	3,013 2,157 1,861 1,445 1,220 1,074	3,868 2,770 2,389 1,855 1,566 1,378	520 232 159 81 51 35	38 19 14 9 6 5
0,930	0,870 0,850 0,800 0,750 0,700	0,09726 0,10556 0,12544 0,14456 0,16334	3,283 2,642 1,875 1,513 1,294	4,215 3,392 2,408 1,942 1,662	472 284 123 71 47	46 30 15 10 7

Продолжение табл. 3

P_0	P_1	α	b_1	b_2	N_0	c_0
0,900	0,800	0,14524	2,776	3,564	239	35
	0,750	0,16596	2,049	2,631	116	19
	0,700	0,18617	1,668	2,141	70	13
0,870	0,750	0,18498	2,806	3,602	201	37
	0,700	0,20634	2,137	2,743	107	22
0,850	0,750	0,19680	3,540	4,545	305	60
	0,700	0,21882	2,537	3,257	145	32
$\alpha = 0,10; \quad \beta = 0,10$						
0,999	0,997	0,00182	1,996	1,996	6578	11
	0,995	0,00249	1,362	1,362	2243	5
	0,993	0,00309	1,126	1,126	1235	3
	0,990	0,00391	0,9505	0,9505	695	2
	0,970	0,00859	0,6405	0,6405	144	1
0,997	0,993	0,00472	2,581	2,581	4252	20
	0,990	0,00582	1,814	1,814	1707	9
	0,970	0,01178	0,943	0,943	229	2
	0,950	0,01687	0,7678	0,7678	106	1
0,995	0,990	0,00722	3,147	3,147	4147	29
	0,970	0,01400	1,209	1,209	317	4
	0,950	0,01970	0,9354	0,9354	135	2
	0,930	0,02496	0,8118	0,8118	81	2
0,993	0,970	0,01585	1,486	1,486	424	6
	0,950	0,02202	1,093	1,093	166	3
	0,930	0,02768	0,9278	0,9278	95	2
0,990	0,970	0,01824	1,964	1,964	645	11
	0,950	0,02499	1,331	1,331	218	5
	0,930	0,03113	1,094	1,094	119	3
	0,900	0,03975	0,9163	0,9163	65	2
0,970	0,930	0,04735	2,470	2,470	405	19
	0,900	0,05857	1,718	1,718	160	9
	0,870	0,06908	1,395	1,395	90	6
	0,850	0,07583	1,262	1,262	68	5
	0,800	0,09220	1,051	1,051	39	3
	0,750	0,10819	0,9242	0,9242	26	2
	0,700	0,12409	0,8358	0,8358	19	2
0,950	0,900	0,07236	2,941	2,941	386	27
	0,870	0,08430	2,106	2,106	172	14
	0,850	0,09193	1,816	1,816	118	10
	0,800	0,11029	1,410	1,410	60	6
	0,750	0,12807	1,190	1,190	38	4
	0,700	0,14562	1,048	1,048	26	3

Продолжение табл. 3

P_0	P_1	α	b_1	b_2	N_0	c_0
0,930	0,870	0,09726	3,204	3,204	350	34
	0,850	0,10556	2,579	2,579	211	22
	0,800	0,12544	1,830	1,830	91	11
	0,750	0,14456	1,477	1,477	52	7
	0,700	0,15334	1,263	1,263	35	5
0,900	0,800	0,14524	2,710	2,710	177	25
	0,750	0,16596	2,000	2,000	86	14
	0,700	0,18617	1,628	1,628	52	9
0,870	0,750	0,18498	2,738	2,738	149	27
	0,700	0,20634	2,085	2,085	79	16
0,850	0,750	0,19680	3,455	3,455	226	44
	0,700	0,21882	2,476	2,476	107	23
$\alpha = 0,10; \quad \beta = 0,20$						
0,999	0,997	0,00182	1,367	1,889	4261	8
	0,995	0,00249	0,9322	1,289	1453	3
	0,993	0,00309	0,7706	1,065	800	2
	0,990	0,00391	0,6507	0,8995	450	1
	0,970	0,00859	0,4384	0,6061	93	0
0,997	0,993	0,00472	1,767	2,443	2754	13
	0,990	0,00582	1,242	1,717	1106	6
	0,970	0,01178	0,6455	0,8925	148	1
	0,950	0,01687	0,5256	0,7266	69	1
0,995	0,990	0,00722	2,154	2,978	2687	19
	0,970	0,01400	0,8277	1,144	205	3
	0,950	0,01970	0,6403	0,8853	88	1
	0,930	0,02496	0,5557	0,7683	52	1
0,993	0,970	0,01585	1,017	1,406	275	4
	0,950	0,02202	0,7482	1,034	107	2
	0,930	0,02768	0,6351	0,8781	62	1
0,990	0,970	0,01824	1,344	1,858	418	7
	0,950	0,02499	0,9112	1,260	141	3
	0,930	0,03113	0,7489	1,035	77	2
	0,900	0,03975	0,6272	0,8672	42	1
0,970	0,930	0,04735	1,691	2,338	262	12
	0,900	0,05857	1,176	1,626	104	6
	0,870	0,06908	0,9549	1,320	58	4
	0,850	0,07583	0,8637	1,194	44	3
	0,800	0,09220	0,7197	0,995	25	2
	0,750	0,10819	0,6326	0,8746	17	1
	0,700	0,12409	0,5722	0,791	12	1

Продолжение табл. 3

P_0	P_1	a	b_1	b_2	N_0	c_0
0,950	0,900	0,07236	2,013	2,783	250	18
	0,870	0,08430	1,441	1,993	111	9
	0,850	0,09193	1,243	1,719	76	7
	0,800	0,11029	0,9653	1,335	39	4
	0,750	0,12807	0,8149	1,127	24	3
	0,700	0,14562	0,7172	0,9916	17	2
0,930	0,870	0,09726	2,193	3,032	227	22
	0,850	0,10556	1,765	2,440	136	14
	0,800	0,12544	1,253	1,732	59	7
	0,750	0,14456	1,011	1,397	34	5
	0,700	0,16334	0,8647	1,195	22	3
0,900	0,800	0,14524	1,855	2,664	114	16
	0,750	0,16596	1,369	1,893	56	9
	0,700	0,18617	1,114	1,540	33	6
0,870	0,750	0,18498	1,875	2,592	96	18
	0,700	0,20634	1,427	1,974	51	10
0,850	0,750	0,19680	2,365	3,270	146	29
	0,700	0,21882	1,695	2,344	69	15

4. Значения требуемых характеристик плана ПП

P	$L (P/ПП)$		$M_P (€/ПП)$	
	точно	приближенно	точно	приближенно
0,90	0,963	0,951	37,8	37,1
0,80	0,355	0,333	55,1	50,1
0,6655	0,00230	0,00227	16,4	14,8

тии изделий при контроле P -доли изделий в партии, показатели которых удовлетворяют установленным требованиям по надежности.

ПЛАНЫ КОНТРОЛЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ ТИПА НАРАБОТКИ

Показатели надежности типа наработки τ изделия включают время между отказами, срок службы, время восстановления, срок сохраняемости

и др. Предполагается, что наработка τ является непрерывной случайной величиной с плотностью $f(t/\theta)$, принадлежащей некоторому известному семейству распределений $\mathcal{P}_\theta$, $\theta \in \Theta$. Когда известно семейство распределений $\mathcal{P}_\theta$, по двум контрольным уровням решается, как и ранее, задача проверки двух простых гипотез — $H_0: \theta = \theta_0$, $H_1: \theta = \theta_1$ при заданных рисках α и β . Ниже описываются планы контроля показателей надежности типа наработки, удовлетворяющие указанным двусторонним требованиям, когда

случайная величина τ имеет одно из следующих распределений: экспоненциальное, нормальное, логарифмическое нормальное, Вейбулла—Гнеденко. Рассматриваются одноступенчатые и вальдовские последовательные планы.

Одноступенчатые планы. Если τ — наработка до отказа имеет экспоненциальное распределение, то в результате испытаний изделий на надежность фиксируется T_{Σ} — суммарная наработка и $Y(T_{\Sigma})$ — число отказов за это время; при этом несущественно, является ли T_{Σ} временем испытания N восстанавливаемых изделий ($T_{\Sigma} = \sum_{i=1}^N T_i$) или временем испытания одного восстанавливаемого изделия. При фиксированном значении T_{Σ} случайная величина Y имеет распределение Пуассона следующего вида:

$$P_{\lambda}(Y = y) = \frac{(\lambda T_{\Sigma})^y}{y!} e^{-\lambda T_{\Sigma}}, \quad y = 0, 1, \quad (49)$$

Одноступенчатый план в случае экспоненциального распределения включает два параметра: T_{Σ} — фиксированное значение суммарной наработки и c — предельно допустимое число отказов. Пусть требуется по результатам испытаний по одноступенчатому плану $\Pi^1(T_{\Sigma}; c)$ принять в случае экспоненциального распределения (27) решение о значении математического ожидания, равного

$$T = M_{\lambda}(\tau) = \frac{1}{\lambda}. \quad (50)$$

При установленных двух контрольных уровнях проверяются простые гипотезы — $H_0: T = T_0$; $H_1: T = T_1$; $T_0 > T_1$ (или $H_0: \lambda = \lambda_0$; $H_1: \lambda = \lambda_1$; $\lambda_0 < \lambda_1$) при заданных значениях α и β . Когда $Y(T_{\Sigma})$ — общее число отказов за время T_{Σ} удовлетворяет условию $Y(T_{\Sigma}) \leq c$, принимается нулевая гипотеза (изделия принимаются), а при $Y(T_{\Sigma}) \geq r$ ($r = c + 1$) — контролирующая (изделия забраковываются).

Оперативная характеристика плана $\Pi^1(T_{\Sigma}; c)$ вычисляется по формуле

$$L(T/\Pi^1) = \sum_{y=0}^c \frac{\left(\frac{T_{\Sigma}}{T}\right)^y}{y!} e^{-\frac{T_{\Sigma}}{T}}, \quad T = \frac{1}{\lambda}. \quad (51)$$

Плану $\Pi^1(T_{\Sigma}; c)$ отвечает усеченный одноступенчатый план $\Pi_{uc}^1(T_{\Sigma}; r)$, $r = c + 1$, имеющий ту же самую оперативную характеристику и меньшее математическое ожидание времени испытаний изделий. При контроле по плану Π_{uc}^1 испытания изделий заканчиваются в следующих двух случаях:

1) когда суммарная наработка τ_{Σ} достигла T_{Σ} , а $y < r$ (изделия принимаются);

2) когда число отказов достигло r , а $\tau_{\Sigma} < T_{\Sigma}$ (изделия забраковываются). Табл. 5 позволяет при заданных значениях T_0/T_1 , α , β найти параметры $\frac{T_{\Sigma}}{T_0}$ и r плана Π_{uc}^1 . Как уже отмечалось, в случае экспоненциального распределения фиксируется не количество контролируемых изделий N , а суммарная наработка T_{Σ} .

Пример 13. Для контроля надежности электроприборов заданы два уровня математического ожидания наработки до отказа: $T_0 = 1000$ ч; $T_1 = 250$ ч при $\alpha = \beta = 0,05$. Требуется найти одноступенчатый план в случае экспоненциального распределения.

По табл. 5 при $T_0/T_1 = 4$; $\alpha = \beta = 0,05$ найдем, что ближайшему значению $T_0/T_1 = 4,032$ при $\alpha = \beta = 0,05$ отвечают $T_{\Sigma}/T_0 = 2,613$, $r = 6$. Суммарная наработка $T_{\Sigma} = 2,613 \cdot 1000 = 2613$ ч.

Контроль заканчивается, если суммарная наработка достигла 2613 ч, а число отказов меньше шести — изделия принимаются; если число отказавших приборов равно шести, а суммарная наработка меньше 2613 ч — изделия забраковываются.

Вопросы проверки гипотез о значениях параметров экспоненциальных

5. Усеченные одноступенчатые планы контроля показателей надежности типа наработки при экспоненциальном распределении

T_0/T_1 при β			r	$\frac{T_\Sigma}{T_0}$	T_0/T_1 при β			r	$\frac{T_\Sigma}{T_0}$
0,05	0,10	0,20			0,05	0,10	0,20		
$\alpha = 0,05$					$\alpha = 0,10$				
58,820	45,450	31,250	1	0,052	28,570	21,740	15,380	1	0,105
13,330	10,990	8,403	2	0,356	8,928	7,299	5,650	2	0,532
7,692	6,493	5,235	3	0,817	5,714	4,831	3,891	3	1,102
5,682	4,878	4,032	4	1,366	4,444	3,831	3,164	4	1,745
4,651	4,065	3,413	5	1,970	3,769	3,289	2,762	5	2,432
4,032	3,546	3,030	6	2,613	3,333	2,941	2,519	6	3,152
3,646	3,205	2,762	7	3,285	3,039	2,703	2,331	7	3,895
3,350	2,958	2,570	8	3,981	2,825	2,525	2,198	8	4,656
3,077	2,770	2,427	9	4,695	2,659	2,392	2,096	9	5,432
2,898	2,618	2,309	10	5,425	2,525	2,283	2,012	10	6,221
2,747	2,500	2,217	11	6,169	2,415	2,193	1,945	11	7,020
2,631	2,396	2,137	12	6,924	2,325	2,118	1,887	12	7,829
2,531	2,315	2,070	13	7,689	2,247	2,057	1,838	13	8,646
2,445	2,242	2,012	14	8,464	2,138	2,004	1,798	14	9,469
2,369	2,178	1,961	15	9,246	2,127	1,953	1,760	15	10,300
2,096	1,961	1,779	20	13,200	1,915	1,792	1,626	20	14,520
1,942	1,815	1,669	25	17,300	1,792	1,672	1,538	25	18,840
1,835	1,721	1,597	30	21,500	1,706	1,602	1,486	30	23,230

распределений подробно рассмотрены в работе [19].

Математическое ожидание τ среднего времени проведения испытаний при плане $\Pi^1_{yc}(T_\Sigma; r)$ — задается формулой $M_\lambda(\tau/\Pi^1_{yc}) =$

Объем выборки N , требуемый при двух контрольных уровнях, зависит от расстояния между гипотезами, характеризуемого величиной

$$= \frac{1}{\lambda} \sum_{y=0}^{r-1} y \frac{(\lambda T_\Sigma)^y}{y!} e^{-\lambda T_\Sigma} +$$
$$+ \frac{r}{\lambda} \left[1 - \sum_{y=0}^{r-1} \frac{(\lambda T_\Sigma)^y}{y!} e^{-\lambda T_\Sigma} \right],$$
$$\lambda = \frac{1}{T}. \tag{52}$$

$$\delta = \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma}, \quad \mu_0 > \mu_1.$$

Уменьшение времени испытаний будет существенным в случае забраковывания изделий по результатам испытаний.

В случае нормального распределения, когда дисперсия σ^2 известна, правила нахождения одноступенчатого плана приведены в примере 3.

Пример 14. Вычислить объемы выборок в случае нормального распределения при $\alpha = \beta = 0,05$; $\beta = 0,10$; $\beta = 0,20$ при некоторых значениях величины δ .

Результаты вычислений N по формулам (17) и (18) приведены ниже.

β	δ				
	0,6	0,8	1	1,5	2
0,05	30	17	11	5	3
0,10	24	14	9	4	3
0,20	17	10	6	3	2

Когда дисперсия нормального распределения σ^2 неизвестна, проверка двух простых гипотез — $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu = \mu_1$ по результатам наблюдений $T_1, T_2, \dots, T_N$ основывается на статистике

$$\frac{N(\bar{T} - \mu_j)}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (T_i - \mu_j)^2}}, \quad j = 0; 1, \quad (53)$$

имеющей распределение Стьюдента с N степенями свободы. Используя таблицы квантилей распределения Стьюдента, находим значения статистики (53), при которых принимается каждое из приведенных выше решений.

Если показателем надежности является дисперсия нормального распределения и σ_0^2 отвечает приемочному уровню показателя надежности, а σ_1^2 — браковочному уровню, то проверка простых гипотез — $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$, $H_1: \sigma^2 = \sigma_1^2$ проводится с помощью статистики

$$\frac{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (T_i - \bar{T})^2}{\sigma_j^2}, \quad j = 0; 1, \quad (54)$$

имеющей χ^2 -распределение с $(N-1)$ степенями свободы.

В случае логарифмически нормального распределения в формулах для проверки гипотез о параметре нормального распределения следует T_i заменить на $\ln T_i$, $i = 1, N$.

Вальдовские последовательные планы. Для построения вальдовского последовательного плана по заданным двум контрольным уровням согласно формулам (23)–(25) необходимо вычислить при каждом N логарифм отношения правдоподобия и сравнить его с граничными значениями:

$$-W(\alpha; \beta) = -\ln \frac{1-\alpha}{\beta};$$

$$W(\beta; \alpha) = \frac{1-\beta}{\alpha}.$$

Для экспоненциального, нормального, логарифмически нормального, Вейбулла—Гнеденко и других распределений нахождение логарифма отношения правдоподобия U_N не представляет трудностей, когда заданы значения параметров θ_0 и θ_1 (скалярных или векторных) при приемочном и браковочном уровнях показателя надежности. Рассмотрим более подробно случаи, когда показатель типа наработки имеет экспоненциальное и нормальное распределения.

При двух контрольных уровнях: $T_0, T_1, T_0 > T_1$, α, β в случае экспоненциального распределения логарифм отношения правдоподобия имеет следующий вид:

$$U(T_\Sigma, y) = y \ln \frac{T_0}{T_1} + \frac{T_\Sigma}{T_0} \left(1 - \frac{T_0}{T_1}\right), \quad (55)$$

где T_Σ — суммарная наработка, а y — число отказов при этой наработке.

Построенные на основе формул (23) и (24) прямые приемки и забраковки изделий по результатам испытаний дают соответственно выражения:

$$y = a_1 \frac{T_\Sigma}{T_0} - b_3; \quad (56)$$

$$y = a_1 \frac{T_\Sigma}{T_0} + b_4. \quad (57)$$

Здесь

$$a_1 = \frac{\frac{T_0}{T_1} - 1}{\ln \frac{T_0}{T_1}}; \quad b_3 = \frac{\ln \frac{1-\alpha}{\beta}}{\ln \frac{T_0}{T_1}};$$

$$b_4 = \frac{\ln \frac{1-\beta}{\alpha}}{\ln \frac{T_0}{T_1}}.$$

Пример 15. При двух контрольных уровнях по условиям примера 13 требуется найти параметры вальдовского последовательного плана $\Pi^n(a_1; b_3; b_4)$.

Простейшие вычисления при $T_0 = 1000$; $T_1 = 250$; $\alpha = \beta = 0,05$ дают

$$a_1 = \frac{\frac{1000}{250} - 1}{\ln \frac{1000}{250}} = 2,164; \quad b_3 =$$

$$= \frac{\ln \frac{1 - 0,05}{0,05}}{\ln 4} = 2,124;$$

$$b_4 = 2,124.$$

Напомним, что пересечение прямой (56) в ходе испытаний ведет к приемке изделий, а прямой (57) — к забраковке. Приемка изделий может иметь место и при $y = 0$, когда $T_{\Sigma} = \frac{b_3 T_0}{a_1}$.

Здесь такое решение можно принять при $T_{\Sigma} = 981,5$ ч.

Нередко прямая приемки (56) записывается формулой

$$y = a_1 \left(\frac{T_{\Sigma}}{T_0} - \frac{b_5}{T_0} \right); \quad \frac{b_5}{T_0} = \frac{\ln \frac{1 - \alpha}{\beta}}{\frac{T_0}{T_1} - 1}.$$

Оперативную характеристику и математическое ожидание времени испытаний в случае экспоненциального вальдовского последовательного плана Π^n (a_1 ; b_3 ; b_4) можно найти в соответствии с рекомендациями, приведенными в работе [12].

Усеченный вальдовский последовательный план $\Pi_{\text{ус}}^n$ при контроле наработки включает кроме указанных выше еще два параметра T_{Σ_0}/T_0 и r_1 . При усеченном плане контроль заканчивается и тогда, когда суммарная наработка равна T_{Σ_0} или число отказов достигло r_1 . При заданных T_0/T_1 , α , β для усеченных планов $\Pi_{\text{ус}}^n$ учитываются следующие параметры: a_1 , b_4 , r_1 , b_{Σ_0}/T_0 , T_{Σ_0}/T_0 .

Пусть случайная величина τ , имеющая нормальное распределение, является, например, временем восста-

новления изделия, а μ — математическое ожидание этой случайной величины. Заданы два контрольных уровня: μ_0 , μ_1 , α , β ($\mu_0 < \mu_1$) и требуется по результатам наблюдений $T_1, T_2, \dots, T_N$ принять решение о математическом ожидании времени восстановления изделия. Вальдовский последовательный план при известном значении дисперсии σ^2 основывается на логарифме отношения правдоподобия

$$U_N = \frac{1}{\sigma^2} \left[\frac{N}{2} (\mu_0^2 - \mu_1^2) - (\mu_0 - \mu_1) \sum_{i=1}^N T_i \right]$$

и задается уравнениями

$$\sum_{i=1}^N T_i = \frac{\mu_0 + \mu_1}{2} N + \frac{\sigma^2}{\mu_0 - \mu_1} \ln \frac{1 - \alpha}{\beta}; \quad (58)$$

$$\sum_{i=1}^N T_i = \frac{\mu_0 + \mu_1}{2} N - \frac{\sigma^2}{\mu_0 - \mu_1} \ln \frac{1 - \beta}{\alpha}. \quad (59)$$

При пересечении первой из прямых принимается гипотеза $H_0: \mu = \mu_0$ (изделие принимается), а при пересечении второй — $H_1: \mu = \mu_1$. Вальд [14] вывел приближенные формулы для нахождения оперативной характеристики $L(\mu/\Pi^n)$ и математического ожидания числа наблюдений $M_{\mu}(\xi/\Pi^n)$. Наибольшее значение $M_{\mu}(\xi/\Pi^n)$ можно характеризовать величиной $M_{\bar{\mu}} \times (\xi/\Pi^n)$, $\bar{\mu} = \frac{1}{2}(\mu_0 + \mu_1)$, приближенное значение которой вычисляется по формуле

$$M_{\bar{\mu}}(\xi/\Pi^n) = \frac{\ln \frac{1 - \alpha}{\beta} \ln \frac{1 - \beta}{\alpha}}{\delta^2}, \quad (60)$$

$$\delta = \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma}.$$

Пример 16. При $\alpha = \beta = 0,05$ и значениях δ из примера 14 найти M_d (ξ/Π^n) и сравнить это значение с объемом выборки N соответствующего

одноступенчатого плана. Результаты расчета по формуле (60) приведены ниже.

δ .	0,6	0,8	1	1,5	2
N при плане П ⁴	30	17	11	5	3
M_d (ξ/Π^n)	24,08	13,55	8,67	3,85	2,17

Рассмотренный пример иллюстрирует преимущества вальдовского последовательного плана в условиях, когда возможен последовательный контроль.

В случае логарифмически нормального распределения суммарную наработку в формулах (58) и (59) заменяют на логарифм этой суммарной наработки.

При двух контрольных уровнях: $\sigma_0^2, \sigma_1^2, \alpha, \beta$ построим вальдовский последовательный план для проверки гипотез о дисперсии нормального распределения — $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2, H_1: \sigma^2 = \sigma_1^2$ ($\sigma_0^2 < \sigma_1^2$), когда известно μ (математическое ожидание). Такие задачи проверки гипотез возникают, в частности, при контроле измерительной аппаратуры. Логарифм отношения правдоподобия, основанный на наблюдениях $X_1, X_2, \dots, X_N$, задается в этом случае выражением

$$U_N = N (\ln \sigma_0 - \ln \sigma_1) + \left(\frac{1}{2\sigma_0^2} - \frac{1}{2\sigma_1^2} \right) \sum_{i=1}^N (X_i - \mu)^2.$$

При выполнении неравенства $U_N \leq -W(\alpha; \beta)$ принимается нулевая гипотеза, а при $U_N \geq W(\beta; \alpha)$ эта гипотеза отвергается.

Если $-W(\alpha; \beta) < U_N < W(\beta; \alpha)$, то производится наблюдение $(N+1)$.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Доверительные интервалы и задача принятия решения о показателе надежности при двусторонних требованиях. Зададим требования к показателю R

надежности: $R_{пр}$ и $R_{бр}$ при рисках α, β ($R_{пр} < R_{бр}$). Требуется, используя доверительные границы, принимать решение о приемке или забраковке изделий по результатам контроля.

Вопросы использования доверительных интервалов подробно рассмотрены в работе [19]. Опишем решение одной из таких задач, следуя рекомендациям работы [48].

Предположим, что $R_{пр} < R_{бр}$ и существует монотонная функция от результатов наблюдений X и показателя надежности R , на основе которой строятся доверительные границы для R . Обозначим $\underline{R} = \underline{R}(X, \gamma_1), \bar{R} = \bar{R}(X, \gamma_2)$ — соответственно нижняя и верхняя доверительные границы с односторонними доверительными вероятностями γ_1 и γ_2 ($\gamma_1 = 1 - \alpha; \gamma_2 = 1 - \beta$). Пусть $\underline{R}(X, \gamma)$ и $\bar{R}(X, \gamma)$ являются монотонно возрастающими функциями от X и, кроме того, первая из них монотонно убывает, а вторая возрастает по γ .

Предположим, что X_0 — решение системы неравенств

$$\underline{R}(X, 1 - \alpha) \geq R_{пр}; \quad (61)$$

$$\bar{R}(X, 1 - \beta) \leq R_{бр}, \quad (62)$$

и такое решение существует. В этом случае интервал $[\underline{R}, \bar{R}]$ попадает внутрь интервала $[R_{пр}, R_{бр}]$. Решение о приемке принимается, если наблюдаемое значение X удовлетворяет условию $X \leq X_0$; при $X > X_0$ изделия забраковываются.

Пример 17. Пусть по результатам проведенных испытаний 25 приборов на продолжительность времени их настройки $T_1, T_2, \dots, T_{25}$ найдено значение $\bar{T}$. Предполагая, что случайная величина T имеет нормальное распределение с дисперсией $\sigma^2 = 1$, необходимо проверить гипотезу о математическом ожидании этого нормального распределения при следующих двусторонних требованиях: $\mu_0 = 20$; $\mu_1 = 22$; $\alpha = \beta = 0,025$. Решающее правило для проверки гипотез надлежит основывать на доверительных границах для μ .

Доверительные границы для μ стро-

ятся с помощью статистики $\frac{\sqrt{N}}{\sigma} (\bar{T} - \mu)$, имеющей стандартное нормальное распределение. Тогда неравенства (61), (62) для рассмотренного числового примера соответственно задаются соотношениями

$$\bar{T} - 1,96 \frac{1}{5} \geq 20; \quad \bar{T} + 1,96 \frac{1}{5} \leq 22.$$

Эти неравенства имеют многочисленные решения, в частности, можно положить $\bar{T}_0 = 21$. В этом случае при $\bar{T} \leq 21$ приборы принимаются, а при $\bar{T} > 21$ — забраковываются.

Глава 12. Контроль индивидуальных показателей безотказности восстанавливаемых изделий в процессе эксплуатации

В гл. 11 рассмотрены методы контроля групповых показателей надежности, т. е. показателей, характеризующих надежность всей совокупности изготовленных изделий (например, партии изделий).

Введение индивидуальных показателей надежности изделий обусловлено необходимостью защиты интересов потребителя каждого конкретного изделия и позволяет организовать контроль их надежности в процессе эксплуатации.

Для восстанавливаемых изделий правила, дающие потребителям возможность (право) возвращать изготовителю ненадежные изделия, сформулированы в терминах допустимого числа отказов в пределах гарантийных сроков и (или) наработок. Изделия, у которых число отказов оказывается больше, чем установлено в нормативно-технической документации, должны подлежать замене на новые, если потребитель считает нецелесообразным их дальнейшую эксплуатацию.

Предельные значения числа отказов должны определяться показателями безотказности изделий — средней наработки на отказ или вероятностью безотказной работы за заданную наработку.

Методика расчета числа отказов на основе норм на показатели безотказности предусматривает возможность продолжения контрольной эксплуатации за пределами гарантийных сроков, с тем чтобы более достоверно выявить ненадежное изделие. При этом оплата ремонтов изделия после окончания гарантийных обязательств поставщика осуществляется за счет потребителя по соответствующему договору с гарантийной мастерской или фирмой, осуществляющей техническое обслужива-

ние. Продолжительность и (или) наработку контрольной эксплуатации в определенных пределах устанавливает сам потребитель на основе указанной методики.

Введение такой контрольной эксплуатации рассматривается как предложение, расширяющее права потребителя, так как дает право последнему заменить ненадежное изделие за пределами гарантийного срока эксплуатации.

Методика предусматривает также защиту поставщика от ошибочных возвратов надежных изделий, т. е. изделий, у которых фактические значения показателей безотказности не ниже, чем установленные в стандартах или технических условиях на данный вид продукции. Теоретической основой методики является принцип распределения приоритетов (ПРП), рассмотренный в гл. 6. Она применима и в случае, когда контроль надежности осуществляется только в пределах гарантийных сроков и (или) наработок. При этом рассчитывается только предельно допустимое число отказов в течение гарантийного срока (наработки).

Планирование контрольной эксплуатации. Задача планирования контрольной эксплуатации восстанавливаемых изделий заключается в определении продолжительности контрольной наработки и критического числа отказов r_0 , достижение которого позволяет потребителю заменять данное изделие на новое.

Планы контрольной эксплуатации имеют вид

$$[NM(r_0, \tau_0)],$$

где $N = 1$, т. е. испытывается одно изделие, которое восстанавливается после каждого отказа, испытания про-

должаются до достижения r_0 отказов или наработки τ_a .

В случае, когда число отказов r (за наработку $\tau < \tau_a$) достигает r_0 , контрольная эксплуатация прекращается и принимается решение о несоответствии изделия требованию к индивидуальному показателю безотказности, т. е. решение о том, что изделие является браком и должно подлежать замене. При числе отказов r за наработку τ_a меньше r_0 изделие признается соответствующим требованию к показателю безотказности.

В соответствии с ПРП (см. гл. 6) выбор плана контрольной эксплуатации (r_0, τ_a) осуществляет потребитель, а неопределенность результатов контроля в данном случае относится в пользу изготовителя. Это учитывается следующим ограничением на вероятность забраковки надежного изделия в течение контрольной эксплуатации:

$$P_{\tau_a}(\chi(r) = 0/\theta = \theta_0) \leq \alpha, \quad (1)$$

где

$$\chi(r) = \begin{cases} 1, & r < r_0, \\ 0, & r \geq r_0 \end{cases} \quad (2)$$

является правилом принятия решений о соответствии или несоответствии изделия требованиям к безотказности: α — допускаемый уровень риска изготовителя (поставщика), задается в нормативно-технической документации на изделие; θ — показатель надежности; θ_0 — требование к показателю надежности.

Ограничение (1) определяет предельную зависимость между критическим числом отказов r_0 и контрольной наработкой τ_a , включающей в себя и гарантийную наработку τ_r .

Например, для экспоненциального распределения наработок между отказами имеют место следующие приближенные соотношения:

$$\text{где } r_0 = 1 \quad \tau_a \approx T_0 \alpha;$$

$$\text{для } r_0 = 2 \quad \tau_a \approx T_0 \sqrt{\alpha};$$

$$\text{для } r_0 = 3 \quad \tau_a \approx T_0 \sqrt{2\alpha},$$

где T_0 — требуемое значение средней наработки.

Назначая величину τ_a , потребитель стремится продлить срок эксплуатации, но при этом у него увеличиваются

затраты на ремонт. Поэтому естественной целью потребителя является минимизация функции своих суммарных затрат $Q(\tau_a, r_0/\theta)$ при ограничении $\theta < \theta_0$ на показатель надежности и ограничения (1) на риск поставщика.

Таким образом, задача планирования контрольной эксплуатации имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \min_{\tau_r \leq \tau_a \leq T_c} \max_{\theta < \theta_0} Q(\tau_a, r_0, \theta) \\ r_0 \geq 1, P_{\tau_a}(r \geq r_0/\theta = \theta_0) \leq \alpha \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

где T_c — назначенный ресурс (наработка контрольной эксплуатации ограничена сверху величиной назначенного ресурса).

В целевой функции задачи (3) необходимо учитывать значение показателя надежности изделия, которым будет заменено отказавшее. При полном отсутствии у потребителя данных о фактической средней надежности поставляемых ему изделий целесообразно принять $\theta = \theta_0$, т. е. считать, что при замене изделия будет поставлено надежное изделие.

В тех случаях, когда имеется оценка средней надежности поставляемых изделий, ее можно использовать в качестве значения показателя надежности изделия, заменяющего отказавшее.

Пример постановки задачи планирования контрольной эксплуатации. Примем стоимость восстановления изделия не зависящей от вида отказа, затраты потребителя пропорциональными числу отказов за время эксплуатации от момента окончания гарантийной наработки до истечения назначенного срока службы.

Считается, что замена изделия осуществляется в момент τ_a , и показатель надежности нового изделия равен заданному в технических условиях — θ_0 .

План контроля может быть многоступенчатым, но далее рассмотрение ограничено одноступенчатым планом и соответствующим правилом принятия решения:

$$\chi(n_1 + n_2) = \begin{cases} 1, & n_1 + n_2 < r_0, \\ 0, & n_1 + n_2 \geq r_0, \end{cases} \quad (4)$$

где n_1 и n_2 — число отказов данного изделия соответственно за гарантийную наработку $[0, \tau_r]$ и на интервале контрольной эксплуатации после гарантийной наработки $[\tau_r, \tau_3]$.

Суммарное число отказов в интервале эксплуатации изделий $[\tau_r, T_0]$ с учетом возможной замены равно:

$$N = n_2 \chi(n_1 + n_2) + n_3 \chi(n_1 + n_2) + n_4 (1 - \chi(n_1 + n_2)), \quad (5)$$

где n_3 и n_4 — число отказов на интервале $[\tau_3, T_0]$ соответственно данного и нового изделия.

Математическое ожидание N имеет вид

$$\begin{aligned} EN &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} n_2 \chi(n_1 + n_2) P \times \\ &\times (n_1, n_2) + \sum_{n_3=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} n_3 \chi(n_1 + \\ &+ n_2) P(n_1, n_2, n_3) + \\ &+ \sum_{n_4=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} n_4 (1 - \chi(n_1 + n_2)) \times \\ &\times P(n_1, n_2, n_4), \end{aligned} \quad (6)$$

где $P(n_1, n_2)$, $P(n_1, n_2, n_3)$ и $P(n_1, n_2, n_4)$ — совместные вероятности появления соответствующих величин отказов.

Если поток отказов без последствия, то случайные величины n_1 , n_2 , n_3 независимы; очевидно также, что n_4 тоже не зависит от n_1 , n_2 , n_3 и, следовательно,

$$\begin{aligned} EN &= \sum_{n_2=0}^{r_0-1} n_2 P(n_2) F_1(r_0 - n_2 - 1) + \\ &+ \sum_{n_3=0}^{\infty} n_3 P(n_3) \sum_{n_2=0}^{r_0-1} P(n_2) F_1(r_0 - \\ &- n_2 - 1) + \sum_{n_4=0}^{\infty} n_4 P(n_4) \left(1 - \right. \\ &\left. - \sum_{n_2=0}^{r_0-1} P(n_2) F_1(r_0 - n_2 - 1) \right), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{где } F_1(r_0 - n_2 - 1) = \sum_{n_1=0}^{r_0-1-n_2} P(n_1) -$$

функция распределения числа отказов на интервале $[0, \tau_r]$.

Для пуассоновских потоков отказов с интенсивностью отказов для первого изделия λ_1 , а для второго изделия λ_0 математическое ожидание

$$\begin{aligned} EN &= \lambda_1 (\tau_3 - \tau_r) F(r_0 - 2, \lambda_1 \tau_3) + \\ &+ (\lambda_1 - \lambda_0) (T - \tau_3) F(r_0 - 1, \lambda_1 \tau_3) + \\ &+ \lambda_0 (T - \tau_3), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{где} \\ F(r_0 - K, \lambda_1 \tau_3) &= \\ &= 1 - \frac{\Gamma(r_0 - K, \lambda_1 \tau_3)}{\Gamma(r_0 - K)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(r_0 - K, \lambda_1 \tau_3)}{\Gamma(r_0 - K)} &= 1 - \frac{1}{(r_0 - K - 1)!} \times \\ &\times \int_0^{\lambda_1 \tau_3} x^{r_0 - K - 1} e^{-x} dx \end{aligned}$$

$[\Gamma(n, Z), \Gamma(n)$ — соответственно обозначения неполной и полной гамма функции].

С учетом (8) задача планирования КЭ для пуассоновской модели потока отказов имеет вид

$$\begin{aligned} \min_{r_0, \tau_3, \lambda_1} \max \{ &\lambda_1 (\tau_3 - \tau_r) F(r_0 - \\ &- 2, \lambda_1 \tau_3) + (\lambda_1 - \lambda_0) (T - \tau_3) \times \\ &\times F(r_0 - 1, \lambda_1 \tau_3) + \lambda_0 (T - \tau_3) \}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$F(r_0 - 1, \lambda_0 \tau_3) \geq 1 - \alpha.$$

Решение данной задачи осуществляется численными методами.

Численные решения для типовых ситуаций в зависимости от конкретных данных дают значения τ_3 , близкие к T_0 , $r_0 \approx 1 - 5$.

Вывод. При контроле в процессе эксплуатации индивидуальных средних показателей безотказности восстанавливаемых изделий критическое число отказов, определяющее брак по показателю безотказности, находится как параметр оптимального плана контроля, осуществляемого потребителем.

Величины критического числа отказов и продолжительности контроля, рассчитанных по ПРП, зависят от нормируемого значения показателя надежности, величины риска изготовителя и срока службы изделий.

Глава 13. Планирование испытаний и контроль надежности по одному контрольному уровню

Предварительные замечания. В рассматриваемом случае в качестве исходных данных для планирования испытаний используются требуемый уровень R_T контролируемого показателя R надежности и допустимое значение β риска β_0 потребителя:

$$\beta_0 = P(\underline{R}_{1-\beta} \geq R_T | R_T \geq R),$$

а условие приемки имеет вид

$$\underline{R}_{1-\beta} \geq R_T, \quad (1)$$

где $\underline{R}_{1-\beta}$ — статистика, представляющая собой $(1 - \beta)$ -нижнюю границу для R . Если условие (1) не выполняется, принимается решение о доработке испытываемой системы.

ПЛАНИРОВАНИЕ БИНОМИАЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ

Рассматривается система, состоящая из одного элемента, надежность которой на заданном рабочем интервале времени $[0, t_0]$ в режиме ε_0 характеризуется показателем $R = R(t_0, \varepsilon_0)$ — вероятностью безотказной работы в указанных условиях. Требования по надежности заданы в виде нормативного значения R_T для R и допустимого значения β риска β_0 потребителя. В табл. 1 приведены расчетные формулы для выбора объема (времени) N_0 биномиальных испытаний, учитывающие следующие возможности сокращения затрат на испытания:

введение резервных образцов системы, каждый из которых может выполнить ее задачи на интервале $[0, t_0]$;

осуществление форсированных испытаний в режиме ε^* с коэффициен-

том κ утяжеления (см. гл. 7, определение 1);

проведение испытаний на интервале времени $[0, \eta_0, t_0]$, отличном от рабочего интервала $[0, t_0]$.

Если рассматриваемая система, в свою очередь, является элементом более крупной системы и имеет известный коэффициент u функциональной избыточности (см. гл. 14), то сокращение объема (времени) испытаний возможно также за счет учета информации относительно значения $u \in [0, P_T]$. При этом формулы, приведенные в табл. 1, следует использовать при замене значения P_T на число

$$\tilde{P}_T = \frac{P_T - u}{1 - u}. \quad (2)$$

Случай $\nu = \kappa = \eta_0 = 1$, $u = 0$ соответствует ситуации, когда испытания проводятся на рабочем интервале времени $[0, t_0]$, в номинальном режиме ε_0 , а система не обладает функциональной и структурной избыточностью.

Наибольшей общностью обладает схема испытаний Бернулли или биномиальный план испытаний. Здесь они могут проводиться в объеме N_0 испытаний, или на N_0 образцах системы, или на одном ее образце, если не происходит накопления повреждений и не осуществляются доработки или другие воздействия, нарушающие допущение о постоянстве ВБР системы в каждом из N_0 независимых испытаний. При этом ВБР системы определяется в общем виде: $P = P(A)$, где A — произвольное событие, состоящее в безотказной работе системы на $[0, t_0]$ в режиме ε_0 . Результатом отмеченной общности БП являются весьма большие объемы ис-

1. Выбор минимально необходимого объема (времени) N_0 проведения биномиальных испытаний [66]

План испытаний	Расчетные формулы
БП на интервале $[0, t_0]$ времени в номинальном режиме ε_0	$N_0 = \ln \beta / \ln P_T$ при допустимом числе отказов $l_d = 0$. При $l_d > 0$ число N_0 — наименьшее значение N из неравенства $f_2(N, l_d, 1 - \beta) \geq P_T$
БПО при тех же условиях	$N_0 = \frac{1}{\beta} - 1 \text{ при } l_d = 0;$ $N_0 = \frac{2}{\beta} - 1 \text{ при } l_d = 1$
БП на интервале $[0, \eta_0 t_0]$ в форсированном режиме ε^* с коэффициентом κ утяжеления и с коэффициентом η_0 изменения времени испытаний по сравнению с t_0 . При эксплуатации системы допускается ее резервирование введением дополнительных $\nu - 1$ ее экземпляров. Предполагаются выполненными допущения табл. 1, гл. 7	$N_0 = \frac{\ln \beta}{s \nu \ln P'_T} \text{ при } l_d = 0,$ где $s = \kappa \eta_0$; $P'_T = 1 - (1 - P_T)^{\frac{1}{\nu}}$ При $l_d > 0$ N_0 — наименьшее значение N из неравенства $f_2(N, l_d, 1 - \beta) \geq P'^{s \nu}_T$
БПО при тех же условиях. Предполагаются выполненными допущения табл. 2, гл. 7	$N_0 = \frac{1}{\beta^{1/s'}} - 1 \text{ при } l_d = 0;$ $N_0 = \frac{2}{\beta^{1/s'}} - 1 \text{ при } l_d = 1,$ где $s' = \kappa \eta_0 / (1 - u)$; $u \in [0, P_T]$ — коэффициент функциональной избыточности системы (см. гл. 14); $\beta = \beta(P_T)$

пытаний, необходимые для подтверждения высоких требований по надежности.

Наиболее типичным случаем использования БП является ситуация, при которой одновременно или друг за другом испытываются N_0 образцов системы, так как при испытаниях одного ее образца, как правило, происходит накопление повреждений, исключающее возможность выполнения допущений схемы Бернулли.

Пример 1. Заданы требуемое значение $P_T = 0,99$ вероятности P безотказной работы системы на интервале $[0, t_0]$ в номинальном режиме ε_0 и допустимое значение $\beta = 0,01$ риска потребителя. Требуется найти минимально необходимый объем N_0 испытаний, проводимых по БП на N_0 образцах системы, если допустимое число отказов равно $l_d = 0$, а также для случая, когда $l_d = 1$. Каждое из планируемых испытаний проводится

на рабочем интервале $[0, t_0]$ в номинальном режиме e_0 . Таким образом, в условиях примера $v = \kappa = \eta_0 = 1$, $u = 0$.

Решение. Используя соотношения, приведенные в табл. 1, находим вначале объем N_0 безотказных испытаний (для $l_d = 0$):

$$N_0 = \frac{\ln \beta}{\ln P_T} = \frac{\ln 0,01}{\ln 0,99} = 460.$$

При допустимом числе отказов $l_d = 1$ рассмотрим неравенство

$$f_2(N, 1, 0,99) \geq 0,99,$$

разрешая его относительно N с помощью табл. 1 приложения. В результате получаем $N_0 = 800$.

Отметим, что риск потребителя β зависит от нормативного значения P_T . Приблизненно $\beta \approx 1 - P_T$, т. е. числа β и $1 - P_T$ должны иметь один и тот же порядок. Стремясь к сокращению объема испытаний и имея соответствующую техническую возможность, в ряде случаев целесообразно ввести дополнительные (резервные) экземпляры системы. Это позволяет в решении задачи, для которой предназначена исходная система, использовать любой из v ее экземпляров. Если условия их безотказной работы независимы, то при сохранении всех других условий применения БП могут быть использованы соотношения, приведенные в табл. 1, из которых следует возможность резкого сокращения объема испытаний при введении структурной избыточности системы.

Пример 2. В условиях примера 1 для целей повышения надежности системы вводится резервирование одним ее дополнительным экземпляром ($v = 2$). Требуется установить, как должны быть скорректированы численные результаты примера 1, соответствующие случаю $v = 1$.

Решение. Используя табл. 1, для $l_d = 0$ находим

$$N_0 = \frac{\ln \beta}{v \ln P_T'}, \quad P_T' = 1 - (1 - P_T)^{1/v} = 0,90;$$

$$N_0 = \frac{\ln 0,01}{2 \ln 0,9} = 23,$$

откуда следует, что каждый из $v = 2$ экземпляров системы должен пройти $N_0 = 23$ безотказных испытаний (или один экземпляр $N_0 = 46$ безотказных испытаний) для того, чтобы можно было принять положительное решение о соответствии системы предъявляемым требованиям по надежности.

При $l_d = 1$ рассмотрим неравенство

$$f_2(N; 1; 0,99) \geq 0,90^2 = 0,81,$$

разрешая его относительно N с помощью табл. 1 приложения. Получаем следующий результат: при $l_d = 1$ каждый из $v = 2$ экземпляров системы должен пройти не менее чем $N_0 = 32$ испытаний; допускается, что один из них может иметь отказ (l_d — допустимое число отказов для системы с учетом резервирования).

Пример 3. В условиях примера 2 дополнительно известно, что рассматриваемая система входит в состав более крупной системы и имеет коэффициент функциональной избыточности $u = 0,70$, т. е. вероятность отказа этой более крупной системы при выходе из строя исходной системы, для которой планируются испытания, равна 0,30. Требуется установить, как изменятся результаты расчетов, проведенных выше, с учетом новой информации.

Решение. По формуле (2) находим уточненное значение $\tilde{P}_T$ нормативного уровня P_T : $\tilde{P}_T = (0,99 - 0,70)/(1 - 0,70) = 0,967$, а также соответствующее значение

$$P_T' = 1 - (1 - \tilde{P}_T)^{1/v} = 1 - 0,033^{1/2} = 0,820,$$

для которого при $l_d = 0$ и 1 получаем $N_0 = 12$ и $N_0 = 18$ соответственно вместо $N_0 = 23$ и $N_0 = 32$.

Расчеты подобного рода указывают на то, что учет значений коэффициентов функциональной избыточности может привести к существенному сокращению объема испытаний. Напротив, если не принимать во внимание функциональную избыточность системы, то можно неоправданно завысить минимально необходимый объем испытаний. Вместе с тем следует иметь

в виду, что если система не обладает функциональной избыточностью, эффект сокращения объема испытаний не достигается.

Используя БП испытаний, рассмотрим числовую иллюстрацию того, как можно сократить их объем путем проведения испытаний на интервале времени $[0, \eta_0 t_0]$, $\eta_0 > 1$, большем, чем рабочий интервал $[0, t_0]$.

В данном случае возможность такого сокращения достигается не только техническим усложнением схемы испытаний, но и принятием дополнительных допущений, снижающих общность БП. К числу этих допущений относятся следующие:

ВБР системы выражается не в общем виде $P = P(A)$, а конкретизируется и определяется как вероятность того, что наработка $\tau = \tau(\epsilon_0)$ до отказа будет не меньше фиксированного числа t_0 , т. е. $P = P(\tau > t_0) = 1 - F(t_0)$, где F — функция распределения случайной величины τ ;

на интервале $[0, \eta_0 t_0]$, $\eta_0 \geq 1$ испытаний система считается стареющей (см. определение 5, гл. 7). При выполнении этих дополнительных предположений в БП объем испытаний уменьшается в η_0 раз.

Пример 4. Дополнительно к условиям примера 2 известно, что каждое из испытаний проводится по БП на интервале $[0, 2t_0]$ времени, вдвое превышающем по продолжительности рабочий интервал $[0, t_0]$. Требуется найти минимально необходимый объем N_0 испытаний при допустимом числе отказов на $[0, \eta_0 t_0]$, равном нулю, т. е. при $I_d = 0$ на $[0, \eta_0 t_0]$.

Решение. Используя табл. 1, находим

$$N_0 = \frac{\ln \beta}{\eta_0 v \ln P'_\tau} = \frac{\ln 0,01}{4 \ln 0,90} = 12.$$

Пример 5. Пусть при выполнении допущений табл. 1, оговоренных в примерах 1—4, дано: $v = 2$; $\eta_0 = 1,5$; $u = 0,7$. Тогда

$$N_0 = \frac{\ln \beta}{3 \ln 0,82} = 8 \text{ при } I_d = 0.$$

Расчет производился с использованием результатов, полученных в примере 3.

Используя, как и выше, БП испытаний, рассмотрим числовую иллюстрацию того, как можно сократить их объем путем проведения форсированных испытаний на интервале $[0, \eta_0 t_0]$ с коэффициентом $\kappa \geq 1$ утяжеления. В данном случае возможность сокращения достигается ценой принятия дополнительных допущений, снижающих общность БП. К числу этих допущений относятся следующие.

1. ВБР системы выражается не в общем виде $P = P(A)$, а конкретизируется и определяется как вероятность того, что на интервале $[0, t_0]$ в номинальном режиме ϵ_0 действующая нагрузка $H(t, \epsilon_0) > 0$ не превысит несущую способность $\Pi(t, \epsilon_0)$, т. е.

$$P = P(H(t, \epsilon_0) < \Pi(t, \epsilon_0), 0 \leq t \leq t_0) = P(h > 1)$$

или

$$P = P(h > 1) = 1 - G(1) = P(\tau > t_0) = 1 - F(t_0), \quad (3)$$

где

$$h = h(t_0, \epsilon_0) = \min_{0 \leq t \leq t_0} \frac{\Pi(t, \epsilon_0)}{H(t, \epsilon_0)}$$

— запас системы по несущей способности на $[0, t_0]$ в режиме ϵ_0 ; τ — момент первого пересечения процессов $H(t, \epsilon_0)$ и $\Pi(t, \epsilon_0)$, т. е. τ — наработка системы до отказа; G и F — функции распределения случайных величин h и τ .

2. Конкретный вид функции G распределения не известен, но предполагается, что она содержится в классе ВСФИ-распределений.

3. При $\eta_0 > 1$ система считается стареющей на $[0, \eta_0 t_0]$, а при $\eta_0 < 1$ — молодеющей на этом же интервале времени (см. определения 5 и 6, гл. 7).

При выполнении сформулированных предположений в БП объем испытаний уменьшается в $s = \kappa \eta_0$ раз, если $\eta_0 > 1$. При $\eta_0 < 1$ может оказаться, что $s < 1$, и тогда объем испытаний возрастает по сравнению со случаем, когда они проводятся на рабочем интервале $[0, t_0]$, продолжительность которого в $1/\eta_0$ превышает продолжительность интервала испытаний.

Пример 6. В условиях примера 1 дополнительно известно, что система функционирует на заданном интервале $[0, t_0]$ в номинальном режиме ε_0 , а испытывается на меньшем интервале $\left[0, \frac{1}{4}t_0\right]$; $\eta_0 = \frac{1}{4}$ в форсированном режиме ε^* с коэффициентом утяжеления $\kappa = 2$. Известно также, что на $[0, t_0]$ система является молодой, причем предусматривается ее резервирование ($v = 2$). ВБР системы при $v = 1$ находится по формуле (3). Установлено, что все допущения, оговоренные выше относительно использования формулы (3) и схемы форсированных испытаний, выполняются.

Требуется найти объем испытаний на $\left[0, \frac{1}{4}t_0\right]$ в режиме ε^* , если допустимое число отказов на этом интервале равно $l_d = 0$ или 1, а коэффициент функциональной избыточности $u = 0,8$.

Решение. Из формул, приведенных в табл. 1, и соотношения (2) следует, что так как

$$\begin{aligned}\tilde{P}_T &= \frac{P_T - u}{1 - u} = \frac{0,99 - 0,80}{1 - 0,80} = \\ &= 0,95; \quad P'_T = 1 - (1 - 0,95)^{1/2} = \\ &= 0,78,\end{aligned}$$

то при $l_d = 0$ искомое значение

$$N_0 = \frac{\ln \beta}{\kappa v \eta_0 \ln P'_T} = \frac{\ln 0,01}{\ln 0,78} = 18.$$

При $l_d = 1$ рассмотрим неравенство

$$\begin{aligned}f_2(N; 1; 0,99) &\geq 0,78^{sv} = \\ &= 0,78^{\kappa \eta_0 v} = 0,78,\end{aligned}$$

разрешая которое с помощью табл. 1 приложения относительно N , находим $N_0 = 27$.

Во многих случаях на систему действует не одна, а несколько ($m > 1$) нагрузок $H_i(t, \varepsilon_{0i})$, по отношению к которым она имеет несущие способности $\Pi_i(t, \varepsilon_{0i})$ и запасы h_i по этим несущим способностям. Если величины h_i независимы при $i = 1, m$,

то ВБР системы находится из соотношения

$$\pi = \prod_{i=1}^m P(h_i > 1), \quad (4)$$

где π — дополнительное обозначение для ВБР системы, функционирующей на $[0, t_0]$ в режиме $\varepsilon_0 = (\varepsilon_{01}, \varepsilon_{02}, \dots, \varepsilon_{0m})$ при воздействии m нагрузок $H_i(t, \varepsilon_{0i})$.

Если испытания проводятся по БП в объеме N_i по каждой из нагрузок $H_i(t, \varepsilon_{0i})$ на интервалах $[0, \eta_{0i} t_0]$ времени в форсированных режимах ε_i^* , то при выполнении условий табл. 1 минимально необходимый объем N_{0i} безотказных испытаний находится по формулам табл. 1 при замене P_T на π_T .

Здесь

$$\begin{aligned}N_{0i} &= \frac{\ln \beta}{\kappa_i \eta_{0i} v_i \ln P'_{Ti}}; \quad P'_{Ti} = \\ &= 1 - \left(1 - \frac{\pi_T - u_i}{1 - u_i}\right)^{1/v_i}, \quad (5)\end{aligned}$$

где π_T — требуемое значение π ; $\beta = \beta(\pi_T)$; κ_i — коэффициент повышения нагрузки; u_i — коэффициент функциональной избыточности; v_i — кратность резервирования по i -й нагрузке. Использование формул (5) предполагает независимость исходов всех испытаний.

Пример 7. Система функционирует на заданном интервале времени $[0, t_0]$ в номинальном режиме ε_0 под воздействием $m = 3$ нагрузок; давление $H_1 = H_1(t, \varepsilon_0) > 0$, температура $H_2 = H_2(t, \varepsilon_0) > 0$ и влажность $H_3 = H_3(t, \varepsilon_0) > 0$, имея соответствующие несущие способности $\Pi_i(t, \varepsilon_0)$ и запасы $h_i = \min_t \Pi_i(t, \varepsilon_0) / H_i(t, \varepsilon_0)$, $0 \leq t \leq t_0$ по этим нагрузкам. ВБР системы на $[0, t_0]$ в режиме $\varepsilon_0 = (\varepsilon_{01}, \varepsilon_{02}, \varepsilon_{03})$ находится по формуле (4).

С целью сокращения объемов и времени испытаний предусматривается:

введение резервного устройства, которое включается в работу при выходе на $[0, t_0]$ системы из строя при воз-

действии нагрузки H_1 ; испытания по нагрузке H_1 ведутся в номинальном режиме ε_0 на рабочем интервале времени $[0, t_0]$, причем известно, что система не обладает функциональной избыточностью по нагрузке H_1 (здесь $v_1 = 2$; $u_1 = 0$; $\kappa_1 = \eta_{01} = 1$);

проведение форсированных температурных испытаний по нагрузке H_2 на интервале $[0, 2t_0]$, вдвое увеличенном по сравнению с рабочим интервалом $[0, t_0]$ и с коэффициентом $\kappa_2 = 2$ повышения температуры (здесь $v_2 = 1$; $u_2 = 0$; $\kappa_2 = 2$; $\eta_{02} = 2$);

проведение испытаний на повышенную влажность при $v_3 = 1$; $u_3 = 0,8$; $\kappa_3 = 2$; $\eta_{03} = 1$.

Требуется найти минимально необходимый объем безотказных испытаний по каждой из нагрузок, если требования к системе по надежности заданы в виде совокупности значений $\pi_T = 0,99$ и $\beta = 0,01$ при выполнении всех допущений табл. 1, а также допущений (5).

Решение. По формуле (5) находим

$$N_{01} = \frac{\ln 0,01}{2 \ln (1 - 0,01^{1/2})} = 23;$$

$$N_{02} = \frac{\ln 0,01}{2 \cdot 2 \ln 0,099} = 115;$$

$$N_{03} = \frac{\ln 0,01}{2 \ln \left(\frac{0,99 - 0,80}{1 - 0,80} \right)} =$$

$$= \frac{\ln 0,01}{2 \ln 0,95} = 92.$$

В примерах 1—7 рассмотрены различные модификации БП испытаний и даны числовые иллюстрации использования формул для выбора объемов испытаний (см. табл. 1).

Переходя к биномиальному плану испытаний с остановкой (БПО), отметим, что схема БПО (см. определение 2, гл. 7) уступает в общности БП испытаний в следующих отношениях:

в БПО предполагается последовательное (друг за другом) проведение испытаний до исчерпания их назначенного объема N при числе отказов $l = 0$ или до первого отказа при $l = 1$; одновременные испытания N

образцов системы в БПО не предусматриваются;

получаемые в БПО значения γ -нижних границ P для ВБР $P = P(t_0, \varepsilon_0)$ системы на $[0, t_0]$ в режиме ε_0 обладают определенной неустойчивостью; если в первом испытании возникает отказ ($N' = 0$), то $P = 0$.

Следует отметить также преимущества БПО.

1. Формулы табл. 1, относящиеся к БПО, справедливы не только при постоянстве ВБР от испытания к испытанию, но и в том случае, когда в процессе испытаний происходит накопление повреждений, т. е. когда

$$P(A_1 A_2 \dots A_k) \geq (P(A_k))^k,$$

где A_k — событие, состоящее в безотказной работе системы в k -м испытании, $k = \overline{1, N}$.

Здесь нормативное значение задается к ВБР в первом испытании; должны выполняться условия

$$P(A_1) \geq P_{1T}, \quad \beta = \beta(P_{1T}),$$

2. Формулы, приведенные в табл. 1, справедливы в случае, когда в процессе испытаний осуществляются доработки неухудшающего характера,

т. е. когда $P(A_1 A_2 \dots A_k) \leq (P(A_k))^k$ при $k = \overline{1, N}$. Здесь нормативное значение задается к ВБР в последнем испытании; должны выполняться условия

$$P(A_N) \geq P_{NT}, \quad \beta = \beta(P_{NT}).$$

В связи с такими особенностями схемы БПО она может быть использована как при испытаниях N образцов одной системы, так и при N испытаниях одного образца системы.

При безотказных испытаниях системы по БПО значение γ -нижней границы для ВБР в первом испытании ($\gamma = 1 - \beta$) при накоплении повреждений (для ВБР в последнем испытании при неухудшающих доработках) равно единице, если риск потребителя выбран как

$$\beta = \beta(P_{1T}) = 1/(N + 1),$$

где $u = 0$, $\eta_0 = \kappa = v = 1$.

Если $u \in [0, P_{1T}]$, $\eta_0 \geq 1$, $\kappa \geq 1$, $\nu \geq 1$ (или $u \in [0, P_{NT}]$), то при выполнении допущений табл. 1 вывод о том, что $P_{1-\beta} = 1$ для $l = 0$, следует при выборе [66]

$$\beta^{1/s'} = (\beta (P_{1T}))^{1/s'} = 1/(N + 1)$$

$$(\beta^{1/s'} = (\beta (P_{NT}))^{1/s'} = 1/(N + 1),$$

где $s' = \nu \kappa \eta_0 / (1 - u)$.

Для указанных условий ($l = 0$, $\beta^{1/s'} = 1/(N + 1)$) соотношение (1), т. е. неравенство $P_{1-\beta} \geq P_T$, выполняется при любом нормативном уровне P_T , для которого найден риск потребителя $\beta = \beta(P_T)$, где $P_T = P_{1T}$ или $P_T = P_{NT}$. Здесь уровень P_T для ВБР $P(t_0, \epsilon_0)$ задается лишь в неявной форме, а требование по надежности может быть задано в виде только одного значения $\beta \simeq 1 - P_T$.

Пример 8. Задано допустимое значение $\beta = 0,001$ риска потребителя. Требуется найти минимально необходимое время N_0 испытаний, исчисляемое в циклах, если испытания проводятся на одном образце системы и известно, что в процессе испытаний возможно накопление повреждений.

Каждый цикл испытаний реализуется на рабочем интервале $[0, t_0]$ времени в номинальном режиме ϵ_0 , причем система не обладает функциональной и структурной избыточностью, т. е. $u = 0$, $\nu = 1$, $\kappa = \eta_0 = 1$.

Решение. Используя формулы, приведенные в табл. 1, находим минимально необходимое время безотказных испытаний $N_0 = \frac{1}{\beta} - 1 = 999$ при условии $l_d = 0$.

Если допустимое число отказов $l_d = 1$, т. е. в последнем испытании допускается отказ, то $N_0 = 2/\beta - 1 = 1999$. Отметим, что при задании $\beta = 0,01$ время испытаний $N_0 = 99$ при $l_d = 0$ и $N_0 = 199$ при $l_d = 1$.

Пример 9. Пусть в условиях примера 8 дополнительно известно, что для целей повышения надежности системы вводится резервирование одним ее дополнительным экземпляром ($\nu = 2$). Требуется установить, как должны быть скорректированы численные результаты примера 8.

Решение. Используя формулы, приведенные в табл. 1, находим:

$$N_0 = \frac{1}{\beta^{1/\nu}} - 1 = 31 \text{ при } l_d = 0;$$

$$N_0 = 63 \text{ при } l_d = 1,$$

откуда следует, что каждый из $\nu = 2$ экземпляров системы должен пройти $N_0 = 31$ циклов безотказных испытаний (при одном экземпляре $N_0 = 62$) для того, чтобы можно было принять положительное решение о соответствии системы предъявляемым требованиям по надежности. При $l_d = 1$ каждый из $\nu = 2$ экземпляров системы должен пройти не менее 63 циклов испытаний ($N_0 = 63$); допускается, что один из них в последнем цикле может иметь отказ (здесь $l_d = 1$ — допустимое число отказов для системы с учетом резервирования).

Пример 10. В условиях примера 9 дополнительно известно, что система имеет коэффициент функциональной избыточности, отличный от нуля ($u = 0,5$). Требуется установить, как при этом изменятся результаты проведенных выше расчетов.

Решение. Используя формулы, приведенные в табл. 1, находим:

$$N_0 = \frac{1}{\beta^{(1-u)/\nu}} - 1 = \frac{1}{0,001^{0,25}} -$$

$$- 1 = 5 \text{ при } l_d = 0;$$

$$N_0 = 11 \text{ при } l_d = 1.$$

В схеме БПО, как и выше, учет функциональной избыточности может привести к существенному сокращению объемов и времени испытаний. Однако далеко не все системы обладают функциональной избыточностью, и в таком случае эффект сокращения не достигается.

В примерах 8—10 ВБР системы могла выражаться в произвольном виде $P = P(A)$, где A — некоторое событие, состоящее в безотказной работе системы на $[0, t_0]$ в режиме ϵ_0 . В последующих примерах используются дополнительные допущения, снижающие общность БПО.

Пример 11. В условиях примера 9 ВБР задается в виде $P = P(t_0, \epsilon_0) =$

$= P(\tau > t_0)$, а продолжительность каждого цикла испытаний увеличивается в $\eta_0 = 1,8$ раза. Известно, что система является стареющей на интервале $[0, \eta_0 t_0]$ времени (см. определение 5, гл. 7). Требуется найти минимально необходимое время испытаний в циклах при $l_d = 0$ и $l_d = 1$.

Решение. По условиям примера $u = 0$, $v = \kappa = 1$, что с помощью формул, приведенных в табл. 1, позволяет получить следующие числовые значения:

$$N_0 = \frac{1}{\beta^{1/\eta_0}} - 1 = \frac{1}{0,001^{0,56}} - 1 =$$

$$= 47 \text{ при } l_d = 0;$$

$$N_0 = 95 \text{ при } l_d = 1.$$

Пример 12. В условиях предыдущего примера принято решение о проведении на $[0, \eta_0 t_0]$ при $\eta_0 = 1,8$ форсированных испытаний с коэффициентом утяжеления $\kappa = 1,5$. Известно, что ВБР системы выражается в виде (3), причем на $[0, \eta_0 t_0]$ система является стареющей; все допущения, связанные с использованием формулы (3) и схемы форсированных испытаний (см. определение 1, гл. 7), выполняются.

Требуется найти минимально необходимое время испытаний в форсированном режиме ϵ^* при $l_d = 0$ и $l_d = 1$.

Решение. Используя формулы, приведенные в табл. 1, находим $s' = \kappa \eta_0 = 2,7$, откуда

$$N_0 = \frac{1}{\beta^{1/s'}} - 1 = 12 \text{ при } l_d = 0;$$

$$N_0 = 25 \text{ при } l_d = 1.$$

При испытаниях на интервале $[0, \eta_0 t_0]$, меньшем, чем рабочий ($\eta_0 < 1$), схема расчета не изменяется при условии, что система на $[0, t_0]$ является молодееющей. Отличие состоит в том, что число s' здесь может быть меньшим единицы, а время испытаний, минимально необходимое с точки зрения требований по надежности, возрастает.

Во многих случаях на систему действует не одна, а несколько нагрузок. Если ВБР системы выражается в виде соотношения (4), а π_T и $\beta = \beta(\pi_T)$ — требования по надежности на интер-

вале $[0, t_0]$ в режиме ϵ_0 , то при выполнении допущений табл. 1 объем (время) безотказных испытаний по каждой из нагрузок находится по следующим формулам:

$$N_{0i} = \frac{1}{\beta^{1/s'_i}} - 1, \quad s'_i =$$

$$= \kappa_i \eta_{0i} v_i / (1 - u_i),$$

где предполагается, что исходы всех испытаний независимы.

Пусть в более общем случае система составлена из m блоков, соединенных последовательно, а каждый блок содержит v_i элементов, соединенных параллельно, причем элементы системы независимы. Если i — номер блока, j — номер элемента в блоке, а P_{ij} — ВБР (i, j) -элемента на интервале $[0, t_0]$ времени в режиме ϵ_{0ij} , то ВБР системы в целом на $[0, t_0]$ в режиме $\epsilon_0 = [\epsilon_{0ij}]$ определяется как вероятность

$$\mathcal{P} = \prod_{i=1}^m \left(1 - \prod_{j=1}^{v_i} (1 - P_{ij}) \right).$$

Предположим, что (i, j) -элемент испытывается по БПО с параметром $s'_{ij} = \kappa_{ij} \eta_{0ij} v_{ij} / (1 - u_{ij})$. Если исходы всех испытаний независимы, то при выполнении допущений табл. 1 объем (время) безотказных испытаний (i, j) -элемента находится по формуле

$$N_{0ij} = \frac{1}{\beta^{1/s'_{ij}}} - 1, \quad (6)$$

где

$$s_{ij} = \kappa_{ij} \eta_{0ij} v_{ij} / (1 - u_{ij});$$

$\beta = \beta(\mathcal{P}_T)$ ($\mathcal{P}_T$ и β — требования по надежности к системе в целом).

Более подробно система такого типа (с последовательно-параллельным соединением элементов) рассмотрена в гл. 15.

Приведенные числовые иллюстрации показали, что схема БПО в ряде случаев оказывается более эффективной, чем схема БП. Однако эффективность БП можно существенно повысить, если воспользоваться так называемым суперутяжеленным режимом испытаний [66].

Пусть A_i — событие, состоящее в безотказной работе системы на $[0, t_0]$ в i -м испытании в номинальном режиме ϵ_0 , а A'_i — то же событие в режиме ϵ' . Режим ϵ' назовем суперутяжеленным, если выполняются следующие условия.

1. События A_i независимы при $i = \overline{1, N}$ и имеют равную вероятность $P = P(A_i)$; события A'_i независимы при $i = \overline{1, N}$ и имеют равную вероятность $P' = P(A'_i)$, причем P и P' неизвестны. В режиме ϵ' проводятся N испытаний по БП с регистрацией числа l' возникающих отказов.

2. Режим ϵ' обеспечивается при $\bigcup_{i=1}^N \bar{A}_i \subset \bigcup_{i=1}^N \bar{A}'_i$ или $\bigcup_{i=1}^N A'_i \subset \bigcap_{i=1}^N A_i$,

т. е. при возникновении хотя бы одного отказа в биномиальных испытаниях на $[0, t_0]$ в режиме ϵ_0 происходит отказ в каждом из N биномиальных испытаний на $[0, t_0]$ в режиме ϵ' . Эквивалентная формулировка: режим ϵ' обеспечивается таким, что при успешном исходе хотя бы одного из N испытаний на $[0, t_0]$ в режиме ϵ' все N испытаний на $[0, t_0]$ в режиме ϵ_0 оказываются безотказными.

Если режим ϵ' осуществляется, то выполняется следующее соотношение:

$$P_\gamma(t_0, \epsilon_0) = (1 - (1 - f_2(N, l', \gamma))^N)^{1/N},$$

где $P_\gamma(t_0, \epsilon_0)$ — статистика, представляющая собой γ -нижнюю границу для ВБР P системы на $[0, t_0]$ в номинальном режиме ϵ_0 ; $f_2(N, l', \gamma) = P_\gamma(t_0, \epsilon')$ — γ -нижняя граница для ВБР P' системы на $[0, t_0]$ в режиме ϵ' . Отсюда и из формулы (1) вытекает условие для нахождения числа N_0 испытаний, минимально необходимых при задании требований P_T и β по надежности для заданного числа l'_d допустимых отказов на $[0, t_0]$ в суперутяжеленном режиме ϵ' :

$$f_2(N, l'_d, 1 - \beta) \geq 1 - (1 - P_T^N)^{1/N}. \quad (7)$$

При $l'_d = 0$ условие (7) позволяет находить минимально необходимый объем $N = N_0$ безотказных испытаний и принимает вид

$$\beta \geq (1 - (1 - P_T^N)^{1/N})^N. \quad (8)$$

Пусть заданы значения $P_T = 0,995$ и $\beta = 0,008$. Тогда из формулы (8) при $l'_d = 0$ получаем $N_0 = 6$. С помощью табл. 1 приложения из выражения (7) можно найти также минимально необходимый объем биномиальных испытаний при $l'_d > 0$.

Таким образом, если система имеет достаточную избыточность, чтобы успешно функционировать в режиме ϵ' , то объем испытаний в этом режиме может быть существенно сокращен.

Пусть испытывается один образец системы. Тогда при выполнении допущений БП число N_0 , получаемое из (7) и (8), имеет смысл минимально необходимой наработки системы до отказа.

Наибольшую трудность в изложенной схеме суперутяжеленных испытаний представляет обеспечение режима ϵ' . Целесообразность его использования требует специального и тщательного анализа особенностей функционирования системы [66].

ПЛАНИРОВАНИЕ ОБЪЕМОВ ИСПЫТАНИЙ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ НАРАБОТКИ ДО ОТКАЗА

Требования по надежности заданы в виде нормативного значения P_T (браковочный уровень ВБР P) и допустимого значения риска β потребителя.

Предполагается, что при испытаниях образцов изделия измеряется наработка их до отказа, причем функция ее распределения принимается экспоненциальной, т. е. ВБР изделия за заданное время t_0 имеет вид

$$P(t_0) = \exp(-\lambda t_0) \text{ или } P(t_0) = \exp(-t_0/T), \quad (9)$$

где λ — интенсивность отказов, а $T = 1/\lambda$ — средняя наработка до отказа.

2. Минимально необходимый уровень суммарной наработки

План испытаний и суммарная наработка	Требуемое значение $S_{тр}$ суммарной наработки		Примечание
	при наличии отказов	при безотказных испытаниях	
$[NRt_{и}]$ $S_{\Sigma} = Nt_{и}$	При $d > 0$ $S_{тр} = \frac{t_0 \chi^2_{1-\beta}(2d+2)}{2 \ln(1/P_T)}$	При $d = 0$ $S_{тр} = \frac{t_0 \ln(1/\beta)}{\ln(1/P_T)}$	$\chi^2_{1-\beta}(\cdot)$ определяется по табл. 8 приложения
$[NRr]$ $S_{\Sigma} = Nt_r$	При $r > 1$ $S_{тр} = \frac{t_0 \chi^2_{1-\beta}(2r)}{2 \ln(1/P_T)}$	При $r = 1$ $S_{тр} = \frac{t_0 \ln(1/\beta)}{\ln(1/P_T)}$	

Если требования по надежности заданы в виде нормативного значения $T_{тр}$ (к показателю T), то, зная t_0 из равенства (9), можно найти соответствующее нормативное значение ВБР. Нормативный уровень к ВБР P_T пересчитывается в нормативный уровень показателя λ по формуле

$$\lambda_T = \frac{1}{t_0} \ln \frac{1}{P_T}$$

При сделанных предположениях объем испытаний при контроле ВБР изделия измеряется суммарной наработкой S_{Σ} выделенных на испытания образцов, определяется как

$$S_{\Sigma} = \begin{cases} Nt_{и} & \text{при плане } [NRt_{и}], \\ Nt_r & \text{при плане } [NRr]. \end{cases}$$

Если в процессе испытаний осуществляется восстановление отказавших образцов, то можно ограничиться рассмотрением лишь планов испытаний типа R . Планирование испытаний производится исходя из условий (1) приемки, которое в рассматриваемом случае принимает вид

$$\bar{\lambda}_{1-\beta} \leq \frac{1}{t_0} \ln \frac{1}{P_T},$$

где $\bar{\lambda}_{1-\beta}$ — ВДГ уровня $1 - \beta$ для показателя λ , или

$$S_{\Sigma} \geq S_{тр}, \tag{10}$$

где $S_{тр}$ — требуемый минимально необходимый уровень для S_{Σ} , зависящий от величин P_T , β , а также от допустимого числа отказов при испытаниях. Значения $S_{тр}$ в зависимости от плана испытаний приведены в табл. 2.

Планирование испытаний в рассматриваемом случае требует дополнительного выбора либо числа образцов N , выделяемых на испытания, либо продолжительности $t_{и}$ испытаний (при плане $[NRt_{и}]$). Зависимость $S_{\Sigma} = Nt_{и}$ имеет место лишь при экспоненциальном законе распределения наработки до отказа.

Пример 13. Требования к ВБР изделия за время t_0 заданы в виде: $P_T = 0,95$ и $\beta = 0,1$. Требуется определить число N образцов для контрольных испытаний, если задано число d ($d = 0$ или $d = 1$), а продолжительность испытаний не должна превышать $t_{и} = 3t_0$. Распределение наработки до отказа можно принять экспоненциальным.

Решение. Поскольку продолжительность испытаний ограничена величиной $t_{и} = 3t_0$, для контроля безотказности выбираем план $[NRt_{и}]$. Из табл. 2 по значениям $d = 0$, $\beta = 0,1$

с помощью табл. 8 приложения находим $S_{\text{тр}}$ (в единицах t_0):

$$S_{\text{тр}} = t_0 \frac{\ln(1/\beta)}{\ln(1/P_T)} \simeq 45t_0 \text{ при } d=0;$$

$$S_{\text{тр}} = \frac{t_0 \lambda_{0,9}^2 (4)}{2 \ln(1/0,95)} \quad 77,8t_0 \text{ при } d=1.$$

Следовательно, при $d=0$ необходимо обеспечить $S_{\Sigma} = Nt_0 \geq 45t_0$, т. е. выделить на испытания $N \geq 45t_0/t_0 = 15$ образцов, а при $d=1$ должно быть $S_{\Sigma} = Nt_0 \geq 77,8$, т. е. $N \geq 26$ образцов.

Если бы продолжительность испытаний не ограничивалась заранее, то можно было бы выбрать план испытаний $[NRr]$ при $r=1$ и из табл. 2 найти $S_{\text{тр}} = 45t_0$, т. е. для подтверждения требований по надежности достаточно выделить на испытания, например, $N=10$ образцов и обнаружить один отказ не ранее чем после наработки $t_1 = S_{\text{тр}}/N = 4,5t_0$.

ПЛАНИРОВАНИЕ ОБЪЕМОВ ИСПЫТАНИЙ В УТЯЖЕЛЕННЫХ РЕЖИМАХ

В ряде случаев имеется возможность проводить испытания опытных образцов изделия при повышенной нагрузке (по сравнению с эксплуатационной), т. е. в утяжеленных режимах.

Предполагается, что нагрузкой при испытаниях можно управлять и измерять ее величину, а о несущей способности изделия имеется лишь качественная информация — отказал при данной нагрузке образец или не отказал.

Одноступенчатая процедура испытаний. Предполагается, что условия работоспособности изделия на интересующий момент времени можно записать в виде $X_1 > X_2$ (в нормальном режиме), $X'_1 > X'_2$ (в утяжеленном режиме), либо в виде $X > a$ (в нормальном режиме), $X' > a'$ (в утяжеленном режиме).

Здесь X_1 , X'_1 (или X , X') — случайная величина несущей способности изделия соответственно в нормальном и утяжеленном режимах; $X_1 > X'_1$, $X > X'$; X_2 , X'_2 — случайная

величина нагрузки соответственно в нормальном режиме и утяжеленном; $X_2 < X'_2$; a и a' — допуск соответственно в нормальном режиме и утяжеленном; $a < a'$.

Введем следующие обозначения:

μ_i , μ'_i и μ , μ' — средние значения случайных величин соответственно X_i , X'_i и X , X' ($i=1, 2$);

v_i , v'_i и v , v' — коэффициенты вариаций случайных величин соответственно X_i , X'_i и X , X' ($i=1, 2$);

$\eta = \mu_1/\mu_2$ и $\eta' = \mu'_1/\mu'_2$ — условные запасы прочности изделия в нормальных и утяжеленных режимах;

$\kappa_1 = \mu_1/\mu'_1 \geq 1$ — коэффициент утяжеления, характеризующий «ослабление» изделия при испытаниях;

$\kappa_2 = a'/a \geq 1$ или $\kappa_2 = \mu'_2/\mu_2 \geq 1$ — коэффициенты утяжеления, характеризующие увеличение нагрузки при испытаниях.

Утяжеленный режим испытаний в общем случае характеризуется коэффициентом утяжеления

$$\kappa = \eta/\eta' = \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \begin{cases} \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{\mu'_2}{\mu'_1}; \\ \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{a'}{a}, \end{cases}$$

где верхнее выражение используется для модели «нагрузка—прочность», нижнее — для допусковой модели.

На практике чаще всего утяжеление происходит только за счет увеличения нагрузки с X_2 до X'_2 или допуска с a до a' . В этом случае $\kappa = \kappa_2 = \mu'_2/\mu_2$ или $\kappa = \kappa_2 = a'/a$.

Между величинами η' , η и κ существует следующая зависимость: $\eta = \eta' \cdot \kappa$, позволяющая осуществлять пересчет запасов прочности при заданном коэффициенте утяжеления режима испытаний; при этом предполагается, что при повышении нагрузки прочность не изменяется.

Зависимости, требуемые для решения задач планирования объема испытаний, приведем для случая, когда случайные величины X_i , X'_i , $i=1, 2$ в условиях безотказной работы $X_1 > X_2$, $X'_1 > X'_2$ имеют нор-

мальный закон распределения (применительно к модели отказов «нагрузка—прочность»).

Значение ВБР изделия в нормальном режиме определяется по формуле

$$P = \Phi \left(\frac{\eta - 1}{\sqrt{\eta^2 v_1^2 + v_2^2}} \right), \quad (11)$$

в утяжеленном режиме

$$P' = \Phi \left(\frac{\eta' - \kappa}{\sqrt{\eta'^2 v_1'^2 + \kappa^2 v_2'^2}} \right), \quad (12)$$

где $\Phi(\cdot)$ — функция Лапласа (см. табл. 7 гл. 10), причем

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt.$$

На основе соотношений (11), (12) можно решать следующие задачи.

ЗАДАЧА 1. Оценка ВБР по результатам утяжеленных испытаний.

Пусть известен коэффициент утяжеления κ , при котором проведены испытания N' образцов и получено d' отказов (в частности, $d' = 0$). Требуется оценить ВБР P изделия в нормальном режиме, если известны дополнительно значения (или их оценки сверху) для коэффициентов вариации v_1, v_2 и v_1', v_2' .

Приближенное решение этой задачи для различных случаев приведено в табл. 3, где даны выражения для P заданного уровня q . Для вычисления точечной оценки $\hat{P}$ можно использовать те же формулы, лишь вместо z_1 подставить $z_0 = \Phi^{-1}(1 - d'/N')$ при $d' \neq 0$ в случае нормального закона (при $d' = 0$ принимается $\hat{P} = 1$) или вместо P' подставить $\hat{P}' = 1 - d'/N'$ — в случае закона распределения Вейбулла—Гнеденко.

Пример 14. Используем условия безотказной работы: $X > a$ и $X' > a'$. В результате испытаний трех образцов ($N' = 3$) в утяжеленном режиме с коэффициентом утяжеления $\kappa = 1,4$ отказов не было ($d' = 0$).

Требуется найти НДГ при $q = 1 - \beta = 0,9$ для ВБР изделия, считая, что контролируемый параметр

(прочность) имеет: нормальный закон распределения; двухпараметрическое распределение Вейбулла—Гнеденко. Дополнительно известно, что $v \leq 0,1$ и $v' \leq 0,1$.

Решение 1. Из табл. 3 находим вначале

$$\begin{aligned} z_1 &= \Phi^{-1}[f_2(N', d', q)] = \\ &= \Phi^{-1}[(1 - q)^{1/N'}] = \Phi^{-1}(0,464) = \\ &= 0,09, \end{aligned}$$

а затем

$$\begin{aligned} P &= \Phi[(\kappa + z_1 v - 1)/v\kappa] = \\ &= \Phi[(1,4 - 0,09 \cdot 0,1 - 1)/0,1 \cdot 1,4] = \\ &= \Phi(2,92) = 0,998. \end{aligned}$$

Точечная оценка $\hat{P} = 1$ (так как $d' = 0$ и $\hat{P}' = 1$).

2. Из табл. 3 находим вначале

$$\begin{aligned} \delta &= \pi/v \sqrt{6} = 12; \quad \delta' = 12; \\ P' &= f_2(N', d', q) = f_2(3; 0; 0,9) = \\ &= (1 - 0,9)^{1/3} = 0,464, \end{aligned}$$

а затем, учитывая, что $\delta', \delta > 2,5$, определяем

$$P = \exp \left\{ - \frac{|\ln P'|}{(1,4)^{12}} \right\} = 0,986.$$

Точечная оценка $\hat{P}$ по-прежнему равна единице.

ЗАДАЧА 2. Планирование объема испытаний. Пусть известен коэффициент утяжеления κ , при котором предполагается проводить испытания. Цель испытаний — подтвердить требования по надежности, которые заданы в виде P_T и β (P_T — минимально допустимый уровень ВБР P ; β — допустимый уровень риска потребителя или $q = 1 - \beta$ — требуемая достоверность подтверждения).

Требуется назначить:

а) объем N' испытаний при допуске на число отказов d' (как правило, $d' = 0$ или 1), если дополнительно известны значения (или их оценки сверху) коэффициентов вариации v_1, v_2, v_1', v_2' и коэффициент утяжеления κ , при котором будут проводиться испытания;

б) коэффициент утяжеления κ при выделенном на испытания число об-

3. Интервальные оценки для ВБР изделия по результатам биномиальных испытаний в утяжеленном режиме

Модель отказов и закон распределения	Исходные данные (см. табл. 4)	НДГ уровня для показателя P	Примечание
Модель «нагрузка—прочность»: $X_2 < X_1$, $X'_2 < X'_1$; закон распределения X_i , X'_i , $i = 1, 2$ — нормальный	Верхние границы v_1, v_2 , v'_1, v'_2 коэффициентов вариаций; коэффициент утяжеления $\kappa = \frac{\mu'_2}{\mu_2} \cdot \frac{\mu_1}{\mu'_1} > 1$; результаты испытаний N', d'	$\underline{P} = \Phi [\underline{\eta} - 1] / \sqrt{\underline{\eta}^2 v_1^2 + \kappa^2 v_2^2},$ где $\underline{\eta} = \kappa \frac{1 + z \sqrt{(v'_1)^2 + (v'_2)^2 - z_1 (v'_1 v'_2)^2}}{1 - z_1^2 (v'_1)^2}$	$z_1 = \Phi^{-1} [f_2(N', d', q)],$ где $f_2(\cdot)$, $\Phi(\cdot)$ и $\Phi^{-1}(\cdot)$ определяются по табл. 1 и 7 приложения
Модель допусковая ($a < X$), ($a' < X'$); закон распределения X и X' : нормальный	Верхние границы v и v' коэффициентов вариаций; коэффициент утяжеления $\kappa = \frac{a'}{a} \cdot \frac{\mu_1}{\mu'_1} > 1$; результаты испытаний N', d'	$\underline{P} = \Phi [(\kappa + z_1 v - 1) / \sqrt{\kappa}]$	$z_1 = \Phi^{-1} [f_2(N', d', q)],$ $z_1 = \Phi^{-1} [(1 - q)^{1/N'}]$ при $d' = 0$
Вейбулла—Гнеденко	Верхние границы v и v' коэффициентов вариаций; коэффициент утяжеления $\kappa = \frac{a'}{a} \cdot \frac{\mu_1}{\mu'_1} > 1$; результаты испытаний N', d'	$\underline{P} = \exp \left\{ - \frac{ \ln P' ^{\delta'/\delta}}{\kappa^\delta} \left[\frac{\Gamma(1+1/\delta)}{\Gamma(1+1/\delta')} \right]^\delta \right\},$ $\delta > 0;$ $\underline{P} = \exp \left\{ - \frac{ \ln P' ^{\delta'/\delta}}{\kappa^\delta} \right\},$ при $\delta \geq \delta > 2,5$	$P' = f_2(N', d', q), \Gamma(\cdot)$ определяется по табл. 7 гл. 10; $\delta \simeq (\pi/v) \sqrt{6},$ $\delta' \simeq (\pi/v') \sqrt{6}$

разцов N' (и допустимом числе отказов d' , $d' = 0$ или 1), если известны величины v_1, v_2, v'_1, v'_2 .

Приближенное решение этой задачи в случае *a* приведено в табл. 4, а в случае *б* — в табл. 5.

В случае нормального закона распределения случайных величин $X_i, X'_i, i = 1, 2$ и планирования безотказных испытаний ($d' = 0$) приближенное решение задачи 2 можно определить по табл. 6 и 7.

Пример 15. В условиях задачи 2, *a* требуется определить минимальный объем испытаний, проводимых с коэффициентом утяжеления $\kappa = 1,3$ при $v = v' \leq 0,1$ для подтверждения требований $P_T = 0,99, \beta = 0,1$. Предполагается, что контролируемый параметр X имеет в случае *a* нормальный закон распределения; в случае *б* — закон распределения Вейбулла—Гнеденко.

В условиях задачи 2, *б* требуется определить коэффициент утяжеления κ , при котором успешными испытаниями $N' = 2$ образцов можно подтвердить те же требования $P_T = 0,99, \beta = 0,1$ при $v = v' = 0,1$. Предполагается, что контролируемый параметр X имеет по-прежнему либо нормальный закон распределения, либо закон распределения Вейбулла — Гнеденко.

Решение задачи 2, а. 1. Из табл. 4 находим сначала $z_T = \Phi^{-1}(0,99)$, а затем при $d' = 0$ определяем

$$N' \geq \ln 0,1 / \ln \Phi \{ [1 - 1,3(1 - 0,1 \cdot 2,33)] / 0,1 \} = 3,4, \text{ т. е. } N' = 4.$$

Это же значение N' можно найти из табл. 6 при $P_T = 0,99; v = v' = 0,1$ и $\kappa_1 = 1,28 < \kappa = 1,3$.

2. Из табл. 4 при $\delta \simeq (\pi/v) \sqrt{6} = 12, \delta' \simeq 12$ находим (для $d' = 0$)

$$N' \geq \frac{|\ln 0,1|}{(1,3)^{12} |\ln 0,9|} = 9,8, \text{ т. е.}$$

$$N' = 10.$$

Решение задачи 2, б. Расчеты проводятся аналогично решению задачи 2, *a* с использованием в этом случае табл. 5, а также табл. 6 и 7.

Изложенная выше методика оценки ВБР и планирования испытаний может быть использована для планов испытаний с измерением наработки до отказа. В этом случае заданное время работы $t = a$, а время испытаний $t_{\text{и}} = a' > t$ и коэффициент утяжеления испытаний $\kappa = t_{\text{и}}/t$.

Если по результатам испытаний N' образцов по биномиальной схеме в течение времени $t_{\text{и}}$ получено d' отказов и известна априорная информация о коэффициенте вариации v наработки до отказа, то по табл. 3 легко найти НДГ для ВБР $P(t)$ в случае нормального и Вейбулла—Гнеденко законов распределения наработки до отказа.

Пример 16. Наработка до отказа изделия подчиняется закону распределения Вейбулла—Гнеденко, причем параметр формы $\delta \geq 2$. Испытания в течение наработки $t_{\text{и}} = 2,5t_0$ (t_0 — заданное время работы) трех образцов ($N = 3$) закончились успешно (отказов не было).

Требуется найти НДГ уровня $q = 0,9$ для ВБР $P(t_0)$ изделия.

Решение. Так как число $\kappa = t_{\text{и}}/t_0 = 2,5$, то при $\delta' = \delta = 2$ находим сначала

$$P = f_2(N, 0, q) = (1 - q)^{1/N} = 0,464, \text{ а затем из табл. 3}$$

$$P = \exp \left\{ - \frac{|\ln P|}{\kappa^\delta} \left[\frac{\Gamma(1 + 1/\delta)}{\Gamma(1 + 1/\delta')} \right]^\delta \right\} = \\ = \exp \left\{ - \frac{|\ln 0,464|}{(2,5)^2} \right\} = 0,88.$$

Если бы испытания проводились в течение заданного времени t_0 , то по трем безотказным испытаниям НДГ уровня $q = 0,9$ для $P(t_0)$ была бы равна $P = 0,464$.

Последовательная процедура контроля надежности по результатам утяжеленных испытаний. Здесь изложены возможности использования метода максимума информации для оценки и последовательного контроля надежности (ВБР) на основе модели «нагрузка—прочность», когда параметры распределения прочности оцениваются по результатам испытаний с альтер-

4. Планирование объемов испытаний в утяжеленном режиме

Модель отказов и закон распределения	Исходные данные * (пояснения см. в табл. 3)	Требуемый объем N' испытаний (при заданном значении κ)		Примечание
		Отказы не допускаются ($d' = 0$)	Отказы допускаются ($0 < d' < N'$)	
Модель «нагрузка—прочность»: $X_2 < X_1$, $X'_2 < X'_1$; закон распределения X_i , X'_i , $i = 1, 2$ нормальный	v_1, v_2, v'_1, v'_2 ; $\kappa = \frac{\mu_1}{\mu'_1} \frac{\mu'_2}{\mu_2} > 1$	$N' \geq \frac{\ln \beta}{\ln \Phi \left[\frac{\eta_T - \kappa}{\sqrt{\eta_T^2 (v'_1)^2 + \kappa^2 (v'_2)^2}} \right]},$ где $\eta_T = (1 + z_T \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - z_T^2 v_1^2 v_2^2}) / (1 - z_T^2 v_2^2)$	$f_2(N', d', 1 - \beta) \geq \Phi \left[\frac{\eta_T - \kappa}{\sqrt{\eta_T^2 (v'_1)^2 + \kappa^2 (v'_2)^2}} \right],$	$z_T = \Phi^{-1}(P_T)$
Модель допусковая ($a < X$), ($a' < X'$); закон распределения X и X' : нормальный	v, v' ; $\kappa = \frac{a'}{a} \frac{\mu_1}{\mu'_1} > 1$	$N' \geq \frac{\ln \beta}{\ln \Phi \left[\frac{1 - \kappa(1 - vz_T)}{v'} \right]}$	$f_2(N', d', 1 - \beta) \geq \Phi \left[\frac{1 - \kappa(1 - vz_T)}{v'} \right]$	
Вейбулла—Гнеденко	v, v' ; $\kappa = \frac{a'}{a} \cdot \frac{\mu_1}{\mu'_1} > 1$; $\delta \simeq \pi/v \sqrt{6}$	$N' \geq \frac{ \ln \beta \theta}{\kappa^{\delta'} \ln P_T ^{\delta'/\delta}};$ $\theta = 1$ при $\delta' \geq \delta > 2,5$ ($v' \leq v < 0,4$)	$f_2(N', d', 1 - \beta) \geq \exp \{-\kappa^{\delta'} \ln P_T ^{\delta'/\delta \cdot \theta}\},$ $\theta = 1$ при $\delta' \geq \delta > 2,5$ ($v' \leq v < 0,4$)	$\theta = \left[\frac{\Gamma(1+1/\delta')}{\Gamma(1+1/\delta)} \right]^\delta;$ $\Gamma(\cdot)$ определяется по табл. 7, гл. 10

* При неизвестных границах изменения некоторых v_i , v'_i следует применять их верхние доверительные границы.

