

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Д. Фаддеев, Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц, *Тр. МИ-АН СССР*, 1963, том 69, 3–122

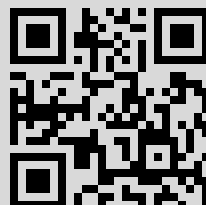
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 24.2.57.194

27 февраля 2017 г., 03:20:11



ВВЕДЕНИЕ

Квантовая механика является источником наиболее значительных задач для спектральной теории самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. В частности, интересные математические задачи, связанные с теорией возмущений непрерывного спектра, возникают в квантовой теории рассеяния.

Поясним это подробнее. Оператор энергии системы N частиц определяется дифференциальным оператором в пространстве функций, зависящих от координат всех частиц

$$\mathbf{H}_N = - \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m_i} \nabla_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^N v_{ij}(x_i - x_j). \quad (0.1)$$

Здесь x_i — радиус-вектор частицы с номером i , ∇_i^2 — оператор Лапласа по координатам этой частицы, m_i — ее масса. Функции $v_{ij}(x_i - x_j)$ описывают взаимодействие между частицами с номерами i и j . В теории рассеяния эти функции исчезают при увеличении расстояния между этими частицами.

Дифференциальный оператор $\mathbf{H}_N$ порождает самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве квадратично интегрируемых функций переменных $x_1, \dots, x_N$. При этом первому слагаемому в (0.1) соответствует оператор с чисто непрерывным спектром. Имеет смысл посмотреть, насколько второе слагаемое меняет характер этого непрерывного спектра.

Конкретнее, интересной математической задачей является определение полной системы собственных функций оператора $\mathbf{H}_N$ и доказательство теоремы разложения произвольной функции по этим функциям. Кроме самой постановки задачи, теория рассеяния подсказывает нам и ответ. Именно, естественным набором таких собственных функций являются так называемые решения задачи рассеяния в стационарной постановке.

В этой последней постановке требуется найти решения стационарного уравнения Шредингера

$$\mathbf{H}_N \psi(x_1, \dots, x_N) = E \psi(x_1, \dots, x_N), \quad (0.2)$$

удовлетворяющие определенным асимптотическим условиям на бесконечности в конфигурационном пространстве. Надо сказать, что эти условия сформулированы точно только для системы, состоящей из двух частиц. В этом случае требуется найти решения уравнения Шредингера

$$\mathbf{h} \psi(x, k) = - \frac{1}{2m} \nabla^2 \psi(x, k) + v(x) \psi(x, k) = \frac{k^2}{2m} \psi(x, k),$$

имеющие вид

$$\psi(x, k) = \exp\{i(k, x)\} + w(x, k).$$

Здесь k — произвольный вектор, характеризующий импульс относительного движения частиц, $w(x, k)$ — рассеянная волна, которая должна удовлетворять условию излучения при $|x| \rightarrow \infty$

$$w(x, k) = O\left(\frac{1}{|x|}\right); \left(\frac{\partial}{\partial |x|} - i|k|\right) w(x, k) = o\left(\frac{1}{|x|}\right),$$

или — более точно — иметь при $|x| \rightarrow \infty$ асимптотику

$$w(x, k) = f(n, k) \frac{\exp\{i|k||x|\}}{|x|} + o\left(\frac{1}{|x|}\right); \quad n = \frac{x}{|x|}.$$

Сформулированная задача подробно исследована А. Я. Повзнером [1], [2], который при определенных условиях, наложенных на потенциал $v(x)$, доказал существование решений $\psi(x, k)$ и показал, что вместе с собственными функциями дискретного спектра оператора $\mathbf{h}$ функции $\psi(x, k)$ образуют полную систему, по которой произвольная функция разлагается в обобщенный интеграл Фурье. Важные уточнения результатов Повзнера содержатся в работах Като [5] и Икебе [4].

Для системы с тремя или большим количеством частиц стационарная постановка задачи рассеяния не разработана детально. Это связано с принципиальным отличием таких систем от системы двух частиц. В последней системе обе частицы как до, так и после столкновения движутся свободно и в результате столкновения могут только поменять направление своего движения. Закон сохранения энергии запрещает им образовывать связанное состояние. Это запрещение снимается в случае трех частиц, так как высвободившуюся при образовании связанной пары энергию может унести третья частица. Это соображение, естественно, относится и к случаю системы с четырьмя, пятью и т. д. частицами, где могут образовываться связанные состояния как двух, так и трех и более частиц.

По самой идее стационарной теории рассеяния каждой возможной такой ситуации должно соответствовать свое решение уравнения Шредингера. Поэтому, если в случае системы двух частиц решений задачи рассеяния должно быть „столько же“, сколько плоских волн, т. е. собственных функций невозмущенного оператора энергии, то в случае системы трех или более частиц этих решений должно быть, вообще говоря, „больше“, чем плоских волн или собственных функций любого оператора, полученного из оператора энергии после вычеркивания ряда членов взаимодействия. Другими словами, в случае двух частиц возмущение не меняет характера непрерывного спектра оператора энергии, а в случае трех или большего количества частиц добавляет к непрерывному спектру невозмущенного оператора ряд новых ветвей. Естественно, что описание всех возможных асимптотик решения уравнения (0.2) при $N > 2$ представляет собой весьма громоздкую и трудную задачу.

К счастью, эта задача и не слишком интересна, так как описанный рецепт выбора полной системы собственных функций непрерывного спектра не является единственным. Например, систему решений $\psi(x, k)$ в случае $N=2$ можно получить следующим образом: рассмотрим резольвенту оператора $\mathbf{h}$

$$\mathbf{r}(z) = (\mathbf{h} - z\mathbf{e})^{-1}.$$

Здесь $\mathbf{e}$ — единичный оператор, z — комплексное число, $\text{Im } z \neq 0$. А. Я. Повзнер в упомянутой выше работе доказал, что $\mathbf{r}(z)$ является интегральным оператором, причем его ядро $r(x, y; z)$ непрерывно по x

и y при $x \neq y$ и абсолютно интегрируемо по y при $\text{Im } z \neq 0$. Из результатов Повзнера вытекает также, что

$$\psi(x, k) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} -i\varepsilon \int r\left(x, y, \frac{k^2}{2m} + i\varepsilon\right) \exp\{i(k, y)\} dy.$$

Таким образом, мы можем получать собственные функции с помощью подходящего предельного перехода из комплексной плоскости на вещественную ось в ядре резольвенты оператора энергии. Этот рецепт тесно связан с нестационарной постановкой задачи рассеяния, при которой требуется найти решение уравнения Шредингера

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x_1, \dots, x_N, t) = H_N \psi(x_1, \dots, x_N, t),$$

удовлетворяющее определенному асимптотическому условию при $t \rightarrow -\infty$.

Мы не будем здесь подробно описывать эту постановку задачи, а скажем только, что в принципе ее нетрудно сформулировать для случая системы с любым числом частиц, причем одновременно мы получаем естественный рецепт получения полного набора собственных функций непрерывного спектра соответствующего оператора энергии. Ясно, что для реализации и оправдания этого рецепта необходимо предварительно подробно исследовать поведение ядра резольвенты оператора энергии в окрестности вещественной оси.

Настоящая работа посвящена исследованию оператора энергии системы трех частиц, взаимодействующих попарно, т. е. простейшей системы, где возмущение, обусловленное взаимодействием, меняет характер непрерывного спектра оператора энергии. Основную часть работы составляет изучение поведения резольвенты этого оператора. Полученные результаты применяются для доказательства теоремы разложения по собственным функциям оператора энергии, для обоснования нестационарной постановки задачи рассеяния для рассматриваемой системы и построения соответствующего унитарного оператора рассеяния. Предварительно мы изучаем оператор энергии системы двух частиц. Хотя, как уже говорилось, этот оператор хорошо исследован, мы рассматриваем его по следующим причинам: во-первых, на более простом примере мы иллюстрируем почти все наши приемы; во-вторых, при изучении оператора энергии системы трех частиц нам требуются такие характеристики оператора энергии системы двух частиц, которые еще не рассматривались.

В отличие от вышеупомянутых авторов, мы исследуем операторы энергии в импульсном представлении, так что невозмущенные операторы являются операторами умножения на функцию, а возмущение задается интегральными операторами. В случае двух частиц при работе в импульсном представлении мы сталкиваемся с несколько большими аналитическими трудностями, чем при работе в координатном представлении. Эти трудности связаны, в основном, с появлением сингулярных интегралов, действия с которыми требуют некоторых навыков. Однако, по нашему мнению, выбор импульсного представления значительно облегчает исследование оператора энергии системы трех частиц. Приведем следующий довод: в координатном представлении особенности резольвенты при выходе на вещественную ось связаны с медленным убыванием на бесконечности ее ядра. В случае трех частиц следует ожидать, что асимптотика ядра резольвенты будет весьма сложной, в частности она будет осциллирующей в одних направлениях и убывающей в других направлениях в конфигурационном пространстве. В то же время особенности резольвенты в импульсном представлении имеют характер полюсов и поэтому легко обозреваемы в любом случае.

Работа состоит из одиннадцати параграфов и четырех приложений. В § 1 мы даем точное определение изучаемых операторов как операторов в гильбертовом пространстве, т. е. характеризуем их область определения и доказываем их самосопряженность. Здесь сформулированы основные условия на потенциалы, которые считаются выполненными на протяжении всей работы. В §§ 2 и 4 и в §§ 3, 5, 6, 7 мы рассматриваем резольвенты операторов энергии систем двух и трех частиц соответственно. Здесь введены интегральные операторы, в терминах которых выражаются резольвенты, выписаны и исследованы интегральные уравнения, при помощи которых получены оценки для ядер этих операторов и изучены особенности этих ядер, когда z меняется в окрестности вещественной оси. Полученные результаты применяются в §§ 8 и 9 для доказательства теорем разложения по собственным функциям и в §§ 10 и 11 при рассмотрении нестационарной постановки задачи рассеяния и построения оператора рассеяния. Первое приложение содержит вывод некоторых свойств функций, удовлетворяющих условию Гельдера, и сингулярных интегралов с этими функциями. Затем два приложения посвящены доказательству оценок для некоторых интегралов, встретившихся в тексте. Наконец, в четвертом приложении приведены замечания и литературные указания, не помещенные в основной текст.

Приведем здесь несколько основных обозначений, которые будут применяться на протяжении всей работы. Термин „переменная“ и буквы x, k, p, q с индексами или без них приняты для обозначения векторов в трехмерном пространстве. Иногда для отличия этих переменных от других будем называть эти переменные трехмерными. Символ (k, p) означает скалярное произведение векторов k и p , $k^2 = (k, k)$, $|k| = (k^2)^{1/2}$; dk и $d\Omega_k$ — элементы объема и поверхности единичной сферы, пробегаемых векторами k и $\frac{k}{|k|}$, соответственно. Символ $\int$ без указания пределов интегрирования обозначает интеграл по всей области изменения переменных интегрирования. Буква x используется для обозначения векторов в конфигурационном, а k, p, q — в импульсном пространстве.

Переход из координатного представления в импульсное осуществляется при помощи преобразования Фурье

$$f(k) = \int \hat{f}(x) \exp \{i(k, x)\} dx.$$

Через C мы обозначаем возникающие при оценках константы, равномерные по всем переменным, от которых зависят участвующие в оценках функции.

В процессе работы большое значение для автора имели обсуждения различных вопросов с Ф. А. Березиным, М. Ш. Бирманом, В. С. Буслевым и О. А. Ладыженской, которым автор приносит глубокую благодарность.

§ 1. ОПЕРАТОРЫ h и H

В настоящем параграфе мы опишем операторы энергии системы двух и трех частиц в импульсном представлении. Мы приведем формальные выражения, определяющие эти операторы, охарактеризуем область определения этих операторов в соответствующем гильбертовом пространстве и докажем их самосопряженность.

Будем исходить из уже упомянутой во введении записи операторов энергии в координатном представлении в виде дифференциальных операторов, действующих на функции соответствующего числа переменных

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_2\psi(x_1, x_2) &= \left\{ -\frac{1}{2m_1}\nabla_1^2 - \frac{1}{2m_2}\nabla_2^2 + \hat{v}_{12}(x_1 - x_2) \right\} \psi(x_1, x_2); \\ \mathbf{H}_3\psi(x_1, x_2, x_3) &= \left\{ -\frac{1}{2m_1}\nabla_1^2 - \frac{1}{2m_2}\nabla_2^2 - \frac{1}{2m_3}\nabla_3^2 + \hat{v}_{23}(x_2 - x_3) + \right. \\ &\quad \left. + \hat{v}_{31}(x_3 - x_1) + \hat{v}_{12}(x_1 - x_2) \right\} \psi(x_1, x_2, x_3).\end{aligned}$$

Здесь m_1, m_2, m_3 — массы частиц, ∇_i^2 — оператор Лапласа по переменной x_i , функции $\hat{v}_{23}(x)$, $\hat{v}_{31}(x)$ и $\hat{v}_{12}(x)$ характеризуют парные взаимодействия частиц.

Для перехода в импульсное представление надо сделать преобразование Фурье. Операторы дифференцирования при этом перейдут в операторы умножения на соответствующую переменную, а операторы умножения на функцию — в интегральные операторы, так что операторы $\mathbf{H}_2$ и $\mathbf{H}_3$ принимают вид

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_2 f(k_1, k_2) &= \left\{ \frac{1}{2m_1} k_1^2 + \frac{1}{2m_2} k_2^2 \right\} f(k_1, k_2) + \mathbf{V}_{12} f(k_1, k_2); \\ \mathbf{H}_3 f(k_1, k_2, k_3) &= \left\{ \frac{1}{2m_1} k_1^2 + \frac{1}{2m_2} k_2^2 + \frac{1}{2m_3} k_3^2 \right\} f(k_1, k_2, k_3) + \\ &\quad + (\mathbf{V}_{23} + \mathbf{V}_{31} + \mathbf{V}_{12}) f(k_1, k_2, k_3),\end{aligned}$$

где $\mathbf{V}_{23}$, $\mathbf{V}_{31}$ и $\mathbf{V}_{12}$ являются интегральными операторами, действующими только на переменные k_2, k_3, k_3, k_1 и k_1, k_2 соответственно, например

$$\mathbf{V}_{12} f(k_1, k_2) = \int v_{12} \left(\frac{k_1 - k_2 - k'_1 + k'_2}{2} \right) \delta(k_1 + k_2 - k'_1 - k'_2) f(k'_1, k'_2) dk'_1 dk'_2.$$

Операторы $\mathbf{H}_2$ и $\mathbf{H}_3$ в описанной форме содержат тривиальное слагаемое, характеризующее энергию движения центра инерции системы. Удобно отделить это слагаемое и изучать оставшуюся часть, т. е. операторы энергии в системе центра инерции.

В случае двух частиц перейдем для этого от переменных k_1, k_2 к новым переменным

$$K = k_1 + k_2; \quad k = \frac{m_2 k_1 - m_1 k_2}{m_1 + m_2}.$$

Оператор $\mathbf{H}_2$ примет вид

$$\mathbf{H}_2 f(K, k) = \frac{1}{2M} K^2 f(K, k) + \mathbf{h} f(K, k),$$

причем оператор $\mathbf{h}$ действует только на переменную k

$$\mathbf{h} f(k) = \frac{1}{2m} k^2 f(k) + \int v(k - k') f(k') dk' = (\mathbf{h}_0 + \mathbf{v}) f(k). \quad (1.1)$$

Здесь

$$M = m_1 + m_2; \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

и функция $v(k)$ является преобразованием Фурье функции $\hat{v}_{12}(x)$.

В случае трех частиц мы можем последовательно применить такое преобразование сначала по отношению к координатам какой-либо пары

частиц, а затем к координатам центра инерции этой пары и третьей частицы. При этом мы придем к следующим трем системам координат:

$$\begin{aligned} K &= k_1 + k_2 + k_3; \\ k_{23} &= \frac{m_3 k_2 - m_2 k_3}{m_2 + m_3}; \quad p_1 = \frac{m_1 (k_2 + k_3) - (m_2 + m_3) k_1}{m_1 + m_2 + m_3}; \\ k_{31} &= \frac{m_1 k_3 - m_3 k_1}{m_3 + m_1}; \quad p_2 = \frac{m_2 (k_3 + k_1) - (m_3 + m_1) k_2}{m_1 + m_2 + m_3}; \\ k_{12} &= \frac{m_2 k_1 - m_1 k_2}{m_1 + m_2}; \quad p_3 = \frac{m_3 (k_1 + k_2) - (m_1 + m_2) k_3}{m_1 + m_2 + m_3}. \end{aligned}$$

Каждая пара переменных k_{23} , p_1 , k_{31} , p_2 и k_{12} , p_3 может быть выражена через другую, так что в качестве независимых переменных мы можем брать K , k и p . Здесь и в дальнейшем мы пишем просто k и p , если нам безразлично, какую из пар, перечисленных выше, использовать в качестве переменных.

Оператор $\mathbf{H}_3$ в описанных координатах разбивается на два слагаемых

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_3 f(K, k, p) &= \frac{1}{2M} K^2 f(K, k, p) + \mathbf{H} f(K, k, p), \\ (M &= m_1 + m_2 + m_3), \end{aligned}$$

где $\mathbf{H}$ действует только на переменные k и p и имеет вид

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{V}_{23} + \mathbf{V}_{31} + \mathbf{V}_{12}. \quad (1.2)$$

Здесь $\mathbf{H}_0$ — оператор умножения на функцию

$$H_0(k, p) = \frac{1}{2m_{23}} k_{23}^2 + \frac{1}{2n_1} p_1^2 = \frac{1}{2m_{31}} k_{31}^2 + \frac{1}{2n_2} p_2^2 = \frac{1}{2m_{12}} k_{12}^2 + \frac{1}{2n_3} p_3^2,$$

где

$$\begin{aligned} m_{23} &= \frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3}; \quad n_1 = \frac{m_1 (m_2 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3}; \\ m_{31} &= \frac{m_3 m_1}{m_3 + m_1}; \quad n_2 = \frac{m_2 (m_3 + m_1)}{m_1 + m_2 + m_3}; \\ m_{12} &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}; \quad n_3 = \frac{m_3 (m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3}; \end{aligned}$$

оператор $\mathbf{V}_{23}$ — интегральный оператор с ядром

$$\mathcal{V}_{23}^\circ(k, p; k', p') = v_{23}(k_{23} - k'_{23}) \delta(p_1 - p'_1),$$

т. е.

$$\mathbf{V}_{23} f(k, p) = \int v_{23}(k_{23} - k'_{23}) f(k'_{23}, p_1) dk'_{23};$$

операторы $\mathbf{V}_{31}$ и $\mathbf{V}_{12}$ определяются аналогично в координатах k_{31} , p_2 и k_{12} , p_3 соответственно.

Функцию $H_0(k, p)$ мы часто будем писать в виде

$$H_0(k, p) = \frac{1}{2m} k^2 + \frac{1}{2n} p^2,$$

опуская все индексы при соответствующих величинах.

Иногда в качестве независимых переменных вместо k , p удобно брать какую-либо пару из переменных p_1 , p_2 , p_3 , например вместо пере-

менных k_{23} и p_1 использовать p_2 и p_1 . Приведем формулы, выражающие переменные типа k через переменные типа p ,

$$k_{23} = -p_2 - \frac{m_2}{m_2 + m_3} p_1 = p_3 + \frac{m_3}{m_2 + m_3} p_1;$$

$$k_{31} = -p_3 - \frac{m_3}{m_1 + m_3} p_2 = p_1 + \frac{m_1}{m_1 + m_3} p_2;$$

$$k_{12} = -p_1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} p_3 = p_2 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} p_3;$$

Переход от какой-либо пары из p_1, p_2, p_3 к другой осуществляется с помощью соотношения

$$p_1 + p_2 + p_3 = 0.$$

Нетрудно выразить ядра операторов V_{23}, V_{31} и V_{12} через эти переменные. Так, например, если $p_1 = p'_1$, то $k_{23} - k'_{23} = -p_2 + p'_2 = p_3 - p'_3$, так что

$$\mathcal{V}_{23}(k, p; k', p') = v_{23}(-p_2 + p'_2) \delta(p_1 - p'_1) = v_{23}(p_3 - p'_3) \delta(p_1 - p'_1).$$

Для функции $H_0(k, p)$ удобно следующее выражение через переменные p_1, p_2, p_3 :

$$\begin{aligned} H_0(k, p) &= \frac{p_1^2}{2m_{31}} + \frac{(p_1, p_2)}{m_3} + \frac{p_2^2}{2m_{23}} = \\ &= \frac{p_2^2}{2m_{12}} + \frac{(p_2, p_3)}{m_1} + \frac{p_3^2}{2m_{31}} = \frac{p_3^2}{2m_{23}} + \frac{(p_2, p_1)}{m_2} + \frac{p_1^2}{2m_{12}}. \end{aligned}$$

Свяжем с формальными выражениями (1.1) и (1.2) самосопряженные операторы $\mathbf{h}$ и $\mathbf{H}$, действующие в гильбертовом пространстве квадратично интегрируемых функций соответствующего числа переменных.

Обозначим через $\mathfrak{h}$ гильбертово пространство функций $f(k)$ одной переменной с обычным скалярным произведением

$$(f, f') = \int f(k) \overline{f'(k)} dk.$$

Гильбертово пространство функций $f(k, p)$ двух переменных со скалярным произведением

$$(f, f') = \int f(k, p) \overline{f'(k, p)} dk dp$$

обозначим через $\mathfrak{H}$.

Мы не используем различных обозначений для элементов, скалярного произведения и нормы в $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{H}$, так как в каждом конкретном случае ясно, с каким пространством мы имеем дело.

Будем предполагать, что функции $v(k), v_{23}(k), v_{31}(k), v_{12}(k)$ удовлетворяют следующим условиям [мы выписываем их на примере функции $v(k)$]: *ограниченности и убывания*

$$|v(k)| \leq C(1 + |k|)^{-1-\theta_0}, \quad (\theta_0 > 0), \quad (A_{\theta_0})$$

гладкости

$$|v(k) - v(k+h)| \leq C(1 + |k|)^{-1-\theta_0} |h|^{\mu_0}; \quad (|h| \leq 1, \mu_0 > 0) \quad (B_{\mu_0})$$

и вещественности

$$v(-k) = \overline{v(k)}. \quad (R)$$

Через $\mathfrak{b}$ обозначим плотное в $\mathfrak{H}$ множество функций $f(k)$, удовлетворяющих условию

$$\int (1+k^2)^2 |f(k)|^2 dk < \infty.$$

Через $\mathfrak{D}$ обозначим плотное в $\mathfrak{S}$ множество функций $f(k, p)$, удовлетворяющих условию

$$\int (1+k^2+p^2)^2 |f(k, p)|^2 dk dp < \infty.$$

Теорема 1.1. Пусть функция $v(k)$ удовлетворяет условию A_{θ_0} и R , причем $\theta_0 > \frac{1}{2}$. Выражение (1.1), определенное на $\mathfrak{b}$, задает в $\mathfrak{H}$ самосопряженный оператор $\mathbf{h}$.

Пусть функции $v_{23}(k)$, $v_{31}(k)$ и $v_{12}(k)$ удовлетворяют условиям A_{θ_0} и R , причем $\theta_0 > \frac{1}{2}$. Выражение (1.2) вместе с поясняющими формулами, следующими за (1.2), определенное на $\mathfrak{D}$, задает в $\mathfrak{S}$ самосопряженный оператор $\mathbf{H}$.

Заметим, что теорема 1.1 является частным случаем известной теоремы Като [3] о самосопряженности многочастичного оператора Шредингера. Условия Като формулируются в координатном представлении. Эти условия заведомо выполняются, если все потенциалы $\tilde{v}_{ij}(x)$ квадратично интегрируемы по всему трехмерному пространству. Если в условии A_{θ_0} показатель θ_0 таков, что $\theta_0 > \frac{1}{2}$, то функции $v(k)$, а следовательно, и их преобразования Фурье, квадратично интегрируемы по всему пространству и поэтому удовлетворяют критерию Като. Для полноты изложения мы все же докажем теорему 1.1. Для доказательства используем следующее общее утверждение:

Лемма 1.1. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathfrak{S}$ задан самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ с областью определения $\mathfrak{D}(\mathbf{A})$. Пусть оператор $\mathbf{B}$ определен на $\mathfrak{D}(\mathbf{A})$, симметричен и удовлетворяет условию

$$\|\mathbf{B}f\| \leq \delta \|\mathbf{A}f\| + C\|f\|,$$

где $\delta < 1$. Тогда оператор

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

с областью определения $\mathfrak{D}(\tilde{\mathbf{A}}) = \mathfrak{D}(\mathbf{A})$ является самосопряженным оператором.

Эта лемма играет основную роль в доказательстве теоремы Като и доказана в [3].

Применим эту лемму для доказательства теоремы 1.1, выбирая в качестве $\mathbf{A}$ операторы $\mathbf{h}_0$ или $\mathbf{H}_0$, а в качестве $\mathbf{B}$ — операторы $\mathbf{v}$ или $\mathbf{V} = \mathbf{V}_{23} + \mathbf{V}_{31} + \mathbf{V}_{12}$, так что в качестве $\tilde{\mathbf{A}}$ мы будем получать $\mathbf{h}$ или $\mathbf{H}$ соответственно. Области $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{D}$ выбраны выше как естественные области определения самосопряженных операторов умножения на функцию $\mathbf{h}_0$ и $\mathbf{H}_0$.

Лемма 1.2. Пусть выполнены условия A_{θ_0} и R , причем $\theta_0 > \frac{1}{2}$. Тогда оператор $\mathbf{v}$ определен и симметричен на $\mathfrak{b}$, причем

$$\|\mathbf{v}f\| \leq \delta \|\mathbf{h}_0 f\| + C(\delta) \|f\|, \quad (1.3)$$

где δ может быть взято сколь угодно малым.

Докажем сначала, что существует такое δ , что оператор $\mathbf{v}$ подчинен оператору $(\mathbf{e} + \mathbf{h}_0)^{1-\delta}$. Пусть $f \in \mathfrak{D}$, тогда

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}f(k)|^2 &= \left| \int v(k-k')f(k')dk' \right|^2 \leq \\ &\leq C \left(\int \frac{1}{(1+|k-k'|)^{1+\theta_0}} \frac{(1+k'^2)^{1-\delta}}{(1+k'^2)^{1-\delta}} \cdot |f(k')| dk' \right)^2 \leq \\ &\leq C \int (1+k'^2)^{-2+2\delta} (1+|k-k'|)^{-2(1+\theta_0)} dk' \|(\mathbf{e} + \mathbf{h}_0)^{1-\delta} f\|^2. \end{aligned}$$

Если $\theta_0 > \frac{1}{2}$, то $2(1+\theta_0) > 3$, и мы получаем отсюда, что если δ такое, что $2(2-\delta) > 3$, т. е. $\delta < \frac{1}{4}$, то

$$\|\mathbf{v}f\| \leq C \|(\mathbf{e} + \mathbf{h}_0)^{1-\delta} f\|. \quad (1.4)$$

Неравенство (1.3) следует из (1.4), если использовать элементарное неравенство

$$(1+x)^{1-\delta} \leq \delta x + \left(\frac{1}{\delta}\right)^{1/\delta} \quad (x > 0; 0 < \delta < 1).$$

Для доказательства симметрии $\mathbf{v}$ в силу условия R достаточно доказать только абсолютную сходимость интеграла

$$I = \int f(k) v(k-k') \overline{f'(k')} dk dk'$$

для любых f и f' из $\mathfrak{D}$. Заметим, что функции $f(k)$ из $\mathfrak{D}$ абсолютно интегрируемы. Действительно,

$$\left(\int |f(k)| dk \right)^2 \leq \int (1+k^2)^2 |f(k)|^2 dk \int \frac{dk}{(1+k^2)^2} < \infty.$$

Абсолютная сходимость I немедленно отсюда следует. Лемма доказана.

Заметим теперь, что оператор $\mathbf{H}_0$ может быть представлен в виде суммы двух неотрицательных слагаемых, например

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{h}_0^{(23)} + \mathbf{h}_0^{(1)},$$

где

$$\mathbf{h}_0^{(23)} f(k, p) = \frac{1}{2m_{23}} k_{23}^2 f(k, p); \quad \mathbf{h}_0^{(1)} f(k, p) = \frac{1}{2n_1} p_1^2 f(k, p),$$

причем, повторяя доказательство леммы 1.2, мы можем показать, что

$$\|\mathbf{V}_{23}f\| \leq \delta \|\mathbf{h}_0^{(23)}f\| + C(\delta)\|f\| \leq \delta \|\mathbf{H}_0f\| + C(\delta)\|f\|$$

для любой $f \in \mathfrak{D}$ и что $\mathbf{V}_{23}$ симметричен на $\mathfrak{D}$. Аналогично можно рассмотреть операторы $\mathbf{V}_{31}$ и $\mathbf{V}_{12}$. Теорема 1.1 следует из лемм 1.1, 1.2 и приведенных рассуждений.

§ 2. СТРОЕНИЕ РЕЗОЛВЕНТЫ ОПЕРАТОРА $\mathbf{h}$ ПРИ $\text{Im } z \neq 0$

В настоящем параграфе мы начнем исследование резольвенты оператора $\mathbf{h}$, т. е. оператора

$$\mathbf{r}(z) = (\mathbf{h} - z\mathbf{e})^{-1}. \quad (2.1)$$

Здесь $\mathbf{e}$ — единичный оператор в $\mathfrak{H}$ и z — комплексное число. В силу самосопряженности оператора $\mathbf{h}$ оператор $\mathbf{r}(z)$ определен и ограничен при всех z с $\text{Im } z \neq 0$. Область его значений при всех таких z одинакова и совпадает с $\mathfrak{D}$.

Основным средством исследования оператора $r(z)$ является уравнение, связывающее его с операторами v и резольвентой $r_0(z)$ оператора h_0

$$r_0(z) = (h_0 - ze)^{-1}. \quad (2.2)$$

Это хорошо известное уравнение имеет вид

$$r(z) = r_0(z) - r_0(z)vr(z) \quad (2.3)$$

и определяет $r(z)$ однозначно. Точнее, справедливо следующее утверждение:

Лемма 2.1. Пусть ограниченный оператор $\tilde{r}$ имеет область значений, лежащую в $\mathfrak{D}$, и при некотором z с $\text{Im } z \neq 0$ удовлетворяет уравнению (2.3). Тогда $\tilde{r} = r(z)$.

Для доказательства рассмотрим оператор $r_1 = r(z) - \tilde{r}$. Он удовлетворяет уравнению

$$r_1 = -r_0(z)vr_1 \quad (2.4)$$

при z , указанном в формулировке леммы. Для любого $f \in \mathfrak{H}$ имеет смысл $g = r_1 f$ и $g \in \mathfrak{D}$. Из уравнения (2.4) следует уравнение для g

$$g = -r_0(z)vg. \quad (2.5)$$

Умножая (2.5) на $h_0 - ze$, мы получаем, что

$$h_0 g - zg = -vg \quad (2.6)$$

или

$$hg = zg. \quad (2.7)$$

Из самосопряженности h следует, что $g = 0$, откуда $r_1 = 0$, т. е. $\tilde{r} = r(z)$. Лемма доказана.

Удобно рассмотреть оператор

$$t(z) = v - vr(z)v. \quad (2.8)$$

При всех z с $\text{Im } z \neq 0$ оператор $t(z)$ определен на $\mathfrak{D}$ и удовлетворяет уравнению

$$t(z) = v - vr_0(z)t(z), \quad (2.9)$$

причем оператор $r(z)$ выражается через $t(z)$ следующим образом:

$$r(z) = r_0(z) - r_0(z)t(z)r_0(z). \quad (2.10)$$

Действительно, умножая уравнение (2.3) на v слева и справа, мы получаем

$$\begin{aligned} t(z) - v &= -vr_0(z)v + vr_0(z)vr(z)v = \\ &= -vr_0(z)v + vr_0(z)[-t(z) + v] = -vr_0(z)t(z). \end{aligned}$$

При помощи аналогичной процедуры нетрудно проверить, что оператор $r(z)$, построенный по $t(z)$ по формуле (2.10), удовлетворяет уравнению (2.3), и его область значений содержится в $\mathfrak{D}$. На основании леммы 2.1 этот оператор совпадает с резольвентой $r(z)$.

Из леммы 2.1 и приведенных рассуждений следует

Лемма 2.2. Пусть оператор $\tilde{t}$ определен на $\mathfrak{D}$ и удовлетворяет при некотором z уравнению (2.9). Тогда $\tilde{t} = t(z)$.

Оператор $t(z)$ удобнее для исследования, чем резольвента $r(z)$, так как формула (2.8) позволяет надеяться, что, подобно оператору v , оператор $t(z)$ является интегральным оператором с ограниченным и гладким

ядром. Для строгого доказательства этого утверждения мы поступим следующим образом. Рассмотрим интегральное уравнение

$$t(k, k', z) = v(k - k') - \int v(k - k'') \left(\frac{k'^2}{2m} - z \right)^{-1} t(k'', k', z) dk'' \quad (2.11)$$

для ядра $t(k, k', z)$. Это уравнение подробно исследуется в § 4 в предположении, что выполнены условия A_{θ_0} и B_{μ_0} и R . В частности, там будет доказано следующее утверждение:

Уравнение (2.11) при всех z с $\text{Im } z \neq 0$ имеет решение $t(k, k', z)$, непрерывно зависящее от k, k' и z и удовлетворяющее оценке

$$|t(k, k', z)| \leq C(1 + |k - k'|)^{-1-\theta}, \quad \theta < \theta_0. \quad (2.12)$$

равномерно по z с $|\text{Im } z| > \delta$, $\delta > 0$ и любым k и k' .

Построим по ядру $t(k, k', z)$ оператор $\tilde{t}(z)$, такой что

$$\tilde{t}(z)f(k) = \int t(k, k', z)f(k')dk'.$$

Мы можем выбрать θ в условии (2.12) так, что $\theta > \frac{1}{2}$. Повторяя выкладку, использованную в § 1 для доказательства того, что оператор v определен на $\mathfrak{d}$, мы можем доказать это утверждение для $\tilde{t}(z)$. Из уравнения (2.11) следует, что $\tilde{t}(z)$ удовлетворяет уравнению (2.9) и поэтому, на основании леммы 2.2, совпадает с $\mathbf{t}(z)$.

Мы приходим к следующему утверждению:

Теорема 2.1. Пусть $\text{Im } z \neq 0$. Резольвента $\mathbf{r}(z)$ представляется в виде (2.10), где $\mathbf{t}(z)$ — интегральный оператор, ядро $t(k, k', z)$ которого непрерывно по своим переменным и удовлетворяет оценке (2.12).

Известно, что характеристическими свойствами резольвенты самосопряженного оператора являются свойства

$$\mathbf{r}^*(z) = \mathbf{r}(z) \quad (2.13)$$

и

$$\mathbf{r}(z_1) - \mathbf{r}(z_2) = (z_1 - z_2)\mathbf{r}(z_1)\mathbf{r}(z_2). \quad (2.14)$$

Соотношение (2.14) часто называют тождеством Гильберта.

Посмотрим, какие свойства ядра $t(k, k', z)$ следуют из соотношений (2.13) и (2.14).

Лемма 2.3. Справедливо соотношение

$$t(k, k', z) = \overline{t(k', k, z)}. \quad (2.15)$$

Доказательство. Пусть f и f' — любые функции из $\mathfrak{d}$. В силу симметрии v на $\mathfrak{d}$ мы получаем из (2.8) и (2.13), что

$$(\mathbf{t}(z)f, f') = (f, \mathbf{t}(\bar{z})f'),$$

или подробно

$$\int \left\{ \int t(k, k', z)f(k')dk' \right\} \overline{f'(k)}dk = \int \left\{ \int \overline{t(k', k, z)}f'(k)dk \right\} f(k')dk'. \quad (2.16)$$

Интегралы здесь сходятся абсолютно, и мы можем поменять порядок интегрирования в правой части. В силу произвольности $f(k)$ и $f'(k)$ из (2.16) следует (2.15). Лемма доказана.

Лемма 2.4. Справедливо соотношение

$$\begin{aligned} & t(k, k', z_1) - t(k, k', z_2) = \\ & = (z_2 - z_1) \int t(k, k'', z_1) \frac{1}{\frac{k''^2}{2m} - z_1} \frac{1}{\frac{k''^2}{2m} - z_2} t(k'', k', z_2) dk''. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Доказательство. Покажем сначала, что выполняются соотношения

$$\mathbf{t}(z)\mathbf{r}_0(z) = \mathbf{v}\mathbf{r}(z); \quad \mathbf{r}_0(z)\mathbf{t}(z) = \mathbf{r}(z)\mathbf{v}. \quad (2.18)$$

Действительно, умножая (2.10) на $\mathbf{v}$ слева, мы получим

$$\mathbf{v}\mathbf{r}(z) = \mathbf{v}\mathbf{r}_0(z) - \mathbf{v}\mathbf{r}_0(z)\mathbf{t}(z)\mathbf{r}_0(z) = [\mathbf{v} - \mathbf{v}\mathbf{r}_0(z)\mathbf{t}(z)]\mathbf{r}_0(z) = \mathbf{t}(z)\mathbf{r}_0(z).$$

Второе соотношение (2.18) мы получим аналогично, если умножим (2.8) на $\mathbf{r}_0(z)$ слева. Используем теперь (2.14). Умножая его на $\mathbf{v}$ слева и справа, мы получим

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(z_1) - \mathbf{t}(z_2) &= -(z_1 - z_2)\mathbf{v}\mathbf{r}(z_1)\mathbf{r}(z_2)\mathbf{v} = \\ &= (z_2 - z_1)\mathbf{t}(z_1)\mathbf{r}_0(z_1)\mathbf{r}_0(z_2)\mathbf{t}(z_2). \end{aligned}$$

Соотношение (2.17) следует из полученного соотношения. Точный вывод проводится так же, как в лемме 2.3.