5. Планирование утяжеленного режима испытаний

Модель отказов и закон распределения	Исходные данные (пояснения см. в табл. 3)	Требуемое значение коэффициента утяжеления κ (при заданном значении N')		Примечание
		Отказы не допускаются ($d' = 0$)	Отказы допускаются ($0 < d' < N'$)	
Модель «нагрузка—прочность»: $X_2 < X_1,$ $X'_2 < X'_1;$ величины $X_i, X'_i,$ $i = 1, 2$ распределены нормально	$v_1, v_2, v'_1, v'_2;$ $\kappa = \frac{\mu_1}{\mu'_1} \frac{\mu'_2}{\mu_2} > 1$	$\kappa \geq \eta_T [1 - z^2 (v'_1)^2] / [1 + z \sqrt{(v'_1)^2 + (v'_2)^2 - z (v'_1 v'_2)^2}],$ где $\eta_T = [1 + z \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - z^2 v_1^2 v_2^2}] / (1 - z^2 v_1^2)$	$\kappa \geq \frac{1 - v' \Phi^{-1}(\beta^{1/N'})}{1 - v \Phi^{-1}(P_T)}$	$z = \Phi^{-1} [f_2(N', d', 1 - \beta)]$ при $d' \neq 0,$ $z = \Phi^{-1}(\beta^{1/N'})$ при $d' = 0;$ $z_T = \Phi^{-1}(P_T)$
Модель допусковая ($a < X$), ($a' < X'$); закон распределения X и X': нормальный	$v, v';$ $\kappa = \frac{a'}{a} \frac{\mu_1}{\mu'_1} > 1$	$\kappa \geq \frac{1 - v' \Phi^{-1}(\beta^{1/N'})}{1 - v \Phi^{-1}(P_T)}$	$\kappa \geq \frac{1 - v' \Phi^{-1}[f_2(N', d', 1 - \beta)]}{1 - v \Phi^{-1}(P_T)}$	при $d' = 0;$ $z_T = \Phi^{-1}(P_T)$
Вейбулла—Гнеденко	$v, v';$ $\kappa = \frac{a'}{a} \frac{\mu_1}{\mu'_1} > 1;$ $\delta \simeq \pi/v \sqrt[1/\delta]{6};$ $\delta' \simeq \pi/v' \sqrt[1/\delta]{6}$	$\kappa \geq \frac{ \ln \beta ^{1/\delta'} \theta}{(N')^{1/\delta'} \ln P_T ^{1/\delta}};$ $\theta = 1$ при $\delta' \geq \delta > 2,5$ $(v' \leq v < 0,4)$	$\kappa \geq \frac{ \ln f_2(N', d', 1 - \beta) ^{1/\delta'} \theta}{ \ln P_T ^{1/\delta}};$ $\theta = 1$ при $\delta' \geq \delta > 2,5$ $(v' \leq v < 0,4)$	$\theta = \frac{\Gamma(1 + 1/\delta)}{\Gamma(1 + 1/\delta')};$ $\Gamma(\cdot)$ определяется по табл. 7, гл. 10

6. Коэффициенты утяжеления χ при безотказных испытаниях для модели «нагрузка—прочность»

ν_1, ν_1'	$\frac{P_T}{P}, \frac{P}{P_T}$ ($\gamma = 0,9$)	$\nu_2 = \nu_2' = 0,05$					$\nu_2 = \nu_2' = 0,10$					$\nu_2 = \nu_2' = 0,15$				
		Число испытаний					Число испытаний					Число испытаний				
		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
0,05	0,9000	1,20	1,13	1,10	1,08	1,07	1,33	1,21	1,16	1,13	1,11	1,51	1,31	1,22	1,18	1,15
	0,9500	1,23	1,16	1,13	1,11	1,10	1,38	1,26	1,20	1,17	1,15	1,58	1,37	1,29	1,24	1,20
	0,9900	1,29	1,22	1,19	1,17	1,15	1,48	1,35	1,29	1,25	1,23	1,73	1,50	1,40	1,35	1,31
	0,9950	1,32	1,24	1,21	1,19	1,17	1,52	1,38	1,32	1,29	1,26	1,78	1,54	1,45	1,39	1,36
	0,9990	1,37	1,29	1,25	1,23	1,22	1,60	1,45	1,39	1,35	1,32	1,90	1,64	1,54	1,48	1,44
	0,9995	1,39	1,31	1,27	1,25	1,24	1,63	1,48	1,42	1,38	1,35	1,94	1,68	1,58	1,52	1,48
0,10	0,9000	1,33	1,22	1,17	1,14	1,12	1,44	1,28	1,22	1,17	1,14	1,60	1,37	1,27	1,22	1,18
	0,9500	1,40	1,28	1,23	1,20	1,17	1,52	1,35	1,28	1,24	1,21	1,70	1,45	1,35	1,29	1,25
	0,9900	1,53	1,40	1,34	1,31	1,28	1,68	1,50	1,42	1,37	1,34	1,90	1,63	1,52	1,45	1,41
	0,9950	1,58	1,45	1,39	1,35	1,33	1,75	1,56	1,47	1,42	1,39	1,99	1,70	1,58	1,51	1,47
	0,9990	1,70	1,56	1,50	1,46	1,43	1,89	1,69	1,60	1,54	1,50	2,17	1,86	1,73	1,65	1,60
	0,9995	1,76	1,61	1,54	1,50	1,47	1,95	1,74	1,65	1,59	1,55	2,25	1,92	1,79	1,71	1,66
0,15	0,9000	1,51	1,34	1,27	1,22	1,18	1,60	1,39	1,30	1,24	1,20	1,74	1,46	1,34	1,27	1,23
	0,9500	1,62	1,44	1,36	1,31	1,27	1,72	1,50	1,40	1,34	1,30	1,89	1,58	1,46	1,38	1,33
	0,9900	1,88	1,67	1,58	1,52	1,47	2,01	1,75	1,63	1,56	1,51	2,22	1,86	1,72	1,63	1,57
	0,9950	1,99	1,78	1,67	1,61	1,56	2,14	1,86	1,74	1,66	1,61	2,36	1,99	1,83	1,73	1,67
	0,9990	2,28	2,03	1,92	1,84	1,79	2,45	2,13	1,99	1,90	1,84	2,72	2,28	2,10	2,00	1,92
	0,9995	2,42	2,15	2,03	1,95	1,90	2,59	2,26	2,11	2,02	1,95	2,88	2,42	2,23	2,12	2,04

7. Коэффициенты утяжеления κ при безотказных испытаниях для допусковой модели отказов

ν	$P_T, \frac{P}{\gamma}$ ($\gamma = 0,9$)	$\nu' = 0,05$					$\nu' = 0,10$					$\nu' = 0,15$				
		Число испытаний					Число испытаний					Число испытаний				
		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
0,05	0,9000	1,14	1,09	1,07	1,06	1,05	1,21	1,12	1,08	1,05	1,03	1,27	1,15	1,08	1,04	1,01
	0,9500	1,16	1,12	1,09	1,08	1,07	1,23	1,14	1,10	1,07	1,05	1,30	1,17	1,10	1,06	1,03
	0,9900	1,20	1,16	1,14	1,12	1,11	1,28	1,19	1,14	1,11	1,09	1,35	1,21	1,15	1,11	1,07
	0,9950	1,22	1,18	1,15	1,14	1,13	1,29	1,20	1,16	1,13	1,11	1,37	1,23	1,16	1,12	1,09
	0,9990	1,26	1,21	1,19	1,17	1,16	1,33	1,24	1,19	1,16	1,14	1,41	1,27	1,20	1,16	1,12
	0,9995	1,27	1,23	1,20	1,19	1,18	1,35	1,25	1,21	1,18	1,15	1,43	1,28	1,21	1,17	1,13
0,10	0,9000	1,22	1,17	1,15	1,14	1,13	1,29	1,20	1,16	1,13	1,11	1,37	1,23	1,16	1,12	1,09
	0,9500	1,27	1,23	1,20	1,19	1,18	1,35	1,25	1,21	1,18	1,15	1,43	1,28	1,21	1,17	1,13
	0,9900	1,39	1,33	1,31	1,29	1,28	1,47	1,37	1,31	1,28	1,26	1,55	1,40	1,32	1,27	1,23
	0,9950	1,43	1,38	1,35	1,34	1,32	1,52	1,41	1,36	1,33	1,30	1,61	1,44	1,36	1,32	1,28
	0,9990	1,55	1,48	1,45	1,44	1,42	1,63	1,52	1,46	1,42	1,40	1,73	1,55	1,47	1,41	1,37
	0,9995	1,59	1,53	1,50	1,48	1,46	1,68	1,56	1,50	1,47	1,44	1,78	1,60	1,51	1,46	1,41
0,15	0,9000	1,32	1,27	1,24	1,23	1,22	1,40	1,30	1,25	1,22	1,19	1,48	1,33	1,25	1,21	1,17
	0,9500	1,41	1,36	1,33	1,32	1,30	1,50	1,39	1,34	1,31	1,28	1,58	1,42	1,35	1,30	1,26
	0,9900	1,63	1,57	1,54	1,52	1,51	1,73	1,61	1,55	1,51	1,48	1,83	1,65	1,56	1,50	1,45
	0,9950	1,73	1,67	1,64	1,62	1,60	1,84	1,71	1,64	1,60	1,57	1,94	1,75	1,65	1,59	1,54
	0,9990	1,98	1,91	1,87	1,85	1,83	2,10	1,95	1,88	1,84	1,80	2,22	2,00	1,89	1,82	1,76
	0,9995	2,10	2,02	1,98	1,96	1,94	2,23	2,07	1,99	1,94	1,90	2,35	2,12	2,00	1,93	1,87

нативным исходом («успех—отказ») [16]. Предполагается, что нагрузка X допускает управление и измерение в каждом опыте.

Перед проведением испытаний должно быть известно следующее:

вид закона распределения прочности Y , заданный плотностью $p(y; \vec{\theta})$, где $\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3 \dots\}$ — вектор неизвестных параметров закона распределения;

область D определения $\vec{\theta}$; априорный (фидуциальный) закон распределения вектора параметров $p_0^a(\vec{\theta})$.

Метод максимума информации устанавливает алгоритм назначения в каждом i -м опыте ($i = 1, 2, 3, \dots$) оптимальных величин в общем случае утяжеленной нагрузки x_{*i} и определения количественных оценок вектора $\vec{\theta}$ по альтернативным результатам опытов. Критерием оптимальности проведения i -го опыта принято количество ожидаемой от опыта информации по Шеннону о величине $\vec{\theta}$:

$$J(x_i) = \int_D \left[p(u_i^0/x_i, \vec{\theta}) \times \right. \\ \times \ln \frac{p^{\text{ап}}(\vec{\theta}/x_i, u_i^0)}{p^a(\vec{\theta})} + p(u_i^1/x_i, \vec{\theta}) \times \\ \times \ln \left. \frac{p^{\text{ап}}(\vec{\theta}/x_i, u_i^1)}{p^a(\vec{\theta})} \right] p^a(\vec{\theta}) d\vec{\theta},$$

где x_i — уровень нагрузки в планируемом опыте; u_i — исход i -го опыта (u_i^0 — успех; u_i^1 — отказ). В случае, когда под прочностью понимают реальную несущую способность объекта испытания (отказом считается разрушение объекта, успехом — сохранение им целостности); $p^{\text{ап}}(\vec{\theta}/x_i, u_i)$ — апостериорная плотность распределения $\vec{\theta}$ в i -м опыте при условии, что при нагрузке x_i реализовалось событие u_i ; $p^a(\vec{\theta})$ — априорная плотность $\vec{\theta}$ для i -го опыта [апостериорная

плотность для опыта $(i-1)$]; $p \times (u_i/x_i, \vec{\theta})$ — условная вероятность реализации события u_i при условии, что заданы значение $\vec{\theta}$ и величина нагрузки x_i .

Апостериорная плотность определяется по теореме Байеса:

$$p^{\text{ап}}(\vec{\theta}/x_i, u_i) = \\ = \frac{p_0^a(\vec{\theta}) p(\vec{U}_{i-1}/\vec{\theta}) p(u_i/x_i, \vec{\theta})}{\int_D p_0^a(\vec{\theta}) p(\vec{U}_{i-1}/\vec{\theta}) p(u_i/x_i, \vec{\theta}) d\vec{\theta}}, \quad (13)$$

где $p(\vec{U}_{i-1}/\vec{\theta}) = \prod_{j=1}^{i-1} p(u_j/x_{*j}, \vec{\theta})$ —

условная вероятность реализации вектора событий $\vec{U}_{i-1} = \{u_1, u_2, \dots, u_{i-1}\}$ во всех проведенных ранее опытах ($i-1$) при условии, что в них реализовались оптимальные уровни нагрузки x_{*j} .

Оптимальный уровень нагрузки в i -м опыте x_{*i} определяется как $x_{*i} = \arg \max_{x_i} J(x_i)$. После проведения i -го опыта в натурных условиях апостериорная плотность распределения вычисляется по формуле (13), в которой вместо x_i и u_i используются выбранное оптимальное значение нагрузки в i -м опыте x_{*i} и фактически реализовавшийся исход — u_i^0 или u_i^1 . Оценки параметров определяются как математические ожидания апостериорного закона распределения вектора $\vec{\theta}$.

В практически важном случае распределения прочности по нормальному закону, относительно параметров которого можно указать лишь границы интервалов нахождения истинных значений, используются специальные таблицы планирования и оценки результатов эксперимента (табл. 8). Таблица позволяет провести серию испытаний объемом до семи опытов. При большем объеме испытаний необходимо применение ЭВМ. Однако в значительной части приклад-

8. Таблица траекторий, оценок параметров и уровней нагрузки для испытаний по методу максимума информации

Траектория	y'	S'	x'_*	Траектория	y'	S'	x'_*
До опытов				ООУУО	—1,856	0,607	—2,1
—	—	—	0	ООУУУ	—1,381	0,560	—1,2
Опыт № 1				ОУООО	—1,893	0,687	—2,1
О	—1,439	0,550	—1,5	ОУООУ	—1,382	0,521	—1,2
У	1,439	0,550	1,2	ОУОУО	—1,234	0,602	—1,5
Опыт № 2				ОУОУУ	—0,812	0,530	—0,6
ОО	—2,153	0,546	—2,4	ОУУОО	—0,922	0,524	—1,2
ОУ	—0,742	0,554	—0,9	ОУУОУ	—0,489	0,596	—0,6
УО	0,595	0,559	0,6	ОУУУО	—0,329	0,485	—0,6
УУ	2,033	0,544	1,8	ОУУУУ	0,247	0,634	0,3
Опыт № 3				УОООО	—0,529	0,702	—0,9
ООО	—2,548	0,544	—2,4	УОООУ	0,019	0,600	—0,3
ООУ	—1,894	0,548	—1,8	УООУО	0,259	0,474	0,0
ОУО	—1,264	0,564	—1,2	УООУУ	0,690	0,588	0,6
ОУУ	—0,351	0,545	—0,6	УОУОО	0,510	0,588	0,3
УОО	0,186	0,559	0,0	УОУОУ	—0,940	0,474	0,6
УОУ	1,007	0,558	1,2	УОУУО	1,180	0,599	0,9
УУО	1,523	0,568	1,2	УОУУУ	1,695	0,698	1,8
УУУ	2,345	0,529	2,4	УУООО	0,817	0,679	0,6
Опыт № 4				УУООУ	1,291	0,602	0,9
ОООО	—2,669	0,498	—3,0	УУОУО	1,513	0,488	1,2
ОООУ	—2,333	0,626	—2,4	УУОУУ	1,997	0,619	2,1
ООУО	—2,153	0,526	—2,4	УУУОО	1,800	0,607	1,5
ООУУ	—1,548	0,577	—1,8	УУУОУ	2,241	0,506	2,4
ОУОО	—1,543	0,573	—1,8	УУУУО	2,403	0,604	2,1
ОУОУ	—0,954	0,554	—1,2	УУУУУ	2,687	0,482	2,4
ОУУО	—0,756	0,552	—0,6	Опыт № 6			
ОУУУ	—0,108	0,542	0,0	ОООООО	—2,841	0,534	—2,7
УООО	—0,211	0,643	—0,3	ОООООУ	—2,701	0,631	—2,4
УООУ	0,407	0,513	0,6	ООООУО	—2,694	0,426	—3,0
УОУО	0,793	0,513	0,6	ООООУУ	—2,466	0,595	—2,7
УОУУ	1,394	0,640	1,5	ОООУОО	—2,641	0,640	—2,4
УУОО	1,116	0,630	0,9	ОООУОУ	—2,429	0,604	—2,7
УУОУ	1,705	0,540	1,8	ОООУУО	—2,375	0,643	—2,7
УУУО	2,113	0,535	1,8	ОООУУУ	—2,051	0,627	—1,8
УУУУ	2,593	0,523	2,4	ООУООО	—2,598	0,644	—2,4
Опыт № 5				ООУООУ	—2,334	0,575	—2,7
ООООО	—2,784	0,573	—2,7	ООУОУО	—2,137	0,452	—2,4
ООООУ	—2,631	0,473	—2,4	ООУОУУ	—1,775	0,579	—2,1
ОООУО	—2,510	0,618	—2,7	ООУУОО	—2,094	0,657	—2,4
ОООУУ	—2,173	0,633	—2,4	ООУУОУ	—1,729	0,581	—2,1
ООУОО	—2,420	0,597	—2,7	ООУУУО	—1,538	0,503	—1,8
ООУОУ	—2,025	0,492	—1,8	ООУУУУ	—1,077	0,670	—1,2
				ОУОООО	—2,164	0,740	—2,4
				ОУОООУ	—1,727	0,655	—2,1
				ОУООУО	—1,509	0,493	—1,8
				ОУООУУ	—1,154	0,571	—1,5
				ОУОУОО	—1,484	0,672	—1,8

Продолжение табл. 8

Траектория	y'	S'	x'_*	Траектория	y'	S'	x'_*
ОУОУОУ	-1,113	0,568	-1,5	ООООУОУ	-2,668	0,396	-3,0
ОУОУУО	-0,937	0,475	-1,2	ООООУУО	-2,606	0,620	-2,4
ОУОУУУ	-0,539	0,649	-0,6	ООООУУУ	-2,389	0,582	-2,7
ОУУООО	-1,191	0,648	-1,5	ОООУООО	-2,692	0,614	-3,0
ОУУООУ	-0,818	0,476	-0,6	ОООУООУ	-2,539	0,690	-2,4
ОУУОУО	-0,688	0,593	-0,9	ОООУОУО	-2,579	0,641	-2,4
ОУУОУУ	-0,332	0,598	-0,3	ОООУОУУ	-2,354	0,585	-2,7
ОУУУОО	-0,582	0,562	-0,9	ОООУУОО	-2,539	0,690	-2,4
ОУУУОУ	-0,226	0,453	0,0	ОООУУОУ	-2,301	0,622	-2,1
ОУУУУО	0,017	0,585	-0,3	ОООУУУО	-2,167	0,587	-2,4
ОУУУУУ	0,549	0,698	0,6	ОООУУУУ	-1,817	0,706	-1,8
УООООО	-0,917	0,783	-1,2	ООУОООО	-2,664	0,622	-3,0
УООООУ	-0,357	0,666	-0,6	ООУОООУ	-2,483	0,683	-2,4
УОООУО	-0,254	0,675	-0,6	ООУООУО	-2,527	0,643	-2,4
УОООУУ	0,136	0,567	0,0	ООУООУУ	-2,263	0,549	-2,1
УООУОО	0,007	0,597	-0,3	ООУОУОО	-2,342	0,572	-2,7
УООУОУ	0,353	0,428	0,6	ООУОУОУ	-2,064	0,410	-2,4
УООУУО	0,494	0,579	0,3	ООУОУУО	-2,000	0,630	-1,8
УООУУУ	0,855	0,596	0,9	ООУОУУУ	-1,679	0,558	-1,5
УОУООО	0,261	0,653	0,0	ООУУООО	-2,293	0,714	-2,4
УОУООУ	0,645	0,552	0,3	ООУУООУ	-2,000	0,630	-1,8
УОУОУО	0,705	0,579	0,3	ООУУОУО	-1,958	0,647	-1,8
УОУОУУ	1,013	0,441	1,2	ООУУОУУ	-1,644	0,557	-1,5
УОУУОО	0,935	0,644	0,6	ООУУУОО	-1,746	0,580	-2,1
УОУУОУ	1,300	0,577	1,5	ООУУУОУ	-1,452	0,471	-1,2
УОУУУО	1,504	0,662	1,2	ООУУУУО	-1,298	0,641	-1,2
УОУУУУ	1,955	0,746	1,8	ООУУУУУ	-0,890	0,695	-0,9
УУОООО	0,560	0,728	0,3	ОУООООО	-2,373	0,774	-2,4
УУОООУ	0,967	0,650	0,6	ОУООООУ	-2,037	0,720	-2,4
УУООУО	1,019	0,665	0,9	ОУОООУО	-1,992	0,725	-2,1
УУООУУ	1,393	0,579	1,5	ОУОООУУ	-1,618	0,626	-1,8
УУОУОО	1,263	0,596	0,9	ОУООУОО	-1,752	0,644	-2,1
УУОУОУ	1,598	0,451	1,8	ОУООУОУ	-1,427	0,442	-1,2
УУОУУО	1,892	0,580	1,5	ОУООУУО	-1,378	0,642	-1,2
УУОУУУ	2,231	0,675	2,4	ОУООУУУ	-1,068	0,544	-0,9
УУУООО	1,532	0,661	1,2	ОУОУООО	-1,715	0,737	-2,1
УУУООУ	1,926	0,582	1,8	ОУОУООУ	-1,378	0,642	-1,2
УУУОУО	2,117	0,464	1,8	ОУОУОУО	-1,336	0,654	-1,5
УУУОУУ	2,462	0,580	2,1	ОУОУОУУ	-1,039	0,539	-0,9
УУУУОО	2,192	0,661	1,8	ОУОУУОО	-1,128	0,564	-1,5
УУУУОУ	2,497	0,579	2,1	ОУОУУОУ	-0,864	0,442	-0,6
УУУУУО	2,543	0,601	2,1	ОУОУУУО	-0,723	0,620	-0,6
УУУУУУ	2,736	0,442	2,4	ОУОУУУУ	-0,361	0,678	-0,3
Опыт № 7				ОУУОООО	-1,451	0,723	-1,8
ООООООО	-2,886	0,488	-2,7	ОУУОООУ	-1,071	0,614	-1,2
ООООООУ	-2,760	0,616	-3,0	ОУУООУО	-0,903	0,438	-1,2
ОООООУО	-2,743	0,600	-3,0	ОУУООУУ	-0,623	0,564	-0,9
ОООООУУ	-2,603	0,702	-2,4	ОУУОУОО	-0,878	0,641	-1,2
ООООУОО	-2,786	0,533	-2,7	ОУУОУОУ	-0,584	0,566	-0,9
				ОУУОУУО	-0,477	0,561	-0,9

Продолжение табл. 8

Траектория	y'	S'	x'_*	Траектория	y'	S'	x'_*
ОУУОУУУ	-0,154	0,644	0,0	УОУУУОО	1,289	0,685	1,2
ОУУУООО	-0,811	0,629	-1,2	УОУУУОУ	1,613	0,650	1,8
ОУУУООУ	-0,489	0,531	0,9	УОУУУУО	2,741	0,724	1,8
ОУУУОУО	-0,319	0,402	-0,6	УОУУУУУ	2,123	0,764	2,1
ОУУУОУУ	-0,018	0,586	0,3	УУООООО	0,313	0,771	0,0
ОУУУУОО	-0,216	0,627	0,0	УУООООУ	0,700	0,703	0,3
ОУУУУОУ	0,121	0,567	0,3	УУОООУО	0,744	0,708	0,3
ОУУУУУО	0,328	0,655	0,6	УУОООУУ	1,059	0,626	1,2
ОУУУУУУ	0,828	0,828	0,9	УУООУОО	0,848	0,678	0,3
УОООООО	-1,237	0,821	-1,5	УУООУОУ	1,148	0,655	1,2
УОООООУ	-0,722	0,761	-0,9	УУООУУО	1,256	0,537	0,9
УООООУО	-0,601	0,722	-0,9	УУООУУУ	1,597	0,641	1,8
УООООУУ	-0,225	0,635	-0,6	УУОУООО	1,017	0,686	0,9
УОООУОО	-0,499	0,740	-0,9	УУОУООУ	1,355	0,562	1,2
УОООУОУ	-0,146	0,646	0,0	УУОУОУО	1,506	0,398	1,2
УОООУУО	-0,038	0,574	-0,3	УУОУОУУ	1,828	0,581	2,1
УОООУУУ	0,259	0,563	0,3	УУОУУОО	1,606	0,628	1,8
УООУООО	-0,251	0,696	-0,6	УУОУУОУ	1,923	0,559	2,1
УООУООУ	0,115	0,556	-0,3	УУОУУУО	2,108	0,645	1,8
УООУУОО	0,283	0,386	0,0	УУОУУУУ	2,422	0,722	2,4
УООУУОУ	-0,557	0,550	0,3	УУУОООО	1,298	0,718	0,9
УООУУОО	0,314	0,618	0,0	УУУОООУ	1,638	0,635	1,8
УООУУОУ	0,599	0,556	0,3	УУУООУО	1,746	0,580	1,5
УООУУУО	0,710	0,558	0,3	УУУООУУ	2,060	0,584	2,1
УООУУУУ	1,037	0,643	1,2	УУУОУОО	1,906	0,574	1,5
УОУОООО	0,030	0,720	-0,3	УУУОУОУ	2,184	0,429	2,4
УОУОООУ	0,377	0,620	0,0	УУУОУУО	2,276	0,640	2,4
УОУООУО	0,420	0,634	0,3	УУУОУУУ	2,532	0,558	2,4
УОУООУУ	0,728	0,522	0,9	УУУУООО	1,979	0,715	1,8
УОУОУОО	0,472	0,675	0,3	УУУУООУ	2,276	0,640	2,4
УОУОУОУ	0,781	0,547	0,6	УУУУОУО	2,317	0,655	2,4
УОУОУУО	0,917	0,386	0,6	УУУУОУУ	2,556	0,554	2,4
УОУОУУУ	1,248	0,577	1,5	УУУУУОО	2,370	0,691	2,1
УОУУООО	0,723	0,704	0,3	УУУУУОУ	2,595	0,574	2,1
УОУУООУ	1,027	0,619	1,2	УУУУУУО	2,625	0,585	2,1
УОУУУОО	1,180	0,535	0,9	УУУУУУУ	2,764	0,405	2,4
УОУУУОУ	1,527	0,658	1,8				

ных задач уже четыре—семь опытов обеспечивают приемлемую точность. Табл. 8 составлена в предположении, что нижняя граница интервала поиска СКО σ_H составляет 10 % наибольшего возможного его значения σ_K ($\sigma_H = 0,1\sigma_K$), а границы интервала поиска M_0 отстоят на $3\sigma_K$ от центра интервала m_0 . Таблицы рассчитаны для нормированных значений уровня нагрузки x_* и оценок

параметров прочности — среднего значения $\bar{y}$ и выборочного СКО S_y (индексы номеров опытов для простоты записи опущены):

$$x'_* = \frac{x_* - m_0}{\sigma_K}; \quad y' = \frac{\bar{y} - m_0}{\sigma_K}; \quad S' = \frac{S_y}{\sigma_K}$$

Непосредственно перед проведением опытов необходимо установить на ос-

9. Изменение оценок ВБР в процессе последовательных испытаний (для данных примера 17)

n_y	x'_*	$x_{кН}^*$	Результат	y'	S'	$\bar{y}_{кН}$	$S_{y'кН}$	$\hat{h}$	S_h	$\underline{h}$	$\underline{P}$
1	0	10,0	У	1,439	0,550	12,88	1,10	4,44	1,85	2,07	0,9807
2	1,2	12,4	О	0,596	0,559	11,19	1,12	2,86	1,34	1,14	0,8737
3	0,6	11,2	У	1,007	0,558	12,01	1,12	3,60	1,17	2,10	0,9823
4	1,2	12,4	У	1,394	0,640	12,79	1,28	3,74	0,99	2,48	0,9934
5	1,5	13,0	О	1,118	0,600	12,36	1,20	3,63	0,92	2,45	0,9929
6	0,9	11,8	У	1,300	0,577	12,60	1,15	3,99	0,93	2,79	0,9974

нове априорных знаний наибольшее возможное значение СКО прочности σ_K и наиболее вероятное (ожидаемое) значение МО прочности m_0 .

При проведении опыта по табл. 8 определяется безразмерное значение действующей нагрузки x'_* и вычисляется ее размерное значение $x_* = m_0 + \sigma_K x'_*$. Проводится испытание с нагрузкой x_* , и в зависимости от его результата (О — отказ, У — успех) по табл. 8 определяются оценки y', S' ; их размерные значения вычисляются по следующим формулам:

$$\bar{y} = m_0 + \sigma_K y'; S_y = \sigma_K S'$$

Точность полученных оценок $\bar{y}$ и S_y определяется значениями их СКО, вычисляемыми по эмпирическим формулам:

$$S_{\bar{y}} \approx \sigma_K \exp \left(-\frac{i}{3} \sqrt{\frac{\sigma_K}{S_y}} \right) + \frac{S_y}{2}; S_{S_y} \approx 0,1 \sigma_K.$$

В той же строке табл. 8 содержится нормированное значение оптимальной нагрузки x'_* для следующего опыта. В дальнейшем вся процедура повторяется с использованием части табл. 8 для следующего опыта и результатов всех предыдущих опытов. Критерием окончания эксперимента является выполнение требований к ВБР или ресурсное ограничение на объем испытаний.

Если испытания проводятся для определения параметров распределения нагрузки путем варьирования вели-

чины прочности, то используется та же табл. 8, однако понятиям «успех» и «отказ» приписывается противоположный смысл.

Оценка ВБР производится на основе модели «нагрузка—прочность». Если оценки МО $\bar{y}$ и СКО S_y прочности получены в результате объема испытаний по методу максимума информации n_y опытов, а оценки $\bar{x}$ и S_x параметров распределения нагрузки получены при объеме испытаний n_x опытов с количественным измерением результатов, то точечная оценка и нижняя доверительная граница ВБР с доверительной вероятностью γ определяются по следующим формулам:

$$\hat{P} = \Phi(\hat{h}), \underline{P} = \Phi(\underline{h}),$$

где

$$\hat{h} = \frac{\bar{y} - \bar{x}}{\sqrt{S_y^2 + S_x^2}}; \underline{h} = \hat{h} - u_\gamma S_h;$$
$$S_h \approx \frac{1}{S_y^2 + S_x^2} \times$$
$$\times \sqrt{\left\{ \left[\sigma_K \exp \left(-\frac{n_y}{3} \sqrt{\frac{\sigma_K}{S_y}} \right) + \frac{S_y}{2} \right]^2 + \frac{S_x^2}{n_x} \right\} (S_y^2 + S_x^2) + \hat{h}^2 \left(0,01 S_y^2 \sigma_K^2 + \frac{2 S_x^4}{n_x - 1} \right)};$$

u_γ — квантиль нормального распределения.

Пример 17. Требования к ВБР изделия заданы в виде $P_T = 0,995$ с доверительной вероятностью $\gamma = 0,9$ ($\mu_\gamma = 1,282$). В условиях эксплуатации действует детерминированная ($n_x \rightarrow \infty$) нагрузка $x = 8$ кН. Необходимо провести испытания для подтверждения заданных требований к ВБР по изложенному выше методу.

Согласно проектным расчетам и статистическим данным по аналогам, МО прочности изделия оценивается величиной $m_0 = 10$ кН, а СКО прочности не превышает $\sigma_K = 2$ кН. Следовательно, истинные значения МО и СКО будем искать на интервалах $[4; 16]$ и $[0,2; 2]$ кН.

Из табл. 8 находим, что для первого опыта нормированное значение нагрузки $x'_* = 0$, т. е. в первом опыте к объекту необходимо приложить нагрузку $x_* = 10 + 2 \cdot 0 = 10$ кН. Если прочность первого испытуемого изделия превышает эту величину, в опыте реализуется успех. Тогда на основании полученного результата из табл. 8 находим $y' = 1,439$; $S' = 0,55$, что дает $\bar{y} = 10 + 2 \cdot 1,439 = 12,878$ кН; $S_y = 2 \cdot 0,55 = 1,1$ кН. Эти значения, а также вычисленные по ним оценки h , S_h и нижней доверительной границы ВБР $\bar{P}$ приведены в табл. 9.

Для второго опыта из табл. 8 находим $x'_* = 1,2$; $x_* = 10 + 2 \cdot 1,2 = 12,4$ кН. Если прочность второго

испытуемого изделия меньше этих значений, в опыте произойдет отказ. Пусть, продолжая далее, получим серию результатов (траекторию) УОУУОУ. На шестом опыте испытания прекращаются, так как подтверждена ВБР изделия $\bar{P} = 0,9974 > P_T = 0,995$.

Изложенный метод может быть применен для оценки надежности и для решения статистических задач количественной оценки распределений в биологии, химии, медицине в тех случаях, когда входное воздействие на объект испытания измеряется количественно, а выходной сигнал имеет альтернативный характер («да—нет»). Метод экономичнее метода «вверх—вниз» приблизительно на порядок, а метода стохастической аппроксимации — в 1,5—2 раза.

При использовании этого метода следует учитывать, что оценки вторых и более высоких моментов распределений могут иметь заметное смещение в случаях, когда истинное значение момента находится близко к краю априорного интервала, назначаемого для его поиска. В связи с этим желательно априорные интервалы устанавливать таким образом, чтобы наиболее вероятные значения оцениваемых моментов (параметров распределений) находились в центральных областях интервалов.

Раздел III

ОЦЕНКА И КОНТРОЛЬ НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЙ ИХ ЭЛЕМЕНТОВ (РАСЧЕТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ)

Глава 14. Оценка показателей безотказности систем при биномиальных испытаниях

Настоящая глава содержит результаты, представляющие собой обобщение соотношений, приведенных в гл. 7 на случай, когда рассматривается система, состоящая из нескольких элементов.

Предварительные замечания. Ниже в качестве объекта рассмотрения анализируются различные типы систем, среди которых основное внимание уделяется системе с последовательным соединением элементов. Это обусловлено тем, что решение многих других задач сводится к рассмотрению системы именно данного типа.

Общая постановка задачи такова: по результатам биномиальных автономных испытаний элементов требуется найти γ -нижнюю границу для неизвестной вероятности безотказной работы системы в целом. Практическое значение решения состоит в том, что оно позволяет осуществить выбор минимально необходимого объема испытаний для каждого из элементов (см. гл. 17).

ИНТЕРВАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ СИСТЕМЫ С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМ СОЕДИНЕНИЕМ ЭЛЕМЕНТОВ

Рассматривается система из m последовательно соединенных элементов, для каждого из которых вероятность $P_i = P(A_i)$ безотказной работы считается неизвестной. Событие A_i состоит в безотказной работе i -го элемента; при $i = \overline{1, m}$ события A_i считаются независимыми (в этом случае элементы системы также называются независимыми). Предполагается, что каждый из них проходит N_i автономных (отдельных от системы) испытаний по биномиальному плану (БП) с регистрацией числа l_i возникающих отказов (рис. 1).

Задача ставится следующим образом: рассматривая результаты N_i , l_i автономных испытаний каждого из m независимых элементов, требуется найти γ -нижнюю границу π для вероятности

$$\pi = P_1 P_2 \dots P_m = \prod_{i=1}^m P_i \quad (1)$$

безотказной работы системы (см. рис. 1), т. е. найти такую величину, π , чтобы выполнялось соотношение

$$P(\pi < \pi) \geq \gamma \quad (2)$$

для заданной доверительной вероятности γ .

Решение данной задачи неоднозначно. Некоторые из решений приведены в табл. 1. В этой таблице используются, в частности, так называемые первая и вторая расчетные формулы, из которых вторая при больших m может давать заниженные значения по сравнению с первой, если не все $l_i = 0$. Однако при безотказных испытаниях всех элементов ситуация изменяется на обратную, в связи с чем приводятся обе формулы.

В табл. 2 дано решение аналогичной задачи для случая, когда каждый из элементов системы испытывается по биномиальному плану с остановкой (БПО) (см. определение 2, гл. 7). Результаты, приведенные в этих таблицах, могут быть также использованы и в случае, когда при испытаниях элементов происходит накопление повреждений (см. определение 3, гл. 7), а также при испытаниях элементов системы по биномиальному плану.

Пример 1. В условиях табл. 1 по результатам автономных биномиальных испытаний $m = 100$ элементов системы с последовательным соединением элементов получены исходные данные N_i, l_i , для которых найдено значение несмещенной оценки

$$\hat{\pi} = \prod_{i=1}^m \left(1 - \frac{l_i}{N_i}\right) = 0,89$$

вероятности $\pi = P(A_1) P(A_2) \dots P(A_m)$ безотказной работы системы (см. рис. 1), причем меньшее из чисел испытаний $N = 10$. Требуется найти значение γ -нижней границы π для заданного $\gamma = 0,90$.

Решение. По первой формуле (табл. 1), учитывая, что

$$l' = N\hat{q} = nm \left(1 - 0,89^{\frac{1}{m}}\right) = 1,12,$$

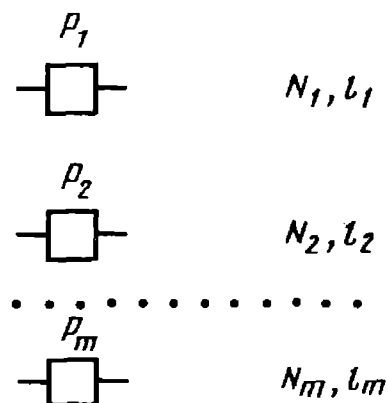


Рис. 1. Исходные данные для расчета γ -нижней границы показателя надежности системы

с помощью табл. 1 приложения находим искомое значение

$$\pi = f_2(N, l', \gamma) = f_2(10; 1,12; 0,90) = 0,65.$$

Примечание. События A_i в формуле для π здесь произвольны. Поэтому можно рассмотреть следующую более общую задачу. В N_i биномиальных испытаниях регистрируется число l_i событий A_i . При $i = \overline{1, m}$ события A_i независимы, а их вероятности $P_i = P(A_i)$ неизвестны. Если l_i независимы при $i = \overline{1, m}$, то γ -нижняя граница π для произведения $\pi = P_1 P_2 \dots P_m$ вероятностей P_i для $\gamma \geq 0,5$ может быть найдена по формулам табл. 1.

Пример 2. В условиях табл. 1 каждый i -й из $m = 100$ элементов функционирует на $[0, t_0]$ в составе системы в номинальном режиме ϵ_{0i} , а испытывается на том же интервале $[0, t_0]$ в утяжеленном режиме ϵ_i^* с коэффициентом повышения нагрузки κ_i , меньший из которых равен $\kappa = 2$.

Пусть меньшее из чисел испытаний $N = 10$, а полученные по результатам утяжеленных испытаний значения чисел l_{i*} отказов таковы, что

$$\hat{\pi}_* = \prod_{i=1}^m \left(1 - \frac{l_{i*}}{N_i}\right) = 0,89.$$

Тогда значение γ -нижней границы π для вероятности $\pi = \pi(t_0)$ безотказ-

1. Расчет γ -нижней границы π для вероятности $\pi = P_1 P_2 \dots P_m$ безотказной работы на интервале $[0, t_0]$ времени в режиме $\varepsilon_0 = (\varepsilon_{01} \varepsilon_{02} \dots \varepsilon_{0m})$ системы с последовательным соединением m элементов по результатам их испытаний по БП

План испытаний i -го элемента	Исходные данные	Исходные допущения	Обозначения	Расчетные формулы [66]
БП на рабочем интервале $[0, t_0]$ в номинальном режиме ε_{0i}	N_i — число испытаний; l_i — число отказов; γ — заданная доверительная вероятность	Элементы системы и величины l_i ($i = \overline{1, m}$) независимы	N — меньшее из чисел N_i ; $l' = Nq = l' (l_1, l_2, \dots, l_m)$ — приведенное число отказов системы; $q = m(1 - \hat{\pi}^{1/m}) \simeq 1 - \hat{\pi}$; $\hat{\pi} = \prod_{i=1}^m \hat{P}_i$; $\hat{P}_i = 1 - l_i/N_i$; $\gamma_m = 1 - (1 - \gamma)^{1/m}$; $z_i = 1/(N_i - l_i)$;	$\pi = f_2(N, l', \gamma) \simeq (1 - q)(1 - \gamma)^{1/(1-q)N}$ — первая расчетная формула ($\gamma \geq 0,5$); $\pi = \min_{1 \leq i \leq m} (f_2(N_i, l_i, \gamma_m))^m \simeq \min_{1 \leq i \leq m} \hat{P}_i^m (1 - \gamma)^{z_i}$ — вторая расчетная формула. Из формул следует, что $\pi = (1 - \gamma)^{1/N}$, если все $l_i = 0$
БП на интервале времени $[0, \eta_{0i} t_0] = [0, t_{1i}]$ в форсированном режиме ε_{0i}^* с коэффициентом κ_i повышения нагрузки и с коэффициентом η_{0i} изменения времени испытаний по сравнению с t_0 , $\eta_{0i} = t_{1i}/t_0$	N_i, l_{i*}, γ , $\eta_{0i}, \kappa_i \geq 1$	То же, а также допущения определений 1, 5 (см. гл. 7) (при $\eta_{0i} > 1$) и определения 6 (см. гл. 7) (при $\eta_{0i} < 1$)	$f_2(N, l, \gamma)$ — функция, определяемая из табл. 1 приложения; $s = \min_{1 \leq i \leq m} s_i$; $s_i = \kappa_i \eta_{0i}$; $l'_* = l' (l_{1*}, \dots, l_{m*})$; $\tilde{N}_s = \min_{1 \leq i \leq m} N_i s_i$	$\pi = (f_2(N, l'_*, \gamma))^{1/s}$ — первая расчетная формула ($\gamma \geq 0,5$); $\pi = \min_{1 \leq i \leq m} (f_2(N_i, l_{i*}, \gamma_m))^{m/s_i}$ — вторая расчетная формула, из которой следует, что $\pi = (1 - \gamma)^{1/\tilde{N}_s}$, если все $l_i = 0$

2. Расчет γ -нижней границы π для вероятности $\pi = P_1 P_2 \dots P_m$ безотказной работы на интервале $[0, t_0]$ времени в режиме $\varepsilon_0 = (\varepsilon_{01} \dots \varepsilon_{0m})$ системы с последовательным соединением m элементов по результатам их испытаний по БПО

План испытаний i -го элемента	Исходные данные	Исходные допущения	Обозначения	Расчетные формулы [66]
БПО на рабочем интервале $[0, t_0]$ в номинальном режиме ε_{0i}	N_i — наибольшее число планируемых испытаний; N'_i — результат испытаний; γ — заданная доверительная вероятность	Элементы системы независимы; величины N'_i при $i = \overline{1, m}$ независимы. Выполняются допущения определений 1 и 2 (см. гл. 7)	$N' = \min_{1 \leq i \leq m} N'_i$; $N = \min_{1 \leq i \leq m} N_i$	$\pi = (1 - \gamma)^{1/N'}$ В случае безотказных испытаний всех элементов $\pi = (1 - \gamma)^{1/N}$, если γ — произвольное число из $[0, 1]$, и $\pi = 1$, если $\gamma = 1 - 1/(N + 1)$
БПО на интервале времени $[0, \eta_{0i} t_0] = [0, t_{1i}]$ в форсированном режиме ε_{0i}^* с коэффициентом κ_i повышения нагрузки и с коэффициентом η_{0i} изменения времени испытаний по сравнению с t_0 $\eta_{0i} = t_{1i}/t_0$	$N_i, N'_{i*}, \gamma,$ $\eta_{0i}, \kappa_i \geq 1$	То же, а также допущения из определения 5 (см. гл. 7) при $\eta_{0i} > 1$ и из определения 6 (см. гл. 7) при $\eta_{0i} < 1$	$s_i = \kappa_i \eta_{0i};$ $N's =$ $= \min_{1 \leq i \leq m} N'_{i*} s_i;$ $Ns =$ $= \min_{1 \leq i \leq m} N_{i*} s_i$	$\pi = (1 - \gamma)^{1/N's}.$ В случае безотказных испытаний всех элементов $\pi = (1 - \gamma)^{1/Ns},$ если γ — произвольное число из $[0, 1]$, и $\pi = 1$, если $(1 - \gamma)^{1/s} = 1/(N + 1)$

ной работы системы на $[0, t_0]$ в номинальном режиме $\varepsilon_0 = (\varepsilon_{10}\varepsilon_{20} \dots \varepsilon_{m0})$, получаемое из первой расчетной формулы табл. 1 при $\gamma = 0,90$, таково:

$$\pi = (f_2(N, l'_*, \gamma))^{\frac{1}{\kappa}} = 0,65^{\frac{1}{2}} = 0,81.$$

Пример 3. В условиях табл. 1 каждый i -й из $m = 100$ элементов функционирует в составе системы на интервале $[0, t_0]$ времени в номинальном режиме ε_{0i} , а испытывается по биномиальному плану на большем интервале $[0, T]$, где $T = 3t_0 = \eta_0 t_0$, в утяжеленном режиме ε_i^* с коэффициентом κ_i повышения нагрузки. Известно, что меньшее из чисел испытаний $N = 10$, а меньший из коэффициентов повышения нагрузки $\kappa = 2$. Пусть система является стареющей на $[0, T]$, а полученные по результатам утяжеленных испытаний на $[0, T]$ значения чисел $l_i^* = l_i^*(T)$ отказов оказались такими, что по-прежнему (как и в примерах 1 и 2)

$$\widehat{\pi}_* = \widehat{\pi}_*(T) = \prod_{i=1}^N \left(1 - \frac{l_i^*(T)}{N_i}\right) = 0,89.$$

Тогда значение γ -нижней границы π для вероятности $\pi = \pi(t_0)$ безотказной работы системы на $[0, t_0]$ в номинальном режиме ε_0 , получаемое из первой расчетной формулы табл. 1 при $\gamma = 0,90$, следующее:

$$\pi = (f_2(N, l'_*(T), \gamma))^{\frac{1}{\kappa\eta_0}} = 0,65^{\frac{1}{2 \cdot 3}} = 0,93.$$

Пример 4. В условиях табл. 1 каждый i -й из $m = 100$ элементов функционирует в составе системы на интервале $[0, t_0]$ в номинальном режиме ε_{0i} , а испытывается на меньшем интервале $[0, t_1]$ ($t_1 = \frac{1}{3}t_0 = \eta_0 t_0 = t_1$) в утяжеленном режиме ε_i^* с коэффициентом κ_i повышения нагрузки, причем $N = 10$, $\kappa = 2$. Пусть система в целом является молодёющей на $[0, t_0]$, а по результатам утяжеленных испытаний на $[0, t_1]$ значе-

ния чисел $l_i^* = l_i^*(t_1)$ отказов оказались такими, что, как и выше,

$$\widehat{\pi} = \widehat{\pi}(t_1) = \prod_{i=1}^m \left(1 - \frac{l_i^*}{N_i}\right) = 0,89, \quad m = 100.$$

Тогда значение γ -нижней границы π для вероятности $\pi = \pi(t_0)$ безотказной работы системы на большем интервале $[0, t_0]$ в номинальном режиме ε_0 , получаемое из первой расчетной формулы табл. 1 при $\gamma = 0,90$, следующее:

$$\pi = (f_2(N, l'_*(t_0), \gamma))^{\frac{1}{\kappa\eta_0}} = 0,65^{\frac{3}{2}} = 0,52.$$

Пример 5. В условиях табл. 2 каждый i -й элемент системы с последовательным соединением элементов испытывается по биномиальному плану с остановкой с получением значений случайной величины N'_i (число испытаний до первого отказа), которая равна N_i , если в назначенных N_i испытаниях число отказов равно нулю. Требуется найти значение γ -нижней границы для вероятности $\pi = P_1 P_2 \dots P_m$ безотказной работы системы для $\gamma = 0,90$, если $m = 100$, $P_i = P(A_i)$ и оказалось, что $N' = \min_{1 \leq i \leq m} N'_i = 12$.

Решение. По формуле из табл. 2 находим

$$\pi = (1 - \gamma)^{\frac{1}{N'}} = 0,1^{\frac{1}{12}} = 0,83.$$

Примечание. Какой-либо i -й элемент системы может испытываться на одном образце; допускается, что при этом происходит накопление повреждений (см. гл. 7, определение 3). Таких элементов может быть несколько. Данное примечание остается справедливым во всех примерах, где рассматривается биномиальная схема испытаний с остановкой.

Пример 6. В условиях табл. 2 каждый из $m = 100$ элементов функционирует на $[0, t_0]$ в составе системы в номинальном режиме ε_{0i} , а испы-

тывается на том же интервале $[0, t_0]$ в утяжеленном режиме ε_i^* с коэффициентом повышения нагрузки κ_i .

Пусть меньшая из величин $N_{*i}'\kappa_i$ оказалась равной

$$\begin{aligned} N_{*}'\kappa &= \min_{1 \leq i \leq m} N_{*i}'\kappa_i = \\ &= \min_{1 \leq i \leq m} N_i'(\varepsilon_i^*, t_0)\kappa_i = 20. \end{aligned}$$

Тогда значение γ -нижней границы π для вероятности $\pi = \pi(t_0)$ безотказной работы системы на $[0, t_0]$ в номинальном режиме ε_0 , получаемое из формулы табл. 2 при $\gamma = 0,90$, следующее:

$$\pi = (1 - \gamma)^{\frac{1}{N_{*}'\kappa}} = 0,1^{0,05} = 0,89.$$

Пример 7. В условиях табл. 2 каждый i -й из $m = 100$ элементов функционирует в составе системы на интервале $[0, t_0]$ времени в номинальном режиме ε_{0i} , а испытывается по биномиальному плану с остановкой на большем интервале $[0, T]$, где $T = 3t_0 = \eta_0 t_0$, в утяжеленном режиме ε_i^* с коэффициентом κ_i повышения нагрузки.

Пусть система в целом является стареющей на $[0, T]$, а меньшая из величин

$$N_{*i}'\kappa_i = N_i'(\varepsilon_i^*, T)\kappa_i$$

оказалась равной $N_{*}'(T)\kappa = 18$. Тогда значение γ -нижней границы π для вероятности $\pi = \pi(t_0)$ безотказной работы системы на $[0, t_0]$ в номинальном режиме ε_0 , получаемое по формуле из табл. 2 при $\gamma = 0,90$, равно

$$\begin{aligned} \pi &= (1 - \gamma)^{\frac{1}{N_{*}'(T)\kappa_0}} = 0,1^{\frac{1}{1,8 \cdot 3}} = \\ &= 0,96. \end{aligned}$$

Пример 8. В условиях табл. 2 каждый i -й из $m = 100$ элементов функционирует в составе системы на $[0, t_0]$ в номинальном режиме ε_{0i} , а испытывается на меньшем интервале $[0, t_1]$, где $t_1 = \frac{1}{3}t_0 = \eta_0 t_0$, в утяжеленном

режиме с коэффициентом κ_i повышения нагрузки. Пусть система в целом является молодющей на $[0, t_0]$, а по результатам испытаний на $[0, t_1]$ по биномиальному плану с остановкой оказалось, что меньшая из величин

$$\begin{aligned} N_{*i}'\kappa &= \min_{1 \leq i \leq m} N_{*i}'\kappa_i = \\ &= \min_{1 \leq i \leq m} N_i'(\varepsilon_{i*}, t_1)\kappa_i = 18. \end{aligned}$$

Тогда значение γ -нижней границы π для вероятности $\pi = \pi(t_0)$ безотказной работы системы на большем интервале $[0, t_0]$ в номинальном режиме ε_0 , получаемое по формуле из табл. 2 при $\gamma = 0,90$, следующее:

$$\pi = (1 - \gamma)^{\frac{1}{N_{*}'\eta_0\kappa}} = 0,1^{\frac{3}{18}} = 0,68.$$

ИНТЕРВАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ СИСТЕМЫ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ СОЕДИНЕНИЕМ ЭЛЕМЕНТОВ

Рассматривается система из ν параллельно соединенных элементов (см. рис. 1, а), для каждого из которых вероятность $P_i = P(A_i)$ безотказной работы считается неизвестной. Событие A_i состоит в безотказной работе i -го элемента; при $i = \overline{1, \nu}$ события считаются независимыми (в этом случае элементы системы также называются независимыми). Предполагается, что каждый из них проходит N_i автономных (отдельных от системы) испытаний по биномиальному плану с регистрацией числа l_i возникающих отказов (см. рис. 1). Задача ставится следующим образом: рассматривая результаты N_i, l_i автономных испытаний каждого из ν независимых элементов, требуется найти γ -нижнюю границу $\mathcal{P}$ для вероятности

$$\mathcal{P} = 1 - \prod_{i=1}^{\nu} (1 - P_i) \quad (3)$$

безотказной работы системы (рис. 2, а) такую, что выполняется соотношение $P(\mathcal{P} < \mathcal{P}) \geq \gamma$ (4)

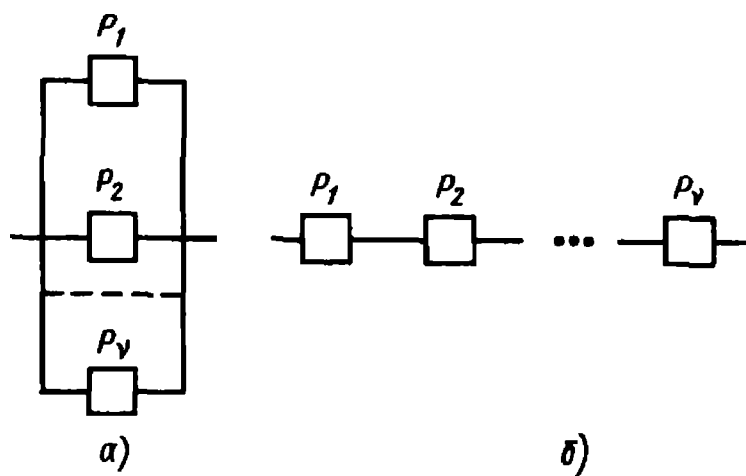


Рис. 2. Система с параллельным соединением элементов и соответствующая ей система с последовательным соединением элементов

для заданной доверительной вероятности γ . Аналогично ставится задача и в том случае, когда каждый элемент испытывается по биномиальной схеме с остановкой. Ее решение может быть сведено к задаче, рассмотренной выше (см. с. 180). Пусть

$$\pi = P_1 P_2 \dots P_v \quad (5)$$

— вероятность безотказной работы системы (рис. 2, б) с v последовательно соединенными элементами, взятыми из системы, показанной на рис. 2, а, а π — статистика, являющаяся γ -нижней границей для этой вероятности. Тогда согласно [64]

$$\underline{\mathcal{P}} = 1 - \left(1 - \pi^{\frac{1}{v}}\right)^v \quad (6)$$

Эта формула справедлива для любого плана испытаний. Если, например, оказалось, что $\pi = 0,49$, то при $v = 2$ имеем $\underline{\mathcal{P}} = 1 - (1 - 0,7)^2 = 0,91$.

Для нахождения статистики π в формуле (6) могут быть использованы данные табл. 1, 2 при $m = v$.

Формулы (3) и (6) относятся к случаю, когда для безотказной работы системы (см. рис. 2, а) необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из v ее элементов выполнял свои функции. При одинаковых независимых элементах в системе, когда $P_1 = P_2 = \dots = P_v = P$, эти формулы принимают вид:

$$\underline{\mathcal{P}} = 1 - (1 - P)^v, \quad \underline{\mathcal{P}} = 1 - (1 - \underline{P})^v, \quad (7)$$

где $\underline{P}$ — статистика, являющаяся γ -нижней границей для вероятности P безотказной работы одного элемента системы.

Пусть из общего числа v испытаниям подвергаются $k \leq v$ элементов, которые испытываются по биномиальному плану, а $N_\Sigma = N_1 + N_2 + \dots + N_k$ и $l_\Sigma = l_1 + l_2 + \dots + l_k$ — суммарное число испытаний и суммарное число отказов. Тогда в формуле (7) для γ -нижней границы $\underline{P}$ следует использовать соответствующие формулы гл. 7 при $N = N_\Sigma$ и $l = l_\Sigma$.

Пусть из общего числа v испытаниям подвергаются $k \leq v$ элементов, которые испытываются друг за другом по биномиальному плану с остановкой, а $N'_\Sigma = N_\Sigma$ при всех $l_i = 0$ (N'_Σ — суммарное число испытаний до возникновения первого отказа в противоположном случае). Тогда в формуле (7) следует использовать соотношения гл. 7 для нахождения статистики $\underline{P}$, относящиеся к рассматриваемому плану испытаний при $N' = N'_\Sigma$.

В случае, когда для безотказной работы системы (см. рис. 2, а) с независимыми одинаковыми элементами необходимо и достаточно, чтобы хотя бы c из v ее элементов выполняли свои функции, вероятность ее безотказной работы выражается в виде

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{P}} &= \sum_{k=0}^{v-c} \binom{v}{k} P^{v-k} (1 - P)^k = \\ &= J_P(c, v - c + 1). \end{aligned} \quad (8)$$

3. Расчет γ -нижней границы $\mathcal{P}$ для вероятности $\mathcal{P}$ безотказной работы на интервале $[0, t_0]$ времени в режиме $\varepsilon_0 = (\varepsilon_{01} \dots \varepsilon_{0v})$ системы с параллельным соединением v элементов по результатам их биномиальных испытаний

Исходные допущения	Расчетные формулы [66]	
	Система из разных элементов	Система из одинаковых элементов
Табл. 1	$\underline{\mathcal{P}} = 1 - (1 - (f_2(N, l', \gamma))^{1/v})^v;$ $\underline{\mathcal{P}} = 1 - (1 - (f_2(N, l'_*, \gamma))^{1/vs})^v$	$\underline{\mathcal{P}} = 1 - (1 - \underline{P})^v, c = 1;$ $\underline{\mathcal{P}} = J_P(c, v - c + 1),$ $c \geq 1;$ $\underline{P} = f_2(N_\Sigma, l_\Sigma, \gamma);$ $\underline{P} = (f_2(N_\Sigma, l_{\Sigma*}, \gamma))^{1/s}$
Табл. 2	$\underline{\mathcal{P}} = 1 - (1 - (1 - \gamma)^{1/vN'})^v;$ $\underline{\mathcal{P}} = 1 - (1 - (1 - \gamma)^{1/vN's})^v$	$\underline{P} = (1 - \gamma)^{1/N'_\Sigma};$ $\underline{P} = (1 - \gamma)^{1/N'_\Sigma s}$

Если $c = 1$, то из (8) следует формула (7). Статистика

$$\underline{\mathcal{P}} = J_P(c, v - c + 1) \tag{9}$$

является γ -нижней границей для вероятности $\mathcal{P}$ из (8). Здесь γ -нижняя граница $\underline{P}$ для вероятности P находится по формулам гл. 7. Соотношения для $\underline{\mathcal{P}}$ при $c = 1$ приведены в табл. 3.

**ИНТЕРВАЛЬНАЯ ОЦЕНКА
ВЕРОЯТНОСТИ БЕЗОТКАЗНОЙ
РАБОТЫ СИСТЕМЫ
С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО-
ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ СОЕДИНЕНИЕМ
ЭЛЕМЕНТОВ**

Рассматривается система из m последовательно соединенных блоков (рис. 3, а). Каждый из блоков, в свою очередь, содержит v_i элементов, соединенных параллельно, для каждого из которых вероятность $P_{ij} = P(A_{ij})$ безотказной работы считается неизвестной. Событие A_{ij} состоит в безотказной работе j -го элемента из i -го блока; при $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, v_i}$ собы-

тия A_{ij} считаются независимыми (в этом случае элементы системы также называются независимыми). Предполагается, что элемент (i, j) из i -го блока с номером j проходит N_{ij} испытаний по биномиальному плану с регистрацией числа l_{ij} возникающих отказов. Задача ставится следующим образом: рассматривая результаты N_{ij}, l_{ij} автономных испытаний элементов системы, требуется найти γ -нижнюю границу $\underline{\mathcal{P}}_0$ для вероятности

$$\mathcal{P}_0 = \prod_{i=1}^m \mathcal{P}_i, \quad \mathcal{P}_i = 1 - \prod_{j=1}^{v_i} (1 - P_{ij}) \tag{10}$$

безотказной работы системы (см. рис. 3, а), такую, что выполняется соотношение $P(\underline{\mathcal{P}}_0 < \mathcal{P}_0) \geq \gamma$ для заданной доверительной вероятности γ . Аналогично ставится задача и в том случае, когда каждый элемент испытывается по биномиальному плану с остановкой. Ее решение может быть сведено к задаче, рассмотренной на с. 183. Пусть v — меньшее из чисел v_i и из каждого i -го блока взяты v про-

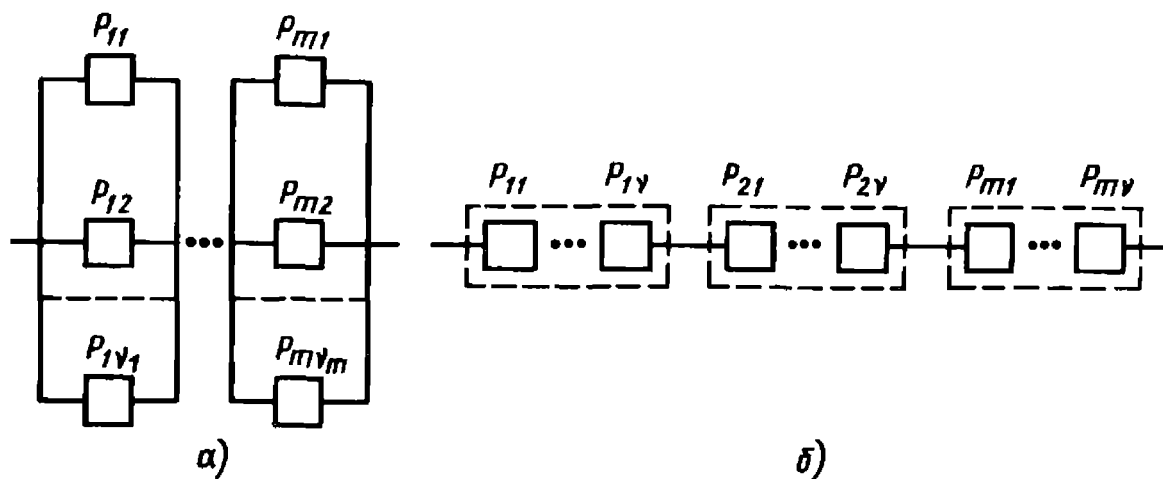


Рис. 3. Система с последовательно-параллельным соединением элементов и соответствующая ей система с последовательным соединением элементов

извольных различных элементов с вероятностями $P_{i1}, P_{i2}, \dots, P_{iv}$ безотказной работы. Если из этих элементов составлена (мысленно) система с v_m выбранными элементами (рис. 3, б), то произведение

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \prod_{i=1}^m P_{i1} P_{i2} \dots P_{iv} = \\ &= \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^v P_{ij} \end{aligned} \quad (11)$$

представляет собой вероятность безотказной работы системы (см. рис. 3, б). Предположим, что каждый из v_m выбранных элементов проходит автономные испытания, по результатам которых находятся значения γ -нижней границы π_0 для вероятности π_0 из (11).

Тогда согласно [67] статистика

$$\mathcal{P}_0 = 1 - \left(1 - \frac{1}{\pi_0^v}\right)^v, \quad v = \min_{1 \leq i \leq m} v_i \quad (12)$$

является γ -нижней границей для вероятности $\mathcal{P}_0$ из (10). При этом статистика π_0 может быть найдена из табл. 1 и 2. Преимуществом формулы (12) является то, что она справедлива для любых планов испытаний, причем при ее использовании допускается, чтобы не все элементы системы участвовали в испытаниях. Однако в (12)

учитывается лишь меньшее v из чисел v_i . Пусть каждый из $m_\Sigma = v_1 + v_2 + \dots + v_m$ независимых элементов испытывается по биномиальному плану с оставкой, а полученные при этом исходы N'_{ij} являются независимыми при $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, v_i$. Тогда согласно [65] γ -нижняя граница $\mathcal{P}_0$ для вероятности $\mathcal{P}_0$ из (10) находится по формуле

$$\mathcal{P}_0 = \min_{1 \leq i \leq m} \mathcal{P}_i, \quad (13)$$

где $\mathcal{P}_i$ — статистика, представляющая собой γ -нижнюю границу для вероятности $\mathcal{P}_i$ из (10). Она определяется для $\mathcal{P}_i$ из табл. 3.

Формула (13) справедлива и в том случае, когда некоторые из блоков имеют одинаковые элементы, в то время как другие содержат различные [66]. Не исключается и ситуация, когда некоторые из вероятностей $\mathcal{P}_i$ в (10) выражаются в виде (8), т. е. когда

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_i &= \sum_{k=0}^{v_i - c_i} \binom{v_i}{k} P_i^{v_i - k} (1 - P_i)^k = \\ &= J_{P_i}(c_i, v_i - c_i + 1), \end{aligned} \quad (14)$$

где c_i — то число из v_i одинаковых элементов из i -го блока, выполнение возложенных функций на которые является необходимым условием для безотказной работы i -го блока. В этом

4. Исходные данные (допущения см. в табл. 3)

Номер i -го блока	Номер j -го элемента	Режим и время испытаний	Результат испытаний
1	1	$\varepsilon_{11}^*; \kappa_{11} = 2;$ $T_{11} = 2t_0$	$N'_{*11} = 3$
	2	$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^0;$ $\kappa_{12} = 1;$ $T_{12} = 3t_0$	$N'_{*12} = 5$
2	1	$\varepsilon_2^*; \kappa_2 = 3$	$N'_{*\Sigma 2} = 7$
	2	$T_2 = t_0$	
3	1	$\varepsilon_3^*; \kappa_3 = 2$	$N'_{*\Sigma 3} = 15$
	2	$T_3 = 2t_0$	

случае в (13) используем формулу [66]
 $\mathcal{P}_i = J_{P_i}(c_i, v_i - c_i + 1),$

где P_i находится из табл. 3.

Пример 9. Дана система (см. рис. 3,а), составленная из $m = 3$ блоков, содержащих $v_1 = 2, v_2 = 2, v_3 = 3$ независимых элементов, соединенных в каждом блоке параллельно. Элементы в первом блоке различные, а во втором блоке одинаковые; причем для этих блоков $c_i = 1$. В третьем блоке элементы одинаковы, а $c_3 = 2$. Требуется при $\gamma = 0,90$ найти значение γ -нижней границы $\mathcal{P}_0$ для вероятности

$$\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \mathcal{P}_3$$

безотказной работы системы на $[0, t_0]$, для которой

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &= 1 - (1 - P_{11})(1 - P_{12}); \quad \mathcal{P}_2 = \\ &= 1 - (1 - P_{21})^2; \quad \mathcal{P}_3 = \\ &= \sum_{k=0}^2 \binom{3}{k} P_3^{3-k} (1 - P_3)^k, \end{aligned}$$

если заданы следующие исходные данные (табл. 4), полученные при испытаниях по биномиальному плану с остановкой.

Решение. Из формул табл. 3, а также из (13) и (9) с учетом того, что $\gamma = 0,90$ и

$$\begin{aligned} s_1 &= \min(3 \cdot 2 \cdot 2, 5 \cdot 1 \cdot 3) = 12; \\ s_2 &= 7 \cdot 3 = 21; \quad s_3 = 15 \cdot 2 \cdot 2 = 60, \end{aligned}$$

находим:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &= 1 - \left(1 - (1 - \gamma)^{\frac{1}{12 \cdot 2}}\right)^2 = \\ &= 0,992; \quad \mathcal{P}_2 = 1 - \end{aligned}$$

$$- \left(1 - (1 - \gamma)^{\frac{1}{21}}\right)^2 = 0,990;$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_3 &= \sum_{k=0}^1 \binom{3}{k} P_3^{3-k} (1 - P_3)^k = \\ &= P_3^3 + 3P_3^2(1 - P_3); \end{aligned}$$

$$P_3 = (1 - \gamma)^{\frac{1}{60}} = 0,962; \quad \mathcal{P}_3 = 0,996.$$

Таким образом, искомое значение $\mathcal{P}_0 = \min_i \mathcal{P}_i = 0,990$.

ИНТЕРВАЛЬНАЯ ОЦЕНКА
ВЕРОЯТНОСТИ БЕЗОТКАЗНОЙ
РАБОТЫ СИСТЕМЫ
ПРИ ИЗВЕСТНЫХ
КОЭФФИЦИЕНТАХ
ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ
ИЗБЫТОЧНОСТИ

Произвольной системе может быть поставлена в соответствие система с последовательным соединением элементов при выполнении следующих условий. Пусть C — событие, состоящее в безотказной работе некоторой произвольной системы, A_i — событие, состоящее в безотказной работе i -го элемента при его автономном функционировании.

Событие A_i может также состоять в выполнении определенного i -го условия, оговоренного в технической документации, например, A_i может со-

стоять в выполнении условия вида $a_i \leq \xi_i \leq b_i$ на некоторую случайную величину ξ_i , где a_i и b_i — границы допуска $[a_i, b_i]$. Возникновение события A_i может еще не привести (с вероятностью единица) к отказу $\bar{C}$ системы в целом. Если при отказе $\bar{C}$ системы реализуется хотя бы одно из событий $\bar{A}_i$, то согласно [64] выполняется соотношение

$$C = \bigcap_{i=1}^m (A_i \cup C), \quad R = P(C) = \\ = P\left(\bigcap_{i=1}^m D_i\right), \quad D_i = A_i \cup C,$$

где $R = P(C)$ — вероятность безотказной работы рассматриваемой произвольной системы.

Если при $i = \overline{1, m}$ события A_i независимы или попарно положительно коррелированы, то согласно [66] выполняется соотношение

$$R = P(C) = P\left(\bigcap_{i=1}^m D_i\right) \geq \pi = \\ = \prod_{i=1}^m P'_i. \quad (15)$$

Здесь

$$P'_i = 1 - u'_i q_i, \quad q_i = 1 - P_i, \quad P_i = \\ = P(A_i), \quad (16)$$

причем

$$u'_i = P(\bar{C} | \bar{A}_i) = 1 - u_i, \quad P'_i \geq P_i^{1-u_i}. \quad (17)$$

Из соотношения (15) следует, что показатель $P(C)$ вероятности безотказной работы произвольной системы (при указанных выше условиях) оценивается снизу показателем π безотказной работы системы с последовательным соединением m независимых элементов. Соотношение (16) означает, что вероятность $P'_i = P(D_i)$ безотказной работы i -го элемента этой последовательной системы выражается через вероятность $P_i = P(A_i) = 1 - q_i$ безотказной работы i -го элемента исходной произвольной системы и вероятность $u'_i = P(\bar{C} | \bar{A}_i)$ того, что при возникновении события $\bar{A}_i$ происходит от-

каз $\bar{C}$ системы в целом. Число $u_i = 1 - u'_i$ из (17) называется коэффициентом функциональной избыточности i -го элемента в рассматриваемой произвольной системе, а u'_i — коэффициентом влияния i -го элемента на систему в целом. Выполняется неравенство [64]

$$0 \leq u_i \leq R. \quad (18)$$

В (18) равенство $u_i = 0$ соответствует случаю, когда при возникновении отказа $\bar{A}_i$ элемента с номером i система не выполняет возложенные на нее функции [и тогда $u_i = P(C | \bar{A}_i) = 0$]. При всех $u_i = 0$ вероятность $R = P(C) = P_1 P_2 \dots P_m$.

Равенство $u_i = P(C) = P(C | \bar{A}_i)$ соответствует случаю, когда i -й элемент играет настолько несущественную роль в системе в целом, что факт возникновения события $\bar{A}_i$ не влияет на C . Коэффициент u_i из (17) находится по результатам статистического моделирования условия C выполнения системой возложенных на нее задач, или исходя из специфики функционирования i -го элемента в составе системы [17]. Число P'_i из (6) назовем вероятностью безотказной работы i -го элемента системы с учетом ее функциональной избыточности, или вероятностью безотказной работы i -го элемента ассоциированной системы.

Рассмотрим произвольную систему с показателем $R = P(C)$ безотказной работы, удовлетворяющим соотношениям (15)–(17), в которых коэффициенты u_i функциональной избыточности известны. Пусть каждая из вероятностей P_i оценивается по результатам биномиальных испытаний с остановкой путем нахождения γ -нижних границ P_i по формулам, приведенным в табл. 2. Тогда согласно [66] статистика

$$R = (1 - \gamma)^{(1-u)/N' \kappa \eta_0}, \\ \frac{1-u}{N' \kappa \eta_0} = \min_{1 \leq i \leq m} \frac{1-u_i}{N'_i \kappa_i \eta_{0i}}$$

является γ -нижней границей для неизвестной вероятности $R = P(C)$.

Глава 15. Оценка показателей безотказности при планах испытаний с измерением наработок до отказа

Предварительные замечания. В данной главе изложены расчетно-экспериментальные методы оценивания ВБР системы с тем или иным структурным построением для случая, когда в ходе испытаний элементов системы фиксируются наработки отказавших образцов и образцов, снятых с испытаний по тем или иным причинам. Задача оценивания ВБР системы здесь, так же как и в гл. 14, заключается в определении точечной и интервальной оценки ВБР системы по результатам испытаний ее элементов.

СИСТЕМЫ С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ССН

Последовательная ССН является основной в задачах анализа надежности и будет рассмотрена наиболее подробно. Как будет ясно из дальнейшего материала, расчет ДГ для ВБР системы с произвольной П-структурой можно свести к расчету ВБР некоторой эквивалентной системы с последовательной ССН.

Графическое изображение последовательной ССН представлено на рис. 1.

ССН типов II и III являются частными случаями ССН типа I, которая переходит в тип II при $n_1 = n_2 = \dots = n_m = 1$ и в тип III при $m = 1$. Последний случай (ССН типа III) не представляет собой ничего нового при рассмотрении системы, так как оценивание ВБР системы в этом случае сводится к оценке ВБР одного элемента, что уже было рассмотрено выше (см. гл. 7 и 8).

Методика расчета точечных и интервальных оценок ВБР системы с последовательной ССН зависит от плана испытаний элемента i -го типа системы

и априорной информации о законе распределения наработки до отказа i -го элемента, $i = \overline{1, m}$.

Возможные (основные) планы испытаний элемента i -го типа системы приведены в гл. 8.

Здесь мы ограничиваемся рассмотрением планов типа U (без замены отказавших образцов), так как планы типа R (с заменой отказавших образцов) не вносят ничего нового в рассмотрение результатов испытаний (наработок).

При отсутствии каких-либо сведений о виде или типе закона распределения показателя надежности следует оценивать по методике, изложенной в гл. 14.

О законе распределения наработки до отказа i -го элемента может иметься различная информация:

известен вид закона распределения и неизвестны его параметры;

неизвестна параметрическая форма закона распределения, но известно, что распределение относится к классу ВФИ (ВСФИ)-распределений (т. е. к классу стареющих распределений).

В зависимости от этих признаков (и от их сочетания среди элементов системы) будем различать следующие три ситуации:

1. Все элементы проходят испытания по одному и тому же плану из допустимого набора и известен вид закона распределения;

2. Все элементы проходят испытания по одному и тому же плану испытаний и распределения наработки до отказа элементов одинаковы и относятся к классу ВФИ-(ВСФИ) распределений;

3. Некоторые или все элементы проходят испытания по различным планам испытаний и (или) имеют различ-

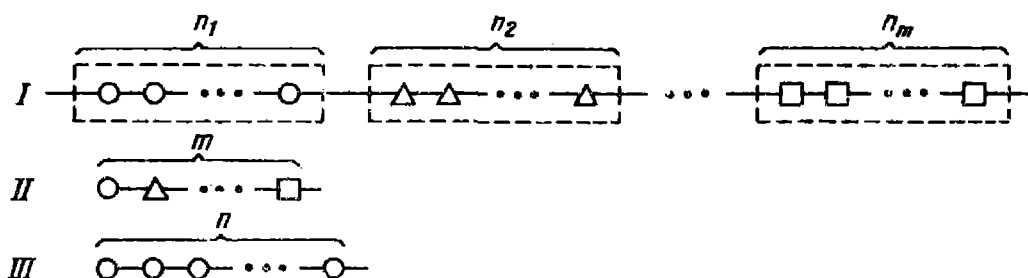


Рис. 1. Разновидности последовательной ССН системы с наличием однотипных элементов (I), из разнотипных элементов (II), из однотипных элементов (III)

ные законы распределения наработки до отказа и (или) по каждому элементу имеется лишь обобщенная информация (в виде оценок $\hat{P}_i$ — точечной и P_i — интервальной ВБР).

Каждая из этих ситуаций рассмотрена ниже.

Однотипные планы испытаний элементов и параметрические модели оценивания. Предполагается, что различные типы элементов системы испытываются по одному и тому же плану испытаний, например, по плану $[N_i UT_i]$ или $[N_i Ur_i]$, $i = \overline{1, m}$ и т. д., а наработка до отказа любого i -го элемента является случайной величиной с одним и тем же законом распределения, вид которого известен, и неизвестны лишь его параметры.

В результате испытаний элементов системы по одному из указанных планов имеется информация в виде наработок до отказа или наработок до цензурирования для каждого i -го типа элементов ($i = \overline{1, m}$).

При плане испытаний типа $[N_i UT_i]$ фиксируются наработки отказавших за время T_i образцов из общего числа N_i образцов

$$t_{(1)}^i \leq t_{(2)}^i \leq \dots \leq t_{(j)}^i \leq \dots \leq t_{(d_i)}^i,$$

$$i = \overline{1, m},$$

где индекс d_i обозначает число наработок отказавших за время T_i образцов.

При плане испытаний типа $[N_i UT_i]$ фиксируются наработки до r_i -го отказа из общего числа N_i образцов:

$$t_{(1)}^i \leq t_{(2)}^i \leq \dots \leq t_{(j)}^i \leq \dots \leq t_{(r_i)}^i,$$

$$i = \overline{1, m}.$$

При плане испытаний типа $[N_i UZ_i]$ фиксируются:

наработки отказавших за время T_i образцов и образцов, снятых с испытания, т. е.

$$t_{(1)}^i \leq t_{(2)}^i \leq \dots \leq t_{(j)}^i \leq \dots \leq t_{(d_i)}^i \text{ и}$$

$$\tau_{(1)}^i \leq \tau_{(2)}^i \leq \dots \leq \tau_{(j)}^i \leq \dots \leq \tau_{(k_i)}^i$$

(индекс k_i обозначает число образцов, снятых с испытания), если $[N_i UZ_i] = [N_i UT_i^1, T_i^2, T_i^{k_i}]$;

наработки до r_i -го отказа и наработки снятых с испытаний образцов из общего числа N_i образцов, т. е.

$$t_{(1)}^i \leq t_{(2)}^i \leq \dots \leq t_{(j)}^i \leq \dots \leq t_{(r_i)}^i \text{ и}$$

$$\tau_{(1)}^i \leq \tau_{(2)}^i \leq \dots \leq \tau_{(j)}^i \leq \dots \leq \tau_{(k_i)}^i,$$

если $[N_i UZ_i] = [N_i Ur_i^1, r_i^2, r_i^{k_i}]$.

По этим исходным данным оцениваются неизвестные параметры законов распределения наработок до отказа элемента любого i -го типа (методами, изложенными в гл. 8), после чего рассчитываются точечная и интервальные оценки ВБР последовательной системы.

Расчетные формулы для этих оценок в зависимости от закона распределения наработки до отказа i -го элемента системы приведены ниже.

Экспоненциальный закон распределения наработки до отказа. Показатель ВБР для системы с последова-

тельной ССН общего вида I (см. рис. 1) имеет вид

$$\pi(t) = \exp\{-t\Lambda\}, \quad \Lambda = \sum_{i=1}^m \Lambda_i, \quad (1)$$

где $\Lambda_i = \lambda_i n_i$ — для ССН типа I, $\Lambda_i = \lambda_i$ — для ССН типа II и $\Lambda_i = \lambda_n$ (при $m = 1$) — для ССН типа III.

Точечная оценка ВБР определяется в виде

$$\hat{\pi}(t) = \exp\{-t\hat{\Lambda}\}, \quad (2)$$

а односторонние ДГ — $\underline{\pi}(t)$ и $\bar{\pi}(t)$ заданного уровня γ в виде

$$\underline{\pi}(t) = \exp\{-t\bar{\Lambda}\}, \quad \bar{\pi}(t) = \exp\{-t\hat{\Lambda}\}, \quad (3)$$

где $\hat{\Lambda}$, $\bar{\Lambda}$ и $\underline{\Lambda}$ определяются по формулам табл. 1.

Другие законы распределения наработки до отказа. Здесь рассмотрены наиболее употребительные на практике законы распределения: Вейбулла—Гнеденко, нормальный (усеченный) и логарифмически-нормальный.

Правила оценки параметров этих законов распределения при испытаниях по планам $[NUT]$ и $[NUR]$ изложены в гл. 8.

Показатель ВБР для систем с последовательной ССН общего вида (см. рис. 1) в указанных случаях имеет следующий вид:

в случае распределения Вейбулла—Гнеденко

$$\pi(t) = \exp\left\{-\sum_{i=1}^m n_i \exp[-V_i(t)]\right\}, \quad (4)$$

где

$$V_i(t) = b_i \ln(a_i/t), \quad i = \overline{1, m} \quad (5)$$

(a_i и b_i — параметры распределения для элементов i -го типа);

в случае нормального (усеченного) распределения

$$\pi(t) = \prod_{i=1}^m \Phi^{n_i}(h_i), \quad (6)$$

где $h_i = (\mu_i - t)/\sigma_i$

(μ_i и σ_i — параметры распределения для элементов i -го типа, причем $\mu_i > 3\sigma_i$, $i = \overline{1, m}$);

в случае логарифмически-нормального распределения имеет вид (6), где

$$h_i = (\mu_i - \ln t)/\sigma_i \quad (7)$$

(μ_i и σ_i — параметры распределения для элементов i -го типа).

Последний случай ничем не отличается от предыдущего, если $\ln t$ заменить на t . Следовательно, все расчетные формулы для нормального закона распределения сохраняются, если вместо t везде ставить $\ln t$.

В случае распределения Вейбулла—Гнеденко и нормального (усеченного) распределения расчетные формулы для определения точечной оценки $\hat{\pi}(t)$ и интервальных оценок $\underline{\pi}(t)$ и $\bar{\pi}(t)$ уровня γ показателя $\pi(t)$ приведены в табл. 2.

Пример 1. Система с последовательной ССН состоит из трех типов ($m = 3$) элементов, образующих последовательные блоки соответственно из $n_1 = 3$, $n_2 = 2$, $n_3 = 3$ однотипных элементов.

Испытания образцов каждого типа проводились по плану $[N, U, z]$, а именно:

элементы первого типа ($i = 1$) в количестве $N_1 = 20$ испытывались до появления одного отказа ($r_1^1 = 1$), после чего с испытаний сняли четыре образца ($n_1^1 = 4$), а остальные испытывались до появления еще одного отказа ($r_1^{(2)} = 1$);

элементы второго типа ($i = 2$) в количестве $N_2 = 15$ испытывались до появления двух отказов ($r_2^{(1)} = 2$), после чего с испытаний сняли пять образцов ($n_2^1 = 5$), а остальные испытывались до появления еще одного отказа ($r_2^{(2)} = 1$);

элементы третьего типа ($i = 3$) в количестве $N_3 = 10$ испытывались до появления двух отказов ($r_3^1 = 2$).

Требуется определить точечную оценку и НДГ уровня $q = 0,9$ ВБР системы $\pi(t)$ при $t = 1$ мес., если закон распределения наработки до отказа для каждого типа элементов экспоненциальный. Исходные данные для расчетов приведены в табл. 3.

1. Точечные и интервальные оценки показателя $\Lambda = \sum_{i=1}^m \Lambda_i$

План испытаний	Точечная оценка $\Lambda = \sum_{i=1}^m \hat{\Lambda}_i n_i$	Односторонние ДГ для		Обозначения
		НДГ уровня q	ВДГ уровня q	
$[N_i U T_i]$	$\hat{\Lambda}_i = \frac{d_i}{S_i},$ где $S_i = \sum_{j=1}^{d_i} t_{(j)}^i + (N_i - d_i) T_i$	$\underline{\Lambda} = \frac{1}{2\tilde{S}_m} \chi_{1-q}^2(2d_\Sigma)$	$\bar{\Lambda} = \frac{1}{2\tilde{S}_1} \chi_q^2(2d_\Sigma + 2)$	$d_\Sigma = \sum_{i=1}^m d_i;$ $\tilde{S}_1 = \min (S_i/n_i);$ $\tilde{S}_m = \max (S_i/n_i)$
$[N_i U r_i]$	$\hat{\Lambda}_i = \frac{r_i - 1}{S_i},$ где $S_i = \sum_{j=1}^{r_i} t_{(j)}^i + (N_i - r_i) t_{(r_i)}^i$	$\underline{\Lambda} = \frac{1}{2\tilde{S}_m} \chi_{1-q}^2(2r_\Sigma)$	$\bar{\Lambda} = \frac{1}{2\tilde{S}_1} \chi_q^2(2r_\Sigma)$	$r_\Sigma = \sum_{i=1}^m r_i;$ $\tilde{S}_1 = \min (S_i/n_i);$ $\tilde{S}_m = \max (S_i/n_i)$
$[N_i U z_i]$	$\hat{\Lambda}_i = \frac{D_i}{S_{z_i}},$ где $S_{z_i} = \sum_{j=1}^{k_i} S_j^i$	$\underline{\Lambda} = \frac{1}{2\tilde{S}_{zm}} \chi_{1-q}^2(2D_\Sigma)$	$\bar{\Lambda} = \frac{1}{2\tilde{S}_{z1}} \chi_q^2(2D_\Sigma + 2)$	$\tilde{S}_{zm} = \max (S_{z_i}/n_i);$ $\tilde{S}_{z1} = \min (S_{z_i}/n_i);$ D_i, D_Σ — см. примечание
$[N_i U T_i],$ $[N_i U r_i]$ при весьма отличающихся величинах S_i	$\hat{\Lambda}_i = \frac{d_i^*}{S_i},$ где $d_i^* = \begin{cases} d_i & \text{при } [N_i U T_i]; \\ r_{i-1} & \text{при } [N_i U r_i] \end{cases}$	$\underline{\Lambda} = \frac{1}{2\tilde{S}_m} \chi_{1-q}^2(2D)$	$\bar{\Lambda} = \frac{1}{2\tilde{S}_1} \chi_q^2(2D + 2)$	$D = \tilde{S}_1 \sum_{i=1}^m (d_i n_i / S_i);$ $\tilde{S}_1 = \min (S_i/n_i);$ $\tilde{S}_m = \max (S_i/n_i)$

Примечание. План $[N_i U z_i]$ объединяет два типа планов — план $[N_i U T_i^1 T_i^2 \dots T_i^k]$, при котором в моменты T_i^1, T_i^k снимаются с испытаний неотказавшие образцы i -го типа, и план $[N_i U r_i^1 r_i^2 \dots r_i^k]$, при котором снимаются с испытаний неотказавшие образцы i -го типа после появления r_i^1, r_i^2 и т. д. до r_i^k отказов. Поэтому $D_i = \sum_{j=1}^{k_i} d_i^j$ и $D_\Sigma = \sum_{i=1}^m D_i$ при планах первого типа и $D_i = \sum_{j=1}^{k_i} r_i^j - 1$ и $D_\Sigma = \sum_{i=1}^m D_i + m - 1$ при планах второго типа.

2. Оценка показателя ВБР для систем с последовательной ССН

Закон распределения и план испытаний	Точечная оценка показателя $\pi(t)$	Односторонние ДГ для показателя $\pi(t)$		Примечание
		НДГ уровня γ	ВДГ уровня γ	
Вейбулла—Гнеденко $F_i(t) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{t}{a_i}\right)^{b_i}\right\}$ $i = \overline{1, m};$ $[N_i U T_i];$ $[N_i U r_i]$	$\hat{\pi}(t) = \exp\left\{-\sum_{i=1}^m n_i \exp\left\{\times [-\hat{V}_i(t)]\right\}\right\},$ где $\hat{V}_i(t) = b_i \ln(a_i/t)$ (оценки a_i и b_i определены в гл. 8)	$\underline{\pi}(t) = \min_{1 \leq i \leq m} L_i[\gamma, \hat{V}(t)],$ где $\hat{V}(t) = -\ln \ln[1/\hat{\pi}(t)]$ при $\hat{\pi}(t) \geq 0,9$ и $N_i \neq N, r_i \neq r$	$\bar{\pi}(t) = \min_{1 \leq i \leq m} L_i[1-\gamma, \hat{V}(t)],$ при $\hat{\pi}(t) < 0,9$ и $N_i = N, r_i = r$	$n_i = 1;$ $L_i[\dots] - \text{см. рис. 11—16 приложения при заданных } N_i \text{ и } r_i, i = \overline{1, m};$ $L[\dots] \text{ определяется также при заданных } N \text{ и } r$
Нормальный $F_i(t) = \Phi\left(\frac{t - \mu_i}{\sigma_i}\right),$ $i = \overline{1, m};$ $[N_i U r_i]$	$\hat{\pi}(t) = \prod_{i=1}^m \Phi^{n_i}(\bar{h}_i),$ где $\bar{h}_i = (\hat{\mu}_i - t)/\hat{\sigma}_i$ (оценки $\hat{\mu}_i$ и $\hat{\sigma}_i$ определены в гл. 8)	$\underline{\pi}(t) = \Phi(\underline{h}),$ где $\underline{h} = \frac{1}{\sqrt{N_0}} \delta(\bar{h} \sqrt{N_0}, N_0 - 1, \gamma)$ (см. табл. 10 приложения) или $\underline{h} \simeq \bar{h} - u_\gamma \sqrt{\frac{1}{N_0} \left(1 + \frac{1}{2} \bar{h}^2\right)}$	$\bar{\pi}(t) = \Phi(\bar{h}),$ где $\bar{h} = \frac{1}{\sqrt{N_0}} \delta(\bar{h} \sqrt{N_0}, N_0 - 1, 1 - \gamma)$ (см. табл. 10 приложения)	$n_i = 1;$ $N_0 = \min_{1 \leq i \leq m} (N_i);$ $\bar{h} = \Phi^{-1}[\hat{\pi}(t)];$ $u_\gamma - \text{см. табл. 7 приложения}$

3. Исходные данные

№ типа элемента	Результаты испытаний при каждой остановке и суммарные наработки								
	Первая остановка ($k_i = 1$)					Вторая остановка ($k_i = 2$)			
	N_i	r_i^1	$t_i^{(1) 1}$	$t_i^{(1) 2}$	n_i^1	S_i^1	r_i^2	$t_i^{(2) 1}$	S_i^2
$i = 1$	20	1	$t_1^{(1) 1} = 3,4$	—	4	17	1	$t_1^1 = 10,4$	156
$i = 2$	15	2	$t_2^{(1) 1} = 5,2$	$t_2^{(1) 2} = 8,4$	5	55,6	1	$t_2^1 = 12,8$	102,4
$i = 3$	10	2	$t_3^{(1) 1} = 9,1$	$t_3^{(1) 2} = 12,3$	—	119,8	—	—	—

Решение. Поясним сначала, как вычислялись суммарные наработки для элементов каждого типа S_i^j при каждой остановке испытаний:

$$S_i^1 = \sum_{j=1}^2 t_i^{(1) j} + n_i^1 t_i^{(1) 2}; S_i^2 =$$
$$= t_i^{(2) 1} (N_i - n_i^1 - r_i^1), \text{ т. е.}$$

для $i = 1$ $S_1^1 = 3,4 + 4 \cdot 3,4 = 17;$
 $S_1^2 = 10,4 (20 - 4 - 1) \approx 156;$
для $i = 2$ $S_2^1 = (5,2 + 8,4) +$
 $+ 8,4 \cdot 5 = 55,6; S_2^2 = 12,8 (15 - 5 -$
 $- 2) = 102,4;$
для $i = 3$ $S_3^1 = (9,1 + 12,3) +$
 $+ (10 - 2) 12,3 = 119,8.$

Суммарные наработки S_i^j можно вычислять и другим способом, суммируя наработки всех образцов до первой остановки, между второй и первой и т. д.

Поскольку испытания элементов каждого типа велись по плану $[N_i U z_i]$ с многократным [в данном случае двукратным для элементов первого

($i = 1$) и второго ($i = 2$) типов и однократным — для элементов ($i = 3$) третьего типа] цензурированием, то используем расчетные соотношения из табл. 1.

Имеем соответственно:
для $i = 1$ $\tilde{S}_1 = S_1^1 + S_1^2 = 17 +$
 $+ 156 = 173; D_1 = r_1^1 + r_1^2 = 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \hat{\lambda}_1 = \frac{D_1}{\tilde{S}_1} = 0,0058;$
для $i = 2$ $\tilde{S}_2 = S_2^1 + S_2^2 = 55,6 +$
 $+ 102,4 = 158; D_2 = r_2^1 + r_2^2 - 1 =$
 $= 2 \Rightarrow \hat{\lambda}_2 = \frac{D_2}{\tilde{S}_2} = 0,013;$
для $i = 3$ $\tilde{S}_3 = S_3^1 = 119,8; D_3 =$
 $= r_3^1 - 1 = 1 \Rightarrow \hat{\lambda}_3 = \frac{D_3}{\tilde{S}_3} = 0,0008 \text{ и,}$

следовательно $\hat{\Lambda} = \sum_{i=1}^m \hat{\lambda}_i n_i = 0,071,$
а точечная оценка ВБР по формуле (2) равна
 $\hat{\pi} = \exp \{-1 \cdot \hat{\Lambda}\} = \exp \{-0,071\} =$
 $= 0,93.$

4. Оценки параметров

Величина	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
$\hat{a}_i$	6457,5	3944,2	11 271	3619,2	2480
$\hat{b}_i$	2,64	3,52	2,43	4,76	8,93

Для вычисления НДГ уровня $q = 0,9$ для ВБР находим предварительно:

$$D_{\Sigma} = \sum_{i=1}^m D_i + m - 1 = (1 + 2 + 1) + 3 - 1 = 6;$$

$$\tilde{S}_0 = \min(\tilde{S}_i/n_i) = \min(173/3; 158/2; 119,8/2) = 57,7,$$

а затем по табл. 8 приложения находим значение $\chi_q^2(2D_{\Sigma} + 2) = \chi_{0,9}^2 \times (14) = 21,1$. Затем определяем

$$\bar{\Lambda} = \frac{1}{2\tilde{S}_0} \chi_q^2(2D_{\Sigma} + 2) = \frac{1}{2 \cdot 57,7} 21,1 = 0,18$$

и наконец, по формуле (3) вычисляем НДГ для ВБР системы:

$$\pi = \exp\{-1 \cdot \bar{\Lambda}\} = \exp\{-0,18\} = 0,83.$$

Пример 2. Система имеет последовательную ССН из пяти различных типов ($m = 5$) элементов, наработка до отказа которых подчиняется распределению Вейбулла—Гнеденко.

По результатам испытаний по планам $[N_i U r_i]$ с $N_i = 15$, $r_i = 3$ для $i = 1, 2, 3$ и с $N_j = 8$, $r_j = 5$ для $j = 4$ и 5 были вычислены оценки неизвестных параметров a_i и b_i (по методике, изложенной в гл. 8), которые сведены в табл. 4.

Требуется определить точечную оценку $\hat{\pi}(t)$ и НДГ уровня $q = 0,9$ для ВБР системы $\pi(t)$ за наработку $t = 1000$ ч.

Решение. По формулам из табл. 2 находим точечную оценку ВБР (с учетом того, что все $n_i = 1$):

$$\hat{V}_{1t} = 4,92; \quad \hat{V}_{2t} = 4,93; \quad \hat{V}_{3t} = 5,83;$$

$$\hat{V}_{4t} = 6,2; \quad \hat{V}_{5t} = 8,04; \quad t = 1000$$

и

$$\hat{\pi}(1000) = \exp\{-e^{-4,92} - e^{-4,93} - e^{-5,83} - e^{-6,2} - e^{-8,04}\} = 0,98.$$

Для определения НДГ уровня $q = 0,9$ для ВБР $\pi(1000)$ предварительно находим (см. табл. 2)

$$\hat{V} = \hat{V}(1000) = -\ln \ln(1/\hat{\pi}(1000)) = 3,9.$$

Затем, используя рис. 11—16 приложения, по значениям $N_1 = 15$, $r_1 = 3$, $q = 0,9$ находим функцию $L_1(q, \hat{V}) = 0,86$ (для элементов с $i = 1, 2, 3$), а по значениям $N_2 = 8$, $r_2 = 5$, $q = 0,9$ находим функцию $L_2(q, \hat{V}) = 0,89$ (для элементов с $i = 4$ и 5). Окончательно имеем

$$\pi(1000) = \min_{1 \leq i \leq 5} L_i(q, \hat{V}) =$$

$$= \min\{L_1(q, \hat{V}), L_2(q, \hat{V})\} = 0,86.$$

Пример 3. Система состоит из двух типов ($m = 2$) последовательно (в смысле надежности) соединенных элементов, наработка до отказа которых хорошо согласуется с нормальным законом распределения (усеченностью которого можно пренебречь).

По результатам испытаний десяти ($N_1 = 10$) элементов первого типа и шести ($N_2 = 6$) элементов второго типа по планам $[N_i U N_i]$ найдены следующие оценки параметров μ_i и σ_i , $i = 1, 2$ (см. с. 75): $\hat{\mu}_1 = 1224$ ч, $\hat{\sigma}_1 = 320$ и $\hat{\mu}_2 = 806$ ч, $\hat{\sigma}_2 = 124$. Требуется оценить ВБР системы $\pi(t)$ за наработку $t = 500$ ч (уровень доверия $q = 0,9$).

Решение. Для определения точечной оценки $\hat{\pi}(t)$ находим сначала следующие величины (см. табл. 2):

$$\hat{h}_1 = (1224 - 500)/320 = 2,26 \text{ и } \hat{h}_2 = (806 - 500)/124 = 2,47,$$

а затем по формуле графы 2 табл. 2 с использованием табл. 7 приложения (полагая $n_i = 1$) находим

$$\hat{\pi}(t) = \Phi(2,26) \Phi(2,47) = 0,988 \times 0,993 = 0,98.$$

Для определения НДГ уровня $q = 0,9$ для ВБР системы $\pi(t)$ находим вначале по табл. 7 приложения квантиль уровня $\hat{\pi} = 0,98$:

$$\hat{h} = \Phi^{-1}(\hat{\pi}) = u_{0,98} = 2,05,$$

а затем из табл. 10 приложения нецентрального распределения Стьюдента по значениям $\hat{h} = 2,05$, $N_0 = \min(N_1, N_2) = 6$ и $q = 0,9$ находим

$$\underline{h} = 0,92, \text{ откуда } \underline{\pi}(t) = \Phi(0,92) = 0,82.$$

Заметим, что приближенная формула из табл. 3 дает следующее значение $\underline{h}$ (учитывая, что $u_q = u_{0,9} = 1,28$):

$$\underline{h} \simeq 2,05 - 1,28 \sqrt{\frac{1}{5} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot 2,05\right)} = 1,04,$$

откуда $\underline{\pi}(t) = \Phi(1,04) = 0,85$, что достаточно близко к точному значению.

Однотипные планы испытаний элементов и непараметрические модели оценивания. Так же как и выше, полагаем, что различные типы элементов системы испытывают по одному и тому же плану испытаний, например, по плану $[N_i U T_i]$ или $[N_i U r_i]$, $i = \overline{1, m}$ и т. д., но вид закона распределения наработки до отказа любого элемента неизвестен.

Если о законе распределения наработки до отказа элементов системы нет никакой информации, то оценка ВБР системы должна производиться мето-

дами, основанными на биномиальной схеме испытаний, изложенными в гл. 14

Считаем, что закон распределения наработки до отказа любого элемента системы относится к классу ВФИ- (ВСФИ) распределений (т. е. к классу «стареющих» или «стареющих в среднем» распределений) (см. гл. 7).

Точечная оценка ВБР $\pi(t)$ системы с последовательной ССН общего вида (см. рис. 1) удовлетворяет неравенству

$$\hat{\pi}(t) \geq \exp \left\{ -t \sum_{i=1}^m \hat{\lambda}_i n_i \right\}, \quad t \leq t_* = \min(S_i/D_i), \quad (8)$$

где

$$\hat{\lambda}_i = D_i/S_i. \quad (9)$$

Величины D_i и S_i представляют собой число отказов образцов i -го типа при их испытаниях по некоторому плану испытаний и их суммарную наработку, а именно:

$$D_i = \begin{cases} r_i - 1 & \text{при плане } [N_i U r_i]; \\ d_i & \text{при плане } [N_i U T_i]; \\ r_{zi} \text{ или } d_{zi} & \text{при плане } [N_i U z_i]. \end{cases}$$

где $r_{zi} = \sum_{j=1}^{k_i} r_{ij}^j$ — суммарное число отказов образцов i -го типа при испытаниях по плану $[N_i U r_{i1}, r_{i2}, \dots,$

$r_{ikh_i}]$; $d_{zi} = \sum_{j=1}^{k_i} d_{ij}^j$ — то же по плану $[N_i U T_{i1}, T_{i2}, \dots, T_{ikh_i}]$, а величины S_i определены в гл. 8 (см. также гл. 15, табл. 2).

Интервальные оценки для ВБР $\pi(t)$ системы с последовательной ССН общего вида приведены в табл. 5. Все формулы, приведенные в табл. 5, справедливы при $t \leq \min(S_i/D_i)$ и в предположении, что все функции распределения $F_i(t)$ относятся к классу ВФИ-распределений.

З а м е ч а н и е. Поскольку при испытании план типа $[N_i U z_i]$ включает в себя как частные случаи планы типа $[N_i U T_i]$ и $[N_i U r_i]$, то очевидно, что элементы системы различного типа могут испытываться все либо по планам до назначенного числа отказов,

5. Интервальные оценки для ВБР системы с последовательным соединением стареющих элементов

№ п/п	План испытаний	НДГ уровня q (односторонняя) для ВБР $\pi(t)$	Обозначения
1	$[N_iUT_i]$	$\pi(t) = \exp \left\{ -t\chi_q^2 \left(2 \sum^m d_i + 2 \right) / 2\tilde{S} \right\}$	$\tilde{S} = \min (S_i/n_i)$
2	$[N_iUr_i]$	$\pi(t) = \exp \left\{ -t\chi_q^2 \left(2 \sum^m r_i \right) / 2\tilde{S} \right\}$	
3	$[N_iUz_i]$	$\pi(t) = \exp \{ -t\chi_q^2 (2D_\Sigma) / 2\tilde{S}_z \}$	$\tilde{S}_z = \min (S_{zi}/n_i);$ $D_\Sigma = \begin{cases} \sum r_{zi} \\ \sum d_{zi} + 1 \end{cases}$
4	$[N_iUT_i],$ $[N_iUr_i]$	$\pi(t) = (1 - \gamma)^{t/\tilde{S}}$	$r_i = d_i = 0$
5	$[N_iUz_i]$	$\pi(t) = (1 - \gamma)^{t/\tilde{S}_z}$	$D_\Sigma = 0$

Примечание. Величины S_{zi} есть суммарные наработки образцов i -го типа при испытаниях по плану $[N_iUz_i]$, определяемые по формулам (см. с. 194). Величина $D_\Sigma = \sum^m r_{zi}$ при планах типа $[N_iUr_{i1}, ..., r_{iki}]$ и $D_\Sigma = \sum^m d_{zi} + 1$ при планах типа $[N_iUT_{i1}, ..., T_{iki}]$.

либо по планам до фиксированных моментов времени.

Пример 4. Система состоит из трех типов ($m = 3$) элементов, образующих последовательную ССН, с наличием однотипных элементов в ССН, а именно: имеется $n_1 = 3$ идентичных элемента первого типа, $n_2 = 2$ идентичных элемента второго типа и $n_3 = 2$ элемента третьего типа. Принимаем исходные данные примера 1.

Требуется определить точечную оценку и НДГ уровня $q = 0,9$ ВБР системы $\pi(t)$ при $t = 1$ мес., если законы распределения наработки до отказа для каждого типа элементов принадлежат классу ВФИ-распределений.

Решение. Точечную оценку $\hat{\pi}(t)$ ВБР системы определяем по форму-

лам (8) и (9), а НДГ $\pi(t)$ — по табл. 5.

Исходные данные и результаты расчетов из примера 1 представлены в табл. 6.

По формуле (9) находим

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{D_1}{S_{z1}} = \frac{1}{173} = 0,006 \frac{1}{\text{мес}}, \hat{\lambda}_2 = \frac{2}{158} = 0,013 \frac{1}{\text{мес}}; \hat{\lambda}_3 = \frac{1}{119,8} = 0,008 \frac{1}{\text{мес}},$$

откуда по формуле (8) [при $t < t_* = \min (S_i/D_i) = 79$ мес.]

$$\hat{\pi}(t) \geq \exp \{ -t (\hat{\lambda}_1 \cdot 3 + \hat{\lambda}_2 \cdot 2 + \hat{\lambda}_3 \cdot 2) \} = \exp \{ -0,07t \}.$$

6. Исходные данные

Тип элемента	До первой остановки		До второй остановки		$S_{zi} =$ $= S_i^1 + S_i^2$	$D_i =$ $= r_{zi} - 1$	S_{zi}/n_i
	S_i^1	r_i^1	S_i^2	r_i^2			
$i = 1$	17	1	156	1	173	1	57,7
$i = 2$	55,6	2	102,4	1	158	2	79
$i = 3$	119,8	2	—	—	119,8	1	59,9

Так как требуемое время работы $t = 1 < t_*$, то принимаем

$\pi(1) = \exp \{-0,07\} = 0,93.$

Для вычисления НДГ $\pi(t)$ уровня $q = 0,9$ предварительно находим $\tilde{S}_z = \min(S_{zi}/n_i) = 57,7$ и $D_\Sigma = \sum r_{zi} = 7$, а по табл. 8 приложения значение $\chi_q^2(2D_\Sigma) = \chi_{0,9}^2(14) = 21,1$;

формула из табл. 5 дает (при $t \leq t_* = 79$ мес., т. е. и при $t = 1$ мес.)

$\pi(1) = \exp \{-1 \cdot \chi_q^2(2D_\Sigma)/2\tilde{S}_z\} = 0,83.$

Как видим, численные значения оценок ВБР системы остались теми же, что и в примере 1, но теперь они справедливы (в пределах ограничения $t \leq t_* = 79$ мес.) для стареющих элементов системы.

Разнотипные планы испытаний элементов (общий случай). В этом пункте снимаются те же ограничения относительно планов испытаний элементов системы и законов распределения их наработок до отказа, которые были приняты выше, однако предлагаемые алгоритмы расчета ДГ носят эвристический характер.

Единственное требование к элементам системы состоит в том, чтобы к моменту расчета оценок ВБР $\pi(t)$ системы с последовательной ССН для каждого i -го элемента системы имелась информация о его ВБР $P_i(t)$ в виде:

точечной оценки $\hat{P}_i(t)$, $i = \overline{1, m}$; нижней доверительной границы не-

которого (произвольного, допускаемого стандартами уровня) $\underline{P}_i(t)$.

Оценки $\hat{P}_i(t)$ и $\underline{P}_i(t)$ могут быть получены для разных элементов системы как при различных планах испытаний, так и при различных предположениях относительно законов распределения их наработки до отказа.

Точечная оценка ВБР $\pi(t)$ системы с последовательной ССН общего вида (см. рис. 1) определяется в рассматриваемом случае по формуле

$$\pi(t) = \prod [\hat{P}_i(t)]^{n_i}. \tag{10}$$

Для определения интервальных оценок ВБР системы $\pi(t)$ в соответствии с [71] предварительно следует преобразовать информацию о надежности элементов в виде оценок $\hat{P}_i$ и $\underline{P}_i$ в информацию, эквивалентную некоторому биномиальному плану испытаний для каждого i -го элемента. Для этого по табл. 1—4 приложения для каждого i -го элемента системы определяется эквивалентный объем испытаний N_i^* , причем найденное в табл. 1—4 приложения значение объема следует округлить до ближайшего целого числа.

Таким образом, исходный набор пар величин $(\hat{P}_i, \underline{P}_i)$, $i = \overline{1, m}$ преобразуется в набор величин $(\hat{P}_i, N_i^*)$, $i = \overline{1, m}$, на основании которых НДГ ВДГ уровня q [соответственно $\pi(t)$ и $\bar{\pi}(t)$] для ВБР $\pi(t)$ системы определяются по формулам гл. 14.

З а м е ч а н и е. Указанное преобразование, разумеется, не нужно делать для тех элементов системы, ко-

которые испытывались по биномиальному плану. Для них $N_i^* = N_i$ (где N_i — фактический объем испытаний образцов i -го типа по биномиальному плану).

Используя табл. 1—4 приложения, НДГ уровня q для $\pi(t)$ можно определить по формуле

$$\pi(t) = f_2[\tilde{N}_0^*, \hat{\pi}(t), q], \quad (11)$$

где $\hat{\pi}(t)$ определяется по формуле (10);

$$\tilde{N}_0^* = \min_{1 \leq i \leq m} (\tilde{N}_i^*) = \min_{1 \leq i \leq m} (N_i^*/n_i) -$$

минимальный из удельных, т. е. отнесенных к одному элементу, эквивалентных объемов испытаний элементов системы; при $n_i = 1$ $\tilde{N}_i^* = N_i^*$ — эквивалентный объем испытаний i -го элемента системы.

Наряду с формулами (10) и (11) можно использовать приближенную формулу, требующую лишь таблиц χ^2 -распределения (см. табл. 8 приложения):

$$\pi(t) = 1 - \chi_q^2(2D^* + 2) / \left\{ 2\tilde{N}_0^* - D^* + \frac{1}{2} \chi_q^2(2D^* + 2) \right\}, \quad (12)$$

где $D^* = \tilde{N}_0^* [1 - \hat{\pi}(t)]$ — эквивалентное число (может быть дробным) отказов системы; $\chi_q^2(v)$ — квантиль χ^2 -распределения уровня q с v степенями свободы, определяется по табл. 8 приложения с применением при необходимости линейной интерполяции.

Пример 5. Система состоит из трех элементов ($n_1 = 3$) первого типа и двух элементов ($n_2 = 2$) второго типа, соединенных последовательно, отказы которых независимы.

Для ВБР этих элементов получены следующие оценки на момент времени t_0 : $\bar{P}_1 = 0,99$, $\bar{P}_1 = 0,85$ при доверительной вероятности $q_1 = 0,95$; $\hat{P}_2 = 0,95$, $\bar{P}_2 = 0,8$ при $q_2 = 0,9$.

Требуется определить точечную оценку $\hat{\pi}(t_0)$ и НДГ уровня $q = 0,8$ для ВБР $\pi(t_0)$ системы.

Решение. По табл. 1—6 приложения находим эквивалентные объемы испытаний для элемента каждого типа:

для элемента первого типа $N_1^* = 27$, а следовательно, $\tilde{N}_1^* = N_1^*/n_1 = 9$; для элемента второго типа $N_2^* = 16$, $\tilde{N}_2^* = N_2^*/n_2 = 8$.

Точечная оценка ВБР системы определяется по формуле (10):

$$\hat{\pi}(t_0) = 0,99^3 \cdot 0,95^2 = 0,876.$$

Используя табл. 1—4 приложения, находим НДГ уровня $q = 0,8$ для ВБР системы по формуле (11) (см. гл. 14, табл. 1) с учетом того, что $\tilde{N}_0^* = \min(9, 8) = 8$:

$$\pi(t) = f_2(\tilde{N}_0^*, \hat{\pi}, q) = f_2(8; 0,876; 0,8) = 0,67.$$

Используя для сравнения приближенную формулу (12), находим вначале $D^* = 8(1 - 0,876) = 0,98 \approx 1$, затем по табл. 8 приложения значения $\chi_{0,8}^2(4) = 6$. Имеем

$$\pi(t) = 1 - 6 / \left\{ 2 \cdot 8 - 1 + \frac{1}{2} \cdot 6 \right\} = 0,667,$$

что почти совпадает с точным ответом.

СИСТЕМЫ С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО- ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ И ПАРАЛЛЕЛЬНО- ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМИ ССН (СИСТЕМЫ С П-СТРУКТУРОЙ)

Достаточно общим типом структурного резервирования системы является так называемая П-структура, под которой понимается структурная схема надежности (ССН), составленная из конечного набора последовательных и параллельных ССН путем их соединения в более крупные ССН последовательного или параллельного типа.

Более общей, чем П-структура, является монотонная структура (см. с. 223), при которой удаление любого элемента системы приводит к снижению ее ВБР.

Как будет показано ниже, любую П-структуру можно последовательной редукцией свести к двум основным

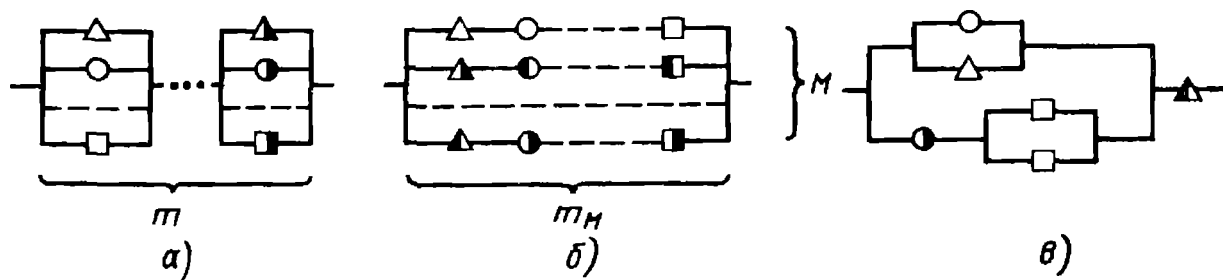


Рис. 2. Примеры систем с П-структурой:

a — последовательно-параллельная; *б* — параллельно-последовательная; *в* — последовательное соединение параллельно-последовательных структур

типам ССН — последовательной или параллельной. На этом правиле редукции построен алгоритм расчета оценок ВБР системы с произвольной П-структурой. Для описания этого алгоритма предварительно приведем классификацию П-структур различной степени сложности.

Классификация ССН, образующих П-структуру. В основу предлагаемой классификации положены следующие два признака: тип соединения элементов в ССН; уровень сложности ССН.

Всего можно выделить четыре исходных типа соединения, которые будем кодировать четырьмя буквами:

A и *a* — последовательное соединение соответственно различных и однотипных элементов;

B и *b* — параллельное соединение соответственно различных и однотипных элементов.

Эти четыре типа соединения образуют ССН первого уровня. Всевозможные комбинации ССН первого уровня образуют ССН второго уровня.

Условимся для образования ССН уровня 2 к буквенному коду ССН первого уровня добавлять слева еще одну букву из того же набора (*Aa*, *Bb*). Например, запись *AB* будет обо-

значать ССН последовательно-параллельного типа (рис. 2, *a*), а запись *BA* будет обозначать ССН параллельно-последовательного типа (рис. 2, *б*).

При этом, очевидно, комбинации двух одинаковых букв не приводят к новой структуре, так же как и перестановка большой и малой буквы тоже не дает новой ССН, т. е. имеют место соотношения (знак $\sim$ означает эквивалентность структур):

$$AA \sim A, aa \sim a, BB \sim B,$$

$$bb \sim b, Aa \sim aA, Bb \sim bB. \quad (13)$$

Следовательно, к четырем типам ССН первого уровня добавляются десять типов ССН второго уровня:

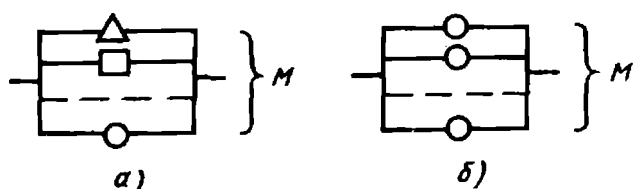
$$Aa, Bb, AB, Ab, aB, ab, BA,$$

$$Ba, bA, ba.$$

В табл. 7 приведен полный перечень возможных П-структур до третьего уровня включительно.

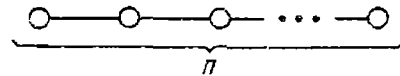
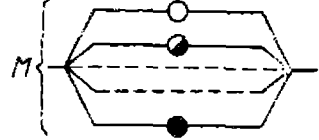
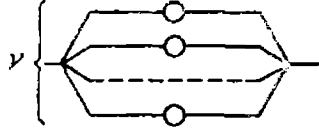
Оценка ВБР системы с параллельной ССН. Этот тип ССН важен как сам по себе, так и в связи с тем, что любая П-структура, буквенный код которой начинается буквой *B* или *b*, может быть приведена (см. с. 210) к эквивалентной параллельной ССН, обозначаемой $\tilde{B}$ или $\tilde{b}$. Знак $\sim$ над буквами *B* или *b* означает, что элементами в рассматриваемой ССН являются не исходные элементы, а некоторые структурные (укрупненные) элементы (будем называть их блоками).

Графическое изображение параллельной ССН типа *B* или *b* и выражения для ВБР системы с такой ССН представлены на рис. 3.

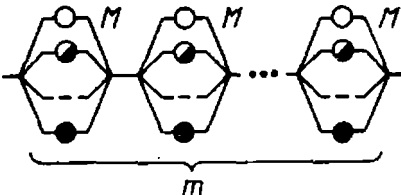
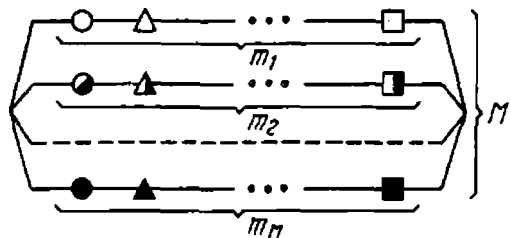
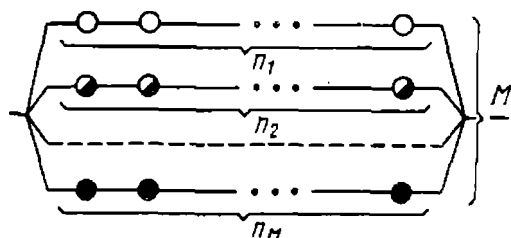
Рис. 3. Параллельные ССН (*M* — число элементов):

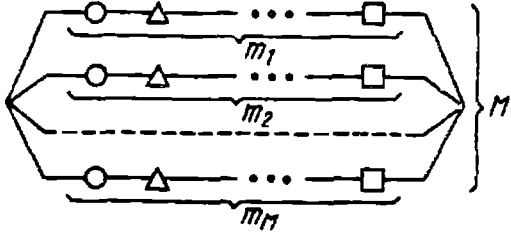
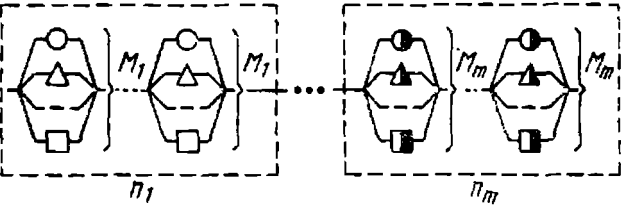
a — общего вида; *б* — из однотипных элементов

7. Возможные типы ССН, образующих П-структуру

№ п/п	Код ССН	Название ССН	Графическое изображение ССН
<i>ССН первого уровня</i>			
1	A	Последовательная из разнотипных элементов	Основной тип 
2	a	Последовательная из однотипных элементов	Частный случай 
3	B	Параллельная из разнотипных элементов	Основной тип 
4	b	Параллельная из однотипных элементов	Частный случай 

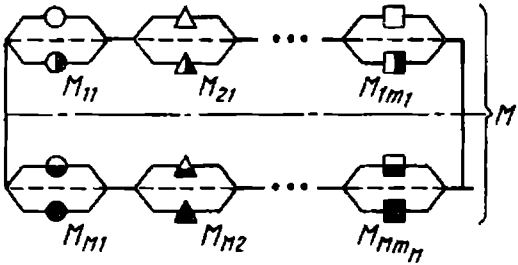
№ п/п	Код ССН	Название ССН	Графическое изображение ССН
ССН второго уровня			
5	Aa	Последовательная с наличием однотипных элементов	Основной тип
6	Bb	Параллельная с наличием однотипных элементов	Основной тип
7	AB	Последовательно-параллельная	Основной тип
8	Ab	Последовательно-параллельная с наличием однотипных элементов	Частный случай п. 7

№ п/п	Код ССН	Название ССН	Графическое изображение ССН
9	<i>ab</i>	Последовательно-параллельная с наличием однотипных блоков	Частный случай п. 7 
10	<i>ab</i>	Последовательно-параллельная из одинаковых блоков с однотипными элементами	Частный случай п. 7
11	<i>BA</i>	Параллельно-последовательная общего вида	Основной тип 
12	<i>Ba</i>	Параллельно-последовательная с наличием однотипных элементов	Частный случай п. 11 

№ п/п	Код ССН	Название ССН	Графическое изображение ССН
13	<i>ba</i>	Параллельно-последовательная с наличием однотипных блоков	Частный случай п. 11 
14	<i>ba</i>	Параллельно-последовательная из однотипных блоков с одинаковыми элементами	Частный случай п. 11
ССН третьего уровня			
15	<i>AaB</i>	Последовательно-последовательно-параллельная с наличием однотипных блоков	Основной тип 
16	<i>Aab</i>	То же с одинаковыми элементами	Частный случай п. 15

№ п/п	Код ССН	Название ССН	Графическое изображение ССН
17	<i>ABb</i>	Последовательно-параллельно-параллельная с наличием однотипных элементов	Основной тип
18	<i>aBb</i>	То же с повторяющимися сверхблоками	Частный случай п. 17
19	<i>ABA</i>	Последовательно-параллельно-последовательная общего вида	Основной тип
20	<i>ABa, AbA, AaB, aBa, abA, aba</i>	То же с наличием одинаковых элементов, блоков и т. д.	Частные случаи п. 19

№ п/п	Код ССН	Название ССН	Графическое изображение ССН
21	<i>BbA</i>	Параллельно-параллельно-последовательная с наличием однотипных блоков	Основной тип
22	<i>Bba</i>	То же, из одинаковых блоков с однотипными элементами	Частный случай п. 21
23	<i>BAa</i>	Параллельно-последовательно-последовательная с наличием однотипных элементов	Основной тип

№ п/п	Код ССН	Название ССН	Графическое изображение ССН
24	<i>bAa</i>	То же с наличием одинаковых элементов	Частный случай п. 23
25	<i>BAВ</i>	Параллельно-последовательно-параллельная общего вида	Основной тип 
26	<i>BAb, BaB, Bab, bAB, bAb, baB, bab</i>	То же с наличием одинаковых элементов, блоков и т. п.	Частные случаи п. 25

В случае ССН типа *b* определение оценок ВБР системы $\mathcal{P}(t)$ сводится к отысканию точечной $\hat{P}(t)$ и интервальной (НДГ) $\underline{P}(t)$ оценок ВБР отдельного элемента (см. гл. 8), т. е.

$$\hat{\mathcal{P}}(t) = 1 - [1 - \hat{P}(t)]^V; \quad (14)$$

$$\underline{\mathcal{P}}(t) = 1 - [1 - \underline{P}(t)]^V. \quad (15)$$

В случае ССН типа *B* точечная оценка ВБР системы определяется подстановкой в формулу для ВБР точечных оценок $\hat{P}_i(t)$ ВБР ее элементов, т. е. по формуле

$$\hat{\mathcal{P}}(t) = 1 - \prod_{i=1}^M [1 - \hat{P}_i(t)]. \quad (16)$$

Определение НДГ заданного уровня q для ВБР системы осуществляется тремя методами:

- подстановки [50];
- редукции к последовательной ССН [66];
- эквивалентного слабейшего звена [34].

Согласно методу подстановки НДГ уровня $q \geq 0,777$ для ВБР системы с параллельной ССН определяется по формуле

$$\underline{\mathcal{P}}(t) = 1 - \prod_{i=1}^M [1 - \underline{P}_i(t)], \quad (17)$$

где $\underline{P}_i(t)$ — НДГ того же уровня q для ВБР элемента i -го типа при условии, что распределение случайной величины $\underline{P}_i(t)$ относится к классу ВФИ (ВСФИ)-распределений.

Преимущество метода в его простоте, а также в возможности его применения к системам с произвольной П-структурой, недостаток — в трудности проверки условия, накладываемого на закон распределения статистик $\underline{P}_i$, а также в том, что обычно результат, полученный данным методом, является заниженным.

Согласно методу редукции НДГ уровня q для ВБР системы с параллельной ССН определяется по формуле

$$\underline{\mathcal{P}} = 1 - [1 - \underline{\pi}_B^{1/M}]^M, \quad (18)$$

где $\underline{\pi}_B$ — НДГ уровня q для ВБР π_B системы, состоящей из тех же элемен-

тов, что и исходная система, но соединенных в последовательную ССН (назовем такую систему ассоциированной данной параллельной системой).

Определение значения НДГ последовательной системы приведено на с. 193. В общем случае, когда для каждого элемента i -го типа системы известны оценки $\hat{P}_i$ и $\underline{P}_i$, НДГ определяется по формуле (11), т. е.

$$\underline{\pi}_B = f_2(N_0, \hat{\pi}_B, q),$$

где $N_0 = \min_{1 \leq i \leq M} (N_i)$, а N_i — эквивалентный объем биномиальных испытаний, определяемый на основании величин $\hat{P}_i$ и $\underline{P}_i$ (см. табл. 1—6

приложения), $\hat{\pi}_B = \prod_{i=1}^M \hat{P}_i$ — точечная оценка ВБР π_B ассоциированной последовательной системы; $f_2(\cdot)$ — табулированная функция (см. табл. 1—4 приложения).

В частном случае, когда отказов элементов при их испытаниях не наблюдалось (и, следовательно, все оценки $\hat{P}_i = 1$), значения N_i определяются по формуле

$$N_i = [\ln(1 - q) / \ln \underline{P}_i],$$

а формула (18) принимает вид

$$\underline{\mathcal{P}} = 1 - [1 - (1 - q)^{1/N_0 M}]^M. \quad (19)$$

З а м е ч а н и е. В случае безотказных испытаний известно другое решение задачи, которое является более точным при сильно отличающихся между собой объемах испытаний элементов N_i . Согласно [50] НДГ уровня q для ВБР системы с параллельной ССН определяется по формуле

$$\underline{\mathcal{P}} = 1 - \prod_{i=1}^M [x / (x + N_i)], \quad (20)$$

где x — решение уравнения

$$\sum_{i=1}^M N_i \ln(1 + x/N_i) = -\ln(1 - q),$$

¹ Для упрощения здесь и далее функцию $\pi_B(t)$ будем записывать как π_B .

8. Функция ВБР для систем с П-структурой при использовании метода эквивалентного слабейшего звена

Код ССН	Исходный вид ВБР	Скорректированный вид ВБР
B	$\mathcal{P} = 1 - \prod_{i=1}^M (1 - P_i)$	$\mathcal{P} = 1 - \left[\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (1 - P_i) \right]^M$
Bb	$\mathcal{P} = 1 - \prod_{i=1}^M (1 - P_i)^v$	$\mathcal{P} = 1 - \left[\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (1 - P_i)^v \right]^M$
AB	$\pi = \prod_{i=1}^m \left[1 - \prod_{j=1}^{M_i} (1 - P_{ij}) \right]$	$\pi = \prod_{i=1}^m \left\{ 1 - \left[\frac{1}{M_i} \sum_{j=1}^{M_i} (1 - P_{ij}) \right]^{M_i} \right\}$
$AaBb$	$\pi = \prod_{i=1}^m \left[1 - \prod_{j=1}^{M_i^*} (1 - P_{ij})^{v_{ij}} \right]^{n_i}$	$\pi = \prod_{i=1}^m \left\{ 1 - \left[\frac{1}{M_i} \sum_{j=1}^{M_i} (1 - P_{ij})^{v_{ij}} \right]^{M_i} \right\}^{n_i}$

которое нужно искать численными методами (например, методом последовательных приближений).

Формула (20) совпадает с (19) при $N_i = N$, но при сильно отличающихся значениях N_i дает более высокое значение $\mathcal{P}$.

Метод редукции применим лишь для ССН типа B (или же Bb), но зато он всегда дает гарантированную НДГ (т. е. обеспечивающую уровень доверия не менее заданного значения q) и достаточно прост. Это позволяет рекомендовать его во всех случаях, когда есть информация об элементах параллельной ССН в виде значений N_i , $\hat{\mathcal{P}}_i$ или $\hat{P}_i$, $i = \overline{1, M}$.

Согласно методу эквивалентного слабейшего звена (ЭСЗ), НДГ уровня q для ВБР системы с произвольной П-структурой определяется по следующему алгоритму.

Пусть функция связи ВБР системы с ВБР ее элементов, определяемая

типом ССН, задана общим соотношением

$$\mathcal{P} = \varphi(P_1, P_2, \dots, P_k).$$

Исходными данными служат результаты испытаний отдельных элементов, которые в общем случае можно представить в виде оценок $\hat{P}_i$ и $\underline{P}_i$ или $\hat{P}_i$ и N_i (N_i — объем испытаний элементов i -го типа, $i = \overline{1, k}$).

1. Вначале определяется точечная оценка ВБР системы в виде

$$\hat{\mathcal{P}} = \varphi(\hat{P}_1, \hat{P}_2, \dots, \hat{P}_i, \hat{P}_k).$$

2. Для элементов каждого i -го типа определяется эквивалентная точечная оценка ВБР $\hat{P}_i^*$, $i = \overline{1, k}$ таким образом, чтобы при

$$\hat{P}_1 = \hat{P}_2 = \dots = \hat{P}_{i-1} = \hat{P}_{i+1} = \dots = \hat{P}_k = 1$$

9. Значения НДГ уровня $q = 0,9$ для ВБР систем из $M = 2$ параллельно соединенных элементов

Объемы испытаний	$\widehat{P}_1$	$\widehat{P}_2$	Метод		
			подстановки	редукции	СЭЗ
$N_1 = N_2 = 5$	0,95 0,99	0,91 0,99	0,797 0,845	0,906 0,951	0,932 0,961
$N_1 = N_2 = 20$	0,99 0,99	0,80 0,99	0,955 0,984	0,957 0,995	0,981 0,995
$N_1 = 5$ $N_2 = 20$	0,95 0,91 0,99	0,91 0,95 0,99	0,900 0,914 0,953	0,905 0,905 0,951	0,932 0,932 0,961
$N_1 = N_2 = 50$	0,99 0,99	0,80 0,99	0,982 0,996	0,973 0,9985	0,993 0,9986
$N_1 = 5$ $N_2 = 50$	0,99 0,80 0,99	0,80 0,99 0,99	0,890 0,964 0,977	0,869 0,869 0,951	0,943 0,943 0,961

точечная оценка ВБР объекта совпала с полученным значением $\widehat{\mathcal{P}}$:

$$\widehat{\mathcal{P}} = \varphi(1, \quad 1, \widehat{P}_i^*, 1, \quad 1).$$

Заметим, что для выполнения этого требования следует стандартные выражения для ВБР систем с некоторыми структурами несколько изменить, заменив их оценками снизу. Эти оценки представлены в табл. 8.

3. Для каждого значения $\widehat{P}_i^*$ определяется эквивалентная НДГ уровня q из выражения (см. гл. 7)

$$\underline{P}_i^* = f_2(N_i, \widehat{P}_i^*, q),$$

либо (в случае, когда $\widehat{P}_i^* = 1$) $\underline{P}_i^* = (1 - q)^{1/N_i}, \quad i = \overline{1, k}.$

4. НДГ уровня q для ВБР системы определяется по формуле

$$\underline{\mathcal{P}} = \min_{1 \leq i \leq k} \mathcal{P}_i,$$

где

$$\mathcal{P}_1 = \varphi(\underline{P}_1^*, 1, \dots, 1),$$

$$\mathcal{P}_2 = \varphi(1, \underline{P}_2^*, \dots, 1),$$

$$\mathcal{P}_k = \varphi(1, \quad \dots, 1, \underline{P}_k^*).$$

В частном случае для систем с параллельной ССН типа В метод слабейшего эквивалентного звена дает следующее выражение для НДГ уровня q ВБР системы:

$$\underline{\mathcal{P}} = 1 - \left[\frac{1}{M} (1 - \underline{P}_0) \right]^M$$

с точечной оценкой ВБР, равной

$$\widehat{\mathcal{P}} = 1 - \prod_{i=1}^M (1 - \widehat{P}_i),$$

где $\underline{P}_0 = f_2(N_0, \widehat{P}_0, q);$

$$\widehat{P}_0 = 1 - M (1 - \widehat{\mathcal{P}})^{1/M};$$

$$N_0 = \min(N_i).$$

Таким образом, для систем с параллельной ССН метод эквивалентного

слабейшего звена по сложности сопоставим с методом редукции. Однако обоснование этого метода приведено лишь для случая высоконадежных элементов и больших объемов выборок. Численный анализ (некоторые результаты которого приведены в табл. 9) показывает, что последний метод дает более высокое значение НДГ, особенно в случае сильно отличающихся объемах испытаний элементов. Именно в этом случае (при условии высокой надежности элементов) его и следует рекомендовать.

Алгоритм расчета ДГ для ВБР системы с произвольной П-структурой. Для систем с произвольной П-структурой и с различными планами испытаний элементов не удастся получить строгого решения задачи интервального оценивания ее показателя безотказности (ВБР) в аналитическом виде. Однако можно предложить простой эвристический алгоритм решения этой задачи, основанный на преобразовании оценок ВБР $\hat{P}$ и $\underline{P}$ в эквивалентный объем биномиальных испытаний N^* и, при необходимости, в эквивалентное число (может быть дробным) отказов d^* . Правомерность такого подхода подтверждают многочисленные проверки методом статистического моделирования, а также тот факт, что в различных частных случаях (например, при безотказных испытаниях) он дает известные результаты.

Алгоритм расчета точечной и интервальной оценок ВБР систем с произвольной П-структурой основан на последовательной редукции произвольной П-структуры к одному из двух типов структур из укрупненных (структурных) элементов:

к последовательной $\tilde{A}$ или $\tilde{a}$ (если буквенный код исходной ССН начинается с A или a);

к параллельной $\tilde{B}$ или $\tilde{b}$ (если буквенный код исходной ССН начинается с B или b).

При этом на каждом шаге такой редукции рассчитываются точечная и интервальная оценки ВБР тех структурных элементов, которые образуют укрупненную ССН (для исходной ССН укрупненные элементы совпадают с исходными элементами структуры), так

что на последнем шаге в качестве исходных данных выступают величины $\hat{P}_i$, $\underline{P}_i$ или $\hat{P}_i$, N_i ($i = \overline{1, m}$ для ССН типа $\tilde{A}$ и $i = \overline{1, M}$ — для ССН типа $\tilde{B}$).

В случае ССН типа $\tilde{a}$ или $\tilde{b}$ исходными данными являются оценки $\hat{P}$, $\underline{P}$ или $\hat{P}$, N структурного элемента единственного типа.

Начальными исходными данными являются либо результаты испытаний исходных элементов системы, которые всегда можно преобразовать в оценки ВБР $\hat{P}_i$, $\underline{P}_i$ или $\hat{P}_i$, N_i (см. гл. 7—9), либо сами оценки $\hat{P}_i$, $\underline{P}_i$ или $\hat{P}_i$, N_i (N_i — эквивалентный объем биномиальных испытаний, при котором заданной величине $\hat{P}_i$ соответствует заданное значение $\underline{P}_i$ (см. табл. 1—6 приложения).

Алгоритм расчета оценок ВБР системы с произвольной П-структурой представляет собой рекуррентную процедуру, на каждом шаге которой производится две операции:

операция 1 — укрупнение структурных элементов на первом уровне, начиная от исходных элементов, образующих П-структуру, и заканчивая процесс укрупнения превращением П-структуры в ССН типа $\tilde{A}$, $\tilde{a}$, $\tilde{B}$, $\tilde{b}$;

операция 2 — вычисление точечной и интервальной оценок $\hat{P}_i$, $\underline{P}_i$ (а по ним и эквивалентного объема испытаний N_i) для ВБР всех структурных элементов этого нового уровня (в частности, при совпадении структурных элементов некоторого уровня имеем $\hat{P}_i = \hat{P}$, $\underline{P}_i = \underline{P}$).

Правило редукции исходной ССН некоторого уровня (см. классификацию ССН) к итоговым ССН первого уровня (A , a , B , b из укрупненных элементов), а также правила вычисления на каждом шаге такой редукции оценок $\hat{P}_i$, $\underline{P}_i$ для ВБР структурных элементов приведены ниже.

ССН первого уровня: A , a , B , b . Правила расчета оценок ВБР систем с такой ССН представлены в табл. 10.

ССН второго уровня: Aa , AB , Ab , aB , Vb , BA , Va , bA . ССН типа ab

10. Правила определения методом редукции НДГ для ВБР систем с П-структурой (до третьего уровня)

№ п/п	Код ССН	ВБР	Правило редукции	Исходные данные	Выражение для НДГ уровня q	Примечание
1	a	$\pi = P^n$	—	$\underline{P}$	$\underline{\pi} = \underline{P}^n$	—
2	A	$\pi = \prod_{i=1}^m P_i$	—	$\widehat{P}_i, \underline{P}_i$ или $\widehat{P}_i, N_i$	$\underline{\pi} = f_2(N_0, \widehat{\pi}, q)$ $\widehat{\pi} = \prod_{i=1}^m \widehat{P}_i$	$N_0 = \min(N_i);$ $\widehat{\pi} = \prod_{i=1}^m \widehat{P}_i$
3	b	$\mathcal{P} = 1 - (1 - P)^v$	—	$\underline{P}$	$\underline{\mathcal{P}} = 1 - (1 - \underline{P})^v$	—
4	B	$\mathcal{P} = 1 - \prod_{i=1}^M (1 - P_i)$	—	$\widehat{P}_i, \underline{P}_i$ или $\widehat{P}_i, N_i$	$\underline{\mathcal{P}} = 1 - (1 - \pi_B^{1/M})^M$	$\pi_B = \prod_{i=1}^M P_i$ — ВБР ассоциированной последовательной ССН
5	Aa	$\pi = \prod_{i=1}^m P_i^{n_i}$	$Aa \rightarrow \widetilde{A}$	$\widehat{P}_i, \underline{P}_i$ или $\widehat{P}_i, N_i$	$\underline{\pi} = f_2(\widetilde{N}_0, \widehat{\pi}, q)$ $\widehat{\pi} = \prod_{i=1}^m \widehat{P}_i^{n_i}$	$\widetilde{N}_0 = \min(N_i/n_i);$ $\widehat{\pi} = \prod_{i=1}^m \widehat{P}_i^{n_i}$
6	Bb	$\mathcal{P} = 1 - \prod_{i=1}^M (1 - P_i)^{v_i}$	$Bb \rightarrow \widetilde{B}$	$\widehat{\mathcal{P}}_i, \underline{\mathcal{P}}_i$ или $\widehat{\mathcal{P}}_i, N_i$ для блоков с ССН типа «В»	$\underline{\mathcal{P}} = 1 - (1 - \pi_B^{1/M})^M$	$\pi_B = \prod_{i=1}^M P_i^{v_i}$ — ВБР ассоциированной последовательной ССН

№ п/п	Код ССН	ВБР	Правило редукции	Исходные данные	Выражение для НДГ уровня q	Примечание
7	AB	$\pi = \prod_{i=1}^m \left[1 - \prod_{j=1}^{M_i} (1 - P_{ij}) \right]$	$AB \rightarrow \tilde{A}$	$\hat{\mathcal{P}}_i, \mathcal{P}_i$ или $\hat{\mathcal{P}}_i, N_i$ для блоков с ССН типа «В» — см. п. 4	$\underline{\pi} = f_2(N_0, \hat{\pi}, q)$	$N_0 = \min \{N_i\};$ $\hat{\pi} = \prod_{i=1}^m \hat{\mathcal{P}}_i;$ $\hat{\mathcal{P}}_i = 1 - \prod_{j=1}^{M_i} (1 - \hat{P}_{ij})$
8	Ab	$\pi = \prod_{i=1}^m [1 - (1 - P_i)^{M_i}]$	$Ab \rightarrow \tilde{A}$	$\hat{\mathcal{P}}_i, \mathcal{P}_i$ или $\hat{\mathcal{P}}_i, N_i$ для блоков с ССН типа «В» — см. п. 3	$\underline{\pi} = f_2(N_0, \hat{\pi}, q)$	$N_0 = \min \{N_i\};$ $\hat{\pi} = \prod_{i=1}^m [1 - (1 - \hat{P}_i)^{M_i}]$
9	aB	$\pi = \left[1 - \prod_{i=1}^M (1 - P_i) \right]^n$	$aB \rightarrow \tilde{a}$	$\hat{\mathcal{P}}_i, \mathcal{P}_i$ или $\hat{\mathcal{P}}_i, N_i$ для блоков с ССН типа «В» — см. п. 4	$\underline{\pi} = \underline{\mathcal{P}}_B^n$	$\underline{\mathcal{P}}_B$ — НДГ для $\mathcal{P}_B$, см. п. 4
10	ab	$\pi = [1 - (1 - P)^v]^n$	—	$\underline{P}$	$\underline{\pi} = [1 - (1 - \underline{P})^v]^n$	—
11	BA	$\mathcal{P} = 1 - \prod_i^M \left[1 - \prod_l^{m_i} P_i \right]$	$BA \rightarrow \tilde{B}$	$\hat{\pi}_i, \pi_i$ или $\hat{\pi}_i, N_i$ для блоков типа «А» — см. п. 2	$\underline{\mathcal{P}} = 1 - [1 - \underline{\pi}_B^{1/M}]^M$	$\pi_{\tilde{B}} = \prod_i^M \pi_i$ — ВБР ассоциированной последовательной ССН

№ п/п	Код ССН	ВБР	Правило редукции	Исходные данные	Выражение для НДГ уровня q	Примечание
12	Ba	$\mathcal{P} = 1 - \prod_M [1 - P_i^{n_i}]$	$Ba \rightarrow \tilde{B}$	$\hat{\pi}_i, \pi_i$ или $\hat{\pi}_i, N_i$ для блоков типа «а» — см. п. 1	$\underline{\mathcal{P}} = 1 - [1 - \underline{\pi}_B^{1/M}]^M$	$\pi_{\tilde{B}} = \prod_M \pi_i$ — ВБР ассоциированной последовательной ССН
13	bA	$\mathcal{P} = 1 - \left(1 - \prod^m P_i\right)^v$	$bA \rightarrow \tilde{b}$	$\hat{\pi}_i, \pi_i$ или $\hat{\pi}_i, N_i$ для блоков типа «А» — см. п. 2	$\underline{\mathcal{P}} = 1 - (1 - \underline{\pi}_A)^v$	$\underline{\pi}_A$ — НДГ для ВБР; $\pi_A = \prod^m P_i$
14	ba	$\mathcal{P} = 1 - (1 - P^n)^v$	—	$\underline{P}$	$\underline{\mathcal{P}} = 1 - (1 - \underline{P}^v)^n$	—
15	AaB	$\pi = \prod^m \pi_i;$ $\pi_i = \left[1 - \prod^{M_i} (1 - P_j)\right]^{n_i}$	$aB \rightarrow \tilde{a}$ ($AaB \rightarrow A\tilde{a}$) $A\tilde{a} \rightarrow \tilde{A}$	См. п. 9: $\hat{\mathcal{P}}_i, N_i$ для блоков типа «В» — см. п. 5	$\underline{\pi}_i = \underline{\mathcal{P}}_B^{n_i}$	—
16	Aab	$\pi = \prod^m \pi_i;$ $\pi_i = [1 - (1 - P_i)^M]^{n_i}$	$ab;$ $Aab \rightarrow \tilde{A}$	См. п. 10 См. п. 2	—	—

№ п/п	Код ССН	ВБР	Правило редукции	Исходные данные	Выражение для НДГ уровня q	Примечание
17	ABb	$\pi = \prod_{i=1}^m \mathcal{P}_i;$ $\mathcal{P}_i = 1 - \prod_{j=1}^{M_i} (1 - P_{ij})^{v_j}$	$Bb \rightarrow \tilde{B}$ $(ABb \rightarrow A\tilde{B});$ $A\tilde{B} \rightarrow A$	См. п. 6: $\hat{\mathcal{P}}_i, N_i$ для блоков типа «B»	$\mathcal{P}_i = 1 - \left(1 - \pi_B^{1/M_i}\right)^{M_i}$	$\pi_{\tilde{B}}$ — НДГ для ВБР ассоциированной последовательной ССН
				См. п. 7: $\hat{\mathcal{P}}_i, N_i$ для блоков типа «B»	$\pi = f_2(N_0, \hat{\pi}, q)$	$N_0 = \min(N_i);$ $\hat{\pi} = \prod_{i=1}^m \hat{\mathcal{P}}_i$
18	ABA	$\pi = \prod_{i=1}^m \mathcal{P}_i;$ $\mathcal{P}_i = 1 - \prod_{j=1}^{M_i} \left[1 - \prod_{k=1}^{m_{ij}} P_{ijk}\right]$	$BA \rightarrow \tilde{B};$ $(ABA \rightarrow A\tilde{B});$ $A\tilde{B} \rightarrow \tilde{A}$	См. п. 11	$\mathcal{P}_i = 1 - \left[1 - \pi_{\tilde{B}}^{1/M_i}\right]^{M_i}$	$\pi_{\tilde{B}}$ — НДГ для ВБР ассоциированной последовательной ССН
				См. п. 7	$\pi = f_2(N_0, \hat{\pi}, q)$	$N_0 = \min(N_i)$ N_i — объем испытаний блока типа «B»
19	BAa	$\mathcal{P} = 1 - \prod_{i=1}^M (1 - \pi_i)$	$Aa \rightarrow \tilde{A}$ $(BAa \rightarrow B\tilde{A})$	См. п. 5	$\pi_i = f_2(\tilde{N}_i, \hat{\pi}_i, q)$	$\tilde{N}_i = \min(N_{ij}/n_{ij});$ $\hat{\pi}_i = \prod_{j=1}^{M_i} \hat{p}_{ij}^{n_{ij}}$
		$\pi_i = \prod_{j=1}^{m_i} P_{ij}^{n_{ij}}$	$B\tilde{A} \rightarrow \tilde{B}$	См. п. 11	$\mathcal{P} = 1 - \left[1 - \pi_{\tilde{B}}^{1/M}\right]^M$	$\pi_{\tilde{B}}$ — НДГ для ВБР ассоциированной последовательной ССН

Продолжение табл. 10

п/п №	Код ССН	ВБР	Правило редукции	Исходные данные	Выражение для НДГ уровня q	Примечание
20	BAV	$\mathcal{P} = 1 - \prod_i^M (1 - \pi_i)$	$AB \rightarrow \tilde{A}$ ($BAV \rightarrow B\tilde{A}$)	См. п. 7	$\pi_i = f_2(N_i, \pi, q)$	$N_i = \min_j (N_{ij})$
		$\pi_i = \prod_i^{M_i} \left[1 - \prod_k^{M_{ij}} (1 - P_{ijk}) \right]$	$B\tilde{A} \rightarrow \tilde{B}$	См. п. 11	$\mathcal{P} = 1 - (1 - \pi_{\tilde{B}}^{1/M})^M$	$\pi_{\tilde{B}}$ — НДГ для ВБР ассоциированной последовательной ССН

и ba можно не рассматривать, так как для них ответ можно записать сразу, без их укрупнения. Для перечисленных ССН второго уровня рекуррентная процедура состоит из двух шагов.

Шаг 1. Операция 1 фактически отсутствует, так как в качестве структурных элементов выступают исходные элементы ССН. Операция 2 — вычисление оценок $\hat{\pi}_i$, π_i или $\hat{\mathcal{P}}_i$, $\mathcal{P}_i$ для ССН первого уровня по табл. 10 и в определении по ним эквивалентных объемов испытаний N_i , $i = 1, m$ или $i = 1, M$ (см. табл. 1—6 приложения).

Шаг 2. Операция 1 — редукция всех ССН типа Aa , AB , Ab и ab к укрупненной последовательной ССН типа $\tilde{A}$ или $\tilde{a}$, а всех ССН типа Bb , BA , ba и bA — к укрупненной ССН типа $\tilde{B}$ или $\tilde{b}$. Операция 2 — вычисление точечной и интегральной оценок $\hat{\pi}$, π или $\hat{\mathcal{P}}$, $\mathcal{P}$ для системы с укрупненной ССН типа $\tilde{A}$, $\tilde{a}$ или $\tilde{B}$, $\tilde{b}$ по формулам табл. 10.

ССН третьего уровня: ССН последовательного типа — AaB , Aab , ABb , aBb , ABA , ABa , AbA , Aba , aBA , aba , abA и ССН параллельного типа — BbA , Bba , BAa , bAa , BAV , BAb , VaV , Vab , bAV ; bAb , bab . Для перечисленных ССН третьего уровня рекуррентная процедура состоит из трех шагов.

Шаг 1. Операция 1 отсутствует (см. предыдущее пояснение). Операция 2 — вычисление оценок $\hat{\pi}_i$, π_i или $\hat{\mathcal{P}}_i$, $\mathcal{P}_i$ для ССН первого уровня, тип которых определяется правой буквой исходной ССН, после чего определяются эквивалентные объекты испытаний N_i .

Шаг 2. Операция 1 — редукция всех ССН последовательного типа к укрупненным последовательно-параллельным ССН типа $\tilde{Aa}$, $\tilde{AB}$, $\tilde{aB}$, $\tilde{Ab}$, $\tilde{ab}$ или к укрупненным параллельно-последовательным ССН типа $\tilde{Bb}$, $\tilde{BA}$, $\tilde{bA}$, $\tilde{Ba}$, $\tilde{bA}$. Операция 2 — вычисление точечной и интервальной оценок $\hat{\pi}_i$, π_i для укрупненных ССН последовательного типа $\tilde{A}$, $\tilde{a}$ или $\hat{\mathcal{P}}_i$, $\mathcal{P}_i$ — для укрупненных ССН параллельного типа $\tilde{B}$, $\tilde{b}$ (а по ним и эквивалентных объ-

емов испытаний N_i — по табл. 1—6 приложения) по формулам табл. 8.

Шаг 3. Операция 1 — редукция всех ССН последовательного типа к дважды укрупненным ССН типа $\tilde{A}$, $\tilde{a}$, а всех ССН параллельного типа — к дважды укрупненным ССН типа $\tilde{B}$, $\tilde{b}$. Операция 2 — вычисление точечной и интервальной оценок $\hat{\pi}$, $\underline{\pi}$ (для ССН типа $\tilde{A}$, $\tilde{a}$) или $\hat{\mathcal{P}}$, $\underline{\mathcal{P}}$ (для ССН типа $\tilde{B}$, $\tilde{b}$) по формулам табл. 10.

Таким образом, для ССН третьего уровня на шаге 3 получаем искомые оценки ВБР системы.

В табл. 10 приведены формулы для вычисления НДГ уровня q для ВБР системы с некоторыми П-структурами до третьего уровня в соответствии с изложенным алгоритмом.

В табл. 11 приведены аналитические выражения для НДГ уровня q ВБР систем с произвольной П-структурой до третьего уровня при безотказных испытаниях элементов (т. е. в случае, когда точечные оценки ВБР элементов $\hat{P}_i = 1$).

Пример 8. Система имеет ССН последовательно-параллельного типа (код АВ).

Каждый из $m = 2$ блоков состоит из разнотипных элементов (первый блок из $M_1 = 2$, второй из $M_2 = 3$).

Каждый из элементов испытывался по биномиальной схеме, результаты испытаний представлены в табл. 12.

Требуется определить точечную оценку ВБР системы и ее НДГ уровня $q = 0,9$, где t_0 — заданное время работы системы, совпадающее с продолжительностью испытаний элементов. Отказы элементов можно считать независимыми.

Решение. Применим метод редукции ССН типа АВ, изложенный выше (см. также табл. 10).

Шаг 1. Для каждого блока с ССН типа В определяем точечные оценки $\hat{\mathcal{P}}_1$ и $\hat{\mathcal{P}}_2$ ВБР блоков и НДГ $\underline{\mathcal{P}}_1$ и $\underline{\mathcal{P}}_2$ уровня $q = 0,9$ на основании исходных данных о результатах испытаний.

Имеем (см. с. 212)

$$\hat{\mathcal{P}}_1 = 1 \quad (1 - \hat{P}_{11})(1 - \hat{P}_{12}) = 1,$$

$$\text{так как } \hat{P}_{11} = 1 - 1/20 = 0,95,$$

$$\hat{P}_{12} = 1;$$

$$\hat{\mathcal{P}}_2 = 1 - (1 - \hat{P}_{21})(1 - \hat{P}_{22}) \times \\ \times (1 - \hat{P}_{23}) = 1,$$

$$\text{так как } \hat{P}_{21} = \hat{P}_{23} = 1, \hat{P}_{22} = 0,9.$$

Величину НДГ определяем по методу редукции (8).

Предварительно находим НДГ уровня $q = 0,9$ для ассоциированных последовательных систем:

для первого блока

$$N_0 = \min(N_{11}, N_{12}) = \\ = 10, \quad \hat{\pi}_B = \hat{P}_{11}\hat{P}_{12} = 0,95,$$

т. е. $\underline{\pi}_{1B} = f_2(N_{01}, \hat{\pi}_B, q) = f_2(10; 0,95; 0,9) = 0,725$ — по табл. 2 приложения;

для второго блока

$$N_{02} = \min(N_{21}, N_{22}, N_{23}) = 4,$$

$$\hat{\pi}_B = \hat{P}_{21}\hat{P}_{22}\hat{P}_{23} = 0,9,$$

т. е. $\underline{\pi}_{2B} = f_2(4; 0,9; 0,9) = 0,456$ — по табл. 2 приложения.

Следовательно,

$$\underline{\mathcal{P}}_1 = 1 - [1 - \underline{\pi}_{1B}^{1/M_1}]^{M_1} = \\ = 1 - (1 - 0,725^{1/2})^2 = 0,978;$$

$$\underline{\mathcal{P}}_2 = 1 - [1 - \underline{\pi}_{2B}^{1/M_2}]^{M_2} = \\ = 1 - (1 - 0,456^{1/3})^3 = 0,988.$$

Шаг 2. Преобразуем исходную ССН типа АВ в укрупненную ССН типа $\tilde{A}$, у которой в качестве структурных элементов выступают два последовательно соединенных блока с такими оценками ВБР:

$$\hat{\mathcal{P}}_1 = 1, \quad \underline{\mathcal{P}}_1 = 0,978 \quad \text{или} \quad \hat{\mathcal{P}}_1 = 1,$$

$$N_1 = 103 \quad \text{и} \quad \hat{\mathcal{P}}_2 = 1,$$

$$\underline{\mathcal{P}}_2 = 0,988 \quad \text{или} \quad \hat{\mathcal{P}}_2 = 1, \quad N_2 = 190.$$

По данным для последовательной ССН типа А по формулам табл. 10 находим (учитывая, что $N_0 = \min(N_1, N_2) = 103$)

$$\hat{\pi} = \hat{\mathcal{P}}_1\hat{\mathcal{P}}_2 = 1, \quad \underline{\pi} = (1 - q)^{1/N_0} = \\ = (1 - 0,9)^{1/103} = 0,978.$$

11. Формулы для вычисления НДГ ВБР систем в случае безотказных испытаний

№ п/п	Код ССН	ВБР объекта	Выражение для НДГ уровня q	Примечание
1	a	$\pi = p^m$	$\underline{\pi} = (1 - q)^{m/N}$	N — объем испытаний
2	A	$\pi = \prod_{i=1}^m P_i$	$\underline{\pi} = (1 - q)^{1/N_0}$	$N_0 = \min_{1 \leq i \leq m} (N_i)$
3	Aa	$\pi = \prod_{i=1}^m P_i^{n_i}$	$\underline{\pi} = (1 - q)^{1/\tilde{N}_0}$	$\tilde{N}_0 = \min_{1 \leq i \leq m} (N_i/n_i)$
4	b	$\mathcal{P} = 1 - (1 - p)^M$	$\underline{\mathcal{P}} = 1 - [1 - (1 - q)^{1/N}]^M$	N — объем испытаний
5	B	$\mathcal{P} = 1 - \prod_{i=1}^M (1 - P_i)$	$\underline{\mathcal{P}} = 1 - [1 - (1 - q)^{1/N_0 M}]^M$	$N_0 = \min_{1 \leq i \leq M} (N_i)$
6	Bb	$\mathcal{P} = 1 - \prod_{i=1}^M (1 - P_i)^{v_i}$	$\underline{\mathcal{P}} = 1 - [1 - (1 - q)^{1/\tilde{N}_0 M}]^M$	$\tilde{N}_0 = \min_{1 \leq i \leq M} (N_i/v_i)$
7	AB	$\pi = \prod_{i=1}^m \left[1 - \prod_{j=1}^{M_i} (1 - P_{ij}) \right]$	$\underline{\pi} = \min_{1 \leq i \leq m} \{ 1 - [1 - (1 - q)^{1/N_{0i} M_i}]^{M_i} \}$	$N_{0i} = \min_{1 \leq j \leq M_i} (N_{ij})$
8	Ab	$\pi = \prod_{i=1}^m [1 - (1 - P_j)^{M_i}]$	$\underline{\pi} = \min_{1 \leq i \leq m} \{ 1 - [1 - (1 - q)^{1/N_i M_i}]^{M_i} \}$	N_i — объем испытаний элементов i -го типа

№ π/π	Код ССН	ВБР объекта	Выражение для НДГ уровня q	Примечание
9	aB	$\pi = \left[1 - \prod_{i=1}^{M_i} (1 - P_i) \right]^m$	$\underline{\pi} = [1 - (1 - q)^{1/N_0 M}]^{M_m}$	$N_0 = \min_{1 \leq i \leq M} (N_i)$
10	BA	$\mathcal{P} = 1 - \prod_{i=1}^M \left[1 - \prod_{j=1}^{m_i} P_{ij} \right]$	$\underline{\mathcal{P}} = 1 - [1 - (1 - q)^{1/N_0 M}]^M$	$N_0 = \min_{1 \leq i \leq M} \min_{1 \leq j \leq m_i} (N_{ij})$
11	Ba	$\mathcal{P} = 1 - \prod_{i=1}^M (1 - P_i^{m_i})$	$\underline{\mathcal{P}} = 1 - [1 - (1 - q)^{1/\tilde{N} M}]^M$	$\tilde{N} = \min_{1 \leq i \leq M} (N_i/m_i)$
12	bA	$\mathcal{P} = 1 - \left[1 - \prod_{i=1}^m P_i \right]^M$	$\underline{\mathcal{P}} = 1 - [1 - (1 - q)^{1/N_0}]^M$	$N_0 = \min_{1 \leq i \leq M} (N_i)$
13	ABb	$\pi = \prod_{i=1}^m \mathcal{P}_i$ $\mathcal{P}_i = 1 - \prod_{j=1}^{M_i} (1 - P_{ij})^{v_j}$	$\underline{\pi} = \min \{ 1 - [1 - (1 - q)^{1/\tilde{N}_{0i} M_i}]^{M_i} \}$	$\tilde{N}_{0i} = \min_{1 \leq j \leq M_i} (N_{ij}/v_{ij})$
14	aBb	$\pi = \left[1 - \prod_{i=1}^M (1 - P_i)^{v_i} \right]^m$	$\underline{\pi} = \{ 1 - [1 - (1 - q)^{1/\tilde{N}_0 M}]^M \}^m$	$\tilde{N}_0 = \min_{1 \leq i \leq m} (N_i/v_i)$

№ п/п	Код ССН	ВБР объекта	Выражение для НДГ уровня	Примечание
15	BAa	$\mathcal{P} = 1 - \prod_{i=1}^M (1 - \pi_i)$ $\pi_i = \prod_{j=1}^{m_i} P_{ij}^{n_{ij}}$	$\underline{\mathcal{P}} = 1 - [1 - (1 - q)^{1/\tilde{N}_0 M}]^M$	$\tilde{N}_0 = \min_{1 \leq i \leq m} \min_j \left(\frac{N_{ij}}{n_{ij}} \right)$
16	bAa	$\mathcal{P} = 1 - (1 - \pi)^M$ $\pi = \prod_{j=1}^m P_j^{n_j}$	$\underline{\mathcal{P}} = 1 - [1 - (1 - q)^{1/\tilde{N}_0}]^M$	$\tilde{N}_0 = \min_{1 \leq j \leq m} (N_j/n_j)$
17—23	ABA	$\pi = \prod_{i=1}^m \mathcal{P}_i$ $\mathcal{P}_i = 1 - \prod_{t=1}^{M_i} \left[1 - \prod_{j=1}^{m_{ij}} P_{tj} \right]$	$\underline{\pi} = \min_{1 \leq i \leq m} \{ 1 - [1 - (1 - q)^{1/N_{0i} M_i}]^{M_i} \}$	$N_{0i} = \min_j \min_k (N_{ijk})$ $1 \leq j \leq M_i, 1 \leq k \leq m_{ij}$
24—30	BAB	$\mathcal{P} = 1 - \prod_{i=1}^M (1 - \pi_i)$ $\pi_i = \prod_{t=1}^{m_i} \left[1 - \prod_{j=1}^{M_{ij}} (1 - P_{tj}) \right]$	$\underline{\mathcal{P}} = 1 - [1 - (1 - q)^{1/\tilde{N}_0 M}]^M$ $\underline{\mathcal{P}}_i = \min \{ 1 - [1 - (1 - q)^{1/N_{0ij} M_{ij}}]^{M_{ij}} \}$	$\tilde{N}_0 = \min_{1 \leq i \leq M} \left(\frac{\ln(1 - q)}{\ln \underline{\mathcal{P}}_i} \right)$ $N_{0ij} = \min_{1 \leq k \leq M_{ij}} (N_{ijk})$

12. Исходные данные

№ п/п	Первый блок		Второй блок	
	N_{1i}	d_{1i}	N_{2i}	d_{2i}
1	$N_{11} = 20$	$d_{11} = 1$	$N_{21} = 5$	$d_{21} = 0$
2	$N_{12} = 10$	$d_{12} = 0$	$N_{22} = 10$	$d_{22} = 1$
3	—	—	$N_{23} = 4$	$d_{23} = 0$

З а м е ч а н и е. Применение метода слабейшего эквивалентного звена (см. с. 211) в данном примере дает ответ $\pi = 0,98$, а применение метода подстановки (формально) $\pi = 0,915$.

СИСТЕМЫ С МОНОТОННОЙ СТРУКТУРОЙ

Пусть система состоит из M различных элементов. Нарботка до отказа i -го элемента имеет экспоненциальное распределение с параметром λ_i .

Пусть $\bar{\lambda}_i$, $\underline{\lambda}_i$ — верхняя и нижняя q -доверительные границы для параметра λ , вычисленные по стандартным формулам:

$$\bar{\lambda}_i = \frac{\chi_q^2(2d_i + 2)}{2S_i};$$

$$\underline{\lambda}_i = \frac{\chi_{1-q}^2(2d_i + 2)}{2S_i},$$

где d_i , S_i — число отказов и суммарная наработка на испытаниях элементов i -го типа; $\chi_\alpha^2(n)$ — квантиль уровня α для χ^2 -распределения с n степенями свободы.

Относительно структуры системы предполагается только то, что она является монотонной, т. е. отказы элементов не улучшают состояния системы. Для вероятности безотказной работы системы к моменту времени t справедлива известная нижняя оценка [5]

$$W \geq \prod_{i=1}^m \left(1 - \prod_{j \in S_i} V_j\right) \geq \prod_{i=1}^m \left(1 - \prod_{j \in S_i} (\lambda_j t)\right),$$

где $V_j = 1 - \exp(-\lambda_j t)$ — вероятность отказа к моменту t j -го элемента; S_i — набор индексов элементов i -го минимального сечения системы; m — число минимальных сечений.

В случае высоконадежных элементов (при $\lambda_j t \ll 1$) с точностью до малых более высоких порядков справедливо приближенное выражение

$$W \sim 1 - \sum_{i=1}^m \prod_{j \in S_i} V_j \sim 1 - \sum_{i=1}^m \prod_{j \in S_i} (\lambda_j t), \quad (21)$$

где правые части одновременно дают нижние оценки для W .

Нижняя доверительная граница для правой части выражения (21) может вычисляться методом подстановки [50]. Другими словами, нижняя q -доверительная граница для W находится как [при $q \geq 1 - \exp(-3/2) \sim 0,78$]

$$\underline{W} = 1 - \sum_{i=1}^m \prod_{j \in S_i} (\bar{\lambda}_j t), \quad (22)$$

где $\bar{\lambda}_j$ — верхние доверительные границы для параметров λ_j с тем же коэффициентом доверия q .

В некоторых случаях может быть известно, что параметры некоторых элементов совпадают, например, при резервировании однотипными элементами. В этом случае формула (22) для нижней доверительной границы принимает вид

$$\underline{W} = 1 - \sum_{i=1}^m \prod_{j \in S_i} (\bar{\lambda}_j t)^{n_{ij}}, \quad (23)$$

где n_{ij} — число идентичных элементов с параметром λ_j в сечении S_i .

Более эффективные нижние доверительные границы для W могут

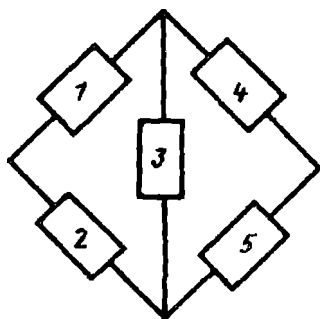


Рис. 4. Пример системы с монотонной структурой (мостиковая схема)

строиться также методом фидуциальных вероятностей [48], но этот метод является более сложным в вычислениях.

Формулы (22), (23) получены в предположении об экспоненциальности распределений наработок элементов. Данный подход может использоваться также и в пуассоновском приближении для схемы биномиальных испытаний, когда распределения наработок произвольные.

Пусть N_i — число испытаний и d_i — число зафиксированных на испытаниях отказов по i -му биномиальному параметру V_i (V_i — вероятность отказа i -го элемента). В случае высокой надежности (при $V_i \ll 1$) при достаточно больших значениях N_i случайная величина d_i может считаться приближенно распределенной по пуассоновскому закону с параметром $\Lambda_i = N_i V_i$.

Формула для нижней q -доверительной границы вероятности безотказной

работы системы в этом случае принимает вид

$$\underline{W} = 1 - \sum_{i=1}^m \prod_{j \in S_i} \bar{V}_j,$$

где V_j — верхняя q -доверительная граница для V_j , $j = 1, \dots, M$. При наличии в системе идентичных элементов с одинаковыми параметрами

$$\underline{W} = 1 - \sum_{i=1}^m \prod_{j \in S_i} \bar{V}_j^{n_{ij}},$$

где n_{ij} — число идентичных элементов с параметром V_j в i -м минимальном сечении S_i .

Пример 7. Рассмотрим систему с монотонной структурой (мостиковая схема) (рис. 4). В данном случае система имеет четыре минимальных сечения: $S_1 = (1, 2)$; $S_2 = (1, 3, 5)$; $S_3 = (2, 3, 4)$; $S_4 = (4, 5)$. Известны верхние доверительные границы с уровнем доверия $q = 0,9$ для параметров интенсивности отказов отдельных элементов, найденные по результатам поэлементных испытаний:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_1 &= 0,12, \bar{\lambda}_2 = 0,08, \bar{\lambda}_3 = 0,15, \\ \bar{\lambda}_4 &= 0,18, \bar{\lambda}_5 = 0,07. \end{aligned}$$

Требуется найти верхнюю доверительную границу с $q = 0,9$ для вероятности безотказной работы системы в течение интервала времени $t = 1$.

Решение. Применяя формулу (22), получаем в данном случае $\underline{W} = 0,974$.

Глава 16. Оценка показателей долговечности систем

Предварительные замечания. В этой главе изложены методы расчета точечных и интервальных оценок показателей долговечности систем с последовательным соединением элементов по результатам испытаний либо эксплуатации этих элементов. Все определения и обозначения, связанные с долговечностью изделия, не разделяемого на его составные части, изложены в гл. 10.

Рассмотрение лишь систем с последовательным соединением их элементов (и независимыми отказами) объясняется тем, что при оценке долговечности изделия производится, как правило, достаточно укрупненный анализ его составных частей, представляющих собой узлы или блоки, не подлежащие замене при профилактических осмотрах и ремонтах.

ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Система состоит из m последовательно соединенных элементов, отказы которых независимы. Тогда функция надежности системы (или ВБР за время t) имеет вид

$$P(t) = \prod_{i=1}^m P_i(t),$$

где $P_i(t)$ — функция надежности i -го элемента системы.

Показатели T и T_γ в самом общем случае (т. е. независимо от законов распределения ресурса отдельных элементов) связаны с функциями надежности $P_i(t)$ следующим образом:

$$T = \int_0^\infty \prod_{i=1}^m P_i(t) dt,$$

а T_γ является корнем уравнения
$$\prod_{i=1}^m P_i(t) = \gamma.$$

Исходя из этих соотношений, можно определить точечные и интервальные оценки показателей долговечности системы: T и T_γ , если предварительно найти точечные оценки $\hat{P}_i(t)$ показателей $P_i(t)$ и НДГ уровня q $\underline{P}_q(t)$ для

$$P(t) = \prod_{i=1}^m P_i(t).$$

Точечная оценка $\hat{T}$ показателя T определяется как

$$\hat{T} = \int_0^\infty \prod_{i=1}^m \hat{P}_i(t) dt, \quad (1)$$

а точечная оценка показателя T_γ есть корень уравнения

$$\prod_{i=1}^m \hat{P}_i(t) = \gamma. \quad (2)$$

Нижняя доверительная граница (НДГ) $\underline{T}_{\gamma q}$ уровня q для гамма-процентного ресурса T_γ системы есть корень уравнения

$$\underline{P}_q(t) = \gamma. \quad (3)$$

Для НДГ $\underline{T}_q$ уровня q среднего ресурса T системы корень уравнения

$$\underline{P}_q(t) = 1/2 \quad (4)$$

является оценкой снизу (при $q > 0,5$) для распределений с неубывающей интенсивностью отказов (т. е. для стареющих распределений), т. е. $\underline{T}_q \geq \underline{T}_{1/2}$, где $\underline{T}_{1/2}$ — корень уравнения (4).

Простых связей между показателями T , T_γ системы и соответствующими показателями T_i , $T_{\gamma i}$ для эле-

1. Оценка среднего ресурса T системы

Вид функции распределения ресурса $F_i(t)$ i -го элемента	Точечная оценка T	НДГ уровня q для T	Примечание
Экспоненциальный закон	$\hat{T} = \left(\sum^m \frac{1}{\hat{T}_i}\right)^{-1}$	$T_q = \frac{2 \min S_i}{\chi_q^2(2D)}$	$D = \begin{cases} \sum^m r_i \\ \sum^m d_i + 1 \end{cases}$
$F_i(t)$ из класса ВФИ-распределений	$\hat{T} \geq \left(\sum^m \frac{1}{\hat{T}_i}\right)^{-1}$	$T_q \geq \frac{2 \min S_i}{\chi_q^2(2D)}$	
Произвольный	$\hat{T} = \int_0^\infty \prod^m \hat{P}_i(t) dt$	$T_q = \hat{T} - z_q \sqrt{D\hat{T}}$	$D\hat{T} = \left(\sum^m \frac{1}{\hat{T}_i}\right)^{-2} \frac{D\hat{T}_i}{\hat{T}_i}$

ментов системы не существует. Исключением является лишь экспоненциальный закон распределения ресурса элементов и распределения из класса ВФИ (ВСФИ)-распределений (см. гл. 8)

В табл. 1 и 2 приведены выражения для оценок показателей T и T_γ в различных ситуациях. Исходными данными при этом являются: $\hat{P}_i(t)$ — оценки функций надежности, $i = 1, m$; $\hat{T}_i$ — оценки средних ресурсов, $i = 1, m$; S_i — суммарные наработки элементов i -го типа, определяемые в зависимости от планов испытаний по формулам, приведенным в гл. 8. $T_q^{(i)}$ — НДГ уровня $q' = q^{1/m}$ для гамма-процентного ресурса $T_q^{(i)}$ i -го элемента системы.

Пример 1. Имеется система из $m = 3$ независимых последовательно соединенных элементов. Каждый элемент имеет стареющее распределение ресурса (т. е. относящееся к классу ВФИ-распределений).

В результате испытаний элементов по плану $[N_i U r_i]$ зафиксированы следующие суммарные наработки S_i (ч) элементов и число r отказов: $S_1 = 60$; $r_1 = 4$; $S_2 = 50$; $r_2 = 5$; $S_3 = 100$; $r = 2$.

Требуется определить точечные оценки среднего ресурса системы T и ее гамма-процентного ресурса T_γ ($\gamma = 0,8$), а также их НДГ уровня $q = 0,9$.

Решение. Точечные оценки среднего ресурса T_i для элементов системы

$$\hat{T}_i = \frac{r_i - 1}{S_i}, \text{ т. е. } \hat{T}_1 = 20;$$
$$\hat{T}_2 = 12,5; \hat{T}_3 = 100;$$

суммарное число отказов $D = \sum^m r_i = 11$.

Границы снизу для точечных оценок показателей T и T_γ системы находим из табл. 1 и 2:

$$\hat{T} \geq \left(\sum^m \frac{1}{\hat{T}_i}\right)^{-1} =$$
$$= \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{12,5} + \frac{1}{100}\right)^{-1} = 7,14;$$
$$\hat{T}_\gamma \geq \hat{T} \ln \frac{1}{\gamma} = 7,14 \ln \frac{1}{0,8} = 1,6.$$

Границы снизу для НДГ уровня $q = 0,9$ для T и T_γ находим из табл. 1

2. Оценка гамма-процентного ресурса T_γ системы [61]

Вид функции распределения ресурса $F_i(t)$ i -го элемента	Точечная оценка T_γ	НДГ уровня q для T_γ	Примечание
Экспоненциальный закон	$\hat{T}_\gamma = \hat{T} \ln \frac{1}{\gamma}$	$\underline{T}_{\gamma q} = \left\{ \frac{2 \min S_i}{\chi_q^2(2D)} \right\} \ln \frac{1}{\gamma}$	$\hat{T}$ — см. в табл. 1; S_i — суммарная наработка i -го элемента
$F_i(t)$ из класса ВФИ-распределений	$\hat{T}_\gamma \geq \hat{T} \ln \frac{1}{\gamma}$	$\underline{T}_{\gamma q} \geq \left\{ \frac{2 \min S_i}{\chi_q^2(2D)} \right\} \ln \frac{1}{\gamma}$	
Произвольный	$\prod_{i=1}^m \hat{P}_i(t) = \gamma$, корень этого уравнения дает значение $\hat{T}_\gamma$	$\underline{T}_{\gamma q} \geq \min \underline{T}_{\gamma q'}^{(i)}$	$q' = q^{1/m}$ или $q = (q')^m$

и 2, предварительно определив по табл. 8 приложения $\chi_q^2(2D) = \chi_{0,9}^2 \times \times (22) = 30,8$:

$$\underline{T} \geq \frac{2 \min(S_i)}{\chi_q^2(2D)} = \frac{2 \cdot 12,5}{30,8} = 0,8;$$

$$\underline{T}_\gamma \geq \left\{ \frac{2 \min(S_i)}{\chi_q^2(2D)} \right\} \ln \frac{1}{\gamma} =$$

$$= 0,8 \ln \frac{1}{0,8} = 0,18.$$

Пример 2. Имеется система из $m = 4$ независимых последовательно соединенных элементов. По результатам испытаний найдены следующие значения НДГ уровня $q' = 0,95$ для гамма-процентного ресурса элемента каждого типа: $T_{\gamma q'}^{(1)} = 12,5$ ч; $T_{\gamma q'}^{(2)} = 18,1$ ч; $T_{\gamma q'}^{(3)} = 13,8$ ч и $T_{\gamma q'}^{(4)} = 20,3$ ч (где $\gamma = 0,9$). Требуется определить НДГ для гамма-процентного ресурса системы.

Решение. Из табл. 2 находим

$$\underline{T}_{\gamma q} \geq \min \underline{T}_{\gamma q'}^{(i)} =$$

$$= \min(12,5; 18,1; 13,8; 20,3) = 12,5,$$

причем уровень доверия найденной НДГ равен $q = (q')^m = (0,95)^4 = 0,81$.

Если ресурс каждого из m элементов последовательной системы имеет стареющее распределение (т. е. из класса ВСФИ-распределений), то для точечных и интегральных оценок показателей долговечности системы T и T_γ можно дать другие выражения, приведенные в табл. 3.

Эти выражения нетрудно получить, используя свойства ВФИ (ВСФИ)-распределений, указанные, например, в [5]. Их отличие от приведенных в табл. 1 и 2 состоит в том, что в качестве исходной информации можно использовать лишь оценки ВБР системы P .

Пример 3. Имеется система из $m = 3$ элементов, соединенных последовательно, которые испытывались автономно по плану $[N_i UT_i]$, и были зафиксированы d_i отказов, где $N_i =$

3. Оценки показателей долговечности систем с последовательным соединением стареющих элементов

Показатель долговечности системы	План испытаний элементов	Точечная оценка	НДГ уровня q	Примечание
T	$[N_iUT_i]$	$\hat{T} \geq \frac{1 - \hat{P}^{T_0}}{\ln(1/\hat{P})}$	$\underline{T} \geq \frac{1 - P^{T_0}}{\ln(1/\underline{P})}$	$\hat{P} = \prod_{i=1}^m \left(1 - \frac{d_i}{N_i}\right)^{1/T_i};$ $\underline{P} = f_2(N_0, \hat{P}, q)$
T_γ	$[N_iUT_i]$	$\hat{T}_\gamma \geq \frac{\ln \gamma}{\ln \hat{P}}$	$\underline{T}_\gamma \geq \frac{\ln \gamma}{\ln \underline{P}}$	$T_0 = \min(T_i);$ $N_0 = \min(N_iT_i)$

$= 10; T_1 = 5,5$ усл. ед.; $d_1 = 3; N_2 = 15; T_2 = 4,0$ усл. ед., $d_2 = 2; N_3 = 9; T_3 = 6,0$ усл. ед.; $d_3 = 1$. Требуется оценить средний T и гамма-процентный T_γ ($\gamma = 0,8$) ресурсы системы.

Решение. Расчетные формулы для определения точечных оценок $\hat{T}$ и $\hat{T}_\gamma$ находим в табл. 3. Предварительно определяем

$T_0 = \min(5,5; 4,0; 6,0) = 4;$
 $N_0 = \min(10 \cdot 5,5; 15 \cdot 4,0; 9 \cdot 6,0) = 54;$
 $\hat{P} = (1 - 3/10)^{1/5,5} (1 - 2/15)^{1/4} \times$
 $\times (1 - 1/9)^{1/6} = 0,886.$

Отсюда (при $\gamma = 0,8$)
 $\hat{T} \geq (1 - \hat{P}^{T_0})/\ln(1/\hat{P}) =$
 $= (1 - 0,886^4)/\ln(1/0,886) =$
 $= 3,1$ усл. ед.;
 $\hat{T}_\gamma \geq \ln \gamma / \ln \hat{P} = \ln 0,8 / \ln 0,886 =$
 $= 1,84$ усл. ед.

Расчетные формулы для определения НДГ уровня $q = 0,9$ для T и T_γ находим в табл. 3. Предварительно по табл. 4 приложения по величинам

$N_0 = 54, \hat{P} = 0,886$ и $q = 0,9$ находим НДГ уровня q для ВБР системы:

$\underline{P} = f_2(54; 0,886; 0,9) \simeq 0,816.$

Отсюда
 $\underline{T} \geq (1 - 0,816^4)/\ln(1/0,816) =$
 $= 2,73$ усл. ед.;
 $\underline{T}_\gamma \geq \ln 0,8 / \ln 0,816 \simeq 1,1$ усл. ед.

Заметим, что для использования формул, приведенных в табл. 1 и 2, потребовалась бы информация о величине наработок каждого элемента за время испытаний.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ОСНОВАННЫЕ НА ИНФОРМАЦИИ О НАРАБОТКЕ ДО ОТКАЗА

Наиболее часто встречающимися параметрическими распределениями такого типа является распределение Вейбулла с параметром формы, большим единицы, и нормальный закон распределения (усеченный), которые и будут здесь рассмотрены.

Будем предполагать, что ресурс всех элементов рассматриваемой системы распределен по одному и тому же закону, а каждый элемент испыты-

вался по плану испытаний одного и того же типа (например, каждый элемент испытывался по плану $[N_i U z_i]$ или $[N_i U T_i]$ и т. д.). В том случае, когда эти предположения не выполнены, следует пользоваться общими соотношениями, приведенными выше.

Ресурс элементов системы распределен по закону Вейбулла. Предполагается, что ресурс любого из m последовательно соединенных элементов системы имеет закон распределения Вейбулла, т. е. функция распределения ресурса i -го элемента

$$F_i(t) = 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{t}{a_i} \right)^{b_i} \right\},$$

$$i = \overline{1, m},$$

где a_i — масштабный параметр ($a_i > 0$); b_i — параметр формы ($b_i \geq 1$) для стареющих элементов.

Оба параметра a_i и b_i предполагаем неизвестными¹.

Пусть элементы системы испытывались по плану $[N_i U r_i]$, $i = \overline{1, m}$. Тогда точечные оценки $\hat{a}_i$, $\hat{b}_i$ параметров a_i и b_i могут быть определены так же, как в гл. 8 (см. с. 72), а оценку ВБР i -го элемента можно представить в виде

$$\hat{P}_i(t) = \exp \{ - \exp (- \hat{V}_{ti}) \},$$

где

$$\hat{V}_{ti} = \hat{b}_i \ln (\hat{a}_i / t), \quad i = \overline{1, m}.$$

Оценка ВБР системы $P(t)$ имеет вид

$$\hat{P}(t) = \prod_{i=1}^m \exp \{ - \exp (- \hat{V}_{ti}) \}, \quad (5)$$

а НДГ уровня q для ВБР $P(t)$ можно представить в виде

$$\underline{P}_q(t) = \min_{1 \leq i \leq m} L_i(q, \hat{V}_t), \quad (6)$$

¹ Когда параметр формы b_i считается известным, распределение Вейбулла сводится к экспоненциальному распределению простой заменой переменной t : $\tau_i = t_i^{b_i}$. В этом случае все расчеты упрощаются, а все расчетные формулы приведены в табл. 1—3.

где $\hat{V}_t = -\ln \ln \hat{P}(t)$; $L_i(\epsilon; S)$ — функция, зависящая от двух аргументов $\epsilon \in (0, 1)$ и $S > 0$ и значений N_i и r_i , определяющих план испытаний i -го элемента.

Корни уравнения $L_i(\epsilon, S) = \gamma$ относительно $S = V_\epsilon^\gamma$ см. в табл. 13 приложения.

Формулой (6) можно пользоваться при высоком уровне надежности системы ($\hat{P}(t) \geq 0,9$). При невыполнении этого условия, но при одинаковом для всех элементов плане испытаний $[N U r]$ следует применять формулу

$$\underline{P}_q(t) =$$

$$= \min_{1 \leq k \leq m} [L(1 - (1 - q)^{1/k}, \hat{V})]^k$$

Полученные зависимости для $\hat{P}(t)$ и $\underline{P}_q(t)$ позволяют на основе уравнений (1)—(4) определить точечные оценки $\hat{T}$, $\hat{T}_\gamma$ и НДГ уровня q $\underline{T}_q$, $\underline{T}_{\gamma q}$ для показателей долговечности системы T и T_γ .

Формула (1), определяющая оценку $\hat{T}$, требует численного интегрирования (например, методом Симпсона) функции $\hat{P}(t)$.

Формула (2), определяющая оценку $\hat{T}_\gamma$, требует применения одного из методов последовательных приближений для отыскания решения с заданной точностью. Алгоритм решения такого уравнения будет изложен ниже при рассмотрении решения уравнения (3), частным случаем которого является уравнение (4).

Алгоритм решения уравнения (3). В случае испытаний элементов по разным планам типа $[N_i U r_i]$ уравнение (3) имеет вид

$$\min_{1 \leq i \leq m} L_i(q, \hat{V}_t) = \gamma. \quad (7)$$

Решение уравнения (7) относительно переменной $\hat{V}_t$ проводится в два этапа. На первом этапе для тех значений $i = \overline{1, m}$, для которых величины N_i или r_i отличаются друг от друга, решаем уравнение, аналогичное при-

веденному в гл. 8 для распределения Вейбулла:

$$L_i(q, \hat{V}_t) = \gamma, \quad i = \overline{1, m}. \quad (8)$$

Его решение

$$V_{qi}^\gamma = L_i^{-1}(q, \gamma), \quad i = \overline{1, m} \quad (9)$$

определяется либо по табл. приложения, либо по рис. 11—16 приложения по величинам N_i , r_i , q и $P = \gamma$. После чего определяем наибольшее из них

$$V_q^\gamma = \max_{1 \leq i \leq m} (V_{qi}^\gamma). \quad (10)$$

На втором этапе решаем относительно t уравнение

$$\sum_{i=1}^m (t/\hat{a}_i)^{\hat{b}_i} = \exp(-V_q^\gamma). \quad (11)$$

К такому же уравнению приводит случай определения НДГ $P_q(t)$ при одинаковых планах испытаний [см. частный случай формулы (6)]. Различие состоит лишь в том, что вместо величины V_q^γ должна стоять величина $V_{\hat{q}}^\gamma$, определяемая в виде

$$V_{\hat{q}}^\gamma = L^{-1}(\hat{q} = 1 - (1 - q)^{1/m}, \quad \hat{\gamma} = \gamma^{1/m}), \quad (12)$$

(см. табл. 12 и рис. 11—16 приложения) с использованием интерполяции по величинам N , r , $\hat{q}$ и $P = \hat{\gamma}$.

Решение уравнения (11) целесообразно искать методом Ньютона, согласно которому последовательные приближения t_k находятся по формуле

$$t_{k+1} = t_k - y(t_k)/y'(t_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (13)$$

где

$$y(t) = \sum_{i=1}^m (t/\hat{a}_i)^{\hat{b}_i} - \exp(-V_q^\gamma);$$

$$y'(t) = \sum_{i=1}^m (\hat{b}_i/\hat{a}_i) (t/\hat{a}_i)^{\hat{b}_i-1},$$

а в качестве нулевого приближения t_0 следует принять $t_0 = \min_{1 \leq i \leq m} \{t_0^{(i)}\}$, где

$t_0^{(i)} = T_{\gamma q}^{(i)}$ есть НДГ уровня q для гамма-процентного ресурса i -го элемента системы, определяемая по формуле табл. 6, гл. 10.

Число приближений определяется допустимой относительной погрешностью вычислений Δ ($\Delta = 1 \div 5\%$) из условий

$$|(t_{k+1} - t_k)/t_{k+1}| < \Delta. \quad (14)$$

Для определения оценки $\hat{T}_\gamma$ нужно найти с заданной точностью приближенное решение уравнения (2), которое удобнее решать методом хорд. Согласно этому методу, последовательные приближения t_k решения находятся по формуле

$$t_{k+1} = t_k - \frac{(t_k - t_i) y(t_i)}{y(t_k) - y(t_i)}, \quad i, k = 0, 1, 2, \dots (i < k), \quad (15)$$

где $y(t) = \hat{P}(t) - \gamma$; $\hat{P}(t) = \prod_{i=1}^m \hat{P}_i(t)$, а в качестве двух начальных приближений t_0 и t_1 (т. е. $i = 0, k = 1$) выбираются $t_0 = 0$ и такое возможно меньшее значение $t = t_1$, при котором $y(t_1) < 0$.

Последнее приближение t_{k+1} определяется тем же условием (14).

Рекомендуется также использовать следующие неравенства для $\hat{T}_\gamma$ (при $\gamma > 0,5$ и $q > 0,5$):

$$\min_{1 \leq i \leq m} (T_{\gamma q}^{(i)}) \leq \hat{T}_\gamma \leq \min_{1 \leq i \leq m} (\hat{T}_{\gamma i}).$$

Ресурс элементов системы распределен по нормальному закону. Предполагаем, что ресурс любого из m последовательно соединенных элементов системы имеет нормальный (усеченный) закон распределения с параметрами μ_i и σ_i , причем $\mu_i > 3\sigma_i$ (т. е. усеченностью можно пренебречь).

Обозначим через $\hat{\mu}_i$ и $\hat{\sigma}_i$ оценки параметров μ_i и σ_i , которые определяются по результатам испытаний выборки объема N_i элементов (по планам $[N_i U r_i]$, $[N_i U t_i]$ и др.) в соответствии с гл. 8.

Тогда для ВБР системы $P(t)$ точечная оценка имеет вид

$$\hat{P}(t) = \prod_{i=1}^m \Phi[h_i(t)], \quad (16)$$

где

$$h_i(t) = (\hat{\mu}_i - t)/\hat{\sigma}_i, \quad i = 1, m;$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

(см. табл. 7 приложения).

НДГ уровня q определяется из выражения (см. с. 99)

$$\underline{P}_q(t) \simeq \Phi\left\{h(t) - u_q \sqrt{\frac{1}{N-1} \left[1 + \frac{1}{2} h^2(t)\right]}\right\}, \quad (17)$$

где u_q и $h(t)$ — квантили нормального закона распределения соответственно уровней q и $\hat{P}(t)$; определяются по табл. 7 приложения; $N = \min_{1 \leq i \leq m} (N_i)$ — наименьшее значение из объемов выборок N_i при испытаниях элемента i -го типа.