§ 3. СТРОЕНИЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ОПЕРАТОРА $\mathbf{H}$ ПРИ КОМПЛЕКСНЫХ z

В этом параграфе мы начинаем исследование резольвенты оператора $\mathbf{H}$. Обозначим

$$\mathbf{R}(z) = (\mathbf{H} - z\mathbf{E})^{-1}; \quad \mathbf{R}_0(z) = (\mathbf{H}_0 - z\mathbf{E})^{-1}. \quad (3.1)$$

(Здесь $\mathbf{E}$ — единичный оператор в $\mathfrak{H}$). Эти операторы определены при всех z с $\text{Im } z \neq 0$ и переводят $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{D}$. Имеет место уравнение

$$\mathbf{R}(z) = \mathbf{R}_0(z) - \mathbf{R}_0(z)\mathbf{V}\mathbf{R}(z). \quad (3.2)$$

Мы обозначили здесь

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{23} + \mathbf{V}_{31} + \mathbf{V}_{12}. \quad (3.3)$$

Лемму 2.1 можно переформулировать следующим образом:

Лемма 3.1. Пусть ограниченный оператор $\tilde{\mathbf{R}}$ с областью значений, лежащей в $\mathfrak{D}$, удовлетворяет уравнению (3.2) при некотором z . Тогда $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}(z)$.

Обозначим через $\mathbf{T}(z)$ оператор, определяемый на $\mathfrak{D}$ соотношением

$$\mathbf{T}(z) = \mathbf{V} - \mathbf{V}\mathbf{R}(z)\mathbf{V}. \quad (3.4)$$

Резольвента $\mathbf{R}(z)$ выражается через $\mathbf{T}(z)$ следующим образом:

$$\mathbf{R}(z) = \mathbf{R}_0(z) - \mathbf{R}_0(z)\mathbf{T}(z)\mathbf{R}_0(z). \quad (3.5)$$

Оператор $\mathbf{T}(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{T}(z) = \mathbf{V} - \mathbf{V}\mathbf{R}_0(z)\mathbf{T}(z). \quad (3.6)$$

Любой оператор $\tilde{\mathbf{T}}$ с областью определения, содержащей $\mathfrak{D}$, и удовлетворяющий уравнению (3.6) при некотором z , совпадает с $\mathbf{T}(z)$. Все эти утверждения доказываются так же, как соответствующие утверждения в § 2. Однако, в отличие от § 2, уравнение (3.6) мало подходит для исследования оператора $\mathbf{T}(z)$.

Дело в том, что оператор $\mathbf{V}_{23}\mathbf{R}_0(z)$, участвующий в этом уравнении, имеет ядро

$$v_{23}(k_{23} - k'_{23})\delta(p_1 - p'_1)\left(\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - z\right)^{-1},$$

содержащее δ -функцию, причем эта особенность не пропадает при итерациях уравнения (3.6). Действительно, ядро оператора $\mathbf{V}_{23}\mathbf{R}_0(z)\mathbf{V}_{23}\mathbf{R}_0(z)$ содержит ту же самую δ -функцию, что и ядро оператора $\mathbf{V}_{23}\mathbf{R}_0(z)$. Поэтому у нас нет возможности свести уравнение (3.6) к уравнению

с вполне непрерывным оператором в каком-либо функциональном пространстве.

Заметим, однако, что при перемножении операторов $V_{23}R_0(z)$ и $V_{31}R_0(z)$ при итерациях уравнения (3.6) эти δ -функции исчезают. Действительно, при вычислении ядра оператора $V_{23}R_0(z)V_{31}R_0(z)$ мы можем взять в качестве переменных интегрирования переменные p_1 и p_2 , и δ -функции пропадут при интегрировании. Аналогичное явление происходит при перемножении двух любых операторов типа $V_{23}R_0(z)$ с разными индексами. Эти наводящие соображения подсказывают нам следующую процедуру для построения удобных уравнений для исследования резольвенты.

Рассмотрим операторы

$$M_{\alpha\beta}(z) = \delta_{\alpha\beta}V_\alpha - V_\alpha R(z)V_\beta. \quad (3.7)$$

Здесь для краткости записи введены индексы α, β , пробегающие значения 23, 31, 12; $\delta_{\alpha\beta}$ — кронекеровский символ. Нетрудно проверить, что введенный ранее оператор $T(z)$ выражается через операторы $M_{\alpha\beta}(z)$ следующим образом:

$$T(z) = \sum_{\alpha, \beta} M_{\alpha\beta}(z). \quad (3.8)$$

С помощью уравнения (3.2) можно показать, что операторы $M_{\alpha\beta}(z)$ удовлетворяют уравнениям

$$M_{\alpha\beta}(z) = \delta_{\alpha\beta}V_\alpha - V_\alpha R_0(z) \sum_{\gamma} M_{\gamma\beta}(z). \quad (3.9)$$

Система уравнений (3.9) ничем не лучше уравнения (3.6). Однако мы можем сделать следующее преобразование. Сумму в правой части разобьем на два слагаемых

$$V_\alpha R_0(z) M_{\alpha\beta}(z) + V_\alpha R_0(z) \sum_{\gamma \neq \alpha} M_{\gamma\beta}(z)$$

и перенесем первое слагаемое в левую часть (3.9). Мы получим

$$[E + V_\alpha R_0(z)] M_{\alpha\beta}(z) = \delta_{\alpha\beta}V_\alpha - V_\alpha R_0(z) \sum_{\gamma \neq \alpha} M_{\gamma\beta}(z). \quad (3.10)$$

Рассмотрим оператор $T_\alpha(z)$, определенный соотношением

$$T_\alpha(z)f(k, p) = \int t_\alpha\left(k_\alpha, k'_\alpha, z - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha}\right)f(k'_\alpha, p_\alpha)dk'_\alpha. \quad (3.11)$$

Здесь через $t_\alpha(k, k', z)$ мы обозначили решение уравнения (2.11) с m_α и $v_\alpha(k)$ в качестве m и $v(k)$. Индекс α , относящийся к величинам p и n , пробегает значения 1, 2, 3 вместо 23, 31, 12 соответственно. Вследствие оценки (2.12) для этого ядра мы можем показать, что оператор $T_\alpha(z)$ определен на $\mathfrak{D}$, так же как мы в § 1 доказали аналогичное утверждение для оператора V_α . С помощью уравнения (2.11) нетрудно показать, что $T_\alpha(z)$ удовлетворяет уравнению

$$T_\alpha(z) = V_\alpha - V_\alpha R_0(z) T_\alpha(z) = V_\alpha - T_\alpha(z) R_0(z) V_\alpha. \quad (3.12)$$

Умножим (3.10) на $E - T_\alpha(z)R_0(z)$. Учитывая (3.12), мы получим, что $M_{\alpha\beta}(z)$ удовлетворяют системе уравнений

$$M_{\alpha\beta}(z) = \delta_{\alpha\beta}T_\alpha(z) - T_\alpha(z)R_0(z) \sum_{\gamma \neq \alpha} M_{\gamma\beta}(z), \quad (3.13)$$

которая является основным нашим средством для изучения резольвенты $R(z)$.

Лемма 3.2. Пусть $M_{\alpha\beta}(z)$ — девять операторов, определенных на $\mathfrak{D}$ и удовлетворяющих системе (3.13). Оператор

$$\tilde{T}(z) = \sum_{\alpha, \beta} M_{\alpha\beta}(z)$$

совпадает с оператором $T(z)$.

Для доказательства обратим рассуждения, приведшие нас к системе (3.13). Умножая (3.13) на ограниченный оператор $E + V_{\alpha} R_0(z)$ и учитывая (3.12), мы получим, что операторы $M_{\alpha\beta}(z)$ удовлетворяют системе (3.9), а, следовательно, оператор $\tilde{T}(z)$ удовлетворяет уравнению (3.6). В силу единственности решения этого уравнения в классе операторов, определенных на $\mathfrak{D}$, мы получаем требуемое утверждение. Лемма доказана.

Ядра свободных членов в (3.13) содержат δ -функцию. Рассмотрим поэтому вместо операторов $M_{\alpha\beta}(z)$ операторы

$$W_{\alpha\beta}(z) = M_{\alpha\beta}(z) - \delta_{\alpha\beta} T_{\alpha}(z), \quad (3.14)$$

для которых справедлива система, аналогичная (3.13),

$$W_{\alpha\beta}(z) = W_{\alpha\beta}^{(0)}(z) - T_{\alpha}(z) R_0(z) \sum_{\gamma \neq \alpha} W_{\gamma\beta}(z), \quad (3.15)$$

но с другим свободным членом

$$W_{\alpha\alpha}^{(0)}(z) = 0; \quad W_{\alpha\beta}^{(n)}(z) = -T_{\alpha}(z) R_0(z) T_{\beta}(z) = Q_{\alpha\beta}^{(1)}(z). \quad (3.16)$$

Мы употребили здесь обозначение

$$Q_{\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}}^{(n)}(z) = (-1)^n T_{\gamma_1}(z) R_0(z) T_{\gamma_2}(z) \dots T_{\gamma_n}(z) R_0(z) T_{\gamma_{n+1}}(z), \quad (3.17)$$

причем индексы $\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}$ в (3.7) пробегает значения, ограниченные условием

$$\gamma_i \neq \gamma_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.18)$$

Нетрудно убедиться, что ядра свободных членов системы (3.15) — гладкие ограниченные функции. Действительно, имеем, например,

$$\begin{aligned} Q_{23, 31}^{(1)}(k, p; k', p'; z) &= t_{23} \left(k_{23}, -p'_2 - \frac{m_2}{m_2 + m_3} p_1; z - \frac{p_1^2}{2n_1} \right) \times \\ &\times \left(\frac{p_1^2}{2m_{31}} + \frac{(p_1, p'_2)}{m_3} + \frac{p_2^2}{2m_{23}} - z \right)^{-1} \times \\ &\times t_{31} \left(p_1 + \frac{m_1}{m_1 + m_3} p'_2, k'_{31}, z - \frac{p_2^2}{2n_2} \right), \end{aligned} \quad (3.19)$$

и при $\text{Im } z \neq 0$ выражение в знаменателе (3.19) не обращается в нуль. Аналогично можно убедиться, что ядро любого оператора $Q_{\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}}^{(n)}(z)$ — также ограниченная гладкая функция. Следует ожидать, что ядра операторов $W_{\alpha\beta}(z)$ тоже обладают этим свойством. Это действительно имеет место и будет доказано следующим образом. Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\alpha\beta}^{\gamma}(k, p; k', p'; z) &= \mathcal{W}_{\alpha\beta}^{\gamma(0)}(k, p; k', p'; z) - \\ &- \int t_{\alpha} \left(k_{\alpha}, k''_{\alpha}, z - \frac{p_{\alpha}^2}{2n_{\alpha}} \right) \frac{\delta(p_{\alpha} - p''_{\alpha})}{k''^2 \frac{p'^2}{2n} - z} \sum_{\gamma \neq \alpha} \mathcal{W}_{\gamma\beta}^{\gamma}(k'', p''; k', p'; z) dk'' dp''. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Эта система будет подробно исследоваться в ряде параграфов ниже, начиная с § 5. Для формулировки нужного нам результата, полученного там, введем несколько обозначений. Обозначим через $\tilde{W}_{\alpha\beta}(z)$ операторы, полученные из $W_{\alpha\beta}(z)$ после вычитания первых трех итераций системы уравнений (3.15),

$$\tilde{W}_{\alpha\beta}(z) = W_{\alpha\beta}(z) - Q_{\alpha\beta}^{(1)}(z) - Q_{\alpha\beta}^{(2)}(z) - Q_{\alpha\beta}^{(3)}(z), \quad (3.21)$$

где

$$Q_{\alpha\beta}^{(2)}(z) = \sum_{\gamma} Q_{\alpha, \gamma, \beta}^{(2)}(z); \quad Q_{\alpha\beta}^{(3)}(z) = \sum_{\gamma_1, \gamma_2} Q_{\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \beta}^{(3)}(z). \quad (3.22)$$

Штрих при знаке $\sum$ означает, что суммирование ведется только по допустимым значениям $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$, т. е. $\gamma \neq \alpha, \gamma \neq \beta, \gamma_1 \neq \alpha, \gamma_1 \neq \gamma_2, \gamma_2 \neq \beta$. Через $N(k, p; \theta)$ обозначим оценочную функцию

$$N(k, p; \theta) = \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ \alpha \neq \beta}} (1 + |p_{\alpha}|)^{-1-\theta} (1 + |p_{\beta}|)^{-1-\theta}, \quad (3.23)$$

причем в (3.23) следует понимать, что переменные p_1, p_2, p_3 выражены через какую-либо пару независимых переменных.

В § 5 будет доказано следующее утверждение:

Система уравнений (3.20) имеет решение, непрерывное по всем переменным и такое, что ядра $\mathcal{W}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z)$ операторов $\tilde{W}_{\alpha\beta}(z)$ удовлетворяют оценкам

$$|\tilde{\mathcal{W}}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z)| \leq CN(k, p; \theta)(1 + p_{\beta}^2)^{-1} \quad (3.24)$$

при любых z из конечной области, не примыкающей к вещественной оси, причем θ можно брать сколь угодно близким к θ_0 в условии A_{θ_0} .

Покажем теперь, что интегральные операторы $W_{\alpha\beta}(z)$ с ядрами $\mathcal{W}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z)$ определены на $\mathfrak{D}$. Используем для этого следующее утверждение:

Лемма 3.3. Пусть W — интегральный оператор

$$Wf(k, p) = \int \mathcal{W}(k, p; k', p') f(k', p') dk' dp',$$

причем ядро $\mathcal{W}(k, p; k', p')$ удовлетворяет оценке

$$|\mathcal{W}(k, p; k', p')| \leq CN(k, p; \theta)(1 + p_{\beta}^2)^{-1},$$

где β принимает какое-либо значение: 1, 2 или 3 и $\theta > \frac{1}{2}$. Оператор W определен на $\mathfrak{D}$ как оператор в $\mathfrak{H}$.

Доказательство. Пусть $f(k, p)$ — финитная гладкая функция. Тогда, выбирая в качестве переменных интегрирования k_{β} и p_{β} , мы получим

$$\begin{aligned} |Wf(k, p)|^2 &\leq \\ &\leq C(N(k, p; \theta))^2 \int \frac{dk dp}{(1 + p^2)^2 (1 + k^2 + p^2)^2} \int (1 + k^2 + p^2)^2 |f(k, p)|^2 dk dp \leq \\ &\leq C(N(k, p; \theta))^2 \|(E + H_0)f\|^2 \end{aligned}$$

Так как $\theta > \frac{1}{2}$, мы получаем, что

$$\|Wf\| \leq C\|(E + H_0)f\|,$$

и, таким образом, оператор W определен на любой $f \in \mathfrak{D}$. Лемма доказана.

Все операторы $Q_{\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}}^{(n)}(z)$ определены на $\mathfrak{D}$. На основании оценки (3.24) и леммы 3.3 мы можем утверждать, что операторы $\bar{W}_{\alpha\beta}(z)$, а следовательно, и $W_{\alpha\beta}(z)$ также определены на $\mathfrak{D}$ как интегральные операторы.

Посмотрим, что дают перечисленные результаты для самой резольвенты $R(z)$. Удобно для формулировки утверждения рассмотреть операторы

$$H_\alpha = H_0 + V_\alpha, \quad \alpha = 23, 31, 12. \quad (3.25)$$

Через $R_\alpha(z)$ обозначим резольвенты этих операторов

$$R_\alpha(z) = (H_\alpha - zE)^{-1}. \quad (3.26)$$

Нетрудно убедиться, что эти резольвенты выражаются через операторы $T_\alpha(z)$ следующим образом:

$$R_\alpha(z) = R_0(z) - R_0(z) T_\alpha(z) R_0(z), \quad (3.27)$$

так что

$$-R_0(z) T_\alpha(z) R_0(z) = R_\alpha(z) - R_0(z). \quad (3.28)$$

Из приведенных рассуждений следует

Теорема 3.1. Пусть функции $v_\alpha(k)$ удовлетворяют условиям A_{θ_0} , B_{μ_0} , R , причем $\theta_0 > \frac{1}{2}$. Тогда резольвента $R(z)$ оператора H представляется в виде

$$R(z) = R_0(z) + \sum_{\alpha} (R_\alpha(z) - R_0(z)) - R_0(z) \sum_{\alpha, \beta} W_{\alpha\beta}(z) R_0(z), \quad (3.29)$$

причем операторы $W_{\alpha\beta}(z)$ являются интегральными операторами, для ядер которых справедливы оценки (3.24).

Для доказательства формулы (3.29) следует сопоставить формулы (3.5), (3.8), (3.14) и (3.28).

В заключение этого параграфа посмотрим, какие свойства ядер $\mathcal{W}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z)$ следуют из „самосопряженности“ резольвенты

$$R(z) = R^*(z) \quad (3.30)$$

и тождества Гильберта

$$R(z_1) - R(z_2) = (z_1 - z_2) R(z_1) R(z_2). \quad (3.31)$$

Лемма 3.4. Справедливы соотношения

$$\mathcal{W}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z) = \overline{\mathcal{W}_{\beta\alpha}(k', p'; k, p; \bar{z})}. \quad (3.32)$$

Для доказательства заметим, что в силу (2.15) для любых f и f' из $\mathfrak{D}$ имеет место соотношение

$$(T_\alpha(z)f, f') = (f, T_\alpha(\bar{z})f'), \quad (3.33)$$

а в силу симметрии V_α и свойства (3.30)

$$(M_{\alpha\beta}(z)f, f') = (f, M_{\beta\alpha}(\bar{z})f'). \quad (3.34)$$

Комбинируя (3.33) и (3.34), мы получаем, что

$$(W_{\alpha\beta}(z)f, f') = (f, W_{\beta\alpha}(\bar{z})f'), \quad (3.35)$$

так что соответствующие ядра должны удовлетворять (3.32).