Полученные зависимости для $\hat{P}(t)$ и $\underline{P}_q(t)$ позволяют на основе уравнений (1)–(4) определить точечные и интервальные оценки показателей долговечности системы T и T_γ .

Для определения $\hat{T}$ используется формула (1), требующая численного интегрирования. Приближенно $\hat{T}$ можно оценить в виде

$$\hat{T} \simeq \bar{\mu} - u_{q'} \bar{\sigma}, \quad (18)$$

где $q' = (1/2)^{1/m}$, а $\bar{\mu}$ и $\bar{\sigma}$ есть усредненные оценки $\hat{\mu}_i$ и $\hat{\sigma}_i$:

$$\bar{\mu} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \hat{\mu}_i; \quad \bar{\sigma} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \hat{\sigma}_i.$$

Для приближенного определения $\hat{T}$ можно использовать неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{\hat{T}_i}\right)^{-1} < \hat{T} < \min_{1 \leq i \leq m} (\hat{T}_i).$$

Для определения оценки $\hat{T}_\gamma$ нужно найти решение уравнения (2) методом хорд, согласно которому последовательные приближения t_k находятся

по формуле (15), где $y(t) = \prod_{i=1}^m \Phi[h_i(t)] - \gamma$, а в качестве начальных приближений t_0 и t_1 можно взять $t_0 = 0$ и $t_1 = \min(\hat{T}_i)$ или большее значение t , так чтобы обеспечивалось условие $y(t_1) < 0$.

Для определения НДГ $\underline{T}_{\gamma q}$ и $\underline{T}_q$ нужно найти решения уравнений (3) (4). Уравнение (3) в данном случае можно записать в виде

$$\prod_{i=1}^m \Phi[h_i(t)] = \Phi[K(\gamma, q, N)],$$

где $K(\gamma, q, N)$ — толерантный множитель, определяемый по табл. 11 приложения для заданных значений γ , q и N .

Последовательные приближения t_k решения данного уравнения определяются по той же формуле (15), где в качестве $y(t)$ должна быть функция

$$y(t) = \prod_{i=1}^m \Phi[h_i(t)] - \Phi[K(\gamma, q, N)],$$

а начальные значения t_0 и t_1 можно выбрать теми же самыми.

Число приближений определяется заданной относительной погрешностью вычислений δ из условия (14).

Пример 4. Требуется оценить долговечность системы, состоящей из двух последовательно соединенных элементов (блоков) различного типа, если известны результаты испытаний элементов каждого из этих двух типов.

Образцы элементов первого типа испытывались по плану $[N_1 U r_1]$, где $N_1 = 15$, $r_1 = 3$; образцы элементов второго типа испытывались по плану $[N_2 U r_2]$, где $N_2 = 15$, $r_2 = 5$.

Практика позволяет считать, что ресурс каждого из элементов подчиняется распределению Вейбулла с неизвестными параметрами a_i , b_i , $i = 1, 2$. По наработкам (измеряемым в тыс. км пробега), полученным в ходе испытаний, были найдены оценки параметров a_i и b_i (см. гл. 8): $\hat{a}_1 = 15,8$; $\hat{b}_1 = 2,6$; $\hat{a}_2 = 10,4$; $\hat{b}_2 = 3,2$.

Требуется оценить гамма-процентный ресурс системы, т. е. найти точечную оценку $\hat{T}_\gamma$ показателя T_γ при $\gamma = 0,9$ и его НДГ уровня q $T_{\gamma q}$ при $q = 0,9$.

Решение. Определим вначале НДГ уровня $q = 0,9$ для T_γ . Искомое значение НДГ для T_γ есть корень уравнения (3), принимающего в данном примере вид (7), так как $r_1 \neq r_2$:

$$\min \{L_1(q, \hat{V}_t), L_2(q, \hat{V}_t)\} = \gamma$$

$$(\gamma = 0,9).$$

На первом этапе решения ищем корни (относительно $\hat{V}_t$) уравнений $L_1(q, \hat{V}_t) = \gamma$ для $N_1 = 15$, $r_1 = 3$, $\gamma = 0,9$, $q = 0,9$

$$L_2(q, \hat{V}_t) = \gamma \text{ для } N_2 = 15,$$

$$r_2 = 5, \gamma = 0,9, q = 0,9.$$

По табл. 12 и рис. 11—16 приложения находим $V_{q1}^\gamma = L_1^{-1}(q, \gamma) = 5,4$ и $V_{q2}^\gamma = L_2^{-1}(q, \gamma) = 4,45$ и в соответствии с формулой (10) берем наибольшее из этих значений:

$$V_q^\gamma = \max \{V_{q1}^\gamma, V_{q2}^\gamma\} = 5,4.$$

На втором этапе решаем относительно t уравнение (11), имеющее вид

$$\left(\frac{t}{15,8}\right)^{2,6} + \left(\frac{t}{10,4}\right)^{3,2} = 0,0045.$$

Ищем последовательные приближения t_k решения уравнения по формуле (13). Для выбора начального приближения t_0 найдем НДГ уровня q для 90 %-ного ресурса каждого из двух элементов.

Из табл. 6 гл. 10 имеем

$$\underline{T}_{\gamma q}^{(1)} = a_1 \exp \{-V_{q1}^\gamma / b_1\} =$$

$$= 15,8 \exp \{-5,4 / 2,6\} = 1,98 \simeq 2;$$

$$\underline{T}_{\gamma q}^{(2)} = a_2 \exp \{-V_{q2}^\gamma / b_2\} =$$

$$= 10,4 \exp \{-4,45 / 3,2\} \simeq 2,6.$$

Поскольку искомая величина $\underline{T}_{\gamma q} < \min \{\underline{T}_{\gamma q}^{(1)}, \underline{T}_{\gamma q}^{(2)}\}$, то в качестве t_0 примем $t_0 = 2$ и зададимся допустимой

относительной погрешностью $\delta = 10 \%$. Вычисляем последовательные приближения

$$t_{k+1} = t_k - y(t_k) / y'(t_k), \quad t_0 = 2,$$

$$\text{где } y(t) = (t/15,8)^{2,6} + (t/10,4)^{3,2} - 0,0045; \quad y'(t) = 0,164 (t/15,8)^{1,6} + 0,31 (t/10,4)^{2,2}.$$

$$\text{Получаем } t_1 = 1,63; \quad t_2 = 1,54; \quad t_3 = 1,538.$$

Уже второе приближение обеспечивает погрешность $\delta = 0,6 \%$; третье приближение обеспечивает $\delta < 0,2 \%$.

Таким образом, искомое значение НДГ $\underline{T}_{\gamma q} = 1,54$ тыс. км пробега.

Определим точечную оценку гамма-процентного ресурса T_γ . Для этого вначале по формулам табл. 6 гл. 10 вычислим точечные оценки гамма-процентного ресурса каждого из двух элементов системы:

$$\hat{T}_{\gamma 1} = \hat{a}_1 \left(\ln \frac{1}{\gamma} \right)^{1/\hat{b}_1} =$$

$$= 15,8 \left(\ln \frac{1}{0,9} \right)^{1/2,6} = 6,65;$$

$$\hat{T}_{\gamma 2} = \hat{a}_2 \left(\ln \frac{1}{\gamma} \right)^{1/\hat{b}_2} =$$

$$= 10,4 \left(\ln \frac{1}{0,9} \right)^{1/3,2} = 5,1.$$

Искомая величина $\hat{T}_\gamma$ при $\gamma > 0,5$ и $q > 0,5$ удовлетворяет неравенству

$$\min (\underline{T}_{\gamma q}^{(1)}, \underline{T}_{\gamma q}^{(2)}) < \hat{T}_\gamma < \min (\hat{T}_{\gamma 1}, \hat{T}_{\gamma 2}), \quad \text{т. е. } 2 < \hat{T}_\gamma < 5,1,$$

поэтому в качестве двух первых приближений для $\hat{T}_\gamma$ можно принять $t_0 = 2$ и $t_1 = 5,1$.

Для определения $\hat{T}_\gamma$ требуется найти корень уравнения (2), принимающего в данном примере вид [с учетом формулы (5)]

$$\exp \left[-\exp \left(-2,6 \ln \frac{15,8}{t} \right) \right] \times$$

$$\times \exp \left[-\exp \left(-3,2 \ln \frac{10,4}{t} \right) \right] -$$

$$- 0,9 = 0.$$

Последовательные приближения для $\hat{T}_y$ находим по формуле (15) [где $y(t)$ есть левая часть последнего уравнения]: $t_2 = 4,8$; $t_3 = 4,53$.

Третье приближение уже обеспечивает погрешность $\delta < 6\%$.

Следовательно, можно принять значение $\hat{T}_y = 4,53$ тыс. км пробега.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ОСНОВАННЫЕ НА ИЗМЕРЕНИЯХ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ

Здесь будет рассмотрено обобщение модели, изложенное в гл. 10 для случая нескольких определяющих параметров [75].

Условие работоспособности изделия выразим через m независимых определяющих параметров $X_1(t)$, $X_2(t)$, ..., $X_m(t)$, ограниченных снизу (подробнее см. с. 93) в виде

$$A(t) = \bigcap_{i=1}^m \{X_i(x) > a_i, x \in [0, t]\}.$$

В этом случае появляется возможность прогнозировать величину среднего и гамма-процентного ресурса изделия по результатам измерений величины ОП (не дожидаясь появления отказов изделия).

Примем, как в гл. 9, следующее представление для i -го ОП:

$$X_i(x) = \sum_{j=1}^m \alpha_j^{(i)} \varphi_j^{(i)}(x), x \in [0, t],$$

где $\alpha_j^{(i)}$ — случайные нормально распределенные величины с неизвестными средними значениями $\mu_j^{(i)}$ и дисперсиями $\sigma^2(t)$; $\varphi_j^{(i)}(x)$ — выбранные заранее базисные функции, монотонно меняющиеся на промежутке $[0, t]$ (для определенности — убывающие).

С учетом предположений и обозначений, оговоренных в гл. 9, функция надежности изделия (ВБР за время t) имеет вид

$$P(t) = \prod_{i=1}^m \Phi[H_i(t)],$$

где

$$H_i(t) = \left\{ \sum_{j=1}^m \mu_j^{(i)} \varphi_j^{(i)}(t) - a_i \right\} / \sigma_i B_i(t).$$

Величины $B_i(t)$ (см. с. 97) выражаются через известные величины: вектор $\vec{\varphi}_i(t) = \|\varphi_1^{(i)}(t), \dots, \varphi_m^{(i)}(t)\|^T$ и матрицу Θ_i порядка m , задающую отношения θ_j^i дисперсий $D\alpha_j^{(i)}$ к неизвестному параметру $\sigma^2(t)$.

Как показано в гл. 9, по измерениям N_i реализаций i -го ОП в l_i точках $t_1^{(i)} < t_2^{(i)} < \dots < t_{l_i}^{(i)} \leq \tau < t$ (τ — некоторый предшествующий t момент времени), можно определить оценки $\hat{\mu}_j^{(i)}$, $\hat{\sigma}^{(i)}$ параметров $\mu_j^{(i)}$, $\sigma^{(i)}$ и

найти выражения для точечной оценки и НДГ уровня q показателя $P(t)$ в следующем виде:

$$\hat{P}(t) = \prod_{i=1}^m \Phi[\hat{H}_i(t)]; \quad (19)$$

$$\underline{P}_q(t) = \min_{1 \leq i \leq m} \Phi[\underline{H}_{qi}(t)], \quad (20)$$

где точечные оценки $\hat{H}_i(t)$ величин $H_i(t)$ определяются в виде

$$\hat{H}_i(t) = \left\{ \sum_{j=1}^m \hat{\mu}_j^{(i)} \varphi_j^{(i)}(t) - a_i \right\} / \hat{\sigma}^{(i)} B_i(t), \quad (21)$$

а НДГ $\underline{H}_{qi}$ для величин $H_i(t)$ имеют вид

$$\underline{H}_{qi}(t) \simeq u_{\hat{P}} - u_q \sqrt{\frac{1}{C_i(t)} + \frac{1}{2v_i} u_{\hat{P}}^2}, \quad (22)$$

где $v_i = N_i l_i - m$, u_q и $u_{\hat{P}}$ — квантили нормального распределения уровней q и $\hat{P} = \hat{P}(t)$ соответственно; $C_i(t)$ имеет смысл скорректированного объема испытаний (т. е. приближенно $C_i(t) \simeq N_i$), см. также с. 99.

Полученные зависимости для $\hat{P}(t)$ и $P_q(t)$ позволяют на основе уравнений (1) — (4) определить точечные и интервальные оценки показателей долговечности изделия T и T_q .

Определение точечных оценок $\hat{T}$ и $\hat{T}_q$. Вместо соотношения (1), определяющего точечную оценку $\hat{T}$ путем численного интегрирования оценки ВБР $\hat{P}(t)$, можно воспользоваться уравнением

$$\hat{P}(t) = 1/2 \text{ или } \prod_{i=1}^m \Phi[\hat{H}_i(t)] = 1/2, \quad (23)$$

корень которого $T_{1/2}$ дает оценку снизу для величины $\hat{T}$.

Решение уравнения (23) ищется методом хорд, по которому последовательные приближения находятся по формуле (15), где нужно положить

$$y(t) = \prod_{i=1}^m \Phi[\hat{H}_i(t)] - \frac{1}{2},$$

а в качестве двух начальных приближений взять $t_0 = 0$ и некоторое значение (произвольное) t_1 , при котором $y(t_1) < 0$. Число приближений, как обычно, ограничивается заданной погрешностью вычислений Δ из условия (14).

Для определения оценки $\hat{T}_q$ используется уравнение (2), принимающее в данном случае вид

$$\prod_{i=1}^m \Phi[\hat{H}_i(t)] = \gamma,$$

который вполне аналогичен уравнению (23). Его решение, следовательно, ищется точно так же.

Определение интервальных оценок $\underline{T}_q$ и $\underline{T}_{\gamma q}$. Оценки $\underline{T}_{\gamma q}$ и $\underline{T}_q$ ищутся как решения уравнений (3) и (4). Достаточно поэтому рассмотреть уравнение (3), принимающее в данном случае вид (относительно неизвестного t)

$$\min_{1 \leq i \leq m} \Phi \left[u_{\hat{P}}(t) - u_q \times \sqrt{\frac{1}{C_i(t)} + \frac{1}{2v_i} u_{\hat{P}}^2(t)} \right] = \gamma. \quad (24)$$

Покажем, что оно сводится к решению m уравнений типа (22).

Поскольку функции, стоящие под знаком минимума, убывают по t , то корень уравнения (24) — $\underline{T}_{\gamma q}$ определяется как

$$\underline{T}_{\gamma q} = \min_{1 \leq i \leq m} \{ \underline{T}_{\gamma q}^{(i)} \}, \quad (25)$$

где $\underline{T}_{\gamma q}^{(i)}$ определяется как решение относительно t уравнения

$$\Phi \left[u_{\hat{P}}(t) - u_q \times \sqrt{\frac{1}{C_i(t)} + \frac{1}{2v_i} u_{\hat{P}}^2(t)} \right] = \gamma. \quad (26)$$

В уравнении (26) можно вначале приближенно положить $C_i(t) = N_i$, после чего оно преобразуется к уравнению вида (22), но с другой правой частью

$$\prod_{k=1}^m \Phi[\hat{H}_k(t)] = \Phi(z_i), \quad i = \overline{1, m}, \quad (27)$$

где z_i определяется через известные величины по формуле

$$z_i = \left\{ u_{\gamma} + u_q \times \sqrt{\left(1/N_i + u_{\gamma}^2/2v_i \right) - u_q^2/2v_i N_i} \right\} / (1 - u_q^2/2v_i). \quad (28)$$

Таким образом, решение $\underline{T}_{\gamma q}^{(i)}$ уравнения (27) для любого $i = \overline{1, m}$ производится методом последовательных приближений точно так же, как и решение уравнения (23), при условии, что $C_i(t) = N_i$. Проверку этого условия можно осуществить, вычислив значения $C_i(t)$ при $t = \underline{T}_{\gamma q}^{(i)}$. Если $C_i(\underline{T}_{\gamma q}^{(i)})$ значительно меньше N_i , то следует снова решить уравнение (26), положив теперь $C_i(t) = C_i \times (\underline{T}_{\gamma q}^{(i)})$.

З а м е ч а н и е. Более простой, но менее быстро сходящийся алгоритм решения уравнений типа (23), (27) состоит в использовании метода половинного деления отрезка (t_0, t_1) , где

t_0 и t_1 — начальные значения, в которых $\hat{P}(t_0) - \gamma > 0$, а $\hat{P}(t_1) - \gamma < 0$. В качестве t_0 можно всегда брать $t_0 = 0$, а значение t_1 подбирается последовательным увеличением t_0 с некоторым подходящим шагом, не превышающим Δ , т. е. вначале вычисляются значения $\hat{P}(t_k)$ в точках $t_k = t_0 + k\Delta$ и полагают $t_1 = t_0 + k_0\Delta$, где k_0 — наименьшее целое число, при котором $\hat{P}(t_0 + k_0\Delta) - \gamma < 0$. Если величина Δ достаточно мала, то в качестве решения можно принять $t^* = t_1 - \Delta/2$, абсолютная погрешность которого не превышает $\Delta/2$.

Пример 5. Пусть условие работоспособности изделия определяется трехмерным векторным параметром $X(x) = \|X_1(x), X_2(x), X_3(x)\|$, компоненты которого и все исходные данные определены в примере 4, гл. 9. На основе этих данных найдены выражения для оценок ВБР за время t в следующем виде:

$$\hat{P}(t) = \Phi[\hat{H}_1(t)] \Phi[\hat{H}_2(t)] \Phi[\hat{H}_3(t)],$$

где

$$\hat{H}_1(t) = \frac{6,760 - 0,005t - \ln 150}{0,304 \sqrt{1,01 + (0,001t)^2}};$$

$$\hat{H}_2(t) = \frac{2,89 - 0,0535 \ln(t+1) - \ln 10}{0,13 \sqrt{1,09 + (0,005 \ln(t+1))^2}};$$

$$\hat{H}_3(t) = \frac{607,8 - 0,698t - 400}{35,6 \sqrt{1,01 + (0,008t)^2}}.$$

Требуется определить НДГ уровня $q = 0,9$ для гамма-процентного ресурса изделия (т. е. для T_γ при $\gamma = 0,8$).

Решение. Полагаем $C_i(t) = N_i = 3$ и решаем уравнение (27) для $i = 1, 2, 3$, вычисляя последовательные приближения $t_j^{(i)}$ для $T_{\gamma q}^{(i)}$ с абсолютной погрешностью до $\Delta = 1$ ч. При этом полагалось $u_\gamma = u_{0,8} = 0,84$; $u_q = u_{0,9} = 1,28$; $v_i = N_i l_i - m_i = 3 \cdot 3 - 2 = 7$ и, следовательно, $z_1 = 1,8$; $\Phi(z_1) = 0,964$; $z_2 = 1,8$; $\Phi(z_2) = 0,964$; $z_3 = 1,8$; $\Phi(z_3) = 0,964$.

4. Значение последовательных приближений $t_k^{(i)}$ (при $k = 2, 3, \dots$)

Номер ОП	$t_2^{(i)}$	$t_3^{(i)}$	$t_4^{(i)}$	$t_5^{(i)}$
$i = 1$	96	118	126	127
$i = 2$	96	115	121	121
$i = 3$	95	117	124	125

В качестве начальных приближений взято $t_0^{(i)} = 0$ и $t_1^{(i)} = 500$, так как $\hat{P}(500) < 0$.

Результаты расчетов сведены в табл. 4.

Как видим, используемый метод уже для пятого приближения дает достаточно точное решение.

В соответствии с формулой (25) находим окончательный ответ

$$T_{\gamma q} = \min\{127; 121; 125\} = 121 \text{ ч.}$$

Проверка показывает, что допущение $C_i(t) \approx N_i = 3$ выполняется с приемлемой точностью, так как $C_1(127) = 3,5$; $C_2(121) = 3,2$; $C_3(125) = 3,4$.

Пример 6. Требуется оценить гамма-процентный ресурс системы T_γ (при $\gamma = 0,8$), состоящей из двух компонент, определяющие параметры которых представлены в виде

$$X_1(t) = \alpha_1 - \alpha_2 t \quad \text{и} \quad X_2(t) = \beta_1 - \beta_2 t - \beta_3 t^2.$$

Коэффициенты пропорциональности дисперсий величин α_j и β_j оценены по априорным данным: $D\alpha_1 = \sigma_1^2$ — неизвестная величина; $D\alpha_2/D\alpha_1 = \theta_{12} = 0,01$, $D\beta_1 = \sigma_1^2$ — неизвестная величина $D\beta_2/D\beta_1 = \theta_{22} = 0,01$, $D\beta_3/D\beta_1 = \theta_{23} = 0,001$.

По точным измерениям ($\theta_{10}^2 = \theta_{20}^2 = 0$, см. с. 98) $N_1 = 3$ реализаций процесса $X_1(t)$ в моменты $t_1^{(1)} = 0$, $t_2^{(1)} = 6$ мес. и $N_2 = 4$ реализаций процесса $X_2(t)$ в моменты $t_1^{(2)} = 0$, $t_2^{(2)} = 3$ мес. и $t_3^{(2)} = 6$ мес. получены оценки показателей $H_i(t)$ — по фор-

5. Значения последовательных приближений t_k (при $k = 0, 1, \dots$)

Величина	$t_0 = 0$	$t_1 = 20$	$t_2 = 50$	$t_3 = \frac{t_1 + t_2}{2} = 35$	$t_4 = 40$	$t_5 = \frac{1}{2}(t_3 + t_4) = 37,5$
$\widehat{P}(t_k)$	0,9919	0,98	0,3	0,83	0,7	—
$\text{sign} [\widehat{P}(t_k) - \gamma]$	+	+	—	+	—	—

муле (21) (с учетом допусков a_1 и a_2):

$$\widehat{H}_1(t) = \frac{2,91 - 0,0397t}{\sqrt{1 + 0,0001t^2}};$$
$$\widehat{H}_2(t) = \frac{4,44 - 0,0042t - 0,0017t^2}{\sqrt{1 + 0,0001t^2 + 0,000001t^4}}.$$

Требуется определить точечную оценку $\widehat{T}_\gamma$ и НДГ $T_{\gamma q}$ уровня $q = 0,9$ для гамма-процентного ресурса T_γ и (при $\gamma = 0,8$).

Решение. Вспользуемся замечанием, приведенным на с. 234. По формуле (19) определяем оценку ВБР системы за время t , мес:

$$\widehat{P}(t) = \Phi[\widehat{H}_1(t)]\Phi[\widehat{H}_2(t)].$$

Для определения точечной оценки показателя T_γ будем искать (при-

ближенно) корень уравнения (2) методом половинного деления.

Результаты последовательных приближений приведены в табл. 5 (при $\gamma = 0,8$).

С абсолютной погрешностью, не превышающей $\Delta = 2,5$ мес., можно принять $\widehat{T}_\gamma = 37,5$. При необходимости можно получить более точное значение $\widehat{T}_\gamma$.

Для определения НДГ уровня $q = 0,9$ для T_γ полагаем $C_i(t) \simeq N_i$ ($N_1 = 3$ и $N_2 = 4$) и решаем уравнение (27) для $i = 1, 2$, определяя последовательные приближения $t_k^{(i)}$ для $T_{\gamma q}^{(i)}$ методом половинного деления. При этом полагаем $u_\gamma = u_{0,8} = 0,84$; $u_q = u_{0,9} = 1,28$; $v_i = N_1 l_1 - m_1 = 3 \cdot 2 - 2 = 4$; $v_2 = N_2 l_2 - m_2 = 9$ и, следовательно, $z_1 = 2$; $\Phi(z_1) = 0,977$; $z_2 = 1,65$; $\Phi(z_2) = 0,95$. Результаты расчетов дают значение $T_{\gamma q} = 20,5$ мес.

Глава 17. Планирование испытаний и контроль надежности систем по испытаниям их элементов

Предварительные замечания. В данной главе рассмотрены вопросы планирования испытаний и контроля надежности в том случае, когда показатель надежности является функцией многих переменных, характеризующих надежность элементов системы. Задачи контроля надежности при таком показателе надежности и задачи планирования испытаний в отличие от стандартных (см. гл. 11, 13) принято называть многомерными.

Многомерные задачи контроля и планирования отличаются от обычных тем, что испытания на надежность в них рассматриваются на уровне элементов системы. При этом связь между показателями надежности элементов и системы в целом предполагается известной и определяется структурной схемой надежности (ССН) системы.

Использование многомерных моделей позволяет существенно сократить объемы контрольных выборок.

ПЛАНИРОВАНИЕ И КОНТРОЛЬ ПО ДВУМ КОНТРОЛЬНЫМ УРОВНЯМ

Одноступенчатая процедура (с фиксированным объемом испытаний). Пусть R — показатель надежности системы, а R_1 и R_2 — соответственно заданные контрольные или критические уровни этого показателя, причем $R_1 < R_2$. Система считается пригодной по показателю R , если $R \leq R_1$, и непригодной, если $R \geq R_2$. В случае, когда показатель R имеет смысл вероятности безотказной работы, система считается пригодной по показателю R , если $R \geq R_2$, и непригодной при $R \leq R_1$. Требуется принять

решение о приемке ($R \leq R_1$) или браковке ($R \geq R_2$) системы по результатам испытаний.

Показатель надежности системы зависит от многих неизвестных параметров — показателей надежности различных элементов. Статистическая информация, на основе которой принимается решение, чаще всего включает в себя информацию по испытаниям различных ее элементов.

Общей формулировкой задачи является следующая. Пусть θ — вектор параметров надежности элементов системы; x — вектор результатов испытаний; $P_\theta \{x\}$ — вероятностное распределение x при данном θ . Пусть $R(\theta)$ — функция, выражающая зависимость показателя надежности системы от параметров надежности элементов. Например, если рассматривается система с последовательной ССН, то ее ВБР и ВБР ее элементов p_i , $i = 1, \dots, m$ связаны зависимостью (в предположении независимости отказов элементов)

$$R = \prod_{i=1}^m p_i;$$

Требуется по результатам испытаний принять одно из двух решений (гипотез) — $H_1: R(\theta) \leq R_1$ и $H_2: R(\theta) \geq R_2$.

Пусть X — множество всех возможных исходов испытаний. Правило принятия решений задается разбиением множества X на две непересекающиеся области — G и $\bar{G}$. Если результат испытаний $x \in G$, то принимается решение H_2 . Если результат испытаний $x \in \bar{G}$, принимается H_1 .

Одной из основных характеристик решающего правила является опера-

тивная характеристика $L(\theta) = P_\theta(x \in \bar{G})$ — вероятность принятия решения H_1 при данном θ . При истинном значении $\theta \in H_1$ вероятность ошибочного решения H_2 (вероятность ошибки первого рода) равна $1 - L(\theta)$. При истинном значении $\theta \in H_2$ вероятность ошибочного решения (вероятность ошибки второго рода) равна $L(\theta)$. Величины $\alpha = \max_{\theta \in H_1} [1 - L(\theta)]$; $\beta = \max_{\theta \in H_2} L(\theta)$

называются рисками первого и второго рода. Эти соотношения могут быть записаны также в следующем виде:

$$\begin{aligned} 1 - L(\theta) &\leq \alpha \text{ при } \theta \in H_1; \\ L(\theta) &\leq \beta \text{ при } \theta \in H_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Величины α и β характеризуют максимально возможные вероятности ошибок первого и второго рода (риски изготовителя и потребителя).

Построение плана контроля сводится к выбору объема испытаний и построению решающего правила, обеспечивающего заданные значения рисков α и β при заданных уровнях приемки и браковки R_1, R_2 .

Контроль показателя надежности системы с резервными элементами. Рассмотрим систему, составленную из M однотипных параллельно соединенных резервных элементов (резерв нагруженный). Отказ системы наступает в случае отказа всех ее элементов. Предполагается, что отказы различных элементов происходят независимо друг от друга. Вероятность отказа системы в течение времени t равна

$$Q = w^M,$$

где w — вероятность отказа за время t одного элемента.

Испытания элементов проводятся по плану $[N, U, t]$, в результате чего фиксируется d отказов (биномиальная схема испытаний). Требуется по результату испытаний d принять одно из двух решений — H_1 : $Q \leq Q_1$, H_2 : $Q \geq Q_2$, где $Q_1 < Q_2$ — заданные уровни приемки и браковки системы по показателю Q .

Проверки гипотез H_1 и H_2 эквивалентна проверке гипотез о параметре

w надежности одного элемента H_1 : $w \leq w_1$, H_2 : $w \geq w_2$, где уровни $w_1 = Q_1^{1/M}$, $w_2 = Q_2^{1/M}$. Задача сводится к стандартной схеме на проверку гипотез о параметре биномиального закона в схеме испытаний Бернулли. Равномерно наиболее мощное решающее правило имеет следующий вид. Если $d \leq c$, то принимается решение H_1 (приемка). Если $d > c$, то принимается решение H_2 (браковка). Объем испытаний и константа c выбираются так, чтобы обеспечить заданные риски α, β .

$$\begin{aligned} \text{Пусть } F(w, k) &= P(d \leq k) = \\ &= \sum_{j=0}^k C_N^j w^j (1-w)^{N-j} \text{ — функция} \end{aligned}$$

распределения случайной величины d при значении параметра, равном w . Оперативная характеристика имеет вид $L(w) = F(w, c)$. Неравенства (1) в данном случае записываются как

$$1 - F(w, c) \leq \alpha \text{ при } w \leq w_1;$$

$$F(w, c) \leq \beta \text{ при } w \geq w_2.$$

Функция $F(w, c)$ монотонно убывает по w . Поэтому указанные неравенства эквивалентны следующим:

$$1 - F(w_1, c) \leq \alpha; \quad (2)$$

$$F(w_2, c) \leq \beta.$$

Объем испытаний N и константа c далее выбираются так, чтобы выполнялись неравенства (2). При небольших N для этого используются стандартные таблицы биномиального распределения. При достаточно больших N удобно использовать нормальное приближение. Функция распределения F аппроксимируется выражением

$$F(w, k) \cong \Phi\left(\frac{k - Nw}{\sqrt{Nw(1-w)}}\right),$$

где $\Phi(\cdot)$ — функция распределения стандартного нормального закона с нулевым средним значением и единичной дисперсией.

При использовании нормального приближения необходимый объем испытаний N^* определяется явно. Не-

равенства (2) в нормальном приближении имеют вид

$$Nw_1 + u_\alpha \sqrt{Nw_1(1-w_1)} \leq c; \quad (3)$$

$$Nw_2 - u_\beta \sqrt{Nw_2(1-w_2)} \geq c,$$

где u_α — квантиль уровня $(1-\alpha)$ нормального закона.

Значения рисков α и β могут быть обеспечены при данном объеме испытаний N , если оба неравенства (3) выполняются при некотором c . Для этого должно выполняться неравенство

$$Nw_1 + u_\alpha \sqrt{Nw_1(1-w_1)} \leq Nw_2 - u_\beta \sqrt{Nw_2(1-w_2)}. \quad (4)$$

Тогда в качестве величины c , определяющей решающее правило, можно взять любую величину из интервала

$$Nw_1 + u_\alpha \sqrt{Nw_1(1-w_1)} \leq c \leq Nw_2 - u_\beta \sqrt{Nw_2(1-w_2)}.$$

Если неравенство (4) строгое, то при этом точные значения рисков меньше α и β . Минимально необходимый при данных α и β объем испытаний N^* определяется из равенства

$$N^*w_1 + u_\alpha \sqrt{N^*w_1(1-w_1)} = N^*w_2 - u_\beta \sqrt{N^*w_2(1-w_2)}, \quad (5)$$

откуда

$$N^* = \frac{(u_\alpha \sqrt{w_1(1-w_1)} + u_\beta \sqrt{w_2(1-w_2)})^2}{(w_2 - w_1)^2}. \quad (6)$$

Величина c при этом совпадает с левой и правой частями равенства (5).

Рассмотрим выигрыш в объеме испытаний от учета информации по элементам системы по сравнению с тем случаем, когда решение принимается непосредственно по отказам системы. Предположим на испытания в течение времени t ставится N_c идентичных образцов системы, либо испытывается один образец системы N_c раз; в начале каждого цикла испытаний отказавшие элементы восстанавливаются. Правило принятия решений может строиться двумя способами.

1. На каждом цикле испытаний системы фиксируются как отказы системы в целом, так и отказы по отдель-

ным элементам. Решение принимается на основе суммарного числа отказов d по всем элементам.

2. На каждом цикле испытаний фиксируются лишь отказы системы в целом. Решение принимается на основе суммарного числа «системных» отказов. Данный способ сводится к проверке исходных гипотез $Q \leq Q_1$, $Q \geq Q_2$ о биномиальном параметре Q в схеме испытаний Бернулли, но с объемом испытаний, равным N_c . В соответствии с (6) необходимое число испытаний системы в этом случае определяется выражением

$$N_c^* = \frac{(u_\alpha \sqrt{Q_1(1-Q_1)} + u_\beta \sqrt{Q_2(1-Q_2)})^2}{(Q_2 - Q_1)^2}. \quad (7)$$

При первом способе (с учетом информации по элементам) необходимое число «системных» испытаний равно N^*/M . Коэффициент $K = N_c^*/N^*M^{-1}$ показывает, во сколько раз второй способ требует большего объема испытаний. Обозначим $\delta = (Q_2 - Q_1)/Q_1$. При малых δ из (6) и (7) с учетом связи между уровнями $Q_1 = w_1^M$, $Q_2 = w_2^M$ получаем приближенное выражение

$$K \sim \frac{1 + a + a^2 + \dots + a^{M-1}}{M} \times \left(1 - \frac{M-1}{M} \frac{u_\alpha}{u_\alpha + u_\beta} \delta\right), \quad (8)$$

где $a = w_1^{-1} = (1/Q_1)^{1/M}$.

Коэффициент K характеризует выигрыш в объеме испытаний от учета информации по элементам системы. Выигрыш тем больше, чем меньше уровни Q_1 , Q_2 и чем больше степень резервирования системы M . Для первого сомножителя в (8) справедливы оценки

$$\begin{aligned} \frac{1 - Q_1}{Q_1 \ln Q_1^{-1}} Q_1^{1/M} &\leq \\ &\leq \frac{1 + a + \dots + a^{M-1}}{M} \leq \\ &\leq \frac{1 - Q_1}{Q_1 \ln Q_1^{-1}}, \end{aligned}$$

откуда видно, что при фиксированном Q_1 максимально возможный выигрыш при возрастании степени резервирования M и при $Q_2 \rightarrow Q_1$ определяется коэффициентом $(1 - Q_1)/Q_1 \ln Q_1^{-1}$. Например, при $M = 2$; $Q_1 = 0,01$; $Q_2 = 0,02$; $\alpha = \beta = 0,05$ выигрыш составляет $K \sim 4,125$.

Контроль коэффициента готовности системы с восстановлением. Пусть система составлена из M однотипных резервных элементов (нагруженный резерв). Среднее время безотказной работы одного элемента обозначим через T . В случае отказа элемент сразу же начинает восстанавливаться. Среднее время восстановления одного элемента обозначим через V . Процесс функционирования одного элемента представляет собой последовательность независимых между собой периодов безотказной работы и восстановления $t_1, v_1; t_2, v_2; \dots; t_n, v_n; \dots$, где периоды безотказной работы имеют одинаковое распределение со средним значением $Et_n = T$; периоды восстановления имеют также одинаковое распределение со средним значением $Ev_n = V$. Процессы отказов и восстановления различных элементов предполагаются независимыми. Коэффициент готовности (стационарная вероятность исправного состояния) одного элемента равен $k = T/(T + V)$. Коэффициент готовности системы

$$K_r = 1 - (1 - k)^M = 1 - \left(\frac{V}{T + V} \right)^M$$

Требуется по результатам испытаний принять одно из двух решений:

$$H_1: K_r \geq K_1; \quad H_2: K_r \leq K_2,$$

где $K_1 > K_2$ — заданные уровни приемки и браковки.

Коэффициент готовности однозначно выражается через величину $\rho = V/T$:

$$K_r = 1 - \left(\frac{\rho}{1 + \rho} \right)^M \quad (9)$$

Поэтому проверка гипотез о коэффициенте готовности эквивалентна проверке гипотез о показателе ρ : $H_1: \rho \leq \rho_1$; $H_2: \rho \geq \rho_2$,

где уровни ρ_1, ρ_2 пересчитываются по уровням K_1, K_2 на основе зависимости (9).

Предположим, что в результате испытаний наблюдалось N значений времени безотказной работы элемента; $t_1, \dots, t_N$ и l значений времени восстановления элемента: $v_1, \dots, v_l$, где все перечисленные результаты наблюдений независимы между собой. Распределения времени безотказной работы и времени восстановления элемента предполагаются стареющими (ВФИ-распределениями). Требуется по результатам испытаний $t_1, \dots, t_N$; $v_1, \dots, v_l$ принять одну из двух гипотез H_1, H_2 с заданными рисками α, β .

Решающее правило построим, используя отношение

$$\hat{\rho} = \hat{V}/\hat{T},$$

где $\hat{V} = (v_1 + \dots + v_l)/l$ и $\hat{T} = (t_1 + \dots + t_N)/N$ — оценки параметров V и T по результатам испытаний.

Если $\hat{\rho} \leq c$, то принимается решение H_1 (приемка). Если $\hat{\rho} > c$, то принимается решение H_2 (браковка). Объем наблюдений (N, l) и константа c выбираются из условия обеспечения заданных значений рисков α, β при данных ρ_1, ρ_2 .

Неравенство $\hat{\rho} \leq c$ эквивалентно неравенству $\hat{V} - c\hat{T} \leq 0$. Оперативная характеристика в данном случае задается с вероятностью P ($\hat{V} - c\hat{T} \leq 0$). Неравенство (1) имеют вид

$$1 - P(\hat{V} - c\hat{T} \leq 0) \leq \alpha \text{ при } \rho \leq \rho_1; \quad (10)$$

$$P(\hat{V} - c\hat{T} \leq 0) \leq \beta \text{ при } \rho \geq \rho_2.$$

Случайная величина $\hat{V} - c\hat{T}$ представляет собой сумму $(N + l)$ независимых случайных величин. При достаточно больших N, l ее распределение можно считать приближенно нормальным со средним значением и дисперсией

$$V - cT; \quad \frac{\sigma_v^2}{l} + c^2 \frac{\sigma_t^2}{N},$$

где σ_v^2 , σ_t^2 — дисперсии соответственно времени v восстановления и времени t безотказной работы элемента.

В нормальном приближении неравенства (10) принимают вид

$$V - cT + u_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_v^2}{l} + c^2 \frac{\sigma_t^2}{N}} \leq 0 \text{ при } \rho \leq \rho_1;$$

$$V - cT - u_\beta \sqrt{\frac{\sigma_v^2}{l} + c^2 \frac{\sigma_t^2}{N}} \geq 0 \text{ при } \rho \geq \rho_2$$

или

$$\begin{aligned} \rho - c + u_\alpha \times \\ \times \sqrt{\frac{1}{l} \frac{\sigma_v^2}{V^2} \rho^2 + \frac{c^2}{N} \frac{\sigma_t^2}{T^2}} &\leq 0 \text{ при } \rho \leq \rho_1; \\ \rho - c - u_\beta \times \\ \times \sqrt{\frac{1}{l} \frac{\sigma_v^2}{V^2} \rho^2 + \frac{c^2}{N} \frac{\sigma_t^2}{T^2}} &\geq 0 \text{ при } \rho \geq \rho_2. \end{aligned} \quad (11)$$

Максимальное значение коэффициента вариации стареющего распределения равно единице. Поэтому неравенства (11) записываются в следующем виде:

$$\rho_1 - c + u_\alpha \sqrt{l^{-1} \rho_1^2 + N^{-1} c^2} \leq 0;$$

$$\rho_2 - c - u_\beta \sqrt{l^{-1} \rho_2^2 + N^{-1} c^2} \geq 0.$$

После простых преобразований получаем

$$\begin{aligned} \rho_1 \left(1 + u_\alpha \sqrt{N^{-1} + l^{-1} - (Nl)^{-1} u_\alpha^2} \right) \times \\ \times (1 - N^{-1} u_\alpha^2)^{-1} &\leq c; \\ \rho^2 \left(1 - u_\beta \sqrt{N^{-1} + l^{-1} - (Nl)^{-1} u_\beta^2} \right) \times \\ \times (1 - N^{-1} u_\beta^2)^{-1} &\geq c. \end{aligned} \quad (12)$$

Значения рисков α и β обеспечиваются при данных объемах испытаний N , l , если оба неравенства (12) выполняются при некотором c (при этом

всегда $\rho_1 < c < \rho_2$). Тем самым минимально необходимые объемы испытаний N , l находятся из соотношения

$$\begin{aligned} \rho_1 \left(1 + u_\alpha \sqrt{N^{-1} + l^{-1} - (Nl)^{-1} u_\alpha^2} \right) \times \\ \times (1 - N^{-1} u_\alpha^2)^{-1} = \\ = \rho_2 \left(1 - u_\beta \times \right. \\ \times \sqrt{N^{-1} + l^{-1} - (Nl)^{-1} u_\beta^2} \left. \right) \times \\ \times (1 - N^{-1} u_\beta^2)^{-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Если объемы N , l удовлетворяют этому равенству, то константа c , определяющая решающее правило с рисками α , β , совпадает с обеими частями равенства (13).

Рассмотрим отдельно случай, когда объемы испытаний по времени безотказной работы и по времени восстановления совпадают: $N = l$. Равенство (13) в этом случае упрощается:

$$\begin{aligned} \rho_1 \left(1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{N}} \sqrt{2 - \frac{u_\alpha^2}{N}} \right) \times \\ \times \left(1 - \frac{u_\alpha^2}{N} \right)^{-1} = \\ = \rho_2 \left(1 - \frac{u_\beta}{\sqrt{N}} \sqrt{2 - \frac{u_\beta^2}{N}} \right) \times \\ \times \left(1 - \frac{u_\beta^2}{N} \right)^{-1} \end{aligned}$$

Из этого уравнения находится необходимый объем испытаний N^* . При малых $(\rho_2 - \rho_1)$

$$N^* \sim \frac{2\rho_1^2 (u_\alpha + u_\beta^2)}{(\rho_2 - \rho_1)^2}.$$

При равных рисках $\alpha = \beta$

$$\begin{aligned} N^* = u_\alpha^2 \times \\ \times \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \right)^2} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (14)$$

Доверительные границы для отношения средних значений ρ и коэффициента готовности K_r . Исходя из приведенных результатов, нетрудно получить соответствующие доверительные границы для показателей ρ и K_r . Верхняя $(1 - \beta)$ -доверительная граница для ρ вычисляется как

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{1-\beta} &= \\ &= \hat{\rho} \frac{1 - u_{\beta}^2 N^{-1}}{1 - u_{\beta} \times} \\ &\quad \times \sqrt{N^{-1} + l^{-1} - u_{\beta}^2 (Nl)^{-1}} \end{aligned}$$

Нижняя $(1 - \alpha)$ -доверительная граница для ρ

$$\begin{aligned} \underline{\rho}_{1-\alpha} &= \\ &= \hat{\rho} \frac{1 - u_{\alpha}^2 N^{-1}}{1 + u_{\alpha} \times} \\ &\quad \times \sqrt{N^{-1} + l^{-1} - u_{\alpha}^2 (Nl)^{-1}} \end{aligned}$$

Интервал $(\underline{\rho}_{1-\alpha}, \bar{\rho}_{1-\beta})$ дает доверительный интервал для ρ с коэффициентом доверия $q = 1 - \alpha - \beta$. При $(N, l) \rightarrow \infty$ используем приближенные формулы:

$$\bar{\rho}_{1-\beta} \sim \hat{\rho} \left(1 + u_{\beta} \sqrt{\frac{N+l}{Nl}} \right);$$

$$\underline{\rho}_{1-\alpha} \sim \hat{\rho} \left(1 - u_{\alpha} \sqrt{\frac{N+l}{Nl}} \right).$$

Нижняя и верхняя доверительные границы справедливы в предположении, что время безотказной работы и время восстановления элементов имеют стареющие ВФИ-распределения. Для случая показательных распределений доверительные границы для ρ и K_r приведены в работе [73].

Оценим сокращение объема испытаний системы в результате учета информации по элементам. Предположим, что система испытывается как единое целое. При этом одновременно наблюдаются M независимых потоков отказов и восстановлений по каждому элементу системы. Каждый отдельный поток представляет собой последовательность независимых интервалов работы и восстановления элемента. Си-

стема находится в состоянии отказа, когда все M элементов восстанавливаются.

План контроля коэффициента готовности системы может строиться непосредственно по наблюдениям за потоком отказов и восстановлений системы. Выше предполагалось, что интервалы работы и восстановления — независимые стареющие величины. Заметим, что интервалы работы и восстановления системы могут быть и зависимы. Рассмотрим случай, когда время восстановления элементов имеет показательное распределение. Тогда интервалы работы и восстановления системы независимы. Время восстановления системы имеет показательное распределение со средним $V_c = V/M$. Кроме того, в случае высокой надежности, когда число отказов элементов на одном интервале безотказной работы системы достаточно велико, можно приближенно считать, что время безотказной работы системы имеет также показательное распределение. В указанных допущениях можно использовать предыдущие результаты для принятия решения по наблюдениям непосредственно за интервалами работы и восстановления системы.

Циклом работы системы будем считать интервал безотказной работы и следующий за ним интервал восстановления системы. Предположим наблюдается N_c циклов работы системы. Результатом наблюдений являются N_c интервалов безотказной работы и N_c интервалов восстановления системы. Пусть T_c — среднее время безотказной работы системы; V_c — среднее время восстановления системы; $R = V_c/T_c$. Требуется по указанным результатам наблюдений принять одно из двух решений — $H_1: R \leq R_1$; $H_2: R \geq R_2$, где уровни R_1, R_2 связаны с исходными уровнями приемки K_1 и браковки K_2 коэффициента готовности системы соотношениями:

$$K_1 = 1/(1 + R_1);$$

$$K_2 = 1/(1 + R_2).$$

Пусть $\alpha = \beta$. Необходимое число циклов работы системы N_c^* определяется по формуле, аналогичной (14):

$$N_c^* = u_\alpha^2 \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1} \right)^2} \right]^{-1}$$

Средняя продолжительность испытаний системы

$$a_2 = N_c^* (T_c + V_c).$$

Другой способ принятия решений основан на получаемой в результате испытаний системы информации по отдельным элементам. Испытания системы будем проводить до наблюдения N интервалов безотказной работы и N интервалов восстановления элементов. Необходимое число наблюдений N^* определяется в соответствии с (14), где уровни ρ_1, ρ_2 связаны с уровнями K_1, K_2 следующими соотношениями:

$$K_1 = 1 - \left(\frac{\rho_1}{1 + \rho_1} \right)^M;$$

$$K_2 = 1 - \left(\frac{\rho_2}{1 + \rho_2} \right)^M$$

Средняя продолжительность испытаний в этом случае

$$a_1 = N^* (T + V)/M.$$

С учетом формулы для среднего времени безотказной работы системы

$$T_c = V \cdot M^{-1} [(1 + \rho^{-1})^M - 1].$$

Отсюда следует приближенное (при малых $K_1 - K_2$) выражение

$$\frac{a_2}{a_1} \sim \left[M^2 (1 - K_r)^{\frac{M-1}{M}} \right]^{-1},$$

где K_1 — уровень приемки; K_r — истинное значение коэффициента готовности. Эта величина характеризует выигрыш в объеме испытаний за счет использования информации по элементам. Указанный выигрыш тем больше, чем выше надежность (коэффициент готовности) системы.

Последовательная процедура. При испытаниях системы учет информации по отказам ее отдельных элементов приводит к тому, что соответствующие статистические задачи становятся многомерными. Классические методы

последовательного анализа Вальда не работают в таких ситуациях. Поэтому актуальной является проблема последовательного контроля и оценки показателей надежности систем с учетом информации по элементам. Далее на примере системы с резервированием иллюстрируется метод последовательного контроля и интервального оценивания, позволяющий получать значительный выигрыш в среднем объеме испытаний.

Рассмотрим систему, составленную из M резервных элементов. Время безотказной работы элемента i -го типа распределено по показательному закону с параметром λ_i , $i = 1, \dots, M$. Система работает в течение интервала времени заданной длины. Отказавшие в процессе функционирования элементы не восстанавливаются. Система отказывает, если на этом интервале происходит отказ всех элементов. Отказы различных элементов происходят независимо друг от друга. Вероятность отказа системы за время t_*

$$Q = \prod_{i=1}^m (1 - e^{-\lambda_i t_*}). \quad (15)$$

Система испытывается последовательными независимыми одинаковыми циклами длиной t_* . Отказавшие в процессе испытаний элементы в конце каждого цикла восстанавливаются (или заменяются новыми того же типа).

Пусть y_{in} — индикатор отказа i -го элемента на n -м цикле испытаний, т. е. $y_{in} = 1$, если i -й элемент отказал на n -м цикле; в противном случае $y_{in} = 0$. При испытаниях системы наблюдается последовательность независимых одинаково распределенных векторных случайных величин $x_1, x_2, \dots, x_n$, (16)

где $x_n = (y_{1n}, y_{2n}, \dots, y_{Mn})$ — набор индикаторов отказов элементов на n -м цикле.

Обозначим $w_i = 1 - e^{-\lambda_i t_*}$ — вероятность отказа i -го элемента за время t_* . Показатель надежности системы (15) записывается в виде

$$Q = Q(w) = \prod_{i=1}^M w_i,$$

где $w = (w_1, \dots, w_M)$ — вектор параметров надежности элементов.

План контроля задается правилом остановки и правилом принятия решения в момент остановки. Пусть $Q_1 < Q_2$ — заданные критические уровни показателя надежности системы. Требуется построить план контроля, обеспечивающий при данных Q_1, Q_2 заданные значения рисков первого и второго рода.

Первый очевидный способ решений подобных задач основан на построении плана контроля по наблюдениям непосредственно за отказами системы. Отказ системы на очередном цикле испытаний фиксируется, если на этом цикле отказали все элементы. Обозначим $d_n = 1$, если на n -м цикле был зафиксирован отказ системы; в противном случае $d_n = 0$. Индикатор отказа системы выражается через индикаторы отказов элементов как $d_n = y_{1n} \cdot y_{2n} \cdot \dots \cdot y_{Mn}$.

Последовательность индикаторов отказов системы на различных циклах испытаний $d_1, d_2, \dots, d_n$, образует классическую схему независимых биномиальных испытаний Бернулли с вероятностью отказа $P(d_n = 1) = Q$. Получаем известную задачу контроля биномиального параметра Q в схеме испытаний Бернулли. План контроля в этом случае строится стандартным образом либо по схеме с фиксированным объемом испытаний, либо по последовательной схеме (см. гл. 11).

В первой схеме число циклов (момент остановки) испытаний N планируется заранее, до испытаний. Решающее правило основывается на суммарном числе отказов системы $D_N = d_1 + \dots + d_N$, зафиксированном за N циклов испытаний. Решение $H_1: Q \leq Q_1$ (приемка системы) принимается, если $D_N \leq c$. Решение $H_2: Q \geq Q_2$ (браковка) принимается, если $D_N > c$. Константы N, c выбираются из условия обеспечения заданных рисков:

$$L(Q_1) \geq 1 - \alpha; L(Q_2) \leq \beta,$$

где оперативная характеристика выражается через функцию биномиального закона распределения $L(Q) =$

$$= \sum_{j=0}^D C_N^j Q^j (1-Q)^{N-j}. \text{ Необходимый}$$

объем испытаний в этом случае оценивается приближенным выражением (7).

В последовательной схеме план контроля строится как последовательный план Вальда, применяемый к точкам Q_1, Q_2 . Область продолжения наблюдений на n -м цикле испытаний имеет вид

$$B \leq \left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)^{D_n} \left(\frac{1-Q_2}{1-Q_1}\right)^{n-D_n} \leq A. \quad (17)$$

Наблюдения продолжаются до момента v первого нарушения неравенств (17). При нарушении левого неравенства принимается решение H_1 . При нарушении правого неравенства принимается H_2 . Константы A, B выбираются на основе приближенных соотношений Вальда из условия обеспечения заданных рисков:

$$\frac{\alpha}{1-\beta} = A^{-1}; \quad \frac{\beta}{1-\alpha} = B.$$

Средний объем испытаний в точках $Q = Q_1, Q = Q_2$ оценивается приближенными выражениями [14]:

$$E_{Q_1} v \sim \frac{\ln \beta^{-1}}{\rho(Q_1, Q_2)}; \\ E_{Q_2} v \sim \frac{\ln \alpha^{-1}}{\rho(Q_2, Q_1)}, \quad (18)$$

где E_{Qv} — математическое ожидание времени испытаний v при данном Q ;

$$\rho(Q_1, Q_2) = Q_1 \ln(Q_1/Q_2) + \\ + (1-Q_1) \ln[(1-Q_1)/(1-Q_2)].$$

Недостатком такого способа контроля, основанного непосредственно на отказах системы, является неполное использование информации, поскольку при этом не учитываются отказы элементов. Это должно приводить к значительной потере информации, особенно для высоконадежных систем, так как число отказов элементов на испытаниях значительно больше числа отказов системы (грубо говоря, в $\sqrt{M/Q_2/Q_1}$ раз). Так, при $Q = 0,002$;

$Q_2 = 0,04$; $\alpha = \beta = 0,01$ необходимый объем испытаний системы при указанном подходе, не учитывающем элементы, составляет в схеме с фиксированным объемом $N \sim 1530$, а в последовательной схеме $E_{Q_1} v \sim 720$, $E_{Q_2} v \sim 590$ циклов.

Для описания решающего правила, учитывающего информацию по элементам, введем дополнительные обозначения: $d_{in} = y_{i1} + y_{i2} + \dots + y_{in}$ — число отказов i -го элемента к моменту n ;

$$\hat{w}_i(n) = \frac{r_i + d_{in}}{k_i + n} \quad (19)$$

— оценка параметра w_i по результатам испытаний к моменту (циклу испытаний) n . Величины k_i , r_i характеризуют априорную информацию, если таковая имеется, о параметре w_i .

Пусть $\hat{w}_n = [\hat{w}_1(n), \dots, \hat{w}_M(n)]$ — вектор оценок параметров на n -м

цикле; $p(w, x_n) = \prod_{i=1}^M w_i^{y_{in}} (1 - w_i)^{1-y_{in}}$ —

вероятность результата испытаний x_n на n -м цикле; $x^n = (x_1, \dots, x_n)$ — набор всех результатов испытаний до цикла n ; $p_n(w, x^n) = \prod_{j=1}^n p(w, x_j)$ — вероятность x^n

при данном w . Тогда

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{j=1}^n \ln p(\hat{w}_{j-1}, x_j) = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^M y_{ij} \ln \hat{w}_i(j-1) + \\ &+ \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^M (1 - y_{ij}) \ln [1 - \hat{w}_i(j-1)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_n(w) &= \ln p(w, x^n) = \\ &= \sum_{i=1}^M [d_{in} \ln w_i + \\ &+ (n - d_{in}) \ln (1 - w_i)]. \end{aligned}$$

Для формулировки правил принятия решений введем величины:

$$F_n^-(Q) = \max_{Q(w) \leq Q} L_n(w); \quad (20)$$

$$F_n^+(Q) = \max_{Q(w) \geq Q} L_n(w). \quad (21)$$

Последовательное решающее правило с заданными рисками α и β в данном случае имеет следующий вид. Область продолжения наблюдений на цикле испытаний n определяется как

$$A_n - F_n^-(Q_1) \leq \ln \alpha^{-1}; \quad (22)$$

$$A_n - F_n^+(Q_2) \leq \ln \beta^{-1}. \quad (23)$$

Наблюдения продолжают до момента N первого нарушения указанных неравенств. При нарушении неравенства (22) принимается решение H_2 ; при нарушении (23) — H_1 .

Для осуществления процедуры контроля требуется вычислять на каждом шаге n максимумы в (20), (21). Нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} F_n^-(Q) &= L_n[\tilde{w}_n - c^-(\tilde{w}_n, Q) \times \\ &\times (e - \tilde{w}_n)]; \\ F_n^+(Q) &= L_n[\tilde{w}_n + c^+(\tilde{w}_n, Q) \times \\ &\times (e - \tilde{w}_n)], \end{aligned}$$

где $\tilde{w}_n = (\tilde{w}_{1n}, \tilde{w}_{2n}, \dots, \tilde{w}_{Mn})$, $\tilde{w}_{in} = d_{in}/n$, $i = 1, \dots, M$; $e = (1, 1, \dots, 1)$ — M -мерный единичный вектор; $c^-(w, Q) = \max [0, -c(w, Q)]$, $c^+(w, Q) = \max [0, c(w, Q)]$ — отрицательная и положительная части величины $c(w, Q)$, определяемой из уравнения относительно c :

$$\prod_{i=1}^M [w_i + c(1 - w_i)] = Q. \quad (24)$$

Основные вычисления по ходу процедуры контроля связаны с решением на каждом цикле достаточно простого уравнения вида (24).

Рассмотрим эффективность последовательного решающего правила (22), (23), предполагая $\alpha = \beta$. Средний объем испытаний при малых рисках α

определяется приближенными выражениями:

$$E_w N \sim \ln \alpha^{-1} / a_2(w) \quad \text{при } Q(w) \leq Q_1; \quad (25)$$

$$E_w N \sim \ln \alpha^{-1} / a_1(w) \quad \text{при } Q(w) \geq Q_2; \quad (26)$$

$$E_w N \sim \ln \alpha^{-1} / A(w) \quad \text{при } Q_1 < Q(w) < Q_2, \quad (27)$$

где $E_w N$ — математическое ожидание N при данном векторе параметров w ;

$$A(w) = \max [a_1(w), a_2(w)],$$

$$\begin{aligned} a_1(w) &= \sum_{i=1}^M w_i \ln [1 - c(w, Q_1) \times \\ &\times (1 - w_i)/w_i]^{-1} - \\ &- \ln [1 + c(w, Q_1)] \left(M - \sum_{i=1}^M w_i \right), \\ a_2^*(w) &= \sum_{i=1}^M w_i \ln [1 + c(w, Q_2) \times \\ &\times (1 - w_i)/w_i]^{-1} + \\ &+ \ln [1 - c(w, Q_2)]^{-1} \left(M - \sum_{i=1}^M w_i \right). \end{aligned}$$

Правые части выражений (25)–(27) асимптотически (при $\alpha \rightarrow 0$) не улучшаемы.

Во многих случаях до испытаний имеется априорная информация о параметрах элементов системы, известная из предыдущих испытаний аналогичных систем, расчетов и др. В указанной выше последовательной процедуре априорная информация учитывается при вычислении по ходу наблюдений оценок параметров (19). Например, если имеется информация о предыдущих испытаниях i -го элемента, то k_i — число таких испытаний, r_i — зафиксированное на них число отказов. Решающее правило устроено таким образом, что заданные риски первого α и второго β рода обеспечиваются при любых (независящих от «будущего») оценках $\hat{w}_i(n)$, но указанные оценки влияют на эффективность (средний объем наблюдений)

процедуры. Уточнение оценок на основе априорной информации улучшает эффективность процедуры за счет более быстрой адаптации решающего правила к истинному значению вектора параметров w .

Выигрыш в объеме испытаний от учета информации по элементам системы. Сравним план контроля, учитывающий информацию об отказах элементов, с указанным ранее решением, основанным только на отказах системы. Выигрыш в среднем объеме испытаний от учета элементов при данном значении вектора параметров w характеризуется отношением $K = E_{Q(w)} v / E_w N$. Рассмотрим, например, точки w , такие, что $Q(w) = Q_1$. Из (18), (25) получаем

$$K \sim a_2(w) / \rho(Q_1, Q_2), \quad Q(w) = Q_1.$$

При малых значениях ($Q_2 - Q_1$) коэффициент выигрыша записывается в более простом виде

$$K \sim \frac{1 - Q_1}{Q_1} \sum_{i=1}^M \frac{1 - w_i}{w_i}.$$

Во всех точках w , таких, что $Q(w) = Q_1$, коэффициент выигрыша $K \geq 1$; $K = 1$ только в «крайних» точках $\tilde{w} = (1, \dots, 1, Q_1, 1, \dots, 1)$. Но в этих точках выигрыш от учета информации по элементам невозможен, так как в них все элементы системы, кроме одного, абсолютно ненадежны и испытания системы фактически сводятся к испытаниям этого одного элемента. В остальных точках коэффициент выигрыша $K > 1$. Максимальный выигрыш достигается в симметричной точке $w_1 = w_2 = \dots = w_M$, когда все элементы равнонадежны. В этом случае

$$K \sim 1 / \left(M \cdot Q_1^{\frac{M-1}{M}} \right).$$

Выигрыш в среднем объеме испытаний от учета информации по элементам тем больше, чем выше надежность системы.

Таким образом, решающее правило может строиться в различных вариантах: с учетом и без учета информации

по элементам, а также по схеме с фиксированным объемом испытаний и по последовательной схеме. В табл. 1 приводится численный пример, иллюстрирующий выигрыш в среднем объеме испытаний от использования последовательной схемы, а также от учета информации по элементам. В таблице указан необходимый объем (число циклов) испытаний системы для случая $M = 2; Q_1 = 0,02; Q_2 = 0,04; \alpha = \beta = 0,01$ для всех четырех возможных вариантов построения решающего правила. Для последовательной схемы (второй столбец) указывается средний объем испытаний при $Q = Q_1$ для случая учета только отказов системы, а в точке с $w_1 = w_2 = \dots = w_M$, $Q(w) = Q_1$ — для случая учета информации по элементам.

Как видно из первого столбца таблицы, при схеме с фиксированным объемом испытаний учет информации по элементам не дает выигрыша. В то же время последовательная схема испытаний позволяет получить значительный выигрыш по обоим факторам (схема испытаний и учет информации по элементам). Интересным является то, что выигрыш (во второй строке) от использования последовательной схемы значительно больше, чем обычный (по Вальду) выигрыш (в первой строке) для двух простых гипотез. Это связано с тем, что при схеме с фиксированным объемом необходимый объем испытаний должен быть рассчитан на «наихудшие» точки областей

$D_1 = \{w : Q(w) \leq Q_1\},$

$D_2 = \{w : Q(w) \geq Q_2\}.$

В то же время рассмотренное выше последовательное решающее правило устроено таким образом, что по ходу испытаний оно «адаптируется» за счет использования оценок (19) к истинному значению вектора параметров w , вследствие чего средний объем испытаний в каждой точке w при малых α близок к минимально возможному.

При $Q(w) = Q_2$ выигрыш в среднем объеме испытаний аналогичен случаю $Q(w) = Q_1$. При $Q(w) < Q_1$, $Q(w) > Q_2$ выигрыш от использования последовательного правила еще более

1. Объем испытаний системы при различных вариантах построения правила принятия решений

Правило принятия решений	Схема с фиксированным объемом испытаний	Последовательная схема испытаний
По отказам системы	1530	720
С учетом информации по отказам элементов	1530	220

увеличивается. В промежуточной области $Q_1 < Q(w) < Q_2$ средний объем испытаний последовательного правила увеличивается, но и в этой области данное правило, по крайней мере асимптотически при $\alpha \rightarrow 0$, не хуже, чем решение по схеме с фиксированным объемом [48].

Последовательные доверительные границы для показателя надежности системы. В соответствии с [48] последовательная нижняя $(1 - \alpha)$ -доверительная граница для показателя надежности системы Q на шаге l определяется как

$$Q_l = \underline{Q}_l (1 - \alpha) = \max_{n=1, \dots, l} Q_{*n}, \tag{28}$$

где величина Q_{*n} находится на n -м шаге из уравнения относительно Q :

$$F_n^-(Q) = A_n - \ln \alpha^{-1}. \tag{29}$$

Аналогично последовательная верхняя $(1 - \beta)$ -доверительная граница на шаге l строится как

$$\bar{Q}_l = \bar{Q}_l (1 - \beta) = \min_{n=1, \dots, l} Q_{*n}^*, \tag{30}$$

где Q_{*n}^* находится из уравнения относительно Q :

$$F_n^+(Q) = A_n - \ln \beta^{-1}. \tag{31}$$

Границы (28), (30) образуют систему последовательных доверительных границ для Q в следующем смысле. Для любого w и любого не зависящего от «будущего» момента остановки на-

блюдений σ выполняются неравенства

$$P_w \{Q_\sigma \leq Q\} \geq 1 - \alpha;$$

$$P_N \{\bar{Q}_\sigma \geq Q\} \geq 1 - \beta.$$

Интервал $(Q_l, \bar{Q}_l)$ образует последовательный $(1 - \alpha - \beta)$ -доверительный интервал для Q . Нижняя граница Q_l монотонно не убывает, а верхняя $\bar{Q}_l$ не возрастает по времени l при любой траектории процесса наблюдений. Тем самым доверительный интервал $(Q_l, \bar{Q}_l)$ монотонно сужается с течением времени. Построенные границы обладают рядом асимптотически (при $\alpha, \beta \rightarrow 0$) оптимальных свойств, например, математическое ожидание времени $v^* = \min \{l | \bar{Q}_l - Q_l \leq \delta\}$ до построения доверительного интервала заданной длины δ асимптотически совпадает с минимально возможным [48].

Рассмотренное выше решающее правило в (22), (23) может быть сформулировано в терминах последовательных доверительных границ. Область продолжения наблюдений на n -м цикле задается неравенствами

$$Q_l (1 - \alpha) \leq Q_1; \bar{Q}_l (1 - \beta) \geq Q_2, \quad (32)$$

т. е. наблюдения продолжаются до тех пор, пока доверительный интервал $[Q_l (1 - \alpha), \bar{Q}_l (1 - \beta)]$ содержит оба критических уровня. Наблюдения останавливаются при первом нарушении неравенств (32). При нарушении первого неравенства принимается решение H_2 , при нарушении второго неравенства — H_1 .

Процедура вычисления последовательных границ может быть записана также и в более простом варианте. Величина Q_{*n} на n -м цикле определяется как

$$Q_{*n} = \prod_{i=1}^M [\bar{w}_{in} - c (1 - \bar{w}_{in})],$$

где $c > 0$ находится из уравнения

$$L_n [\bar{w}_n - c (e - \bar{w}_n)] = A_n - \ln \alpha^{-1}. \quad (33)$$

Аналогично величина Q_n^* на n -м шаге определяется как

$$Q_n^* = \prod_{i=1}^M [\bar{w}_{in} + c (1 - \bar{w}_{in})],$$

где $c > 0$ находится из уравнения

$$L_n [\bar{w}_n + c (e - \bar{w}_n)] = A_n - \ln \beta^{-1}. \quad (34)$$

Процедура построения последовательных доверительных границ требует решения на каждом цикле испытаний трансцендентных уравнений (29), (31) или в другом варианте — (33), (34). Заметим, что, по определению, функция $F_n^-(Q)$ монотонно возрастает, а функция $F_n^+(Q)$ убывает по Q . Отсюда следует монотонность по c и левых частей уравнений (33), (34). Поэтому численное решение указанных уравнений не представляет существенных затруднений.

Если в течение первых l шагов испытаний не наблюдалось ни одного отказа элементов: $d_{il} = 0, i = 1, \dots, M$, то верхняя последовательная γ -доверительная граница вероятности отказа системы вычисляется в явном виде. Полагая оценки $\bar{w}_{ij} = 0$ при $j \leq l, i = 1, \dots, M$, получаем

$$\bar{Q}_l = \left[1 - \exp \left(-\frac{a}{Ml} \right) \right]^M, \quad (35)$$

где $a = \ln (1 - \gamma)^{-1}$. Заметим, что эта величина совпадает с границей для случая безотказных испытаний фиксированного объема l , найденной Р. С. Судаковым. Выражение (35) наглядно показывает выигрыш от учета информации по элементам системы, тем больший, чем больше степень резервирования M системы.

ПЛАНИРОВАНИЕ И КОНТРОЛЬ ПО ОДНОМУ КОНТРОЛЬНОМУ УРОВНЮ

Пусть требования к показателю R надежности системы заданы в виде $R \geq R_T$, где R — заданный контрольный уровень, т. е. показатель R имеет смысл вероятности безотказной работы, средней наработки до отказа и т. п.

Правило принятия решения при контроле надежности изготовителем по одному контрольному уровню R_T в терминах доверительных границ следующее:

$$\chi_{\Pi}(x, \rho) = \begin{cases} 1, & \text{если } \underline{R}_{1-\beta} \geq R_T; \\ 0, & \text{если } \underline{R}_{1-\beta} < R_T, \end{cases} \quad (36)$$

где равенство, в правой части которого единица, означает требования к показателю R подтверждены с риском заказчика, не превышающим заданное значение β ; ноль означает противоположное решение.

Напомним, что $\chi_{\Pi}(x, \rho)$ есть решающая функция, зависящая от результатов наблюдений x и вектора ρ , характеризующего план контроля; $\underline{R}_{1-\beta}$ — НДГ уровня $1 - \beta$ для показателя R .

В случае задания требований к показателю R в виде $R \leq R_T$, правило принятия решений формируется в терминах ВДГ $\bar{R}_{1-\beta}$ уровня $1 - \beta$ показателя R и все последующие выводы являются аналогичными (см. гл. 5).

Правило контроля (36) обеспечивает величину риска заказчика (см. гл. 5) не больше допустимого (заданного) значения β .

Величина допустимого риска изготовителя α при таком правиле контроля надежности не задается в виде нормативной величины, но может быть оценена изготовителем после проведения испытаний из выражения

$$\alpha = P(\underline{R}_{1-\beta} < R_T | R = R_0), \quad (37)$$

где R_0 — фактически достигнутый уровень показателя надежности, который можно оценить по результатам приведенных контрольных испытаний, полагая $R_0 \simeq \hat{R}$ ($\hat{R}$ — точечная оценка показателя R).

Постановка задачи планирования испытаний. Задача планирования объема испытаний при контроле надежности технического изделия, рассматриваемого как один элемент, изложена в гл. 14. В данной главе эта задача обобщается на тот случай, когда планируются объемы испытаний элементов системы по одному контрольному

уровню R_T показателя надежности всей системы. При этом отдельно будут рассмотрены случаи одноступенчатой процедуры и двухступенчатой процедуры контроля.

Введем следующие обозначения:

$\vec{V} = (V_1, V_2, \dots, V_m)$ — вектор объемов испытаний элементов системы (где под кодом V_i понимается либо число образцов i -го типа, либо суммарная наработка за заданное время испытаний или до появления заданного числа отказов);

$\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ — вектор возможных исходов испытаний компонент системы;

$R = \varphi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ — показатель надежности системы, являющийся известной функцией $\varphi(\vec{\theta})$ от вектора $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ неизвестных параметров θ_i (θ_i — показатели надежности элементов i -го типа, $i = 1, m$);

$\eta = w[\vec{\xi}, \varphi(\vec{\theta})]$ — некоторая (заранее выбранная) контролируемая скалярная статистика, зависящая от вектора исходов испытаний $\vec{\xi}$ и показателя $R = \varphi(\vec{\theta})$;

$\underline{R}(\eta, \vec{V}, 1 - \beta)$ — значение НДГ уровня $1 - \beta$ для показателя R надежности системы, зависящее от вектора $\vec{V}$ объемов испытаний ее элементов и от значения контролируемой статистики η .

Задача планирования объема испытаний элементов системы при одноступенчатой процедуре контроля надежности состоит в определении такого вектора объема испытаний $\vec{V} = (V_1, V_2, \dots, V_m)$ и такого контрольного норматива c для статистики $\eta = w[\vec{\xi}, \varphi(\vec{\theta})]$, которые обеспечат условие приемки (36), т. е. выполнение неравенства

$$\underline{R}(c, \vec{V}, 1 - \beta) \geq R_T. \quad (38)$$

Ясно, что одного условия (38) недостаточно для однозначного определения $m + 1$ переменных c и $V_1, V_2, \dots, V_m$. Практически реализуемый путь решения поставленной задачи

состоит в указании множества $J = J(\vec{\xi})$ допустимых значений вектора исходов испытаний $\vec{\xi}$ и в определении на этом множестве оптимального по некоторому критерию W значения $\vec{V}$.

Множество допустимых исходов J можно задать, руководствуясь характером предполагаемого технического обслуживания системы, наличием запасных элементов в ЗИПе, данными по аналогам и прототипам и т. п. В случае, когда величина ξ_i имеет смысл числа отказов, в качестве допустимого множества исходов часто бывает целесообразно принять множество $J(0) = \{\vec{\xi} \mid \xi_i = 0, i = 1, m\}$, т. е. заранее требовать проведения безотказных испытаний.

В качестве критерия оптимальности W примем суммарные затраты на проведение испытаний. В первом приближении W можно представить линейной функцией:

$$W(\vec{a}, \vec{V}) = \sum_{i=1}^m a_i V_i,$$

где $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ — вектор удельных затрат на испытания компонент каждого типа.

Таким образом, задача планирования объемов испытаний элементов системы состоит в определении такого вектора $\vec{V} = (V_1, V_2, \dots, V_m)$, чтобы

$$\min_{\vec{\xi} \in J} R[\eta(\vec{\xi}), \vec{V}, 1 - \beta] \geq R_T; \quad (39)$$

$$W(\vec{a}, \vec{V}) \Rightarrow \min, \quad (40)$$

где множество допустимых исходов J и вектор удельных затрат $\vec{a}$ считаются известными.

Условие (40) будет записано ниже в том или ином конкретном виде. Решение сформулированной задачи приводится ниже для различных планов испытаний и для систем с различной структурой.

При двухступенчатой процедуре контроля надежности задача планирования объема испытаний формулируется следующим образом.

Пусть правило определения НДГ R для показателя надежности системы $\bar{R}$ по вектору $\vec{V}$ и статистике η известно, причем величина R может быть представлена в аналитическом виде

$$\underline{R} = R(\eta, \vec{V}, \beta), \quad (41)$$

где β — допустимый уровень риска заказчика ($1 - \beta = q$ — уровень доверия НДГ).

Вид зависимости (41) для разных случаев представлен в гл. 15.

Правило контроля надежности при двухступенчатой процедуре испытаний состоит в следующем.

На первом этапе принимается одно из трех решений:

требование к надежности подтверждено, если

$$\underline{R}_1 = R(\eta', \vec{V}', \beta_1) \geq R_T; \quad (42)$$

требование не выполнено, если

$$\hat{R} = \hat{R}(\eta', \vec{V}') \leq R_T;$$

решение переносится на второй этап, если

$$\underline{R}_1(\eta', \vec{V}', \beta_1) < R_T < \hat{R}(\eta', \vec{V}'). \quad (43)$$

На втором этапе принимается одно из двух решений:

требование к надежности подтверждено, если

$$\underline{R}_2 = R(\eta' + \eta'', \vec{V}' + \vec{V}'', \beta_2) \geq R_T;$$

требование не выполнено, если

$$\underline{R}_2 = R(\eta' + \eta'', \vec{V}' + \vec{V}'', \beta_2) < R_T.$$

В приведенных неравенствах $\hat{R}(\eta', \vec{V}')$ означает некоторую точечную оценку показателя надежности R по результатам испытаний на первом этапе, а β_1 и β_2 — некоторые промежуточные уровни рисков заказчика ($\beta_1 < \beta$).

Суммарный риск заказчика β_Σ по результатам контроля на двух этапах оценивается сверху в виде

$$\beta_\Sigma \leq \beta_1 + \mathcal{P}(R_T) \beta_2, \quad (44)$$

где $\mathcal{P}(R_T) = P(R_1 < R_T < \hat{R} | R = R_T)$ — условная вероятность перехода на второй этап при условии, что $R = R_T$.

Суммарный риск изготовителя α_Σ после проведения испытаний может быть оценен на основе следующего равенства (R_0 — фактически достигнутый уровень R):

$$\alpha_\Sigma = \alpha_1 + \mathcal{P}(R_0) \alpha_2, \quad (45)$$

где $\alpha_1 = P(\hat{R} \leq R_T | R = R_0)$ — риск изготовителя на первом этапе; $\alpha_2 = P(R_2 < R_T | R = R_0)$ — риск изготовителя на втором этапе; $\mathcal{P}(R_0) = P(R_1 < R_T < \hat{R} | R = R_0)$ — условная вероятность перехода на второй этап при условии, что $R = R_0 \approx \hat{R}$.

Основываясь на приведенном выше правиле контроля надежности, задачу планирования испытаний можно рассматривать как задачу определения таких векторов $\vec{V}'$ и $\vec{V}''(\eta')$, которые были бы оптимальными в некотором смысле при $\eta' \in \mathcal{H}$, где $\mathcal{H}$ — множество тех значений η' , при которых выполнено условие (43), т. е. при которых решение о выполнении требований к надежности не может быть принято на первом этапе. Как правило, статистика η является дискретной (например, $\eta = \sum \xi_i$ — сумма отказов m элементов системы на первом этапе); так что множество $\mathcal{H}$ содержит конечный забор возможных значений η .

В качестве критерия оптимальности при выборе векторов $\vec{V}'$ и $\vec{V}''(\eta')$, $\eta' \in \mathcal{H}$ естественно принять средний объем испытаний

$$E(V) = V^{(1)} + E[V^{(2)}(\eta')],$$

где $V^{(1)} = \sum V_i'$ — суммарный объем испытаний всех компонент системы на первом этапе, а $E[V^{(2)}(\eta')]$ — средний суммарный объем испытаний всех компонент системы на втором этапе.

Величина $V^{(1)}$ зависит, очевидно, от уровня риска β_1 , величина

$E[V^{(2)}(\eta')]$ — от уровня риска β_2 , т. е. задача планирования объемов испытаний V_i' и $V_i''(\eta')$, $\eta' \in \mathcal{H}$ сводится к решению следующей задачи на условный экстремум:

$$\begin{cases} \sum V_i(\beta_1) + E\left[\sum V_i''(\eta', \beta_2)\right] \Rightarrow \\ \Rightarrow \min; \end{cases} \quad (46)$$

$$\beta_1 + \mathcal{P}(R_T) \beta_2 \leq \beta. \quad (47)$$

Решение данной задачи применительно к биномиальному плану испытаний и системе с последовательной ССН приведено ниже.

Одноступенчатая процедура контроля.

Биномиальный план испытаний. В этом случае V_i равно N_i , т. е. числу образцов i -го типа, выделяемых

на испытания; $\eta = \sum \xi_i$, где ξ_i — возможное число отказов из N_i образцов в течение заданной наработки t_0 .

Множество допустимых исходов J определяется условием

$$J = \left\{ \vec{\xi} : \Lambda(\xi_i \leq d_i) \right\},$$

где d_i — допустимое число отказавших образцов i -го типа.

Фактически (см. табл. 2) достаточно указать значение величины $\mathcal{D} = \sum d_i$, если затраты на испытания i -го элемента $a_i \approx \text{const}$. В этом случае минимально необходимый объем испытаний в зависимости от типа ССН системы определяется из табл. 2.

Если величины a_i существенно различны, то следует решать численными методами экстремальную задачу (39), (40). При планировании безотказных испытаний (при $\mathcal{D} = 0$) точный ответ в зависимости от типа ССН приведен также в табл. 2.

Пример 1. Пусть система имеет последовательную ССН из $m = 10$ разнотипных элементов. Требование к ВБР системы $\pi_T = 0,9$; допустимый уровень риска заказчика $\beta = 0,2$. Допускается не более одного отказа в ходе испытаний всех элементов. Требуется определить объем испытаний (число об-

2. Планирование объемов испытаний при биномиальном плане испытаний элементов

Тип системы, условие приемки	Требуемое число образцов для элементов <i>i</i> -го типа	Обозначения
Последовательная ССН: $\pi = \prod_{i=1}^m P_i;$ $\pi_{1-\beta} \geq \pi_T$	$N_i \geq N_T$, где $N_T = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \pi_T}{1 - \pi_T} \chi^2_{1-\beta} \times \right. \\ \left. \times (2\mathcal{D} + 2) + \mathcal{D} \right] \text{ при } \mathcal{D} \geq 1;$ $N_T = \frac{\ln \beta}{\ln \pi_T} \text{ при } \mathcal{D} = 0$	$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^m d_i$ — суммарное допустимое число отказов; $\chi^2_{1-\beta}(\cdot)$ — см. табл. 8 приложения
Параллельная ССН: $\mathcal{P} = 1 - \prod_{i=1}^v (1 - P_i);$ $\mathcal{P}_{1-\beta} \geq \mathcal{P}_T$	$N_i \geq \tilde{N}_T$, где $\tilde{N}_T = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \frac{1 + \tilde{\mathcal{P}}_T}{1 - \tilde{\mathcal{P}}_T} \chi^2_{1-\beta} \times \right. \\ \left. \times (2\mathcal{D} + 2) + \mathcal{D} \right] \text{ при } \mathcal{D} \geq 1;$ $\tilde{N}_T = \frac{\ln \beta}{\ln \tilde{\mathcal{P}}_T} \text{ при } \mathcal{D} = 0$	$\tilde{\mathcal{P}}_T = [1 - (1 - \mathcal{P}_T)^{1/v}]^v$
Параллельно-последовательная ССН: $\mathcal{P} = 1 - \left(1 - \prod_{i=1}^m P_i \right)^v$ $\mathcal{P}_{1-\beta} \geq \mathcal{P}_T$	$N_i \geq N'_T$, где $N'_T = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \frac{1 + \mathcal{P}'_T}{1 - \mathcal{P}'_T} \chi^2_{1-\beta} \times \right. \\ \left. \times (2\mathcal{D} + 2) + \mathcal{D} \right] \text{ при } \mathcal{D} \geq 1;$ $N'_T = \frac{\ln \beta}{\ln \mathcal{P}'_T} \text{ при } \mathcal{D} = 0$	$\mathcal{P}'_T = 1 - (1 - \mathcal{P}_T)^{1/v}$
Последовательно-параллельная ССН: $\pi = \prod_{i=1}^m [1 - (1 - P_i)^v];$ $\pi_{1-\beta} \geq \pi_T$	$N_i \geq N_{Ti}$, где $N'_{Ti} = \frac{1}{2} \chi^2_{1-\beta} (2\mathcal{D} + 2) / \pi'_{Ti}$ при $\mathcal{D} \geq 1;$ $N'_{Ti} = \frac{\ln \beta}{\ln (1 - \pi'_{Ti})} \text{ при } \mathcal{D} = 0$	$\pi'_{Ti} = (1 - \pi_T)^{1/v_i},$ $i = 1, m$

Примечание. В случае, когда система состоит из однотипных элементов, планируемый объем испытаний элементов $N_{\Sigma} = \sum N_i$, т. е. для последовательной ССН $N_{\Sigma} \geq mN_T$; для параллельной ССН $N_{\Sigma} \geq v\tilde{N}_T$; для параллельно-последовательной ССН $N_{\Sigma} \geq vN'_T$; для последовательно-параллельной ССН $N_{\Sigma} \geq mN'_{Ti}$.

разцов) N_i для элементов каждого типа, если испытания проводятся по биномиальному плану (т. е. по плану $[N_i, U, t_0]$).

Решение. По условию $\mathcal{D} = \sum d_i = 1$. Из табл. 2 при $\beta = 0,2$, $\mathcal{D} = 1$ находим величину N_T , определив по табл. 8 приложения значение $\chi_{0,8}^2(4) = 6$:

$$N_T = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1,9}{0,1} \cdot 6 + 1 \right] = 29,$$

т. е. $N_i = 29$, $i = 1, m$.

Если бы отказы не допускались, то при $\mathcal{D} = 0$ находим

$$N_T = \ln(0,2)/\ln 0,9 = 15,27,$$

т. е. $N_i = 16$ для каждого типа элементов системы.

Пример 2. Система имеет ССН последовательно-параллельного типа с $m = 3$ блоками, в каждом из которых элементы одного типа соединены параллельно, причем $v_1 = 3$, $v_2 = v_3 = 4$. Требование к ВБР системы $\pi_T = 0,99$; допустимый риск заказчика $\beta = 0,1$.

Требуется определить объемы контрольных выборок для элементов каждого из $m = 3$ типов, если при испытаниях допускается один отказ для элементов каждого типа и если отказы не допускаются. Испытания проводятся по биномиальному плану.

Решение 1. Допустимое число отказов $\mathcal{D} = \sum d_i = 3$. При $\beta = 0,1$ и $\mathcal{D} = 3$ по табл. 8 приложения находим $\chi_{0,9}^2(8) = 13,4$. Из табл. 2 находим

$$N_{T1} = \frac{1}{2} \chi_{0,9}^2(8)/(1 - 0,99)^{1/3} = 31,1;$$

$$N_{T2} = N_{T3} = \frac{1}{2} \chi_{0,9}^2(8)/(1 - 0,99)^{1/4} = 21,19,$$

т. е. планируемые объемы испытаний равны $N_1 = 32$ и $N_2 = N_3 = 22$.

2. Допустимое число отказов $\mathcal{D} = \sum d_i = 0$. Из табл. 2 находим

$$N_{T1} = \ln 0,1/\ln [1 - (1 - 0,99)^{1/3}] = 9,76;$$

$$N_{T2} = N_{T3} =$$

$$= \ln 0,1/\ln [1 - (1 - 0,99)^{1/4}] = 6,06,$$

т. е. планируемые объемы испытаний равны $N_1 = 10$ и $N_2 = N_3 = 6$.

Планирование испытаний элементов системы по биномиальному плану с учетом запасов по ресурсу и коэффициентов утяжеления. В табл. 3 приведены значения планируемых безотказных объемов испытаний элементов систем с различной ССН в случае, когда испытания i -го элемента проводятся в течение времени $T_i > t_0$ (отношение $T_i/t_0 = \eta_{0i}$ называется запасом i -го элемента по ресурсу), а также в утяжеленном режиме с коэффициентом утяжеления κ_i (см. гл. 7).

Предполагается, что каждый (i, j) -элемент системы испытывается по плану $[N, U(1, T)]$ в соответствии с определением, приведенным в гл. 7. Считается, что элементы системы удовлетворяют условиям, оговоренным на с. 54—57.

Пример 3. Система состоит из $m = 100$ последовательно соединенных независимых элементов, удовлетворяющих на промежутке $[0, T] = [0, 2t_0]$ условиям, оговоренным на с. 54. Требование к ВБР задано в виде $\pi_T = 0,92$; допустимое значение риска заказчика $\beta = 0,1$. Требуется спланировать объемы N_i безотказных испытаний на промежутке $[0, T]$, если элементы испытываются по плану $[NU(1, T)]$ с коэффициентом утяжеления $\kappa = 1,5$.

Решение. Из табл. 3 находим

$$N_{Ti} = \ln 0,1/(\ln 0,92) 1,5 \cdot 2 = 2,3/0,25 = 9,2;$$

следовательно, для элементов i -го типа (любого) нужно запланировать $N_i = 10$ испытаний. Если при этих испытаниях не будет ни одного отказа, то требования по надежности считаются выполненными.

Пример 4. Система состоит из $v = 3$ независимых различных элементов, соединенных параллельно и удовлетворяющих на $[0, T] = [0; 1,5t_0]$ условиям, оговоренным на с. 57. Требование к ВБР системы $\tilde{\pi}_T = 0,999$; допустимое значение риска заказчика $\beta = 0,1$.

Требуется спланировать объем безотказных испытаний каждого из элементов на $[0, t_0]$, если элементы испы-

3. Планирование объемов безотказных испытаний с учетом запасов по ресурсу и утяжеления режимов

Тип системы, условие приемки	Требуемое число образцов для элементов i -го типа	Обозначения
Последовательная ССН: $\pi = \prod_{i=1}^m P_i(t_0);$ $\pi_{1-\beta} \geq \pi_T$	$N_i \geq N_{Ti},$ где $N_{Ti} = \ln \beta / \kappa_i \eta_{0i} \ln \pi_T$ $(i = 1, m)$	$\eta_{0i} = T_i/t_0;$ T_i — время испытаний; κ_i — коэффициент утяжеления режима
Параллельная ССН: $\varphi = 1 - \prod_{i=1}^v (1 - P_i(t_0));$ $\varphi_{1-\beta} \geq \varphi_T$	$N_i \geq \tilde{N}_{Ti},$ где $\tilde{N}_{Ti} = \ln \beta / \kappa_i \eta_{0i} \ln \tilde{\varphi}_T$ $(i = 1, v)$	$\tilde{\varphi}_T = [1 - (1 - \varphi_T)^{1/v}]^v$
Последовательно-параллельная ССН: $\pi = \prod_{i=1}^m \left[1 - \prod_{j=1}^{v_i} (1 - P_{ij}) \right];$ $\pi_{1-\beta} \geq \pi_T$	$N_i \geq N'_{Tij},$ где $N'_{Tij} = \ln \beta / \kappa_{ij} \eta_{0ij} \ln \pi'_{Ti}$ $(j = 1, v_i; i = 1, m)$	$\pi'_{Ti} = [1 - (1 - \pi_T)^{1/v_i}]^{v_i};$ $\eta_{0ij} = T_{ij}/t_0$ $(T_{ij}$ — время испытания (i, j) -го элемента)

Примечание. В случае, когда система состоит из однотипных элементов, планируемый объем испытаний элементов $N_\Sigma = \sum N_i$, т. е. для последовательной ССН $N_\Sigma \geq mN_T$; для параллельной ССН $N_\Sigma \geq v\tilde{N}_T$; для последовательно-параллельной ССН (из блоков различного типа; внутри блока элементы однотипны) $N_\Sigma \geq \sum_{i=1}^m N'_{Ti}$.

тываются по плану $[NU(1, T)]$ в номинальном режиме ($\kappa_1 = 1$).

Решение. Из табл. 3 находим $\tilde{\varphi}_T = [1 - (1 - 0,999)^{1/3}]^3 = 0,729$; затем вычислим

$$\tilde{N}_{Ti} = \ln 0,1 / 1,5 \ln 0,729 = 2,3 / 0,474 = 4,8,$$

т. е. для каждого типа элемента нужно запланировать $N_i = 5$ безотказных испытаний.

Если (i, j) -элемент испытывается по плану $[NU(1, t_1)]$, причем $[0, t_1] \subset$

$\subset [0, t_0]$, а система в целом является «молодеющей» на $[0, t_0]$ в смысле определения, приведенного на с. 58 то в формулах табл. 3 следует положить $\eta_{0ij} = \eta_{0i} = 1$ и умножить правые части на $\tilde{\eta}_0 = t_0/t_1 \geq 1$.

Планы испытаний с измерением работки до отказа. Предполагается использование планов испытаний типа $[N_i U(R) T_i]$ с ограничением продолжительности испытаний, либо $[N_i U(R) r_i]$ — с ограничением числа отказов для каждого i -го типа элементов.

Закон распределения наработки до отказа элемента i -го типа предполагается экспоненциальным с параметром λ_i . Тогда объем испытаний $V_i = S_i$ (где S_i — суммарная наработка образцов i -го типа. Контролируемой статистикой может служить, как и выше, суммарное число отказов

$$\eta = \sum_{i=1}^m \xi_i \quad (\text{при планах типа } [N_i U(R) T_i]) \text{ или суммарная наработка } \eta = \sum_{i=1}^m S_i \quad (\text{при планах типа } [N_i U(R) r_i]).$$

Наиболее удобными для практической реализации являются планы первого типа, которыми мы здесь и ограничимся. Тогда множество допустимых исходов испытаний J имеет прежний вид (см. с. 252) и определяется суммарным допустимым числом отказов

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^m d_i. \text{ При заданной величине } \mathcal{D} \text{ задача планирования объемов испытаний (39), (40) принимает следующий вид:}$$

$$\sum_{i=1}^m a_i S_i \Rightarrow \min \quad \text{при}$$

$$R(\mathcal{D}, \vec{S}, 1 - \beta) \geq R_T.$$

Последнее ограничение можно представить в более конкретном виде в зависимости от ССН системы.

В табл. 4 приведены требуемые значения суммарных наработок S_i для систем с наиболее типичными ССН. При этом показатель ВБР обозначен через π для систем с последовательной и последовательно-параллельной ССН, и через $\mathcal{P}$ — для систем с параллельной и параллельно-последовательной ССН.

Пример 5. Система состоит из $m = 5$ независимых различных последовательно соединенных элементов с экспоненциальным законом распределения наработок до отказа. Требования к ВБР за время t_0 заданы в виде $\pi \geq \pi_T = 0,9$; допустимый уровень риска заказчика $\beta = 0,2$. Требуется определить минимально возможный объем испытаний S_i для элемента каждого типа, считая, что будет использован план испытаний $[N_i R T_i]$.

Решение. Из табл. 4 находим $\Lambda_T = \frac{1}{t_0} \ln \frac{1}{0,9} = \frac{1}{t_0} 0,105$, а затем с учетом того, что $\frac{1}{2} \chi_{1-\beta}^2(2) = \ln(1/\beta)$

при $\beta = 0,2$, определяем $S_{Ti} = (t_0/2\Lambda_T) \chi_{0,8}^2(2) = 15,3t_0$ (S_{Ti} — требуемое значение суммарной наработки при испытаниях элементов каждого из $m = 5$ типов по плану $[N_i R T_i]$, при котором $S_i = N_i T_i$).

Следовательно, можно число образцов N_i выбирать в зависимости от возможной величины T_i при выполнении условия $S_i = N_i T_i \geq S_{Ti}$. Например, выделив на испытания $N_i = 5$ образцов (для каждого типа элемента), найдем требуемое значение $T_i = 3,1t_0$.

Если допустить появление хотя бы одного отказа в ходе испытаний, то для каждого типа элементов требуемый объем испытаний будет равен $S_{Ti} = (t_0/2 \cdot 0,105) \chi_{0,8}^2(4) = 28,6t_0$, т. е. объем испытаний должен увеличиваться почти вдвое.