Лемма 3.5. Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z_1) - \mathcal{M}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z_2) = \\ = (z_2 - z_1) \int \sum_{\gamma} \mathcal{M}_{\alpha\gamma}(k, p; k'', p''; z_1) \left(\frac{k''^2}{2m} + \frac{p''^2}{2n} - z_1 \right)^{-1} \times \\ \times \left(\frac{k''^2}{2m} + \frac{p''^2}{2n} - z_2 \right)^{-1} \sum_{\gamma} \mathcal{M}_{\gamma\beta}(k'', p''; k', p'; z_2) dk'' dp''. \quad (3.36) \end{aligned}$$

Доказательство. Используем соотношения

$$\mathbf{V}_\alpha \mathbf{R}(z) = \sum_{\gamma} \mathbf{M}_{\alpha\gamma}(z) \mathbf{R}_0(z); \quad \mathbf{R}(z) \mathbf{V}_\beta = \mathbf{R}_0(z) \sum_{\gamma} \mathbf{M}_{\gamma\beta}(z), \quad (3.37)$$

которые можно получить, умножая выражение (3.5) на $\mathbf{V}_\alpha$ слева и выражение (3.7) на $\mathbf{R}_0(z)$ слева и используя соотношение (3.8) и уравнения (3.2) и (3.9).

Умножая тождество Гильберта (3.31) на $\mathbf{V}_\alpha$ слева и $\mathbf{V}_\beta$ справа и используя (3.37), мы приходим к соотношению

$$\mathbf{M}_{\alpha\beta}(z_1) - \mathbf{M}_{\alpha\beta}(z_2) = (z_2 - z_1) \sum_{\gamma} \mathbf{M}_{\alpha\gamma}(z_1) \mathbf{R}_0(z_1) \mathbf{R}_0(z_2) \sum_{\gamma} \mathbf{M}_{\gamma\beta}(z_2). \quad (3.38)$$

Соотношение (3.36) представляет собой запись (3.38) в терминах ядер операторов $\mathbf{M}_{\alpha\beta}(z)$. Следует иметь в виду, что ядра операторов $\mathbf{M}_{\alpha\beta}(z)$ при $\alpha = \beta$ имеют δ -образную особенность

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\alpha\alpha}(k, p; k', p'; z) = t_\alpha \left(k_\alpha, k'_\alpha, z - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} \right) \delta(p_\alpha - p'_\alpha) + \\ + \mathcal{U}_{\alpha\alpha}(k, p; k', p'; z), \end{aligned}$$

где $\mathcal{U}_{\alpha\alpha}(k, p; k', p'; z)$ — гладкое ограниченное ядро. Лемма доказана.

§ 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ЯДРА $t(k, k', z)$

В настоящем параграфе мы исследуем интегральное уравнение для ядра $t(k, k', z)$, выведенное в § 2. Мы докажем разрешимость этого уравнения и получим подробные оценки для решения.

Исследуемое уравнение имеет вид

$$t(k, k', z) = v(k - k') - \int v(k - k'') \left(\frac{k''^2}{2m} - z \right)^{-1} t(k'', k', z) dk''. \quad (4.1)$$

Это — уравнение для ядра $t(k, k', z)$, рассматриваемого как функция переменной k , причем переменные k' и z являются параметрами. Зависимость от k' определяется свободным членом, а зависимость от z — ядром этого интегрального уравнения.

Мы будем считать, не оговаривая каждый раз, что функция $v(k)$ удовлетворяет условиям A_{θ_0} , B_{μ_0} и R , причем $\theta_0 > \frac{1}{2}$, $\mu_0 > \frac{1}{2}$.

Интеграл, участвующий в уравнении (4.1), становится сингулярным, когда z выходит на вещественную ось. Для того чтобы придать смысл такого типа интегралам при всех вещественных z , мы требуем выполнения условия Гельдера от всех функций, которые стоят в подынтегральном выражении. Перечислим здесь несколько определений и утверждений относительно гильдеровских функций и сингулярных интегралов с ними, которые будут неоднократно в дальнейшем использоваться.

Будем говорить, что функция $f(k_1, \dots, k_n, z_1, \dots, z_m)$ переменных $k_1, \dots, k_n$ и комплексных переменных $z_1, \dots, z_m$ удовлетворяет условию Гельдера с показателями $\mu_1, \dots, \mu_n, \nu_1, \dots, \nu_m$ и оценочной функцией $M(k_1, \dots, k_n, z_1, \dots, z_m)$, когда $k_i, i=1, \dots, n$, пробегает все трехмерное пространство, а $z_j, j=1, \dots, m$, меняются в области Π на комплексной плоскости, если выполняются оценки

$$|f(k_1, \dots, k_n, z_1, \dots, z_m)| \leq CM(k_1, \dots, k_n, z_1, \dots, z_m);$$

$$|f(k_1+h_1, \dots, k_n+h_n, z_1+\Delta_1, \dots, z_m+\Delta_m) - f(k_1, \dots, k_n, z_1, \dots, z_m)| \leq$$

$$\leq CM(k_1, \dots, k_n, z_1, \dots, z_m) [|h_1|^{\mu_1} + \dots + |h_n|^{\mu_n} + |\Delta_1|^{\nu_1} + \dots + |\Delta_m|^{\nu_m}],$$

где

$$|h_i| \leq 1, i=1, \dots, n; |\Delta_j| \leq 1, j=1, \dots, m,$$

причем $z_j + \alpha \Delta_j \in \Pi, 0 \leq \alpha \leq 1$.

Справедливы следующие утверждения:

I. Пусть $f(k_1, \dots, k_n, z_1, \dots, z_m)$ — гельдеровская функция с показателями $\mu_1, \dots, \mu_n, \nu_1, \dots, \nu_m$ и оценочной функцией $M(k_1, \dots, k_n, z_1, \dots, z_m)$. Тогда

$$f_1(k_1, \dots, k_{n-2}, k, z_1, \dots, z_m) = f(k_1, \dots, k_n, z_1, \dots, z_m) |_{k_{n-1}=k_n=k};$$

$$f_2(k_1, \dots, k_n, z_1, \dots, z_{m-2}, z) = f(k_1, \dots, k_n, z_1, \dots, z_m) |_{z_{m-1}=z_m=z}$$

также гельдеровские функции с показателями $\mu_1, \dots, \mu_{n-2}, \mu, \nu_1, \dots, \nu_m$, где $\mu = \min(\mu_{n-1}, \mu_n)$ и $\mu_1, \dots, \mu_n, \nu_1, \dots, \nu_{m-2}, \nu$, где $\nu = \min(\nu_{m-1}, \nu_m)$ и оценочными функциями $M(k_1, \dots, k_{n-2}, k, k, z_1, \dots, z_m)$ и $M(k_1, \dots, k_n, z_1, \dots, z_{m-2}, z, z)$ соответственно.

II. Пусть $f(k_1, \dots, k_n, z_1, \dots, z_m)$ — такая же, как в утверждении I. Справедливы оценки

$$|f(k_1+h_1, k_2+h_2, \dots) - f(k_1+h_1, k_2, \dots) - f(k_1, k_2+h_2, \dots) +$$

$$+ f(k_1, k_2, \dots)| \leq CM(k_1, \dots, k_n, z_1, \dots, z_m) |h_1|^{\mu_1 \gamma} |h_2|^{\mu_2 (1-\gamma)};$$

$$|f(k_1+h_1, \dots, z_1+\Delta_1, \dots) - f(k_1, \dots, z_1+\Delta_1, \dots) -$$

$$- f(k_1+h_1, \dots, z_1, \dots) + f(k_1, \dots, z_1, \dots)| \leq$$

$$\leq CM(k_1, \dots, k_n, z_1, \dots, z_m) |h_1|^{\mu_1 \gamma} |\Delta_1|^{\nu_1 (1-\gamma)};$$

$$|f(\dots, z_1+\Delta_1, z_2+\Delta_2, \dots) - f(\dots, z_1+\Delta_1, z_2, \dots) -$$

$$- f(\dots, z_1, z_2+\Delta_2, \dots) + f(\dots, z_1, z_2, \dots)| \leq$$

$$\leq CM(k_1, \dots, k_n, z_1, \dots, z_m) |\Delta_1|^{\nu_1 \gamma} |\Delta_2|^{\nu_2 (1-\gamma)}.$$

Здесь γ — произвольное число $0 \leq \gamma \leq 1$. Для сокращения записи мы не выписывали остальные аргументы функций $f(k_1, \dots, k_n, z_1, \dots, z_m)$ — которые считаются фиксированными.

III. Пусть $f(k_1, \dots, k_n, z_1, \dots, z_m)$ — такая же, как в утверждении I, причем

$$\int d\Omega_{k_n} M(k_1, \dots, k_n, z_1, \dots, z_m) \leq$$

$$\leq CN(k_1, \dots, k_{n-1}, z_1, \dots, z_m) (1 + |k_n|)^{-1-\theta}.$$

Тогда

$$f_1(k_1, \dots, k_{n-1}, z_1, \dots, z_m, z) = \int \left(\frac{k_n^2}{2m} - z \right)^{-1} f(k_1, \dots, k_n, z_1, \dots, z_m) dk_n$$

также гельдеровская функция с показателями $\mu'_1, \dots, \mu'_{n-1}, \nu'_1, \dots, \nu'_m, \nu$,

где $\nu = \min\left(\frac{1}{2}, \mu_n\right)$, а $\mu'_1, \dots, \mu'_{n-1}, \nu'_1, \dots, \nu'_m$ можно брать сколь угодно

близкими, но меньшими, чем $\mu_1, \dots, \mu_{n-1}, \nu_1, \dots, \nu_m$ соответственно, и оценочной функцией

$$M_1(k_1, \dots, k_{n-1}, z_1, \dots, z_m, z) = N(k_1, \dots, k_{n-1}, z_1, \dots, z_m) \times \\ \times (1 + |z|)^{-\frac{\theta'}{2}}, \quad \theta' < \min(1, \theta),$$

когда z меняется на всей комплексной плоскости Π_0 с разрезом по положительной части вещественной оси. При этом $f_1(k_1, \dots, k_{n-1}, z_1, \dots, z_m, z)$ дифференцируема по z при всех z за исключением окрестности положительной части вещественной оси и при $\operatorname{Re} z < -1$ справедлива оценка

$$\left| \frac{\partial}{\partial z} f_1(k_1, \dots, k_{n-1}, z_1, \dots, z_m, z) \right| \leq \\ \leq CN(k_1, \dots, k_{n-1}, z_1, \dots, z_m) (1 + |z|)^{-1 - \frac{\theta'}{2}}.$$

Константы в оценках для функции $f_1(k_1, \dots, k_{n-1}, z_1, \dots, z_m, z)$ линейно зависят от констант в оценках для $f(k_1, \dots, k_n, z_1, \dots, z_m)$.

Сформулированные утверждения в той или иной форме известны. Для полноты изложения мы докажем их в приложении I. В дальнейшем на утверждение III будем ссылаться как на лемму о сингулярных интегралах.

Вернемся к исследованию уравнения (4.1). Оценка для свободного члена этого уравнения как функции k зависит, вообще говоря, от параметра k' . Это неудобное обстоятельство, однако, устраняется при итерациях уравнения (4.1). Применим лемму о сингулярных интегралах для получения оценок для этих итераций. Начнем со второй итерации

$$t_1(k, k', z) = - \int v(k - k'') \left(\frac{k''^2}{2m} - z \right)^{-1} v(k'' - k') dk''. \quad (4.2)$$

При оценках подынтегральных выражений удобно использовать элементарное неравенство

$$(1 + |k - q|)^{-\theta} (1 + |q - k'|)^{-\theta} \leq \\ \leq C[(1 + |k - q|)^{-\theta} + (1 + |q - k'|)^{-\theta}] (1 + |k - k'|)^{-\theta}, \quad (4.3)$$

которое следует из неравенства треугольника и известного неравенства

$$(a + b)^{\theta} \leq C(a^{\theta} + b^{\theta}); \quad a \geq 0; \quad b \geq 0; \quad 0 \leq \theta.$$

Для применения леммы о сингулярных интегралах нам надо оценивать интегралы по угловым переменным вида

$$I(k, |q|, \theta) = \int d\Omega_q (1 + |k - q|)^{-\theta}. \quad (4.4)$$

В приложении II будет показано, что для интеграла $I(k, |q|, \theta)$ справедлива оценка

$$I(k, |q|, \theta) \leq C(1 + |k|)^{-\theta_1} (1 + |q|)^{-\theta_2}, \quad \theta_1 + \theta_2 = \theta < 2. \quad (4.5)$$

На основании этой оценки и с помощью (4.3) мы можем следующим образом оценить интеграл по угловым переменным от оценочных функций для подынтегрального выражения в (4.2):

$$\begin{aligned} I(k, k', |k''|) &= \int d\Omega_{k''} (1 + |k - k''|)^{-1-\theta_0} (1 + |k'' - k'|)^{-1-\theta_0} \leq \\ &\leq C(1 + |k - k'|)^{-1-\theta_0} \int d\Omega_{k''} [(1 + |k - k''|)^{-1-\theta_0} + (1 + |k'' - k'|)^{-1-\theta_0}] \leq \\ &\leq C(1 + |k - k'|)^{-1-\theta_0} (1 + |k''|)^{-1-\theta_0}. \end{aligned}$$

Здесь считается, что $\theta_0 < 1$.

Мы можем поступить и по-другому. Пусть $\delta < \theta_0$; имеем

$$\begin{aligned} I(k, k', |k''|) &\leq C(1 + |k - k'|)^{-1-\theta_0+\delta} \int d\Omega_{k''} (1 + |k - k''|)^{-\delta} \times \\ &\times [(1 + |k - k''|)^{-1-\theta_0+\delta} + (1 + |k'' - k'|)^{-1-\theta_0+\delta}] \leq \\ &\leq C(1 + |k|)^{-\delta} (1 + |k - k'|)^{-1-\theta_0+\delta} (1 + |k''|)^{-1-\theta_0+\delta}. \end{aligned}$$

Последний шаг получается с помощью неравенства Гельдера с подходящими показателями.

В результате мы получаем, что ядро $t_1(k, k', z)$ является гильбертовской функцией с показателями μ , μ , $\frac{1}{2}$, где μ сколь угодно близко к μ_0 , и оценочной функцией

$$(1 + |k - k'|)^{-1-\theta} (1 + |z|)^{-\theta/2} \text{ или } (1 + |k - k'|)^{-1-\theta+\delta} (1 + |k|)^{-\delta},$$

где $\theta < 1$, $\theta < \theta_0$ и $\delta < \theta$.

Подобную процедуру мы можем применить и для исследования последующих итераций. Сформулируем соответствующий результат. Обозначим через $t_n(z)$ операторы

$$t_n(z) = (-1)^n \mathbf{vr}_0(z) \underbrace{\mathbf{v} \dots \mathbf{vr}_0(z)}_{r_0 \text{ раз}} \mathbf{v}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (4.6)$$

и через $t_n(k, k', z)$ — ядра этих операторов. Справедливо утверждение:

Лемма 4.1. Для ядер $t_n(k, k', z)$ при любом конечном n справедлива оценка

$$|t_n(k, k', z)| \leq C(1 + |k - k'|)^{-1-\theta} (1 + |z|)^{-\theta/2}; \quad (4.7)$$

$$|t_n(k+h, k'+h', z+\Delta) - t_n(k, k', z)| \leq \quad (4.8)$$

$$\leq C(1 + |k - k'|)^{-1-\theta} (1 + |z|)^{-\theta/2} [|h|^{\mu_1} + |h'|^{\mu_1} + |\Delta|^{\nu}];$$

$$\theta < 1; \theta < \theta_0; \mu_1 < \mu_0; \nu < \frac{1}{2},$$

причем, начиная с $n \geq n_0$, где n_0 зависит от θ_0 , мы можем заменить оценочную функцию $(1 + |k - k'|)^{-1-\theta}$ в правых частях (4.7) и (4.8) на функцию $(1 + |k|)^{-\theta_1} (1 + |k'|)^{-\theta_2}$, где θ_1 и θ_2 — любые неотрицательные показатели, удовлетворяющие соотношению $\theta_1 + \theta_2 = 1 + \theta$. Все оценки равномерны по всем k, k' и $z \in \Pi_0$.

Введем в рассмотрение класс $m(\theta, \mu)$ функций $f(k)$, удовлетворяющих оценкам

$$|f(k)| \leq C(1 + |k|)^{-\theta}; \quad |f(k+h) - f(k)| \leq C(1 + |k|)^{-\theta} |h|^{\mu};$$

$$|h| \leq 1; \quad \theta > 0; \quad 0 < \mu < 1. \quad (4.9)$$

Класс $m(\theta, \mu)$ становится банаховым пространством, если в качестве нормы взять

$$\|f\|_{\theta, \mu} = \sup_{k, h} (1 + |k|)^{\theta} \left[|f(k)| + \frac{|f(k+h) - f(k)|}{|h|^{\mu}} \right]. \quad (4.10)$$

Обозначим это пространство через $b(\theta, \mu)$.

Заметим, что $v(k) \in m(1 + \theta_0, \mu_0)$ и что, начиная с $n \geq n_0$, ядра $t_n(k, k', z)$ как функции k принадлежат $m(\theta_1, \mu_1)$, причем равномерно по $z \in \Pi_0$ выполняются оценки

$$\|t_n(\cdot, k', z)\|_{\theta_1, \mu_1} \leq C(1 + |k'|)^{-\theta_2}(1 + |z|)^{-\theta_2}; \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} & \|t_n(\cdot, k' + h', z + \Delta) - t_n(\cdot, k', z)\|_{\theta_1, \mu_1} \leq \\ & \leq C(1 + |k'|)^{-\theta_2}(1 + |z|)^{-\theta_2} [|h'|^{\mu_2} + |\Delta|^{\nu_2}]; \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\theta_1 + \theta_2 < 1 + \theta_0; \quad \mu_1 + \mu_2 < \mu_0; \quad \nu_2 < \mu_2/2\mu; \quad \theta < \theta_0.$$

Последняя оценка получается из утверждения II о гельдеровских функциях.

На функциях $f(k) \in m(\theta, \mu)$ рассмотрим интегральный оператор

$$a(z)f(k) = \int v(k - k') \left(\frac{k'^2}{2m} - z \right)^{-1} f(k') dk'. \quad (4.13)$$

Повторяя процедуру, использованную при оценке итераций уравнения (4.1), мы можем доказать следующее утверждение:

Лемма 4.2. Пусть $f(k) \in m(\theta, \mu)$ и $g(k, z) = a(z)f(k)$, причем $\theta < 1 + \theta_0$ и $\mu < \mu_0$. Для $g(k, z)$ справедливы оценки

$$|g(k, z)| \leq C\|f\|_{\theta, \mu} (1 + |k|)^{-\theta'} (1 + |z|)^{-\delta}; \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} & |g(k + h, z + \Delta) - g(k, z)| \leq \\ & \leq C\|f\|_{\theta, \mu} (1 + |k|)^{-\theta'} (1 + |z|)^{-\delta} [|h|^{\mu'} + |\Delta|^{\nu'}]; \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\theta' \leq 1 + \theta_0; \quad \theta' < \theta_0 + \theta; \quad \delta < \frac{\theta_0 + \theta - \theta'}{2},$$

причем $\nu' = \min\left(\frac{1}{2}, \mu\right)$, а μ' не зависит от μ и может быть взято сколь угодно близким к μ_0 .