З а м е ч а н и е. Отметим, что часто используемый в настоящее время метод планирования испытаний, основанный на распределении требования R_T к ВБР системы R , между ее элементами существенно завышает потребный объем испытаний. В условиях последнего примера такой подход дает следующие результаты:

$$P_{Ti} = \pi_T^{1/m} = 0,98 \rightarrow \lambda_{Ti} = \frac{1}{t_0} \ln \frac{1}{P_{Ti}} = \frac{0,02}{t_0}.$$

Даже оставляя допустимый уровень риска заказчика прежним ($\beta = 0,2$), получим

$$\tilde{S}_i = (1/2\lambda_{Ti}) \chi_{0,8}^2(2) = 40,2$$

$$\text{при } d_i = 0, \quad i = 1, m$$

и

$$S_i = (1/2\lambda_{Ti}) \chi_{0,8}^2(4) \simeq 150 \quad \text{при}$$

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^m d_i = 1, \quad i = 1, m.$$

4. Планирование объемов испытаний при планах испытаний с измерением наработки до отказа

Тип системы, условие приемки	Требуемая величина суммарной наработки для элементов i -го типа	Обозначения
Последовательная ССН: $\pi = \exp \left\{ -t_0 \sum_{i=1}^m \lambda_i \right\};$ $\Lambda = \sum \lambda_i;$ $\bar{\Lambda}_{1-\beta} \leq \Lambda_T$	$S_i \geq S_T,$ где $S_T = \frac{1}{2\Lambda_T} \chi_{1-\beta}^2 (2\mathcal{D} + 2),$ $i = 1, m$	$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^m d_i$ — суммарное допустимое число отказов; $\Lambda_T = \frac{1}{t_0} \ln \frac{1}{\pi_T}$
Параллельная ССН: $\mathcal{P} = 1 - \prod_{i=1}^v [1 - \exp(-\lambda_i t_0)];$ $\underline{\mathcal{P}}_{1-\beta} \geq \mathcal{P}_T$ или $\bar{\Lambda}_{1-\beta} \leq \Lambda'_T$	$S_i \geq S_T,$ где $S_T = \frac{1}{2\Lambda_T} \chi_{1-\beta}^2 (2\mathcal{D} + 2),$ $i = 1, v$	$\Lambda = \sum \lambda_i, \mathcal{D} = \sum d_i;$ $\Lambda'_T = \frac{1}{t_0} \ln \frac{1}{\mathcal{P}'_T};$ $\mathcal{P}'_T = [1 - (1 - \mathcal{P}_T)^{1/v}]^v$
Параллельно-последовательная ССН: $\mathcal{P} = 1 - \left(1 - \prod_{i=1}^m e^{-\lambda_i t_0} \right)^v$ $\underline{\mathcal{P}}_{1-\beta} \geq \mathcal{P}_T$ или $\bar{\Lambda}_{1-\beta} \leq \tilde{\Lambda}_T$	$S_i \geq S_T,$ где $S_T = \frac{1}{2\tilde{\Lambda}_T} \chi_{1-\beta}^2 (2\mathcal{D} + 2),$ $i = 1, m$	$\Lambda = \sum \lambda_i, \mathcal{D} = \sum d_i;$ $\tilde{\Lambda}_T = \frac{1}{t_0} \ln \frac{1}{\tilde{\mathcal{P}}_T};$ $\tilde{\mathcal{P}}_T = 1 - (1 - \mathcal{P}_T)^{1/v}$
Последовательно-параллельная ССН: $\pi = \prod_{i=1}^m [1 - (1 - e^{-\lambda_i t_0})^{v_i}];$ $\underline{\pi}_{1-\beta} \geq \pi_T$	$S_i \geq S_T,$ где $S_T = \frac{t_0}{2} \frac{\chi_{1-\beta}^2 (2\mathcal{D} + 2)}{\ln(1/\pi'_T)},$ $i = 1, m$	$\pi'_T = 1 - (1 - \pi_T)^{1/v_i}$

Примечания: 1. При $\mathcal{D} = 0$ $\frac{1}{2} \chi_{1-\beta}^2 (2\mathcal{D} + 2) = \ln(1/\beta)$. В этом случае предполагается использование планов типа $[N_i U(R) T_i]$.

2. В случае, когда система состоит из однотипных элементов, планируемый объем испытаний элементов $S_\Sigma = \sum S_i$, где сумма берется по всем элементам, составляющим систему.

Двухступенчатая процедура контроля. Для решения экстремальной задачи (46), (47) укажем явное выражение для оценки сверху величины $E[V^{(2)}(\eta')]$. Ограничимся рассмотрением случая дискретной статистики η , распределение которой можно задать набором вероятностей

$$P(k|\vec{\theta}) = F_{\eta}(k|\vec{\theta}) - F_{\eta}(k-1|\vec{\theta}),$$

$$k = 1, 2, \quad \vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m).$$

Обозначим

$$\tilde{F}(k, R_T) = \sup_{\vec{\theta}(\vec{\theta}) = R_T} P(k, \vec{\theta});$$

$$\tilde{f}(k, R_T) = \inf_{\vec{\theta}(\vec{\theta}) = R_T} P(k, \vec{\theta}).$$

Тогда оценку для среднего объема испытаний на втором этапе можно представить в виде

$$\begin{aligned} E[V^{(2)}(\beta_2)] &= \sum_{k \in J} P(k|\vec{\theta}) \times \\ &\times \sum_{i=1}^m V_i''(k, \beta_2) \leq \sum_{k \in J} \tilde{F}(k, R_T) \times \\ &\times \sum_{i=1}^m V_i''(k, \beta_2). \end{aligned}$$

Таким образом, задача планирования объемов испытаний V_i' и $V_i''(\eta')$, $\eta' \in J$, $i = 1, m$ сводится к решению следующей задачи на условный экстремум:

$$\begin{aligned} E(V) &\leq \sum_{i=1}^m V_i'(\beta_1) + \sum_{k \in J} \tilde{F}(k, R_T) \times \\ &\times \sum_{i=1}^m V_i''(k, \beta_2) \Rightarrow \min; \end{aligned} \quad (48)$$

$$\beta_1 + \mathcal{P}(R_T) \beta_2 \leq \beta. \quad (49)$$

Для решения этой задачи необходимо знать вид функций $V_i'(\beta_1)$ и $V_i''(k, \beta_2)$. Этот вид определяется условиями приемки (условиями подтверждения требований) на первом и втором этапах контроля; причем для обеспечения минимума среднего объема испытаний будем планировать безотказные испытания, т. е. полагать $\xi_i' = 0$ и $\xi_i'' = 0$ для всех $i = 1, m$, а $\eta(\vec{\xi}') \in \mathcal{K}$. Явный вид функций $V_i'(\beta_1)$ и $V_i''(k, \beta_2)$, $k \in \mathcal{K}$, а также алгоритм решения задачи приведены в работе [72].

Раздел IV

ПЛАНИРОВАНИЕ И ОЦЕНКА ЗАВЕРШЕННОСТИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ОТРАБОТКИ

Глава 18. Планирование и анализ экспериментальной отработки сложных технических систем

Предварительные замечания. Под экспериментальной отработкой сложных технических систем (СТС) понимается совокупность мероприятий, направленных на получение экспериментальным путем информации о работоспособности и надежности изделий, входящих в исследуемую систему, а также на получение информации об эффективности функционирования системы в условиях эксплуатации.

Планирование экспериментальной отработки технических систем является сложной многовариантной и многокритериальной задачей, путем решения которой определяется совокупность мероприятий (наилучший вариант), выполнение которых обеспечит создание СТС с требуемыми характеристиками при наименьших затратах времени и средств.

При выборе наилучшего варианта экспериментальной отработки системы следует учитывать преемственность изделий, уровень новизны проектных решений, а также эффективность используемых экспериментальных средств по моделированию условий эксплуатации изделий.

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ОТРАБОТКИ

Экспериментальная отработка СТС является основным и наиболее важ-

ным этапом в процессе их создания. Для большинства СТС, особенно систем, имеющих в своем составе сложные невосстанавливаемые изделия, характерна тесная связь между выбранной структурой системы, новизной проектных решений и затратами на экспериментальную отработку системы.

Если затраты средств на разработку технических предложений и эскизного проекта СТС составляют 1—10 % от общего объема затрат на проведение опытно-конструкторских работ по созданию систем, то затраты средств на экспериментальную отработку основных элементов изделий СТС составляют 30—70 % и даже иногда превышают указанные значения.

Чем больше новых технических решений, включая разработку новых материалов, комплектующих элементов, технологических процессов создания изделий, предусматривается использовать при создании систем, тем более трудоемким и дорогостоящим оказывается процесс их экспериментальной отработки.

Физическая сущность экспериментальной отработки систем заключается в выявлении экспериментальным путем неисправностей элементов и изделий, в выработке технических решений и проведении работ по устранению неисправностей.

Экспериментальная отработка системы считается законченной, если

подтверждены все требования по обеспечению работоспособности и надежности изделий и требования по обеспечению эффективности функционирования системы в условиях эксплуатации.

Основными задачами, решаемыми в процессе экспериментальной отработки СТС, являются:

выявление и устранение отказов элементов и изделий системы, обусловленных неточностью принятия проектных решений;

определение запасов прочности изделий и устранение излишних запасов, которые могут быть причиной переутяжеления изделий и ухудшения эффективности функционирования системы;

выявление наиболее опасных (экстремальных) условий эксплуатации изделий и проверка работоспособности изделий в этих условиях;

прогнозирование долговечности изделий для различных условий эксплуатации системы; оценка надежности изделий;

оценка эффективности функционирования системы по завершению ее экспериментальной отработки.

Эффективность решения перечисленных задач, определяющих эффективность экспериментальной отработки систем в целом, зависит от следующих факторов:

степени соответствия условий экспериментальной отработки систем условиям эксплуатации;

применения методов и технических средств экспериментальной отработки систем, позволяющих получить максимум информации о работоспособности изделий в условиях эксплуатации при выделенных затратах времени и средств;

распределения затрат времени и средств по этапам экспериментальной отработки систем.

При планировании экспериментальной отработки СТС необходима тщательная проработка возможностей существующих методов и технических средств, моделирующих условия эксплуатации изделий. Если методы и технические средства не позволяют в достаточной степени воспроизводить условия эксплуатации изделий, то

следует предусмотреть их совершенствование.

Планирование экспериментальной отработки СТС целесообразно осуществлять в соответствии со следующими принципами.

1. Экспериментальная отработка системы начинается с отработки наиболее простых элементов, входящих в состав более сложных элементов и изделий системы.

2. По мере проведения экспериментальной отработки сложность обрабатываемых элементов и изделий повышается, а их число уменьшается.

3. Интенсивность обнаружения и устранения отказов изделий должна быть максимальной в начале экспериментальной отработки системы и уменьшаться по степени ее завершения.

4. Информация о работоспособности и надежности изделий, полученная на предшествующем этапе экспериментальной отработки системы, должна использоваться при планировании и проведении следующего этапа.

Планирование экспериментальной отработки изделий системы основывается на результатах анализа: требований по обеспечению работоспособности и надежности изделий, входящих в состав системы, а также эффективности функционирования системы в условиях эксплуатации; условий эксплуатации изделий и системы; уровня проработки проектных решений по созданию изделий и системы.

В соответствии с результатами данного анализа определяются перечень и объем необходимых испытаний изделий и системы в целом.

ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ОТРАБОТКИ И ОЦЕНКА СООТВЕТСТВИЯ УСЛОВИЙ ИСПЫТАНИЙ ИЗДЕЛИЙ УСЛОВИЯМ ИХ ЭКСПЛУАТАЦИИ

Основные этапы экспериментальной отработки систем. Экспериментальная отработка систем представляет сложный многофункциональный процесс и может быть раз-

делена на пять последовательно выполняемых этапов.

На первом этапе испытываются элементы системы (приборы, элементы конструкций изделий, узлы и т. п.). Основной задачей этапа является получение максимума информации о работоспособности элементов системы при выделенных затратах времени и средств.

Первый этап является завершающим звеном проектирования изделий системы. Результаты исследований используются при корректировке выбранных проектных решений. На данном этапе важно не только выявить неисправности, которые могут повлиять на функционирование системы, но и установить оптимальные запасы прочности изделий.

На втором этапе испытываются изделия или группы взаимодействующих приборов, узлов. Основной задачей этапа является проверка работоспособности изделий при различных режимах функционирования, выявление наиболее часто отказывающихся элементов (приборов, узлов и т. п.) и их доработка.

Отличительной особенностью второго этапа является существенное повышение сложности и размеров испытываемых объектов. Вследствие этого возможности испытательных средств второго этапа значительно меньше возможностей испытательных средств первого этапа. На этом этапе должны быть выявлены недоработки, допущенные на первом этапе, и проведены дополнительные исследования в рамках первого этапа.

Первые два этапа являются основными для обеспечения работоспособности и надежности изделий системы в процессе ее эксплуатации.

На третьем этапе проводятся испытания функциональных групп изделий. Задачей этапа является проверка совместного функционирования изделий. Данный этап отличается от предыдущих значительной сложностью подготовки изделий к испытаниям, проведением самих испытаний и выявлением причин неисправностей, возникших на данном этапе.

На четвертом этапе испытываются составные части системы, на пятом этапе — система в целом.

Оценка соответствия условий испытаний изделий условиям эксплуатации. В процессе эксплуатации изделия подвергаются воздействию последовательно меняющихся условий, характеризующихся различными конечными множествами (комплексами) внешних (температура, влажность, атмосферное давление, загрязнение окружающей среды и т. п.) и внутренних (режимы функционирования изделий, колебания электрических нагрузок, механические воздействия и т. п.) факторов.

Поэтому перед проведением экспериментальной отработки изделий прежде всего возникает вопрос, в какой степени условия испытаний будут соответствовать условиям эксплуатации и какой объем испытаний необходим для обеспечения работоспособности и надежности изделий.

Для определения степени указанного соответствия чаще всего используется качественная экспертная оценка. Возможность количественной оценки степени соответствия условий испытаний условиям эксплуатации на каждом этапе исследована в [60].

Для количественной оценки используется обобщенный показатель, изменяющийся в области $[0,1]$ и характеризующий степень соответствия условий испытаний условиям эксплуатации изделий по числу факторов, режимам и степени совмещения факторов.

Максимальное значение показателя, равное единице, характеризует полное соответствие условий испытаний условиям эксплуатации изделий по перечисленным признакам.

ПЛАНИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ОТРАБОТКИ ПО ОБЕСПЕЧЕНИЮ РАБОТОСПОСОБНОСТИ ИЗДЕЛИЙ

Модели испытаний по обеспечению работоспособности изделий. Исследование и обеспечение работоспособности изделий в условиях эксплуатации является важной задачей отработки

системы. Эффективность решения данной задачи зависит от степени соответствия условий испытаний изделий условиям их эксплуатации и методов планирования и анализа результатов испытаний изделий.

Под работоспособным состоянием изделий (объектов) понимается такое состояние, при котором значения всех параметров, характеризующих способность объектов выполнять заданные функции, соответствуют требованиям нормативно-технической документации (НТД).

Если значение хотя бы одного определяющего параметра (ОП) не соответствует требованиям НТД, считается, что изделие находится в неработоспособном состоянии.

В большинстве случаев требования НТД к работоспособности изделий записываются в виде совокупности условий, определяющих область допустимых значений вектора ОП.

Процесс экспериментальной отработки по обеспечению работоспособности изделий состоит в определении значений ОП при различных условиях испытаний, моделирующих условия эксплуатации изделий, и сравнении их с областью допустимых значений ОП. Если значения некоторых ОП не удовлетворяют требованиям НТД, то выявляются условия эксплуатации (факторы), в наибольшей степени влияющие на работоспособность изделия, и производятся доработки по повышению устойчивости изделий к воздействию наиболее значимых эксплуатационных факторов. При этом используется последовательное и комплексное моделирование условий эксплуатации изделий.

При последовательном моделировании изделие поочередно подвергается воздействию каждого из исследуемых факторов, при комплексном — воздействию одновременно нескольких (двух и более) факторов.

Испытания изделий, проводимые при комплексном моделировании условий эксплуатации, называются совмещенными факторными испытаниями. Проведение совмещенных факторных испытаний (СФИ) позволяет определить эффекты взаимодействия факторов, при наличии которых влия-

ние какого-либо фактора на работоспособность изделий зависит от значений других факторов, моделирующих условия эксплуатации изделий.

На начальном этапе экспериментальной отработки целесообразно проводить однофакторные испытания, по результатам которых определяются условия эксплуатации, в наибольшей степени влияющие на работоспособность изделий. Одновременно целесообразно исследовать влияние на работоспособность изделий факторов, в результате воздействия которых могут наступить производственные отказы (возникающие вследствие отклонения процесса изготовления изделий от норм, установленных НТД). В этом случае испытания становятся многофакторными и с помощью их производится уточнение проектных и технологических решений по созданию изделий.

Основной задачей СФИ является более точная по сравнению с однофакторным моделированием условий эксплуатации изделий оценка влияния исследуемых факторов на работоспособность изделий и построение зависимостей ОП от эксплуатационных факторов.

Данные зависимости записываются с помощью следующих выражений:

$$E(y(x)) = F(x); \quad (1)$$

$$\sigma^2(y(x)) = D(x), \quad (2)$$

где E — символ математического ожидания;

$$y = [y_1 y_2 \dots y_m]^T;$$

$$x = [x_1 x_2 \dots x_n]^T;$$

$$F(x) = [F_1(x) F_2(x) \dots F_m(x)]^T;$$

$$D(x) = \sigma^2(y(x)) = [D_1(x) D_2(x) \dots D_m(x)]^T;$$

$$D_m(x)^T = [\sigma_1^2(x) \dots \sigma_m^2(x)]^T.$$

Здесь y — вектор ОП; x — вектор факторов; $F(x)$ — вектор, составленный из функций $F_i(x)$, описывающих зависимости средних значений ОП от x ; $D(x)$ — вектор дисперсий ОП; $D_i(x) = \sigma_i^2(x)$; $y_i = y_i(x)$, $i = \overline{1, m}$; T — символ транспонирования.

Область задания функции $F(x)$ определяется с помощью системы неравенств

$$x_{i \min} \leq x_i \leq x_{i \max}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

где $x_{i \min}$, $x_{i \max}$ — соответственно минимальное и максимальное значения i -го фактора. Данная область называется областью действия факторов.

Конкретный аналитический вид зависимостей (1), (2) называется математической моделью работоспособности (ММР) изделий. ММР называется динамической, если одним из факторов является продолжительность t испытаний. Если среди факторов продолжительность испытаний отсутствует, ММР называется статической. Соответственно называются и испытания изделий.

Процесс получения ММР изделий экспериментальным путем называется построением моделей и состоит из следующих этапов.

1. Выбор одной или нескольких исходных моделей, на основе которых возможно построить ММР с требуемой точностью. Исходные модели содержат неизвестные параметры, оценки которых находятся по результатам испытаний изделий.

2. Выбор одного или нескольких методов оценки неизвестных параметров исходных моделей.

3. Выбор метода планирования СФИ с учетом условий их проведения и требований (критериев), предъявляемых к ММР изделий.

4. Планирование и составление программы проведения СФИ.

5. Проведение испытаний изделий.

6. Оценка точности результатов испытаний.

7. Вычисление оценок неизвестных параметров ММР изделий и проверка значимости оценок.

8. Проверка соответствия ММР результатам испытаний.

9. Получение выражения для вычисления дисперсии значений ОП изделий, определяемых по ММР при различных условиях эксплуатации.

Планирование СФИ. Объем СФИ является одним из основных показателей затрат, необходимых для про-

ведения экспериментальной отработки изделий. Поэтому план проведения СФИ должен обеспечить построение ММР изделий при минимальном объеме испытаний. Достигнуть этого можно путем применения методов теории эксперимента (ТЭ).

В настоящее время для аппроксимации зависимостей, аналитический вид которых неизвестен, широко используются полиномиальные модели. Имеется достаточно большое число факторных планов для построения регрессионных полиномиальных моделей (РПМ) второго порядка

$$\begin{aligned} g(\bar{x}) = & b_0 + \sum_{i=1}^n b_i \bar{x}_i + \\ & + \sum_{j>i=1}^n b_{ij} \bar{x}_i \bar{x}_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} \bar{x}_i^2 \end{aligned}$$

и третьего порядка

$$\begin{aligned} g(\bar{x}) = & b_0 + \sum_{i=1}^n b_i \bar{x}_i + \sum_{j>i=1}^n b_{ij} \bar{x}_i \bar{x}_j + \\ & + \sum_{i=1}^n b_{ii} \bar{x}_i^2 + \sum_{i \neq j=1}^n b_{ijj} \bar{x}_i \bar{x}_j^2 + \\ & + \sum_{k>j>i=1}^n b_{ijk} \bar{x}_i \bar{x}_j \bar{x}_k + \sum_{i=1}^n b_{iii} \bar{x}_i^3; \end{aligned}$$

$$\bar{x} = [\bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n]^T,$$

где $b_0, \dots, b_{iii}$ — коэффициенты регрессии (наилучшие линейные оценки неизвестных параметров). Они определяются по результатам испытаний изделий с использованием метода наименьших квадратов в предположении равенства нулю условного математического ожидания ошибки ε . Здесь величина ε характеризует разброс значений ОП при фиксированных значениях факторов при допущениях о равноточности и некоррелированности результатов испытаний.

В приведенных выше выражениях обозначено

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i &= (x_i - \bar{x}_i) / \Delta x_i, \quad i = \overline{1, n}; \\ \bar{x}_i &= (x_{i \max} + x_{i \min}) / 2; \\ \Delta x_i &= (x_{i \max} - x_{i \min}) / 2, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\tilde{x}_i$ и $\bar{x}_i$ — безразмерные значения факторов, действующих в области (3), которая преобразуется к виду

$$-1 \leq \tilde{x}_i \leq 1, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Основными предположениями применения указанных методов являются следующие:

возможность независимого варьирования значений факторов в заданной области их действия;

ОП работоспособности — случайные непрерывные величины с постоянной дисперсией в области действия факторов;

точность фиксирования значений факторов, при которых необходимо произвести измерения ОП, не должна влиять на результаты испытаний;

результаты опытов независимы.

Под опытом понимается экспериментальная операция, позволяющая определить значение ОП работоспособности при постоянных значениях факторов (условиях испытаний). Опыты, проведенные при одинаковых условиях, называются параллельными.

Использование приведенных выше регрессионных моделей изделий позволяет решать часть задач по исследованию их работоспособности. Решение задач, связанных с прогнозированием работоспособности изделий во времени для различных условий эксплуатации, возможно только с использованием динамических моделей работоспособности (ДМР). Следует отметить особенность проведения динамических испытаний изделий, обусловленную их продолжительностью, которая в большинстве случаев меньше продолжительности эксплуатации изделий. Это обстоятельство заставляет осторожно подходить к выбору исходных моделей, которые одновременно с оценкой влияния факторов должны обеспечить необходимую точность прогнозирования работоспособности изделий.

Возможны две схемы проведения динамических испытаний изделий. Испытания по первой схеме могут проводиться при наличии одного образца изделия и используются при проверке проектных решений. Испытания проводятся в такой последовательности.

Вначале проводятся испытания по построению статической модели работоспособности (СМР). Затем устанавливается постоянный режим испытаний изделия и вырабатывается некоторый ресурс. После этого повторяются статические испытания и производится построение новой статической модели. Затем снова вырабатывается некоторый ресурс и т. д.

Вторая схема проведения динамических испытаний предполагает наличие некоторого числа образцов исследуемого изделия, равного числу различных комбинаций значений факторов при статических испытаниях. Каждый образец изделия испытывается при постоянных условиях. Через определенные интервалы времени для каждого образца производят измерения его ОП, которые используются для построения ММР изделия.

Проведение динамических испытаний по данным схемам позволяет построить два типа динамических моделей:

$$EY(x, \tau) = \eta(x, \theta(\tau));$$

$$EY(x, \tau) = \eta(\tau, \theta(x)),$$

где x — вектор факторов, характеризующих условия проведения статических испытаний; τ — продолжительность испытаний изделий; $\theta(\tau)$ и $\theta(x)$ — векторы неизвестных параметров, зависящие соответственно от продолжительности и от значений факторов. Далее рассматриваются только статические полиномиальные модели.

Планирование динамических испытаний и построение ДМР обоих типов рассмотрены в работе [60].

Среди методов, представленных в каталоге [69] и предназначенных для построения РПМ второго порядка, наилучшими для построения СМР изделий являются композиционные симметричные планы второго порядка типа B_n и Хартли.

Область планирования эксперимента данных планов совпадает с областью (3) действия факторов. Планы имеют минимально необходимое число уровней варьирования факторов, равное трем, что позволяет при проведении испытаний изделий более точно выдерживать заданные режимы испыта-

1. Матрица четырехфакторного СНКС плана

u	x_1	x_2	x_3	x_4
1	0	+	+	+
2	0	—	—	—
3	+	0	—	+
4	—	0	+	—
5	+	+	0	—
6	—	—	0	+
7	+	—	+	0
8	—	+	—	0
9	0	0	0	0

2. Кодированная запись четырехфакторных СНКС планов

$N_{\text{пл}}$	u							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	8	3	6	5	4	3	8
2	4	5	1	8	2	7	4	5
3	6	3	2	7	3	6	1	8
4	2	7	4	5	1	8	2	7

ний и более эффективно использовать область действия факторов по сравнению с планами второго порядка с числом уровней варьирования факторов больше трех. Кроме того, планы B_n и планы Хартли близки к D - и G -оптимальным планам и имеют простые формулы для построения моделей второго порядка [59].

Геометрически данные планы представляют совокупность точек, лежащих на поверхности гиперкуба. Координаты точек определяют условия (значения факторов) проведения опытов (испытаний изделий). Точки планов располагаются в вершинах гиперкуба, в центрах его $(n-1)$ -мерных граней и в центре куба. Точки, располагаемые в центрах указанных граней куба, называются звездными. Число их равно удвоенному числу факторов. Координаты звездных точек записываются с помощью всех воз-

3. Матрица ПФЭ типа 2^3

u	x_1	x_2	x_3
1	+	+	+
2	—	+	+
3	+	—	+
4	—	—	+
5	+	+	—
6	—	+	—
7	+	—	—
8	—	—	—

можных комбинаций граничных значений (± 1) каждого из факторов с нулевыми значениями остальных факторов. Точка плана, располагаемая в центре куба, называется центральной.

Точки планов, располагаемые в вершинах куба, образуют ядро плана. Координаты вершин гиперкуба записываются с помощью всех возможных комбинаций граничных значений ($\pm 1, \dots, \pm 1$ факторов, число которых равно 2^n . Точки, образующие ядро планов, могут располагаться не во всех вершинах гиперкуба, а только в некоторых из них. Число вершин выбирается равным половине (2^{n-1}), четверти (2^{n-2}), одной восьмой (2^{n-3}) и т. д. от числа вершин гиперкуба. Число точек планов в зависимости от числа факторов определяется по формуле

$$N = 2^{n-p} + 2n + 1,$$

$$p = 0, 1, 2, \dots, n.$$

В каждой точке проводится равное число параллельных опытов.

Характерной особенностью СФИ является различное влияние факторов на ОП работоспособности изделий и, как следствие этого, появление в процессе построения моделей незначимых факторов, неодинаковых по каждому из ОП.

В тех случаях, когда испытания изделий являются трудоемкими, целесообразно использовать трехуровневые сверхнасыщенные квазисимметричные (СНКС) планы второго порядка

4. Кодированная запись пятифакторных СНКС планов

№ _{пл}	и									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	5	4	7	5	1	2	7	7	2	8
2	8	5	4	2	4	5	4	1	7	2
3	1	8	5	4	6	3	5	2	1	4
4	2	6	3	6	8	7	2	3	6	1

[60]. Данные планы при наиболее часто встречающемся при испытаниях числе факторов (от трех до пяти) позволяют вначале построить регрессионные полиномиальные модели второго порядка без степенных функций, учитывающих взаимодействие факторов. Данные модели позволяют с достаточной точностью выявить как наиболее значимые, так и незначимые факторы и принять решение о необходимой доработке изделий или о проведении дополнительных испытаний. Для четырех факторов построено четыре СНКС плана. Матрица одного из них представлена в табл. 1. При исключении в матрице любых двух факторов образуется план B_2 , а при исключении одного какого-либо фактора — трехфакторный СНКС план второго порядка.

Матрицы всех четырехфакторных СНКС планов второго порядка представлены в табл. 2. В первой строке этой таблицы записаны номера строк матриц с первой по восьмую. Каждая из остальных четырех строк соответствует одному из четырехфакторных СНКС планов. Плану, представленному в табл. 1, соответствует вторая строка табл. 2 ($N_{пл} = 1$). В этой строке записаны номера строк в табл. 3, использованной при построении данного плана. Аналогично в последних трех строках табл. 2 записаны остальные четырехфакторные СНКС планы. Два любых четырехфакторных СНКС плана образуют близкий к насыщенному план второго порядка. В случае необходимости построения ММР в виде неполной модели третьего порядка без кубических членов к двум СНКС

планам может быть достроен третий четырехфакторный план.

Пятифакторные планы представлены в табл. 4, аналогичной табл. 2. Матрица плана под $N_{пл} = 1$, представлена в табл. 5. Два любых пятифакторных плана образуют насыщенный план второго порядка, а все четыре плана — насыщенный план для построения неполных моделей третьего порядка.

Составление программы проведения СФИ. С целью исключения влияния систематических ошибок на результаты испытаний изделий условия проведения испытаний, определяемые матрицей планирования эксперимента, выбираются случайным образом с помощью равномерно распределенных случайных чисел.

5. Матрица пятифакторного СНКС плана

и	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	0	0	+	+	—
2	0	—	0	—	+
3	0	+	—	0	—
4	0	+	+	—	0
5	+	0	0	+	+
6	—	0	+	0	+
7	+	0	—	—	0
8	+	—	0	0	—
9	—	+	0	+	0
10	—	—	—	0	0
11	0	0	0	0	0

Для проведения испытаний и записи их результатов составляется программа испытаний в виде прямоугольной таблицы, в строках которой условия проведения испытаний записываются в натуральных единицах измерения и в последовательности, полученной в результате рандомизации.

Оценка точности результатов испытаний и построение ММР изделий. Оценка точности результатов испытаний производится по величине разброса значений ОП работоспособности в параллельных опытах (выборочных дисперсий). В случае однородности выборочных дисперсий определяется генеральная дисперсия, характеризующая точность определения различных значений ОП работоспособности в области действия факторов, которая используется при построении ММР изделий.

Для вычисления коэффициентов регрессии в случае равноточных измерений ОП работоспособности (в случае равенства выборочных дисперсий) используется формула

$$\hat{\theta} = M^{-1}Y,$$

где

$$M = \sum_{u=1}^N f(x_u) f^T(x_u)$$

— информационная матрица плана;
 $f(x)$ — вектор степенных функций:

$$Y = \sum_{u=1}^N y_u f(x_u);$$

y_u — среднее значение ОП, измеренное по r результатам параллельных опытов в u -й точке (u -м режиме) плана испытаний; N — число точек плана испытаний.

Для определения дисперсии прогнозируемых по РПМ значений ОП работоспособности при различных значениях факторов используется формула

$$S^2\{g(x)\} = \frac{S^2\{y\}}{r} f^T(x) M^{-1}(x) f(x), \quad (6)$$

где $S^2\{y\}$ — генеральная дисперсия; r — число параллельных опытов в каждой точке плана.

После исключения из РПМ с помощью критерия Стьюдента незначимых коэффициентов регрессии производится проверка соответствия РПМ результатам испытаний. Для этого по формуле

$$S_{\text{ост}}^2 = \frac{1}{N-k} \sum_{u=1}^N (g(x_u) - y_u)^2$$

(k — число значимых коэффициентов регрессии в РПМ) определяется остаточная дисперсия и сравнивается по F -критерию с генеральной дисперсией. Затем по формуле (6) записывается выражение для определения дисперсии прогнозируемых значений ОП работоспособности изделий.

Задачи, решаемые с использованием ММР изделий.

Количественная оценка влияния факторов. При построении ММР изделий в виде модели первого порядка количественная оценка влияния факторов в области (3) их действия производится по величине коэффициентов регрессии (КР). Положительным значениям КР соответствует прямо пропорциональная зависимость исследуемого ОП работоспособности изделия от соответствующих факторов, а отрицательным — обратно пропорциональная зависимость. При построении ММР в виде неполных моделей второго порядка (без степенных членов второго порядка) влияние каждого фактора на работоспособность изделия зависит от значений остальных факторов.

В некоторых случаях бывает необходимым произвести оценку влияния факторов на работоспособность изделий в области значений факторов, являющейся частью исходной области (5) их действия. Формулы для такой оценки, а также формулы для оценки влияния факторов при использовании в качестве ММР изделий РПМ третьего порядка приведены в работе [59].

Прогнозирование работоспособности изделий в различных условиях эксплуатации. Оценка работоспособности изделий в различных условиях эксплуатации производится путем определения по ММР изделий соответствующих значений ОП работоспособ-

ности и сравнения их с областями допустимых значений.

Построение областей работоспособности изделий. Областями работоспособности (ОР) называются совокупности значений факторов, характеризующих условия эксплуатации изделий, при которых изделия сохраняют работоспособное состояние.

Для построения ОР используются граничные и матричные испытания, состоящие в определении совокупности точек (значений вектора факторов), лежащих на поверхности ограничивающей ОР изделий. Данные точки и соответствующие им значения факторов называются граничными. С помощью граничных точек в плоскости двух каких-либо факторов производится построение различных сечений ОР изделий.

Наиболее часто требования к работоспособности изделий записываются в виде совокупности неравенств

$$Y_{j \min} \leq Y_j \leq Y_{j \max}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (7)$$

где $Y_{j \min}$, $Y_{j \max}$ — соответственно минимальное и максимальное допускаемые детерминированные значения j -го ОП.

В случае нескольких ОП вначале производится построение областей по каждому ОП изделия и затем находится область значений факторов, при которых выполняются все условия (7).

Решение перечисленных задач существенно повышает информативность результатов испытаний по обеспечению работоспособности изделий.

ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ОТРАБОТКИ ПО КРИТЕРИЮ МАКСИМАЛЬНОЙ НАДЕЖНОСТИ

Для планирования экспериментальной отработки разрабатываются процедуры определения номенклатуры используемых стендов, видов отработочных испытаний и их объемов. Формально цели отработки задаются соответствующими критериями, которые отражают функциональную зависимость между мерой достижения цели отработки и характеристиками испытаний.

Экспериментальная отработка представляет собой процесс, в ходе которого выявляются и устраняются источники отказов. Для математического описания этого процесса используются модели роста надежности. Практическое применение этих моделей для решения задач планирования экспериментальной отработки требует предварительного решения двух вспомогательных задач:

выбор среди существующих моделей или построение новой модели роста надежности обрабатываемого изделия; определение параметров выбранной или построенной модели по результатам отработки аналогов данного изделия.

Для планирования отработки используется соотношение вида [86]

$$P_{j+1} = P_j + (P_\infty - P_j) \times \theta_j \left(1 - (1 - q_j)^{n_j}\right),$$

$$j = \overline{1, l}, \quad P_1 = P_0, \quad (8)$$

$$\text{где } q_j = \frac{P_\infty - P_j}{N};$$

P_∞ , N — параметры модели роста надежности; n_j — число испытаний, проведенных на j -м этапе отработки; θ_j — вероятность устранения одного из проявившихся на j -м этапе источников отказов.

Уравнение (8) дает возможность найти вероятность безотказной работы изделия в конце отработки:

$$P_{l+1}(x_1, x_2, \dots, x_l) =$$

$$= P_0 + \sum_{i=1}^l \omega_i(P_i, x_i), \quad (9)$$

где P_{l+1} — вероятность безотказной работы в конце отработки; ω_i — функция выигрыша, зависящая от достигнутого уровня ВБР и вектора характеристик x_i отработочных испытаний, который включает три составляющие:

6. План отработки

Этап отработки	Число испытаний	Номер стенда	Вид испытаний
1	50	3	2
2	40	1	1
3	10	1	2
4	20	3	1
5	20	4	1
6	70	5	1

n_i — объем испытаний; m_i — индекс типа испытательного стенда; r_i — индекс, определяющий вид испытаний; l — число этапов отработки; P_0 — начальное значение ВБР изделия; P_i — ВБР изделия на i -м этапе отработки, определяемое по модели роста надежности (см. гл. 20).

Функция, задающая желаемую степень отработанности изделия, задается в виде (9), а оптимальные параметры отработки находятся из условия обеспечения

$$\max_x P_{l+1}(x_1, x_2, \dots, x_l),$$

$$x = (x_1 x_2 \dots x_l). \tag{10}$$

Затраты располагаемых ресурсов на проведение отработки состоят из двух составляющих: затрат собственно на проведение испытаний и затрат на приобретение испытательных стендов или модернизацию имеющихся стендов. Ограничение на ресурсы может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} C(x_1, x_2, \dots, x_l) = \\ = \sum_{i=1}^l C(m_i, r_i) n_i + \\ + \sum_{k=1}^{m_c} Z_k h(S_k(x)) \leq C_*, \end{aligned} \tag{11}$$

где $C(m_i, r_i)$ — стоимость проведения одного испытания r -го вида на стенде

7. Затраты (усл. ед) на одно отработочное испытание

Вид испытаний	Стенд				
	1	2	3	4	5
1	0,4	0,2	0,5	0,8	0,9
2	1,0	1,6	1,2		

m_i -го типа; m_c — число типов испытательных стендов; Z_k — затраты на приобретение или модернизацию стенда k -го типа; h — функция Жевисайда;

$$h(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leq 0; \\ 1, & \text{если } t > 0; \end{cases}$$

S_k — кратность использования стенда k -го типа; C_* — допустимый уровень затрат на отработку; $x_i = (n_i, m_i, r_i)$.

План экспериментальной отработки представляет в данном случае последовательность l векторов $x_i = (n_i, m_i, r_i)$, определяющих объемы проводимых испытаний, тип испытательных стендов и вид испытаний. План называется допустимым, если он удовлетворяет ограничению (11). Допустимый план $x_1^*, x_2^*, \dots, x_l^*$ будет оптимальным, если для любого другого допустимого плана $y_1, y_2, \dots, y_l$ выполняется условие

$$\begin{aligned} P_{l+1}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_l^*) > \\ > P_{l+1}(y_1, y_2, \dots, y_l). \end{aligned}$$

Пример 1. Проверить на допустимость план отработки, состоящий из $l = 6$ этапов, представленный в табл. 6. Стоимость приобретения стенда каждого типа составляет 20, 30, 90, 60, 85 условных единиц. Затраты на проведение одного отработочного испытания в зависимости от типа используемого стенда приведены в табл. 7. Допустимый уровень затрат составляет $C_* = 500$ условных единиц.

План отработки определяет граф прохождения обрабатываемого изделия по испытательным стендам с учетом реализуемых видов испытаний. Этот граф схематично изображен в табл. 7.

Подставляя приведенные в табл. 1 и 2 значения в формулу (11), находим, что

$$C = 1,2 \times 50 + 0,4 \times 40 + 1,0 \times 10 + 0,5 \times 20 + 0,8 \times 20 + 0,9 \times 70 + 20 \times 1 + 30 \times 0 + 90 \times 1 + 60 \times 1 + 85 \times 1 = 430 \text{ усл. ед.}$$

Поскольку $430 < C_* = 500$, выбранный план отработки является допустимым.

Оптимизация плана экспериментальной отработки по критерию максимальной вероятности безотказной работы является задачей нелинейного программирования с целевой функцией, заданной алгоритмически. Прямой перебор всех возможных вариантов плана отработочных испытаний может быть значительно сокращен, если привлечь в виде опорного плана априорную информацию об отработке аналогов. Для определения характеристик оптимального плана рекомендуется вести поиск максимума в соотношении (10) в окрестности опорного допустимого плана, учитывая ограничение (11) на располагаемые ресурсы.

Глава 19. Оптимальное планирование многофакторных испытаний на надежность

Предварительные замечания. Многофакторными называются испытания, проводимые при различных сочетаниях факторов, влияющих на надежность объекта.

Многофакторные испытания на надежность проводятся с целью построения многофакторных моделей для показателей надежности объекта, а также моделей, описывающих процессы изменения определяющего параметра (ОП) объекта.

Многофакторная модель объекта (далее — модель объекта) есть математическое соотношение, связывающее отклик (показатель надежности, ОП) со значениями совокупности факторов, характеризующих режим применения объекта. Ниже полагается, что построение многофакторной модели есть процедура нахождения по данным испытаний оценок значений множества коэффициентов модели объекта.

С помощью построенной многофакторной модели процесса изменения ОП можно определить:

точечную оценку ОП при работе объекта в любом заданном режиме, в заданный момент времени, ее дисперсию;

оценку показателя надежности (например, средней наработки до отказа, гамма-процентного ресурса и т. п.) при применении объекта в любом заданном режиме при заданных граничном значении и распределении начального значения ОП.

С помощью построенной многофакторной модели для показателя надежности можно найти точечную оценку показателя при работе объекта в любом заданном режиме и дисперсию этой оценки. Многофакторная модель для показателя надежности, построен-

ная по данным испытаний в форсированных режимах, может быть использована для прогнозирования показателя надежности в рабочем режиме объекта.

Задача оптимального планирования испытаний — это задача выбора таких значений показателей плана испытаний (числа различных режимов испытаний; числа испытываемых образцов; характеристик режимов; числа образцов, испытываемых в каждом режиме; длительности испытаний в каждом режиме), при которых достигается (при заданных ограничениях) максимальная точность построенной модели. При этом в качестве критериев оптимальности плана испытаний (показателей точности модели объекта) используются:

дисперсия оценки показателя надежности (или ОП объекта), рассчитанной по построенной многофакторной модели (критерий экстраполяции);

средняя дисперсия оценок коэффициентов построенной многофакторной модели объекта (A -критерий);

определитель ковариационной матрицы оценок коэффициентов (обобщенная дисперсия оценок коэффициентов) многофакторной модели (D -критерий).

Для нахождения оптимального плана многофакторных испытаний необходимо:

сформулировать задачу планирования (выбрать критерий оптимальности плана испытаний, сформулировать ограничения на выбор плана, построить математическую модель для вычисления критерия оптимальности);

построить оптимальный план из условия получения наилучшего (минимального, максимального) значения

критерия оптимальности плана при выполнении всех ограничений.

Теоретической базой оптимального планирования многофакторных испытаний на надежность является математическая теория планирования эксперимента [47, 51, 52, 69, 77].

При постановке задачи планирования важно знать особенности структуры испытаний (схему испытаний), вид модели наблюдений и используемый метод обработки данных.

Построение оптимального плана осуществляется путем использования каталогов планов (см. с. 293 и [69]) и проведения специальных расчетов с помощью средств вычислительной техники.

Приведем определения некоторых понятий, используемых в этой главе.

Опыт — испытания при неизменном режиме (неизменных значениях факторов, характеризующих режим испытаний).

Последовательная схема испытаний — организация испытаний, при которой опыты реализуются последовательно во времени.

Параллельная схема испытаний — организация испытаний, при которой все опыты реализуются одновременно.

Модель наблюдений — описание свойств наблюдаемых при испытаниях величин и способа их взаимосвязи с факторами, характеризующими режим испытаний. Модель наблюдений в общем случае включает: модель объекта; неслучайное преобразование, связывающее отклик с наблюдаемой величиной; характеристики случайных составляющих наблюдений.

Модель объекта задается в виде математического выражения $\eta(\beta, x, t)$, где β — m -мерный вектор коэффициентов; x — k -мерный вектор показателей режима испытаний; t — время.

Модель $\eta(\beta, x, t)$ линейна по параметрам β , если

$$\eta(\beta, x, t) = \sum_{i=1}^m \beta_i f_i(x, t), \quad (1)$$

где $f_i(x, t)$ — заданные функции x, t $i = 1, 2, \dots, m$.

Если $\eta(\beta, x, t)$ имеет вид, отличный от (1), то модель нелинейна по параметрам β .

Источником случайных составляющих наблюдений могут быть:

погрешности наблюдений $\varepsilon(t)$;

случайные величины $v(x)$, характеризующие различия испытываемых объектов (образцов) (в общем случае они зависят от режима x испытаний);

случайные величины $e(t)$, описывающие процесс изменения во времени характеристик объекта.

Стандартная модель наблюдений, используемая при получении основных результатов теории планирования эксперимента [47, 77], имеет вид

$$\bar{y}(x) = \eta(\beta, x) + \varepsilon,$$

где ε — случайная величина; $\bar{y}(x)$ — наблюдаемое значение отклика.

Непрерывный план — план испытаний, заданный совокупностью точек $x^{(j)}$ в пространстве факторов и относительными частотами проведения опытов в этих точках (весами точек плана p_j).

Точный план — план испытаний, заданный совокупностью точек в пространстве факторов и числом опытов в каждой точке.

Локально-оптимальный план — оптимальный план, сохраняющий свои свойства лишь в ограниченном диапазоне значений коэффициентов модели.

Отклик — зависимая переменная, связь которой с характеристиками режима испытаний (факторами) устанавливается при многофакторных испытаниях (ниже откликом будем считать ОП объекта; показатель надежности). *Многоклиновая модель* имеет место в случаях, когда по данным испытаний устанавливается связь между характеристиками режима и совокупностью откликов (например, строятся модели, описывающие процессы изменения совокупности параметров объекта).

Насыщенный план — план испытаний, в котором число различных режимов (точек в пространстве факторов) равно числу оцениваемых коэффициентов модели (в случае однооткликовой модели).

В случае многооткликовых моделей, в ситуации, когда множества коэффициентов для различных откликов не пересекаются, насыщенный план со-

держит число точек, равное максимальному числу коэффициентов в моделях для различных откликов.

Априорное планирование — формирование плана испытаний на основе сведений об испытуемом объекте, имеющихся до начала испытаний.

Последовательное планирование — планирование испытаний, осуществляемое в процессе испытаний для последующей группы экспериментов на основе результатов, полученных при проведении предшествующих экспериментов.

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ МНОГОФАКТОРНЫХ ИСПЫТАНИЙ

При многофакторных испытаниях на надежность, как правило, имеет место двухэтапная процедура обработки данных. На первом этапе данные, полученные в каждом опыте, подвергаются обработке с целью оценки показателей надежности (или коэффициентов модели изменения ОП объекта) для режима испытаний, реализованного в данном опыте. На втором этапе полученные оценки используются для построения математических моделей, связывающих показатель надежности (или коэффициенты модели изменения ОП объекта) с факторами, характеризующими режим испытаний.

На первом этапе обработки данных используется метод наименьших квадратов (метод взвешенных наименьших квадратов) или метод максимального правдоподобия. На втором этапе используется метод взвешенных наименьших квадратов.

Основные расчетные формулы при применении метода взвешенных наименьших квадратов сведены в табл. 1. Для однооткликовых моделей принято: режимы испытаний $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}$ известны; модель наблюдений

$$\bar{y}^{(j)} = \eta(\beta, x^{(j)}) + \varepsilon(x^{(j)}), \quad (2)$$

$$\eta(\beta, x^{(j)}) = \sum_{i=1}^m \beta_i f_i(x^{(j)});$$

ковариационная матрица W размера N случайной составляющей наблюдений $\varepsilon(x^{(j)})$ задана.

Оценки $\hat{\beta}$ находятся из условия

$$\min_{\beta} (\tilde{Y} - F\beta)^T W^{-1} (\tilde{Y} - F\beta), \quad (3)$$

где $\tilde{Y}$ — вектор-столбец с элементами $\bar{y}^{(1)}, \bar{y}^{(2)}, \dots, \bar{y}^{(N)}$; F — матрица размера $(N \times m)$:

$$F = \begin{pmatrix} f_1(x^{(1)}) & f_m(x^{(1)}) \\ \vdots & \vdots \\ f_1(x^{(N)}) & f_m(x^{(N)}) \end{pmatrix}; \quad (4)$$

W^{-1} — матрица, обратная W .

Вычисление $\hat{\beta}$ сводится к решению системы линейных уравнений

$$(F^T W^{-1} F) \hat{\beta} = F^T W^{-1} \tilde{Y}, \quad (5)$$

где F^T — транспонированная матрица F .

При нелинейной по β функции $\eta(\beta, x)$ для вычисления $\hat{\beta}$ согласно (3) следует применять поисковые процедуры оптимизации [3].

Ковариационная матрица оценок $\hat{\beta}$ определяется выражением

$$\text{cov}\{\hat{\beta}\} = (F^T W^{-1} F)^{-1}. \quad (6)$$

При нелинейной по β функции $\eta(\beta, x)$ для $\text{cov}\{\hat{\beta}\}$ приближенно имеет место (6) при элементах $f_i(x^{(j)})$ матрицы F , вычисляемых по формуле

$$f_i(x^{(j)}) = \left. \frac{\partial \eta(\beta, x^{(j)})}{\partial \beta_i} \right|_{\beta=\hat{\beta}}, \quad (7)$$

где $\hat{\beta}$ — найденные оценки.

Для многооткликовых моделей принято:

режимы испытаний $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}$ известны;
модель наблюдений

$$\bar{y}_i^{(\lambda)} = \eta_i(\beta, x^{(\lambda)}) + \varepsilon_i(x^{(\lambda)}),$$

$$\eta_i(\beta, x^{(\lambda)}) = \sum_{\mu=1}^{m_i} \beta_{i\mu} f_{i\mu}(x^{(\lambda)}), \quad (8)$$

$i = 1, 2, \dots, r;$

1. Расчетные выражения метода наименьших квадратов

Вид модели	W	Критерий	Вычисление оценок $\hat{\beta}$	$\text{cov} \{\hat{\beta}\}$
Однооткликовая модель $\eta(\beta, x) = \sum_{i=1}^m \beta_i f_i(x)$	W (общий случай)	$F = \begin{pmatrix} f_1(x^{(1)}) \dots f_m(x^{(1)}) \\ \vdots \\ f_1(x^{(N)}) \dots f_m(x^{(N)}) \end{pmatrix};$ $\tilde{Y} = \begin{pmatrix} \tilde{y}^{(1)} \\ \vdots \\ \tilde{y}^{(N)} \end{pmatrix}$	$\hat{\beta} = (F^T W^{-1} F)^{-1} F^T W^{-1} \tilde{Y}$	$(F^T W^{-1} F)^{-1}$
	$W = I_N \sigma_e^2$ (I_N — единичная матрица порядка N)	$\sum_{j=1}^N \left(\tilde{y}^{(j)} - \sum_{i=1}^m \beta_i f_i(x^{(j)}) \right)^2$	$\hat{\beta} = \left(\sum_{j=1}^N f(x^{(j)}) f^T(x^{(j)}) \right)^{-1} \times$ $\times \sum_{j=1}^N \tilde{y}^{(j)} f(x^{(j)});$ $f(x^{(j)}) = \begin{pmatrix} f_1(x^{(j)}) \\ \vdots \\ f_m(x^{(j)}) \end{pmatrix}$	$\left(\sum_{j=1}^N f(x^{(j)}) \times f^T(x^{(j)}) \right)^{-1} \sigma_e^2$
	$W = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \sigma_2^2 & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_N^2 \end{pmatrix}$	$\sum_{j=1}^N \sigma_j^{-2} \left(\tilde{y}^{(j)} - \sum_{i=1}^m \beta_i f_i(x^{(j)}) \right)^2$	$\hat{\beta} = \left(\sum_{j=1}^N \sigma_j^{-2} f(x^{(j)}) f^T(x^{(j)}) \right)^{-1} \times$ $\times \sum_{j=1}^N \sigma_j^{-2} \tilde{y}^{(j)} f(x^{(j)})$	$\left(\sum_{j=1}^N \sigma_j^{-2} f(x^{(j)}) \times f^T(x^{(j)}) \right)^{-1}$

Вид модели	W	Критерий	Вычисление оценок $\hat{\beta}$	$\text{cov} \{\hat{\beta}\}$
Многооткликовая модель $H(\beta, x) = \begin{pmatrix} \eta_1(\beta, x) \\ \vdots \\ \eta_r(\beta, r) \end{pmatrix}$	W_λ (матрица $r \times r$)	$\sum_{\lambda=1}^N (\tilde{Y}^{(\lambda)} - H(\beta, x^{(\lambda)}))^T W_\lambda^{-1} \times$ $\times (\tilde{Y}^{(\lambda)} - H(\beta, x^{(\lambda)}));$ $\tilde{Y}^{(\lambda)} = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1^{(\lambda)} \\ \vdots \\ \tilde{y}_r^{(\lambda)} \end{pmatrix}$	$\hat{\beta} = \left(\sum_{\lambda=1}^N F_\lambda^T W_\lambda^{-1} F_\lambda \right)^{-1} \times$ $\times \sum_{\lambda=1}^N F_\lambda^T W_\lambda^{-1} \tilde{Y}^{(\lambda)};$ $F_\lambda = \begin{pmatrix} f_{11}(x^{(\lambda)}) \dots f_{1m_1}(x^{(\lambda)}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 \dots & 0 & f_{21}(x^{(\lambda)}) \dots f_{2m_2}(x^{(\lambda)}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 \dots \dots & 0 & f_{r1}(x^{(\lambda)}) \dots f_{rm_r}(x^{(\lambda)}) \end{pmatrix}$	$\left(\sum_{\lambda=1}^N F_\lambda^T W_\lambda^{-1} F_\lambda \right)^{-1};$
	$W_\lambda = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & 0 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_r^2 \end{pmatrix}$	$(\tilde{Y}_i - F^{(i)} \beta_{(i)})^T \times$ $\times (\tilde{Y}_i - F^{(i)} \beta_{(i)}),$ $i = 1, 2, \dots, r$ $\tilde{Y}_i = \begin{pmatrix} \tilde{y}_i^{(1)} \\ \vdots \\ \tilde{y}_i^{(N)} \end{pmatrix};$ $\beta_{(i)} = \begin{pmatrix} \beta_{i1} \\ \vdots \\ \beta_{im_i} \end{pmatrix};$ $F^{(i)} =$ $= \begin{pmatrix} f_{i1}(x^{(1)}) \dots f_{im_i}(x^{(1)}) \\ \vdots \\ f_{i1}(x^{(N)}) \dots f_{im_i}(x^{(N)}) \end{pmatrix}$	$\hat{\beta}_{(i)} = (F^{(i)T} F^{(i)})^{-1} F^{(i)T} \tilde{Y}_i,$ $i = 1, 2, \dots, r$	$(F^{(i)T} F^{(i)})^{-1} \sigma_i^2,$ $i = 1, 2, \dots, r$

ковариационная матрица W_λ размера r случайных составляющих измерений r откликов в режиме $x^{(\lambda)}$ задана.

Оценки $\hat{\beta}$ находятся из условия

$$\min_{\beta} \sum_{\lambda=1}^N (\tilde{Y}^{(\lambda)} - H(\beta, x^{(\lambda)}))^T \times \\ \times W_\lambda^{-1} (\tilde{Y}^{(\lambda)} - H(\beta, x^{(\lambda)})), \quad (9)$$

где

$$\tilde{Y}^{(\lambda)} = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1^{(\lambda)} \\ \vdots \\ \tilde{y}_r^{(\lambda)} \end{pmatrix};$$

$$H(\beta, x^{(\lambda)}) = \begin{pmatrix} \eta_1(\beta, x^{(\lambda)}) \\ \vdots \\ \eta_r(\beta, x^{(\lambda)}) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Вычисления сводятся к решению системы линейных уравнений

$$\left(\sum_{\lambda=1}^N F_\lambda^T W_\lambda^{-1} F_\lambda \right) \hat{\beta} = \sum_{\lambda=1}^N F_\lambda^T W_\lambda^{-1} \tilde{Y}^{(\lambda)}, \quad (11)$$

где

$$F_\lambda = \begin{pmatrix} f_{11}(x^{(\lambda)}) & \dots & f_{1m_1}(x^{(\lambda)}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_{21}(x^{(\lambda)}) & \dots & f_{2m_2}(x^{(\lambda)}) & 0 \\ 0 & & & & f_{r1}(x^{(\lambda)}) & f_{rm_r}(x^{(\lambda)}) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Ковариационная матрица определяется выражением

$$\text{cov} \{\hat{\beta}\} = \left(\sum_{\lambda=1}^N F_\lambda W_\lambda^{-1} F_\lambda \right)^{-1} \quad (13)$$

Методом максимального правдоподобия на первом этапе обработки данных многофакторных испытаний могут быть найдены оценки параметров функции распределения вероятностей наблюдаемой величины при всяком фиксированном режиме испытаний. Способы вычисления оценок параметров для различных видов закона рас-

пределения наблюдений и типов планов (имеются в виду планы испытаний при фиксированном режиме, такие, как, например, планы (N, U, T) , (N, U, r) и т. д., рассмотрены в гл. 8. Необходимые для второго этапа обработки (методом взвешенных наименьших квадратов) дисперсии оценок параметров распределения наблюдений определяются с помощью результатов асимптотической теории метода максимального правдоподобия [31]. В табл. 4 приведены асимптотические дисперсии w_i для параметров экспоненциального, нормального распределения (при оценивании среднего) и распределения Вейбулла (при оценивании параметра сдвига) в случае применения планов (N, U, N) , (N, U, r) и (N, U, T) .

ОПТИМАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИСПЫТАНИЙ ПРИ ПОСТРОЕНИИ МНОГОФАКТОРНЫХ МОДЕЛЕЙ ПРОЦЕССОВ ИЗМЕНЕНИЯ ОПРЕДЕЛЯЮЩЕГО ПАРАМЕТРА ОБЪЕКТА

Многофакторная модель процесса изменения ОП общего вида может быть представлена скалярным произведе-

нием вектора заданных функций времени и вектора известных с точностью до значений коэффициентов β функций факторов x . В частном случае процесс изменения ОП можно описать линейной функцией времени с зависящей от значений факторов x скоростью изменения.

Испытания совокупности различающихся образцов объекта (параллельная схема); многофакторная модель процесса изменения ОП общего вида.

Целью испытаний является оценка m -мерного вектора коэффициентов β многофакторной модели, описывающей

процесс изменения во времени ОП объекта. Модель имеет вид

$$y(t) = \varphi^T(\beta, x) f(t), \quad (14)$$

где $\varphi(\beta, x)$ — r -мерный вектор-столбец функций, зависящий от коэффициентов β ; $f(t)$ — r -мерный вектор-столбец заданных функций времени; β — m -мерный вектор-столбец коэффициентов многофакторной модели.

Например, если

$$\varphi_1(\beta, x) = \beta_0;$$

$$\varphi_2(\beta, x) = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2;$$

$$\varphi_3(\beta, x) = \beta_3 x_1 + \beta_4 x_2 + \beta_5 x_1 x_2,$$

а $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = t$ и $f_3 = t^2$, то

$$y(t) = \beta_0 + (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) t + (\beta_3 x_1 + \beta_4 x_2 + \beta_5 x_1 x_2) t^2.$$

Функции $\varphi_1(\beta, x), \dots, \varphi_r(\beta, x)$ включают различные компоненты вектора β , т. е.

$$\varphi_i(\beta, x) = \sum_{\mu=1}^{m_i} \beta_{i\mu} \psi_{i\mu}(x), \quad (15)$$

причем

$$\sum_{i=1}^r m_i = m,$$

где m — общее число коэффициентов многофакторной модели.

В частном случае $m_1 = m_2 = \dots = m_r = m/r$ и

$$\psi_{1\mu} = \psi_{2\mu} = \dots = \psi_{r\mu} = \psi_\mu;$$

$$\mu = 1, 2, \dots, m/r.$$

Решая задачу планирования, необходимо располагать информацией о виде функций $\varphi(\beta, x)$ и $f(t)$. Для получения таких данных требуются предварительные испытания. Подбор вида модели можно осуществить, пользуясь приемами, разработанными в теории эксперимента [52].

Организация испытаний. Заданное число N объектов испытывается одновременно в режимах $x^{(1)}, \dots, x^{(N)}$ в течение времени T (параллельная схема). Все $x^{(j)} \in \Omega_x$, $j = 1, \dots, N$,

где Ω_x — область возможных режимов испытаний. В ходе испытаний каждого объекта в моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_n$ измеряются значения ОП объекта. Результаты измерения для λ -го объекта $\tilde{y}_\lambda(t_1), \dots, \tilde{y}_\lambda(t_n)$.

Модель наблюдений имеет вид

$$\tilde{y}_\lambda(t_j) = [\varphi(\beta, x^{(\lambda)}) + v(x^{(\lambda)})]^T \times f(t_j) + \varepsilon(t_j), \quad (16)$$

где $v(x)$ — случайный вектор-столбец размерности r с нулевыми математическими ожиданиями компонент и ковариационной матрицей

$$\text{cov}\{v\} = E\{v(x) v^T(x)\} = D_v(x)$$

(E — символ операции математического ожидания).

Случайные величины v характеризуют различия характеристик испытываемых объектов.

Относительно погрешности наблюдений $\varepsilon(t)$ принимаем:

$$E\{\varepsilon(t_j)\} = 0; E\{\varepsilon(t_j) \varepsilon(t_\mu)\} = \begin{cases} 0, & j \neq \mu \\ \sigma_\varepsilon^2, & j = \mu. \end{cases}$$

При выборе модели наблюдений важно установить основной источник рассеивания наблюдений величины y в некоторый фиксированный момент t . Если это погрешности наблюдений, то при дальнейших расчетах можно пренебречь $\text{cov}\{v\} = D_v(x)$. Если это разброс характеристик образцов, то в дальнейшем можно исключить составляющую ковариационной матрицы, зависящую от σ_ε^2 . В последнем случае для планирования испытаний требуется знание $\text{cov}\{v\}$. Для ее получения необходимо проведение специальных испытаний. Так, если D_v не зависит от x (режима испытаний), то для получения оценки D_v достаточно провести испытания образцов (не менее четырех-пяти) при одном режиме. Данные испытаний следует обработать по формулам табл. 2 (первый этап), а полученные оценки $\hat{\varphi}(\beta, x)$ использовать для оценки D_v .

2. Многофакторные модели общего вида процессов изменения определяющего параметра (параллельная схема)

Модель наблюдений	Обработка данных		cov { β }	Показатели плана
	Первый этап	Второй этап		
$\bar{y}_\lambda(t) = [\varphi(\beta, x^{(\lambda)}) + v(x^{(\lambda)})]^T f(t) + \varepsilon(t),$ где $\varphi_i(\beta, x) = \sum_{\mu=1}^{m_i} \beta_{i\mu} \psi_{i\mu}(x),$ $i = 1, 2, \dots, r$	$\hat{\phi}(\beta, x^{(\lambda)}) = G \sum_{j=1}^n \bar{y}_\lambda(t_j) f(t_j),$ $\lambda = 1, 2, \dots, N,$ где $G = \left(\sum_{j=1}^n f(t_j) f^T(t_j) \right)^{-1}$	$\hat{\beta} = \left[\sum_{\lambda=1}^N F_\lambda^T \text{cov}^{-1} \{ \hat{\phi}(\beta, x^{(\lambda)}) \} F_\lambda \right]^{-1} \times$ $\times \sum_{\lambda=1}^N F_\lambda^T \text{cov}^{-1} \{ \hat{\phi}(\beta, x^{(\lambda)}) \} \hat{\phi}(\beta, x^{(\lambda)}),$ где $\hat{\phi}(\beta, x^{(\lambda)}) = \begin{bmatrix} \hat{\phi}_1(\beta, x^{(\lambda)}) \\ \vdots \\ \hat{\phi}_r(\beta, x^{(\lambda)}) \end{bmatrix};$ $F_\lambda = \begin{bmatrix} \psi_{11}(x^{(\lambda)}) \dots \psi_{1m_1}(x^{(\lambda)}) & 0 \\ 0 & 0 \dots \psi_{rm_r}(x^{(\lambda)}) \end{bmatrix};$ $\text{cov} \{ \hat{\phi}(\beta, x^{(\lambda)}) \} = G \sigma_\varepsilon^2 + D_v(x^{(\lambda)})$	$\left(\sum_{\lambda=1}^N F_\lambda^T \times \text{cov}^{-1} \{ \hat{\phi}(\beta, x^{(\lambda)}) \} \times F_\lambda \right)^{-1};$	$x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(N)}$

Примечание. $D_v(x) = E \{ v(x) v^T(x) \}; I_n \sigma_\varepsilon^2 = E \{ \varepsilon \varepsilon^T \}$ (I_n — единичная матрица порядка n); $\varphi(\beta, x) = \begin{bmatrix} \varphi_1(\beta, x) \\ \vdots \\ \varphi_r(\beta, x) \end{bmatrix}.$

При этом

$$D_v \approx \frac{1}{N-1} \sum_{\mu=1}^N \left(\hat{\phi}^{(\mu)}(\beta, x) - \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^N \hat{\phi}^{(\mu)}(\beta, x) \right) \left(\hat{\phi}^{(\mu)}(\beta, x) - \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^N \hat{\phi}^{(\mu)}(\beta, x) \right)^T,$$

где N — число испытываемых образцов, а $\hat{\phi}^{(\mu)}(\beta, x)$ — оценка вектора $\phi(\beta, x)$ для μ -го образца.

Метод обработки данных — двухэтапный, на базе метода взвешенных наименьших квадратов.

На первом этапе для каждого испытываемого объекта $\lambda = 1, 2, \dots, N$ методом наименьших квадратов находятся оценки величин $\phi_1(\beta, x^{(\lambda)})$, $\phi_2(\beta, x^{(\lambda)})$, ..., $\phi_r(\beta, x^{(\lambda)})$. При этом следует решать задачи (см. табл. 1, случай $W = I_N^2 \sigma_\varepsilon^2$ и табл. 2):

$$\min_{\phi(\beta, x^{(\lambda)})} \sum_{j=1}^n (\tilde{y}_\lambda(t_j) - \phi^T(\beta, x^{(\lambda)}) f(t_j))^2, \quad \lambda = 1, 2, \dots, N. \quad (17)$$

Результатом решения задачи (17) для λ -го объекта является вектор-столбец $\hat{\phi}^{(\lambda)} = \hat{\phi}(\beta, x^{(\lambda)})$.

Для ковариационной матрицы оценок $\hat{\phi}_1(\beta, x^{(\lambda)}), \dots, \hat{\phi}_r(\beta, x^{(\lambda)})$ имеем

$$\begin{aligned} \text{cov} \{ \hat{\phi}(\beta, x^{(\lambda)}) \} &= D_v(x^{(\lambda)}) + G \sigma_\varepsilon^2 = \\ &= D_v(x^{(\lambda)}) + \left(\sum_{j=1}^n f(t_j) f^T(t_j) \right)^{-1} \sigma_\varepsilon^2. \end{aligned} \quad (18)$$

В частном случае, когда

$$f(t) = (1 \quad t \quad \dots \quad t^{r-1})^T,$$

а измерения ОП осуществляются через интервалы Δt [т. е. $t_j = (j-1) \Delta t$, $j = 1, 2, \dots, n$], для матрицы G имеем следующее приближенное выражение, справедливое при $n \gg 1$:

$$G \approx \Delta t^{-1} \times \begin{bmatrix} T & T^2/2 & T^r/r \\ T^2/2 & T^3/3 & \dots & T^{r+1}/r + 1 \\ T^r/r & T^{r+1}/r + 1 & \dots & T^{2r}/2r \end{bmatrix}.$$

На втором этапе методом взвешенных наименьших квадратов находим оценки $\hat{\beta}$. При этом решаем задачу (см. табл. 2):

$$\begin{aligned} \min_{\beta} \sum_{\lambda=1}^N (\hat{\phi}(\beta, x^{(\lambda)}) - F_\lambda \beta)^T \times \\ \times \text{cov}^{-1} \{ \hat{\phi}(\beta, x^{(\lambda)}) \} \times \\ \times (\hat{\phi}(\beta, x^{(\lambda)}) - F_\lambda \beta), \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$F_\lambda = \begin{bmatrix} \psi_{11}(x^{(\lambda)}) & \dots & \psi_{1m_1}(x^{(\lambda)}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & 0 & \psi_{21}(x^{(\lambda)}) & \dots & \psi_{2m_2}(x^{(\lambda)}) & 0 \\ & & & & & & \\ 0 & & & & & \psi_{r1}(x^{(\lambda)}) & \dots & \psi_{rm_r}(x^{(\lambda)}) \end{bmatrix}; \quad (20)$$

$$\beta = (\beta_{11} \quad \beta_{1m_1} \quad \beta_{21} \quad \beta_{2m_2} \quad \beta_{r1} \quad \beta_{rm_r})^T.$$

Показателями плана являются режимы $x^{(1)}, \dots, x^{(N)}$ испытаний каждого объекта. Критериями оптимальности плана могут быть: определитель $\text{cov} \{\hat{\beta}\}$ (D -критерий); след $\text{cov} \{\hat{\beta}\}$ (A -критерий); дисперсия оценки ОП объекта в заданный момент t^* при работе в режиме x^* (критерий экстраполяции)

$$\sigma \{g(t^*, x^*)\} = f^T(t^*) \times \\ \times F_* \text{cov} \{\hat{\beta}\} F_*^T f(t^*), \quad (21)$$

где матрица F_* совпадает с F_λ (20) при $x^{(\lambda)} = x^*$.

Математическая модель для вычисления критерия оптимальности плана. Для вычисления указанных выше критериев надо иметь выражение для ковариационной матрицы оценок $\hat{\beta}$ (см. табл. 2):

$$\text{cov} \{\hat{\beta}\} = \\ = \left(\sum_{\lambda=1}^N F_\lambda^T \text{cov}^{-1} \{\hat{\phi}(\beta, x^{(\lambda)})\} F_\lambda \right)^{-1}, \quad (22)$$

где F_λ определяется в (20), а $\text{cov} \{\hat{\phi}(\beta, x^{(\lambda)})\}$ в (18).

Поиск оптимального плана испытаний сводится к решению следующей задачи:

$$\min Q(\text{cov} \{\hat{\beta}\}) \quad (23)$$

при ограничениях $x^{(j)} \in \Omega_x$,

$$j = 1, 2, \dots, N,$$

где $Q(\text{cov} \{\hat{\beta}\})$ — принятый критерий оптимальности плана испытаний, а $\text{cov} \{\hat{\beta}\}$ определяется в (22).

Задача (23) может быть решена аналитически (см. пример 1), с помощью каталогов оптимальных планов или путем численной оптимизации.

Решение можно получить с помощью каталогов оптимальных планов, если: используется A - или D -критерий оптимальности плана;

область Ω_x — k -мерный куб или шар (для кодированных факторов, у которых нижний уровень представлен значением -1 , а верхний $+1$);

все $\phi_i(\beta, x), \dots, \phi_r(\beta, x)$ имеют один и тот же линейный по β вид и отличаются только значениями коэффициентов, т. е.

$$\phi_i(\beta, x) = \sum_{\mu=1}^m \beta_{i\mu} \psi_\mu(x), \quad (24)$$

$$i = 1, 2, \dots, r;$$

ковариационная матрица $\text{cov} \{\hat{\phi}(\beta, x)\}$ — диагональная.

При этом следует в каталогах искать соответственно A - и D -оптимальный точный план из N опытов для модели (24). Если в каталоге имеется точный план для меньшего числа опытов (например, насыщенный оптимальный план), то его можно достроить до требуемого числа опытов, последовательно добавляя точки из спектра непрерывного оптимального плана (если такой план содержится в каталоге) так, чтобы на каждом шаге максимально улучшить критерий. Такие расчеты проводят на ЭВМ, осуществляя на каждом шаге перебор всех точек спектра непрерывного плана. В случае, когда план нельзя ни построить аналитически, ни подобрать с помощью каталогов, задачу (23) следует решать, применяя ЭВМ и методы численной оптимизации. Алгоритмы численного поиска точных оптимальных планов изложены в [47, 52, 77].

Пример 1. Цель испытаний — оценка параметров β модели процесса изменения определяющего параметра объекта вида

$$y(t) = \beta_0 + (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) t. \quad (25)$$

Здесь $r = 2$, $\phi_1(\beta, x) = \beta_0$; $\phi_2(\beta, x) = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$; $f_1(t) \equiv 1$; $f_2(t) = t$.

Способ организации испытаний. Каждый из N объектов испытывается в течение времени t в режиме $x^{(\lambda)}$, $\lambda = 1, 2, \dots, N$.

Область планирования Ω_x : $-1 \leq x_1 \leq 1$; $-1 \leq x_2 \leq 1$.

Значения параметра каждого объекта измеряются в моменты начала и конца испытаний.

Модель наблюдений:

$$\bar{y}_\lambda(t_j) = (\beta_0 + v_0) + (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + v_1) t_j, \quad (26)$$

где v_0, v_1 — случайные величины, характеризующие различия испытуемых объектов. Ковариационная матрица v_0, v_1 :

$$D_v = \begin{pmatrix} \sigma_0^2 & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}.$$

В данном случае имеем $\sigma_0^2 = 0$ (т. е. ошибками измерений пренебрегаем).

Обработка данных. На первом этапе находим $\hat{\phi}_1(\beta, x^{(\lambda)}), \hat{\phi}_2(\beta, x^{(\lambda)}), \lambda = 1, 2, \dots, N$. Ковариационная матрица

$$\text{cov}\{\hat{\phi}(\beta, x^{(\lambda)})\} = D_v.$$

На втором этапе из (19) находим $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$.

В качестве критерия оптимальности плана выберем определитель ковариационной матрицы оценок $\hat{\beta}$ (D -критерий).

Для поиска оптимального плана из табл. 2 запишем

$$\begin{aligned} \text{cov}\{\hat{\beta}\} &= \\ &= \left(\sum_{\lambda=1}^N F_{\lambda}^T \text{cov}^{-1}\{\hat{\phi}(\beta, x^{(\lambda)})\} F_{\lambda} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

где

$$F_{\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1^{(\lambda)} & x_2^{(\lambda)} \end{pmatrix};$$

$$\text{cov}^{-1}\{\hat{\phi}(\beta, x^{(\lambda)})\} = \begin{pmatrix} \sigma_0^{-2} & 0 \\ 0 & \sigma_1^{-2} \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \text{cov}\{\hat{\beta}\} &= \left(\sum_{\lambda=1}^N \begin{pmatrix} \sigma_0^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1^{-2} x_1^{(\lambda)2} & \sigma_1^{-2} x_1^{(\lambda)} x_2^{(\lambda)} \\ 0 & \sigma_1^{-2} x_1^{(\lambda)} x_2^{(\lambda)} & \sigma_1^{-2} x_2^{(\lambda)2} \end{pmatrix} \right)^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} N\sigma_0^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1^{-2} \sum_{\lambda=1}^N x_1^{(\lambda)2} & \sigma_1^{-2} \sum_{\lambda=1}^N x_1^{(\lambda)} x_2^{(\lambda)} \\ 0 & \sigma_1^{-2} \sum_{\lambda=1}^N x_1^{(\lambda)} x_2^{(\lambda)} & \sigma_1^{-2} \sum_{\lambda=1}^N x_2^{(\lambda)2} \end{pmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

Для определителя $\text{cov}\{\hat{\beta}\}$ имеем

$$\begin{aligned} |\text{cov}\{\hat{\beta}\}| &= \frac{\sigma_0^2 \sigma_1^4}{N} \left(\sum_{\lambda=1}^N x_1^{(\lambda)2} \times \right. \\ &\times \left. \sum_{\lambda=1}^N x_2^{(\lambda)2} - \left(\sum_{\lambda=1}^N x_1^{(\lambda)} x_2^{(\lambda)} \right)^2 \right)^{-1} \end{aligned} \quad (27)$$

В данном случае оптимальный план находится из следующих соображений. Из (27) следует, что в случае, когда N — четное число, определитель $\text{cov}\{\hat{\beta}\}$ будет наименьшим, если половину объектов испытывать в режиме $x_1^{(1)} = 1, x_2^{(1)} = 1$ (или $x_1^{(1)} = -1, x_2^{(1)} = -1$), а другую половину в режиме $x_1^{(2)} = -1, x_2^{(2)} = 1$ (или $x_1^{(2)} = 1, x_2^{(2)} = -1$).

Испытания одного образца (последовательная схема): многофакторная модель для скорости изменения ОП.

Целью испытаний является оценка m -мерного вектора коэффициентов β многофакторной модели скорости $v(\beta, x)$ изменения ОП объекта вида

$$v(\beta, x) = \beta^T f(x) = \sum_{i=1}^m \beta_i f_i(x), \quad (28)$$

где $f(x)$ — m -мерный вектор-столбец заданных функций x .

Организация испытаний. Объект последовательно испытывается в режимах $x^{(1)}, \dots, x^{(l)}$ в течение времени $T_1, \dots, T_l$ соответственно. В ходе испытаний через заданные промежу-

ки времени Δt измеряется значение ОП. Режимы $x^{(j)} \in \Omega_x$, где Ω_x — заданная область в пространстве факторов. Общее время испытаний $T = \sum_{j=1}^l T_j$, где T — задано. Число измерений параметра в режиме $x^{(j)}$ $n_j = T_j/\Delta t + 1$.

Модель наблюдений в общем случае имеет вид

$$\tilde{y}(t) = y(t_0) + v(\beta, x)(t - t_0) + \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau + \varepsilon(t), \quad (29)$$

где $e(\tau)$ — случайная составляющая скорости изменения параметра; $\varepsilon(t)$ — случайная погрешность наблюдений; $v(\beta, x)$ — средняя скорость изменения параметра в режиме x .

Примем следующие допущения о свойствах процессов $e(\tau)$ и $\varepsilon(t)$: $e(\tau)$ и $\varepsilon(t)$ — стационарные и взаимно независимые процессы;

математические ожидания $E\{e(\tau)\} = E\{\varepsilon(t)\} = 0$;

корреляционные функции

$$R_e(\tau) = E\{e(t)e(t+\tau)\} = \sigma_e^2 \gamma(\tau); \quad (30)$$

$$R_e(\tau) = 0 \quad \text{при} \quad |\tau| \geq \Delta t.$$

В табл. 3 рассмотрены различные частные случаи модели (29). Выбор конкретного вида модели наблюдений осуществляется исходя из априорных представлений о характере изменения оцениваемого параметра и данных предшествующих испытаний.

Метод обработки данных — двух-этапный. На первом этапе методом взвешенных наименьших квадратов для каждого режима оценивают среднюю скорость изменения параметра (см. табл. 3, первый этап, а)

$$\tilde{v}(\beta, x^{(\mu)}) = \gamma (F_\mu^T W^{-1} F_\mu)^{-1} \times F_\mu^T W^{-1} \tilde{Y}^{(\mu)}, \quad (31)$$

где

$$\tilde{Y}^{(\mu)} = \begin{bmatrix} \tilde{y}^{(\mu)}(t_0) \\ \tilde{y}^{(\mu)}(t_0 + (n_\mu - 1)\Delta t) \end{bmatrix};$$

$$F_\mu = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \Delta t \\ \vdots & \vdots \\ 1 & (n_\mu - 1)\Delta t \end{bmatrix}; \quad (32)$$

γ — вектор-строка $(0, 1)$; W — матрица с элементами

$$w_{ij} = \sigma_e^2 + \sigma_e^2 \left[\int_0^{i\Delta t} (i\Delta t - \tau) r(\tau) d\tau + \int_0^{j\Delta t} (j\Delta t - \tau) r(\tau) d\tau - \int_0^{i\Delta t - j\Delta t} (i\Delta t - j\Delta t - \tau) r(\tau) d\tau \right], \quad (33)$$

где $i, j = 0, 1, \dots, n_\mu - 1$; $i \geq j$.

В частном случае оценка скорости производится по данным двух измерений (момент t_0 и $t_0 + T_\mu$ — см. табл. 3, первый этап, б):

$$\bar{v}(\beta, x^{(\mu)}) = \frac{\tilde{y}^{(\mu)}(t_0 + T_\mu) - \tilde{y}^{(\mu)}(t_0)}{T_\mu}. \quad (34)$$

На втором этапе методом взвешенных наименьших квадратов находят оценки $\hat{\beta}$ (см. табл. 3).

Показатели плана: число различных режимов испытаний l , длительность испытаний в каждом режиме $T_1, \dots, T_l$, характеристики режимов $x^{(1)}, \dots, x^{(l)}$.

Критерии оптимальности плана: А-, D-критерий или критерий экстраполяции. В данном случае критерий экстраполяции имеет вид

$$\sigma\{\theta(\hat{\beta}, x^*)\} = f^T(x^*) \text{cov}\{\hat{\beta}\} f(x^*), \quad (35)$$

где x^* — режим, для которого требуется оценить скорость изменения параметра.

3. Многофакторные модели скорости изменения определяющего параметра объекта

Число объектов N , схема испытаний, модель наблюдений	Обработка данных		$\text{cov} \{\hat{\beta}\}$	Показа- тели плана
	Первый этап	Второй этап		
1. $N = 1$; последовательная схема; модель наблюдений $\tilde{y}(t_j) = y(t_0) + v(\beta, x) \times$ $\times (t_j - t_0) + \int_{t_0}^{t_j} e(\tau) d\tau + \varepsilon(t_j)$	а) $v(\beta, x^{(\mu)}) =$ $= \gamma (F_{\mu}^T W^{-1} F_{\mu})^{-1} F_{\mu}^T W^{-1} \tilde{Y}^{(\mu)},$ где $F_{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \Delta t \\ \vdots & \vdots \\ 1 & (n_{\mu} - 1) \Delta t \end{pmatrix};$ $\tilde{Y}^{(\mu)} = \begin{pmatrix} \tilde{y}^{(\mu)}(t_0) \\ \tilde{y}^{(\mu)}[t_0 + (n_{\mu} - 1) \Delta t] \end{pmatrix};$ γ — вектор-строка $(0 \ 1)$ б) $\tilde{v}(\beta, x^{(\mu)}) =$ $= \frac{\tilde{y}^{(\mu)}(t_0 + T_{\mu}) - \tilde{y}^{(\mu)}(t_0)}{T_{\mu}}$	$\hat{\beta} = \left(\sum_{\mu=1}^l \sigma^{-1} \{ \tilde{v}(x^{(\mu)}, \beta) \} \times \right. \\ \times \left. f(x^{(\mu)}) f^T(x^{(\mu)}) \right)^{-1} \times$ $\times \sum_{\mu=1}^l \sigma^{-1} \{ \tilde{v}(x^{(\mu)}, \beta) \} \times$ $\times f(x^{(\mu)}) \tilde{v}(x^{(\mu)}, \beta),$ где $\sigma \{ \tilde{v}(x^{(\mu)}, \beta) \}$ — элемент c_{22} матрицы $C_{\mu} = (F_{\mu}^T W^{-1} F_{\mu})^{-1};$ $\sigma \{ \tilde{v}(x^{(\mu)}, \beta) \} = \frac{2\sigma_{\varepsilon}^2}{T_{\mu}^2} +$ $+ \frac{2\sigma_l^2}{T_{\mu}^2} \int_0^{T_{\mu}} (T_{\mu} - \tau) r(\tau) d\tau$	$\left(\sum_{\mu=1}^l \sigma^{-1} \{ \tilde{v} \times \right. \\ \times (x^{\mu}, \beta) \} \times$ $\times f(x^{(\mu)}) \times$ $\times f^T(x^{(\mu)}) \left. \right)^{-1}$	$\begin{matrix} x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(l)} \\ T_1 \\ \vdots \\ T_l \end{matrix}$
2. $N = 1$; последовательная схема; модель наблюдений $\tilde{y}(t_j) = y(t_0) + v(\beta, x) \times$	$\tilde{v}(\beta_1 x^{(\mu)}) = (F_{*\mu}^T W^{-1} F_{*\mu})^{-1} \times$ $\times F_{*\mu}^T W^{-1} \tilde{Y}_{*}^{(\mu)}, \text{ где}$ $F_{*\mu} = \begin{bmatrix} \Delta t \\ 2\Delta t \\ \vdots \\ (n_{\mu} - 1) \Delta t \end{bmatrix};$	$\hat{\beta} = \left(\sum_{\mu=1}^l \sigma^{-1} \{ \tilde{v}(\beta, x^{(\mu)}) \} \times \right. \\ \times \left. f(x^{(\mu)}) f^T(x^{(\mu)}) \right)^{-1} \times$	$2\sigma_l^2 \left(\sum_{\mu=1}^l T_{\mu} \times \right.$	$\begin{matrix} x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(l)} \end{matrix}$

$\times (t_j - t_0) + \int_{t_0}^{t_j} e(\tau) d\tau;$ $R_e(\tau) = \sigma_e^2 \delta(\tau)$	$Y_*^\mu =$ $= \begin{bmatrix} \bar{y}^\mu(t_0 + \Delta t) - \bar{y}^\mu(t_0) \\ \bar{y}^\mu(t_0 + (n_\mu - 1)\Delta t) - \\ - \bar{y}^{(\mu)}(t_0) \end{bmatrix};$ $W = 2\sigma_e^2 \Delta t \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n_\mu - 1 \end{bmatrix}$	$\times \sum_{\mu=1}^l \sigma^{-1} \{ \bar{v}(\beta, x^{(\mu)}) \} \times$ $\times f(x^{(\mu)}) \bar{v}(\beta, x^{(\mu)}),$ где $\sigma \{ \bar{v}(\beta, x^{(\mu)}) \} =$ $= \frac{2\sigma_e^2}{T_\mu}$	$\times f(x^{(\mu)}) \times$ $\times f^T(x^{(\mu)})$	T_1 $\vdots$ T_l
3. $N = 1$; последовательная схема; модель наблюдений $\bar{y}(t_j) = y(t_0) +$ $+ v(\beta, x)(t_j - t_0) + \varepsilon(t_j)$	а) $\bar{v}(\beta, x^{(\mu)}) = \gamma (F_\mu^T F_\mu)^{-1} \times$ $\times F_\mu^T \tilde{Y}^{(\mu)},$ где γ — вектор-строка (0 1)	$\sigma \{ \bar{v}(x^{(\mu)}, \beta) \} =$ $= \frac{12\sigma_e^2 \Delta t}{T_\mu^3}$ (при $n_\mu \gg 1$)	$12\sigma_e^2 \Delta t \times$ $\times \left(\sum_{\mu=1}^l T_\mu^3 \times \right.$ $\times f(x^{(\mu)}) \times$ $\times f^T(x^{(\mu)}) \left. \right)^{-1}$	
	б) $\bar{v}(\beta, x^{(\mu)}) =$ $= \frac{\bar{y}^{(\mu)}(t_0 + T_\mu) - \bar{y}^{(\mu)}(t_0)}{T_\mu}$	$\sigma \{ \bar{v}(\beta, x^{(\mu)}) \} =$ $= \frac{2\sigma_e^2}{T_\mu}$	$2\sigma_e^2 \left(\sum_{\mu=1}^l T_\mu^2 \times \right.$ $\times f(x^{(\mu)}) \times$ $\times f^T(x^{(\mu)}) \left. \right)^{-1}$	

Число объектов N , схема испытаний, модель наблюдений	Обработка данных		$\text{cov} \{\beta\}$	Показа- тели плана
	Первый этап	Второй этап		
4. $N > m$; параллельная схема; модель наблюдений $\tilde{y}_i(t_j) = y_i(t_0) +$ $+ [v(\beta, x^{(i)}) + v_i(x^{(i)})] \times$ $\times (t_j - t_0) + \varepsilon_i(t_j)$	$\bar{v}(\beta, x^{(i)}) = \gamma (F^T F)^{-1} F^T \tilde{Y}_i,$ где $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \Delta t \\ \vdots & \vdots \\ 1 & (n-1) \Delta t \end{bmatrix};$ $\tilde{Y}_i = \begin{bmatrix} \tilde{y}_i(t_0) \\ \tilde{y}_i(t_0 + \Delta t) \\ \vdots \\ \tilde{y}_i(t_0 + (n-1) \Delta t) \end{bmatrix};$ γ — вектор-строка (0 1)	$\hat{\beta} = \left(\sum_{i=1}^N \sigma^{-1} \{ \bar{v}(x^{(i)}, \beta) \} \times \right.$ $\times f(x^{(i)}) f^T(x^{(i)}) \Big)^{-1} \times$ $\times \sum_{i=1}^N \sigma^{-1} \{ \bar{v}(x^{(i)}, \beta) \} \times$ $\times f(x^{(i)}) \bar{v}(\beta, x^{(i)});$ $\sigma \{ \bar{v}(x^{(i)}, \beta) \} =$ $= \frac{12\sigma_\varepsilon^2 \Delta t}{T^3} + \sigma_v^2(x^{(i)})$	$\left(\sum_{i=1}^N \sigma^{-1} \times \right.$ $\times \{ \bar{v}(x^{(i)}, \beta) \} \times$ $\times f(x^{(i)}) \times$ $\times f^T(x^{(i)}) \Big)^{-1}$	$x^{(1)}$ $x^{(N)}$

Примечание. T — длительность испытаний; n — число измерений параметра каждого объекта; $\sigma_v^2(x^{(i)})$ — дисперсия $v(x^{(i)})$; σ_ε^2 — дисперсия $\varepsilon_i(t)$; m — размерность вектор-столбца β ; W — матрица $(n_\mu \times n_\mu)$ с элементами w_{ij} ; $r(\tau)$ — нормированная автокорреляционная функция $e(t)$; σ_e^2 — дисперсия $e(t)$; σ_ε^2 — дисперсия $\varepsilon(t)$; n_μ — число измерений параметра в режиме $x^{(\mu)}$; T_μ — длительность испытаний в режиме $x^{(\mu)}$; $T_\mu = (n_\mu - 1) \Delta t$; $\delta(\tau)$ — дельта-функция.

Математическая модель для критерия оптимальности плана. Для вычисления указанных критериев следует определить

$$\text{cov} \{\hat{\beta}\} = \left(\sum_{\mu=1}^l f(x^{(\mu)}) f^T(x^{(\mu)}) \times \right. \\ \left. \times \sigma^{-1} \{v(x^{(\mu)}, \beta)\} \right)^{-1} \quad (36)$$

Поиск оптимального плана испытаний. В общем случае (см. табл. 3, тип 1) для поиска оптимального плана необходимо численными методами определить показатели плана, обеспечивающие экстремальное значение критерия оптимальности.

Для частных моделей наблюдения (см. табл. 3, типы 2 и 3) поиск оптимального плана осуществляется следующим образом.

1. Для частной модели наблюдения (табл. 3, тип 2) оптимальный план содержит точки (режимы) оптимального непрерывного плана для стандартной модели наблюдений, причем длительность испытаний в каждом режиме должна быть выбрана пропорциональной частоте соответствующей точки в непрерывном оптимальном плане. Если используется D - или A -критерий, а область варьирования факторов (в кодированном представлении факторов) имеет вид k -мерного куба или шара, то оптимальный непрерывный план может быть найден в каталогах (см. с. 293 и [69]). В иных случаях для поиска оптимального непрерывного плана следует воспользоваться алгоритмом [47, 52, 77], который необходимо реализовать в виде программы для ЭВМ.

2. Для частной модели наблюдений (см. табл. 3, тип 3) при применении D -критерия используются D -оптимальные насыщенные планы, построенные для стандартной модели наблюдений для случаев:

если длительность всех опытов принята одинаковой и равной T/l , где T — общая длительность испытаний; l — число реализуемых опытов (режимов);

если оптимальный непрерывный план для стандартной модели наблюде-

ний и модели скорости заданного вида совпадает с оптимальным насыщенным (т. е. непрерывный план сосредоточен в m точках с равными весами);

если $l = m$, т. е. число реализуемых режимов испытаний принято равным числу оцениваемых коэффициентов многофакторной модели.

При использовании насыщенных планов длительность всех опытов следует брать одинаковой, т. е.

$$T_1 = T_2 = \dots = T_m = T/m.$$

Насыщенный оптимальный план (при использовании A - или D -критерия) может быть найден в каталоге (см. с. 293 и [69]). При отсутствии в каталоге оптимального насыщенного плана, но при наличии оптимального непрерывного плана близкий к оптимальному насыщенный план можно построить численно с помощью ЭВМ, перебирая всевозможные комбинации точек спектра оптимального непрерывного плана. Наконец, оптимальный непрерывный и оптимальный насыщенный план можно найти с помощью ЭВМ, применяя алгоритмы из [47, 52, 77].

Примечание. Если $v(\beta, x)$ нелинейна по β , то на втором этапе обработка данных с целью оценки β осуществляется с помощью численных процедур оптимизации [3, 51]. Выражение для $\text{cov} \{\hat{\beta}\}$ сохраняет свой вид, однако вектор $f(x^{(\mu)})$ представляется частными производными

$$\frac{\partial v(\beta, x^{(\mu)})}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta^{(n)}}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

взятыми при некоторых априорно известных значениях $\beta^{(n)}$. Оптимальный план в общем случае является локальным, т. е. зависящим от значений $\beta^{(n)}$.

Пример 2. Цель испытаний — оценка коэффициентов β многофакторной модели скорости изменения определяющего параметра вида

$$v(\beta, x) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 x_2 + \\ + \beta_4 x_1^2 + \beta_5 x_2^2. \quad (37)$$

Организация испытаний: последовательная схема (T задано);

$$x_{1,2} \min \leq x_{1,2} \leq x_{1,2} \max.$$

Модель наблюдений — типа 2 (см. табл. 3), т. е. скорость имеет «быструю» случайную составляющую, а ошибки наблюдений отсутствуют.

Метод обработки: для каждого режима скорость оценивается по формуле (30).

Показатели плана: l (число различных режимов); $x^{(1)}, \dots, x^{(l)}$; $T_1, \dots, T_l$ (при $\sum_{j=1}^l T_j = T$).

Критерий оптимальности плана — $|\text{cov} \{\hat{\beta}\}|$ (D -критерий).

Поиск плана в данном случае сводится к поиску в каталоге планов, приведенном ниже, непрерывного D -оптимального плана:

j	$x_1^{(j)}$	$x_2^{(j)}$	T_j/T
1	$x_1 \max$	$x_2 \max$	0,1458
2	$x_1 \min$	$x_2 \max$	0,1458
3	$x_1 \max$	$x_2 \min$	0,1458
4	$x_1 \min$	$x_2 \min$	0,1458
5	$x_1 \max$	$1/2 (x_2 \min + x_2 \max)$	0,08015
6	$x_1 \min$	$1/2 (x_2 \min + x_2 \max)$	0,08015
7	$1/2 (x_1 \min + x_1 \max)$	$x_2 \max$	0,08015
8	$1/2 (x_1 \min + x_1 \max)$	$x_2 \min$	0,08015
9	$1/2 (x_1 \min + x_1 \max)$	$1/2 (x_2 \max + x_2 \min)$	0,0962

Пример 3. Цель испытаний — оценка параметров β многофакторной модели скорости изменения ОП вида

$$v(\beta, x) = \beta_0 e^{\beta_1 x}. \quad (38)$$

Организация испытаний: последовательная схема (T задано); $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$; измерения параметра — через интервал Δt .

Модель наблюдений — типа 3 (см. табл. 3) (случайная составляющая y скорости отсутствует).

Метод обработки: на первом этапе — метод наименьших квадратов, на втором — метод взвешенных наименьших квадратов (см. табл. 3).

Показатели плана: l ; $x^{(1)}, \dots, x^{(l)}$; $T_1, \dots, T_l$ (при $\sum_{j=1}^l T_j = T$).