Мы видим, что оператор $a(z)$ переводит функции из класса $m(\theta, \mu)$, $\theta < 1 + \theta_0$, $\mu < \mu_0$ в функции из класса $m(\theta', \mu')$, причем мы можем взять $\mu' > \mu$, $\theta' > \theta$. Заметим теперь, что последовательность функций $f_n(k)$, ограниченная в норме $b(\theta', \mu')$, компактна в любом $b(\theta, \mu)$, $\theta < \theta'$, $\mu < \mu'$. Используя этот критерий компактности и оценки (4.14) и (4.15), мы можем утверждать, что справедлива

Лемма 4.3. Интегральный оператор $a(z)$ при всех $z \in \Pi_0$ определяет в $b(\theta, \mu)$ при $\theta < 1 + \theta_0$, $\mu < \mu_0$ вполне непрерывный оператор, причем

$$\|a(z)\|_{\theta, \mu} \leq C(1 + |z|)^{-\delta}; \quad (4.16)$$

$$\|a(z + \Delta) - a(z)\|_{\theta, \mu} \leq C(1 + |z|)^{-\delta} |\Delta|^{\nu}, \quad (4.17)$$

где δ — сколь угодно близко к $\frac{\theta_0}{2}$, а $\nu < \frac{\mu_0 - \mu}{2\mu_0}$.

Вместо ядра $t(k, k', z)$ будем изучать ядро $\tilde{t}(k, k', z)$, полученное из $t(k, k', z)$ после вычитания из него первых $n_0 - 1$ итераций уравнения (4.1)

$$\tilde{t}(k, k', z) = t(k, k', z) - t_1(k, k', z) - \dots - t_{n_0-1}(k, k', z).$$

Уравнение для $\tilde{f}(k, k', z)$ имеет вид

$$\tilde{f}(k, k', z) = t_{n_0}(k, k', z) - \int v(k - k'') \left(\frac{k''^2}{2m} - z \right)^{-1} \tilde{f}(k'', k', z) dk'', \quad (4.18)$$

и, как уже отмечалось выше, свободный член принадлежит $m(\theta_1, \mu_1)$ $\theta_1 < 1 + \theta_0$, $\mu_1 < \mu_0$. Будем искать решение $\tilde{f}(k, k', z)$ в классе функций, которые при фиксированных k' и z принадлежат $m(\theta_1, \mu_1)$ как функции k . Через $f_0(k', z)$ и $f(k', z)$ обозначим элементы, порожденные этими ядрами в $b(\theta_1, \mu_1)$. Уравнение (4.18) во введенных обозначениях переписывается в виде

$$f(k', z) = f_0(k', z) - a(z)f(k', z). \quad (4.19)$$

На основании леммы 4.3 мы можем утверждать, что к этому уравнению применима альтернатива Фредгольма, так что нашей ближайшей задачей является изучение однородного уравнения

$$\varphi + a(z)\varphi = 0 \quad (4.20)$$

в классе функций $m(\theta, \mu)$, $\theta < 1 + \theta_0$, $\mu < \mu_0$.

Лемма 4.4. Пусть $\varphi(k)$ — решение уравнения (4.20) из $m(\theta, \mu)$. $\theta < 1 + \theta_0$, $\mu < \mu_0$. Тогда $\varphi(k) \in m(1 + \theta_0, \mu')$, где μ' может быть сколь угодно близким к μ_0 .

Доказательство получается повторным применением оценок, сформулированных в лемме 4.2.

Лемма 4.5. Пусть $\text{Im } z \neq 0$. Уравнение (4.20) не имеет нетривиальных решений в классе $m(\theta, \mu)$.

Доказательство. Пусть при $z = z_0$ существует решение уравнения (4.20) из $m(\theta, \mu)$. Обозначим его через $\varphi_0(k)$. На основании леммы 4.4 $\varphi_0(k) \in m(1 + \theta_0, \mu)$, так что $\varphi_0(k) \in \mathfrak{h}$ и $\psi_0(k) = \left(\frac{k^2}{2m} - z_0 \right)^{-1}$, $\varphi_0(k) \in \mathfrak{d}$. Уравнение (4.20) в терминах $\psi_0(k)$ записывается в виде

$$\left(\frac{k^2}{2m} - z_0 \right) \psi_0(k) + \int v(k - k') \psi_0(k') dk' = 0$$

или

$$\mathbf{h}\psi_0 = z_0\psi_0.$$

Из самосопряженности оператора $\mathbf{h}$ следует, что $\psi_0 \equiv 0$ и, следовательно, $\varphi_0(k) = 0$. Лемма доказана.

Лемма 4.6. Уравнение (4.20) не имеет нетривиальных решений при достаточно больших $|z|$.

Доказательство следует из того факта, что в силу оценки (4.16) норма $a(z)$ при достаточно больших $|z|$ становится меньше 1.

Лемма 4.7. Пусть $\varphi(k)$ — решение уравнения (4.20) при $z = \omega^2 + i0$ или $z = \omega^2 - i0$, причем $\varphi(k) \in m(\theta, \mu)$. Справедливо соотношение

$$\varphi(k) \Big|_{\frac{k^2}{2m} = \omega^2} = 0. \quad (4.21)$$

Доказательство. Для определенности рассмотрим случай $z = \omega^2 + i0$. В силу непрерывности оператора $a(z)$ элемент

$$g(\varepsilon) = [a(\omega^2 + i\varepsilon) - a(\omega^2 + i0)]\varphi,$$

построенный по решению $\varphi(k)$ уравнения (4.20) при $z = \omega^2 + i0$, исчезает по норме $b(\theta_0, \mu)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Функции $\varphi(k)$ и $g(k, \varepsilon) \in \mathfrak{h}$ и уравнение

$$\varphi + a(\omega^2 + i\varepsilon)\varphi = g(\varepsilon)$$

мы можем записать в виде

$$\varphi + \mathbf{r}_0(\omega^2 + i\varepsilon)\varphi = g(\varepsilon). \quad (4.22)$$

Умножим (4.22) скалярно на $\mathbf{r}_0(\omega^2 + i\varepsilon)\varphi$. В силу симметрии v на $\mathfrak{D}$ мы получаем

$$\operatorname{Im}(\mathbf{r}_0(\omega^2 + i\varepsilon)\varphi, \varphi) = \operatorname{Im}(\mathbf{r}_0(\omega^2 + i\varepsilon)\varphi, g(\varepsilon)). \quad (4.23)$$

Интегралы

$$\int \varphi(k) \left(\frac{k^2}{2m} - (\omega^2 \pm i\varepsilon) \right)^{-1} g(k, \varepsilon) dk,$$

входящие в правую часть (4.23), исчезают в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$, так что мы можем записать (4.23) в виде

$$([\mathbf{r}_0(\omega^2 + i\varepsilon) - \mathbf{r}_0(\omega^2 - i\varepsilon)]\varphi, \varphi) = o(1)$$

или

$$\int \varphi(k) \left[\frac{1}{\frac{k^2}{2m} - \omega^2 - i\varepsilon} - \frac{1}{\frac{k^2}{2m} - \omega^2 + i\varepsilon} \right] \overline{\varphi(k)} dk = o(1).$$

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, мы получаем

$$\int |\varphi(k)|^2 \delta\left(\frac{k^2}{2m} - \omega^2\right) dk = 0,$$

откуда следует (4.21).

Аналогично рассматривается случай $z = \omega^2 - i0$. Заметим, что мы доказали совпадение решений уравнения (4.20) при $z = \omega^2 + i0$ и $z = \omega^2 - i0$. Действительно, для любого решения (4.20) при $z = \omega^2 + i0$ мы имеем

$$(\mathbf{a}(\omega^2 + i0) - \mathbf{a}(\omega^2 - i0))\varphi(k) = 2\pi i \int v(k - k') \delta\left(\frac{k'^2}{2m} - \omega^2\right) \varphi(k') dk' = 0,$$

откуда $\varphi(k)$ удовлетворяет также и (4.20) при $z = \omega^2 - i0$. Лемма доказана.

Назовем особыми точками оператора $\mathbf{a}(z)$ точки λ на вещественной оси, при которых уравнение (4.20) имеет нетривиальное решение.

Лемма 4.8. *Особые точки $\lambda \neq 0$ оператора $\mathbf{a}(z)$ являются точками дискретного спектра оператора $\mathbf{h}$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\lambda = \omega^2 > 0$. По решению $\varphi(k)$ уравнения (4.20) при $z = \omega^2$ построим функцию

$$\psi(k) = \varphi(k) \left(\frac{k^2}{2m} - \omega^2 \right)^{-1}.$$

Покажем, что $\psi(k) \in \mathfrak{D}$. Осложнение связано только с окрестностью поверхности $\frac{k^2}{2m} = \omega^2$, где знаменатель $\psi(k)$ обращается в 0. Однако, в силу леммы 4.7, мы имеем при $\frac{k^2}{2m} \approx \omega^2$

$$|\psi(k)| = \left| \varphi(k) - \varphi(k) \right|_{\frac{k^2}{2m} = \omega^2} \left| \frac{k^2}{2m} - \omega^2 \right|^{-1} \leq C \|\varphi\|_{\mathfrak{H}, \mu} \left| \frac{k^2}{2m} - \omega^2 \right|^{-1+\mu}.$$

Так как $\mu_0 > \frac{1}{2}$, то мы можем на основании леммы 4.4 считать, что $\mu > \frac{1}{2}$, так что $\psi(k)$ квадратично интегрируема в окрестности особой поверхности. Уравнение (4.20) в терминах $\psi(k)$ принимает вид

$$\left(\frac{k^2}{2m} - \omega^2\right)\psi(k) = - \int v(k-k')\psi(k')dk',$$

так что $\psi(k)$ является собственной функцией $\mathbf{h}$ и ω^2 — соответствующее собственное значение.

Случай $\lambda > 0$, рассматриваемый аналогично, проще, так как осложнение, связанное с сингулярным знаменателем, здесь не появляется. Лемма доказана.

Приведенные аргументы теряют силу в случае $\lambda = 0$. Как показывают примеры, эта точка может быть как особой, так и неособой, причем в первом случае она необязательно является точкой дискретного спектра оператора $\mathbf{h}$. Следует отметить, что точка $\lambda = 0$ бывает особой только в исключительных случаях. Именно, если точка $\lambda = 0$ является особой точкой для оператора $\mathbf{a}(z)$ с потенциалом $v(k)$, то она не будет особой точкой для оператора $\mathbf{a}_\varepsilon(z)$, где $v(k)$ заменен на $(1+\varepsilon)v(k)$ при любом достаточно малом ε . Действительно, $\mathbf{a}_\varepsilon(z) = (1+\varepsilon)\mathbf{a}(z)$, и при достаточно малом ε точка $1+\varepsilon$ не является точкой спектра вполне непрерывного оператора $\mathbf{a}(0)$.

Дискретный спектр оператора $\mathbf{h}$ исследовался многими авторами, причем условия на потенциал $\mathbf{v}$ формулировались в координатном представлении. Так, Като [5] доказал, что если $v(x)$ довольно произвольная функция внутри шара конечного радиуса, а вне этого шара

$$|v(x)| \leq C(1+|x|)^{-\alpha} \quad (4.24)$$

при $\alpha > 1$, то дискретный положительный спектр оператора $\mathbf{h}$ отсутствует. Существует и большое количество достаточных признаков конечности отрицательного спектра. Например, автор [6] доказал, что если в условии (4.24) $\alpha > 2$, то неположительный спектр оператора $\mathbf{h}$ состоит из конечного числа собственных значений конечной кратности. Очень общие условия конечности неположительного спектра, близкие к необходимым, содержатся в работе М. Ш. Бирмана [7].

Используемый нами в этой работе метод исследования плохо приспособлен для изучения дискретного спектра. Так, оставаясь в рамках предположений A_0 и B_μ , мы смогли доказать только, что особые точки оператора $\mathbf{a}(z)$ образуют счетное замкнутое множество, сосредоточенное на конечном интервале и имеющее самое большее одну предельную точку $\lambda = 0$. Чтобы использовать упомянутые выше результаты, нам надо накладывать условия типа (4.24) на преобразование Фурье от потенциала $v(k)$. Мы можем выговорить соответствующие условия и в терминах самой функции $v(k)$, но эти условия будут заведомо грубыми. Вместо этого мы будем просто считать, что кроме условий A_0 , B_μ и R выполняется еще

Условие С. Дискретный спектр оператора $\mathbf{h}$ состоит из одного простого отрицательного собственного значения. Точка $\lambda = 0$ не является особой точкой оператора $\mathbf{a}(z)$.

Первое ограничение здесь введено только для упрощения записи формул. Все использованные ниже приемы и полученные результаты естественно переносятся на случай конечного числа отрицательных собственных значений конечной кратности. Второе ограничение в условии С является более существенным: именно, приведенное ниже исследование резольвенты оператора энергии системы трех частиц не переносится без

изменений на случай, когда $\lambda = 0$ является особой точкой хотя бы для одного из трех операторов типа $\mathbf{h}$ с потенциалами $v_\alpha(k)$ и массами m_α ($\alpha = 23, 31, 12$) в качестве $v(k)$ и m . Однако, как уже говорилось выше, это второе ограничение почти всегда выполняется.

Обозначим через $-\kappa^2$ собственное значение оператора $\mathbf{h}$ и через $\psi(k)$ — соответствующую собственную функцию.

Лемма 4.9. *Функция $\psi(k)$ представляется в виде*

$$\psi(k) = \frac{\varphi(k)}{\frac{k^2}{2m} + \kappa^2}, \quad (4.25)$$

где $\varphi(k) \in \mathfrak{m}(1 + \theta_0, \mu_0)$ и удовлетворяет уравнению (4.20) при $z = -\kappa^2$.

Доказательство. По условию $\psi(k) \in \mathfrak{d}$ и удовлетворяет уравнению

$$\frac{k^2}{2m} \psi(k) + \int v(k - k') \psi(k') dk' = -\kappa^2 \psi(k). \quad (4.26)$$

Если мы обозначим $\varphi(k) = \left(\frac{k^2}{2m} + \kappa^2\right) \psi(k)$, то из (4.26) получим

$$\varphi(k) = - \int v(k - k') \psi(k') dk'. \quad (4.27)$$

Оценим $\varphi(k)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} |\varphi(k)| &\leq C \left(\int (1 + k'^2)^{-2} (1 + |k - k'|)^{-(2+2\theta_0)} dk' \right)^2 \times \\ &\times \left(\int (1 + k'^2)^2 |\psi(k')|^2 dk' \right)^{1/2} \leq C (1 + |k|)^{-1-\theta}; \\ \theta &< \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Для встретившегося тут интеграла типа

$$I(a) = \int \frac{dq}{(1 + |q|)^\alpha} \cdot \frac{1}{(1 + |q - a|)^\beta} \quad (4.28)$$

мы использовали оценку

$$I(a) \leq C (1 + |a|)^{-(\alpha+\beta-3)}; \quad \alpha + \beta > 3; \quad \alpha < 3; \quad \beta < 3, \quad (4.29)$$

которая будет доказана в приложении II. Аналогично можно оценить гильбертовскую разность для $\varphi(k)$ с показателем μ_0 . Мы приходим к выводу, что $\varphi(k) \in \mathfrak{m}(1 + \theta, \mu_0)$, $\theta < \frac{1}{2}$. Соотношение (4.27) можно переписать в терминах $\varphi(k)$ следующим образом:

$$\varphi(k) = - \int v(k - k') \left(\frac{k'^2}{2m} + \kappa^2 \right)^{-1} \varphi(k') dk',$$

т. е. $\varphi(k)$ является решением уравнения (4.20) при $z = -\kappa^2$. На основании леммы 4.4 мы можем заключить, что $\varphi(k) \in \mathfrak{m}(1 + \theta_0, \mu_0)$.

Лемма доказана.

Мы полностью разобрались со строением множества особых точек оператора $\mathbf{a}(z)$ и теперь можем возвратиться к исследованию уравнения (4.19), т. е. к изучению оператора $(\mathbf{e} + \mathbf{a}(z))^{-1}$.

Лемма 4.10. *Оператор $(\mathbf{e} + \mathbf{a}(z))^{-1}$ при всех z на плоскости Π_0 , за исключением точки $\lambda = -\kappa^2$, имеет обратный, представляющийся в виде*

$$(\mathbf{e} + \mathbf{a}(z))^{-1} = \mathbf{e} + \mathbf{b}(z), \quad (4.30)$$

причем

$$\|b(z)\|_{\theta, \mu} \leq C(1+|z|)^{-\delta} \quad (4.31)$$

и

$$\|b(z+\Delta) - b(z)\|_{\theta, \mu} \leq C(1+|z|)^{-\delta} |\Delta|^\nu; \quad \delta < \frac{\theta_0}{2}; \quad \nu < \frac{\mu_0 - \mu}{2\mu_0}. \quad (4.32)$$

Для доказательства заметим, что из альтернативы Фредгольма и отсутствия нетривиальных решений однородного уравнения следует, что при любом фиксированном $z \neq -x^2$ оператор $e - a(z)$ обратим в $b(\theta, \mu)$. Равномерная по $|z|$ оценка (4.31) следует из оценки (4.16) для оператора $a(z)$. Из гильбертовской непрерывности $a(z)$ следует (4.32).

Лемма доказана.

Применяя лемму 4.10 к уравнению (4.19) и учитывая связь этого уравнения с уравнением (4.1), мы приходим к следующему результату:

Теорема 4.1. Пусть выполнены условия A_{θ_0} , B_{μ_0} , R и C , причем $\theta_0 > \frac{1}{2}$, $\mu_0 > \frac{1}{2}$. Тогда при всех z , указанных в формулировке леммы 4.10, уравнение (4.1) имеет единственное решение, для которого справедливы оценки

$$|t(k, k', z)| \leq C(1+|k-k'|)^{-(1+\theta)}; \quad (4.33)$$

$$|t(k+h, k'+h', z+\Delta) - t(k, k', z)| \leq \\ \leq C(1+|k-k'|)^{-1-\theta} [|h|^\mu + |h'|^\mu + |\Delta|^\nu]; \quad (4.34)$$

$$|t(k, k', z) - v(k-k')| \leq C(1+|k-k'|)^{-1-\theta} (1+|z|)^{-\theta/2}, \quad (4.35)$$

где θ, μ, ν могут быть сколь угодно близкими к $\min(1, \theta_0), \mu_0$ и $\frac{1}{2}$ соответственно.

Мы использовали здесь следующее соображение: если

$$|f(k, k')| \leq C(1+|k|)^{-\theta_1} (1+|k'|)^{-\theta_2} \quad (4.36)$$

при любых θ_1 и θ_2 , таких что $\theta_1 + \theta_2 = \theta$, то

$$|f(k, k')| \leq C(1+|k-k'|)^{-\theta}. \quad (4.37)$$

Действительно, пусть $|k| \leq |k'|$. Тогда

$$|k-k'| \leq |k| + |k'| \leq 2|k'|,$$

и (4.37) получается, если в (4.36) взять $\theta_2 = \theta$. Аналогично рассматривается случай $|k| \geq |k'|$.

Перейдем теперь к исследованию поведения ядра $t(k, k', z)$ в окрестности особой точки $z = -x^2 < 0$, которая по предположению является точкой дискретного спектра оператора h . Нетрудно убедиться, что это — изолированная точка спектра. Действительно, если $z \neq -x^2$, то для $t(k, k', z)$ справедлива оценка (4.33), а резольвента $r_0(z)$, а следовательно, и резольвента $r(z)$ ограничены при всех z из окрестности точки $z = -x^2$.

Лемма 4.11. В окрестности особой точки $\lambda = -x^2$ оператор $t(z)$ представляется в виде

$$t(z) = (z + x^2)^{-1} c + \hat{t}(z), \quad (4.38)$$

где c и $\hat{t}(z)$ при всех рассматриваемых z определены на b и c симметричен.

Для доказательства используем представление для $r(z)$ в окрестности изолированной точки спектра оператора h

$$r(z) = -(z^2 + z)^{-1} p + \hat{r}(z). \quad (4.39)$$

Здесь p — проектор на соответствующее $\lambda = -x^2$ собственное подпространство, а $\hat{r}(z)$ — ограниченный в окрестности $z \approx -x^2$ оператор, аналитически зависящий от z . Области значений p и $\hat{r}(z)$ содержатся в $\mathfrak{d}$. Формула (4.38) следует теперь из выражения (2.8) для $t(z)$ через $r(z)$, причем

$$c = -vpv; \quad \hat{t}(z) = v - v\hat{r}(z)v, \quad (4.40)$$

и эти операторы обладают сформулированными в лемме свойствами.

Лемма доказана.

Лемма 4.12. Оператор c является интегральным, причем для его ядра справедливо представление

$$c(k, k') = \varphi(k) \overline{\varphi(k')}, \quad (4.41)$$

где $\varphi(k)$ — решение уравнения (4.20) при $z \equiv -x^2$, нормированное условием

$$\int \varphi(k) \left(\frac{k^2}{2m} + x^2 \right)^{-2} \overline{\varphi(k)} dk = 1. \quad (4.42)$$

Доказательство. Проектор p является интегральным оператором с ядром

$$p(k, k') = \psi(k) \overline{\psi(k')}, \quad (4.43)$$

где $\psi(k)$ — нормированная на 1 собственная функция оператора h , соответствующая собственному значению $-x^2$. Лемма следует из формул (4.27), (4.40) и (4.43).

Лемма 4.13. Для ядра $t(k, k', z)$ справедливо представление

$$t(k, k', z) = \frac{\varphi(k) \overline{\varphi(k')}}{z + x^2} + v(k - k') + \\ + \int t\left(k, q, \frac{q^2}{2m} \pm i0\right) \left(\frac{q^2}{2m} - z\right)^{-1} t\left(q, k', \frac{q^2}{2m} \mp i0\right) dq. \quad (4.44)$$

Доказательство. Заметим, что ядро $t(k, k', z)$ при фиксированных k и k' является аналитической функцией z на всей комплексной плоскости за исключением окрестности точки $z = -x^2$ и разреза по положительной части вещественной оси, где она имеет непрерывные предельные значения. Действительно, переходя в соотношении (2.17) к пределу $z_1 \rightarrow z_2$, мы получим

$$\frac{d}{dz} t(k, k', z) = - \int t(k, q, z) \left(\frac{q^2}{2m} - z\right)^{-2} t(q, k', z) dq, \quad (4.45)$$

и с помощью полученных оценок для ядра $t(k, k', z)$ нетрудно оценить интеграл в правой части (4.45) при всех указанных z . Вследствие этой аналитичности мы можем записать ядро $t(k, k', z)$ в виде

$$t(k, k', z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{t(k, k', s)}{s - z} ds,$$

где контур γ состоит из окружности радиуса ε вокруг точки $z = -x^2$ и контура, охватывающего разрез на расстоянии ε и замыкающегося кру-

гом радиуса R с центром в точке $z=0$. Интеграл по маленькому кругу дает в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ следующее выражение:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|s+\kappa^2|=\varepsilon} \frac{t(k, k', s)}{s-z} ds = \frac{\varphi(k) \overline{\varphi(k')}}{z + \kappa^2}. \quad (4.46)$$

Так как относительно поведения ядра $t(k, k', z)$ в окрестности $z = -\kappa^2$ мы знаем лишь то, что сформулировано в лемме 4.11, для доказательства (4.46) нам придется поступить следующим образом. Возьмем две гладких финитных функции $f(k)$ и $f'(k)$ и рассмотрим функцию

$$t(s) = \int \overline{f'(k)} t(k, k', s) f(k') dk dk' = (\mathbf{t}(s)f, f').$$

Вследствие равномерной ограниченности по z оператора $\mathbf{t}(z)$ на функциях из $\mathfrak{D}$ мы получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{|s+\kappa^2|=\varepsilon} \frac{t(s)}{s-z} ds &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \oint_{|s+\kappa^2|=\varepsilon} \left[\frac{(cf, f')}{(s+\kappa^2)(s-z)} + \frac{(\mathbf{t}(s)f, f')}{s-z} \right] ds \right\} = \\ &= 2\pi i \frac{(cf, f')}{z + \kappa^2} = 2\pi i \frac{1}{z + \kappa^2} \int f(k) \overline{\varphi(k)} dk \int \overline{f'(k)} \varphi(k) dk, \end{aligned}$$

и (4.46) следует отсюда в силу произвольности функций $f(k)$ и $f'(k)$. Рассмотрим теперь вклад от второго контура. Интеграл по большому кругу даст в пределе при $R \rightarrow \infty$ $\varphi(k - k')$ в силу асимптотики (4.35). В интеграле по контуру, охватывающему разрез, можно выйти на разрез. Возникающее при этом выражение $t(k, k', s+i0) - t(k, k', s-i0)$ можно выразить при помощи соотношения (2.17), положив $z_1 = s + i\varepsilon$ и $z_2 = s - i\varepsilon$ и перейдя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} t(k, k', s+i0) - t(k, k', s-i0) &= \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int t(k, q, s+i\varepsilon) \frac{2i|\varepsilon|}{\left(\frac{q^2}{2m} - s\right)^2 + \varepsilon^2} t(q, k', s-i\varepsilon) dq = \\ &= 2\pi i \int t\left(k, q, \frac{q^2}{2m} \pm i0\right) \delta\left(\frac{q^2}{2m} - s\right) t\left(q, k', \frac{q^2}{2m} \mp i0\right) dq. \end{aligned}$$

Собирая перечисленные вклады, мы приходим к (4.44).

Лемма доказана.

Лемма 4.14. *Функции*

$$t^{(\pm)}(k, k') = t\left(k, k', \frac{k'^2}{2m} \pm i0\right) \quad (4.47)$$

удовлетворяют оценкам

$$\begin{aligned} |t^{(\pm)}(k, k')| &\leq C(1 + |k - k'|)^{-1-\theta}; \\ |t^{(\pm)}(k+h, k'+h') - t^{(\pm)}(k, k')| &\leq \\ &\leq C(1 + |k - k'|)^{-1-\theta} [|h|^\nu + |h'|^\nu], \end{aligned} \quad (4.48)$$

где ν сколь угодно близко к $\frac{1}{2}$.

В обосновании нуждается только оценка гельдеровости по k' . Мы имеем, например,

$$\begin{aligned} \left| t\left(k, k', \frac{(q+h)^2}{2m} + i0\right) - t\left(k, k', \frac{q^2}{2m} + i0\right) \right| &\leq \\ &\leq C(1 + |k - k'|)^{-1-\theta} (1 + q^2)^{-\theta/2} (1 + |q|)^{1/2} |h|^\nu. \end{aligned} \quad (4.49)$$

В оценке (4.49) мы можем взять $\theta > \frac{1}{2}$, и растущий множитель $(1+|q|)^{1/2}$ компенсируется знаменателем. Положив в (4.49) $k'=q$, мы получаем нужную оценку.

Лемма доказана.

Мы имеем теперь все средства для доказательства следующего утверждения:

Теорема 4.2. Пусть выполняются условия A_{θ_0} , B_{μ_0} , R и C , причем $\theta_0 > \frac{1}{2}$ и $\mu_0 > \frac{1}{2}$. Ядро $t(k, k', z)$ представляется в виде

$$t(k, k', z) = \frac{\varphi(k)\varphi(k')}{z + \kappa^2} + \hat{t}(k, k', z), \quad (4.50)$$

где $\varphi(k) \in m(1+\theta_0, \mu_0)$, а для $\hat{t}(k, k', z)$ равномерно по z из Π_0 выполняются оценки

$$|\hat{t}(k, k', z)| \leq C(1+|k-k'|)^{-1-\theta}; \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} & |\hat{t}(k+h, k'+h', z+\Delta) - \hat{t}(k, k', z)| \leq \\ & \leq C(1+|k-k'|)^{-1-\theta} [|h|^\mu + |h'|^\mu + |\Delta|^\nu], \end{aligned} \quad (4.52)$$

где θ, μ, ν сколь угодно близки к $\theta_0, \mu_0, \frac{1}{2}$ соответственно. Кроме того,

$$\left| \frac{\partial}{\partial z} \hat{t}(k, k', z) \right| \leq C(1+|k-k'|)^{-1-\theta} (1+|z|)^{-1} \quad (4.53)$$

при $\operatorname{Re} z < -1$.

Доказательство. Используем доказанное в лемме 4.13 представление (4.44) для ядра $t(k, k', z)$ и обозначим через $\hat{t}(k, k', z)$ два последних слагаемых в (4.44). Нам следует только сказать несколько слов по поводу оценки интеграла в (4.44). Функцию в числителе этого интеграла перепишем в виде

$$t\left(k, q, \frac{q^2}{2m} + i0\right) \overline{t\left(k', q, \frac{q^2}{2m} + i0\right)},$$

используя условие симметрии (2.15) ядра $t(k, k', z)$. Оценка для интеграла получается теперь на основании леммы о сингулярных интегралах с применением оценок леммы (4.14) совершенно так же, как мы оценивали итерации для уравнения (4.1).

§ 5. ОБЩАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ЯДЕР $\mathcal{W}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z)$

В этом и двух следующих параграфах мы исследуем поведение ядер $\mathcal{W}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z)$ операторов $\mathbf{W}_{\alpha\beta}(z)$, введенных в § 3. Основным средством явится полученная в § 3 система уравнений (3.15) для этих операторов.

Исследование будет проводиться при помощи тех же приемов, которые применялись при изучении уравнения (4.1) в § 4. Именно, мы должны:

1. Получить подходящие оценки для итераций системы уравнений (3.20).

2. Подобрать функциональное пространство, в которое попадают эти итерации, хотя бы начиная с некоторого номера, и такое что в терминах его элементов и операторов можно записать систему уравнений (3.20) в виде уравнения второго рода.

3. Исследовать соответствующее однородное уравнение.

В настоящем параграфе мы будем, в основном, только формулировать результаты, полный вывод которых будет приведен в следующих двух параграфах.

Везде будет предполагаться, что выполнены условия A_0 , B_{μ_0} , R и C для всех трех потенциалов $v_\alpha(k)$, $\alpha = 23, 31, 12$. Через $-\kappa_\alpha^2$ и $\phi_\alpha(k)$ обозначим дискретное собственное значение и нормированную собственную функцию оператора типа h , когда в качестве массы m и потенциала $v(k)$ мы берем m_α и $v_\alpha(k)$ соответственно, через $t_\alpha(k, k', z)$ обозначим ядро соответствующего оператора $t_\alpha(z)$, и пусть $\varphi_\alpha(k) = \left(\frac{k^2}{2m_\alpha} + \kappa_\alpha^2\right) \phi_\alpha(k)$.

Начнем с описания итераций уравнения (3.15). Как уже отмечалось в § 3, все они выражаются через введенные в этом параграфе операторы $Q_{1, \dots, n+1}^{(n)}(z)$. Там же приведено выражение для ядра оператора $Q_{23, 31}^{(1)}(z)$, встречающегося при первой итерации [см. (3.19)]. Приведем здесь это выражение еще раз

$$Q_{23, 31}^{(1)}(k, p; k', p'; z) = t_{23}\left(k_{23}, -p'_2 - \frac{m_2}{m_2 + m_3} p_1, z - \frac{p_1^2}{2n_1}\right) \times \\ \times \left(\frac{p_1^2}{2m_{31}} + \frac{(p_1, p'_2)}{m_3} + \frac{p_2^2}{2m_{23}} - z\right)^{-1} t_{31}\left(p_1 + \frac{m_1}{m_1 + m_3} p'_2, k'_{31}, z - \frac{p_2^2}{2n_2}\right). \quad (5.1)$$

Мы видим, что это ядро хорошо ведет себя при комплексных z с $\text{Im } z \neq 0$ и приобретает ряд сингулярностей, когда $\text{Im } z \rightarrow 0$. Некоторые из них получаются из-за особенностей ядер $t_{23}(k, k', z)$ и $t_{31}(k, k', z)$, входящих в это выражение; так, например, мы имеем в (5.1) слагаемое типа

$$\frac{\varphi_{23}(k_{23})}{z + \kappa_{23}^2 - \frac{p_1^2}{2n_1}} \mathcal{G}_{23, 31}^{(1)}(p_1; k', p'; z), \quad (5.2)$$

где $\mathcal{G}_{23, 31}^{(1)}(p_1; k', p'; z)$ непрерывна в окрестности особенности знаменателя в (5.2). Кроме этого слагаемого с особенностью вида $\left(z + \kappa_{23}^2 - \frac{p_1^2}{2n_1}\right)^{-1}$, имеется слагаемое с особенностью вида $\left(z + \kappa_{31}^2 - \frac{p_2^2}{2n_2}\right)^{-1}$ и слагаемое, где эти особенности перемножаются. Характерно, что зависимость от k_{23} в (5.2) осуществляется только через функцию $\varphi_{23}(k_{23})$. Аналогично член с особенностью вида $\left(z + \kappa_{31}^2 - \frac{p_2^2}{2n_2}\right)^{-1}$ зависит от k'_{31} только через $\overline{\varphi_{31}(k'_{31})}$, а член с особенностью $\left(z + \kappa_{23}^2 - \frac{p_1^2}{2n_1}\right)^{-1} \left(z + \kappa_{31}^2 - \frac{p_2^2}{2n_2}\right)^{-1}$ зависит от k_{23} и k'_{31} только посредством $\varphi_{23}(k_{23}) \overline{\varphi_{31}(k'_{31})}$. Назовем описанные особенности главными.

Кроме этих особенностей, мы имеем в (5.1) сингулярность, происходящую из-за обращения в нуль выражения $\frac{p_1^2}{2m_{31}} + \frac{(p_1, p'_2)}{m_3} + \frac{p_1^2}{2m_{23}} - z$. Характерно, что положение этой сингулярности зависит как от переменной p_1 , так и переменной p'_2 , и не только от величины этих переменных, но и их направления. Такого типа особенности назовем второстепенными. Оказывается, что второстепенные особенности ослабевают и вообще исчезают по мере повышения порядка итерации.

Для точной формулировки введем несколько определений. Будем говорить, что ядро $\mathcal{Q}(k, p; k', p'; z)$ является ядром типа $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}$, если оно представляется в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(k, p; k', p'; z) = & \mathcal{F}(k, p; k', p'; z) + \\ & + \mathcal{J}(k, p; p'_\beta; z) \frac{\varphi_\beta(k'_\beta)}{z + x_\beta^2 - \frac{p_\beta^2}{2n_\beta}} + \frac{\varphi_\alpha(k_\alpha)}{z + x_\alpha^2 - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha}} \mathcal{J}(p_\alpha; k', p'; z) + \\ & + \frac{\varphi_\alpha(k_\alpha)}{z + x_\alpha^2 - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha}} \mathcal{H}(p_\alpha; p'_\beta; z) \frac{\varphi_\beta(k'_\beta)}{z + x_\beta^2 - \frac{p_\beta^2}{2n_\beta}}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Ядра $\mathcal{F}(k, p; k', p'; z)$, $\mathcal{J}(k, p; p'_\beta; z)$, $\mathcal{J}(p_\alpha; k', p'; z)$ и $\mathcal{H}(p_\alpha; p'_\beta; z)$ будем называть компонентами ядра $\mathcal{Q}(k, p; k', p'; z)$. Будем говорить, что ядро $\mathcal{Q}(k, p; k', p'; z)$ типа $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}$ принадлежит классу $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}(\theta, \mu)$, если для ядра $\mathcal{F}(k, p; k', p'; z)$ выполняются оценки

$$|\mathcal{F}(k, p; k', p'; z)| \leq CN(k, p; \theta) (1 + p_\beta^2)^{-1}; \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} & |\mathcal{F}(k+h, p+l; k'+h', p'+l'; z+\Delta) - \mathcal{F}(k, p; k', p'; z)| \leq \\ & \leq CN(k, p; \theta) (1 + p_\beta^2)^{-1} [|h|^\mu + |l|^\mu + |h'|^\mu + |l'|^\mu + |\Delta|^\mu], \end{aligned} \quad (5.5)$$

а ядра $\mathcal{J}(k, p; p'_\beta; z)$, $\mathcal{J}(p_\alpha; k', p'; z)$ и $\mathcal{H}(p_\alpha; p'_\beta; z)$ удовлетворяют оценкам, которые получаются из (5.4) и (5.5), если положить $k'_\beta = 0$, $k_\alpha = 0$ или одновременно $k_\alpha = 0$ и $k'_\beta = 0$ соответственно. Оценочная функция $N(k, p; \theta)$ введена формулой (3.23) в § 3.

Ядра операторов $\mathbf{Q}_{\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}}^{(n)}(z)$ подробно исследуются в § 6. Там доказано следующее утверждение:

При $n \geq 4$ ядра $\mathcal{Q}_{\alpha, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}, \beta}^{(n)}(k, p; k', p'; z)$ операторов $\mathbf{Q}_{\alpha, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}, \beta}^{(n)}(z)$ принадлежат классам $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}(\bar{\theta}, \bar{\mu})$ с некоторыми показателями $\bar{\theta}$ и $\bar{\mu}$, причем $\bar{\theta} > \frac{1}{2}$, равномерно по z , меняющемуся в любой конечной области на комплексной плоскости Π_{-x^2} с разрезом по вещественной оси от точки $-x^2$, где $x^2 = \max(x_{23}^2, x_{31}^2, x_{12}^2)$, до ∞ . При $|z| \rightarrow \infty$ константы в оценках типа (5.4), (5.5) могут расти не быстрее некоторой конечной степени $|z|$.