Критерий оптимальности — $|\text{cov} \{\hat{\beta}\}|$ (D -критерий).

Поиск плана. Непрерывный D -оптимальный план для модели (38) при стандартной модели наблюдений является насыщенным и концентрируется с равными весами в точках $x^{(1)} = x_{\max}$; $x^{(2)} = x_{\max} - \frac{1}{\beta_1}$. По-

этому решением задачи планирования является (см. с. 293): $l = 2$; $x^{(1)} = x_{\max}$; $x^{(2)} = x_{\max} - 1/\beta_1^{(n)}$; $T_1 = T_2 = T/2$.

Пример 4. Цель испытаний — оценка параметров β_0, β_1 и β_2 многофакторной модели, связывающей скорость изнашивания изделия с факторами x_1 и x_2 ;

$$v(\beta, x) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2. \quad (39)$$

Организация испытаний: испытывается один образец изделия (последовательная схема); общая длительность испытаний T . Значения факторов, характеризующих режим испытаний, $-1 \leq x_1 \leq 1$; $-1 \leq x_2 \leq 1$.

Длительность испытаний во всех режимах одинаковая. В ходе испытаний через интервалы Δt измеряется величина переменной y , характеризующей износ изделия.

Модель наблюдений — типа 3 (см. табл. 3).

Метод обработки данных — согласно табл. 3.

Показатели плана: l ; $x^{(1)}, \dots, x^{(l)}$.

Критерий оптимальности — определитель $\text{cov} \{\hat{\beta}\}$ (D -критерий).

Математическая модель для $|\text{cov} \{\hat{\beta}\}|$ согласно табл. 3 имеет вид

$$|\text{cov} \{\hat{\beta}\}| = (12 \Delta t \sigma_y^2)^3 \times \left| \sum_{\mu=1}^l (T/l)^3 f(x^{(\mu)}) f^T(x^{(\mu)}) \right|^{-1}. \quad (40)$$

где

$$f(x^{(\mu)}) = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1^{(\mu)} \\ x_2^{(\mu)} \end{pmatrix}.$$

Поиск плана. Оптимальный план (см. с. 293) совпадает с насыщенным D -оптимальным планом для стандартной модели наблюдений. Построим приближенно оптимальный насыщенный D -оптимальный план из точек спектра D -оптимального непрерывного плана. Непрерывный D -оптимальный план для модели (39) включает четыре точки: $x_1^{(1)} = 1$, $x_2^{(1)} = 1$; $x_1^{(2)} = -1$; $x_2^{(2)} = 1$, $x_1^{(3)} = 1$, $x_2^{(3)} = -1$; $x_1^{(4)} = -1$, $x_2^{(4)} = -1$. Оптимальный насыщенный план включает любые три из четырех указанных точек (см. табл. 1), так как любая комбинация точек приводит к одной и той же величине определителя ковариационной матрицы оценок коэффициентов при стандартной модели наблюдений:

$$\left| \sum_{j=1}^3 f(x^{(j)}) f^T(x^{(j)}) \right|^{-1} = 1/16 \quad (\text{см. табл. 1}).$$

В частности, можно принять такой план:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= 1, & x_2^{(1)} &= 1; \\ x_1^{(2)} &= -1, & x_2^{(2)} &= 1; \\ x_1^{(3)} &= 1, & x_2^{(3)} &= -1. \end{aligned}$$

Отметим, что при принятом плане определитель ковариационной матрицы оценок коэффициентов многофакторной модели скорости изнашивания

$$|\text{cov}\{\hat{\beta}\}| = \left(\frac{12\sigma_\varepsilon^2 \Delta t}{T^3} \right)^3 \cdot 1230.$$

Если на учитывать особенностей данной задачи и принять D -оптимальный план, соответствующий стандартной модели наблюдений (этот план сосредоточен в точках спектра приведенного выше непрерывного плана), то величина определителя ковариационной матрицы составит

$$\left(\frac{12\sigma_\varepsilon^2 \Delta t}{T^3} \right)^3 \cdot 4096.$$

Это означает, что найденный оптимальный план позволяет более чем в 3 раза повысить точность оценок коэффициентов многофакторной модели (в смысле величины определителя ковариационной матрицы оценок).

Испытания совокупности различающихся образцов объекта (параллельная схема); многофакторная модель для скорости изменения ОП.

Целью испытаний является оценка m -мерного вектора коэффициентов β многофакторной модели для скорости $v(\beta, x)$ изменения ОП объекта вида

$$v(\beta, x) = \beta^T f(x). \quad (41)$$

Организация испытаний; одновременно испытывается N объектов в течение времени T ; режим испытаний j -го объекта $x^{(j)}$, где $x^{(j)} \in \Omega_x$; Ω_x — заданная область режимов испытаний. Через интервалы Δt измеряются значения ОП каждого испытываемого объекта.

Модель наблюдений

$$\begin{aligned} \tilde{y}_i(t) &= y_i(t_0) + [v(\beta, x) + v_i(x)] \times \\ &\times (t - t_0) + \varepsilon_i(t), \end{aligned} \quad (42)$$

где $v_i(x)$ — отклонение скорости изменения ОП i -го объекта в режиме x от средней скорости по множеству объектов; $\varepsilon_i(t)$ — погрешность измерения ОП;

$$E\{\varepsilon_i(t)\} = 0; \quad \sigma\{\varepsilon_i(t)\} = \sigma_\varepsilon^2;$$

$$E\{\varepsilon_i(t) \varepsilon_i(t + \Delta t)\} = 0.$$

Метод обработки; на первом этапе — метод наименьших квадратов (см. табл. 3); на втором — метод взвешенных наименьших квадратов.

Показатели плана; $x^{(1)}, \dots, x^{(N)}$.

Критерии оптимальности плана; A -, D -критерий или критерий экстраполяции.

Математическая модель для критерия оптимального плана. Все назван-

ные критерии зависят от ковариационной матрицы оценок $\hat{\beta}$, выражение для которой имеет вид

$$\text{cov} \{ \hat{\beta} \} = \left(\sum_{i=1}^N \sigma^{-1} \{ \bar{v} (x^{(i)}, \beta) \} \times \right. \\ \left. \times f (x^{(i)}) f^T (x^{(i)}) \right)^{-1},$$

где

$$\sigma \{ \bar{v} (x^{(i)}, \beta) \} = \frac{12 \sigma_v^2 \Delta t}{T^3} + \sigma_v^2 (x^{(i)}).$$

Поиск плана: задача сводится к нахождению точного оптимального плана, содержащего N опытов:

$$\min_{x^{(1)}, \dots, x^{(N)}} Q (\text{cov} \{ \hat{\beta} \}); \quad x^{(j)} \in \Omega_x, \\ j = 1, 2, \dots, N, \tag{43}$$

где $Q (\text{cov} \{ \hat{\beta} \})$ — критерий оптимальности плана.

Если σ_v^2 не зависит от x , то для нахождения A - или D -оптимального плана можно найти в соответствующих каталогах непрерывные и насыщенные оптимальные планы и достроить насыщенный план, последовательно добавляя к нему точки из спектра непрерывного плана (так, чтобы на каждом шаге добавляемая точка максимально улучшила критерий оптимальности плана). В общем случае для поиска решения задачи следует воспользоваться ЭВМ и алгоритмами построения точных оптимальных планов, описанными в [47, 77].

Пример 5. Цель испытаний — оценка коэффициентов β многофакторной модели для скорости изменения ОП вида $v (\beta, x) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1^2 + \beta_4 x_2^2 + \beta_5 x_1 x_2$. (44)

Организация испытаний: параллельная схема; область Ω_x задается в диапазоне

$$-1 \leq x_i \leq 1; \quad i = 1, 2.$$

Измерения осуществляются для каждого объекта через интервалы Δt . Число объектов $N = 10$. Длительность испытаний T .

Модель наблюдений

$$\tilde{y}_i (t_j) = y_i (t_0) + [v (\beta, x^{(i)}) + v_i] \times \\ \times (t_j - t_0) + \varepsilon (t_j).$$

Метод обработки — метод наименьших квадратов на обоих этапах. При этом на втором этапе дисперсия

$$\sigma \{ \bar{v} (x^{(i)}, \beta) \} = \frac{12 \sigma_v^2 \Delta t}{T^3} + \sigma_v^2;$$

для всех объектов значение $\sigma \{ \bar{v} (x^{(i)}, \beta) \}$ одинаковые, поэтому в выражении для $\hat{\beta}$ его можно не учитывать.

Показатели плана: $x^{(1)}, \dots, x^{(N)}$.
Критерий оптимальности: D -критерий.

Поиск плана. В данном случае требуется построить точный D -оптимальный план для модели (44) при стандартной модели наблюдений. В каталогах [69] такой план отсутствует. Поэтому применяем следующую процедуру.

Из каталога, приведенного ниже, находим непрерывный D -оптимальный план:

j	$x_1^{(j)}$	$x_2^{(j)}$	$p_{(j)}$
1	+1	+1	0,1458
2	−1	+1	0,1458
3	+1	−1	0,1458
4	−1	−1	0,1458
5	1	0	0,08015
6	−1	0	0,08015
7	0	−1	0,08015
8	0	+1	0,08015
9	0	0	0,09062

Строим насыщенный приближенно D -оптимальный план, используя точки спектра непрерывного плана:

j	$x_1^{(j)}$	$x_2^{(j)}$
1	1	1
2	−1	1
3	1	−1
4	−1	−1
5	−1	0
6	0	0

Последовательно добавляем к полученному насыщенному плану точки до $N = 10$:

j	$x_1^{(j)}$	$x_2^{(j)}$
7	1	0
8	0	1
9	-1	0
10	1	1

Отметим, что в данном примере можно было бы воспользоваться и насыщенным D -оптимальным планом из каталога, приведенного ниже, добавляя к нему точки спектра непрерывного плана. В обоих случаях полученные планы будут лишь приближенно оптимальными.

ОПТИМАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИСПЫТАНИЙ ПРИ ПОСТРОЕНИИ МНОГОФАКТОРНЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ПОКАЗАТЕЛЯ НАДЕЖНОСТИ (ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАРАБОТКИ ДО ОТКАЗА)

Цель испытаний — построение многофакторной модели для показателя надежности объекта (параметра распределения наработки до отказа) вида

$$y(\beta, x) = \beta^T f(x) \quad (45)$$

и оценка показателя надежности по полученной модели в заданном рабочем режиме x_p .

Организация испытаний. Одновременно испытываются N объектов на l испытательных установках (параллельная схема). На каждой j -й установке все объекты испытываются в одном и том же режиме $x^{(j)} \in \Omega_x$, где Ω_x — заданная область режимов. Фиксируются наработки испытуемых объектов до отказа. Испытания на каждой установке прекращаются либо при отказе заданного числа r объектов, либо при достижении заданной наработки $T_{\max}$ [т. е. реализуются планы типа (N, U, r) или (N, U, T)]. Испытания, за-

вершаемые до отказа всех испытуемых объектов, называют усеченными.

Модель наблюдений. Наблюдается случайная величина T (наработка до отказа), вид плотности распределения вероятностей которой $p(t, y(\beta, x))$ известен. Показатель надежности является параметром распределения наработки до отказа. Погрешностями измерения наработки пренебрегаем.

Метод обработки данных. На первом этапе показатель надежности для каждого из реализованных режимов испытаний $x^{(1)}, \dots, x^{(l)}$ оценивается методом максимального правдоподобия. На втором этапе методом взвешенных наименьших квадратов отыскиваются оценки коэффициентов β .

Расчетные выражения для максимально правдоподобных оценок параметров распределения наработки до отказа при различных видах распределения наработки и типах планов испытаний приведены в гл. 8. В табл. 4 даны выражения для элементов диагональной матрицы W , используемой при вычислении оценок $\hat{\beta}$ на втором этапе и при планировании испытаний, для экспоненциального, нормального распределения (при построении модели для средней наработки), а также для распределения Вейбулла (при построении модели для параметра сдвига). Расчет элементов W для других распределений можно осуществить на основе общих выражений для W , приведенных в [41].

Второй этап обработки заключается в вычислении оценок методом взвешенных наименьших квадратов:

$$\hat{\beta} = (F^T W^{-1} F)^{-1} F^T W^{-1} \tilde{Y}, \quad (46)$$

где

$$F = \begin{pmatrix} f_1(x^{(1)}) & f_m(x^{(1)}) \\ \vdots & \vdots \\ f_1(x^{(l)}) & f_m(x^{(l)}) \end{pmatrix};$$

$\tilde{Y}$ — вектор-столбец оценок показателя надежности для l реализованных режимов испытаний.

Показатели плана испытаний: $x^{(1)}, \dots, x^{(l)}$ и $N_1, \dots, N_l$ при $\sum_{j=1}^l N_j = N$

4. Элементы матрицы W при вычислении коэффициентов и планировании испытаний при построении моделей для параметров распределения наработки до отказа

Распределение	План испытаний	Элементы матрицы W	Примечание
Экспоненциальное $p(t, \lambda(\beta, x)) = \lambda(\beta, x) \exp(-t\lambda(\beta, x))$	(NUN) (NUT) (NUR)	$w_i = \lambda^2(\beta, x^{(i)})/N_i$ $w_i = \lambda^2(\beta, x^{(i)})/[N_i(1 - e^{-\lambda(\beta, x^{(i)})T})]$ $w_i = \lambda^2(\beta, x^{(i)})/r_i$	N_i — число образцов, испытываемых в режиме $x^{(i)}$; r_i — число наблюдений в режиме $x^{(i)}$ до прекращения испытаний; T — заданная длительность испытаний
Вейбулла—Гнеденко $p(t, m(\beta, x)) = \frac{\alpha}{\sigma} \left(\frac{t - m(\beta, x)}{\sigma} \right)^{\alpha-1} \times \exp \left[- \left(\frac{t - m(\beta, x)}{\sigma} \right)^\alpha \right]$	(NUN) (NUT) (NUR)	$w_i = \sigma^2/N_i \left\{ (\alpha-1) \Gamma \left(\frac{\alpha-2}{\alpha} \right) + \alpha \Gamma \left(\frac{2\alpha-2}{\alpha} \right) \right\}^{-1}$ $w_i = \frac{\sigma^2}{N_i} \left\{ \left[(\alpha-1) \Gamma \left(\frac{\alpha-2}{\alpha} \right) + \alpha \Gamma \left(\frac{2\alpha-2}{\alpha} \right) \right] R(z) + \alpha(\alpha-1) \times \right. \\ \left. \times (1 - R(z)) z^{\frac{\alpha-2}{\alpha}-1} \right\}^{-1}$ $w_i = \frac{\sigma^2}{N_i} \left\{ \frac{r_i}{N_i} \left[(\alpha-1) \Gamma \left(\frac{\alpha-2}{\alpha} \right) + \alpha \Gamma \left(\frac{2\alpha-2}{\alpha} \right) \right] + \alpha^2(\alpha-1)(N_i - r_i)/N_i \sigma \sum_{v=r_i}^{N_i} C_{N_i}^v \sum_{l=0}^v (-1)^{v-l-1} C_v^l \times \right. \\ \left. (N_i - l)^{\frac{3-2\alpha}{\alpha}} \Gamma \left(\frac{3\alpha-3}{\alpha} \right) \right\}^{-1}$	Γ — гамма-функция; $z = \left(\frac{T - m(\beta, x^{(i)})}{\sigma} \right)^\alpha;$ $R(z) = 1 - \exp(-z);$ $C_a^b = \frac{a!}{b!(a-b)!}$

Продолжение табл. 4

Распределение	План испытаний	Элементы матрицы	Примечание
Нормальное $p(t, m(\beta, x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \times \exp \left[-\frac{(t - m(\beta, x))^2}{2\sigma^2} \right]$	(NUN) (NUT)	$w_i = \sigma^2/N_i;$ $w_i = \frac{\sigma^2}{N_i} \left\{ 1 - (0,5 + \Phi(s)) + (0,5 + \Phi(s)) \times \right. \\ \times \left. \left[\frac{sp(s)}{0,5 + \Phi(s)} + \frac{p^2(s)}{(0,5 + \Phi(s))^2} \right]^{-1} \right\};$ $w_i = \frac{\sigma^2}{N_i} \left\{ 1 - (0,5 + \Phi(s^*)) + (0,5 + \Phi(s^*)) \times \right. \\ \times \left. \left[\frac{s^*p(s^*)}{0,5 + \Phi(s^*)} + \frac{p^2(s^*)}{(0,5 + \Phi(s^*))^2} \right]^{-1} \right\}$	$s = \frac{m(\beta, x^{(i)}) - T}{\sigma};$ $p(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-s^2/2};$ $\Phi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^s e^{-u^2/2} du;$ $\Phi(s^*) = 0,5 - \frac{r_i}{N_i}$

(N — общее число испытуемых объектов).

Критерии оптимальности плана. Если модель используется для предсказания значения показателя надежности в режиме x_p , то целесообразно применять критерий экстраполяции

$$\sigma\{g(x_p, \hat{\beta})\} = f^T(x_p) \text{cov}\{\hat{\beta}\} f(x_p). \quad (47)$$

В других случаях можно применять A - и D -критерии.

Математическая модель для критерия оптимальности определяется выражением для ковариационной матрицы коэффициентов $\hat{\beta}$:

$$\text{cov}\{\hat{\beta}\} = (F^T W^{-1} F)^{-1}. \quad (48)$$

Задача планирования:

$$\min_{x^{(1)}, \dots, x^{(l)}; N_1, \dots, N_l} Q(\text{cov}\{\hat{\beta}\}) \text{ при}$$

$$\sum_{j=1}^l N_j = N; \quad x^{(j)} \in \Omega_x, \quad (49)$$

где $Q(\text{cov}\{\hat{\beta}\})$ — выбранный критерий оптимальности плана.

Поиск оптимального плана требует, как правило, применения численных методов оптимизации и средств вычислительной техники.

Приблизительно построить план можно с помощью следующей процедуры: найти точки спектра оптимального непрерывного плана для модели (45) и в случае, когда дисперсия ошибок наблюдений характеризуется выражениями из табл. 4 (с помощью алгоритмов, описанных в [47, 77]); пользуясь спектром непрерывного плана, построить насыщенный оптимальный план; последовательно достраивать план, выбирая точки из спектра непрерывного плана до тех пор, пока либо число точек не станет больше N , либо число различных режимов не превзойдет l .

Примечания: 1. Если модель $y(\beta, x)$ нелинейна по β , то матрица F имеет элементами частные производные по β от $y(\beta, x)$, т. е.

$$f_i(x^{(j)}) = \left. \frac{\partial y(\beta, x^{(j)})}{\partial \beta_i} \right|_{\beta^{(n)}}$$

Частные производные рассчитываются в точке $\beta^{(H)}$ априорных значений коэффициентов модели. Оптимальные планы испытаний в случае нелинейных моделей находятся численным путем. Эти планы являются локально-оптимальными, т. е. в общем случае они изменяются при изменении $\beta^{(H)}$.

2. В случае усеченных испытаний для планирования необходимо знание априорных значений коэффициентов $\beta^{(H)}$. Поэтому усеченные планы всегда локально-оптимальные (если, конечно, усечение сказывается на дисперсиях оценок показателей надежности).

Пример 6.

Цель испытаний — оценка коэффициентов зависимости, связывающей интенсивность отказов объекта с показателями режима испытаний x_1 и x_2 , и прогнозирование интенсивности отказов для рабочего режима x_p .

Вид модели

$$\lambda(\beta, x) = \beta_0 x_1^{\beta_1} e^{-\beta_2/x_2}. \quad (50)$$

Интенсивность отказов во времени не изменяется.

Организация испытаний. Число испытываемых образцов $N = 80$. Все образцы испытываются одновременно на $l = 4$ установках, причем на первой установке N_1 образцов испытываются в режиме $x^{(1)}$, на второй — N_2 образцов в режиме $x^{(2)}$ и т. д.

Режим характеризуется двумя факторами x_1 и x_2 . Область возможных режимов испытаний определяется неравенствами:

$$\begin{aligned} 1 &\leq x_1 \leq 2; \\ 343 &\leq x_2 \leq 358. \end{aligned}$$

Испытания на каждой установке проводятся до отказа всех образцов.

Модель наблюдений. В режиме x наблюдаемая величина T подчинена экспоненциальному закону распределения с плотностью

$$p(t, \lambda(\beta, x)) = \lambda(\beta, x) \times \exp\{-t\lambda(\beta, x)\}. \quad (51)$$

Метод обработки данных. На первом этапе методом максимального правдоподобия находятся оценки $\bar{\lambda}(\beta, x^{(i)})$, $i = 1, 2, 3, 4$. При этом

$$\bar{\lambda}(\beta, x^{(i)}) = \frac{N_i}{\sum_{j=1}^4 t_j^{(i)}}, \quad (52)$$

где $t_j^{(i)}$ — наработка до отказа i -го объекта, испытываемого в режиме $x^{(i)}$.

Для дисперсии оценки имеем (см. табл. 4)

$$\sigma\{\bar{\lambda}(\beta, x^{(i)})\} = \lambda^2(\beta, x^{(i)})/N_i. \quad (53)$$

На втором этапе находим оценки $\hat{\beta}$, решая задачу

$$\min_{\beta} \sum_{i=1}^4 \frac{N_i}{\lambda^2(\beta, x^{(i)})} \left(\bar{\lambda}(\beta, x^{(i)}) - \beta_0 x_1^{(i)\beta_1} e^{-\beta_2/x_2^{(i)}} \right)^2. \quad (54)$$

Решение (54) требует применения поисковых алгоритмов оптимизации [52].

Показатели плана испытаний: $x^{(1)}, \dots, x^{(4)}; N_1, \dots, N_4$ при $\sum_{j=1}^4 N_j = N$.

Критерий оптимальности плана: дисперсия оценки интенсивности отказов в рабочем режиме $x_{1p} = 0,1; x_{2p} = 298$.

Математическая модель для критерия оптимальности. Находим

$$F = \begin{bmatrix} x_1^{(1)\beta_1} e^{-\beta_2/x_2^{(1)}} & \beta_0 x_1^{(1)\beta_1} \ln x_1^{(1)} e^{-\beta_2/x_2^{(1)}} & \beta_0 x_1^{(1)\beta_1} e^{-\beta_2/x_2^{(1)}} (-\beta_2/x_2^{(1)2}) \\ x_1^{(2)\beta_1} e^{-\beta_2/x_2^{(2)}} & \beta_0 x_1^{(2)\beta_1} \ln x_1^{(2)} e^{-\beta_2/x_2^{(2)}} & \beta_0 x_1^{(2)\beta_1} e^{-\beta_2/x_2^{(2)}} (-\beta_2/x_2^{(2)2}) \\ x_1^{(3)\beta_1} e^{-\beta_2/x_2^{(3)}} & \beta_0 x_1^{(3)\beta_1} \ln x_1^{(3)} e^{-\beta_2/x_2^{(3)}} & \beta_0 x_1^{(3)\beta_1} e^{-\beta_2/x_2^{(3)}} (-\beta_2/x_2^{(3)2}) \\ x_1^{(4)\beta_1} e^{-\beta_2/x_2^{(4)}} & \beta_0 x_1^{(4)\beta_1} \ln x_1^{(4)} e^{-\beta_2/x_2^{(4)}} & \beta_0 x_1^{(4)\beta_1} e^{-\beta_2/x_2^{(4)}} (-\beta_2/x_2^{(4)2}) \end{bmatrix}. \quad (55)$$

Из табл. 4

$$W = \begin{bmatrix} \frac{\lambda^2(\beta, x^{(1)})}{N_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda^2(\beta, x^{(2)})}{N_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda^2(\beta, x^{(3)})}{N_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda^2(\beta, x^{(4)})}{N_4} \end{bmatrix}.$$

(56)

Ковариационная матрица $\text{cov} \{ \hat{\beta} \}$ определяется согласно (48).

Дисперсия оценки $\hat{\lambda}(\hat{\beta}, x_p)$ находится по (47), где

$$f(x_p) = \begin{bmatrix} x_{1p}^{\beta_1} e^{-\beta_2/x_{2p}} \\ \beta_0 x_{1p}^{\beta_1} \ln x_{1p} e^{-\beta_2/x_{2p}} \\ \beta_0 x_{1p}^{\beta_1} e^{-\beta_2/x_{2p}} (-\beta_2/x_{2p}^2) \end{bmatrix}.$$

(57)

Поиск оптимального плана. В данном случае план зависит от неизвестных величин $\beta_0, \beta_1, \beta_2$. Найдем план при следующих значениях коэффициентов модели; $\beta_0^{(H)} = 0,2$; $\beta_1^{(H)} = 0,975$; $\beta_2^{(H)} = 3180$.

Численно, пользуясь алгоритмами из [52, 77], находим непрерывный оптимальный план при дисперсии погрешности наблюдений $w(x) = \lambda^2(\beta^{(H)}, x)$:

j	$x_1^{(j)}$	$x_2^{(j)}$	p_j
1	1	343	0,5
2	1,8	358	0,25
3	2	358	0,25

В данном случае непрерывный план является насыщенным, поэтому для поиска решения следует разделить образцы по установкам, пропорционально частотам p_j . Оптимальный план

j	$x_1^{(j)}$	$x_2^{(j)}$	N_j
1	1	343	40
2	1,8	358	20
3	2	358	20

При отсутствии априорных данных о коэффициентах модели следует применять подходы последовательного планирования.

КАТАЛОГ

ОПТИМАЛЬНЫХ ПЛАНОВ

МНОГОФАКТОРНЫХ ИСПЫТАНИЙ

В каталоге приведены A - и D -оптимальные непрерывные и насыщенные планы для следующих случаев.

1. Модель наблюдений — стандартная, однооткликковая: наблюдаемая величина есть сумма линейной комбинации заданных функций от факторов (в данном случае — степенных функций) и случайной погрешности, имеющей нулевое математическое ожидание и дисперсию, не зависящую от значений факторов.

2. Область допустимых режимов испытаний в k -мерном пространстве факторов — куб или шар. Соответственно допустимые режимы испытаний должны удовлетворять условиям:

для куба $-1 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, k;$

для шара $\sum_{i=1}^k x_i^2 \leq 1.$

5. Непрерывные оптимальные планы на отрезке

Критерий опти- маль- ности	<i>q</i>	<i>N</i>	$\frac{x^{(1)}}{p_1}$	$\frac{x^{(2)}}{p_2}$	$\frac{x^{(3)}}{p_3}$	$\frac{x^{(4)}}{p_4}$	$\frac{x^{(5)}}{p_5}$	$\frac{x^{(6)}}{p_6}$	$\frac{x^{(7)}}{p_7}$	$\frac{x^{(8)}}{p_8}$
D	2	3	$\frac{-1,0}{1/3}$	$\frac{0}{1/3}$	$\frac{1,0}{1/3}$	—	—	—	—	—
	3	4	$\frac{-1,0}{1/4}$	$\frac{-0,447}{1/4}$	$\frac{-0,447}{1/4}$	$\frac{1,0}{1/4}$	—	—		
	4	5	$\frac{-1,0}{1/5}$	$\frac{-0,655}{1/5}$	$\frac{0,0}{1/5}$	$\frac{0,655}{1/5}$	$\frac{1,0}{1/5}$	—		
	5	6	$\frac{-1,0}{1/6}$	$\frac{-0,765}{1/6}$	$\frac{-0,285}{1/6}$	$\frac{0,285}{1/6}$	$\frac{0,765}{1/6}$	$\frac{1,0}{1/6}$	—	—
	6	7	$\frac{-1,0}{1/7}$	$\frac{-0,830}{1/7}$	$\frac{-0,463}{1/7}$	$\frac{0}{1/7}$	$\frac{0,463}{1/7}$	$\frac{0,830}{1/7}$	$\frac{1,0}{1/7}$	—
	7	8	$\frac{-1,0}{1/8}$	$\frac{-0,872}{1/8}$	$\frac{-0,592}{1/8}$	$\frac{-0,209}{1/8}$	$\frac{0,209}{1/8}$	$\frac{0,592}{1/8}$	$\frac{0,872}{1/8}$	$\frac{1,0}{1/8}$
A	2	3	$\frac{-1,0}{0,25}$	$\frac{0}{0,5}$	$\frac{1,0}{0,25}$	—	—	—	—	—
	3	4	$\frac{-1,0}{0,152}$	$\frac{-0,468}{0,348}$	$\frac{0,468}{0,348}$	$\frac{1,0}{0,152}$	—	—	—	—
	4	5	$\frac{-1,0}{0,107}$	$\frac{-0,683}{0,25}$	$\frac{0}{0,286}$	$\frac{0,683}{0,25}$	$\frac{1,0}{0,107}$	—	—	—

Здесь через -1 и $+1$ обозначены соответственно минимальные и максимальные значения факторов.

3. Зависимость отклика от факторов (модель объекта) имеет вид:
степенной функции порядка q , если $k = 1$ (т. е. модель однофакторная, область допустимых режимов — отрезок);
линейной функции от факторов, т. е.
 $y(x) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k$;

полной квадратичной функции от факторов, т. е.
 $y(x) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k +$
 $+ \beta_{11} x_1^2 + \dots + \beta_{kk} x_k^2 + \beta_{12} x_1 x_2 +$
 $+ \dots + \beta_{k-1, k} x_{k-1} x_k$.

Планы для построения моделей других типов приведены в [69].

6. Насыщенные оптимальные планы на отрезке

Критерий оптимальности	q	N	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$	$x^{(4)}$	$x^{(5)}$
A	2	3	—1	0	1	—	—
	3	4	—1	—0,494	0,494	1	—
	4	5	—1	—0,707	0	0,707	1
D	Совпадают с непрерывным D-оптимальным планом						

Оптимальные планы на отрезке (степенные модели при $k = 1$). Модель имеет вид

$$y(x) = \beta_0 + \beta_1x + \beta_2x^2 + \beta_qx^q.$$

Непрерывные оптимальные планы. Планы приведены в табл. 5, где q — степень полинома; N — число точек в плане; $x^{(j)}$ — координата j -й точки; p_j — вес j -й точки.

Насыщенные оптимальные планы приведены в табл. 6.

Оптимальные планы на кубе. Линейные по факторам модели. Модель имеет вид

$$y(x) = \beta_0 + \beta_1x_1 + \dots + \beta_kx_k.$$

Непрерывные A- и D-оптимальные планы для линейной по факторам модели содержат с равными весами все (полный двухуровневый факторный план) или часть (дробный двухуровневый факторный план) точек, являющихся вершинами куба, ограничивающего область допустимых режимов. При этом факторы в плане принимают значения ± 1 . Полный факторный план, например, для $k = 3$ имеет следующий вид:

j	$x_1^{(j)}$	$x_2^{(j)}$	$x_3^{(j)}$
1	+1	+1	+1
2	—1	+1	+1
3	+1	—1	+1

4	—1	—1	+1
5	+1	+1	—1
6	—1	+1	—1
7	+1	—1	—1
8	—1	—1	—1

Число точек в полном факторном плане $N = 2^k$.

Дробный факторный план с $N = 2^{k-p}$ строится следующим образом. Для $(k - p)$ основных факторов выбирается полный факторный план. Каждый из оставшихся p факторов принимает значения, равные произведению любого числа (не менее двух) основных факторов. Например, дробный факторный план 2^{5-2} можно построить следующим образом:

j	Основные факторы			$x_4^{(j)} = x_1^{(j)}x_2^{(j)}$	$x_5^{(j)} = x_1^{(j)}x_2^{(j)}x_3^{(j)}$
	$x_1^{(j)}$	$x_2^{(j)}$	$x_3^{(j)}$		
1	+1	1	1	1	1
2	—1	1	1	—1	—1
3	+1	—1	1	—1	—1
4	—1	—1	1	1	1
5	+1	+1	—1	1	—1
6	—1	+1	—1	—1	1
7	+1	—1	—1	—1	1
8	—1	—1	—1	+1	—1
Полный факторный план 2^3					

7. Непрерывные оптимальные планы для квадратичных моделей на кубе

Крите- рий оп- тималь- ности	Множество точек								
	<i>k</i>	<i>E</i> ₀	<i>E</i> ₁	<i>E</i> ₂	<i>E</i> ₃	<i>E</i> ₄	<i>E</i> ₅	<i>E</i> ₆	<i>E</i> ₇
<i>D</i>	2	0,09619	0,3206	0,5832	—	—	—	—	—
	3	0,06547	—	0,4242	0,5103	—	—	—	—
	4	0,04738	—	—	0,5021	0,4506	—	—	—
	5	0,03675	—	—	—	0,5622	0,4021	—	—
	6	0,02710	—	—	—	—	0,6097	0,3623	—
	7	0,02160	—	—	—	—	—	0,6486	0,3297
<i>A</i>	2	0,376	0,391	0,233	—	—	—	—	—
	3	0,425	—	0,569	0,060	—	—	—	—
	4	0,370	—	0,552	—	0,078	—	—	—
	5	0,427	—	0,573	—	—	—	—	—
	6	0,404	—	—	0,556	—	0,040	—	—
	7	—	0,733	—	—	—	0,267	—	—

Наименьшее число точек в дробном плане

$$2^{k-p} = N \geq k + 1.$$

Отсюда

$$p_{\max} \leq k - \log_2 (k + 1).$$

Квадратичные модели. Непрерывные оптимальные планы. Модель имеет вид

$$y(x) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k + \beta_{11} x_1^2 + \dots + \beta_{kk} x_k^2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \dots + \beta_{k-1,k} x_{k-1} x_k.$$

Обозначим через E_{k-n} множество точек плана с целочисленными координатами (т. е. равными $-1, 0$ или $+1$), для которых n координат принимают нулевые значения. Тогда E_k — это

множество вершин куба (все координаты равны ± 1); E_{k-1} — множество середин ребер (одна нулевая координата); E_0 — центр куба (все координаты равны нулю); E_{k-n} — множество центров граней размерности $k-n$ (n координат равны нулю).

В непрерывных планах все точки одного множества будут иметь одинаковые веса. В табл. 7 приведены веса множества при различных числах факторов k . Для получения веса каждой точки следует вес множества разделить на число точек в нем. Число точек в множестве E_{k-n} равно $C_k^{k-n} 2^{k-n}$. Так, число точек в E_0 равно единице, в E_1 число точек $2k$, в E_2 — $2k(k-1)$ и т. д., наконец, в $E_k = 2^k$.

Пример 7. Найдем непрерывный D -оптимальный план для $k = 3$. План сосредоточен в точке с координатами $(0, 0, 0)$ (одна точка); в точках типа $\pm 1, \pm 1, 0$, $(\pm 1, 0, \pm 1)$, $(0, \pm 1, \pm 1)$ — двенадцать точек; в точках $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ — восемь точек:

<i>j</i>	$x_1^{(j)}$	$x_2^{(j)}$	$x_3^{(j)}$	p_j	
1	0	0	0	0,06547	Множество E_0
2	+1	+1	0	0,0353	Множество E_2 (суммарный вес 0,4242); число точек $12 = 2k \times (k - 1)$
3	-1	+1	0	0,0353	
4	+1	-1	0	0,0353	
5	-1	-1	0	0,0353	
6	+1	0	+1	0,0353	
7	-1	0	+1	0,0353	
8	+1	0	-1	0,0353	
9	-1	0	-1	0,0353	
10	0	+1	+1	0,0353	
11	0	-1	+1	0,0353	
12	0	+1	-1	0,0353	
13	0	-1	-1	0,0353	
14	+1	+1	+1	0,0638	Множество E_3 (суммарный вес 0,5103); число точек $8 = 2^k$
15	-1	+1	+1	0,0638	
16	+1	-1	+1	0,0638	
17	-1	-1	+1	0,0638	
18	+1	+1	-1	0,0638	
19	-1	+1	-1	0,0638	
20	+1	-1	-1	0,0638	
21	-1	-1	-1	0,0638	

Насыщенные оптимальные планы приведены в табл. 8—13.

Непрерывные оптимальные планы на шаре. Квадратичные модели. Модель имеет вид

$$y(x) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k + \beta_{11} x_1^2 + \dots + \beta_{kk} x_k^2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \dots + \beta_{k-1, k} x_{k-1} x_k.$$

8. Насыщенный D-оптимальный план, $k = 2$

<i>j</i>	$x_1^{(j)}$	$x_2^{(j)}$
1	1	1
2	-1	1
3	-1	-1
4	0,4	1
5	1	-0,4
6	-0,1	0,1

9. Насыщенный D-оптимальный план, $k = 3$

<i>j</i>	$x_1^{(j)}$	$x_2^{(j)}$	$x_3^{(j)}$
1	1	-1	-1
2	1	1	-1
3	1	1	1
4	-1	1	-1
5	0,3	-1	1
6	-1	0,3	1
7	-1	-1	-0,3
8	-0,2	1	0,2
9	-0,2	-0,2	-1
10	1	-0,2	0,2

10. Насыщенный D-оптимальный план, $k = 4$

<i>j</i>	$x_1^{(j)}$	$x_2^{(j)}$	$x_3^{(j)}$	$x_4^{(j)}$
1	1	-1	0	-1
2	-1	1	-1	-1
3	-1	-1	1	-1
4	-0,25	1	0,25	-0,25
5	1	1	1	-1
6	0	-0,25	-1	-1
7	0	-1	1	1
8	1	1	-1	-0,5
9	-1	1	1	1
10	1	-0,25	1	0
11	-1	-0,25	0	1
12	1	-1	-1	1
13	-1	-1	-1	0
14	-0,5	1	-1	1
15	1	1	0,5	1

11. Насыщенный A-оптимальный план, $k = 2$

<i>j</i>	$x_1^{(j)}$	$x_2^{(j)}$
1	-1	1
2	-1	-1
3	0,503	-1
4	0,503	1
5	1	0
6	-0,22	0

12. Насыщенный А-оптимальный план, $k = 3$

i	$x_1^{(j)}$	$x_2^{(j)}$	$x_3^{(j)}$
1	1	1	−1
2	−1	1	1
3	−1	1	−1
4	−1	−1	−1
5	1	−1	−0,175
6	−0,175	−1	1
7	1	0,175	1
8	0,107	1	0,107
9	−1	−0,107	0,107
10	0,107	−0,107	−1

13. Насыщенный А-оптимальный план, $k = 4$

i	$x_1^{(j)}$	$x_2^{(j)}$	$x_3^{(j)}$	$x_4^{(j)}$
1	1	1	−1	−1
2	−1	1	1	−1
3	1	−1	1	−1
4	−1	−1	−1	1
5	1	0,134	−1	1
6	−1	1	0,134	1
7	0,134	−1	1	1
8	0,306	−1	−1	−1
9	−1	−1	0,306	−1
10	−1	0,306	−1	−1
11	−0,07	1	−1	0,12
12	−1	−0,07	1	0,12
13	1	−1	−0,07	0,12
14	1	1	1	0,50
15	0,17	0,17	0,17	−0,81

14. Непрерывные оптимальные планы для квадратичных моделей на шаре

Критерий оптимальности	k	Множество точек		
		S_k	S_1	S_0
D	2	0,4167	0,4167	0,1667
	3	0,5400	0,3600	0,1000
	4	0,6222	0,3111	0,0667
	5	0,6803	0,2721	0,0476
	6	0,7232	0,2411	0,0357
	7	0,7562	0,2160	0,0278
A	2	0,4148	0,2932	0,2918
	3	0,5488	0,2586	0,1924
	4	0,6368	0,2256	0,1377
	5	0,6976	0,2000	0,1044
	6	0,7425	0,1750	0,0825
	7	0,7760	0,1568	0,0672

В табл. 14 приведены веса множеств S_k , S_1 и S_0 точек при различных числах факторов k . S_k — множество вершин вписанного в шар k -мерного куба; эти точки имеют координаты $\pm 1/\sqrt{k}$. Число вершин вписанного куба — 2^k ; S_1 — множество точек типа $(0, \dots, 0, \pm 1, 0, \dots, 0)$; число таких точек равно $2k$; S_0 — центр шара [точка с координатами $(0, \dots, 0)$].

Пример 8. Непрерывный А-оптимальный план на шаре при $k = 3$ имеет следующий вид:

j	$x_1^{(j)}$	$x_2^{(j)}$	$x_3^{(j)}$	p_j	
1	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	0,0686	Множество S_R (суммарный вес 0,5488); число точек $2^3 = 8$
2	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	0,0686	
3	$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	0,0686	
4	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	0,0686	
5	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	0,0686	
6	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	0,0686	
7	$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	0,0686	
8	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	0,0686	
9	1	0	0	0,0431	Множество S_I (суммарный вес 0,2586); число точек $2k = 6$
10	-1	0	0	0,0431	
11	0	1	0	0,0431	
12	0	-1	0	0,0431	
13	0	0	1	0,0431	
14	0	0	-1	0,0431	
15	0	0	0	0,1924	Множество S_0

Глава 20. Модели роста надежности и оценка завершенности обрабатываемых систем

Предварительные замечания и постановка задач. В процессе экспериментальной отработки опытные образцы изделий, как правило, подвергаются многочисленным изменениям для устранения конструкторских и технологических недоработок. Основание и информация для доработки приобретаются экспериментальным путем в результате проведения отработочных испытаний. Главной причиной, приводящей к необходимости испытывать и дорабатывать разрабатываемое изделие, является наличие в неотработанном изделии источников отказов (ИО): недочетов проектирования и дефектов технологии изготовления.

Как правило, частота успехов в зависимости от числа проведенных доработок имеет тенденцию к увеличению; возрастает и средняя наработка до отказа. Кроме того, процесс повышения надежности характеристик обрабатываемой системы выражается в росте числа устраненных ИО. Термин «рост надежности» используется при описании этих тенденций роста с помощью математических моделей.

Модели роста надежности строятся для описания роста вероятности безотказной работы и роста средней наработки на отказ. Параметры построенной модели определяются по результатам отработочных испытаний, после чего эта модель может быть использована на практике для следующих целей: оценки достижимости требуемого уровня показателя надежности при заданном сроке отработочных испытаний; определении значений показателя надежности, достигнутого в процессе отработки системы; планировании затрат на проведение отработки и др.

Область использования рассмотренных в этой главе моделей включает в себя исследование роста надежности сложных систем на ранних этапах их жизненного цикла. Обзор литературы дан в [70, 85], поэтому ниже приводятся ссылки только на некоторые работы из данной области.

КЛАССИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ РОСТА НАДЕЖНОСТИ

Классификация рассматриваемых моделей проводится в соответствии с методами, используемыми для их построения. Существует два метода построения модели роста надежности.

Первый метод построения состоит в том, что для отражения тенденции повышения характеристик надежности обрабатываемого изделия используются так называемые кривые роста, которые содержат один или несколько параметров. Эти параметры затем оцениваются по результатам отработочных испытаний. Модели, полученные таким образом, называются параметрическими.

Второй метод заключается в следующем. Процесс повышения надежности исследуется с помощью определения последовательности статистических оценок вероятности безотказной работы, полученных после каждой проведенной доработки изделия. Такие модели называются непараметрическими.

В свою очередь, параметрические модели подразделяются на следующие: модели роста вероятности безотказной работы и модели роста средней наработки до отказа.

Примерами непараметрических моделей являются: биномиальная модель,

предполагающая учет только двух исходов каждого отработанного испытания — успех и отказ; триномиальная модель, в которой, кроме успешного исхода испытания, рассматриваются два типа отказов: неудачный исход и так называемый случайный отказ. Для такого случайного отказа характерно то, что его причины остаются невыясненными и неустраненными.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РОСТА ВБР

Под вероятностью безотказной работы понимается вероятность того, что в пределах заданной наработки отказ обрабатываемого изделия не возникает. В настоящее время существующие модели роста ВБР следуют двум подходам. В первом подходе для моделирования выявляемой тенденции роста подбирается некоторая кривая, и далее, используя результаты экспериментов, оценивают параметры этой кривой. Во втором подходе выявлению тенденции роста ВБР предшествует анализ случайного механизма проявления и устранения источников отказов, выводятся уравнения роста ВБР, а затем уже оцениваются параметры модели роста надежности. Вторым подходом дает возможность провести априорный анализ процесса повышения надежности [85].

Гиперболическая кривая роста ВБР. В этой модели роста вероятности успеха рассматривается экспериментальная отработка, состоящая из l этапов. На каждом j -м этапе ($j = \overline{1, l}$) проводятся n_j испытаний, по исходам которых осуществляются доработки изделия для устранения причин отказов. В качестве уравнения кривой роста ВБР используется зависимость следующего вида:

$$P_j = P_\infty - \frac{a}{j^c}, \quad j = \overline{1, l}, \quad (1)$$

где P_j — вероятность успеха в одном испытании на j -м этапе; P_∞ — предельно достижимая вероятность успеха для $j \rightarrow \infty$; a, c — неизвестные параметры модели, из которых число c может быть заданным.

1. Исходные данные

Номер j этапа отработки	Число n_j образцов	Число m_j за- фиксирован- ных успехов
1	15	10
2	10	8
3	15	12
4	35	32
5	40	38
6	50	49

Оценки параметров P_∞ и a модели (1) могут быть получены для заданного c методом наименьших квадратов или методом максимального правдоподобия. Используя метод наименьших квадратов, можно получить следующие выражения для определения оценок параметров модели:

$$a = \frac{\varphi \sum_{j=1}^l \frac{m_j}{n_j} - l \sum_{j=1}^l \frac{1}{j^c} \cdot \frac{m_j}{n_j}}{l\psi - \varphi^2}; \quad (2)$$

$$\hat{P}_\infty = \frac{\psi \sum_{j=1}^l \frac{m_j}{n_j} - \varphi \sum_{j=1}^l \frac{1}{j^c} \cdot \frac{m_j}{n_j}}{l\psi - \varphi^2}, \quad (3)$$

где m_j — число успехов в j -й серии испытаний;

$$\varphi = \sum_{j=1}^l \frac{1}{j^c}; \quad \psi = \sum_{j=1}^l \frac{1}{j^{2c}}.$$

Параметр a в (1) имеет смысл показателя возможности повышения надежности изделия за счет проведения отработки; этот параметр численно равен разности предельно достижимой вероятности успеха и вероятности успеха в начале экспериментальной отработки.

Пример 1. По $l = 6$ этапам отработки изделия получены данные, приведенные в табл. 1.

Требуется найти оценки параметров модели (1) для значения параметра $c = 1$.

Решение. 1. Рассмотрим вначале случай, когда $l = 5$. По формулам (2) и (3) получаем

$$\hat{a} = \frac{2,283 \cdot 4,131 - 5 \cdot 1,752}{5 \cdot 1,464 - (2,283)^2} = 0,3197;$$

$$\hat{P}_\infty = \frac{1,464 \cdot 4,131 - 2,283 \cdot 1,752}{5 \cdot 1,464 - (2,283)^2} = 0,9722.$$

2. С привлечением дополнительной информации об испытаниях на шестом этапе отработки оценки параметров модели могут быть уточнены. С этой целью повторим проведенные расчеты уже для $l = 6$. Учитывая все данные табл. 1, получаем несколько измененные оценки параметров рассматриваемой модели: $\hat{a} = 0,3498$; $\hat{P}_\infty = 0,9947$.

3. Найдем оценки ВБР изделия в испытаниях до проведения первой доработки. Имеем

$$\hat{P}_1 = P_\infty - \frac{\hat{a}}{1} = 0,9947 - 0,3498 = 0,6449.$$

4. Допустим, что предполагается провести всего девять этапов отработки. Тогда оценка ВБР в конце отработки, вычисленная по формуле (1), численно равна

$$\hat{P}_{10} = 0,9947 - 0,3498/10 = 0,9597.$$

Экспоненциальная кривая роста ВБР. Рост вероятности безотказной работы в зависимости от числа проведенных доработок в данном случае описывается следующим уравнением:

$$P_j = P_\infty - (P_\infty - P_0) \exp(-b(j-1)) \quad (4)$$

или

$$P_j = \beta_0 + \beta_1 c^{j-1} = cP_j + d, \quad (5)$$

где

$$\beta_0 = P_\infty; \beta_1 = P_0 - P_\infty, c = e^{-b};$$

$$d = (1 - c)P_\infty, P_1 = P_0 \quad (6)$$

— параметры модели.

Пример 2. Пусть по экспериментальным данным найдены параметры экспоненциальной кривой: $P_\infty = 0,95$; $P_0 = 0,05$; $b = 0,35$.

Требуется определить ВБР отработываемого изделия в испытаниях между 10-й и 11-й доработками.

Решение. По формулам (5) и (6) находим

$$P_{10} = 0,95 - (0,95 - 0,05) \times \exp(-0,35 \cdot (10 - 1)) = 0,9114;$$

$$\beta_0 = 0,95;$$

$$\beta_1 = -(0,95 - 0,05) = -0,9;$$

$$c = e^{-0,35} = 0,7047;$$

$$d = (1 - 0,7047) 0,95 = 0,2805,$$

а значит [см. (5)],

$$P_{j+1} = 0,7047P_j + 0,2805; P_1 = 0,05;$$

$$j = 1, 2,$$

Пример 3. Найти объемы отработочных испытаний, которые необходимо провести для достижения требуемого уровня ВБР: $P_T = 0,8$, если значения параметров уравнения экспоненциального роста те же, что в предыдущем примере, а среднее число испытаний, проводимых между доработками изделия, равно 20.

Решение. Необходимое число доработок для достижения требуемого уровня ВБР равно наименьшему целому числу, превышающему число, определенное по формуле

$$t_* = 1 + \frac{1}{b} \ln \left(\frac{P_\infty - P_0}{P_\infty - P_T} \right). \quad (7)$$

Находим

$$t_* = 1 + \frac{1}{0,35} \ln \frac{0,95 - 0,05}{0,95 - 0,8} = 6,119.$$

Следовательно возможно проведение семи доработок и соответственно 140 испытаний.

Оценивание параметров экспоненциальной модели роста ВБР. Решение задачи оценивания параметров методом наименьших квадратов сводится к решению последовательности задач оценивания. В каждой из этих задач

параметр b уравнения (4) или соответственно параметр c уравнения (5) является фиксированной величиной.

Пусть результаты испытаний, проведенных между $(j-1)$ и j -й доработками, где $j = 1, l$, представляются парами величин (m_j, n_j) , первая из которых соответствует числу успехов, а вторая — общему числу испытаний на рассматриваемом этапе отработки. Тогда отношение m_j/n_j является частотной оценкой вероятности успеха в испытаниях j -го этапа отработки. Мерой близости экспоненциальной кривой к значениям экспериментальной последовательности частотных оценок ВБР является следующая сумма квадратов:

$$\Phi(c_v) = \sum_{j=1}^l \left(\frac{m_j}{n_j} - \hat{\beta}_{0v} - \hat{\beta}_{1v} c_v^{j-1} \right)^2, \quad (8)$$

где c_v — значение параметра модели (5), фиксированное на v -м шаге процедуры оценивания параметров; $\hat{\beta}_{0v}$, $\hat{\beta}_{1v}$ — оценки параметров модели, полученные методом наименьших квадратов на v -м шаге поиска по следующим формулам:

$$\hat{\beta}_{0v} = \frac{S_{2v}S_3 - S_{1v}S_{4v}}{lS_{2v} - S_{1v}^2}; \quad (9)$$

$$\hat{\beta}_{1v} = \frac{lS_{4v} - S_{1v}S_{3v}}{lS_{2v} - S_{1v}^2}, \quad (10)$$

причем

$$S_{1v} = \frac{1 - c_v^l}{1 - c_v}; \quad (11)$$

$$S_{2v} = \frac{1 - c_v^{2l}}{1 - c_v^2}; \quad (12)$$

$$S_3 = \sum_{j=1}^l \frac{m_j}{n_j}; \quad (13)$$

$$S_{4v} = \sum_{j=1}^l c_v^{j-1} \frac{m_j}{n_j}. \quad (14)$$

2. Исходные данные

Номер j этапа отработки	Число n_j испытаний	Число m_j успехов	Частота m_j/n_j успехов
1	20	3	0,15
2	25	11	0,44
3	20	14	0,70
4	25	19	0,76
5	20	15	0,75
6	30	24	0,80

Уравнение (6) используется для определения начального приближения c_1 величины параметра c . Пусть, например, для некоторого $i < l-1$

$$\frac{m_{i+1}}{n_{i+1}} > \frac{m_i}{n_i}.$$

Тогда начальное приближение c_1 величины c находится по формуле

$$c_1 = \frac{\tilde{P}_\infty - m_{i+1}/n_{i+1}}{\tilde{P}_\infty - m_i/n_i}, \quad (15)$$

где $\tilde{P}_\infty$ — предварительная оценка параметра P_∞ , удовлетворяющая неравенству

$$\frac{m_l}{n_l} \leq \tilde{P}_\infty \leq 1.$$

Оценки параметров экспоненциальной модели получаются в результате одномерного поиска параметра c , минимизирующего целевую функцию (8), для которой параметры β_0 и β_1 находятся с помощью соотношений (9)–(14) при фиксированном значении параметра c . Последовательность выполняемых расчетов приведена в следующем примере.

Пример 4. При числе этапов $l = 6$ было проведено 140 испытаний, среди которых 86 закончились удачно. В табл. 2 представлена информация о результатах отработочных испытаний для каждого из этапов отработки.

Требуется оценить по полученным данным параметры экспоненциальной модели.

3. Результаты оценки параметров модели

c	β_0	β_1	Φ
0,6000	0,8857	-0,7192	0,009404366
0,5500	0,8516	-0,6987	0,006621565
0,5000	0,8241	-0,6832	0,005517128
0,4500	0,8014	-0,6704	0,006187509
0,4900	0,8193	-0,6804	0,005507103
0,4910	0,8197	-0,6807	0,005504887
0,4920	0,8202	-0,6810	0,005503388
0,4930	0,8207	-0,6812	0,005502605
0,4940	0,8212	-0,6815	0,005502537
0,4950	0,8217	-0,6818	0,005503185
0,4935	0,8209	-0,6814	0,005502482
0,4936	0,8210	-0,6814	0,005502478
0,4937	0,8210	-0,6814	0,005502482

4. Сравнение оценок ВБР по МНК с частотными оценками

j	$\hat{P}_j$	m_j/n_j	$\frac{m_j}{n_j} - \hat{P}_j$
1	0,1396	0,1500	0,0104
2	0,4846	0,4400	-0,0446
3	0,6549	0,7000	0,0451
4	0,7390	0,7600	0,0210
5	0,7805	0,7500	-0,0305
6	0,8010	0,8000	-0,0010

Решение. 1. Находим начальное приближение c_1 параметра c , используя соотношение (15). При $i = 1$ и $\tilde{P}_\infty = 0,9$ имеем

$$c_1 = \frac{0,9 - 0,44}{0,9 - 0,15} = \frac{0,46}{0,75} = 0,6.$$

2. По формулам (11)—(14) получаем

$$S_{11} = \frac{1 - 0,6^6}{1 - 0,6} = \frac{0,9533}{0,4} = 2,3834;$$

$$S_{21} = \frac{1 - 0,6^{12}}{1 - 0,6^2} = \frac{0,99782}{0,64} = 1,5591;$$

$$S_3 = \sum_{j=1}^6 \frac{m_j}{n_j} = 3,6;$$

$$S_{41} = \sum_{j=1}^6 (0,6)^{j-1} \frac{m_j}{n_j} = 0,9896.$$

3. Найденные значения подставим в формулы (9)—(10) для вычисления оценок параметров экспоненциальной кривой. Получаем

$$\hat{\beta}_{01} = \frac{1,5591 \cdot 3,6 - 2,3834 \cdot 0,9896}{6 \cdot 1,5591 - 2,3834^2} =$$

$$= \frac{3,2543}{3,6740} = 0,8858;$$

$$\hat{\beta}_{11} = \frac{6 \cdot 0,9896 - 2,3834 \cdot 3,6}{6 \cdot 1,5591 - 2,3834^2} =$$

$$= -\frac{2,6426}{3,6740} = 0,7193.$$

Следовательно,

$$\hat{P}_{\infty 1} = 0,8858; \quad \hat{P}_{01} = 0,1665.$$

4. В табл. 3 приведены последовательные приближения аппроксимирующей зависимости к кривой роста с наименьшими значениями суммы квадратов остатков.

Искомое решение задачи оценивания будет следующее:

$$\hat{\beta}_0 = 0,8210; \quad \hat{\beta}_1 = -0,6814; \quad c = 0,4936,$$

причем минимальное значение суммы квадратов остатков

$$\Phi_{\min} = 0,0055.$$

В табл. 4 для сравнения приведены частотные оценки вероятностей успеха и оценки этих вероятностей для каждого этапа отработки, полученные из формулы (5), по методу наименьших квадратов (по МНК).

Если в начале отработки вероятность успеха увеличивается сравнительно медленно по сравнению с последующими этапами, применение рассмотренных выше моделей не дает удовлетворительного результата. В этих случаях следует использовать кривые роста, рассмотренные ниже.

Логистическая кривая роста ВБР от числа проведенных доработок имеет следующий вид:

$$P_j = \frac{P_\infty}{1 + (P_\infty/P_0 - 1) \exp(-b(j-1))}. \quad (16)$$

Логистическая кривая является S-образной, если вместо дискретной переменной j использовать непрерывное время $t > 0$.

Для вычисления значений последовательности ВБР в данном случае удобно использовать рекуррентную формулу

$$P_{j+1} = \frac{P_\infty}{1 - c - cP_\infty/P_j}, \quad (17)$$

где $c = e^{-b}$.

Оценивание параметров кривой (16) сводится к использованию методики оценивания параметров экспоненциальной кривой, изложенной выше.

Рассмотрим экспоненциальную функцию, монотонно убывающую от $1/P_0$ до $1/P$, эквивалентную (17):

$$R_j = \beta_0 + \beta_1 c^{j-1}, \quad (18)$$

где $R_j = 1/P_j$; $\beta_0 = 1/P_\infty$; $\beta_1 = 1/P_0 - 1/P_\infty$.

Для практического применения методики, изложенной на с. 304, необходимо отношение числа успешных испытаний к общему числу испытаний для каждого этапа отработки $m_j/n_j \times (j = \overline{1, l})$ заменить на обратную величину, т. е. на n_j/m_j . В этом случае, если для некоторого j будет получено $m_j = 0$, результаты $(j+1)$ - и j -го этапов отработки следует объединить.

Пример 5. Для проведения экспериментальной отработки планируется провести 300 испытаний. Отработка аналогов изделия показала, что рост ВБР может быть аппроксимирован логистической кривой. Между доработками в среднем проводится десять испытаний. Параметры логистической кривой имеют следующие значения: $P_\infty = 0,98$ и $b = 0,2$. Требуемое к концу отработки значение ВБР $P_T = 0,95$.

Необходимо определить, будет ли достигнуто требуемое значение ВБР,

если в начале отработки $P_0^{(1)} = 0,05$ или $P_0^{(2)} = 0,15$.

Решение. Используя формулу (16), находим, что в первом случае проведение $300 : 10 = 30$ доработок дает возможность достичь уровня ВБР, равного

$$P_{30}^{(1)} = \frac{0,98}{1 + (0,98/0,05 - 1) \times \exp(-0,2 \cdot (30 - 1))} = 0,9278 < P_T,$$

т. е. требуемый уровень ВБР не достигается. Во втором случае для $P_0^{(2)} = 0,15$ находим

$$P_{30}^{(2)} = 0,9638 > P_T,$$

т. е. поставленная цель в отработке достигается.

2. Определим наименьший номер доработки, для которого во втором случае будет достигнут требуемый уровень ВБР. Решая уравнение (6) при $P_j = P_T$ относительно j , находим, что

$$t_* = 1 + \frac{1}{b} \ln \frac{P_\infty/P_0 - 1}{P_\infty/P_T - 1}. \quad (19)$$

Отсюда

$$t_* = 1 + \frac{1}{0,2} \ln \frac{0,98/0,15 - 1}{0,98/0,95 - 1} = 26,8.$$

Следовательно, требуемый уровень ВБР достигается в результате реализации 27 доработок и потребует всего $27 \times 10 = 270$ испытаний.

Дважды экспоненциальная кривая роста ВБР. Эта кривая роста вероятности успеха описывается следующей зависимостью:

$$P_j = P_\infty \exp\left(-\ln \frac{P_\infty}{P_0} \times \exp(b(j-1))\right) \quad (20)$$

и является, как и логистическая кривая, S-образной (кривая Гомпертца).

В общем случае оценивание параметров модели (20) требует применения методов нелинейного программирования с использованием ЭВМ. В частном случае, когда получены априорные оценки параметров P_0 и P_∞ ,

может быть использована следующая упрощенная процедура оценивания параметра c .

Пусть известны результаты отработочных испытаний для l этапов отработки, удовлетворяющие условиям $m_j \neq 0$ для всех $j = \overline{1, l}$. Тогда оценка параметра c определяется по формуле

$$\hat{c} = \frac{2}{l(l-1)} \sum_{j=1}^l (j-1) y_j, \quad (21)$$

где

$$y_j = \ln \left(\ln \left(\frac{n_j}{m_j} P_\infty \right) / \ln \left(\frac{P_\infty}{P_0} \right) \right). \quad (22)$$

Пример 6. Пусть известны априорные оценки $P_\infty = 0,995$ и $P_0 = 0,05$, а также требуемое значение ВБР в конце отработки $P_T = 0,98$. Планируется завершить отработку за 40 этапов ($l = 40$).

Найдем, при каких значениях параметра b модели цель отработки является достижимой.

Решение. 1. Решив неравенство

$$P_\infty e^{-\ln \frac{P_\infty}{P_0} e^{-b(l-1)}} \geq P_T$$

относительно b , получаем

$$b \geq \frac{1}{l-1} \ln \left(\ln \left(\frac{P_\infty}{P_0} \right) / \ln \left(\frac{P_\infty}{P_T} \right) \right). \quad (23)$$

2. Подставляя в формулу (23) числовые значения, находим

$$b \geq \frac{1}{40-1} \ln \left(\ln \left(\frac{0,995}{0,05} \right) / \ln \left(\frac{0,995}{0,98} \right) \right) = 0,136.$$

Следовательно, для значений параметра $a \geq 0,136$ цель экспериментальной отработки является достижимой.

Априорное моделирование роста ВБР [85]. На практике часто возни-

кает необходимость анализа экспериментальной отработки до начала ее проведения. Одна из задач такого анализа состоит в построении модели роста надежности исходя из вероятностного механизма проявления и устранения источников отказов.

Основные допущения, принятые при построении модели:

1) в начале отработки изделие имеет конечное число ИО, равное N ;

2) отказы, вызванные различными ИО, являются несовместными событиями;

3) если в результате i -го испытания происходит отказ, то вызвавший его ИО устраняется с вероятностью q_{vi} , где v — номер ИО ($v = \overline{1, N}$);

4) после успешного испытания может быть устранен любой из ИО с вероятностью s_{vi} ($v = \overline{1, N}$; $i = \overline{1, 2, \dots}$);

5) в данных условиях отработки некоторая часть ИО является неустраняемой.

При выполнении перечисленных допущений для процесса повышения надежности отработываемого изделия справедлива следующая система уравнений:

$$\begin{cases} P_{i+1} - P_i = \left(\sum_{v=1}^{N_1} s_{vi} q_{vi} \right) P_i + \\ + \sum_{v=1}^{N_1} g_{vi} q_{vi}^2, \\ q_{v(i-1)} - q_{vi} = -(s_{vi} P_i + \\ + g_{vi} q_{vi}) q_{vi}, \end{cases} \quad (24)$$

где $P_1 = P_0$, P_i — ВБР в i -м испытании; q_{vi} — вероятность возникновения в i -м испытании отказа, вызванного v -м ИО; $v = \overline{1, N_1}$; $q_{v1} = c_v$; g_{vi} — вероятность устранения v -го ИО доработкой, проведенной после отказа, вызванного этим ИО; s_{vi} — вероятность устранения v -го ИО доработкой, проведенной после успешного исхода i -го испытания; N_1 — число устраняемых ИО.

Рассмотрим частные случаи уравнений (24).

1. Если доработки изделия проводятся только после отказов, прибли-

женное решение системы (24) имеет вид

$$P_i = P_\infty - \sum_{v=1}^{N_1} \frac{c_v}{c_v g_v (i-1) + 1}, \quad (25)$$

где

$$P_\infty = 1 - \sum_{v=1}^{N_1} c_v.$$

Еще в более частном случае равных значений начальных вероятностей q_{v1} , $v = 1, \overline{N_1}$ получаем следующую зависимость роста ВБР от числа проведенных испытаний:

$$P_i = P_\infty - \frac{P_\infty - P_0}{N_1 g (P_\infty - P_0) (i-1) + 1}, \quad (26)$$

где $g = g_v$; $v = 1, \overline{N_1}$.

2. Если все устранимые ИО являются равноценными, т. е.

$$c = c_v; s_{vi} = s; g_{vi} = g; v = 1, \overline{N_1}, i = 1, 2, \dots,$$

то система уравнений (24) сводится к одному уравнению

$$P_{i+1} = P_i + (P_\infty - P_i) \times \left[g \frac{P_\infty}{N_1} + \left(s - \frac{g}{N_1} \right) P_i \right], \quad (27)$$

которое имеет приближенное явное решение

$$P_i = \frac{P_\infty (\alpha + \beta P_0) - \alpha (P_\infty - P_0) \times \exp[-s P_\infty (i-1)]}{\alpha + \beta P_0 + \beta (P_\infty - P_0) \times \exp[-s P_\infty (i-1)]}, \quad (28)$$

где $\alpha = P_\infty g / N_1$; $\beta = s - g / N_1$.

3. При $\alpha = 0$, а это соответствует отработке изделия с большим числом устранимых ИО, таким, что $s \gg g / N_1$, или проведению доработок только после успешных испытаний, зависимость (28) переходит в логистическую кривую (16) с параметром $b = s P_\infty$.

4. При $\beta = 0$ зависимость (26) также упрощается и становится экспоненциальной, т. е. принимает вид (4), причем $b = P_\infty g / N_1$.

Пример 7. По условиям испытаний опытные образцы обрабатываемого изделия не восстанавливаются. Необходимо до начала отработки оценить число опытных образцов, которое требуется изготовить для повышения ВБР с $P_0 = 0,05$ до $P_T = 0,96$.

По данным экспериментальной отработки изделия-аналога определены следующие значения параметров:

$$P_\infty = 0,99; s = 0,1; g = 0,85; N_1 = 25.$$

Решение. Из уравнения (26) найдем искомое значение $i \equiv t_*$:

$$t_* = 1 + \frac{1}{s P_\infty} \ln \frac{(\alpha + \beta P_T) (P_\infty - P_0)}{(\alpha + \beta P_0) (P_\infty - P_T)}, \quad (29)$$

$$\text{где } \alpha = \frac{0,99 \cdot 0,85}{25} = 0,03366;$$

$$\beta = 0,1 - 0,85/25 = 0,066.$$

Подставляя в (29) числовые значения параметров, получаем

$$t_* = 1 + \frac{1}{0,1 \cdot 0,99} \ln \times \frac{(0,03366 + 0,066 \cdot 0,96) \cdot (0,99 - 0,05)}{(0,03366 + 0,066 \cdot 0,05) \cdot (0,99 - 0,96)} = 42,6.$$

Следовательно, для проведения экспериментальной отработки необходимо обеспечить изготовление 43 опытных образцов изделия.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РОСТА СРЕДНЕЙ НАРАБОТКИ НА ОТКАЗ

Рассматривается следующая схема экспериментальной отработки. Обрабатываемая система испытывается до тех пор, пока не наступает отказ. Если регистрируется отказ, то может быть принято решение о проведении доработки системы. После проведения доработки системы происходит ее восстановление, которое, как правило,

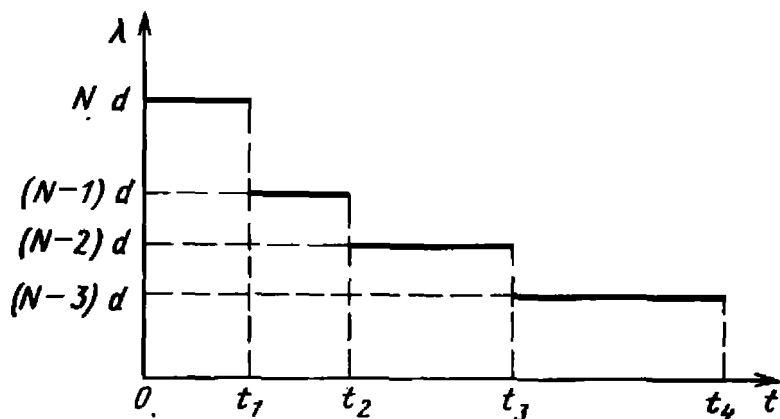


Рис. 1. Уменьшение интенсивности λ отказов в зависимости от значений $t_1, t_2, \dots$ случайных величин $\tau_1, \tau_2, \dots$

сопровождается улучшением показателей надежности системы. Если решение о проведении доработки не принимается, то происходит обычное восстановление системы без улучшения ее свойств. Экспериментальная отработка завершается после того, как либо исчерпаны ресурсы, выделенные на ее проведение, либо достигнут требуемый уровень качества обрабатываемого изделия.

Время является одним из остродефицитных ресурсов экспериментальной отработки, поэтому возможно продолжение испытаний до устранения ИО, вызвавших предыдущие отказы. Таким образом, две соседние доработки могут разделять несколько испытаний, завершившихся отказами.

Модель экспоненциального роста СННО [45]. Модель экспоненциального роста СННО строится при следующих допущениях: 1) интервалы времени $\tau_1, \tau_2, \dots$ между отказами системы являются независимыми случайными величинами, имеющими функцию показательного распределения; 2) после каждого отказа ИО, вызвавший этот отказ, устраняется; 3) считается, что в начале отработки система содержит N ИО; 4) каждый ИО вносится в общую интенсивность отказов системы одинаковую долю, равную d .

В соответствии с принятыми допущениями интенсивность отказов изменяется в зависимости от суммарного времени безотказной работы системы (рис. 1) в соответствии с соотношением

$$\lambda_j = (N - j + 1)d, \quad j = \overline{1, l}, \quad (30)$$

где λ_j — интенсивность отказов изделия между j -м и $(j-1)$ -м отказами

изделия. Можно показать, что СННО в данном случае растет экспоненциально.

Вероятность события, состоящего в том, что после отказа с номером $(j-1)$ в j -м испытании система проработает безотказно в течение интервала времени, превышающего величину t , уменьшается экспоненциально, т. е.

$$P(\tau_j > t) = \exp(-\lambda_j t). \quad (31)$$

В ряде случаев (особенно это касается начала отработки) рост СННО не проявляется. Более того, возможны случаи, когда проведенные доработки ухудшают исследуемый показатель надежности. Чтобы проверить фактическое наличие роста СННО, необходимо убедиться в справедливости следующего неравенства:

$$\frac{1}{l-1} \sum_{j=1}^l (j-1) t_j > \frac{1}{2} \sum_{j=1}^l t_j, \quad l > 1. \quad (32)$$

Если это неравенство не выполняется, то СННО обрабатываемого изделия не увеличивается.

Рассмотрим процедуру определения максимально правдоподобных оценок параметров N и d данной модели. Эти оценки удовлетворяют системе двух уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} d = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l \frac{1}{N-i+1}; \\ \sum_{i=1}^l \frac{i-b}{N-i+1} = 0, \end{cases} \quad (33)$$

где b — параметр, вычисляемый по формуле

$$b = \frac{\sum_{i=1}^l i t_i}{\sum_{i=1}^l t_i}. \quad (34)$$

Следовательно, определение искоемых оценок, которые будем обозначать $\hat{N}$ и $\hat{d}$, сводится к численному решению второго уравнения системы (33). Заметим, что параметр N является целым числом, причем $N \geq l$.

Таким образом, можно искать только приближенное решение системы уравнений (33). Это решение находится последовательным перебором значений числа источников отказов, начиная с l , до тех пор, пока не будет определен минимум по N следующей функции:

$$f(N) = \left| \sum_{i=1}^l \frac{i - b}{N - i + 1} \right|. \quad (35)$$

Минимальному значению этой функции соответствует искомая оценка параметра N . Далее, подставив полученное значение величины $\hat{N}$ в первое из уравнений (33), находим оценку $\hat{d}$ для параметра d .

Алгоритм оценивания параметров по методу максимального правдоподобия состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Ввести последовательность промежутков времени безотказной работы $t_1, t_2, \dots, t_{l-1}, t_l$.

Шаг 2. Проверить справедливость неравенства (32). Если неравенство выполняется, то перейти к следующему шагу, если нет, прекратить поиск.

Шаг 3. Найти максимально правдоподобные оценки параметров N и d модели:

3.1. Положить $N = l$;

3.2. Вычислить по формуле (35) $f_0 = f(N)$;

3.3. Положить $N = N + 1$ и вычислить по формуле (35) $f_1 = f(N)$;

3.4. Если $f_1 > f_0$, то положить $\hat{N} = N - 1$ и перейти к шагу 4, если

нет, положить $f_0 = f_1$ и вернуться к шагу 3.3.

Шаг 4. Вычислить по первому уравнению (33) оценку параметра $\hat{d}$.

Конец.

Этот алгоритм в случае небольших значений числа проведенных отработочных испытаний и числа источников отказов может быть реализован и без использования ЭВМ, что иллюстрируется следующим примером.

Пример 8. Рассмотрим экспериментальные данные отработки, представленные ниже (число отказов $l = 4$).

Номер отказа	1	2	3	4
Наработка S до отказа, ч	5	10	8	15

Требуется найти оценки $\hat{N}$ и $\hat{d}$ параметров N и d из соотношения (30).

Решение 1. Проверим условие существования оценок максимального правдоподобия параметров N и d из соотношения (30). Находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{4-1} \sum_{i=1}^4 (i-1) t_i &= \\ &= \frac{1}{3} (0 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 15) = \\ &= \frac{71}{3} = 23,67 \text{ ч;} \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 t_i &= \frac{1}{2} (5 + 10 + 8 + 15) = \\ &= \frac{38}{2} = 19 < 23,67 \text{ ч} \end{aligned}$$

и приходим к заключению, что искомые оценки существуют.

2. Вычислим вспомогательную статистику

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sum_{i=1}^4 i t_i}{\sum_{i=1}^4 t_i} = \frac{5 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 15}{38} = \\ &= \frac{109}{38} = 2,868. \end{aligned}$$

3. Вычислим по формуле (35) число f_0 для $N = 4$:

$$f_0 = \left| \frac{1 - 2,868}{4 - 1 + 1} + \frac{2 - 2,868}{4 - 2 + 1} + \frac{3 - 2,868}{4 - 3 + 1} + \frac{4 - 2,868}{4 - 4 + 1} \right| = 0,452.$$

Далее в соответствии с шагом 3.3 найдем величину f_1 для числа источников отказов $N = 4 + 1 = 5$. После подстановки в (35) получаем $f_1 = 0,0194$.

Поскольку $f_1 < f_0$, то $f_0 = f_1$, поэтому возвращаемся к шагу 3.3.

Для $N = 5 + 1 = 6$ находим

$$f_1 = \left| -\frac{1,868}{6} - \frac{0,868}{5} + \frac{0,132}{4} + \frac{1,132}{3} \right| = 0,0746.$$

Следовательно, максимально правдоподобная оценка числа источников отказов $\hat{N} = 5$.

4. Вычислим по первой формуле (32) оценку доли d интенсивности отказов, приходящуюся на один источник:

$$d = \frac{1}{38} \left(\frac{1}{5 - 1 + 1} + \frac{1}{5 - 2 + 1} + \frac{1}{5 - 3 + 1} + \frac{1}{5 - 4 + 1} \right) = \frac{1,283}{38} = 0,0338 \text{ ч.}$$

5. Найдем оценку времени работы изделия до отказа в пятом испытании

$$T_{05} = \frac{1}{\hat{\lambda}_5} = \frac{1}{\hat{d}(\hat{N} - 5 + 1)} = \frac{1}{\hat{d}} = 29,6.$$

Определение точности оценок. Точность оценок, полученных по изложенной выше методике, может быть охарактеризована соответствующими им дисперсиями:

$$\hat{\sigma}_{\hat{N}}^2 = \frac{l/d^2}{l/d^2 \sum_{i=1}^l (N - i + 1)^{-2} - \left(\sum_{i=1}^l t_i \right)^2}, \quad (36)$$

$$\hat{\sigma}_d^2 = \frac{\sum_{i=1}^l (N - i + 1)^{-2}}{l/d^2 \sum_{i=1}^l (N - i + 1)^{-2} - \left(\sum_{i=1}^l t_i \right)^2}, \quad (37)$$

где $\hat{\sigma}_{\hat{N}}^2$, $\hat{\sigma}_d^2$ — приближенные значения дисперсии максимально правдоподобных оценок $\hat{N}$ и $\hat{d}$ параметров N и d соответственно. В частности, в условиях примера 8, вычисляя сумму

$$\sum_{i=1}^4 \frac{1}{(\hat{N} - i + 1)^2} = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^2} = 0,4636,$$

находим

$$\hat{\sigma}_{\hat{N}}^2 = \frac{4/0,0338^2}{(4/0,0338^2) \cdot 0,4636 - 38^2} = 0,58;$$

$$\hat{\sigma}_d^2 = \frac{0,4636}{456,92} = 0,001.$$

Модель роста средней наработки на отказ. В качестве интегральной временной характеристики отработки иногда принимается суммарное время функционирования системы в работоспособном состоянии. Усреднение этой характеристики проводится по всем наблюдавшимся отказам. Статистика, определяющая уровень отработанности системы, после k периодов отработки имеет вид

$$T_{\text{ср } k} = \frac{\sum_{i=1}^k t_i}{\sum_{i=1}^k d_i}, \quad (38)$$

где d_i — число отказов, зафиксированных в течение i -го периода отработки; t_i — общее время функционирования изделия в течение i -го периода отработки.

Этот результат усреднения имеет тенденцию к увеличению с увеличением номера периода отработки. Величина $T_{ср k}$, определяемая по формуле (38), является исходной для аппроксимации по наиболее подходящей в каждом конкретном случае кривой роста. Для аппроксимации могут использоваться уравнения роста, рассмотренные выше. Для практических расчетов также применяется зависимость типа

$$T_{ср k} = e^{\beta_0 s} \beta_1, \quad (39)$$

где β_0 и β_1 являются неизвестными параметрами модели; s — суммарное время безотказной работы отработываемого изделия. Для того чтобы использовать МНК, эта зависимость линеаризуется логарифмированием, т. е. из (38) получается

$$\ln T_{ср k} = \beta_0 + \beta_1 \ln s_k + \varepsilon_k, \quad k = \overline{1, l}, \quad (40)$$

где

$$s_k = \sum_{i=1}^k t_i;$$

$T_{ср k}$ вычисляется по формуле (38); ε_k — погрешность измерения отклика.

Оценки $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ параметров модели, полученные по МНК, определяются по следующим формулам:

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\left(\sum_{k=1}^l \ln^2 s_k \right) \sum_{k=1}^l \ln T_{ср k} - \left(\sum_{k=1}^l \ln s_k \right) \left(\sum_{k=1}^l \ln s_k \ln T_{ср k} \right)}{l \sum_{k=1}^l \ln^2 s_k - \left(\sum_{k=1}^l \ln s_k \right)^2}; \quad (41)$$

5. Исходные данные

№ недели отработки	Время безотказной работы, ч		Число отказов		$T_{ср}$, вычисленные из (38)
	за неделю	суммарное	за неделю	суммарное	
1	13,5	13,5	4	4	3,375
2	28,4	41,9	7	11	3,809
3	50,1	92,0	6	17	5,412
4	59,0	151,0	3	20	7,550
5	48,2	199,2	2	22	9,055
6	56,3	255,5	2	24	10,646
7	44,0	299,5	1	25	11,980
8	52,1	351,6	2	27	13,022
9	38,9	390,5	0	27	14,463

$$\hat{\beta}_1 = \frac{l \sum_{k=1}^l \ln s_k \ln T_{ср k} - \sum_{k=1}^l \ln s_k \sum_{k=1}^l \ln T_{ср k}}{l \sum_{k=1}^l \ln^2 s_k - \left(\sum_{k=1}^l \ln s_k \right)^2}. \quad (42)$$

Средняя наработка на отказ, достигнутая за время s , определяется по формуле

$$T_0(s) = \frac{e^{\beta_0 s} \beta_1}{1 - \beta_1}. \quad (43)$$

Пример 9. В результате отработки системы в течение девяти недель получены исходные данные, приведенные в табл. 5. Требуется найти оценку $\hat{T}_{ср. 9}$ для среднего времени $T_{ср. 9}$ функционирования системы в работоспособном состоянии.

Решение. Последний столбец табл. 5 вычисляют по формуле (38).

1. Найдем оценки параметров модели. Предварительно вычислим:

$$\sum_{k=1}^9 \ln s_k = 44,2466;$$

$$\sum_{k=1}^9 \ln T_{ср k} = 18,5538;$$

$$\sum_{k=1}^9 \ln^2 s_k = 227,5962;$$

$$\sum_{k=1}^9 \ln s_k \ln T_{\text{ср } k} = 95,8642.$$

Подставляя вычисленные значения сумм в (41) и (42), находим:

$$\hat{\beta}_0 = \frac{227,5962 \cdot 18,5538 - 44,2466 \cdot 95,8642}{9 \cdot 227,5962 - (44,2466)^2} = -0,2084;$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{9 \cdot 95,8642 - 44,2466 \cdot 18,5538}{9 \cdot 227,5962 - (44,2466)^2} = 0,4617.$$

Вычислим

$$\hat{T}_{\text{ср } 9} = e^{-0,2084 \cdot 199,2^{0,4617}} = 9,3565.$$

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РОСТА НАДЕЖНОСТИ

Во многих случаях не удастся построить или выбрать параметрическую модель для построения кривой отработочных испытаний. Тогда используют одну из двух моделей: биномиальную или триномиальную.

Биномиальная модель [68]. Проводятся два этапа отработки, которые характеризуются разными условиями испытаний. Это различие обусловлено изменениями обрабатываемого изделия за счет проведенной доработки. Считается, что на первом этапе проводится по биномиальной схеме n_1 испытаний, d_1 из которых закончились отказами, а в условиях второго этапа по той же схеме проводится n_2 испытаний, среди которых зафиксировано d_2 отказа. Ставится задача оценить вероятность P безотказной работы изделия после проведения $(n_1 + n_2)$ испытаний с учетом различия условий отработочных испытаний. При этом рассматриваются четыре гипотезы, а именно:

Гипотеза H_0 . Условия испытаний при переходе от первого этапа ко второму остаются неизменными, т. е. проведенные доработки не изменяют надежность изделия. Эту гипотезу

можно представить в виде $H_0 : (P_1 = P_2)$.

Оценка ВБР в случае справедливости этой гипотезы записывается в виде

$$\hat{P}_{1,2} = 1 - \frac{d_1 + d_2}{n_1 + n_2}. \quad (44)$$

Гипотеза H_1 . На втором этапе надежность снизиться не может, т. е. проведенная доработка заведомо повышает надежность изделия. Формально гипотеза представляется в виде

$$H_1 : (P_1 < P_2).$$

Гипотеза H_2 . Условия испытаний на втором этапе являются более жесткими по сравнению с предыдущим этапом, т. е.

$$H_2 : (P_1 > P_2).$$

Гипотеза H_3 . Определенность в изменении условий испытаний полностью отсутствует, т. е.

$$H_3 : (P_1 \neq P_2).$$

Считается, что условиям будущей эксплуатации изделия соответствует второй этап. Тогда, если отклоняется гипотеза H_0 , оценка $\hat{P}_2$ вероятности безотказной работы определяется по формуле

$$\hat{P}_2 = 1 - \frac{d_2}{n_2}. \quad (45)$$

Оценка $\hat{P}^*$ вероятности безотказной работы изделия по информации о двух проведенных этапах отработки находится по формуле

$$\hat{P}^* = W \hat{P}_{1,2} + (1 - W) \hat{P}_2, \quad (46)$$

где W — весовой коэффициент, равный вероятности выбора гипотезы H_0 .

При справедливости гипотезы $H_1 : P_1 < P_2$ значение вероятности

$$W_1 = \sum_{r=d_1}^d C_{n_1}^r C_{n_2}^{d-r} / C_n^d, \quad (47)$$

где $d = \min(d, n_1)$; $C_n^d = \frac{n!}{(n-d)! d!}$.

При альтернативе $H_2 : P_1 > P_2$

$$W_2 = 1 - W_1. \quad (48)$$

Наконец, при $H_3 : P_1 \neq P_2$

$$W = 2 \min(W_1, (1 - W_1)). \quad (49)$$

Триномиальная модель [4]. Рассматривается экспериментальная отработка, состоящая из l шагов отработки. Каждая из доработок проводится после некоторого числа испытаний. Уровень отработанности изделия описывается триномиальным распределением, которое задается двумя параметрами. Рассматриваются три возможных исхода каждого испытания: успех, вероятность которого P_i ($i = \overline{1, l}$); неустранимый отказ, вероятность которого в течение всей отработки остается неизменной и равной Q_0 ; устранимый отказ. Вероятность этого события в процессе отладки имеет тенденцию к снижению, т. е. соответствующие вероятности образуют невозрастающую последовательность:

$$Q_1 \geq Q_2 \geq \dots \geq Q_l.$$

Тогда оценки максимального правдоподобия для Q_0 и Q_i ($i = \overline{1, l}$) определяются по следующим формулам:

$$\hat{Q}_0 = \frac{\sum_{i=1}^l b_i}{\sum_{i=1}^l (b_i + d_i + m_i)}; \quad (50)$$

$$\hat{Q}_i = \frac{(1 - \hat{Q}_0) d_i}{d_i + m_i}, \quad i = \overline{1, l}, \quad (51)$$

где b_i — число случайных отказов, зафиксированных на i -м шаге отработки; d_i — число устранимых отказов, проявившихся на этом же шаге; m_i — число успехов, полученных на шаге i . Чтобы последовательность вероятностей устранимых отказов удовлетворяла условию невозрастания, используют следующую процедуру.

Если все оценки действительно не возрастают, то их принимают в качестве окончательных оценок. Если же для некоторого j выполняется неравенство

$$\hat{Q}_j < \hat{Q}_{j+1},$$

то наблюдения шагов j и $(j + 1)$ объединяются и вычисляются в соответ-

6. Исходные данные

Номер i шага	Число n_i испытаний	Число m_i успехов	Число d_i устраняемых отказов	Число b_i случайных отказов
1	10	6	4	0
2	15	12	2	1
3	20	17	3	0
4	15	12	1	1
5	30	27	2	1
Всего	90	74	12	3

ствии с максимально правдоподобными оценками уже для шага с номером $(l - 1)$. Эта процедура продолжается до тех пор, пока оценки $\hat{Q}_i$ не образуют невозрастающую последовательность. Соответствующие оценки вероятности успешной работы отработываемого изделия на i -м шаге определяются по формуле

$$\hat{P}_i = 1 - \hat{Q}_i - \hat{Q}_0. \quad (52)$$

Чтобы найти нижнюю доверительную границу вероятности безотказной работы, используют биномиальное распределение без разделения отказов на устранимые и неустранимые.

Пример применения триномиальной модели. Исходные данные для расчета представлены в табл. 6.

Из формулы (50) находим максимально правдоподобную оценку вероятности возникновения случайного отказа

$$\hat{Q}_0 = \frac{3}{89} = 0,0337.$$

Проверим, образуют ли оценки $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2, \dots, \hat{Q}_5$ вероятностей отказов убывающую последовательность. Для этого достаточно вычислить отношения $d_i/(d_i + m_i)$, $i = 1, 2, \dots, 5$, что и иллюстрируется ниже.

Номер i шага отработки	1	2	3	4	5
$\frac{d_i}{d_i + m_i}$	0,400	0,143	0,150	0,077	0,069

Из полученных оценок следует необходимость в объединении результатов шагов 2 и 3 отработки, так как $d_3/(d_3 + m_3) > d_2/(d_2 + m_2)$. Производя объединение, находим отношение

$$\frac{d_2 + d_3}{d_2 + d_3 + m_2 + m_3} = \frac{5}{34} = 0,147.$$

Используя полученную выше оценку $\hat{Q}_0$ и формулу (51), вычисляем:

$$\hat{Q}_1 = (1 - 0,0337) \cdot 0,400 = 0,387;$$

$$\hat{Q}_2 = \hat{Q}_3 = 0,09663 \cdot 0,147 = 0,142;$$

$$\hat{Q}_4 = 0,9663 \cdot 0,111 = 0,107;$$

$$\hat{Q}_5 = 0,9663 \cdot 0,069 = 0,0667.$$

В соответствии с (52) получаем искомую оценку достигнутой вероятности безотказной работы

$$\hat{P}_5 = 1 - \hat{Q}_0 - \hat{Q}_5 = 0,8996.$$

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РОСТА НАДЕЖНОСТИ ОТРАБАТЫВАЕМЫХ СИСТЕМ ДЛЯ ОЦЕНКИ ЗАВЕРШЕННОСТИ

В качестве модели роста надежности используем уравнение [84]

$$\begin{aligned} p_{j+1}(\theta) &= p_j(\theta) + (\theta_3 - p_j(\theta)) \times \\ &\times (\theta_1 (1 - (1 - q_j(\theta))^{n_j} + \theta_2 p_j(\theta) \times \\ &\times (1 - q_j(\theta)^{n_j-1}), \quad j=1, 2, \end{aligned} \quad (53)$$

где $q_j(\theta) = (\theta_3 - p_j(\theta))/N$; $p_1(\theta) = p_0$ — вероятность безотказной работы системы в начале отработки; $p_j(\theta)$ — вероятность безотказной работы системы, достигнутая после проведения $j = 1$ этапа отработки; $q_j(\theta)$ — вероятность отказа, вызванного одним из устраняемых ИО; θ — вектор параметров модели, компонентами которого являются $\theta_1, \theta_2, \theta_3$; n_j — число испытаний на j -й стадии отработки.

Для оценивания параметров моделей роста надежности используются методы максимального правдоподобия и метод взвешенных наименьших квадратов. Практическое применение этих методов показывает, что оценки вероятности безотказной работы, полученные с использованием этих методов, очень близки. Поскольку применение метода взвешенных наименьших квадратов по сравнению с методом максимального правдоподобия имеет ряд преимуществ вычислительного характера, рекомендуется использовать первый метод.

Критерий качества оценки параметров модели имеет вид

$$\Phi(\theta) = \sum_{j=1}^l n_j \left(p_j(\theta) - \frac{m_j}{n_j} \right)^2, \quad (54)$$

где m_j — число успешных испытаний на j -м этапе отработки.

Параметры модели вычисляют методами нелинейного программирования, решая задачу минимизации функции (54) по θ . После решения этой задачи можно с помощью модели (53) экстраполировать рост надежности изделия на несколько стадий отработки вперед, задаваясь предполагаемой программой отработки в виде планируемого числа испытаний

$$n_{l+1}, n_{l+2}, \dots, n_{l+k},$$

где индексом k обозначено число стадий отработки, для которых осуществляется прогноз.

Полученные экстраполяцией прогнозные значения вероятности безотказной работы дают возможность найти прогнозные оценки числа этапов, необходимых для завершения отработки, и затраты на проведение испытаний и доработок. Значение номера l_* стадии отработки, для которого выполняется неравенство $p_{l_*} \geq p_*$, является искомым числом этапов, необходи-

мых для завершения отработки с требуемой вероятностью безотказной работы p_* . При этом прогнозная оценка затрат на отработку

$$C_{от} = \sum_{j=1}^{l_k} (c_j n_j + d_j), \quad (55)$$

где c_j — затраты на проведение одного испытания на j -м этапе отработки; d_j — средние затраты, связанные с проводимыми доработками системы.

Для определения точности полученных прогнозных оценок может быть использован следующий алгоритм экспериментальной проверки.

1. Разбить множество статистических данных об отработке на два подмножества:

$$\{n_j, m_j\}_{j=1}^l \cup \{n_j, m_j\}_{j=l+1}^{l+k}.$$

2. Найти оценки параметров модели (53) описанным методом.

3. Экстраполировать функцию роста вероятности безотказной работы на k этапов отработки вперед.

4. Сравнить полученные прогнозные оценки вероятности безотказной работы с их частотными оценками на проверочном подмножестве данных $\{n_j, m_j\}_{j=l+1}^{l+k}$. За критерий точности прогноза принимается следующая величина:

$$\varepsilon_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{l+k} \frac{|p_j(\hat{\theta}) - m_j/n_j|}{p_j(\hat{\theta})} 100\%, \quad (56)$$

где $p_j(\hat{\theta})$ — оценка вероятности безотказной работы, полученная в соответствии с (54).

В ходе отработки принимаются решения для достижения требуемого уровня надежности обрабатываемой системы. Полученный прогноз роста надежности дает возможность своевременно провести необходимые мероприятия, изменяющие конструкцию изделия и технологию его изготовления, в большем или меньшем объеме.

Оценки вероятности безотказной работы системы на несколько этапов отработки вперед позволяют ввести

7. Исходные данные

j	n_j	m_j	j	n_j	m_j
1	1	0	6	1	0
2	1	0	7	1	0
3	1	0	8	4	3
4	3	1	9	37	27
5	5	4			

8. Оценки параметров

l	θ_1	θ_2	θ_3	$\Phi(\theta)$
9	0,783	0,435	0,8	1,418
8	0,641	0,450	0,8	1,417
7	0,737	0,397	0,8	1,403

9. Оценки ВБР

j	$p_j(\hat{\theta})$ при значении k			$\frac{m_j}{n_j}$
	0	1	2	
1	0,150	0,150	0,150	0
2	0,229	0,226	0,226	0
3	0,314	0,310	0,304	0
4	0,401	0,397	0,380	0,30
5	0,505	0,498	0,480	0,80
6	0,597	0,590	0,574	0
7	0,653	0,650	0,623	0
8	0,697	0,697	0,663	0,75
9	0,731	0,732	0,699	0,73
10	0,761	0,760	0,747	—

следующие критерии для принятия решения о завершении отработки:

$$\delta p_l = \frac{p_l - p_{l-1}}{p_l}; \quad (57)$$

$$\lambda_l^{(1)} = \frac{\delta p_l}{n_{l-1}}; \quad (58)$$

$$\lambda_l^{(2)} = \frac{\delta p_l}{t_{l-1}}; \quad (59)$$

где δ_{pl} — критерий, характеризующий темпы роста надежности; $\lambda_l^{(1)}$, $\lambda_l^{(2)}$ — удельный рост вероятности безотказной работы и длительность стадии соответственно; n_{l-1} , t_{l-1} — число испытаний и длительность этапа ($l-1$).

Прогнозирование роста надежности и затрат на отработку дает возможность обосновать решение о переходе от лабораторных испытаний к испытаниям в натурных условиях, когда система имеет ранее отработанные аналоги. Для обоснования перехода к натурным условиям испытаний введем технико-экономический критерий вида

$$\varphi_l = \frac{C_l - C_{l-1}}{p_l - p_{l-1}} \cdot 100\%, \quad p_l > p_{l-1}, \quad (60)$$

где C_l — суммарные затраты на отработку к началу этапа l .

Пример 10 [87]. Найдем оценки параметров модели роста надежности для данных, представленных в табл. 7: $N_1 = 9$ и $p_0 = 0,15$. В данном случае геометрическая форма поверхности, описанной целевой функцией (54), вблизи экстремальной точки имеет вид «оврага», что затрудняет использование градиентных методов нелинейного программирования.

Оценки параметров θ_1 и θ_2 , приведенные в табл. 8, найдены с помощью метода покоординатного спуска. Соответствующие оценки вероятностей безотказной работы, в том числе и прогнозные, представлены в табл. 9. Соответствующие значения критерия точности прогноза, найденные по формуле (56): $\varepsilon_1 = 0,3 \%$ и $\varepsilon_2 = 8,8 \%$.

Приложение

Справочные данные, необходимые для оперативного расчета показателей надежности, приведены в табл. 1—17.

Методика применения номограмм. На рис. 1 приведена номограмма для определения НДГ параметра биномиального распределения в зависимости от объема испытаний N , точечной оценки $\hat{P}$ параметра этого распределения P и доверительной вероятности (уровня доверия) q .

По заданным величинам $\hat{P}$ и N (рис. 1) определяются две кривые из семейства кривых, изображенных в центре номограммы, и находится точка их пересечения. Затем на шкале доверительной вероятности q отмечается заданное значение q и через эти две точки проводится прямая до пересечения со шкалой P . Полученное значение $\underline{P}$ является искомым значением НДГ. Например, при $\hat{P} = 0,95$, $N = 20$ и $q = 0,9$ находим $\underline{P} = 0,815$ (табличное значение $P = 0,819$).

На рис. 2—10 приведены номограммы, по которым находятся значения коэффициентов для определения односторонних НДГ показателей долговечности T (среднего ресурса) — $\epsilon_{н.ср}$ и T_γ (гамма-процентного ресурса) — $\epsilon_{н\gamma}$, $\epsilon_{в\gamma}$ при распределении ресурса по закону Вейбулла и при плане испытаний $[NUz]$. Верхние семейства кривых служат для определе-

ния коэффициентов $\epsilon_{в.ср}$ и $\epsilon_{в\gamma}$, нижние — для $\epsilon_{н.ср}$ и $\epsilon_{н\gamma}$. Объем выборки $N = 10, 20, 30, 50, 100, 200, 400$ при доле замененных изделий в выборке $n/N = 0,05; 0,1; 0,15; 0,20; 0,25; 0,30; 0,35; 0,40; 0,60$.

Входом в номограмму служат следующие параметры: объем выборки N и относительное число (доля) n/N замененных изделий в выборке; q — доверительная вероятность; γ — значение, по которому определяют величину гамма-процентного ресурса; $\hat{v}$ — оценка коэффициента вариации ресурса;

$$\hat{v} = \frac{\sqrt{\Gamma(1 + 2/b) - \Gamma^2(1 + 1/b)}}{\Gamma(1 + 1/b)},$$

где $\Gamma(\cdot)$ — значение гамма-функции (см. гл. 10, табл. 7); b — оценка параметра b распределения Вейбулла.

При определении коэффициентов $\epsilon_{н.ср}$ и $\epsilon_{в.ср}$ используем один из графиков, приведенных на рис. 2, — в зависимости от заданного значения q ; при определении $\epsilon_{н\gamma}$ и $\epsilon_{в\gamma}$ — один из графиков, приведенных на рис. 5—10, — в зависимости от заданных значений γ и q . Для любого из выбранных графиков в зависимости от вычисленного коэффициента вариации $\hat{v}$ находим соответствующие шкалы по осям абсцисс и ординат. На горизонтальной шкале откладывают величину n/N и

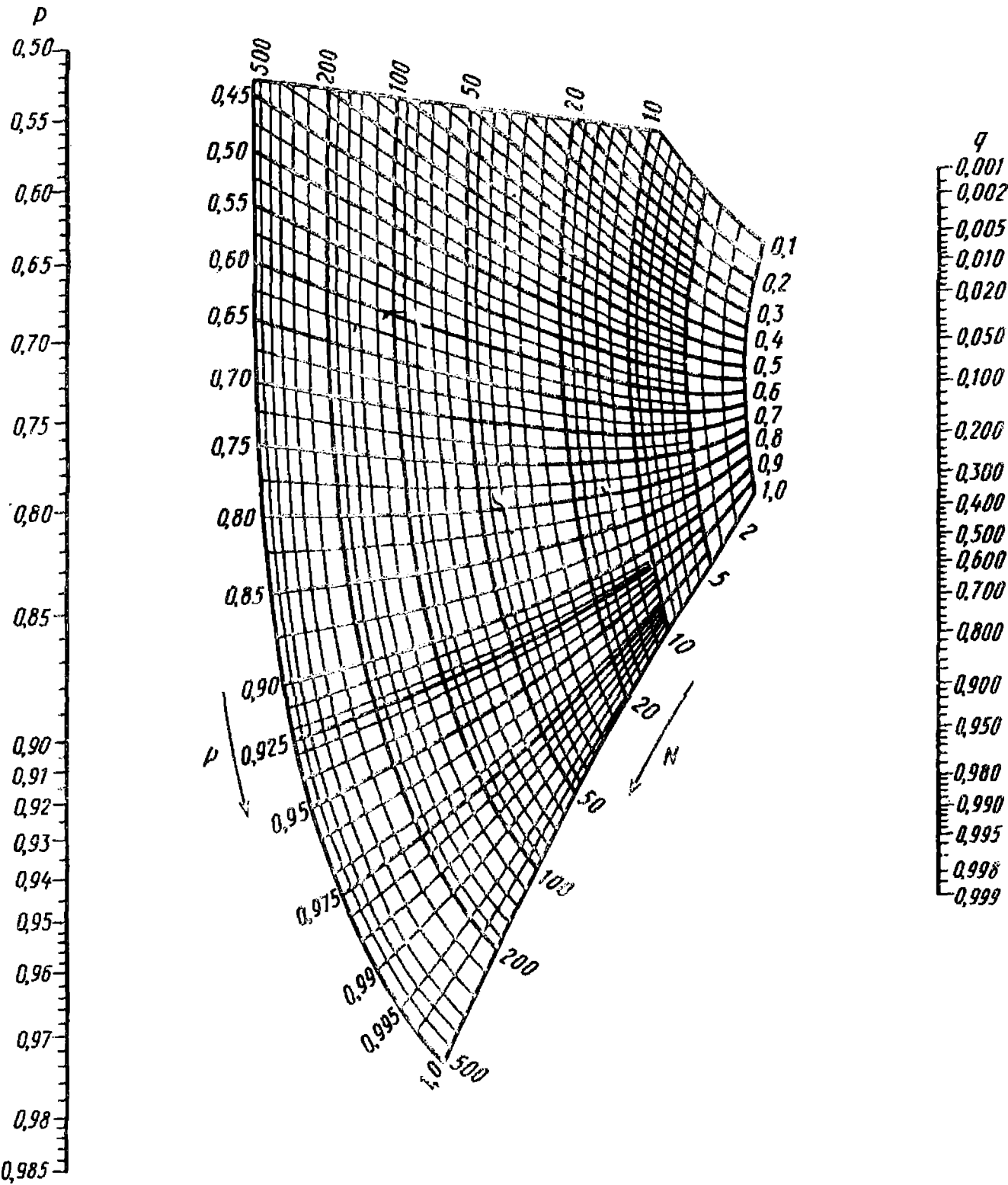


Рис. 1 (номограмма разработана В. Н. Титуловым и А. Л. Цариковым)

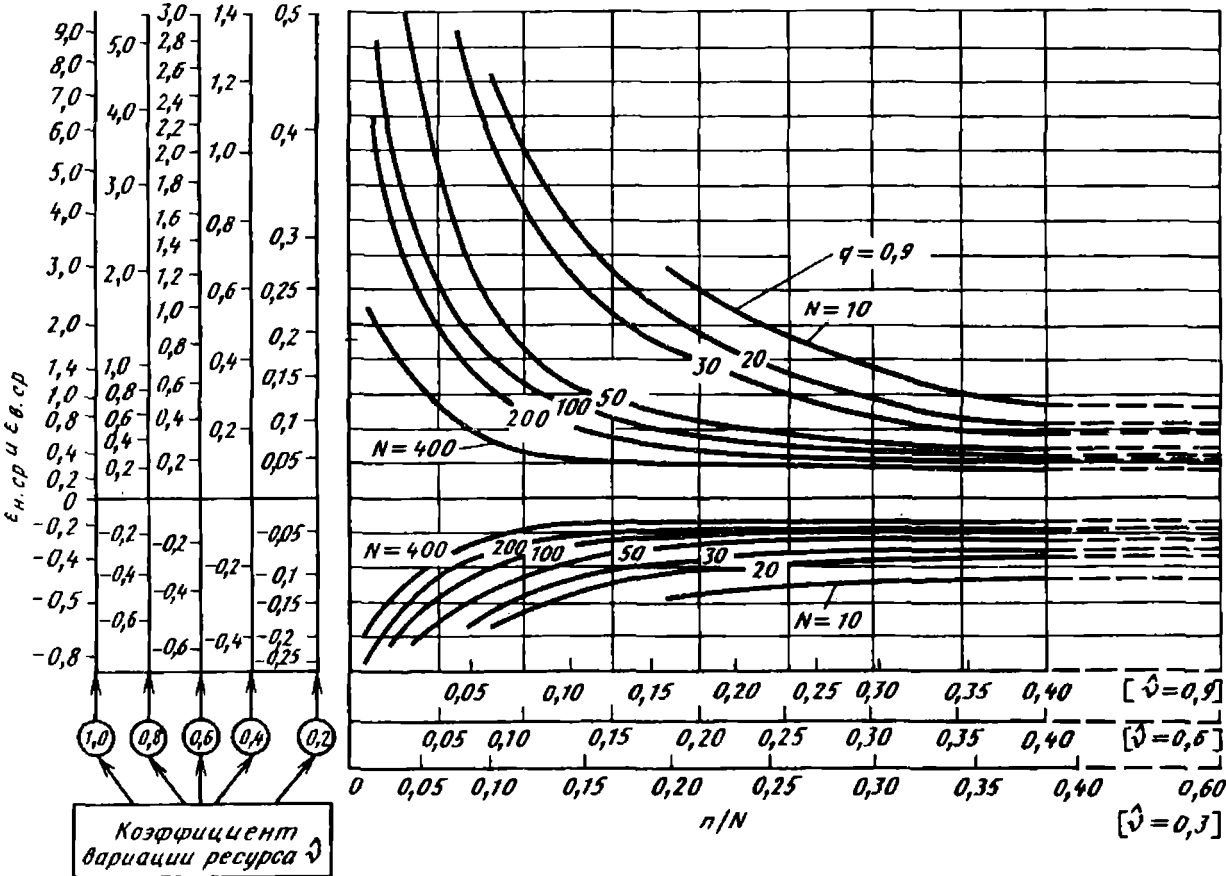


Рис. 2

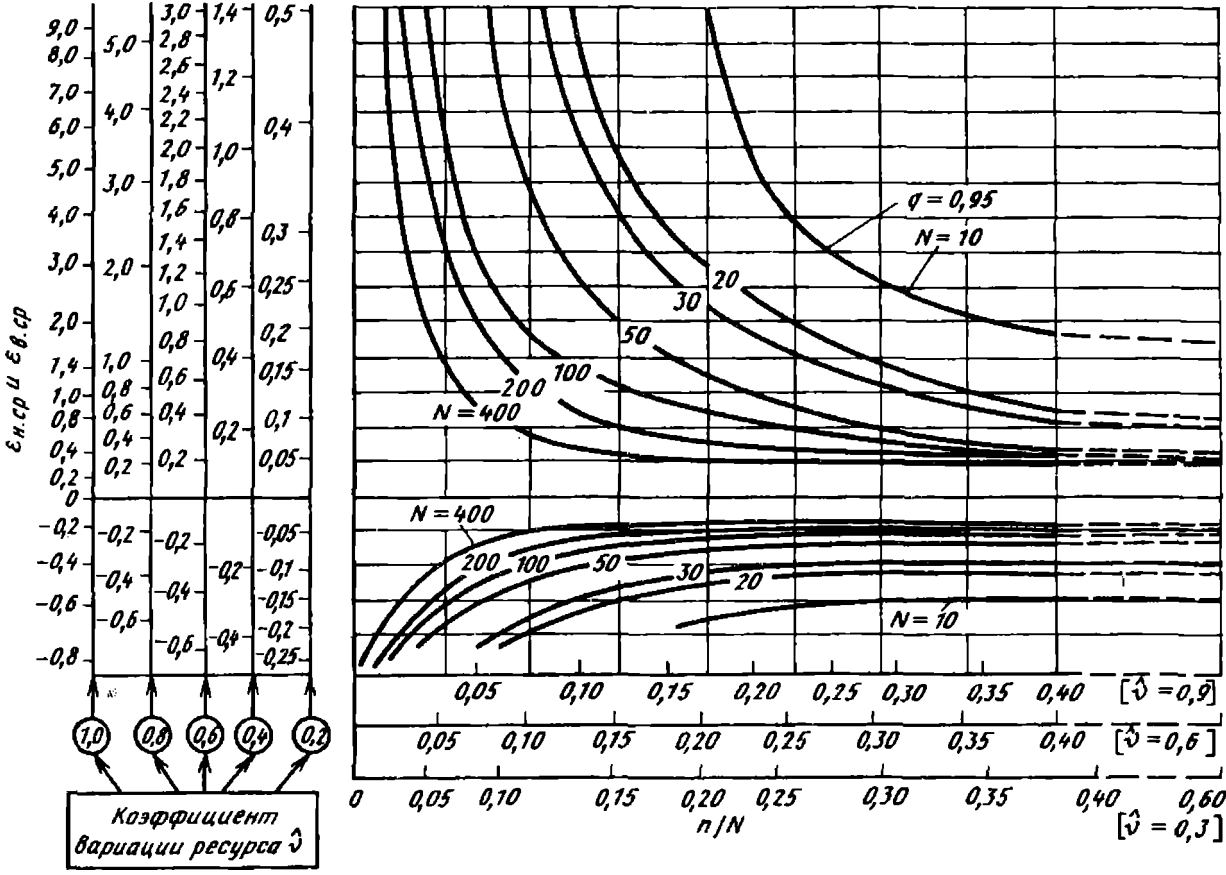


Рис. 3

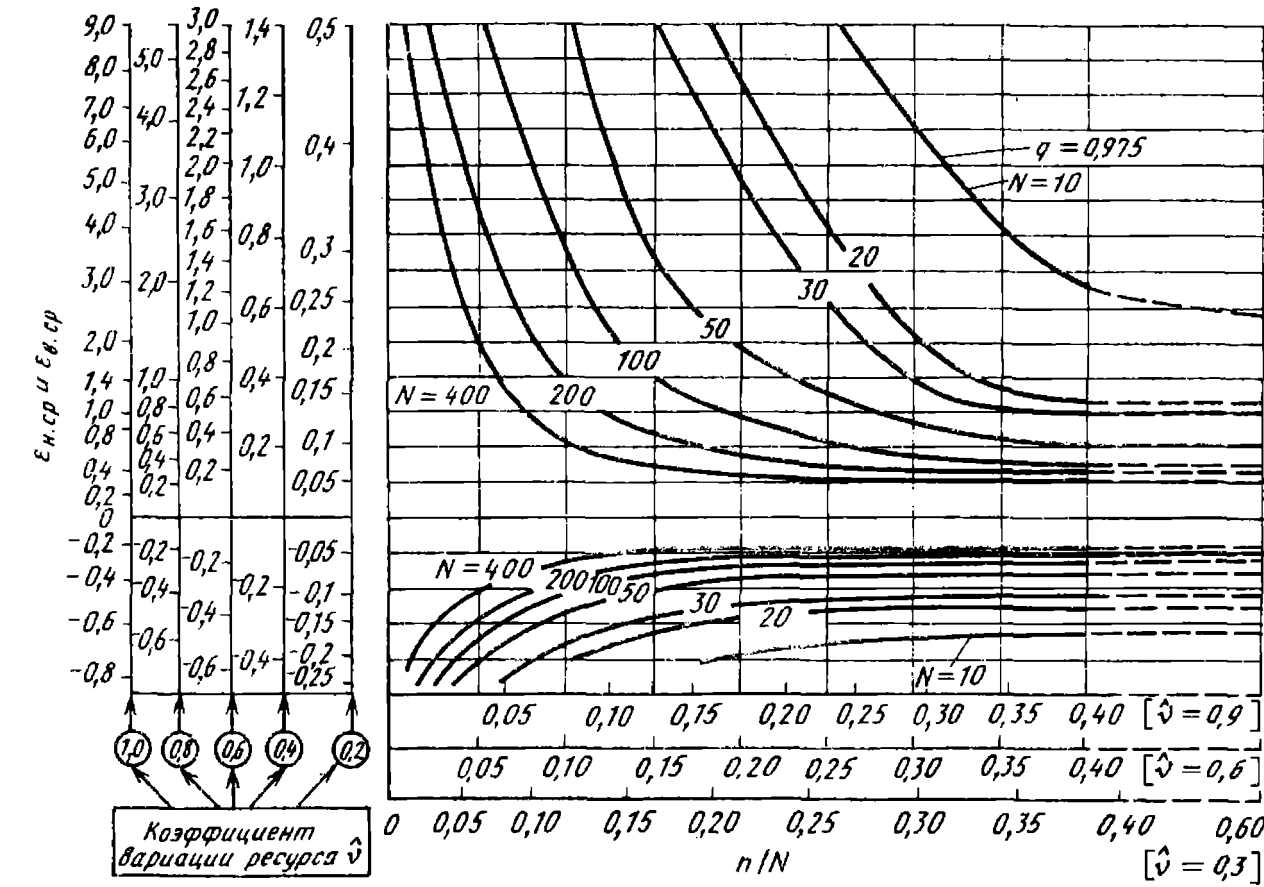


Рис. 4

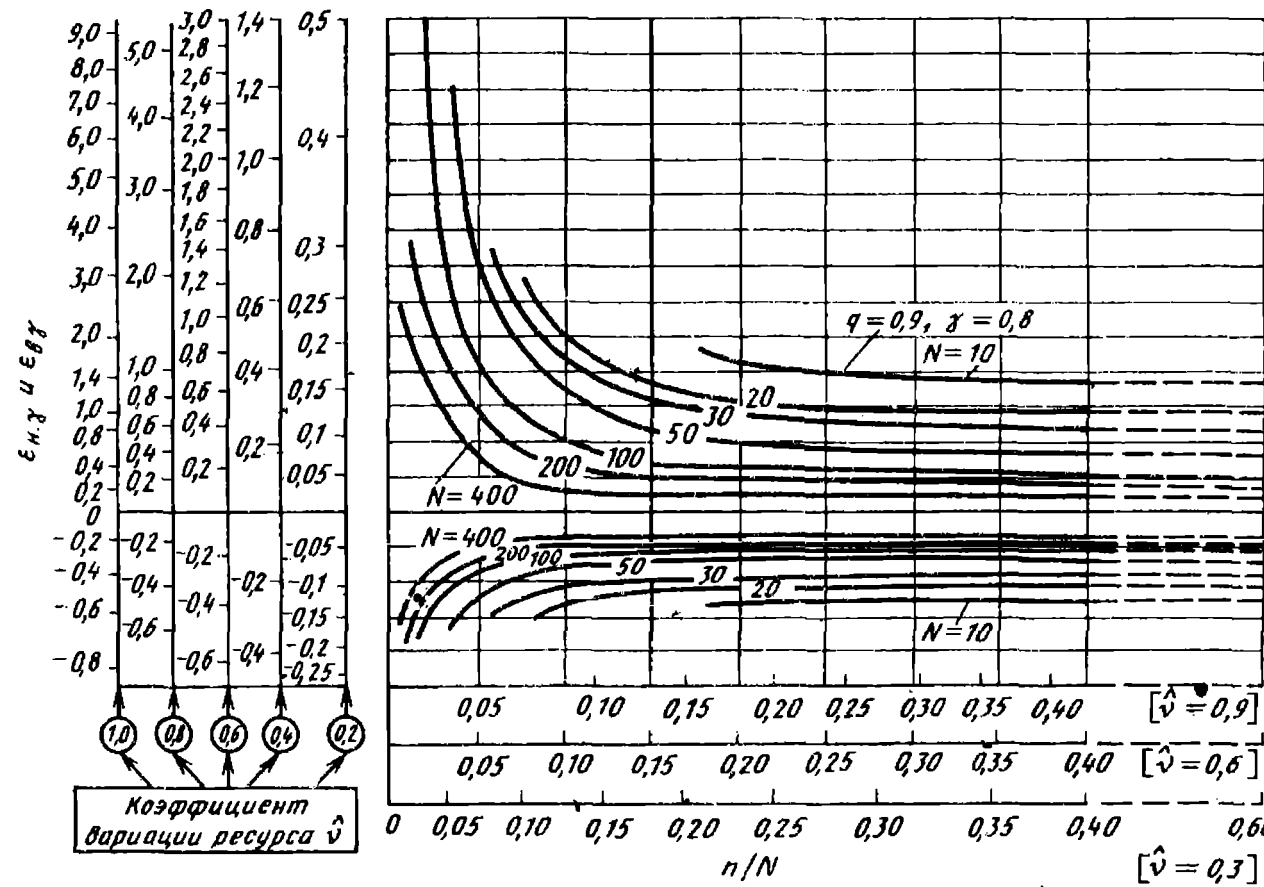


Рис. 5

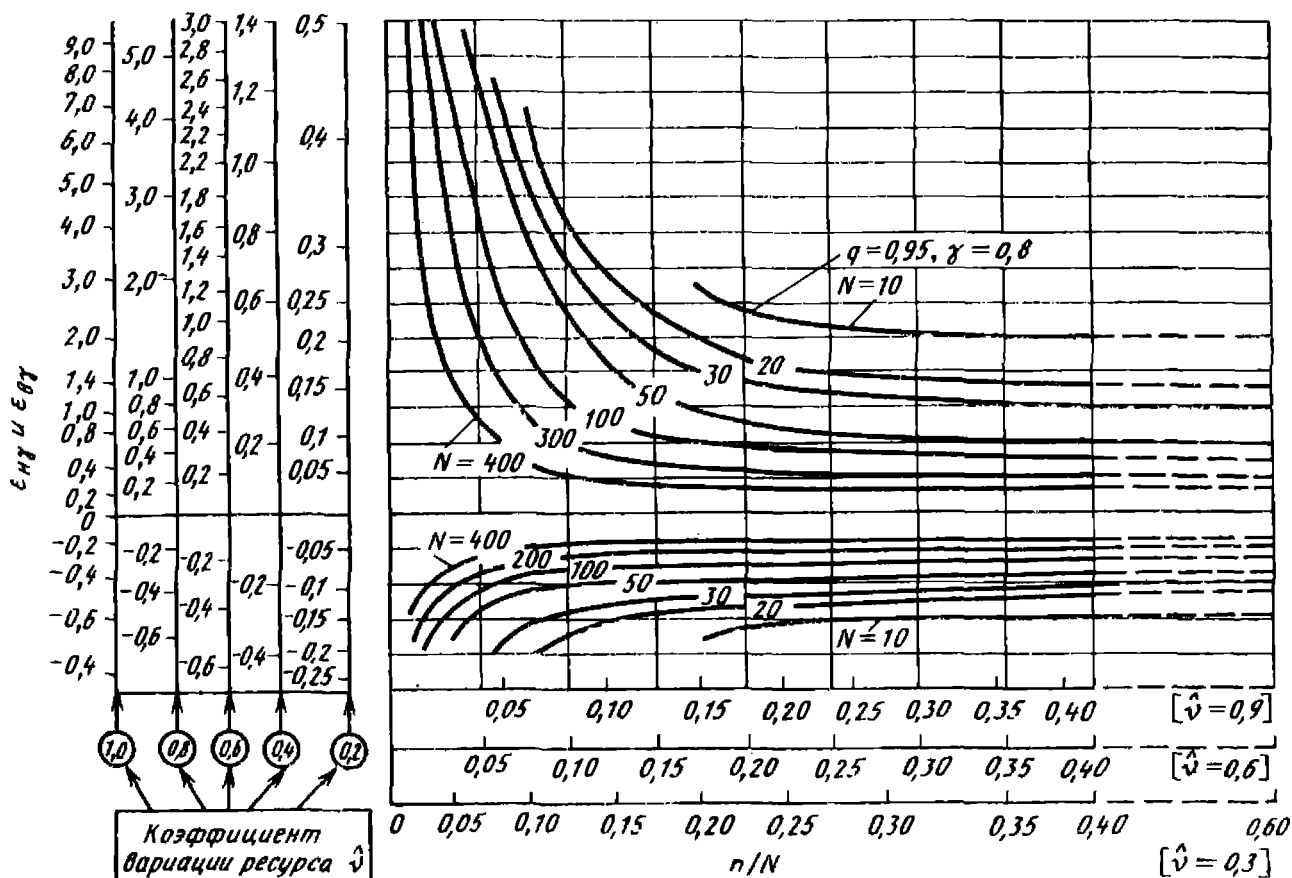


Рис. 6

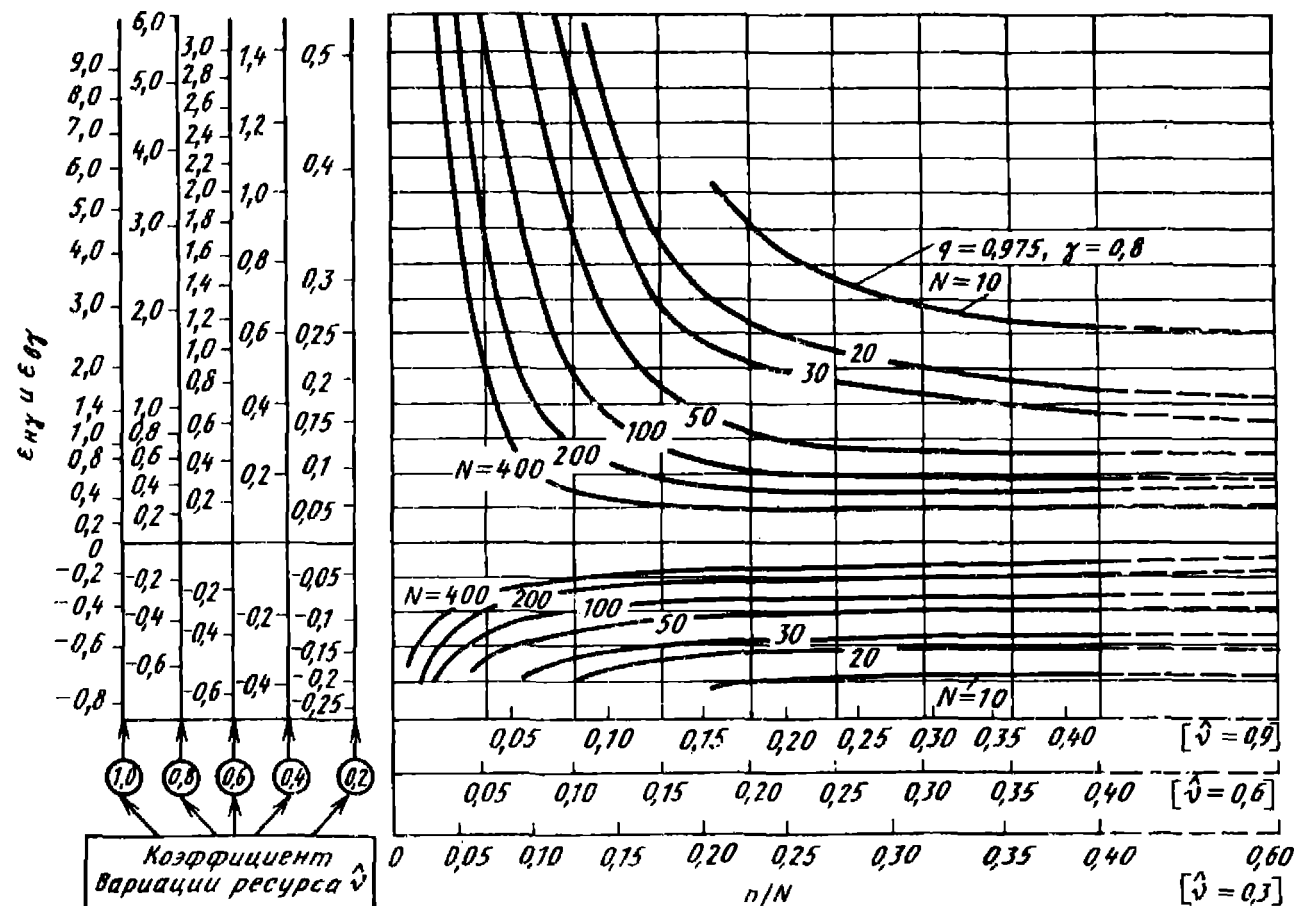


Рис. 7

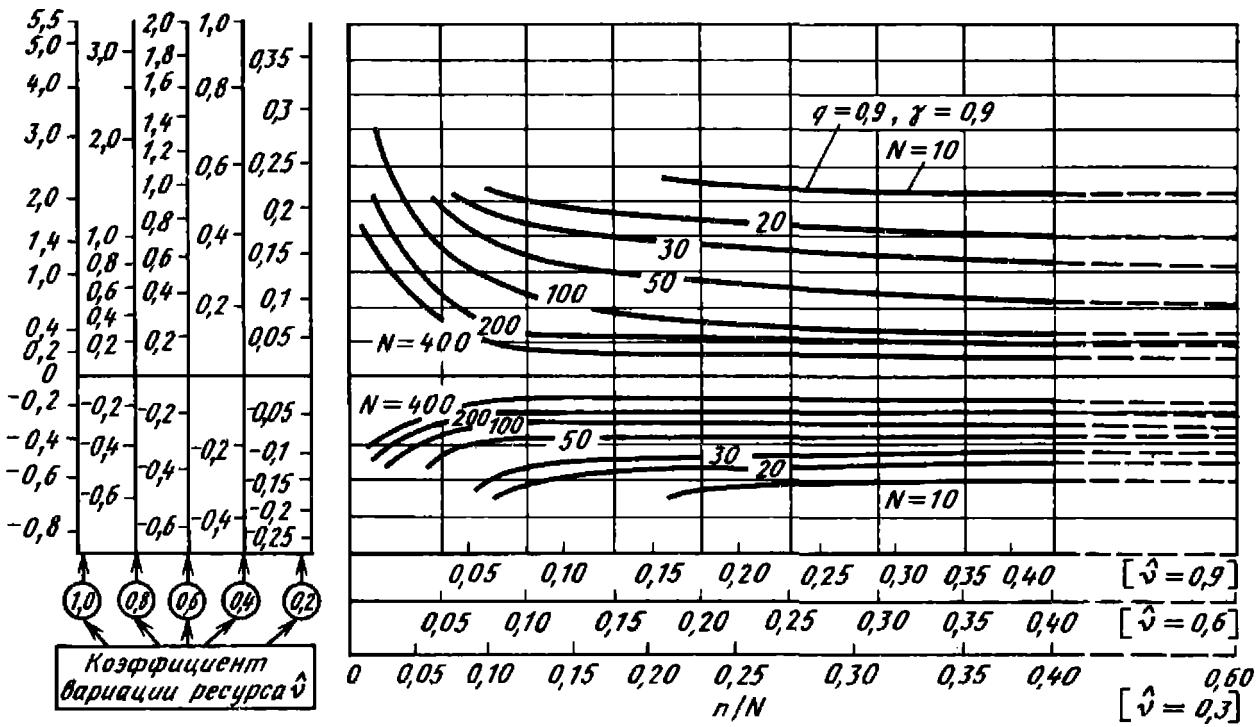


Рис. 8

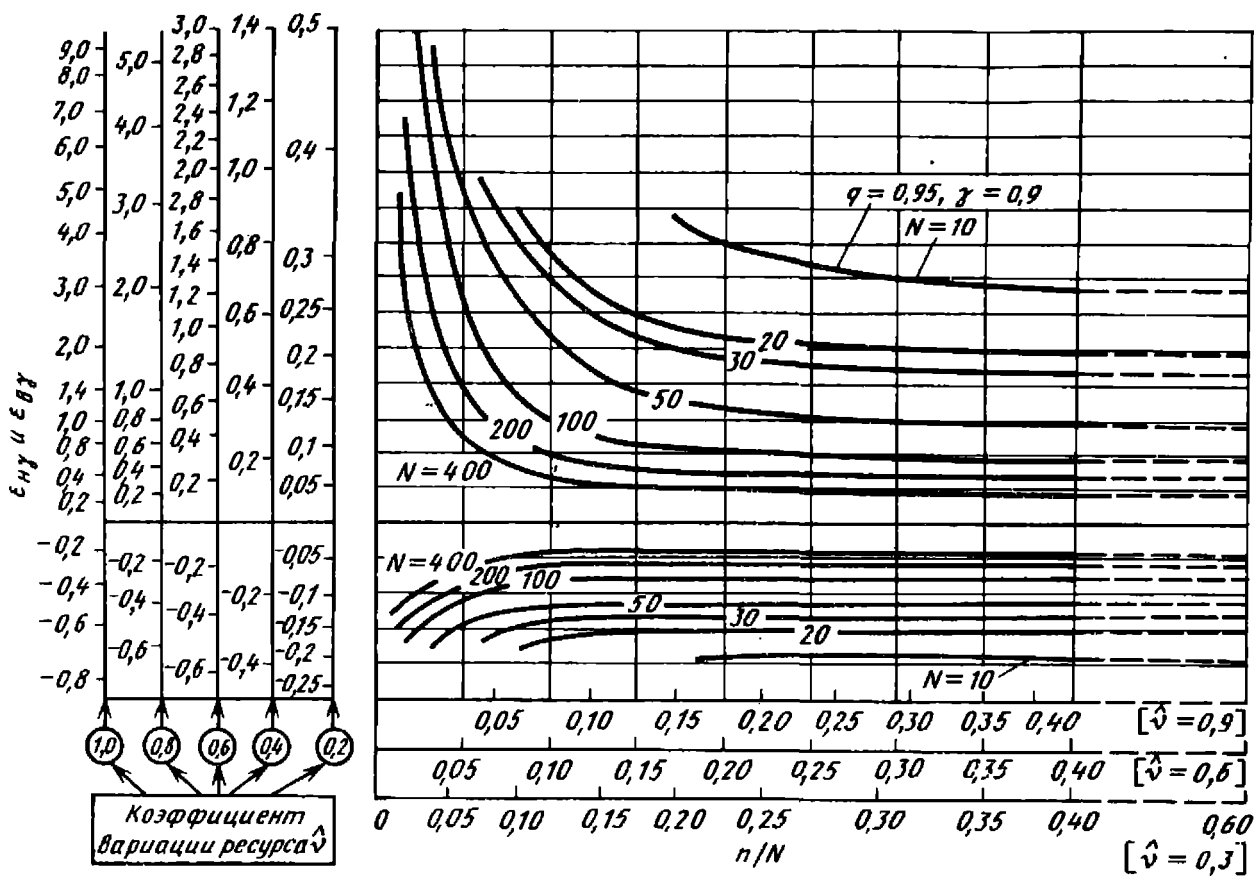


Рис. 9

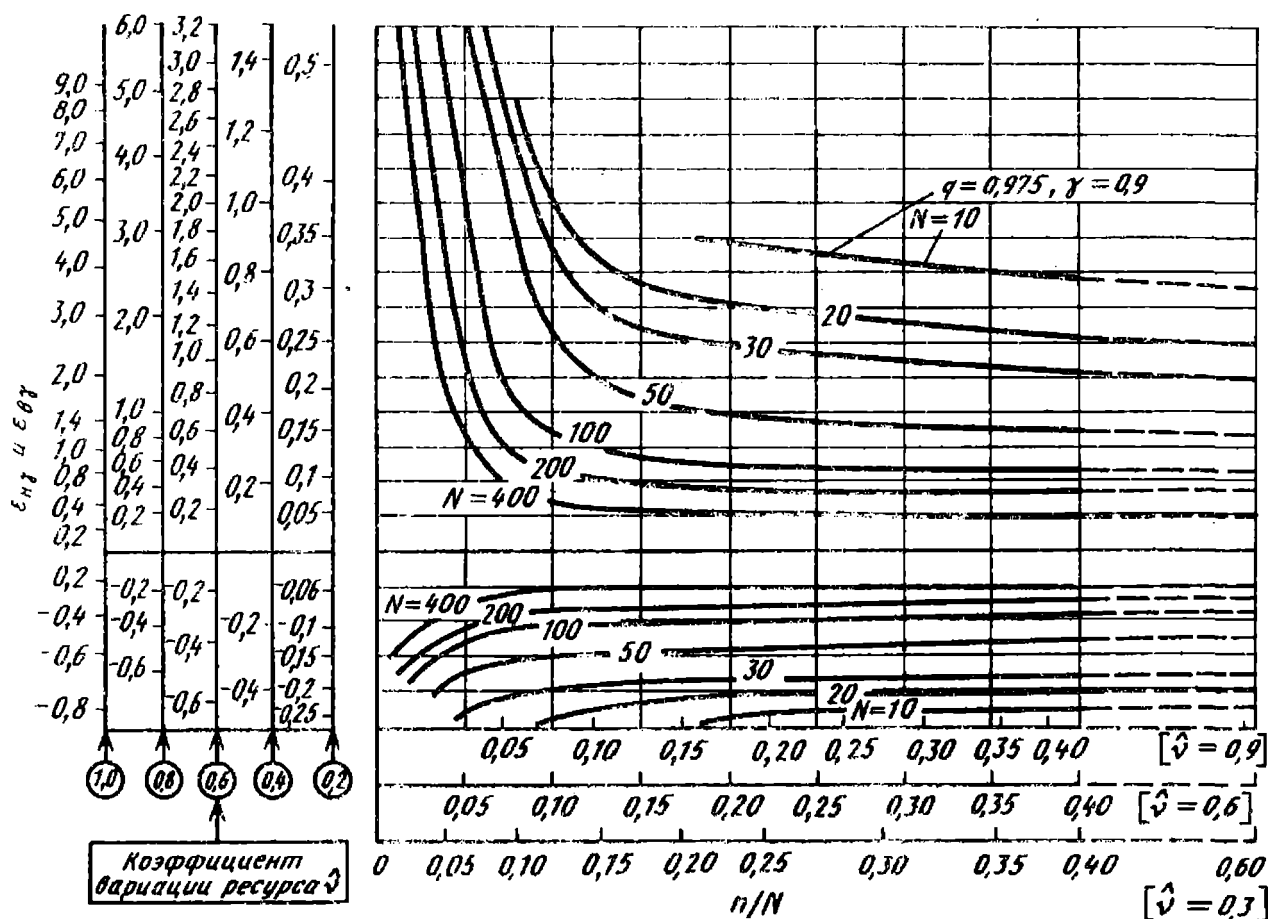


Рис. 10

восстанавливают перпендикуляр до пересечения с кривой, соответствующей заданному объему выборки N . Через полученную точку проводят горизонтальную прямую до пересечения с выбранной вертикальной шкалой (осью ординат) и находят искомое значение коэффициента.

На рис. 11—16 приведены номограммы, разработанные В. Ф. Пановым, по которым вычисляются НДГ уровня $q = 0,9$ для вероятности безотказной работы изделия при распределении наработки до отказа по закону Вейбулла и плане испытаний $[Nur]$. На рис. 11—13 число отказов $r = 2 \div 20$ с шагом единица, на рис. 14—16 объем выборки $N = 3 \div 30$ с шагом единица.

Входом в номограмму на рис. 11—13 служат следующие значения пара-

метров: N — объем выборки; r — число отказов.

По оси абсцисс отложены значения параметра V , вычисленного по формуле

$$V = b \ln(a/t),$$

где a и b — оценки параметров a и b распределения Вейбулла; t — заданная наработка.

Для определения P следует из точки на оси абсцисс, соответствующей вычисленному значению параметра V , восстановить перпендикуляр до пересечения с одной из прямых семейства, отвечающей заданным значениям N и r . Через полученную точку проводят горизонтальную прямую до пересечения с осью ординат и находят искомое значение НДГ, т. е. P .

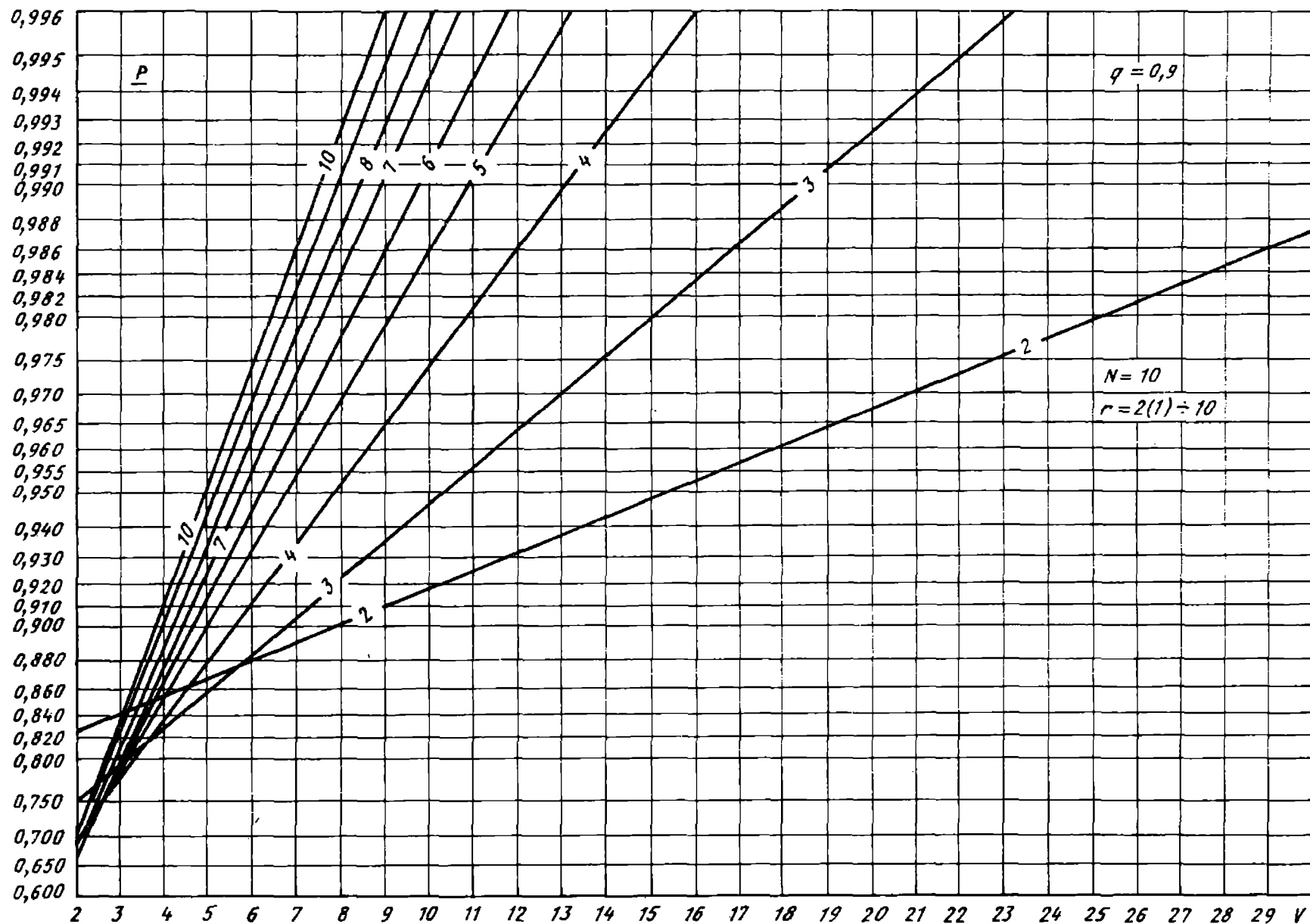


Рис. 11

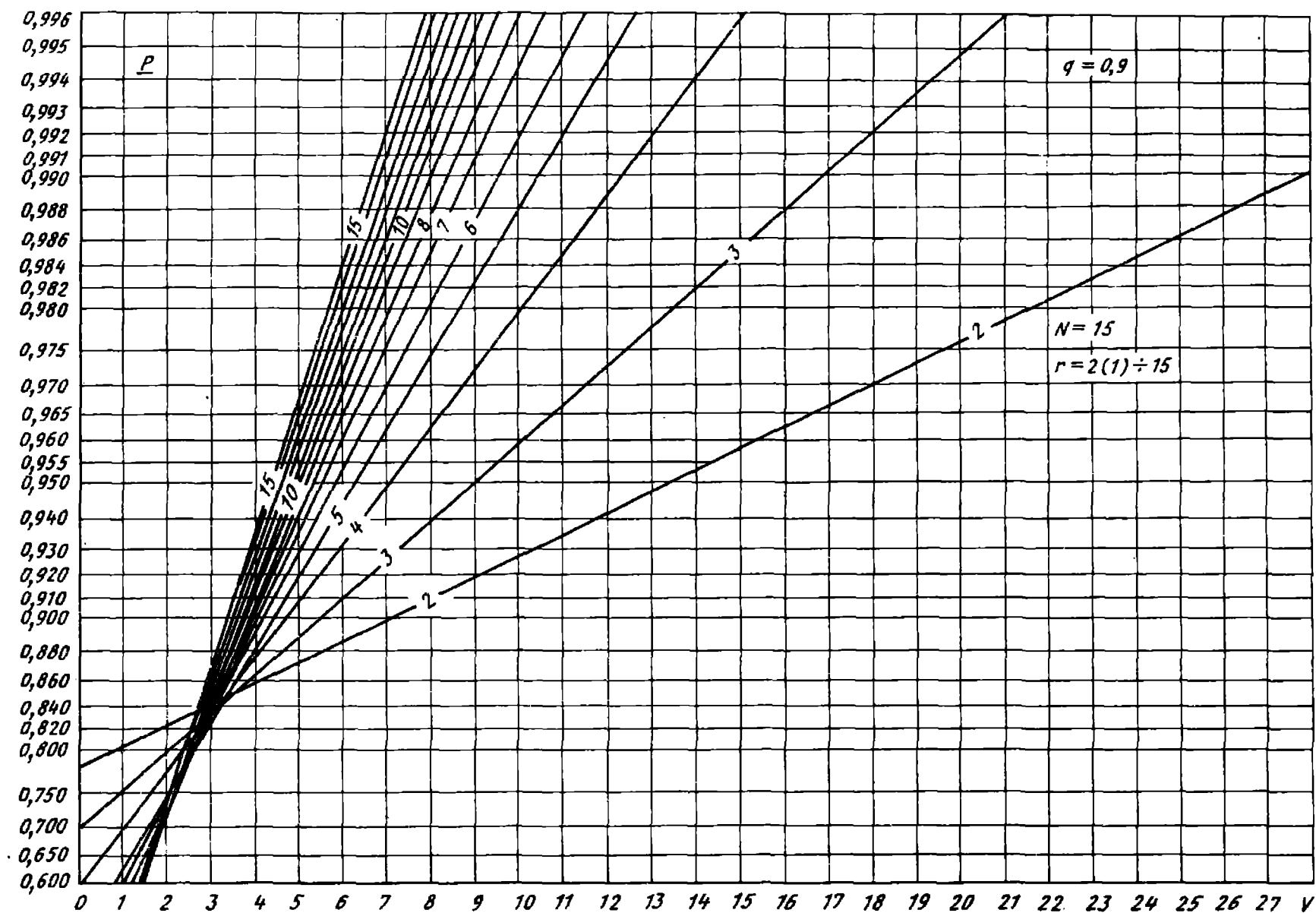


Рис. 12

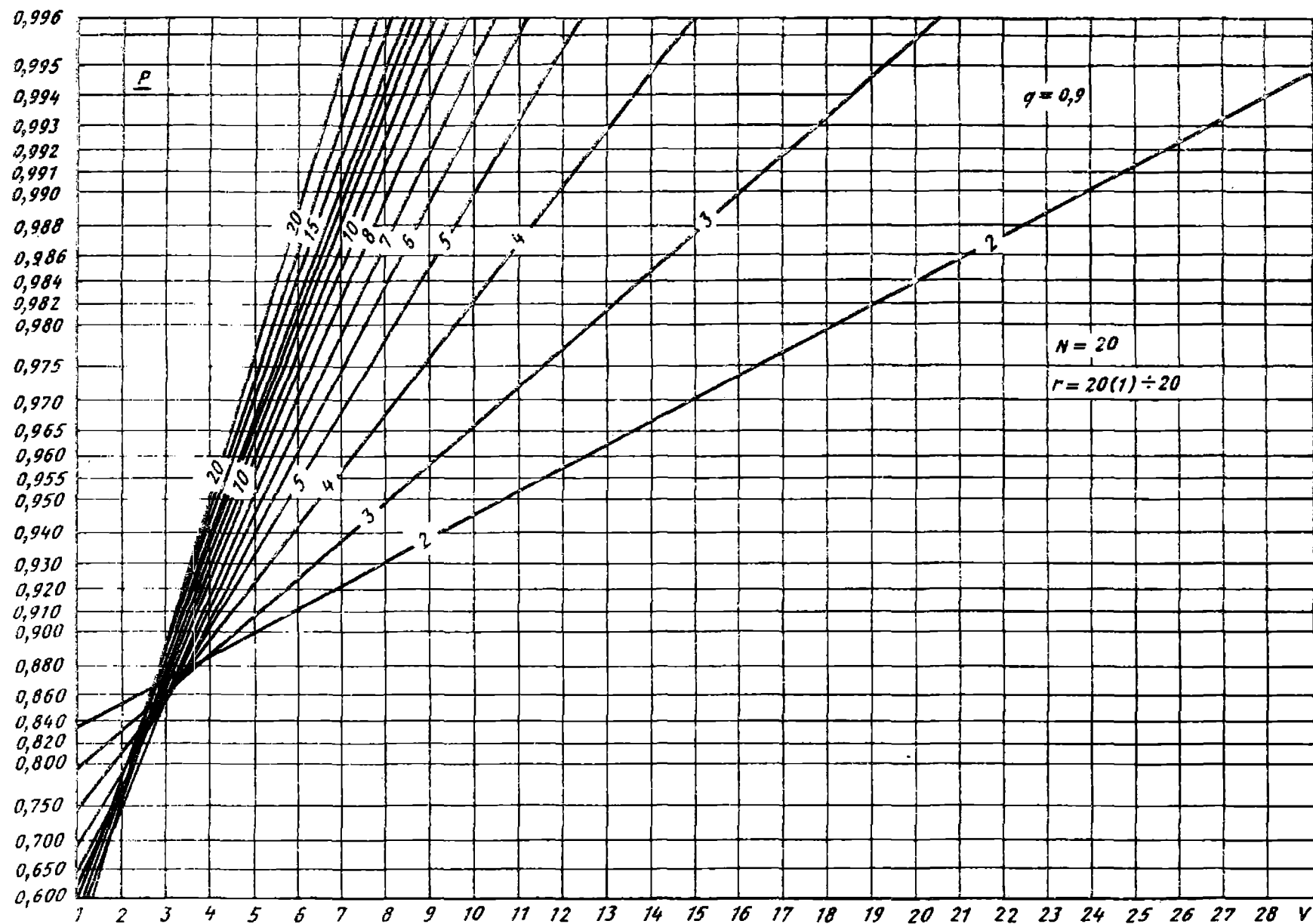


Рис. 13

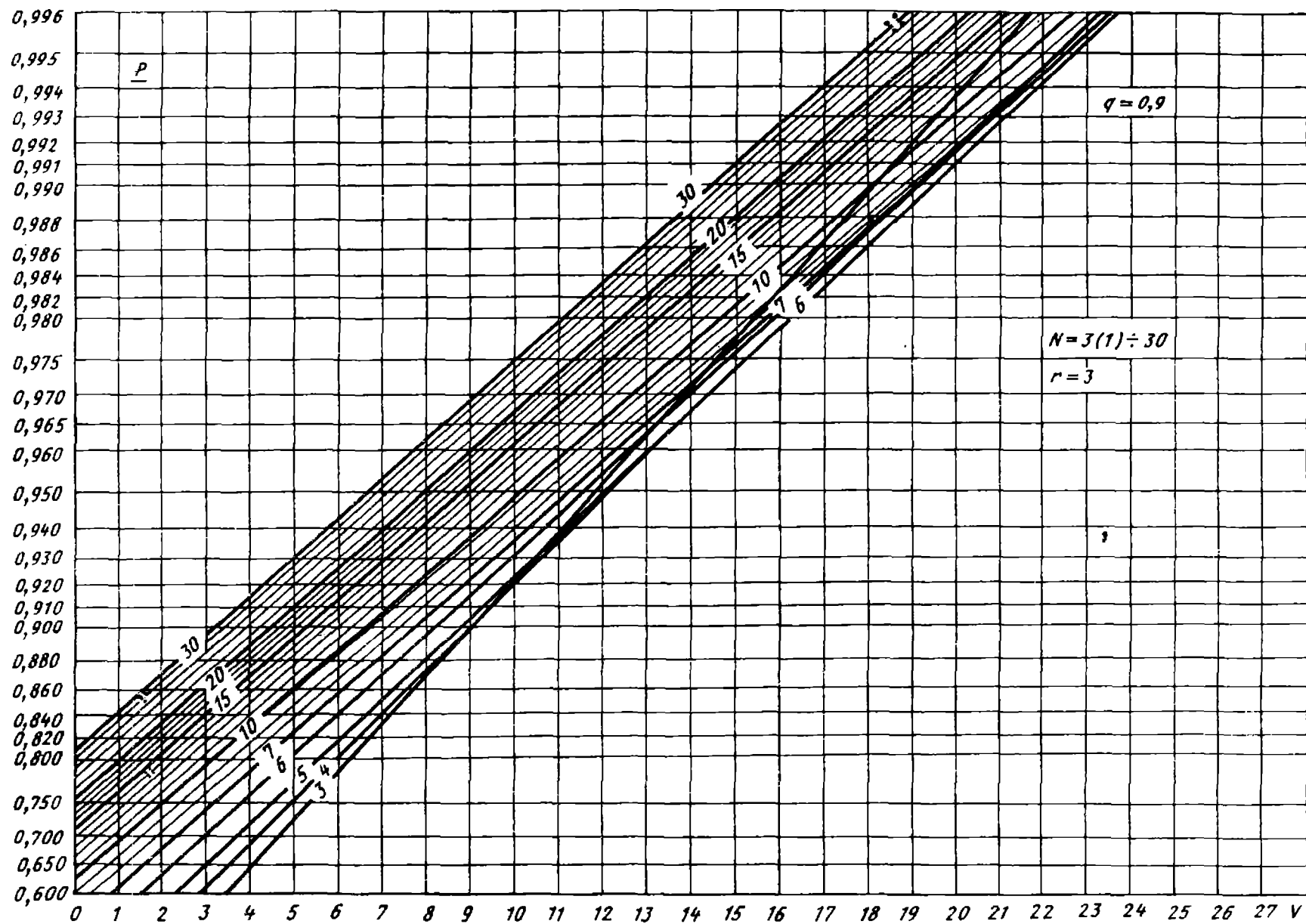


Рис. 14

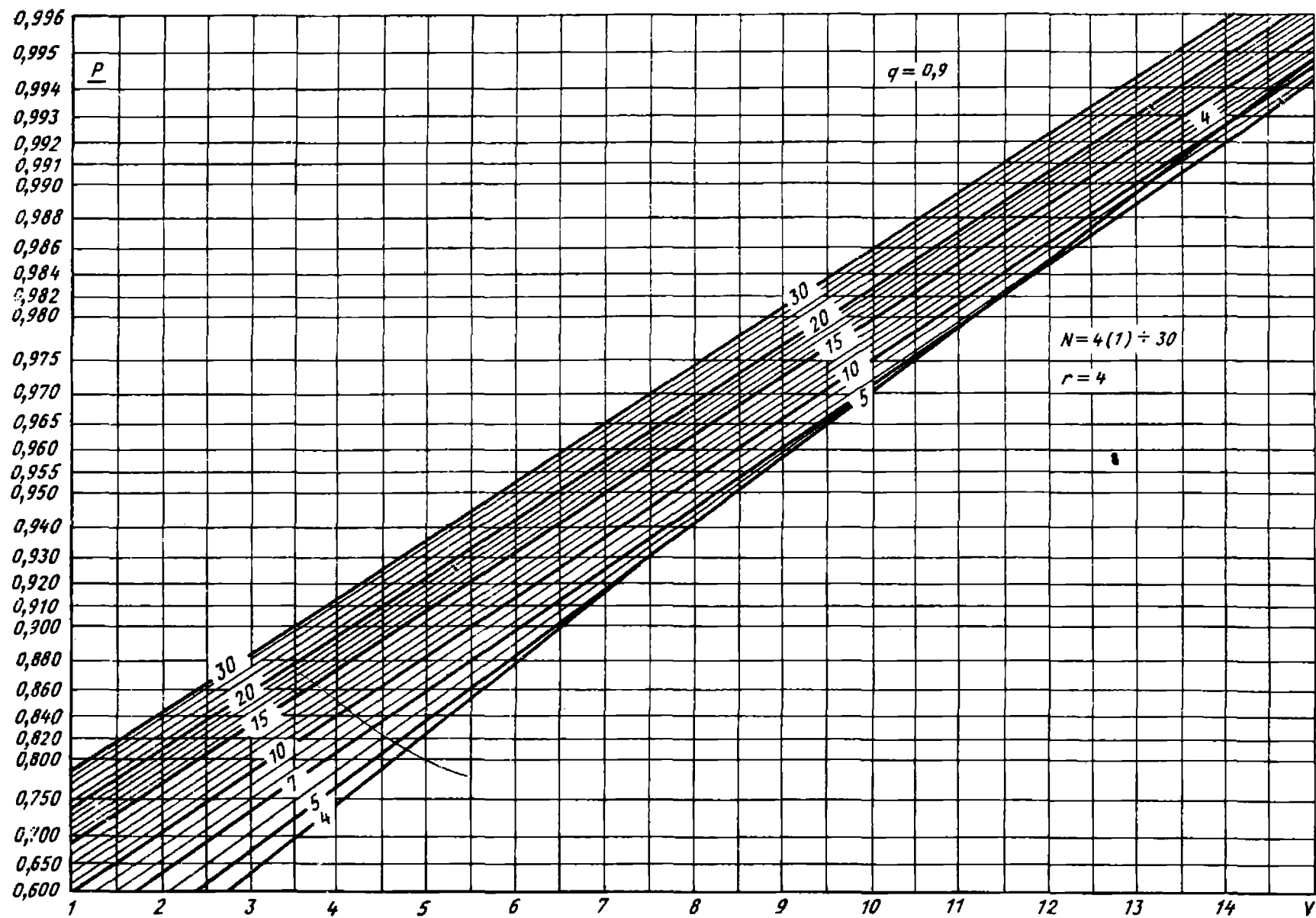


Рис. 15

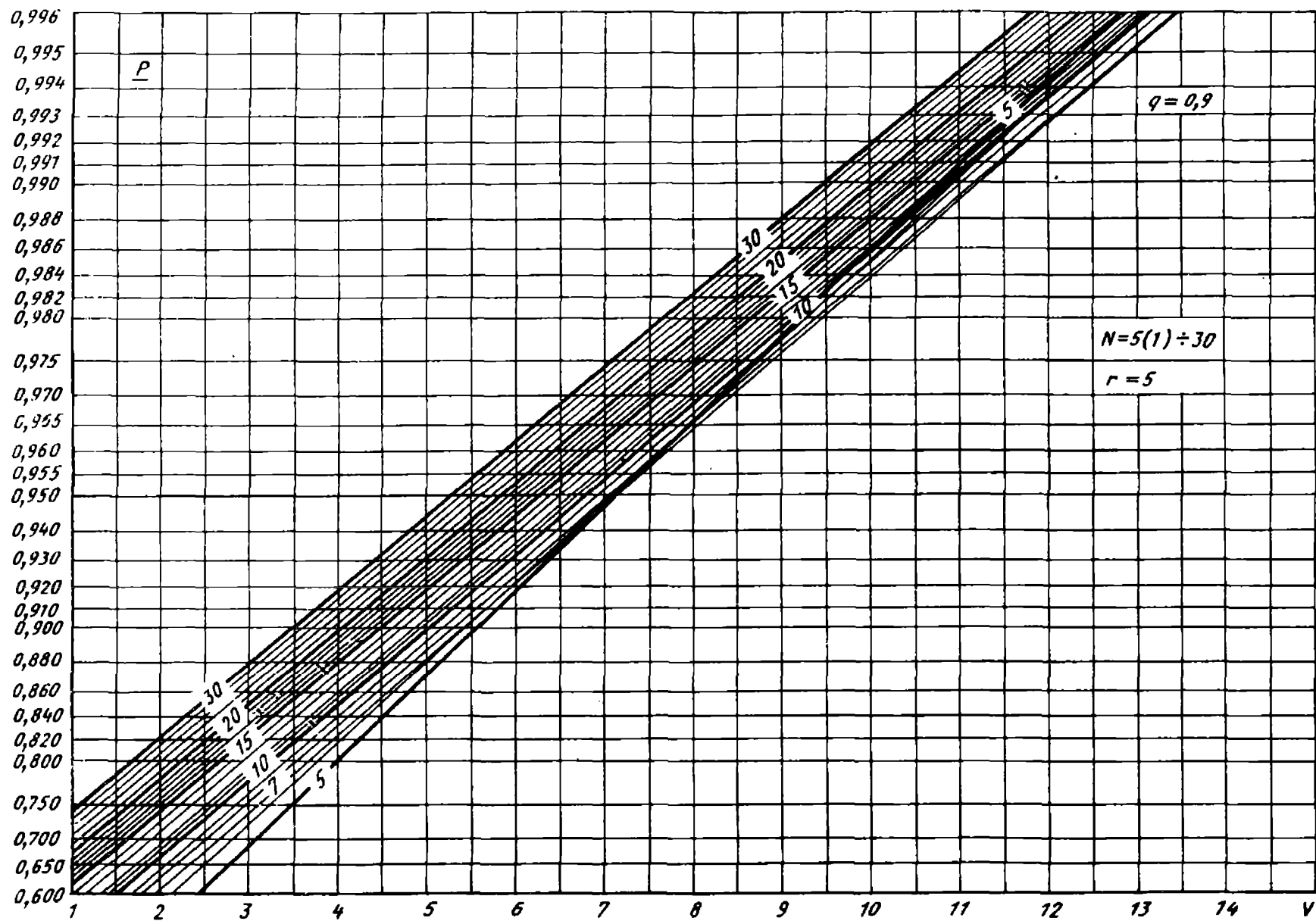


Рис. 16

1. Нижняя доверительная граница $\underline{P}$ для ВБР при биномиальном плане испытаний (при $q = 0,8$)

$\hat{P}$	$\underline{P} \cdot 10^4$ при объеме выборки N							
	3	4	5	6	7	8	9	10
1,00	5848	6687	7248	7647	7946	8178	8363	8513
99	5745	6575	7129	7524	7820	8049	8232	8382
98	5643	6463	7012	7403	7696	7923	8105	8253
97	5542	6353	6896	7284	7574	7799	7979	8127
96	5442	6244	6782	7166	7454	7677	7856	8002
95	5343	6137	6669	7049	7335	7557	7734	7880
94	5245	6030	6557	6934	7218	7438	7614	7759
93	5147	5925	6447	6821	7102	7321	7496	7640
92	5051	5820	6337	6708	6987	7204	7379	7522
91	4956	5717	6229	6597	6873	7090	7263	7405
90	4861	5614	6122	6486	6761	6976	7148	7290
89	4768	5512	6015	6377	6650	6863	7035	7176
88	4675	5412	6910	6269	6540	6752	6922	7063
87	4583	5312	5805	6161	6430	6641	6811	6951
86	4492	5213	5702	6055	6322	6532	6700	6840
85	4401	5115	5599	5949	6215	6423	6591	6729
84	4311	5017	5497	5845	6108	6315	6482	6620
83	4222	4921	5396	5741	6003	6208	6374	6512
82	4134	4825	5296	5638	5898	6102	6267	6404
81	4047	4730	5197	5536	5794	5997	6161	6297
80	3960	4636	5098	5434	5690	5892	6055	6191
79	3874	4542	5000	5333	5588	5788	5950	6085
78	3789	4450	4903	5233	5486	5685	5846	5980
77	3704	4357	4806	5134	5384	5582	5743	5876
76	3621	4266	4711	5036	5284	5480	5640	5772
75	3538	4175	4616	4938	5184	5379	5538	5669
74	3455	4085	4521	4840	5085	5278	5436	5567
73	3373	3996	4427	4744	4986	5178	5335	5465
72	3292	3908	4334	4648	4888	5079	5235	5364
71	3212	3820	4242	4552	4791	4980	5135	5263
70	3132	3732	4150	4457	4694	4882	5036	5163

Продолжение табл. 1

$\hat{P}$	$P \cdot 10^4$ при объеме выборки N									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1,00	8639	8745	8836	8914	8983	9043	9097	9145	9188	9227
99	8506	8611	8701	8779	8847	8907	8960	9008	9051	9089
98	8376	8481	8570	8647	8715	8775	8828	8875	8918	8956
97	8249	8353	8442	8519	8586	8645	8698	8745	8788	8827
96	8124	8227	8318	8392	8459	8519	8572	8619	8661	8700
95	8001	8104	8192	8268	8335	8394	8447	8494	8537	8576
94	7880	7982	8070	8146	8213	8272	8325	8372	8415	8453
93	7760	7862	7949	8025	8092	8151	8204	8251	8294	8333
92	7642	7743	7830	7906	7973	8032	8085	8132	8175	8214
91	7525	7626	7713	7789	7853	7914	7967	8015	8057	8096
90	7409	7510	7597	7672	7739	7797	7851	7898	7941	7980
89	7294	7395	7482	7557	7624	7683	7735	7783	7826	7855
88	7181	7281	7367	7443	7509	7568	7621	7669	7712	7751
87	7068	7168	7254	7330	7396	7455	7508	7555	7598	7637
86	6957	7056	7142	7217	7284	7343	7395	7443	7486	7525
85	6846	6945	7031	7106	7172	7231	7284	7331	7374	7414
84	6736	6835	6921	6996	7062	7120	7173	7221	7264	7303
83	6627	6726	6811	6886	6952	7010	7063	7111	7254	7193
82	6519	6617	6702	6777	6843	6901	6954	7001	7044	7084
81	6411	6509	6594	6669	6734	6793	6845	6893	6936	6975
80	6305	6402	6487	6561	6627	6685	6737	6785	6828	6867
79	6199	6296	6380	6454	6519	6578	6630	6677	6720	6760
78	6093	6190	6274	6348	6413	6471	6523	6571	6614	6653
77	5989	6085	6169	6242	6307	6365	6417	6464	6507	6546
76	5884	5980	6064	6137	6202	6260	6312	6359	6402	6441
75	5781	5876	5960	6032	6097	6155	6207	6254	6296	6335
74	5678	5773	5856	5928	5993	6050	6102	6149	6192	6231
73	5576	5670	5753	5825	5889	5947	5998	6045	6087	6126
72	5474	5568	5650	5722	5786	5843	5895	5941	5984	6023
71	5373	5466	5548	5620	5683	5740	5792	5838	5880	5919
70	5272	5365	5446	5518	5581	5638	5689	5735	5778	5816

Продолжение табл. 1

$\hat{P}$	<u>$P \cdot 10^4$</u> при объеме выборки N									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1,00	9262	9295	9324	9351	9377	9400	9421	9441	9460	9478
99	9124	9157	9186	9213	9238	9261	9283	9303	9321	9339
98	8991	9023	9053	9080	9105	9128	9149	9169	9188	9206
97	8862	8894	8923	8950	8975	8999	9020	9040	9059	9077
96	8735	8767	8797	8824	8849	8872	8894	8914	8933	8951
95	8611	8643	8673	8700	8725	8749	8771	8791	8810	8828
94	8489	8521	8551	8578	8604	8627	8649	8670	8689	8707
93	8368	8401	8431	8458	8484	8507	8529	8550	8569	8588
92	8249	8282	8312	8340	8365	8389	8411	8432	8451	8470
91	8132	8165	8195	8222	8248	8272	8294	8315	8335	8373
90	8016	8048	8079	8106	8132	8156	8179	8200	8219	8238
89	7901	7933	7964	7992	8018	8042	8064	8085	8105	8124
88	7786	7819	7850	7878	7904	7928	7951	7972	7992	8011
87	7673	7706	7737	7765	7791	7815	7838	7859	7879	7898
86	7561	7594	7625	7653	7679	7703	7726	7748	7768	7787
85	7450	7483	7513	7541	7568	7592	7615	7637	7657	7676
84	7339	7372	7403	7431	7457	7482	7505	7526	7547	7566
83	7229	7262	7293	7321	7347	7372	7395	7417	7437	7456
82	7120	7153	7183	7212	7238	7263	7286	7308	7328	7347
81	7011	7044	7075	7103	7130	7155	7178	7199	7220	7239
80	6903	6936	6967	6995	7022	7047	7070	7091	7112	7131
79	6796	6829	6859	6888	6914	6939	6962	6984	7005	7024
78	6689	6722	6753	6781	6808	6832	6856	6877	6898	6917
77	6582	6616	6646	6675	6701	6726	6749	6771	6792	6811
76	6477	6510	6540	6569	6595	6620	6643	6665	6686	6705
75	6371	6404	6435	6463	6490	6515	6538	6560	6580	6600
74	6266	6300	6330	6359	6385	6410	6433	6455	6475	6495
73	6162	6195	6226	6254	6281	6305	6329	6350	6371	6390
72	6058	6091	6122	6150	6177	6201	6224	6246	6267	6286
71	5955	5988	6018	6046	6073	6098	6121	6242	6163	6182
70	5852	5885	5915	5943	5970	5994	6017	6039	6060	6079

Продолжение табл. 1

$\hat{P}$	<u>$P \cdot 10^4$</u> при объеме выборки N									
	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1,00	9494	9509	9524	9537	9551	9562	9574	9585	9596	9606
99	9355	9370	9385	9399	9411	9424	9435	9446	9457	9466
98	9222	9237	9252	9266	9279	9291	9303	9314	9324	9334
97	9093	9109	9123	9137	9150	9163	9175	9186	9196	9206
96	8968	8983	8998	9012	9025	9038	9050	9061	9072	9082
95	8845	8861	8875	8890	8903	8916	8928	8939	8950	8960
94	8724	8740	8755	8769	8783	8795	8808	8819	8830	8841
93	8605	8621	8636	8650	8664	8677	8689	8701	8712	8723
92	8487	8503	8519	8533	8547	8560	8572	8584	8595	8606
91	8371	8377	8402	8417	8431	8444	8457	8469	8480	8491
90	8255	8272	8287	8302	8316	8330	8342	8354	8366	8377
89	8141	8158	8174	8188	8203	8216	8229	8241	8252	8264
88	8028	8045	8061	8076	8090	8103	8116	8128	8140	8151
87	7916	7933	7949	7964	7978	7991	8004	8017	8028	8040
86	7804	7821	7837	7852	7867	7880	7893	7906	7918	7929
85	7694	7711	7727	7742	7756	7770	7783	7795	7807	7819
84	7584	7601	7617	7632	7646	7660	7673	7686	7698	7709
83	7474	7491	7507	7523	7537	7551	7564	7577	7589	7600
82	7365	7382	7399	7414	7429	6443	6456	7468	7481	7492
81	7257	7274	7290	7306	7321	7335	7348	7361	7373	7384
80	7149	7167	7183	7198	7213	7227	7240	7253	7265	7277
79	7042	7059	7076	7091	7106	7120	7133	7146	7158	7170
78	6935	6953	6969	6985	6999	7013	7027	7040	7052	7064
77	6829	6846	6863	6878	6893	6907	6921	6934	6946	6958
76	6723	6741	6757	6773	6788	6802	6815	6828	6840	6852
75	6618	6635	6652	6667	6682	6696	6710	6723	6735	6747
74	6513	6530	6547	6563	6577	6592	6605	6618	6630	6642
73	6409	6426	6442	6458	6473	6487	6501	6514	6526	6538
72	6304	6322	6338	6354	6369	6383	6397	6409	6422	6434
71	6201	6218	6234	6250	6265	6279	6293	6303	6318	6330
70	6097	6115	6131	6147	6162	6176	6189	6202	6215	6227

Продолжение табл. 1

$\hat{P}$	$P \cdot 10^4$ при объеме выборки N									
	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1,00	9615	9624	9633	8641	9649	9656	9663	9670	9677	9683
99	9476	9485	9493	9502	9510	9517	9524	9531	9538	9544
98	9344	9353	9361	9370	9378	9385	9393	9400	9406	9413
97	9216	9225	9234	9243	9251	9258	9266	9273	9280	9287
96	9092	9101	9110	9119	9127	9135	9143	9150	9157	9164
95	8970	8980	8989	8998	9006	9014	9022	9029	9036	9043
94	8851	8860	8870	8878	8887	8895	8903	8910	8918	8925
93	8733	8743	8752	8761	8770	8778	8786	8793	8801	8808
92	8616	8626	8636	8645	8654	8662	8670	8678	8685	8692
91	8601	8511	8521	8530	8539	8547	8555	8563	8571	8578
90	8387	8397	8407	8416	8425	8434	8442	8450	8457	8465
89	8274	8484	8294	8303	8312	8321	8329	8337	8345	8352
88	8162	8172	8181	8191	8200	8209	8218	8226	8233	8241
87	8050	8061	8071	8080	8089	8098	8107	8115	8123	8130
86	7940	7950	7960	7970	7979	7988	7996	8005	8012	8020
85	7830	7840	7850	7860	7869	7878	7887	7895	7903	7911
84	7720	7731	7741	7751	7760	7769	7778	7786	7794	7802
83	7612	7622	7632	7642	7651	7660	7669	7678	7686	7694
82	7503	7514	7524	7534	7543	7552	7561	7570	7578	7586
81	7396	7406	7416	7426	7486	7445	7454	7642	7470	7478
80	7288	7299	7309	7319	7329	7338	7347	7355	7364	7371
79	7181	7192	7203	7213	7222	7231	7240	7249	7257	7265
78	7075	7086	7096	7106	7116	7125	7134	7143	7151	7159
77	6969	6980	6990	7000	7010	7019	7028	7037	7045	7053
76	6864	6874	6885	6895	6905	6914	6923	6932	6940	6948
75	6758	6769	6780	6790	6800	6809	6818	6827	6835	6843
74	6654	6665	6156	6685	6695	6704	6713	6722	6730	6738
73	6549	6560	6054	6581	6590	6600	6609	6618	6626	6634
72	6445	6456	5951	6477	6486	6496	6505	6514	6522	6530
71	6341	6352	5849	6373	6383	6392	6401	6410	6418	6427
70	6238	6249	5747	6270	6279	6289	6298	6307	6315	6323

2. Нижняя доверительная граница $\underline{P}$ для ВБР при биномиальном плане испытаний (при $q = 0,9$)

$\hat{P}$	$\underline{P} \cdot 10^4$ при объеме выборки N							
	3	4	5	6	7	8	9	10
1,00	4642	5623	6310	6813	7197	7499	7743	7943
0,99	4542	5509	6186	6882	7061	7359	7600	7798
0,98	4444	5397	6064	6554	6929	7223	7464	7657
0,97	4347	5287	5945	6429	6799	7090	7326	7520
0,96	4252	5178	5828	6306	6671	6960	7193	7386
0,95	4158	5071	5712	6185	6547	6832	7063	7254
0,94	4065	4965	5599	6066	6424	6707	6936	7126
0,93	3974	4862	5487	5949	6303	6583	6811	6999
0,92	3884	4759	5377	5833	6184	6462	6688	6875
0,91	3795	4658	5268	5720	6067	6343	6567	6752
0,90	3708	4558	5161	5608	5992	6225	6447	6632
0,89	3622	4460	5055	5497	5838	6109	6329	6513
0,88	3536	4363	4951	5388	5726	5994	6213	6395
0,87	3452	4267	4848	5281	5615	5881	6098	6279
0,86	3369	4173	4746	5174	5505	5769	5985	6165
0,85	3287	4079	4646	5069	5397	5659	5873	6052
0,84	3208	3987	4547	4965	5290	5550	5762	5940
0,83	3126	3896	4449	4863	5185	5442	5653	5829
0,82	3048	3806	4352	4761	5080	5335	5545	5720
0,81	2970	3717	4256	4661	4977	5230	5437	5611
0,80	2893	3629	4161	4562	4874	5125	5331	5504
0,79	2817	3542	4067	4464	4773	5022	5226	5398
0,78	2742	3456	3975	4366	4673	4919	5122	5292
0,77	2668	3371	3883	4270	4574	4818	5019	5188
0,76	2595	3288	3792	4175	4474	4717	4917	5085
0,75	2523	3205	3703	4081	4378	4618	4816	4982
0,74	2452	3123	3614	3988	4282	4519	4715	4881
0,73	2382	3042	3526	3896	4186	4422	4616	4780
0,72	2312	2962	3439	3804	4092	4325	4517	4680
0,71	2244	2882	3353	3714	3998	4229	4420	4581
0,70	2176	2804	3268	3624	3905	4134	4323	4483

Продолжение табл. 2

$\hat{P}$	$P \cdot 10^4$ при объеме выборки N									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1,00	8111	8254	8379	8483	8577	8660	8733	8799	8859	8913
0,99	7964	8105	8227	8332	8425	8506	8579	8645	8704	8757
0,98	7822	7961	8082	8186	8278	8359	8432	8496	8555	8608
0,97	7683	7821	7941	8045	8136	8217	8289	8353	8412	8465
0,96	7547	7685	7804	7907	7998	8078	8150	8215	8273	8326
0,95	7415	7552	7670	7772	7863	7943	8015	8079	8137	8190
0,94	7285	7421	7538	7641	7731	7811	7832	7947	8005	8058
0,93	7157	7293	7409	7512	7601	7681	7753	7817	7875	7928
0,92	7032	7167	7283	7385	7474	7554	7625	7690	7748	7801
0,91	6909	7043	7158	7260	7349	7429	7500	7564	7623	7676
0,90	6787	6920	7036	7137	7226	7305	7377	7441	7499	7552
0,89	6667	6800	6915	7016	7105	7184	7255	7319	7377	7431
0,88	6549	6681	6796	6896	6985	7064	7136	7199	7257	7310
0,87	6432	6564	6678	6778	6866	6945	7016	7080	7139	7192
0,86	6317	6448	6561	6661	6749	6828	6899	6963	7021	7047
0,85	6203	6333	6446	6546	6634	6712	6783	6847	6905	6958
0,84	6090	6220	6332	6431	6519	6597	6668	6732	6790	6843
0,83	5979	6108	6220	6318	6406	6484	6554	6618	6670	6729
0,82	5868	5996	6108	6206	6293	6371	6442	6505	6563	6616
0,81	5759	5887	5998	6095	6182	6260	6330	6394	6451	6504
0,80	5651	5778	5888	5986	9072	6150	6219	6283	6340	6393
0,79	5544	5670	5780	5877	5963	6040	6110	6173	6230	6283
0,78	5437	5563	5672	5769	5855	5931	6001	6064	6121	6174
0,77	5332	5457	5566	5662	5747	5824	5893	5956	6013	6066
0,76	5228	5352	5460	5555	5640	5717	5786	5848	5906	5958
0,75	5124	5247	5355	5450	5535	5611	5679	5742	5799	5851
0,74	5022	5144	5251	5345	5430	5505	5574	5636	5693	5745
0,73	4920	5041	5148	5242	5326	5401	5469	5531	5588	5640
0,72	4819	4940	5045	5139	5222	5297	5365	5427	5483	5535
0,71	4719	4839	4944	5037	5120	5194	5262	5323	5379	5431
0,70	4620	4739	4843	4935	5018	5092	5159	5220	5276	5327

Продолжение табл. 2

$\hat{P}$	$P \cdot 10^4$ при объеме выборки N									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1,00	8962	9006	9047	9085	9120	9152	9183	9211	9237	9261
0,99	8805	8850	8891	8928	8963	8995	9025	9053	9079	9103
0,98	8656	8701	8741	8779	8813	8845	8875	8903	8929	8954
0,97	8513	8557	8598	8635	8670	8702	8732	8760	8786	8811
0,96	8374	8418	8459	8497	8531	8564	8594	8622	8648	8673
0,95	8239	8283	8324	8361	8396	8429	8459	8487	8514	8539
0,94	8106	8151	8192	8230	8265	8297	8328	8356	8383	8408
0,93	7977	8021	8062	8100	8135	8168	8199	8227	8254	8279
0,92	7850	7894	7935	7973	8009	8042	8072	8101	8128	8153
0,91	7724	7769	7810	7848	7884	7917	7948	7977	8004	8029
0,90	7601	7646	7687	7725	7761	7794	7825	7854	7881	7907
0,89	7479	7524	7566	7604	7640	7673	7704	7733	7761	7786
0,88	7359	7404	7446	7484	7520	7553	7584	7614	7641	7667
0,87	7241	7285	7327	7366	7401	7435	7466	7496	7523	7549
0,86	7123	7168	7210	7248	7284	7318	7349	7379	7409	7432
0,85	7007	7052	7094	7132	7168	7202	7233	7264	7291	7317
0,84	6892	6937	6979	7017	7053	7088	7118	7148	7176	7202
0,83	6778	6823	6865	6903	6939	6773	7005	7034	7062	7089
0,82	6665	6710	6752	6790	6827	6860	6892	6922	6950	6976
0,81	6553	6598	6640	6678	6715	6748	6780	6810	6838	6864
0,80	6442	6487	6529	6567	6603	6637	6669	6699	6727	6753
0,79	6332	6377	6418	6457	6493	6527	6559	6588	6616	6643
0,78	6223	6267	6309	6348	6384	6417	6449	6479	6507	6533
0,77	6114	6159	6200	6239	6275	6309	6340	6370	6398	6425
0,76	6006	6051	6092	6131	6167	6201	6232	6262	6290	6317
0,75	5899	5944	5985	6024	6060	6093	6125	6155	6183	6209
0,74	5793	5837	5879	5917	5953	5987	6018	6048	6076	6102
0,73	5687	5732	5773	5811	5847	5881	5912	5942	5970	5996
0,72	5583	5627	5668	5706	5742	5775	5807	5836	5864	5891
0,71	5408	5522	5563	5601	5637	5670	5702	5731	5759	5786
0,70	5375	5419	5459	5497	5533	5566	5598	5627	5655	5681

Продолжение табл. 2

$\hat{P}$	$P \cdot 10^4$ при объеме выборки N									
	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1,00	9284	9306	9326	9345	9363	9380	9397	9412	9427	9441
0,99	9126	9147	9167	9186	9204	9222	9238	9253	9268	9282
0,98	8976	8998	9018	9038	9056	9073	9089	9105	9119	9133
0,97	8834	8856	8878	8895	8914	8931	8947	8963	8978	8992
0,96	8696	8718	8739	8758	8776	8794	8811	8827	8842	8856
0,95	8562	8584	8605	8625	8643	8661	8678	8694	8709	8724
0,94	8431	8453	8474	8494	8513	8531	8548	8564	8580	8595
0,93	8303	8326	8343	8367	8386	8404	8421	8437	8453	8468
0,92	8177	8200	8221	8241	8261	8279	8296	8313	8328	8344
0,91	8053	8076	8091	8118	8137	8156	8173	8190	8206	8221
0,90	7931	7954	7976	7996	8016	8034	8052	8069	8085	8100
0,89	7811	7834	7855	7876	7896	7914	7932	7949	7965	7981
0,88	7692	7715	7737	7757	7777	7796	7814	7831	7847	7863
0,87	7574	7597	7619	7640	7660	7679	7697	7714	7730	7746
0,86	7457	7480	7502	7523	7543	7562	7581	7598	7614	7630
0,85	7342	7365	7388	7408	7428	7447	7466	7483	7500	7515
0,84	7227	7251	7273	7294	7314	7333	7352	7369	7386	7402
0,83	7113	7137	7159	7181	7201	7220	7238	7256	7273	7289
0,82	7001	7024	7047	7068	7088	7108	7126	7144	7161	7170
0,81	6889	6913	6935	6957	6977	6996	7015	7032	7049	7066
0,80	6778	6802	6824	6846	6866	6886	6904	6922	6939	6955
0,79	6668	6692	6714	6736	6756	6776	6794	6812	6829	6845
0,78	6539	6582	6605	6626	6647	6666	6685	6703	6720	6736
0,77	6450	6474	6496	6518	6538	6558	6576	6594	6611	6628
0,76	6342	6365	6388	6410	6430	6450	6468	6486	6503	6520
0,75	6234	6258	6281	6302	6323	6342	6361	6379	6396	6412
0,74	6128	6151	6174	6195	6216	6235	6254	6272	6289	6306
0,73	6021	6045	6068	6089	6110	6129	6148	6166	6183	6199
0,72	5916	5940	5962	5984	6004	6024	6042	6060	6077	6094
0,71	5811	5834	5857	5878	5899	5918	5937	5955	5972	5989
0,70	5706	5730	5752	5774	5794	5814	5833	5850	5864	5884

Продолжение табл. 2

$\hat{p}$	$P \cdot 10^4$ при объеме выборки N									
	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1,00	9454	9467	9478	9490	9501	9512	9522	9532	9541	9550
0,99	9295	9307	9320	9331	9342	9353	9363	9373	9382	9391
0,98	9147	9160	9172	9183	9195	9205	9216	9276	9235	9244
0,97	9006	9019	9031	9043	9054	9065	9076	9086	9095	9105
0,96	8870	8883	8895	8907	8919	8930	8941	8951	8961	8970
0,95	8738	8751	8764	8776	8788	8799	8810	8820	8830	8840
0,94	8609	8622	8635	8647	8659	8671	8682	8692	8703	8712
0,93	8482	8496	8509	8522	8534	8545	8556	8567	8577	8587
0,92	8358	8372	8385	8398	8410	8422	8433	8444	8454	8465
0,91	8236	8250	8264	8276	8288	8300	8312	8323	8333	8343
0,90	8115	8129	8143	8156	8168	8180	8192	8203	8213	8224
0,89	7996	8010	8024	8037	8049	8061	8073	8084	8095	8106
0,88	7878	7892	7906	7919	7932	7944	7956	7967	7978	7989
0,87	7761	7775	7789	7803	7815	7828	7840	7851	7862	7873
0,86	7645	7660	7674	7687	7700	7713	7725	7736	7747	7758
0,85	7531	7545	7559	7573	7586	7598	7611	7622	7633	7644
0,84	7417	7432	7446	7459	7473	7485	7497	7509	7520	7531
0,83	7304	7319	7333	7347	7360	7373	7385	7397	7408	7419
0,82	7192	7207	7221	7235	7248	7261	7273	7285	7297	7308
0,81	7081	7096	7110	7124	7137	7150	7163	7174	7186	7197
0,80	6971	6986	7000	7014	7028	7040	7052	7064	7076	7087
0,79	6861	6876	6890	6904	6918	6930	6943	6955	6966	6978
0,78	6752	6767	6781	6795	6809	6822	6834	6846	6858	6869
0,77	6643	6658	6673	6687	6700	6713	6726	6738	6749	6761
0,76	6535	6551	6565	6579	6593	6606	6618	6630	6642	6653
0,75	6428	6443	6458	6472	6485	6498	6511	6523	6535	6546
0,74	6321	6337	6351	6365	6379	6392	6404	6416	6428	6440
0,73	6215	6230	6245	6259	6273	6286	6298	6310	6322	6334
0,72	6110	6125	6139	6153	6167	6180	6193	6205	6217	6228
0,71	6004	6020	6034	6048	6062	6075	6087	6100	6111	6123
0,70	5900	5915	5930	5944	5957	5970	5983	5995	6007	6018

3. Нижняя доверительная граница для ВБР при биномиальном плане испытаний (при $q = 0,8$)

$\hat{P}$	$\underline{P}$ при объеме выборки N											
	50	100	300	500	1000	2000	3000	4000	5000	10 000	50 000	100 000
0,95	904	922	936	940	943	945	946	947	947	948	949	950
0,99	954	970	981	984	986	988	988	988	989	989	9 ₂ 00	9 ₂ 00
0,995	961	977	988	9 ₂ 02	9 ₂ 21	9 ₂ 32	9 ₂ 36	9 ₂ 38	9 ₂ 40	9 ₂ 43	9 ₂ 47	9 ₂ 48
0,999	967	983	9 ₂ 32	9 ₂ 54	9 ₂ 70	9 ₂ 79	9 ₂ 82	9 ₂ 83	9 ₂ 84	9 ₂ 86	9 ₂ 87	9 ₂ 89
0,9 ₃ 5	968	983	9 ₂ 39	9 ₂ 61	9 ₂ 77	9 ₂ 85	9 ₂ 88	9 ₂ 89	9 ₃ 02	9 ₃ 21	9 ₃ 40	9 ₃ 43
0,9 ₄	—	984	9 ₂ 45	9 ₂ 66	9 ₂ 82	9 ₃ 05	9 ₃ 32	9 ₃ 46	9 ₃ 54	9 ₃ 70	9 ₃ 84	9 ₃ 86
0,9 ₄ 5	—	—	9 ₂ 46	9 ₂ 67	9 ₂ 83	9 ₃ 12	9 ₃ 39	9 ₃ 53	9 ₃ 61	9 ₃ 77	9 ₄ 02	9 ₄ 21
0,9 ₅	—	—	—	9 ₂ 68	9 ₂ 84	9 ₃ 18	9 ₃ 45	9 ₃ 58	9 ₃ 66	9 ₃ 82	9 ₄ 54	9 ₄ 70
0,9 ₅ 5	—	—	—	—	—	9 ₃ 19	9 ₃ 46	9 ₃ 59	9 ₃ 67	9 ₃ 83	9 ₄ 61	9 ₄ 77
0,9 ₆	—	—	—	—	—	—	—	9 ₃ 60	9 ₃ 68	9 ₃ 84	9 ₄ 66	9 ₄ 82
0,9 ₇	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	9 ₄ 68	9 ₄ 84

Пр и м е ч а н и е. Индекс при цифре 9 означает, сколько раз следует повторить эту цифру. Например, 9₃41 означает 0,999941.

4. Нижняя доверительная граница для ВБР при биномиальном плане испытаний высоконадежных изделий (при $q = 0,9$)

$\hat{P}$	$\underline{P}$ при объеме выборки N					
	50	100	300	500	1000	2000
0,95	0,880	0,909	0,930	0,935	0,940	0,943
0,99	0,939	0,962	0,978	0,982	0,985	0,987
0,995	0,947	0,969	0,985	0,988	0,9 ₂ 07	0,9 ₂ 23
0,9 ₃	0,953	0,976	0,9 ₂ 07	0,9 ₂ 38	0,9 ₂ 61	0,9 ₂ 73
0,9 ₃ 5	0,954	0,976	0,9 ₂ 15	0,9 ₂ 46	0,9 ₂ 69	0,9 ₂ 81
0,9 ₄	0,955	0,977	0,9 ₂ 22	0,9 ₂ 52	0,9 ₂ 75	0,9 ₂ 87
0,9 ₄ 5	0,955	0,977	0,9 ₂ 23	0,9 ₂ 53	0,9 ₂ 76	0,9 ₂ 88
0,9 ₅	0,955	0,977	0,9 ₂ 23	0,9 ₂ 54	0,9 ₂ 77	0,9 ₂ 88
0,9 ₅ 5	0,955	0,977	0,9 ₂ 23	0,9 ₂ 54	0,9 ₂ 77	0,9 ₂ 88
0,9 ₆	0,955	0,977	0,9 ₂ 24	0,9 ₂ 54	0,9 ₂ 77	0,9 ₂ 88
0,9 ₇	0,955	0,977	0,9 ₂ 24	0,9 ₂ 54	0,9 ₂ 77	0,9 ₂ 82

Продолжение табл. 4

$\hat{P}$	$\underline{P}$ при объеме выборки N					
	3000	4000	5000	10 000	50 000	100 000
0,95	0,945	0,945	0,946	0,947	0,948	0,950
0,99	0,987	0,988	0,988	0,989	0,989	0,989
0,995	0,9 ₂ 29	0,9 ₂ 32	0,9 ₂ 35	0,9 ₂ 40	0,9 ₂ 46	0,9 ₂ 47
0,9 ₃	0,9 ₂ 78	0,9 ₂ 80	0,9 ₂ 82	0,9 ₂ 85	0,9 ₂ 88	0,9 ₂ 89
0,9 ₃ 5	0,9 ₂ 85	0,9 ₂ 87	0,9 ₂ 88	0,9 ₃ 07	0,9 ₃ 35	0,9 ₃ 40
0,9 ₄	0,9 ₃ 07	0,9 ₃ 26	0,9 ₃ 38	0,9 ₃ 61	0,9 ₃ 81	0,9 ₃ 85
0,9 ₄ 5	0,9 ₃ 15	0,9 ₃ 34	0,9 ₃ 46	0,9 ₃ 69	0,9 ₃ 88	0,9 ₄ 90
0,9 ₅	0,9 ₃ 22	0,9 ₃ 41	0,9 ₃ 52	0,9 ₃ 75	0,9 ₄ 37	0,9 ₄ 51
0,9 ₅ 5	0,9 ₃ 22	0,9 ₃ 41	0,9 ₃ 53	0,9 ₃ 76	0,9 ₄ 46	0,9 ₄ 69
0,9 ₆	0,9 ₃ 23	0,9 ₃ 42	0,9 ₃ 54	0,9 ₃ 77	0,9 ₄ 52	0,9 ₄ 75
0,9 ₇	0,9 ₃ 23	0,9 ₃ 42	0,9 ₃ 54	0,9 ₃ 77	0,9 ₄ 54	0,9 ₄ 76

Примечание. Индекс при цифре 9 означает, сколько раз следует повторить эту цифру. Например, 0,9₃41 означает 0,999941.