Перейдем к описанию функционального пространства, в котором мы собираемся изучать систему уравнений (3.15). Введем в рассмотрение несколько классов функций. Будем говорить, что функция $\rho(k, p)$ принадлежит классу $\mathfrak{M}(\theta, \mu)$, если она удовлетворяет условиям

$$|\rho(k, p)| \leq CN(k, p; \theta); \quad (5.6)$$

$$|\rho(k+h, p+l) - \rho(k, p)| \leq CN(k, p; \theta) (|h|^\mu + |l|^\mu). \quad (5.7)$$

Будем говорить, что функция $\sigma(p)$ принадлежит классу $\mathfrak{N}(\theta, \mu)$, если она удовлетворяет условиям

$$|\sigma(p)| \leq C(1 + |p|)^{-2(1+\theta)}; \quad (5.8)$$

$$|\sigma(p+l) - \sigma(p)| \leq C(1 + |p|)^{-2(1+\theta)} |l|^\mu. \quad (5.9)$$

Функция $(1 + |p|)^{-2(1+\theta)}$ в (5.8) и (5.9) подобрана с таким расчетом, что $(1 + |p_\alpha|)^{2(1+\theta)} N(k, p; \theta)|_{k_\alpha=0}$ не обращается в 0 и равномерно ограничено; когда p_α произвольно меняется, так что оценочные функции $(1 + |p_\alpha|)^{-2(1+\theta)}$ и $N(k, p; \theta)|_{k_\alpha=0}$ эквивалентны.

Рассмотрим множество элементов ω , представляющих собой совокупность шести функций

$$\omega = (\rho_{23}(k, p), \rho_{31}(k, p), \rho_{12}(k, p), \sigma_1(p_1), \sigma_2(p_2), \sigma_3(p_3)),$$

где $\rho_\alpha(k, p) \in \mathfrak{M}(\theta, \mu)$ и $\sigma_\alpha(p) \in \mathfrak{N}(\theta, \mu)$, $\alpha = 23, 31, 12$. Это множество является полным банаховым пространством, которое мы обозначим через $\mathfrak{B}(\theta, \mu)$, если в качестве нормы элемента ω мы возьмем

$$\|\omega\|_{\theta, \mu} = \sum_{\alpha} \sup \left\{ (1 + |p_{\alpha}|)^{2(1+\theta)} \left[|\sigma_{\alpha}(p_{\alpha})| + \frac{|\sigma_{\alpha}(p_{\alpha} + l) - \sigma_{\alpha}(p_{\alpha})|}{|l|^{\mu}} \right] + \right. \\ \left. + (N(k, p; \theta))^{-1} \left[|\rho_{\alpha}(k, p)| + \frac{|\rho_{\alpha}(k + h, p) - \rho_{\alpha}(k, p)|}{|h|^{\mu}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{|\rho_{\alpha}(k, p + l) - \rho_{\alpha}(k, p)|}{|l|^{\mu}} \right] \right\}.$$

Функции $\rho_{\alpha}(k, p)$ и $\sigma_{\alpha}(p_{\alpha})$ будем называть компонентами элемента ω . В дальнейшем нам часто придется по функциям $\rho_{\alpha}(k, p)$ и $\sigma_{\alpha}(p_{\alpha})$ строить функцию

$$\chi_{\alpha}(k, p; z) = \rho_{\alpha}(k, p) + \frac{\varphi_{\alpha}(k_{\alpha}) \sigma_{\alpha}(p_{\alpha})}{z + \kappa_{\alpha}^2 - \frac{p_{\alpha}^2}{2n_{\alpha}}}. \quad (5.10)$$

На элементах ω из $\mathfrak{B}(\theta, \mu)$ рассмотрим оператор $\mathbf{A}(z)$, определяющийся следующим образом:

$$\omega' = \mathbf{A}(z)\omega \quad (5.11)$$

означает, что

$$\rho'_{\alpha}(k, p) = - \int \hat{t}_{\alpha} \left(k_{\alpha}, k'_{\alpha}, z - \frac{p_{\alpha}^2}{2n_{\alpha}} \right) \frac{\delta(p_{\alpha} - p'_{\alpha})}{\frac{k'^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} - z} \times \\ \times \sum_{\beta \neq \alpha} \chi_{\beta}(k', p'; z) dk' dp'; \quad (5.12)$$

$$\sigma'_{\alpha}(p_{\alpha}) = - \int \frac{\varphi_{\alpha}(k'_{\alpha})}{\varphi_{\alpha}(k_{\alpha})} \frac{\delta(p_{\alpha} - p'_{\alpha})}{\frac{k'^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} - z} \sum_{\beta \neq \alpha} \chi_{\beta}(k', p'; z) dk' dp'. \quad (5.13)$$

Через $\rho'_{\alpha}(k, p)$ и $\sigma'_{\alpha}(p_{\alpha})$ мы обозначили компоненты элемента ω' .

Заметим, что если сложить уравнение (5.12) с уравнением (5.13), умноженным на $\varphi_{\alpha}(k_{\alpha}) \left(z + \kappa_{\alpha}^2 - \frac{p_{\alpha}^2}{2n_{\alpha}} \right)$, и обозначить через $\chi'_{\alpha}(k, p; z)$ функцию, построенную по формуле (5.10) по функциям $\rho'_{\alpha}(k, p)$ и $\sigma'_{\alpha}(p_{\alpha})$, то мы получим

$$\chi'_{\alpha}(k, p; z) = - \int t_{\alpha} \left(k_{\alpha}, k'_{\alpha}, z - \frac{p_{\alpha}^2}{2n_{\alpha}} \right) \frac{\delta(p_{\alpha} - p'_{\alpha})}{\frac{k'^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} - z} \times \\ \times \sum_{\beta \neq \alpha} \chi_{\beta}(k', p'; z) dk' dp'. \quad (5.14)$$

Если $\text{Im } z \neq 0$ и $\theta > \frac{1}{2}$, то $\chi_{\alpha}(k, p; z) \in \mathfrak{S}$ и соотношение (5.14) мы можем переписать в виде

$$\chi_{\alpha}(z) = -\mathbf{T}_{\alpha}(z) \mathbf{R}_0(z) \sum_{\beta \neq \alpha} \chi_{\beta}(z). \quad (5.15)$$

Мы видим, что оператор $\mathbf{A}(z)$ имеет тесную связь с системой уравнений (3.15), которую нам надо исследовать. Приведенная довольно громоздкая конструкция потребовалась нам для последовательного учета главных особенностей ядер $\mathcal{W}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z)$.

Сведем исследование системы (3.15) к изучению уравнения второго рода в пространстве $\mathfrak{B}(\theta, \mu)$ с оператором $\mathbf{A}(z)$. Вместо операторов $\mathbf{W}_{\alpha\beta}(z)$ будем рассматривать операторы $\tilde{\mathbf{W}}_{\alpha\beta}(z)$, полученные из $\mathbf{W}_{\alpha\beta}(z)$ после вычитания первых трех итераций системы (3.15) [см. (3.21)].

Система уравнений для операторов $\tilde{\mathbf{W}}_{\alpha\beta}(z)$ имеет вид

$$\tilde{\mathbf{W}}_{\alpha\beta}(z) = \tilde{\mathbf{W}}_{\alpha\beta}^{(0)}(z) - \mathbf{T}_\alpha(z) \mathbf{R}_0(z) \sum_{\gamma \neq \alpha} \tilde{\mathbf{W}}_{\gamma\beta}(z), \quad (5.16)$$

где

$$\tilde{\mathbf{W}}_{\alpha\beta}^{(0)}(z) = \mathbf{Q}_{\alpha\beta}^{(4)}(z) = \sum_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3} \mathbf{Q}_{\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \beta}^{(4)}(z). \quad (5.17)$$

На основании сформулированного выше утверждения, ядра $\tilde{\mathcal{W}}_{\alpha\beta}^{(0)}(k, p; k', p'; z)$ принадлежат классам $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}(\bar{\theta}, \bar{\mu})$. Обозначим через $\mathcal{F}_{\alpha\beta}^{(0)}(k, p; k', p'; z)$, $\mathcal{G}_{\alpha\beta}^{(0)}(k, p; p'_\beta; z)$, $\mathcal{G}_{\alpha\beta}^{(0)}(p_\alpha; k'; p', z)$, $\mathcal{H}_{\alpha\beta}^{(0)}(p_\alpha; p'_\beta; z)$ их компоненты. Совокупность ядер $\mathcal{F}_{\alpha\beta}^{(0)}(k, p; k', p'; z)$ и $\mathcal{G}_{\alpha\beta}^{(0)}(p_\alpha; k'; p', z)$ при фиксированных β, k', p' и z можно рассматривать как элемент $\mathfrak{B}(\bar{\theta}, \bar{\mu})$, $\bar{\theta} \leq \bar{\theta}$, $\bar{\mu} \leq \bar{\mu}$. Обозначим этот элемент через $\omega_\beta^{(0)}(k', p'; z)$. Аналогично совокупности ядер $\mathcal{G}_{\alpha\beta}^{(0)}(k, p; p'_\beta; z)$ и $\mathcal{H}_{\alpha\beta}^{(0)}(p_\alpha; p'_\beta; z)$ при фиксированных β, p'_β и z сопоставим элемент $\omega_\beta^{(0)}(p'_\beta; z)$. Оценки типа (5.4) и (5.5) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \|\omega_\beta^{(0)}(k', p'; z)\|_{\bar{\theta}_1, \mu_1} &\leq C(|z|)(1+p_\beta'^2)^{-1}; \\ \|\omega_\beta^{(0)}(k' + h', p' + l'; z + \Delta) - \omega_\beta^{(0)}(k', p'; z)\|_{\bar{\theta}_1, \mu_1} &\leq \\ &\leq C(|z|)(1+p_\beta'^2)^{-1} [|h'|^{\mu_2} + |l'|^{\mu_2} + |\Delta|^{\mu_2}]; \\ \|\omega_\beta^{(0)}(p'_\beta, z)\|_{\bar{\theta}_1, \mu_1} &\leq C(|z|)(1+p_\beta'^2)^{-1}; \\ \|\omega_\beta^{(0)}(p'_\beta + l'; z + \Delta) - \omega_\beta^{(0)}(p'_\beta; z)\|_{\bar{\theta}_1, \mu_1} &\leq \\ &\leq C(|z|)(1+p_\beta'^2)^{-1} [|l'|^{\mu_2} + |\Delta|^{\mu_2}]. \end{aligned}$$

Здесь $\bar{\theta}_1 \leq \bar{\theta}$, $\mu_1 + \mu_2 = \bar{\mu}$.

Рассмотрим в $\mathfrak{B}(\bar{\theta}, \bar{\mu})$ при $\bar{\theta} < \bar{\theta}$, $\bar{\mu} < \bar{\mu}$ уравнения

$$\omega_\beta(k', p'; z) = \omega_\beta^{(0)}(k', p'; z) + \mathbf{A}(z) \omega_\beta(k', p'; z), \quad (5.18)$$

$$\omega_\beta(p'_\beta; z) = \omega_\beta^{(0)}(p'_\beta; z) + \mathbf{A}(z) \omega_\beta(p'_\beta; z). \quad (5.19)$$

Пусть при некотором z эти уравнения имеют решения $\omega_\beta(k', p'; z)$ и $\omega_\beta(p'_\beta; z)$ из $\mathfrak{B}(\bar{\theta}, \bar{\mu})$. Обозначим через $\mathcal{F}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z)$, $\mathcal{G}_{\alpha\beta}(p_\alpha; k'; p', z)$ и $\mathcal{G}_{\alpha\beta}(k, p; p'_\beta; z)$, $\mathcal{H}_{\alpha\beta}(p_\alpha; p'_\beta; z)$ компоненты этих элементов и рассмотрим эти ядра как компоненты ядер $\mathcal{W}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z)$ типа $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}$. Нетрудно проверить, что эти ядра удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{W}}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z) &= \tilde{\mathcal{W}}_{\alpha\beta}^{(0)}(k, p; k', p'; z) - \\ &- \int t_\alpha \left(k_\alpha, k''_\alpha, z - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} \right) \frac{\delta(p_\alpha - p''_\alpha)}{k''^2 \frac{p''^2}{2m} - z} \sum_{\gamma \neq \alpha} \tilde{\mathcal{W}}_{\gamma\beta}(k'', p''; k', p'; z) dk'' dp''. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Если $\text{Im } z \neq 0$ и $\theta > \frac{1}{2}$, то, как это уже было проверено в § 3, интегральные операторы $\tilde{W}_{\alpha\beta}(z)$ с этими ядрами определены на $\mathfrak{D}$, и систему (5.20) можно переписать в виде (5.16). Таким образом, мы свели вопрос об исследовании ядер $\mathcal{W}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z)$ к вопросу о разрешимости уравнения

$$\omega = \omega^{(0)} - \mathbf{A}(z)\omega \quad (5.21)$$

в пространстве $\mathfrak{B}(\theta, \mu)$.

Этот последний вопрос будет подробно рассмотрен в § 7. Основным результатом можно сформулировать следующим образом:

Пусть $\omega^{(0)} \in \mathfrak{B}(\theta', \mu')$, $\mu' < \tilde{\mu}$, $\theta' < \tilde{\theta}$. Уравнение (5.21) имеет единственное решение из $\mathfrak{B}(\theta, \mu)$ при всех z на плоскости Π_{-x^2} , за исключением счетного числа точек $z = \lambda_n$ на вещественной оси, которые являются точками дискретного спектра оператора $\mathbf{H}$. Здесь θ и μ можно брать меньшими и сколь угодно близкими к θ' и μ' . Для решения справедливы оценки

$$\|\omega\|_{\theta, \mu} \leq C(|z|) \|\omega^{(0)}\|_{\theta', \mu'}, \quad (5.22)$$

равномерные по z из любой конечной области, не содержащей особых точек λ_n . Множество особых точек $\{\lambda_n\}$ счетно, замкнуто, сосредоточено на конечном интервале и может иметь точками накопления только точки $-x_\alpha^2$, $\alpha = 23, 31, 12$.

Из приведенных в этом параграфе рассуждений и сформулированных утверждений, доказательство которых перенесено в §§ 6 и 7, вытекает следующая теорема:

Теорема 5.1. Пусть условия A_{θ_0} , B_{μ_0} , R и C выполнены для всех трех потенциалов $v_\alpha(k)$, $\alpha = 23, 31, 12$, причем $\theta_0 > \frac{1}{2}$ и $\mu_0 > \frac{1}{2}$. Тогда операторы $\tilde{W}_{\alpha\beta}(z)$, введенные формулами (3.21), (3.22) и (3.17), являются интегральными операторами. Ядра $\mathcal{W}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z)$ этих операторов принадлежат классам $\mathfrak{D}_{\alpha\beta}(\theta, \mu)$ с некоторыми показателями θ и μ , причем θ можно взять таким, что $\theta > \frac{1}{2}$. Оценки типа (5.4) и (5.5) для этих ядер равномерны по z из любой конечной области на комплексной плоскости Π_{-x^2} с разрезом по положительной части вещественной оси от точки $-x^2$ до ∞ , не содержащей особых точек λ_n , являющихся точками дискретного спектра оператора $\mathbf{H}$ вместе с некоторой их окрестностью. Множество особых точек λ_n сосредоточено на конечном интервале, счетно, замкнуто и может иметь точками накопления только точки $-x_\alpha^2$, $\alpha = 23, 31, 12$.

В дальнейшем, наряду с ядрами $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$, $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$, $\mathcal{I}_{\alpha\beta}$ и $\mathcal{H}_{\alpha\beta}$ (здесь и часто ниже мы для краткости не пишем аргументов, от которых эти ядра зависят), с помощью которых ядра $\mathcal{W}_{\alpha\beta}$ строятся по формуле типа (5.3), нам придется рассматривать ядра

$$\mathcal{K}_{\alpha\beta}(k, p; p'_\beta; z) = \mathcal{I}_{\alpha\beta}(k, p; p'_\beta; z) + \frac{\varphi_\alpha(k_\alpha)}{z + x_\alpha^2 - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha}} \mathcal{H}_{\alpha\beta}(p_\alpha; p'_\beta; z); \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\alpha\beta}(p_\alpha; k', p'; z) = & \mathcal{I}_{\alpha\beta}(p_\alpha; k', p'; z) + \\ & + \mathcal{H}_{\alpha\beta}(p_\alpha; p'_\beta; z) \frac{\overline{\varphi_\beta(k'_\beta)}}{z + x_\beta^2 - \frac{p_\beta^2}{2n_\beta}}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Обозначим через $\mathcal{K}_{\alpha\beta}^{(0)}$ и $\tilde{\mathcal{K}}_{\alpha\beta}^{(0)}$ ядра, построенные аналогичным образом по ядрам $\mathcal{G}_{\alpha\beta}^{(0)}$, $\mathcal{H}_{\alpha\beta}^{(0)}$, $\mathcal{G}_{\alpha\beta}^{(0)}$ и $\mathcal{H}_{\alpha\beta}^{(0)}$, которые являются компонентами ядер $\tilde{\mathcal{W}}_{\alpha\beta}^{(0)}$. Из формулы типа (5.3) для ядра $\tilde{\mathcal{W}}_{\alpha\beta}$ ясно, что для определения ядер $\mathcal{K}_{\alpha\beta}$ или $\tilde{\mathcal{K}}_{\alpha\beta}$ нам надо выделить в ядрах $\tilde{\mathcal{W}}_{\alpha\beta}$ слагаемые, сингулярные при $z \rightarrow x_\beta^2 - \frac{p_\beta^2}{2n_\beta} \rightarrow 0$ или $z \rightarrow x_\alpha^2 - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} \rightarrow 0$ соответственно. Оказывается, что ядра $\mathcal{K}_{\alpha\beta}$ и $\tilde{\mathcal{K}}_{\alpha\beta}$ по ядру $\tilde{\mathcal{W}}_{\alpha\beta}$ можно построить и другим способом. Именно, справедливо утверждение

Лемма 5.1. При всех z с $\text{Im } z \neq 0$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \int \tilde{\mathcal{W}}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z) \frac{\psi_\beta(k'_\beta)}{\frac{k'^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} - z} dk'_\beta = \\ = \mathcal{K}_{\alpha\beta}(k, p; p'_\beta; z) \frac{1}{z + x_\beta^2 - \frac{p_\beta^2}{2n_\beta}}; \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\overline{\psi_\alpha(k_\alpha)}}{\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - z} \tilde{\mathcal{W}}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z) dk_\alpha = \\ = \frac{1}{z + x_\alpha^2 - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha}} \tilde{\mathcal{K}}_{\alpha\beta}(p_\alpha; k', p'; z). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Доказательство. Покажем сначала, что справедливо соотношение

$$\int t_\alpha(k, k', z) \left(\frac{k^2}{2m} - z \right)^{-1} \psi(k') dk' = \frac{\varphi_\alpha(k)}{z + x_\alpha^2}; \quad \alpha = 23, 31, 12. \quad (5.27)$$

При выводе будем опускать индекс α . Напомним, что функция $\psi(k)$ является собственной функцией оператора $\mathbf{h}$ с собственным значением $-x^2$, так что если $\mathbf{r}(z)$ — резольвента оператора $\mathbf{h}$, то

$$\mathbf{r}(z)\psi = \frac{1}{-x^2 - z} \psi.$$

Распишем это соотношение подробно, используя выражение (2.10) для резольвенты $\mathbf{r}(z)$ в терминах оператора $\mathbf{t}(z)$ с ядром $t(k, k', z)$. Мы получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{k^2}{2m} - z \right)^{-1} \psi(k) + \left(\frac{k^2}{2m} - z \right)^{-1} \int t(k, k', z) \left(\frac{k'^2}{2m} - z \right)^{-1} \psi(k') dk' = \\ = - \frac{\psi(k)}{z + x^2}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Умножая (5.28) на $\frac{k^2}{2m} - z$ и собирая подобные члены, мы получим

$$\int t(k, k', z) \left(\frac{k'^2}{2m} - z \right)^{-1} \psi(k') dk' = \left(\frac{k^2}{2m} + x^2 \right) \frac{\psi(k)}{z + x^2},$$

откуда следует (5.27), если вспомнить, что $\varphi(k) = \left(\frac{k^2}{2m} + x^2 \right) \psi(k)$.