Б. Выбор объемов биномиальных испытаний (объемов выборки) по оценкам $(P, \hat{P})$ при $q = 0,8$

P	Объем выборки N при $\hat{P}$														
	.995	.999	.99	.98	.97	.96	.95	.94	.93	.92	.91	.90	.89	.88	.87
.999	4688	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
.99	175	190	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
.98	84	87	235	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
.97	55	57	99	305	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
.96	41	42	62	116	373	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
.95	33	33	45	69	133	439	—	—	—	—	—	—	—	—	—
.94	27	27	35	49	77	149	502	—	—	—	—	—	—	—	—
.93	23	23	29	37	53	84	165	564	—	—	—	—	—	—	—
.92	20	20	24	30	40	57	91	181	625	—	—	—	—	—	—
.91	18	18	21	25	32	42	61	97	195	684	—	—	—	—	—
.90	16	16	18	22	27	34	45	64	104	210	743	—	—	—	—
.89	15	15	16	19	23	28	35	47	68	110	224	797	—	—	—
.88	13	13	15	17	20	24	29	37	49	71	116	238	853	—	—
.87	12	12	14	15	18	21	25	30	38	52	75	122	251	905	—
.86	11	11	12	14	16	18	21	25	31	40	54	78	128	264	956
.85	11	11	12	13	14	16	19	22	26	32	41	56	81	134	277
.84	9.4	9.4	11	12	13	15	17	19	23	27	33	43	58	84	139
.83	8.8	8.8	9.5	11	12	13	15	17	20	23	28	34	44	60	87
.82	8.2	8.3	8.9	9.7	11	12	14	15	17	20	24	29	35	45	62

Продолжение табл. 5

$\hat{P}$	Объем выборки N при $\hat{P}$														
	.9995	.999	.99	.98	.97	.96	.95	.94	.93	.92	.91	.90	.89	.88	.87
.81	7.8	7.8	8.3	9.1	9.9	11	12	14	16	18	21	24	29	36	47
.80	7.3	7.4	7.9	8.5	9.2	11	12	13	14	16	18	21	25	30	37
.79	6.9	7.0	7.4	8.0	8.6	9.4	11	12	13	14	16	19	21	25	31
.78	6.6	6.6	7.0	7.5	8.1	8.7	9.5	11	12	13	15	17	19	22	26
.77	6.3	6.3	6.6	7.1	7.6	8.2	8.9	9.6	11	12	13	15	17	19	22
.76	6.0	6.0	6.3	6.7	7.2	7.7	8.3	9.0	9.8	11	12	14	15	17	20
.75	5.7	5.7	6.0	6.4	6.8	7.3	7.8	8.4	9.1	9.9	11	12	14	15	17
.74	5.4	5.4	5.7	6.1	6.4	6.9	7.3	7.9	8.5	9.2	10	11	13	14	16
.73	5.2	5.2	5.5	5.8	6.1	6.5	6.9	7.4	8.0	8.6	9.3	11	12	13	14
.72	5.0	5.0	5.2	5.5	5.8	6.2	6.5	7.0	7.5	8.0	8.7	9.4	11	12	13
.71	4.8	4.8	5.0	5.3	5.5	5.9	6.2	6.6	7.0	7.5	8.1	8.7	9.5	11	12
.70	4.6	4.6	4.8	5.0	5.3	5.6	5.9	6.3	6.7	7.1	7.6	8.2	8.8	9.6	11

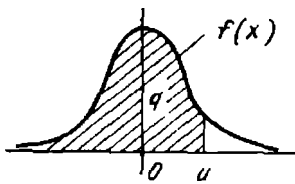
6. Выбор объемов биномиальных испытаний (объемов выборки) по оценкам $(P, \hat{P})$ при $q = 0,9$

$\hat{P}$	Объем выборки N при $\hat{P}$														
	.9995	.999	.99	.98	.97	.96	.95	.94	.93	.92	.91	.90	.89	.88	.87
0.999	7813	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0.99	252	276	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
.98	120	125	394	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
.97	78	81	155	552	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
.96	58	60	94	194	707	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
.95	46	47	67	111	232	855	—	—	—	—	—	—	—	—	—
.94	38	39	52	76	128	270	997	—	—	—	—	—	—	—	—
.93	33	33	42	58	85	144	306	1150	—	—	—	—	—	—	—
.92	28	29	35	46	63	95	160	341	1290	—	—	—	—	—	—
.91	25	25	30	38	50	69	103	175	376	1426	—	—	—	—	—
.90	23	23	27	33	41	54	75	112	191	409	1559	—	—	—	—
.89	20	21	24	28	35	44	58	80	120	205	442	1688	—	—	—
.88	19	19	21	25	30	37	47	61	85	128	219	474	1819	—	—
.87	17	17	19	22	26	32	39	49	65	90	136	233	506	—	—
.86	16	16	18	20	24	28	33	41	52	68	95	144	247	535	—
.85	15	15	16	19	21	25	29	35	43	54	72	100	151	260	565
.84	14	14	15	17	19	22	26	30	36	45	57	75	105	159	273
.83	13	13	14	16	18	20	23	27	31	38	46	59	78	109	165
.82	12	12	13	15	16	18	21	24	27	32	39	48	61	81	114
.81	11	12	12	14	15	17	19	21	24	28	34	40	50	63	84
.80	11	11	12	13	14	15	17	19	22	25	29	35	42	52	66
.79	9.8	9.9	11	12	13	14	16	18	20	23	26	30	36	43	53

Продолжение табл. 6

P	Объем выборки N при $\hat{P}$														
	.9995	.999	.99	.98	.97	.96	.95	.94	.93	.92	.91	.90	.89	.88	.87
.78	9.3	9.4	10	11	12	13	15	16	18	20	23	27	31	37	44
.77	8.9	8.9	9.5	11	12	13	14	15	17	19	21	24	27	32	38
.76	8.4	8.5	9.0	9.7	11	12	13	14	15	17	19	21	24	28	33
.75	8.1	8.1	8.6	9.2	9.9	11	12	13	14	16	17	19	22	25	29
.74	7.7	7.7	8.2	8.7	9.4	11	11	12	13	15	16	18	20	22	25
.73	7.4	7.4	7.8	8.3	8.9	9.5	11	12	13	14	15	16	18	20	23
.72	7.0	7.1	7.5	7.9	8.5	9.0	9.7	11	12	13	14	15	17	18	21
.71	6.8	6.8	7.1	7.6	8.1	8.6	9.2	9.9	11	12	13	14	15	17	19
.70	6.5	6.5	6.8	7.2	7.7	8.2	8.7	9.3	10	11	12	13	14	16	17

7. Значения функции нормального распределения



μ_P	P при q									
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0 * 500	0 * 504	0 * 508	0 * 512	0 * 516	0 * 520	0 * 524	0 * 528	0 * 532	0 * 536
0,1	0 * 540	0 * 544	0 * 548	0 * 552	0 * 556	0 * 560	0 * 564	0 * 567	0 * 571	0 * 575
0,2	0 * 579	0 * 583	0 * 587	0 * 591	0 * 595	0 * 599	0 * 603	0 * 606	0 * 610	0 * 614
0,3	0 * 618	0 * 622	0 * 626	0 * 629	0 * 633	0 * 637	0 * 641	0 * 644	0 * 648	0 * 652
0,4	0 * 655	0 * 659	0 * 663	0 * 666	0 * 670	0 * 674	0 * 677	0 * 681	0 * 684	0 * 688
0,5	0 * 691	0 * 695	0 * 698	0 * 702	0 * 705	0 * 709	0 * 712	0 * 716	0 * 719	0 * 722
0,6	0 * 726	0 * 729	0 * 732	0 * 736	0 * 739	0 * 742	0 * 745	0 * 749	0 * 752	0 * 755
0,7	0 * 758	0 * 761	0 * 764	0 * 767	0 * 770	0 * 773	0 * 776	0 * 779	0 * 782	0 * 785
0,8	0 * 788	0 * 791	0 * 794	0 * 797	0 * 800	0 * 802	0 * 805	0 * 808	0 * 811	0 * 813
0,9	0 * 816	0 * 819	0 * 821	0 * 824	0 * 826	0 * 829	0 * 831	0 * 834	0 * 836	0 * 839
1,0	0 * 841	0 * 844	0 * 846	0 * 848	0 * 851	0 * 853	0 * 855	0 * 858	0 * 860	0 * 862
1,1	0 * 864	0 * 867	0 * 869	0 * 871	0 * 873	0 * 875	0 * 877	0 * 879	0 * 881	0 * 883
1,2	0 * 885	0 * 887	0 * 889	0 * 891	0 * 893	0 * 894	0 * 896	0 * 898	0 * 900	0 * 015
1,3	1 * 032	1 * 049	1 * 066	1 * 082	1 * 099	1 * 115	1 * 131	1 * 147	1 * 162	1 * 177
1,4	1 * 192	1 * 207	1 * 222	1 * 236	1 * 251	1 * 265	1 * 279	1 * 292	1 * 306	1 * 319
1,5	1 * 332	1 * 345	1 * 357	1 * 370	1 * 382	1 * 394	1 * 406	1 * 418	1 * 429	1 * 441
1,6	1 * 452	1 * 463	1 * 474	1 * 484	1 * 495	1 * 505	1 * 515	1 * 525	1 * 535	1 * 545
1,7	1 * 554	1 * 564	1 * 573	1 * 582	1 * 591	1 * 599	1 * 608	1 * 616	1 * 625	1 * 633
1,8	1 * 641	1 * 649	1 * 656	1 * 664	1 * 671	1 * 678	1 * 686	1 * 693	1 * 699	1 * 706
1,9	1 * 713	1 * 719	1 * 726	1 * 732	1 * 738	1 * 744	1 * 750	1 * 756	1 * 761	1 * 767

Продолжение табл. 7

u_p	P при q									
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
2,0	1 * 772	1 * 778	1 * 783	1 * 783	1 * 793	1 * 798	1 * 803	1 * 808	1 * 812	1 * 817
2,1	1 * 821	1 * 826	1 * 830	1 * 834	1 * 838	1 * 842	1 * 846	1 * 850	1 * 854	1 * 857
2,2	1 * 861	1 * 864	1 * 868	1 * 871	1 * 875	1 * 878	1 * 881	1 * 884	1 * 887	1 * 890
2,3	1 * 893	1 * 896	1 * 898	2 * 010	2 * 036	2 * 061	2 * 086	2 * 111	2 * 134	2 * 158
2,4	2 * 180	2 * 202	2 * 224	2 * 245	2 * 266	2 * 286	2 * 305	2 * 324	2 * 343	2 * 361
2,5	2 * 379	2 * 396	2 * 413	2 * 430	2 * 446	2 * 461	2 * 477	2 * 492	2 * 506	2 * 520
2,6	2 * 534	2 * 547	2 * 560	2 * 573	2 * 585	2 * 598	2 * 609	2 * 621	2 * 632	2 * 643
2,7	2 * 653	2 * 664	2 * 674	2 * 683	2 * 693	2 * 702	2 * 711	2 * 720	2 * 728	2 * 736
2,8	2 * 744	2 * 752	2 * 760	2 * 767	2 * 774	2 * 781	2 * 788	2 * 795	2 * 801	2 * 807
2,9	2 * 813	2 * 819	2 * 825	2 * 831	2 * 836	2 * 841	2 * 846	2 * 851	2 * 856	2 * 861
3,0	2 * 865	2 * 869	2 * 874	2 * 878	2 * 882	2 * 886	2 * 889	2 * 893	2 * 896	2 * 900
3,1	3 * 032	3 * 065	3 * 096	3 * 126	3 * 155	3 * 184	3 * 211	3 * 238	3 * 264	3 * 289
3,2	3 * 313	3 * 336	3 * 359	3 * 381	3 * 402	3 * 423	3 * 443	3 * 462	3 * 481	3 * 499
3,3	3 * 517	3 * 534	3 * 550	3 * 566	3 * 581	3 * 596	3 * 610	3 * 624	3 * 638	3 * 651
3,4	3 * 663	3 * 675	3 * 687	3 * 693	3 * 709	3 * 720	3 * 730	3 * 740	3 * 749	3 * 758
3,5	3 * 767	3 * 776	3 * 784	3 * 792	3 * 800	3 * 807	3 * 815	3 * 822	3 * 828	3 * 835
3,6	3 * 841	3 * 847	3 * 853	3 * 858	3 * 864	3 * 869	3 * 874	3 * 879	3 * 883	3 * 888
3,7	3 * 892	3 * 896	4 * 004	4 * 043	4 * 080	4 * 116	4 * 150	4 * 184	4 * 216	4 * 247
3,8	4 * 277	4 * 305	4 * 333	4 * 359	4 * 385	4 * 409	4 * 433	4 * 456	4 * 478	4 * 499
3,9	4 * 519	4 * 539	4 * 557	4 * 575	4 * 593	4 * 609	4 * 625	4 * 641	4 * 655	4 * 670

Продолжение табл. 7

u_p	P при q				
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4
4	4 * 683	4 * 793	4 * 867	5 * 146	5 * 459
5	5 * 713	6 * 830	7 * 004	7 * 421	7 * 667
6	9 * 013	9 * 470	9 * 718	9 * 851	10 * 223
7	11 * 872	12 * 376	12 * 699	12 * 856	13 * 319
8	15 * 378	15 * 725	15 * 880	16 * 479	16 * 777
9	15 * 887	19 * 548	19 * 821	20 * 298	20 * 727
10	23 * 238	23 * 724	24 * 009	24 * 648	24 * 876
11	27 * 809	28 * 373	25 * 796	29 * 344	29 * 791
12	32 * 822	33 * 472	33 * 845	34 * 547	34 * 869
13	38 * 388	38 * 835	39 * 561	39 * 884	40 * 698
14	44 * 221	44 * 810	45 * 542	45 * 891	46 * 741
15	50 * 633	51 * 190	51 * 823	52 * 618	53 * 182
16	57 * 361	57 * 872	58 * 748	59 * 507	60 * 044
17	64 * 589	65 * 258	65 * 867	66 * 765	67 * 587

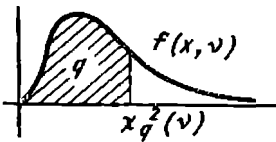
Продолжение табл. 7

u_p	P при q				
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
4	5 * 660	5 * 789	5 * 870	6 * 207	6 * 521
5	7 * 810	7 * 893	8 * 401	8 * 668	8 * 818
6	10 * 598	10 * 794	10 * 896	11 * 477	11 * 740
7	13 * 681	13 * 852	14 * 320	14 * 690	14 * 861
8	17 * 032	17 * 601	17 * 834	18 * 316	18 * 721
9	20 * 895	21 * 600	21 * 849	22 * 437	22 * 792
10	25 * 568	25 * 851	26 * 491	26 * 828	27 * 424
11	30 * 340	30 * 794	31 * 363	31 * 805	32 * 408
12	35 * 627	35 * 894	36 * 704	37 * 180	37 * 775
13	41 * 218	41 * 800	42 * 492	42 * 873	43 * 683
14	47 * 394	47 * 860	48 * 678	49 * 268	49 * 835
15	53 * 827	54 * 636	55 * 244	55 * 844	56 * 683
16	60 * 817	61 * 652	62 * 345	62 * 878	63 * 775
17	68 * 284	68 * 877	69 * 790	70 * 647	71 * 410

Примечания: 1. Цифра перед * означает число девяток между нулем и первой значащей цифрой, отличной от 9, в десятичной записи числа $\theta \in (0,1)$. Например, число 0,999273 в таблице имеет вид 3 * 273.

2. Величины q таковы, что $q = \int_{-\infty}^y f(x) dx$, где $f(x)$ — плотность стандартного нормального распределения.

8. Квантиль χ^2 -распределения (χ^2_q)



v	χ^2_q при q							
	0,01	0,05	0,1	0,2	0,8	0,9	0,95	0,99
1	0,00016	0,0039	0,0156	0,06	1,64	2,71	3,84	6,63
2	0,020	0,103	0,211	0,44	3,22	4,61	5,99	9,21
3	0,115	0,352	0,584	1,00	4,64	6,25	7,81	11,3
4	0,297	0,711	1,064	1,65	5,99	7,78	9,49	13,3
5	0,554	1,145	1,610	2,34	7,29	9,24	11,1	15,1

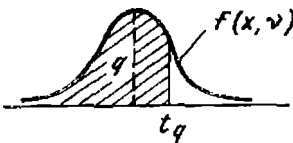
Продолжение табл. 8

v	χ_q^2 при q							
	0,01	0,05	0,1	0,2	0,8	0,9	0,95	0,99
6	0,872	1,635	2,204	3,07	8,56	10,6	12,6	16,8
7	1,24	2,167	2,833	3,80	9,80	12,0	14,1	18,5
8	1,65	2,733	3,490	4,60	11,0	13,4	15,5	20,1
9	2,09	3,325	4,168	5,38	12,2	14,7	16,9	21,7
10	2,56	3,940	4,865	6,18	13,4	16,0	18,3	23,2
11	3,05	4,575	5,578	6,99	14,6	17,3	19,7	24,7
12	3,57	5,226	6,304	7,80	15,8	18,5	21,0	26,2
13	4,11	5,892	7,041	8,60	17,0	19,8	22,4	27,7
14	4,66	6,571	7,790	9,46	18,2	21,1	23,7	29,1
15	5,23	7,261	8,547	10,30	19,3	22,3	25,0	30,6
16	5,81	7,962	9,312	11,15	20,5	23,5	26,3	32,0
17	6,41	8,672	10,09	12,00	21,6	24,8	27,6	33,4
18	7,01	9,390	10,86	12,90	22,8	26,0	28,9	34,8
19	7,63	10,12	11,65	13,70	23,9	27,2	30,1	36,2
20	8,26	10,85	12,44	14,60	25,0	28,4	31,4	37,6
21	8,90	11,59	13,24	15,4	26,9	29,6	32,7	38,9
22	9,54	12,34	14,04	16,3	27,3	30,8	33,9	40,3
23	10,20	13,09	14,85	17,2	28,4	32,0	35,2	41,6
24	10,86	13,85	15,66	18,1	29,6	33,2	36,4	43,0
25	11,52	14,61	16,47	18,9	30,7	34,4	37,7	44,3
26	12,20	15,38	17,29	19,8	31,8	35,6	38,9	45,6
27	12,88	16,15	18,11	20,7	32,9	36,7	40,1	47,0
28	13,56	16,93	18,94	21,6	34,0	37,9	41,3	48,3
29	14,26	17,71	19,77	22,5	35,1	39,1	42,6	49,6
30	14,95	18,49	20,60	23,4	36,3	40,3	43,8	50,9
40	22,16	26,51	29,05	32,3	47,3	51,8	49,8	63,7
60	37,48	43,19	46,46	—	—	74,4	79,1	88,4
120	86,92	95,70	100,62	—	—	140,2	146,6	158,9

Примечание. Величины $\chi_q^2(v)$ таковы, что $q = \int_0^{\chi_q^2(v)} f(x, v) dx$, где $f(x, v)$ — плотность χ^2 -распределения с v степенями свободы.

Для большого числа степеней свободы можно использовать приближенную формулу $\chi_q^2(v) \simeq \frac{1}{2} [u_q + \sqrt{2v - 1}]^2$, где u_q — квантиль нормального распределения.

9. Квантиль *t*-распределения Стьюдента



ν	<i>t_q</i> при <i>q</i>						
	0,7	0,8	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995
1	0,727	1,376	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,540	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,538	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,537	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,536	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,533	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,533	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,532	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,532	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,531	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	0,531	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,531	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,531	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,530	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,530	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,530	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
40	0,529	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
60	0,527	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
120	0,526	0,845	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617
∞	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

Примечание. Величины *t_q* таковы, что $q = \int_{t_q}^{\infty} f(x, \nu) dx$, где *f* (*x*, *ν*) — плотность распределения Стьюдента с *ν* степенями свободы. В таблице приведены значения *t_q* лишь для *q* > 0,5, так как *t_{1-q}* = −*t_q* (например, *t_{0,1}* = −*t_{0,9}*).

10. Доверительные границы для параметра δ (параметра нецентрального распределения Стьюдента)
(таблица составлена Г. В. Мартыновым и В. С. Беляевой)

$\hat{h}$	$\underline{h} = \underline{\delta}/\sqrt{N}$ при $q = 0,8$ и объеме выборки N										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	50
0.50	—0.565	—0.421	0.009	0.025	0.035	0.042	0.047	0.185	0.189	0.272	0.370
0.80	—0.377	—0.190	0.240	0.271	0.291	0.305	0.315	0.449	0.456	0.553	0.658
1.00	—0.264	—0.043	0.385	0.488	0.456	0.475	0.489	0.620	0.630	0.736	0.848
1.10	—0.210	—0.028	0.456	0.505	0.537	0.559	0.575	0.704	0.715	0.827	0.942
1.20	—0.158	0.097	0.525	0.581	0.617	0.641	0.660	0.787	0.800	0.918	1.036
1.30	—0.108	0.166	0.593	0.656	0.695	0.723	0.744	0.869	1.884	1.008	1.130
1.40	—0.059	0.233	0.661	0.729	0.774	0.804	0.827	0.951	0.968	1.097	1.224
1.50	—0.0012	0.299	0.727	0.802	0.851	0.885	0.910	1.033	1.051	1.187	1.317
1.60	—0.034	0.364	0.793	0.875	0.928	0.965	0.992	1.114	1.133	1.267	1.410
1.70	0.079	0.428	0.858	0.946	1.004	1.044	1.074	1.194	1.215	1.364	1.503
1.80	0.123	0.491	0.922	1.017	1.079	1.123	1.155	1.274	1.297	1.453	1.596
1.90	0.165	0.553	0.986	1.088	1.154	1.201	1.236	1.354	1.379	1.541	1.689
2.00	0.207	0.615	1.049	1.158	1.229	1.279	1.316	1.433	1.460	1.629	1.781
2.50	0.404	0.910	1.360	1.502	1.596	1.662	1.712	1.827	1.862	2.066	2.243
3.00	0.548	1.191	1.669	1.839	1.955	2.038	2.101	2.216	2.259	2.499	2.702
4.00	0.912	1.724	2.261	2.533	2.663	2.779	2.867	2.988	3.046	3.360	3.617
5.00	1.212	2.234	2.851	3.158	3.362	3.510	3.623	3.754	3.828	4.217	4.528
10.00	2.545	4.663	5.810	6.384	6.811	7.132	7.362	7.559	7.679	8.477	9.061

$\hat{h}$	$\underline{h} = \underline{\delta} / \sqrt{N}$ при $q = 0,9$ и объеме выборки N										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	50
0.50	—1.111	—0.872	—0.225	—0.206	—0.194	—0.186	—0.180	0.030	0.034	0.157	0.303
0.80	—0.944	—0.654	—0.013	0.025	0.049	0.066	0.078	0.281	0.290	0.430	0.586
1.00	—0.847	—0.520	0.118	0.169	0.203	0.226	0.243	0.441	0.454	0.607	0.771
1.10	—0.801	—0.455	0.181	0.239	0.277	0.304	0.324	0.519	0.534	0.694	0.863
1.20	—0.758	—0.393	0.242	0.307	0.351	0.381	0.404	0.596	0.613	0.781	0.955
1.30	—0.716	—0.331	0.301	0.374	0.423	0.457	0.483	0.673	0.642	0.867	1.046
1.40	—0.675	—0.272	0.360	0.440	0.494	0.532	0.560	0.748	0.769	0.952	1.136
1.50	—0.636	—0.213	0.417	0.505	0.564	0.606	0.637	0.823	0.846	1.037	1.227
1.60	—0.599	—0.156	0.473	0.569	0.633	0.679	0.713	0.897	0.922	1.121	1.317
1.70	—0.563	—0.101	0.528	0.632	0.701	0.751	0.788	0.970	0.997	1.205	1.407
1.80	—0.527	—0.046	0.583	0.694	0.769	0.822	0.863	1.043	1.072	1.289	1.496
1.90	—0.483	0.008	0.636	0.755	0.835	0.893	0.937	1.115	1.147	1.372	1.586
2.00	—0.460	0.060	0.689	0.816	0.902	0.963	1.010	1.187	1.221	1.455	1.675
2.50	—0.306	0.309	0.945	1.111	1.224	1.306	1.369	1.540	1.585	1.865	2.118
3.00	—0.167	0.541	1.191	1.396	1.536	1.639	1.718	1.887	1.943	2.270	2.559
4.00	0.677	0.966	1.665	1.947	2.142	2.286	2.396	2.570	2.646	3.071	3.436
5.00	0.292	1.358	2.127	2.486	2.734	2.918	3.060	3.243	3.342	3.866	4.311
15.00	10.149	3.119	4.393	5.097	5.633	6.009	6.289	6.528	6.769	7.824	8.673

$\hat{h}$	$\underline{h} = \underline{\delta}/\sqrt{N}$ при $q = 0,95$ и объеме выборки N										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	50
0.50	—1.719	—1.243	—0.418	—0.397	—0.383	—0.374	—0.367	—0.099	—0.093	0.062	0.248
0.80	—1.571	—1.037	—0.219	—0.178	—0.150	—0.131	—0.117	—0.143	0.154	0.328	0.527
1.00	—1.487	—0.911	—0.099	—0.043	—0.005	0.021	0.041	0.295	0.310	0.500	0.708
1.10	—1.448	—0.852	—0.042	0.022	0.065	0.095	0.118	0.360	0.386	0.548	0.798
1.20	—1.412	—0.794	0.013	0.085	0.133	0.168	0.194	0.441	0.461	0.668	0.888
1.30	—1.376	—0.738	0.066	0.146	0.200	0.239	0.268	0.513	0.535	0.751	0.976
1.40	—1.343	—0.684	0.118	0.206	0.266	0.309	0.342	0.583	0.607	0.833	1.065
1.50	—1.310	—0.631	0.169	0.265	0.331	0.378	0.414	0.652	0.679	0.914	1.153
1.60	—1.279	—0.579	0.218	0.323	0.394	0.446	0.485	0.721	0.750	0.995	1.240
1.70	—1.249	—0.529	0.267	0.379	0.456	0.513	0.556	0.789	0.821	1.075	1.327
1.80	—1.221	—0.480	0.314	0.435	0.518	0.579	0.625	0.854	0.890	1.155	1.414
1.90	—1.195	—0.433	0.361	0.490	0.579	0.644	0.694	0.922	0.959	1.234	1.501
2.00	—1.165	—0.386	0.406	0.543	0.639	0.708	0.762	0.988	1.028	1.313	1.587
2.50	—1.041	—0.168	0.625	0.803	0.928	1.021	1.092	1.311	1.363	1.702	2.017
3.00	—0.930	0.031	0.831	1.050	1.205	1.321	1.410	1.625	1.690	2.084	2.442
4.00	—0.736	0.387	1.220	1.521	1.736	1.897	2.023	2.240	2.328	2.838	3.286
5.00	—0.567	0.706	1.592	1.974	2.248	2.455	2.617	2.844	2.955	3.583	4.125
10.00	0.122	2.057	3.334	4.156	4.711	5.129	5.488	5.850	6.045	7.254	8.270

$\hat{h}$	$\bar{h} = \bar{\delta}/\sqrt{N}$ при $q = 0,8$ и объеме выборки N										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	50
0.50	1.264	1.307	0.912	0.914	0.916	0.917	0.917	0.783	0.783	0.714	0.625
0.80	1.559	1.605	1.230	1.230	1.229	1.229	1.228	1.101	1.099	1.026	0.934
1.00	1.763	1.811	1.451	1.447	1.444	1.442	1.439	1.317	1.314	1.237	1.142
1.10	1.868	1.916	1.563	1.558	1.553	1.549	1.546	1.426	1.422	1.343	1.246
1.20	1.974	2.022	1.676	1.669	1.663	1.658	1.654	1.536	1.532	1.450	1.351
1.30	2.081	2.129	1.790	1.781	1.773	1.767	1.762	1.647	1.641	1.557	1.456
1.40	2.189	2.237	1.906	1.894	1.885	1.877	1.871	1.758	1.752	1.664	1.562
1.50	2.299	2.346	2.022	2.008	1.997	1.988	1.981	1.870	1.863	1.772	1.667
1.60	2.410	2.456	2.138	2.122	2.109	2.099	2.091	1.982	1.974	1.880	1.775
1.70	2.522	2.567	2.256	2.237	2.222	2.211	2.202	2.095	2.086	1.989	1.879
1.80	2.635	2.679	2.373	2.352	2.336	2.323	2.313	2.208	2.198	2.098	1.985
1.90	2.749	2.792	2.492	2.469	2.450	2.436	2.424	2.321	2.311	2.207	2.091
2.00	2.864	2.906	2.611	2.585	2.565	2.549	2.536	2.435	2.423	2.316	2.197
2.50	3.450	3.483	3.211	3.173	3.144	3.120	3.102	3.007	2.991	2.864	2.730
3.00	4.053	4.074	3.817	3.768	3.729	3.698	3.673	3.583	3.563	3.416	3.265
4.00	5.284	5.283	5.041	4.969	4.912	4.866	4.829	4.743	4.714	4.526	6.377
5.00	6.535	6.515	6.271	6.178	6.104	6.044	5.995	5.009	5.872	5.640	5.410
10.00	12.878	12.773	12.420	12.255	12.098	11.975	11.874	11.770	11.699	11.243	10.755

$\hat{h}$	$\bar{h} = \bar{\delta} / \sqrt{N}$ при $q = 0,9$ к объему выборки N										
	2	3	4	5	6	7		9	10	20	50
0.50	1.73	1.759	1.149	1.148	1.147	1.146	1.145	0.940	0.939	0.830	0.692
0.80	2.06	2.079	1.496	1.485	1.477	1.472	1.468	1.273	1.268	1.151	1.006
1.00	2.30	2.304	1.741	1.721	1.707	1.697	1.690	1.503	1.495	1.369	1.219
1.10	2.43	2.420	1.867	1.841	1.825	1.812	1.804	1.620	1.611	1.479	1.327
1.20	2.56	2.538	1.994	1.964	1.943	1.929	1.918	1.738	1.727	1.591	1.434
1.30	2.69	2.659	2.123	2.088	2.064	2.046	2.033	1.857	1.845	1.703	1.542
1.40	2.82	2.781	2.254	2.213	2.185	2.165	2.150	1.976	1.963	1.815	1.651
1.50	2.96	2.905	2.386	2.339	2.308	2.285	2.268	2.097	2.082	1.928	1.760
1.60	3.10	3.031	2.519	2.467	2.431	2.406	2.386	2.219	2.202	2.042	1.869
1.70	3.24	3.158	2.653	2.595	2.556	2.527	2.505	2.341	2.322	2.156	1.978
1.80	3.38	3.287	2.788	2.724	2.681	2.650	2.625	2.464	2.443	2.270	2.088
1.90	3.53	3.418	2.923	2.855	2.807	2.773	2.746	2.587	2.565	2.385	2.198
2.00	3.67	3.558	3.060	2.985	2.934	2.897	2.868	2.710	2.687	2.500	2.308
2.50	4.42	4.225	3.750	3.648	3.577	3.524	3.483	3.334	3.302	3.080	2.861
3.00	5.20	4.922	4.450	4.321	4.230	4.162	4.108	3.965	3.925	3.666	3.416
4.00	6.78	6.355	5.865	5.683	5.553	5.455	5.378	5.236	5.180	4.844	4.533
5.00	8.38	7.819	7.290	7.057	6.890	6.763	6.663	6.517	6.445	6.030	5.655
10.00	16.53	15.293	14.426	13.990	13.627	13.368	13.166	12.994	12.850	11.984	11.311

$\hat{h}$	$\bar{h} = \bar{\delta}/\sqrt{N}$ при $q = 0,95$ и объеме выборки N										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	50
0.50	2.119	2.134	1.347	1.341	1.338	1.335	1.333	1.070	1.068	0.926	0.747
0.80	2.418	2.471	1.718	1.696	1.683	1.673	1.666	1.416	1.409	1.253	1.036
1.00	2.763	2.714	1.984	1.948	1.926	1.910	1.898	1.657	1.646	1.478	1.283
1.10	2.908	2.840	2.121	2.078	2.050	2.031	2.017	1.781	1.768	1.593	1.393
1.20	3.058	2.969	2.261	2.210	2.177	2.154	2.137	1.905	1.890	1.708	1.503
1.30	3.213	3.101	2.403	2.344	2.306	2.279	2.259	2.031	2.014	1.824	1.614
1.40	3.371	3.236	2.547	2.480	2.436	2.405	2.382	2.159	2.139	1.940	1.725
1.50	3.533	3.374	2.693	2.617	2.568	2.533	2.506	2.287	2.265	2.058	1.837
1.60	3.698	3.514	2.840	2.756	2.701	2.662	2.632	2.417	2.392	2.176	1.949
1.70	3.866	3.656	2.988	2.896	2.835	2.792	2.759	2.547	2.520	2.295	2.061
1.80	4.036	3.800	3.138	3.038	2.971	2.923	2.886	2.678	2.649	2.414	2.174
1.90	4.208	3.946	3.289	3.180	3.107	3.055	3.015	2.809	2.778	2.534	2.287
2.00	4.383	4.094	3.440	3.323	3.245	3.188	3.145	2.942	2.908	2.654	2.400
2.50	5.277	4.855	4.208	4.050	3.942	3.863	3.803	3.610	3.564	3.261	2.969
3.00	6.198	5.644	4.988	4.789	4.653	4.552	4.474	4.286	4.229	3.874	3.542
4.00	8.081	7.271	6.567	6.289	6.096	5.953	5.841	5.572	5.572	5.111	4.693
5.00	9.994	8.936	8.159	7.804	7.537	7.331	7.227	7.028	6.926	6.357	5.846
10.00	19.699	17.452	16.140	15.458	14.929	14.560	14.257	13.963	13.717	12.610	11.604

Примечание. Входом в таблицу служат величины N , $\hat{h}$ и q , где $\hat{h} = (x - a)/s$ или $\hat{h} = (b - \bar{x})/s$, $\bar{x}$ и s — оценки среднего значения и стандартного отклонения нормального закона по выборке объема N , q — доверительная вероятность. Выходом служит нижняя (верхняя) ДГ уровня q для δ , деленная на $\sqrt{N}$, т. е. табулирована величина $\bar{h} = \bar{\delta}/\sqrt{N}$ (или $\hat{h} = \delta/\sqrt{N}$).

11. Значения $K(q, \gamma, N)$

N	$\gamma = 0,75$				$\gamma = 0,90$				$\gamma = 0,95$				$\gamma = 0,99$			
	Доверительная вероятность q															
	0,875	0,90	0,95	0,99	0,875	0,90	0,95	0,99	0,875	0,90	0,95	0,99	0,875	0,90	0,95	0,99
3	1,464	2,501	3,152	4,396	2,602	4,258	5,310	7,340	3,804	6,158	7,655	10 552	—	—	—	—
4	1,256	2,134	2,680	3,726	1,972	3,187	3,957	5,437	2,619	4,163	5,145	7,042	—	—	—	—
5	1,152	1,961	2,463	3,421	1,698	2,742	3,400	4,666	2,149	3,407	4,202	5,741	—	—	—	—
6	1,087	1,860	2,336	3,243	1,540	2,494	3,091	4,242	1,895	3,006	3,707	5,062	2,849	4,408	5,409	7,334
7	1,043	1,791	2,250	3,126	1,435	2,333	2,894	3,972	1,732	2,755	3,399	4,641	2,490	3,856	4,730	6,411
8	1,010	1,740	2,192	3,042	1,360	2,219	2,755	3,783	1,617	2,582	3,188	4,353	2,252	3,496	4,287	5,811
9	0,984	1,702	2,141	2,977	1,302	2,133	2,649	3,641	1,532	2,454	3,031	4,143	2,085	3,242	3,971	5,389
10	0,964	1,671	2,103	2,927	1,257	2,065	2,568	3,532	1,465	2,355	2,911	3,981	1,954	3,048	3,739	5,075
11	0,947	1,646	2,073	2,885	1,219	2,012	2,503	3,444	1,411	2,275	2,815	3,852	1,854	2,897	3,557	4,828
12	0,933	1,624	2,048	2,851	1,188	1,966	2,448	3,371	1,366	2,210	2,736	3,747	1,771	2,773	3,410	4,633
13	0,919	1,606	2,026	2,822	1,162	1,928	2,403	3,310	1,329	2,155	2,670	3,659	1,702	2,677	3,290	4,472
14	0,909	1,591	2,007	2,796	1,139	1,895	2,363	3,257	1,296	2,108	2,614	3,585	1,645	2,592	3,189	4,336
15	0,899	1,577	1,991	2,776	1,119	1,866	2,329	3,212	1,268	2,068	2,566	3,520	1,596	2,521	3,102	4,224
16	0,891	1,566	1,977	2,756	1,101	1,842	2,299	3,172	1,242	2,032	2,523	3,463	1,553	2,458	3,028	4,124
17	0,883	1,554	1,964	2,739	1,085	1,820	2,272	3,136	1,220	2,001	2,486	3,415	1,514	2,405	2,962	4,038
18	0,876	1,544	1,951	2,723	1,071	1,800	2,249	3,106	1,200	1,974	2,453	3,370	1,481	2,357	2,906	3,961
19	0,870	1,536	1,942	2,710	1,058	1,781	2,228	3,078	1,183	1,949	2,423	3,331	1,450	2,315	2,855	3,893
20	0,865	1,528	1,933	2,697	1,046	1,765	2,208	3,052	1,167	1,926	3,396	3,295	1,424	2,275	2,807	3,832
21	0,859	1,520	1,923	2,686	1,035	1,750	2,190	3,028	1,152	1,905	2,371	3,262	1,397	2,241	2,768	3,776
22	0,854	1,514	1,916	2,675	1,025	1,736	2,174	3,007	1,138	1,887	2,350	3,233	1,376	2,208	2,729	3,727
23	0,849	1,508	1,907	2,665	1,016	1,724	2,159	2,987	1,126	1,869	2,329	3,206	1,355	2,179	2,693	3,680
24	0,845	1,502	1,901	2,656	1,007	1,712	2,145	2,969	1,114	1,853	2,309	3,181	1,336	2,154	2,663	3,638
25	0,842	1,496	1,895	2,647	0,999	1,702	2,132	2,952	1,103	1,838	2,292	3,158	1,319	2,129	2,632	3,601
30	0,825	1,475	1,869	2,613	0,966	1,657	2,080	2,884	1,059	1,778	2,220	3,064	1,249	2,029	2,516	3,446
35	0,812	1,458	1,849	2,588	0,942	1,623	2,041	2,833	1,025	1,732	2,166	2,994	1,195	1,957	2,431	3,334
40	0,803	1,445	1,834	2,568	0,923	1,598	2,010	2,793	0,999	1,697	2,126	2,941	1,154	1,902	2,365	3,250
45	0,795	1,435	1,821	2,552	0,908	1,577	1,986	2,762	0,978	1,669	2,092	2,897	1,122	1,857	2,313	3,181
50	0,788	1,426	1,811	2,538	0,894	1,560	1,965	2,735	0,961	1,646	2,065	2,863	1,096	1,821	2,296	3,124

12. Квантили распределений статистик V_q , V_q^γ при $\gamma = 0,9$; 0,95; 0,99 уровней 0,1 и 0,9

N	r	Статистика V_q		Статистика V_q^γ ($\gamma = 0,9$)		Статистика V_q^γ ($\gamma = 0,95$)		Статистика V_q^γ ($\gamma = 0,99$)	
		0,1	0,9	0,1	0,9	0,1	0,9	0,1	0,9
3	3	—1,49	1,46	1,43	8,99	2,04	11,85	3,32	18,15
	4	—2,32	1,06	1,49	9,03	2,11	12,17	3,44	19,38
4	4	—0,96	1,07	1,46	6,47	2,04	8,40	3,31	12,79
	5	—3,04	0,86	1,51	8,78	2,16	12,07	3,47	19,73
5	4	—1,24	0,88	1,51	6,49	2,10	8,56	3,37	13,31
	5	—0,73	0,89	1,49	5,48	2,06	7,06	3,32	10,75
6	3	—3,72	0,75	1,53	8,24	2,20	11,53	3,55	19,28
	4	—1,59	0,76	1,55	6,33	2,15	8,47	3,45	13,49
7	5	—0,91	0,77	1,54	5,42	2,12	7,08	3,38	10,96
	6	—0,64	0,77	1,53	4,86	2,10	6,27	3,39	9,49
7	3	—4,45	0,68	1,53	7,80	2,22	11,20	3,61	19,27
	4	—1,94	0,66	1,58	6,16	2,19	8,39	3,49	13,53
8	5	—1,10	0,66	1,57	5,36	2,16	7,12	3,44	11,20
	6	—0,73	0,67	1,56	4,86	2,14	6,33	3,41	9,75
9	7	—0,56	0,68	1,55	4,46	2,14	5,76	3,43	8,75
	8	—5,01	0,67	1,52	7,51	2,24	11,02	3,65	19,24
8	4	—2,18	0,64	1,60	5,96	2,22	8,19	3,53	13,42
	5	—1,25	0,62	1,60	5,28	2,20	7,70	3,47	11,12
9	6	—0,83	0,63	1,59	4,83	2,18	6,35	3,45	9,82
	7	—0,61	0,63	1,58	4,49	2,17	5,83	3,47	8,92
10	8	—0,50	0,63	1,58	4,21	2,17	5,44	3,47	8,27
	9	—5,64	0,66	1,51	7,14	2,26	10,71	3,66	19,00
9	4	—2,47	0,61	1,61	5,77	2,25	8,02	3,56	13,28
	5	—1,40	0,58	1,63	5,13	2,23	6,90	3,52	10,98
10	6	—0,94	0,57	1,62	4,74	2,22	6,27	3,52	9,82
	7	—0,70	0,57	1,62	4,48	2,21	5,86	3,61	9,06
11	8	—0,55	0,58	1,61	4,26	2,20	5,53	3,50	8,44
	9	—0,47	0,58	1,60	4,04	2,19	5,72	3,50	7,90
10	3	—6,05	0,66	1,46	6,75	2,26	10,24	3,68	18,61
	4	—2,70	0,60	1,62	5,56	2,27	7,81	3,60	13,12
11	5	—1,56	0,56	1,64	5,00	2,24	6,87	3,54	11,05
	6	—1,03	0,54	1,64	4,67	2,23	6,24	3,51	9,81
12	7	—0,77	0,54	1,64	4,41	2,22	5,79	3,50	8,99
	8	—0,62	0,53	1,63	4,22	2,21	5,52	3,50	8,49
13	9	—0,50	0,54	1,63	4,03	2,21	5,23	3,51	7,97
	10	—0,44	0,54	1,62	3,86	2,21	4,98	3,53	7,57

Продолжение табл. 12

N	r	Статистика V_q		Статистика V_q^Y ($Y = 0,9$)		Статистика V_q^Y ($Y = 0,95$)		Статистика V_q^Y ($Y = 0,99$)	
		0,1	0,9	0,1	0,9	0,1	0,9	0,1	0,9
11	3	—6,42	0,65	1,42	6,41	2,25	9,87	3,67	18,19
	4	—2,95	0,58	1,61	5,46	2,27	7,71	3,58	13,02
	5	—1,75	0,54	1,64	4,90	2,26	6,72	3,55	10,99
	6	—1,16	0,52	1,64	4,58	2,24	6,16	3,52	9,79
	7	—0,85	0,50	1,64	4,36	2,23	5,79	3,51	9,03
	8	—0,66	0,50	1,64	4,15	2,22	5,46	3,51	8,43
	9	—0,54	0,50	1,64	4,01	2,22	5,23	3,51	8,02
	10	—0,46	0,50	1,64	3,87	2,22	5,03	3,53	7,67
	11	—0,42	0,50	1,64	3,76	2,22	4,85	3,55	7,36
12	3	—6,92	0,64	1,37	6,00	2,26	9,41	3,72	17,59
	4	—3,17	0,58	1,60	5,17	2,28	7,42	3,62	12,72
	5	—1,88	0,53	1,66	4,72	2,28	6,54	3,58	10,68
	6	—1,27	0,50	1,67	4,41	2,27	5,97	3,55	9,61
	7	—0,92	0,48	1,67	4,21	2,26	5,63	3,54	8,85
	8	—0,71	0,48	1,66	4,06	2,25	5,36	3,54	8,34
	9	—0,58	0,47	1,66	3,94	2,24	5,16	3,53	7,98
	10	—0,48	0,47	1,65	3,87	2,23	4,99	3,54	7,66
	11	—0,43	0,47	1,64	3,72	2,24	4,84	3,55	7,37
	12	—0,39	0,47	1,64	3,62	2,24	4,68	3,57	7,09
13	3	—7,41	0,65	1,34	5,88	2,27	9,23	3,74	17,58
	4	—3,37	0,59	1,60	5,10	2,31	7,38	3,66	12,81
	5	—1,99	0,54	1,67	4,71	2,30	6,57	3,60	10,86
	6	—1,35	0,51	1,68	4,43	2,29	6,03	3,57	9,71
	7	—0,98	0,47	1,68	4,23	2,28	5,65	3,57	8,97
	8	—0,77	0,46	1,68	4,06	2,27	5,40	3,57	8,46
	9	—0,61	0,45	1,68	3,94	2,27	5,17	3,56	8,02
	10	—0,52	0,45	1,68	3,83	2,27	5,01	3,57	7,72
	11	—0,45	0,45	1,68	3,74	2,27	4,87	3,58	7,46
	12	—0,41	0,45	1,67	3,65	2,27	4,73	3,60	7,21
	13	—0,38	0,45	1,67	3,57	2,27	4,61	3,61	6,99
14	3	—7,65	0,65	1,25	5,56	2,26	8,84	3,75	17,23
	4	—3,53	0,59	1,59	4,93	2,31	7,18	3,68	12,48
	5	—2,17	0,54	1,67	4,58	2,31	6,38	3,62	10,64
	6	—1,45	0,50	1,69	4,33	2,30	5,91	3,59	9,59
	7	—1,06	0,47	1,69	4,15	2,29	5,58	3,58	8,88
	8	—0,81	0,45	1,69	4,03	2,28	5,35	3,58	8,40
	9	—0,66	0,44	1,69	3,90	2,28	5,14	3,58	8,00
	10	—0,54	0,43	1,68	3,78	2,27	4,98	3,58	7,71
	11	—0,48	0,43	1,68	3,71	2,28	4,86	3,60	7,46
	12	—0,42	0,43	1,68	3,64	2,28	4,73	3,61	7,25
	13	—0,38	0,43	1,68	3,55	2,29	4,61	3,62	7,03
	14	—0,36	0,43	1,68	3,46	2,28	4,48	3,63	6,81

Продолжение табл. 12

N	r	Статистика V_q		Статисти- ка V_q^{γ} ($\gamma = 0,9$)		Статистика V_q^{γ} ($\gamma = 0,95$)		Статистика V_q^{γ} ($\gamma = 0,99$)	
		0,1	0,9	0,1	0,9	0,1	0,9	0,1	0,9
15	3	—8,14	0,64	1,19	5,39	2,24	8,78	3,77	17,15
	4	—3,74	0,60	1,59	4,78	2,31	7,00	3,69	12,41
	5	—2,27	0,55	1,67	4,43	2,32	6,25	3,64	10,56
	6	—1,55	0,50	1,69	4,22	2,31	5,79	3,61	9,45
	7	—	0,47	1,70	4,08	2,30	5,50	3,59	8,81
	8	—0,86	0,45	1,70	3,95	2,29	5,29	3,59	8,36
	9	—0,70	0,43	1,69	3,85	2,29	5,11	3,58	8,00
	10	—0,59	0,42	1,69	3,76	2,28	4,96	3,59	7,71
	11	—0,51	0,42	1,69	3,69	2,28	4,84	3,59	7,48
	12	—0,45	0,41	1,69	3,62	2,28	4,73	3,61	7,29
	13	—0,41	0,41	1,68	3,55	2,28	4,63	3,61	7,09
	14	—0,37	0,41	1,69	3,49	2,28	4,53	3,62	6,92
	15	—0,35	0,42	1,68	3,41	2,28	4,43	3,62	6,70

13. Значения функции $W(A; B) = \ln \frac{1 - A}{B}$

A	B					
	0,001	0,005	0,01	0,02	0,05	0,10
0,001	6,90575	5,29732	4,60417	3,91102	2,99473	2,30158
0,005	6,90274	5,29330	4,60016	3,90701	2,99072	2,29757
0,01	6,89770	5,28827	4,59512	3,90197	2,98568	2,29253
0,02	6,88755	5,27811	4,58497	3,89182	2,97553	2,28238
0,05	6,85646	5,24702	4,55388	3,86073	2,94444	2,25129
0,10	6,80239	5,19296	4,49981	3,80666	2,89037	2,19722

14. Одноступенчатые планы контроля показателя надежности типа вероятности

P_1	P_2	$\alpha = 0,05$	$\beta = 0,05$	$\alpha = 0,05$	$\beta = 0,10$	P_1	P_2	$\alpha = 0,05$	$\beta = 0,05$	$\alpha = 0,05$	$\beta = 0,10$
		α	β	α	β			α	β	α	β
		N	C	N	C			N	C	N	C
0,999	0,997	5233	9	3915	7	0,997	0,993	3294	15	2563	12
	0,995	1829	4	1365	3		0,990	1312	7	1090	6
	0,993	897	2	800	2		0,970	208	2	125	1
	0,990	628	2	400	1		0,950	93	1	80	1
	0,970	157	1	70	0						

Продолжение табл. 14

P_1	P_2	$\alpha = 0,05$	$\beta = 0,05$	$\alpha = 0,05$	$\beta = 0,10$	P_1	P_2	$\alpha = 0,05$	$\beta = 0,10$	$\alpha = 0,05$	$\beta = 0,10$
		N	C	N	C			N	C	N	C
0,995	0,990	3135	22	2464	18	0,999	0,997	3090	5	1835	3
	0,970	256	3	180	2		0,995	1061	2	599	1
	0,950	124	2	80	1		0,993	554	1	427	1
	0,930	66	1	55	1		0,990	229	1	160	0
0,993	0,970	348	5	270	4	0,997	0,993	1853	8	1299	6
	0,950	124	2	110	2		0,990	798	4	547	3
	0,930	88	2	55	1		0,970	76	0	53	0
0,990	0,970	480	8	398	7		0,950	45	0	32	0
	0,950	182	4	136	3	0,995	0,990	1891	13	1251	9
	0,930	88	2	75	2		0,970	128	1	99	1
	0,990	61	2	40	1		0,950	45	0	32	0
0,970	0,930	326	15	256	12	0,993	0,970	176	2	142	2
	0,900	130	7	105	6		0,950	77	1	32	0
	0,870	68	4	60	4		0,930	32	0	22	0
	0,850	59	4	44	3	0,990	0,970	307	5	182	3
	0,800	30	2	24	2		0,950	105	2	59	1
	0,750	23	2	20	2		0,930	55	1	42	1
	0,700	14	1	12	1		0,900	22	0	15	0
0,950	0,900	312	22	246	18	0,970	0,930	183	8	128	6
	0,870	138	11	108	9		0,900	78	4	42	2
	0,850	93	8	76	7		0,870	40	2	22	1
	0,800	50	5	39	4		0,850	34	2	19	1
	0,750	35	4	25	3		0,800	18	1	14	1
	0,700	24	3	16	2		0,750	14	1	6	0
0,930	0,870	291	28	234	23		0,700	7	0	5	0
	0,850	174	18	141	15	0,950	0,900	175	12	124	9
	0,800	76	9	63	8		0,870	79	6	51	4
	0,750	45	6	35	5		0,850	52	4	36	3
	0,700	33	5	25	4		0,800	25	2	20	2
0,900	0,800	153	22	123	18		0,750	20	2	11	1
	0,750	75	12	60	10		0,700	12	2	9	1
	0,700	45	8	37	7	0,930	0,870	161	15	112	11
0,870	0,750	133	14	106	20		0,850	92	9	67	7
	0,700	69	14	57	12		0,800	45	5	27	3
0,850	0,750	203	40	164	33		0,750	25	3	16	2
	0,700	97	21	80	18		0,700	16	2	9	1

Продолжение табл. 14

P_1	P_2	$\alpha = 0,05$	$\beta = 0,05$	$\alpha = 0,05$	$\beta = 0,05$	P_1	P_2	$\alpha = 0,05$	$\beta = 0,10$	$\alpha = 0,05$	$\beta = 0,10$
		N	C	N	C			N	C	N	C
0,900	0,800	81	11	56	8	0,870	0,750	68	12	44	8
	0,750	40	6	26	4		0,700	37	7	25	5
	0,700	25	4	17	3	0,850	0,750	95	18	70	14
							0,700	53	11	33	7

15. Усеченные последовательные планы контроля показателей надежности типа вероятности

P_1	P_2	a	b_1	b_2	τ_0	e_0

$\alpha = 0,05; \beta = 0,05$

0,999	0,997	0,00182	2,675	2,675	11 812	21
	0,995	0,00249	1,825	1,825	4 027	10
	0,993	0,00309	1,508	1,508	2 218	6
	0,990	0,00391	1,274	1,274	1 248	4
	0,970	0,00859	0,8583	0,8583	259	2
0,997	0,993	0,00472	3,459	3,459	7635	36
	0,990	0,00582	2,431	2,431	3066	17
	0,970	0,01178	1,264	1,264	411	4
	0,950	0,01687	1,029	1,029	191	3
0,995	0,990	0,00722	4,217	4,217	7448	53
	0,970	0,01400	1,620	1,620	570	7
	0,950	0,01970	1,254	1,254	244	4
	0,930	0,02496	1,088	1,088	145	3
0,993	0,950	0,02202	1,465	1,465	298	6
	0,930	0,02768	1,243	1,243	172	4
0,993	0,970	0,01585	1,991	1,991	762	12
	0,950	0,02202	1,465	1,465	298	6
	0,930	0,02768	1,243	1,243	172	4
0,990	0,970	0,01824	2,631	2,631	1160	21
	0,950	0,02499	1,784	1,784	391	9
	0,930	0,03113	1,466	1,466	213	6
	0,900	0,03975	1,228	1,228	118	4

Продолжение табл. 15

P_1	P_2	a	b_1	b_2	τ_0	e_0
0,970	0,930	0,04735	3,311	3,311	728	34
	0,900	0,05857	2,302	2,302	288	16
	0,870	0,06908	1,869	1,869	163	11
	0,850	0,07583	1,691	1,691	122	9
	0,800	0,09220	1,409	1,409	71	6
	0,750	0,10819	1,238	1,238	47	5
	0,700	0,12409	1,120	1,120	34	4
0,950	0,900	0,07236	3,941	3,941	694	50
	0,870	0,08430	2,822	2,822	309	26
	0,850	0,09193	2,434	2,434	212	19
	0,800	0,11029	1,890	1,890	109	12
	0,750	0,12807	1,595	1,595	68	8
	0,700	0,14562	1,404	1,404	47	6
0,930	0,870	0,09726	4,294	4,294	629	61
	0,850	0,10556	3,456	3,456	379	40
	0,800	0,12444	2,453	2,453	164	20
	0,750	0,14456	1,979	1,979	94	13
	0,700	0,16334	1,693	1,693	62	10
0,900	0,800	0,14524	3,631	3,631	318	46
	0,750	0,16596	2,680	2,680	155	25
	0,700	0,18617	2,181	2,181	94	17
0,870	0,750	0,18498	3,670	3,670	267	49
	0,700	0,20634	2,794	2,794	143	29
0,850	0,750	0,19680	4,630	4,630	406	79
	0,700	0,21882	3,318	3,318	193	42
$\alpha = 0,05; \beta = 0,10$						
0,999	0,997	0,00182	2,045	2,626	8866	16
	0,995	0,00249	1,395	1,791	3023	7
	0,993	0,00309	1,153	1,481	1665	5
	0,990	0,00391	0,9739	1,250	936	3
	0,970	0,00859	0,6562	0,8425	194	1
0,997	0,993	0,00472	2,644	3,395	5731	27
	0,990	0,00582	1,859	2,387	2301	13
	0,970	0,01178	0,9662	1,240	308	3
	0,950	0,01687	0,7867	1,010	143	2
0,995	0,990	0,00722	3,224	4,140	5590	40
	0,970	0,01400	1,239	1,591	428	6
	0,950	0,01970	0,9585	1,231	183	3
	0,930	0,02496	0,8318	1,068	109	2

Продолжение табл. 15

P_1	P_2	a	b_1	b_2	τ_0	e_0
0,993	0,970	0,01585	1,522	1,955	572	9
	0,950	0,02202	1,120	1,438	224	5
	0,930	0,02768	0,9507	1,221	129	3
0,990	0,970	0,01824	2,012	2,583	870	16
	0,950	0,02499	1,364	1,751	294	7
	0,930	0,03113	1,121	1,439	160	5
	0,900	0,03975	0,9389	1,205	88	3
0,970	0,930	0,04735	2,531	3,250	547	26
	0,900	0,05857	1,760	2,260	216	12
	0,870	0,06908	1,429	1,835	122	8
	0,850	0,07583	1,293	1,660	91	7
	0,800	0,09220	1,077	1,383	53	5
0,970	0,750	0,10819	0,9469	1,216	35	3
	0,700	0,12409	0,8564	1,100	25	3
0,950	0,900	0,07236	3,013	3,868	520	38
	0,870	0,08430	2,157	2,770	232	19
	0,850	0,09193	1,861	2,389	159	14
	0,800	0,11029	1,445	1,855	81	9
	0,750	0,12807	1,220	1,566	51	6
	0,700	0,14562	1,074	1,378	35	5
0,930	0,870	0,09726	3,283	4,215	472	46
	0,850	0,10556	2,642	3,392	284	30
	0,800	0,12544	1,875	2,408	123	15
	0,750	0,14456	1,513	1,942	71	10
	0,700	0,16334	1,294	1,662	47	7
0,900	0,800	0,14524	2,776	3,564	239	35
	0,750	0,16596	2,049	2,631	116	19
	0,700	0,18617	1,668	2,141	70	13
0,870	0,750	0,18498	2,806	3,602	201	37
	0,700	0,20634	2,137	2,743	107	22
0,850	0,750	0,19680	3,540	4,545	305	60
	0,700	0,21882	2,537	3,257	145	32
$\alpha = 0,10; \beta = 0,10$						
0,999	0,997	0,00182	1,996	1,996	6578	11
	0,995	0,00249	1,362	1,362	2243	5
	0,993	0,00309	1,126	1,126	1235	3
	0,990	0,00391	0,9505	0,9505	695	2
	0,970	0,00859	0,6405	0,6405	144	1

Продолжение табл. 15

P_1	P_2	a	b_1	b_2	τ_0	e_0
0,997	0,993	0,00472	2,581	2,581	4252	20
	0,990	0,00582	1,814	1,814	1707	9
	0,970	0,01178	0,9430	0,9430	229	2
	0,950	0,01687	0,7678	0,7678	106	1
0,995	0,990	0,00722	3,147	3,147	4147	29
	0,970	0,01400	1,209	1,209	317	4
	0,950	0,01970	0,9354	0,9354	135	2
	0,930	0,02496	0,8118	0,8118	81	2
0,993	0,970	0,01585	1,486	1,486	424	6
	0,950	0,02202	1,093	1,093	166	3
	0,930	0,02768	0,9278	0,9278	95	2
0,990	0,970	0,01824	1,964	1,964	645	11
	0,950	0,02499	1,331	1,331	218	5
	0,930	0,03113	1,094	1,094	119	3
	0,900	0,03975	0,9163	0,9163	75	2
0,970	0,930	0,04735	2,470	2,470	405	19
	0,900	0,05857	1,718	1,718	160	9
	0,870	0,06908	1,395	1,395	90	6
	0,850	0,07583	1,262	1,262	68	5
0,970	0,800	0,09220	1,051	1,051	39	3
	0,750	0,10819	0,9242	0,9242	26	2
	0,700	0,12409	0,8358	0,8358	19	2
0,950	0,900	0,07236	2,941	2,941	386	27
	0,870	0,08430	2,106	2,106	172	14
	0,850	0,09193	1,816	1,816	118	10
	0,800	0,11029	1,410	1,410	60	6
	0,750	0,12807	1,190	1,190	38	4
	0,700	0,14562	1,048	1,048	26	3
0,930	0,870	0,09726	3,204	3,204	350	34
	0,850	0,10556	2,579	2,579	211	22
	0,800	0,12544	1,830	1,830	91	11
	0,750	0,14456	1,477	1,477	52	7
	0,700	0,15334	1,263	1,263	35	5
0,900	0,800	0,14524	2,710	2,710	177	25
	0,750	0,16596	2,000	2,000	86	14
	0,700	0,18617	1,628	1,628	52	9
0,870	0,750	0,18498	2,738	2,738	149	27
	0,700	0,20634	2,085	2,085	79	16

Продолжение табл. 15

P_1	P_2	a	b_1	b_2	τ_0	ρ_0
0,850	0,750	0,19680	3,455	3,455	226	44
	0,700	0,21882	2,476	2,476	107	23
$\alpha = 0,10; \beta = 0,20$						
0,999	0,997	0,00182	1,367	1,889	4261	8
	0,995	0,00249	0,9322	1,289	1453	3
	0,993	0,00309	0,7706	1,065	800	2
	0,990	0,00391	0,6507	0,8995	450	1
	0,970	0,00859	0,4384	0,6061	93	0
0,997	0,993	0,00472	1,767	2,443	2754	13
	0,990	0,00582	1,242	1,717	1106	6
	0,970	0,01178	0,6455	0,8925	148	1
	0,950	0,01687	0,5256	0,7266	69	1
0,995	0,990	0,00722	2,154	2,978	2687	19
	0,970	0,01400	0,8277	1,144	205	3
	0,950	0,01970	0,6403	0,8853	88	1
	0,930	0,02496	0,5557	0,7683	52	1
0,993	0,970	0,01585	1,017	1,406	275	4
	0,950	0,02202	0,7482	1,034	107	2
	0,930	0,02768	0,6351	0,8781	62	1
0,990	0,970	0,01824	1,344	1,858	418	7
	0,950	0,02499	0,9112	1,260	141	3
	0,930	0,03113	0,7489	1,035	77	2
	0,900	0,03975	0,6272	0,8672	42	1
0,970	0,930	0,04735	1,691	2,338	262	12
	0,900	0,05857	1,176	1,626	104	6
0,970	0,870	0,06908	0,9549	1,320	58	4
	0,850	0,07583	0,8637	1,194	44	3
	0,800	0,09220	0,7197	0,9950	25	2
	0,750	0,10819	0,6326	0,8746	17	1
	0,700	0,12409	0,5722	0,7910	12	1
0,950	0,900	0,07236	2,013	2,783	250	18
	0,870	0,08430	1,441	1,993	111	9
	0,850	0,09193	1,243	1,719	76	7
	0,800	0,11029	0,9653	1,335	39	4
	0,750	0,12807	0,8149	1,127	24	3
	0,700	0,14562	0,7172	0,9916	17	2

Продолжение табл. 15

P_1	P_2	a	b_1	b_2	τ_0	e_0
0,930	0,870	0,09726	2,193	3,032	227	22
	0,850	0,10556	1,765	2,440	136	14
	0,800	0,12544	1,253	1,732	59	7
	0,750	0,14456	1,011	1,397	34	5
	0,700	0,16334	0,8647	1,195	22	3
0,900	0,800	0,14524	1,855	2,564	114	16
	0,750	0,16596	1,369	1,893	56	9
	0,700	0,18617	1,114	1,540	33	6
0,870	0,750	0,18498	1,875	2,592	96	18
	0,700	0,20634	1,427	1,974	51	10
0,850	0,750	0,19680	2,365	3,270	146	29
	0,700	0,21882	1,695	2,344	69	15

16. Усеченные одноступенчатые планы контроля показателей надежности типа наработки при экспоненциальном распределении

α	u_1/u_2 при B			r	$\frac{T_{\Sigma}}{u_1}$
	0,05	0,10	0,20		
0,05	58,820	45,450	31,250	1	0,052
	13,330	10,990	8,403	2	0,356
	7,692	6,493	5,235	3	0,817
	5,682	4,878	4,032	4	1,366
	4,651	4,065	3,413	5	1,970
	4,032	3,546	3,030	6	2,613
	3,646	3,205	2,762	7	3,285
	3,350	2,958	2,570	8	3,981
	0,077	2,770	2,427	9	4,695
	2,898	2,618	2,309	10	5,425
	2,747	2,500	2,217	11	6,169
	2,631	2,396	2,137	12	6,924
	2,531	2,315	2,070	13	7,689
	2,445	2,242	2,012	14	8,464
	2,369	2,178	1,961	15	9,246
	2,096	1,961	1,779	20	13,200
	1,942	1,815	1,669	25	17,300
	1,385	1,721	1,597	30	21,500
0,10	28,570	21,740	15,380	1	0,105
	8,928	7,299	5,650	2	0,532
	5,714	4,831	3,891	3	1,102

Продолжение табл. 16

α	u_1/u_2 при B			r	$\frac{T_{\Sigma}}{u_1}$
	0,05	0,10	0,20		
0,10	4,444	3,831	3,164	4	1,745
	3,769	3,289	2,762	5	2,432
	3,333	2,941	2,519	6	3,152
	3,039	2,703	2,331	7	3,895
	2,825	2,525	2,198	8	4,656
	2,659	2,392	2,096	9	5,432
	2,525	2,283	2,012	10	6,221
	2,415	2,193	1,945	11	7,020
	2,325	2,118	1,887	12	7,829
	2,247	2,057	1,838	13	8,646
	2,138	2,004	1,798	14	9,469
	2,127	1,953	1,760	15	10,300
	1,915	1,792	1,626	20	14,520
	1,792	1,672	1,538	25	18,840
	1,706	1,602	1,486	30	23,230
0,20	13,510	10,310	7,246	1	0,223
	5,747	4,717	3,636	2	0,824
	4,098	3,472	2,785	3	1,535
	3,378	2,907	2,404	4	2,297
	2,967	2,590	2,174	5	3,089
	2,695	2,375	2,024	6	3,903
	2,500	2,227	1,919	7	4,733
	2,358	2,110	1,835	8	5,576
	2,247	2,020	1,770	9	6,428
	2,155	1,949	1,718	10	7,289
	2,079	1,890	1,675	11	8,157
	2,016	1,838	1,636	12	9,031
	1,961	1,795	1,605	13	9,910
	1,916	1,757	1,577	14	10,790
	1,872	1,724	1,553	15	11,680
	1,718	1,608	1,460	20	16,170
	1,628	1,520	1,398	25	20,720
	1,565	1,468	1,362	30	25,320

17. Последовательные планы контроля показателей надежности
типа наработки при экспоненциальном распределении

$\frac{u_1}{u_2}$	a_1	b_4	r_1	$\frac{b_8}{u_1}$	$\frac{T_{\Sigma_0}}{u_1}$	$\frac{u_1}{u_2}$	a_1	b_4	r_1	$\frac{b_8}{u_1}$	$\frac{T_{\Sigma_0}}{u_1}$
$\alpha = \beta = 0,05$											
58,80	14,20	0,72	1	0,049	0,049	5,00	2,49	1,83	5	0,736	1,110
13,30	4,76	1,14	2	0,239	0,272	4,65	2,38	1,92	5	0,806	1,250
7,69	3,28	1,44	3	0,440	0,570	4,03	2,17	2,11	6	0,971	1,620
5,68	2,69	1,70	4	0,629	0,900	4,00	2,16	2,12	6	0,981	1,640

Продолжение табл. 17

$\frac{u_1}{u_2}$	a_1	b_4	r_1	$\frac{b_5}{u_1}$	$\frac{T\Sigma_0}{u_1}$	$\frac{u_1}{u_2}$	a_1	b_4	r_1	$\frac{b_5}{u_1}$	$\frac{T\Sigma_0}{u_1}$
3,64	2,04	2,28	7	1,120	1,970	2,39	1,60	2,520	9	1,580	3,380
3,50	2,00	2,35	8	1,180	2,120	2,28	1,55	2,660	10	1,710	3,840
3,30	1,93	2,47	8	1,28	2,40	2,19	1,52	2,81	11	1,84	4,31
3,08	1,85	2,62	9	1,42	2,78	2,12	1,49	2,93	12	1,97	4,78
3,00	1,82	2,68	9	1,47	2,94	2,06	1,47	3,05	13	2,08	5,24
2,90	1,78	2,77	10	1,55	3,18	2,00	1,44	3,16	15	2,19	5,69
2,75	1,73	2,91	11	1,69	3,60	1,96	1,42	3,28	15	2,31	6,20
2,63	1,69	3,04	12	1,81	3,99	1,79	1,36	3,77	20	2,77	8,42
2,53	1,65	3,17	13	1,92	4,40	1,67	1,31	4,27	25	3,27	11,10
2,50	1,64	3,21	14	1,96	4,54	1,60	1,28	4,66	30	3,65	13,40
2,45	1,62	3,29	14	2,04	4,81	1,50	1,23	5,42	40	4,39	18,60
2,37	1,59	3,41	15	2,15	5,23	$\alpha = 0,10; \beta = 0,20$					
2,10	1,48	3,98	20	2,69	7,44	3,00	1,82	1,89	5	0,75	1,27
2,00	1,44	4,25	25	2,94	8,64	2,50	1,64	2,27	7	1,00	1,97
1,94	1,42	4,44	25	3,13	9,52	2,00	1,44	3,00	13	1,50	3,74
1,84	1,38	4,85	30	3,53	11,60	1,50	1,23	5,13	36	3,01	12,12
1,50	1,23	7,26	40	5,89	28,00	$\alpha = \beta = 0,20$					
$\alpha = 0,05; \beta = 0,10$						7,25	3,15	0,70	1	0,222	0,195
3,00	1,82	2,63	9	1,12	2,21	5,00	2,49	0,712	1	0,347	0,348
2,50	1,64	3,15	13	1,50	3,42	4,00	2,16	1,000	2	0,462	0,515
2,00	1,44	4,17	25	2,25	6,50	3,64	2,04	1,070	2	0,526	0,613
1,50	1,23	7,13	40	4,50	21,10	3,50	2,00	1,110	2	0,555	0,667
$\alpha = \beta = 0,10$						3,00	1,82	1,260	2	0,693	0,923
21,70	6,74	0,713	1	0,106	0,0995	2,79	1,74	1,350	3	0,777	1,090
7,30	3,17	1,110	2	0,349	0,408	2,50	1,64	1,510	4	0,924	1,420
5,00	2,49	1,370	3	0,549	0,735	2,40	1,60	1,580	4	0,987	1,580
4,83	2,43	1,400	3	0,574	0,780	2,17	1,51	1,790	5	1,180	2,090
4,00	2,16	1,590	4	0,732	1,090	2,02	1,45	1,970	6	1,350	2,610
3,83	2,11	1,640	4	0,776	1,180	2,00	1,44	2,000	7	1,390	2,710
3,50	2,00	1,750	5	0,879	1,410	1,92	1,43	2,130	7	1,510	3,110
3,29	1,92	1,850	5	0,960	1,600	1,84	1,38	2,280	8	1,660	3,650
3,00	1,82	2,00	6	1,100	1,960	1,77	1,35	2,430	9	1,800	4,180
2,94	1,80	2,040	6	1,130	2,040	1,72	1,33	2,560	10	1,930	4,700
2,70	1,71	2,210	7	1,290	2,480	1,68	1,31	2,690	11	2,050	5,230
2,53	1,65	2,380	8	1,440	2,940	1,64	1,29	2,581	12	3,180	5,790
2,50	1,64	2,400	9	1,460	3,010						

Список литературы

1. Акопов М. Г. Оценка средней наработки до отказа системы с последовательным соединением стареющих элементов//Надежность и контроль качества. 1982. № 4.
2. Аронов И. З., Бурдасов Е. И. Оценка надежности по результатам сокращенных испытаний. Изд-во стандартов, 1987. 184 с.
3. Бард Й. Нелинейное оценивание параметров. М., Статистика, 1979. 349 с.
4. Барлоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надежности: Пер. с англ. М., Наука, 1969. 530 с.
5. Барлоу Р., Прошан Ф. Статистическая теория надежности и испытаний на безотказность: Пер. с англ. М., Наука, 1984. 325 с.
6. Беляев Ю. К. Вероятностные методы выборочного контроля. М., Наука, 1975. 406 с.
7. Беляев Ю. К. Непараметрические методы в задачах обработки результатов испытаний и эксплуатации. М., Знание, 1984. 65 с.
8. Беляев Ю. К. Простые доверительные оценки квантилей стареющих распределений времени безотказной работы//Изв. АН СССР. Технич. кибернетика, 1981. № 1.
9. Болотин В. В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций. М., Машиностроение, 1984. 312 с.
10. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. М., Наука, 1983. 416 с.
11. Браунли К. А. Статистическая теория и методология в науке и технике. М., Наука, 1977. 407 с.
12. Броди С. М., Власенко О. Н., Марченко Б. Г. Расчет и планирование испытаний систем на надежность. Киев: Наукова думка, 1970. 196 с.
13. Буш Р., Мостеллер Ф. Стохастические модели обучаемости. М., Физматгиз, 1963. 484 с.
14. Вальд А. Последовательный анализ. М., Физматгиз, 1960. 362 с.
15. Введение в теорию порядковых статистик. М., Статистика, 1970. 414 с.
16. Венгерский В. В., Берсон А. Ю. Метод максимума информации при количественной оценке параметров распределений по альтернативным (типа «да — нет») результатам испытаний//Надежность и контроль качества. 1986. № 6. С. 13—21.
17. Волков Е. Б., Судаков Р. С., Сырицин Т. А. Основы теории надежности ракетных двигателей. М., Машиностроение, 1974. 399.
18. Володин И. Н. Гарантийные процедуры статистического вывода//Межвузовский сб. Исследования по прикладной математике. Казанский университет. 1984. С. 13—53.
19. Вопросы математической теории надежности/Под ред. Б. В. Гнеденко. М., Радио и связь, 1983. 376 с.
20. Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д. Математические методы в теории надежности. М., Наука, 1965. 521 с.
21. Гройсберг Л. Б. О повышении эффективности доверительной оценки надежности системы//Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1981. № 2.
22. Гудрамович В. С., Переверзев Е. С. Несущая способность и долговечность элементов конструкций. Киев: Наукова Думка, 1981. 282 с.
23. Де Гроот. Оптимальные статистические решения. М., Мир, 1974. 491 с.
24. Дзиркал Э. В. Задание и проверка требований к надежности сложных изделий. М., Радио и связь, 1981. 176 с.

25. Задеба В. А. Непараметрическая оценка гамма-процентного ресурса изделий со стареющим распределением времени до наступления отказа//Надежность и контроль качества. 1986. № 6. С. 36—41.
26. Закс Ш. Теория статистических выводов: Пер. с англ./Под ред. Ю. К. Беляева. М., Мир, 1975. 605 с.
27. Заренин Ю. Г. Контрольные испытания на надежность. М., Изд-во стандартов, 1970. 117 с.
28. Заренин Ю. Г., Стоянова И. И. Определительные испытания на надежность. М., Изд-во стандартов, 1978. 123 с.
29. Капур К., Ламберсон Л. Надежность и проектирование систем: Пер. с англ./Под ред. И. А. Ушакова. М., Мир, 1980. 604 с.
30. Карташов Г. Д. Принципы расходования ресурса и их использование для оценки надежности. М., Знание, 1984. 58 с.
31. Кендалл М., Стьюарт А. Статистические выводы и связи: Пер. с англ./Под ред. А. Н. Колмогорова. М., Наука, 1973. 899 с.
32. Кендалл М., Стьюарт А. Теория распределений. М., Наука, 1976. 453 с.
33. Кринецкий Е. И., Александровская Л. М. Летные испытания систем управления. М., Машиностроение, 1975. 492 с.
34. Кроль И. А. Инженерные методы экспериментальной оценки надежности высоконадежных систем. М., Знание, 1982. С. 3—54.
35. Кроль И. А. Интервальная оценка надежности восстанавливаемых систем по результатам испытаний//Надежность и контроль качества. 1973. № 5. С. 12—19.
36. Лапидус В. А. Контроль качества продукции на основе принципа распределения приоритетов//Надежность и контроль качества. 1984. № 6.
37. Лапидус В. А. Модели выборочного контроля, учитывающие преднамеренность при формировании выборки//Применение теории вероятностей и математической статистики. Вильнюс. Вып. 4. 1981.
38. Лапидус В. А. Принципы принятия решений по результатам контрольных испытаний или приемочного контроля о соответствии разработок или продукции требованиям НТД//Обработка результатов испытаний на надежность. М., Знание, 1981. 33 с.
39. Лейфер Л. А., Львова И. В. К вопросу о построении интервальной оценки по статистически неоднородным данным, различающимся параметром сдвига//Надежность и контроль качества. 1983. № 9.
40. Леман Э. Проверка статистических гипотез. М., Наука, 1979. 408 с.
41. Лецкий Э. К. Планирование усеченных испытаний//Заводская лаборатория. 1983. № 1. С. 62—65.
42. Ллойд Д., Липов М. Надежность. Организация исследования, методы, математический аппарат. М., Советское радио, 1964. 612 с.
43. Лумельский Я. П. Оптимальные планы статистического контроля. М., Знание, 1983. 61 с.
44. Лумельский Я. П. Статистические оценки результатов контроля качества. М., Изд-во стандартов, 1979. 163 с.
45. Майерс Г. Надежность программного обеспечения. М., Мир, 1980. 360 с.
46. Мартино Дж. Технологическое прогнозирование. М., Прогресс, 1977. 592 с.
47. Математическая теория планирования эксперимента/Под ред. С. М. Ермакова. М., Наука, 1983. 392 с.
48. Надежность технических систем. Справочник./Под ред. И. А. Ушакова. М., Радио и связь, 1985. 606 с.
49. О нормировании показателей надежности/И. З. Аронов, Е. Н. Бурдасов, В. Н. Дымчишин и др./Стандарты и качество. 1982. № 10.
50. Павлов И. В. Статистические методы оценки характеристик надежности и эффективности сложных систем по результатам испытаний. М., Советское радио, 1982. 168 с.
51. Планирование эксперимента в задачах нелинейного оценивания и распознавания образцов/Г. К. Круг и др. М., Наука, 1981. 172 с.
52. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов/К. Хартман, Э. К. Лецкий, В. Шефер. М., Мир, 1977. 577 с.
53. Поллард Дж. Справочник по вычислительным методам статистики.

М., Финансы и статистика, 1982. 344 с.

54. Прохоренко В. А., Голиков В. Ф. Учет априорной информации при оценке надежности. Минск: Наука и техника, 1979. 208 с.

55. Пфанцагль И. Теория измерений. М., Мир, 1976. 324 с.

56. Садыхов Г. С. Остаточный ресурс технических объектов и методы его оценки. М., Знание, 1986. С. 51—100.

57. Садыхов Г. С. Показатель остаточного ресурса и его свойства//Изв. АН СССР. Технич. кибернетика. 1985. № 4. С. 98—102.

58. Скрипник В. М., Назин А. Е. Оценка надежности технических систем по цензурированным выборкам. Минск: Наука и техника, 1981. 143 с.

59. Слотин Ю. С. Композиционное планирование регрессионного эксперимента. М., Знание, 1983. 52 с.

60. Слотин Ю. С. Планирование и анализ многофакторных испытаний при исследовании работоспособности изделий. М., Знание, 1986. 49 с.

61. Сонкина Т. П., Тескин О. И. Интервальное оценивание гамма-процентного ресурса системы при вейбулловском законе распределения отказов ее элементов//Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1986. № 1. С. 46—54.

62. Сонкина Т. П., Тескин О. И. Интервальное оценивание надежности последовательной системы//Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1984. № 3. С. 71—83.

63. Статистические задачи отработки систем и таблицы для числовых расчетов показателей надежности/Под ред. Р. С. Судакова. М., Высшая школа, 1975. 604 с.

64. Судаков Р. С. Избыточность и объем испытаний технических систем и их элементов. М., Знание, 1980. 60 с.

65. Судаков Р. С. Интервальная оценка монотонных функций по результатам испытаний//Техническая кибернетика. Изв. АН СССР. 1986. № 1. С. 82—91.

66. Судаков Р. С. Испытания систем: выбор объемов и продолжительности. М., Машиностроение, 1988. 445 с.

67. Судаков Р. С. Теория псевдополуобратных матриц и ее применение в задачах надежности. М., Знание, 1981. 60 с.

68. Судаков Р. С., Тескин О. И., Северцев Н. А. Оценка надежности изделия на этапе конструкторских испытаний//Технология судостроения. 1974. С. 51—58.

69. Таблицы планов эксперимента для факторных и полиномиальных моделей/Под ред. В. В. Налимова. М., Металлургия, 1982. 751 с.

70. Тейер Т., Липов М., Нельсон Э. Надежность программного обеспечения. М., Мир, 1981. 254 с.

71. Тескин О. И., Алымов Н., Курский И. Ю. Метод эквивалентных испытаний при интервальном оценивании надежности систем//Эффективность и надежность сложных технических систем. Материалы семинара. М., Знание, 1985. С. 27—32.

72. Тескин О. И. Многомерные задачи контроля и планирования испытаний на надежность по одному контрольному уровню//Испытания технических систем и их элементов. М., Знание, 1980. 54 с.

73. Тескин О. И. Определение доверительных границ для коэффициента готовности//Надежность и контроль качества. 1974. № 1. С. 12—19.

74. Тескин О. И. Оценка надежности систем на этапе экспериментальной обработки//Обработка результатов испытаний на надежность. М., Знание, 1981. 42 с.

75. Тескин О. И., Сонкина Т. П., Плеханов В. Ш. Прогнозирование доверительных границ и планирование испытаний при контроле параметрической надежности. М., Знание, 1985. 114 с.

76. Тихонов В. И. Выбросы случайных процессов. М., Наука, 1970.

77. Федоров В. В. О некоторых проблемах теории планирования эксперимента//Математические методы планирования эксперимента. Новосибирск, Наука. 1981. С. 19—73.

78. Фомин Я. Л. Теория выбросов случайных процессов. М., Связь, 1980. 216 с.

79. Уилкс С. Математическая статистика. М., Наука, 1967. 632 с.

80. Червоний А. А., Лукьященко В. И., Котин Л. В. Надежность сложных систем. М., Машиностроение, 1976. 288 с.

81. Чичагов В. В. О вероятностях попадания на параллельные прямые с натуральным коэффициентом наклона//Математические заметки. 1985. Т. 38. № 5. С. 777—783.

82. Чуев Ю. В., Спехова Р. П. Технические задачи исследования операций. М., Советское радио, 1971. 342 с.

83. Шабалин А. Н. Надежность программы в процессе ее отладки//Программирование. № 1, 1986. С. 86—90.

84. Шабалин А. Н. Об одной математической модели процесса экспериментальной отработки технических систем//Надежность и контроль качества. 1981. № 11. С. 14—21.

85. Шабалин А. Н. Построение модели роста надежности отрабатываемых изделий//Надежность и контроль качества. 1981. № 9. С. 42—51.

86. Шабалин А. Н., Ярыгин Г. А. Использование результатов испытаний аналогов при отработке сложных систем//Надежность и контроль качества. 1982. № 4. С. 27—35.

87. Шабалин А. Н., Ярыгин Г. А. Прогнозирование роста надежности отрабатываемых систем при обосновании технических решений//Надежность и контроль качества. 1982. № 9. С. 38—46.

88. Ширяев А. Н. Статистический последовательный анализ. М., Наука, 1976. С. 352.

89. Шор Я. Б. Статистические методы анализа и контроля качества и надежности. М., Советское радио. 1962. С. 305.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Автономные испытания — Цели 11
Алгоритм расчета доверительных границ для вероятности безотказной работы системы 213
Априорная информация — Достоверность 30
Арбитражная корректность процедур контроля надежности 31—33

Б

Безотказные испытания — Формулы для вычисления нижних доверительных границ для вероятности безотказной работы 220—222
Безотказности показатели — Основные задачи оценивания 60
— Оценка в случае утяжеленных испытаний 81, 82
— Оценка на основе непараметрических методов 77—81
— Оценка на основе параметрических методов 67—77
— Оценка при ВФИ (ФСФИ)-распределении 80, 81
— Оценка при планах испытаний с измерением наработок до отказа 191
Биномиальная модель — Гипотезы 312
Биномиальное распределение — Номограммы для определения параметра 317, 318
Биномиальный план испытаний — Исходные допущения и основные расчетные характеристики 46
— Одноступенчатая процедура контроля 251
— Определение 47—50
— Функция биномиального распределения и ее свойства 47—50
Биномиальные испытания — Планирование 157—164
— с остановкой — Схема 54, 55

В

Вейбулла распределение — Формулы для вычисления интервальных показателей безотказности 73
Вероятность безотказной работы — Интервальные оценки 51—53, 168
— Номограммы для определения 323—329
— Определение оценок 89, 92
— Параметрические модели роста 301—307
— Точечные оценки 50, 51
Вероятность безотказной работы для системы с параллельным соединением элементов 185—187
— с последовательной ССН 195
— с последовательно-параллельным соединением элементов 187—189
— с последовательным соединением элементов — Интервальная оценка 180—185
— при известных коэффициентах функциональной избыточности 189, 190
Выборка цензурированная — Виды 64

Д

Доверительные границы — Алгоритм расчета 213
— Номограммы для определения 317—329
— Определение методом редукции 214—218
— Справочные данные 330—366
Долговечность систем — Методы расчета точечных и интервальных оценок 226—236
Документы, регламентирующие испытания — Рациональность структуры 30
Динамическая модель работоспособности (ДМР) 263

И

Изделие — Рекомендуемые планы испытаний на надежность 62, 63

Испытания — см. по видам, например: *Автономные испытания*

Испытания с измерением определяющих параметров — Классификация моделей отказов 83—85

К

Каталог оптимальных планов многофакторных испытаний 293—299

Комплексные испытания — Цели 11, 12

Контроль надежности — Арбитражные характеристики для различных правил принятия решений 31—33

— Воспроизводимость результатов 29

— Общие требования 28, 29

— Точность и достоверность результатов 29

— Требования в процессе эксплуатации изделий 30, 31

— Установление объекта 29

— Устойчивость процедур 34

Контроль надежности изделия по двум контрольным уровням — Планы контроля показателей типа вероятности 135—146

— Планы контроля показателей типа наработки 146—150

— Постановка и общее решение задачи 129—135

Контроль надежности систем по двум контрольным уровням 237 — Одноступенчатая процедура 237—243 — Последовательная процедура 243—248

— по одному контрольному уровню 248 — Двухступенчатая процедура 257 — Одноступенчатая процедура 251

Контрольные испытания 12

Кривая роста вероятности безотказной работы гиперболическая 301

— дважды экспоненциальная 302

— логистическая 305

— экспоненциальная 302

Критерий максимальной надежности 267

— оптимальности плана 291 — Математическая модель для вычисления

279, 285

Л

Линейного оценивания метод 75

М

Максимального правдоподобия метод 68—74

Математическая модель для критерия оптимальности 291

— работоспособности — Построение 266 — Решаемые задачи 266, 267 — Этапы получения 262

Матрицы многофакторных трехуровневых сверхнасыщенных квазисимметричных планов второго порядка 264, 265

Многоклиновая модель 271

Многомерные задачи контроля 236

Многофакторная модель для показателя надежности (наработки до отказа) — Оптимальное планирование при построении 289—293

— для скорости изменения определяющего параметра 280, 282—284

— объекта 270

— процесса изменения определяющего параметра 277, 279 — Оптимальное планирование при построении 275—289

Многофакторные испытания — Каталог оптимальных планов 293—299 —

Методы обработки данных 272—275 —

Оптимальное планирование 275 — 293 — одного образца — Критерии

оптимальности плана 280 — Метод обработки данных 281 — Поиск оптимального плана 285 — Цель 280

— совокупности различающихся образцов 287, 288 — Метод обработки

данных 178 — Модель наблюдений 276 — Организация 276 — Поиск

оптимального плана 279

Множительная оценка показателей безотказности 77—79

Моделирование роста вероятности безотказной работы (априорное) 306

Модели наблюдений 217

— непревышений статические 90—93

— отказов динамические — Вероятность решения задачи оценивания

показателя безотказности 93—96 — Исходные данные для расчета оценок

107—110 — Статические оценки безотказности при измеряемых реализациях

определяющего параметра 96—106 — Статические оценки безотказности

при неизмеряемых реализациях определяющего параметра 106, 107

— статические (допусковые) 85—89

— оценивания 113—118

Модели роста надежности непараметрические биномиальные 312

— при планах испытаний с измерением наработок 198—200

— триномиальные 313, 314

Модели роста надежности параметрические основанные на измерениях определяющих параметров 233—236

— основанные на информации об определяющем параметре 123—125

— основанные на информации о наработке на отказ 229—233

— основанные на информации о ресурсе изделия 118 — Значения гамма-функции 119 — Оценки для среднего и гамма-процентного ресурсов 119, 120

— роста средней наработки на отказ 307—312 — Определение точности оценок 310

— при планах испытаний с измерением наработок 192—198

Н

Надежность — Взаимосвязь задач нормирования и контроля 26, 27

— Качественные требования 26

— Количественные требования 23, 24

— Показатели см. *Показатели надежности*, а также по названиям, например, *Безотказности показатель*

Наименьших квадратов метод — Расчетные выражения 273, 274

Наработка до отказа — Законы распределения 192, 193, 196—198

— до цензурирования 16

— на отказ — Модели роста 307—311

Нижние доверительные границы вероятности безотказной работы 323—329

— параметра биномиального распределения — Номограммы для определения 317, 318

— показателей долговечности 317—323

О

Определительные испытания — Выбор плана испытаний 64

— Определение параметров плана 64—66

Определяющий параметр — Законы распределения 85—90

Опыт 271

Отказы — Классификация моделей 83—85

Отклик 271

Отработанность — Методы определения 20, 21

Отработка экспериментальная — Анализ 260—267

— Внешние воздействующие факторы 19

— Выбор аналога изделия 18

— Комплексная программа 14, 15

— Критерии завершенности 22

— Основные задачи 258

— Основные этапы 259

— Оценка соответствия условий испытаний изделий условиям эксплуатации 260

— Планирование см. *Планирование экспериментальной отработки*

— Принципы планирования 15, 17, 18

— Структурная схема планирования и контроля 16, 17

П

Планирование априорное 272

— контрольной эксплуатации 153 —

Пример постановки задачи 154

— контроля надежности — Подходы 35—37

— оптимальное многофакторных испытаний 289—293

— последовательное 272

Планирование испытаний по биномиальному плану с учетом запасов по ресурсу и коэффициентов утяжеления 253

— по двум контрольным уровням —

Объем испытаний при различных вариантах построения правил принятия решения 247 — Одноступенчатая процедура 237—243 — Последовательная процедура 243

— по одному контрольному уровню 248 — Планирование объемов испытаний при биномиальном плане 252 —

Постановка задачи 249, 251

Планирование объемов испытаний в утяжеленных режимах 167—173 —

Одноступенчатая процедура испытаний 166—168 — Последовательная процедура контроля по результатам испытаний 169, 174, 177—179

— при биномиальном плане 252

— при измерении наработки до отказа — Минимально необходимый уровень суммарной наработки 165

— при планах испытаний с измерением наработки до отказа 256, 257

— с учетом запасов по ресурсу и

утяжелением режимов 254

Планирование экспериментальной отработки по критерию максимальной надежности 267 — Граф прохождения обрабатываемого изделия по испытательным стендам 268 — План отработки 268

— по обеспечению работоспособности изделий — Модели испытаний 260

План локально-оптимальный 271

— насыщенный 271

— непрерывный 271

— точный 271

План испытаний с измерением надежности 254, 255 — Классификация 60

Планы контроля надежности типа вероятности Вальдовские последовательные 139—141

— двухступенчатые и многоступенчатые 137, 138

— одноступенчатые 135

— усеченные двухступенчатые и многоступенчатые 138, 139

— усеченные одноступенчатые 136, 137

Планы контроля надежности типа наработки 146

— Вальдовские последовательные 149—151

— одноступенчатые 147

— усеченные одноступенчатые 148

Планы оптимальные на кубе 295

— насыщенные 297, 298

— насыщенные на отрезке 294

— непрерывные для квадратичных моделей на кубе 296

— непрерывные для квадратичных моделей на шаре 297, 298

— непрерывные на отрезке 294

Планы трехуровневые сверхнасыщенные квазисимметричные второго порядка 264 — Кодированная запись 264, 265

Показатели надежности — Виды 24 — Интерпретация групповых показателей 24, 25

— Номенклатура 25, 26

Правила принятия решений 39

— Обработка данных контроля 40

— Примеры 43, 44

— Структура 40—42

Прогнозирование роста надежности обрабатываемых систем для оценки завершенности 314—316

Р

Работоспособность изделий — Модели

испытаний 260—266

— Построение областей работоспособности 267

— Прогнозирование в различных условиях эксплуатации 266

Распределения приоритетов принцип — Конструктивная формулировка 38, 39

— Концептуальная формулировка 37, 38

Регрессии коэффициент 266

Редукции метод — Определение нижних доверительных границ 214—218

Ресурс гамма-процентный — Интервальные оценки 115, 226 — Номограммы для определения 317—323 — Точечные оценки 114, 119, 226

— остаточный — Методы оценки 125, 126 — Формулы для определения точечных и интервальных оценок 127

— средний — Интервальные оценки 114, 227 — Номограммы для определения 317—323 — Точечные оценки 113, 119, 227

С

Системы с монотонной структурой 223, 224

— с параллельной ССН 202 — Методы для определения нижних доверительных границ вероятности безотказной работы 210—219

— с последовательной ССН 191 — Интервальные оценки для вероятности безотказной работы 199 — Однотипные планы испытаний и непараметрические модели оценивания 198

— Однотипные планы испытаний и параметрические модели оценивания 192

— Разнотипные планы испытания элементов 200, 201 — Точечные и интервальные оценки 194—197

— с последовательно-параллельными и параллельно-последовательными

структурными схемами надежности (ССН) (П-структура) — Классификация 202—209

— с последовательным соединением элементов — Методы расчета точечных и интервальных оценок долговечности 226—236

— Оценка среднего и гамма-процентного ресурсов 226, 227

— Распределение элементов по закону Вейбулла 229, 230 — Распределение элементов по нормальному закону 230—233

Совмещенные факторные испытания 261 — Количественная оценка влия-

ния факторов 266
— Планирование 262—265
— Составление программы проведения 265, 266

Т

Триномиальная модель 313

У

Утяжеленные испытания — Оценка показателей безотказности 81, 82
— биномиальные — Схема 55, 56

Ф

Функция биномиального распреде-

ления 47

Ц

Цензурирование 61

Циклические испытания одного образца системы 55

Э

Эквивалентного слабейшего звена метод — Функция вероятности безотказной работы для систем с П-структурой 211

Экономичность испытаний 30

Экспоненциальная модель роста вероятности безотказной работы 302