Заменим в (5.27) z на $\bar{z}$ и возьмем комплексное сопряженное от обеих частей равенства. Тогда после простых переобозначений перемен-

ных мы получим, учитывая соотношение симметрии (2.15) для ядра $t(k, k', z)$, что

$$\int \overline{\psi_\alpha(k)} \left(\frac{k^2}{2m} - z \right)^{-1} t_\alpha(k, k', z) dk = \frac{\overline{\varphi_\alpha(k)}}{z + \kappa_\alpha^2}. \quad (5.29)$$

Покажем, что формулы типа (5.23) и (5.24) справедливы для ядер $\tilde{\mathcal{W}}_{\alpha\beta}^{(0)}$, $\mathcal{X}_{\alpha\beta}^{(0)}$ и $\tilde{\mathcal{X}}_{\alpha\beta}^{(0)}$. Заметим, что ядра $\tilde{\mathcal{W}}_{\alpha\beta}^{(0)}$ представляются в виде интеграла типа

$$\int t_\alpha \left(k_\alpha, k_\alpha^{(1)}, z - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} \right) \dots t_\beta \left(k_\beta^{(4)}, k'_\beta, z - \frac{p_\beta'^2}{2n_\beta} \right) dk^{(1)} dp^{(1)} \dots dk^{(4)} dp^{(4)}. \quad (5.30)$$

Мы выписали здесь в явном виде те множители подынтегральной функции, которые определяют ее зависимость от k_α и k'_β . Ядро $\mathcal{X}_{\alpha\beta}^{(0)}$ представляется аналогичным интегралом, в подынтегральной функции которого ядро $t_\beta \left(k_\beta^{(4)}, k'_\beta, z - \frac{p_\beta'^2}{2n_\beta} \right)$ заменено на функцию $\varphi_\beta(k_\beta^{(4)})$.

Умножим (5.30) на $\left(\frac{k'^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} - z \right)^{-1} \psi_\beta(k'_\beta)$ и проинтегрируем по k'_β . При $\text{Im } z \neq 0$ все интегралы сходятся абсолютно, и мы можем поменять порядок интегрирования и взять интеграл по k'_β до интегрирования по остальным переменным. При этом, на основании (5.27), ядро $t_\beta \left(k_\beta^{(4)}, k'_\beta, z - \frac{p_\beta'^2}{2n_\beta} \right)$ заменится на функцию $\varphi_\beta(k_\beta^{(4)}) \left(z + \kappa_\beta^2 - \frac{p_\beta'^2}{2n_\beta} \right)^{-1}$, и тем самым соотношение типа (5.25) для ядер $\tilde{\mathcal{W}}_{\alpha\beta}^{(0)}$ и $\mathcal{X}_{\alpha\beta}^{(0)}$ будет доказано. Аналогично выводится соотношение типа (5.26) для ядер $\tilde{\mathcal{W}}_{\alpha\beta}^{(0)}$ и $\tilde{\mathcal{X}}_{\alpha\beta}^{(0)}$. Надо умножить (5.30) на $\psi_\alpha(k_\alpha) \left(\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - z \right)^{-1}$, проинтегрировать по k_α и учесть (5.29).

Перейдем теперь к доказательству самих соотношений (5.25) и (5.26). Умножим соотношение (5.20) на $\left(\frac{k'^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} - z \right)^{-1} \psi_\beta(k'_\beta)$ и проинтегрируем по k'_β . Мы получим, что ядра

$$\mathcal{N}_{\alpha\beta}(k, p; p'_\beta; z) = \int \tilde{\mathcal{W}}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z) \left(\frac{k'^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} - z \right)^{-1} \psi_\beta(k'_\beta) dk'_\beta$$

удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\alpha\beta}(k, p; p'_\beta; z) &= \mathcal{X}_{\alpha\beta}^{(0)}(k, p; p'_\beta; z) \frac{1}{z + \kappa_\beta^2 - \frac{p_\beta'^2}{2n_\beta}} - \\ &- \int t_\alpha \left(k_\alpha, k''_\alpha, z - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} \right) \frac{\delta(p_\alpha - p''_\alpha)}{\frac{k''^2}{2m} + \frac{p''^2}{2n} - z} \sum_{\gamma \neq \alpha} \mathcal{N}_{\gamma\beta}(k'', p''; p'_\beta; z) dk'' dp''. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Из свойств ядер $\tilde{\mathcal{W}}_{\alpha\beta}$ следует, что ядра $\mathcal{N}_{\alpha\beta}$ представляются в виде

$$\mathcal{N}_{\alpha\beta}(k, p; p'_\beta; z) = \rho_{\alpha\beta}(k, p; p'_\beta; z) + \frac{\varphi_\alpha(k_\alpha) \sigma_{\alpha\beta}(p_\alpha; p'_\beta; z)}{z + \kappa_\alpha^2 - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha}},$$

где при фиксированных β , p'_β и z $\rho_{\alpha\beta} \in \mathfrak{M}(\theta, \mu)$ и $\sigma_{\alpha\beta} \in \mathfrak{N}(\theta, \mu)$. Из определения ядер $\mathcal{K}_{\alpha\beta}$ и уравнения (5.19) следует, что этой же системе уравнений (5.31) удовлетворяют ядра $\mathcal{K}_{\alpha\beta}(k, p; p'_\beta; z) \left(z + \kappa_\beta^2 - \frac{p_\beta^2}{2n_\beta} \right)^{-1}$. На основании единственности решения этой системы в рассматриваемом классе ядер мы получаем соотношение (5.25).

Для доказательства (5.26) заметим, что из определения ядер $\mathcal{H}_{\alpha\beta}$, $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$ и $\mathcal{K}_{\alpha\beta}$ следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\alpha\beta}(p_\alpha; k', p'; z) &= \mathcal{H}_{\alpha\beta}^{(0)}(p_\alpha; k', p'; z) - \\ &- \int \frac{\overline{\varphi_\alpha(k'')}}{\frac{k'^2}{2m} + \frac{p''^2}{2n} - z} \sum_{\gamma \neq \alpha} \mathcal{W}_{\gamma\beta}(k'', p''; k', p'; z) dk'' dp''. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Умножим (5.20) на $\psi_\alpha(k_\alpha) \left(\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - z \right)^{-1}$ и проинтегрируем по k_α . Мы получим на основании (5.29) и соотношения типа (5.26) для ядер $\mathcal{W}_{\alpha\beta}^{(0)}$ и $\mathcal{H}_{\alpha\beta}^{(0)}$, что для ядер

$$\mathcal{N}_{\alpha\beta}(p_\alpha; k', p'; z) = \int \frac{\overline{\psi_\alpha(k_\alpha)}}{\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - z} \mathcal{W}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z) dk_\alpha \quad (5.33)$$

выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\beta\beta}(p_\alpha; k', p'; z) &= \frac{1}{z + \kappa_\alpha^2 - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha}} \mathcal{H}_{\alpha\beta}^{(0)}(p_\alpha; k', p'; z) - \\ &- \int \frac{\overline{\varphi_\alpha(k'')}}{\frac{k'^2}{2m} + \frac{p''^2}{2n} - z} \sum_{\gamma \neq \alpha} \mathcal{W}_{\alpha\beta}(k'', p''; k', p'; z) dk'' dp''. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Сравнивая (5.32), (5.33) и (5.34), мы получаем (5.26).

Лемма доказана.

Лемма 5.2. *Справедливы соотношения*

$$\mathcal{K}_{\alpha\beta}(k, p; p'_\beta; z) = \mathcal{K}_{\beta\alpha}(p'_\beta; k, p; z). \quad (5.35)$$

Доказательство. Используем соотношения симметрии (3.32) для ядер $\mathcal{W}_{\alpha\beta}$. Нетрудно убедиться, что для ядер $\mathcal{W}_{\alpha\beta}$ справедливы аналогичные соотношения, т. е.

$$\mathcal{W}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z) = \overline{\mathcal{W}_{\beta\alpha}(k', p'; k, p; z)}. \quad (5.36)$$

Заменим в (5.26) z на $\bar{z}$, α на β , β на α и поменяем местами штрихованные и нештрихованные переменные. Возьмем комплексное сопряженное от полученного выражения и получим

$$\begin{aligned} &\int \frac{\overline{\mathcal{W}_{\beta\alpha}(k', p'; k, p; z)}}{\frac{k'^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} - \bar{z}} \frac{\psi_\beta(k'_\beta)}{k'^2 + \frac{p'^2}{2n} - \bar{z}} dk'_\beta = \\ &= \overline{\mathcal{K}_{\beta\alpha}(p'_\beta; k, p; z)} \frac{1}{z + \kappa_\beta^2 - \frac{p_\beta^2}{2n_\beta}}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Сравнивая (5.37) с (5.25) и учитывая (5.36), мы убеждаемся в справедливости (5.35).

Лемма доказана.

Соотношения (5.25), (5.26) и (5.35) будут использованы в § 9. В заключение этого параграфа покажем, как из теоремы 5.1 следует сформулированное в § 3 утверждение относительно поведения ядер $\tilde{\mathcal{W}}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z)$ при $\text{Im } z \neq 0$. Нам надо показать, что оценки (5.4) и (5.5) справедливы для всего ядра $\tilde{\mathcal{W}}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z)$, а не только для его компоненты $\mathcal{F}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z)$. Рассмотрим, например, ядро

$$\frac{\varphi_{23}(k_{23})}{z + \kappa_{23}^2 - \frac{p_1^2}{2n_1}} \mathcal{J}_{23, 31}(p_1; k', p'; z). \quad (5.38)$$

При $\text{Im } z \neq 0$

$$\left| \left(z + \kappa_{23}^2 - \frac{p_1^2}{2n_1} \right)^{-1} \right| \leq \frac{1}{|\text{Im } z|}$$

и

$$\begin{aligned} \varphi_{23}(k_{23}) \mathcal{J}_{23, 31}(p_1; k', p'; z) &\leq C(1 + |k_{23}|)^{-(1+\theta)} (1 + |p_1|)^{-2(1+\theta)} \times \\ &\times (1 + p_2'^2)^{-1} \leq C(1 + |p_1|)^{-(1+\theta)} (1 + |p_2|)^{-(1+\theta)} (1 + p_2'^2)^{-1} \leq \\ &\leq CN(k, p; \theta) (1 + p_2'^2)^{-1}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались оценкой

$$|\mathcal{J}_{23, 31}(p_1; k', p'; z)| \leq C(1 + |p_1|)^{-2(1+\theta)} (1 + p_2')^{-1},$$

которая справедлива для ядра $\mathcal{J}_{23, 31}$ при всех z с $\text{Im } z \neq 0$, так как особые точки сосредоточены на вещественной оси. Таким образом, для выражения (5.38) справедлива оценка типа (5.4). Остальные оценки получаются аналогично, так что сформулированное в § 3 утверждение можно считать доказанным.

§ 6. ОЦЕНКИ ДЛЯ ЯДЕР $\mathcal{Q}_{\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}}^{(n)}(k, p; k', p'; z)$

В настоящем параграфе мы подробно изучим поведение ядер $\mathcal{Q}_{\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}}^{(n)}(k, p; k', p'; z)$ операторов $\mathbf{Q}_{\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}}^{(n)}(z)$, введенных в § 3. Напомним определение этих операторов. Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}$ — последовательность $n+1$ индексов, каждый из которых пробегает значения 23, 31, 12, причем $\gamma_i \neq \gamma_{i+1}$, $i = 1, \dots, n$. Операторы $\mathbf{Q}_{\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}}^{(n)}(z)$ при $\text{Im } z \neq 0$ определяются следующим образом:

$$\mathbf{Q}_{\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}}^{(n)}(z) = (-1)^n \mathbf{T}_{\gamma_1}(z) \mathbf{R}_0(z) \mathbf{T}_{\gamma_2}(z) \dots \mathbf{T}_{\gamma_n}(z) \mathbf{R}_0(z) \mathbf{T}_{\gamma_{n+1}}(z). \quad (6.1)$$

Как уже отмечалось в § 5, эти операторы являются интегральными. Обозначим через $\mathcal{Q}_{\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}}^{(n)}(k, p; k', p'; z)$ соответствующие ядра. На основании определения (6.1) эти ядра представляются следующими интегралами:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}}^{(n)}(k, p; k', p'; z) &= (-1)^n \int t_{\gamma_1} \left(k_{\gamma_1}, k_{\gamma_1}^{(1)}, z - \frac{p_{\gamma_1}^2}{2n_{\gamma_1}} \right) \frac{\delta(p_{\gamma_1} - p_{\gamma_1}^{(1)})}{\frac{k^{(1)2}}{2m} + \frac{p^{(1)2}}{2n} - z} \dots \\ &\dots \frac{\delta(p_{\gamma_{n+1}} - p_{\gamma_{n+1}}')}{\frac{k^{(n)2}}{2m} + \frac{p^{(n)2}}{2n} - z} t_{\gamma_{n+1}} \left(k_{\gamma_{n+1}}^{(n)}, k_{\gamma_{n+1}}', z - \frac{p_{\gamma_{n+1}}'^2}{2n_{\gamma_{n+1}}} \right) dk^{(1)} dp^{(1)} \dots dk^{(n)} dp^{(n)}. \quad (6.2) \end{aligned}$$

Для последовательного изучения этих интегралов необходимо предварительно получить оценки для участвующих в них ядер $t_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha, z - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha})$.

Лемма 6.1. Ядра $t_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha, z - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha})$ представляются в виде

$$t_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha, z - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha}) = \frac{\varphi_\alpha(k_\alpha) \overline{\varphi_\alpha(k'_\alpha)}}{z + \frac{k_\alpha^2}{2n_\alpha} - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha}} + u_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha, p_\alpha; z), \quad (6.3)$$

где $\varphi_\alpha(k) \in m(\theta_0, \mu_0)$, а для $u_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha, p_\alpha; z)$ справедливы оценки

$$|u_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha, p_\alpha; z)| \leq C(1 + |k_\alpha - k'_\alpha|)^{-(1+\theta'_0)}; \quad (6.4)$$

$$|u_\alpha(k_\alpha + h, k'_\alpha + h', p_\alpha; z + \Delta) - u_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha, p_\alpha; z)| \leq C(1 + |k_\alpha - k'_\alpha|)^{-(1+\theta'_0)} [|h|^{\mu'_0} + |h'|^{\mu'_0} + |\Delta|^\nu]; \quad (6.5)$$

$$|u_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha, p_\alpha + l; z) - u_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha, p_\alpha; z)| \leq C(1 + |z|)^{\frac{\nu}{2}} (1 + |k_\alpha - k'_\alpha|)^{-(1+\theta'_0)} |l|^\nu, \quad (6.6)$$

где θ'_0 , μ'_0 и ν — показатели, меньшие и сколь угодно близкие к θ_0 , μ_0 и $\frac{1}{2}$ соответственно.

Доказательство. Используем представление (4.50) для ядра $t_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha, z)$ и обозначим

$$u_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha, p_\alpha; z) = \hat{t}_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha, z - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha}). \quad (6.7)$$

Все утверждения леммы, за исключением оценки (6.6), непосредственно следуют из теоремы 4.3. Для доказательства (6.6) рассмотрим два случая:

1. $p_\alpha^2 \leq 4M|z| + 1$, где $M = \max(m_1, m_2, m_3)$. В этом случае, используя (4.52), мы получим

$$\begin{aligned} & |u_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha, p_\alpha + l; z) - u_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha, p_\alpha; z)| \leq \\ & \leq C(1 + |k_\alpha - k'_\alpha|)^{-(1+\theta'_0)} |(p_\alpha + l)^2 - p_\alpha^2|^\nu \leq \\ & \leq C(1 + |k_\alpha - k'_\alpha|)^{-(1+\theta'_0)} |p_\alpha|^\nu |l|^\nu \leq \\ & \leq C(1 + |z|)^{\frac{\nu}{2}} (1 + |k_\alpha - k'_\alpha|)^{-(1+\theta'_0)} |l|^\nu. \end{aligned}$$

2. $p_\alpha^2 \geq 4M|z| + 1$. В этом случае

$$\left| z - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} \right| \geq \frac{1}{2M} p_\alpha^2 - |z| \geq \frac{1}{4M} (p_\alpha^2 + 1),$$

так что, используя (4.53), мы получим

$$\begin{aligned} & |u_a(k_a, k'_a, p_a + l; z) - u_a(k_a, k'_a, p_a; z)| \leq \\ & \leq C(1 + |k_a - k'_a|)^{-(1+\theta'_0)} |p_a| |l| \left(1 + \left|z - \frac{p_a^2}{2n_a}\right|\right)^{-1} \leq \\ & \leq C(1 + |k_a - k'_a|)^{-(1+\theta'_0)} |l|. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Во всех дальнейших оценках в этом и следующих параграфах мы будем использовать только те свойства ядер $t_a(k_a, k'_a, z - \frac{p_a^2}{2n_a})$, которые сформулированы в этой лемме. При этом мы будем опускать штрих у μ_0 и θ_0 .

Переходим к исследованию поведения ядер $\mathcal{Q}_{\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}}^{(n)}(k, p; k', p'; z)$. При $n=1$ δ -функции снимают в (6.2) все интегрирования, так что ядра $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{(1)}(k, p; k', p'; z)$ в явном виде выражаются через ядра $t_a(k_a, k'_a, z - \frac{p_a^2}{2n_a})$. Выше, в § 5, приведено такое выражение для ядра $\mathcal{Q}_{23, 31}^{(1)}$ [см. (5.1)]. В этом параграфе мы начнем с изучения ядер $\mathcal{Q}_{\alpha, \beta, \gamma}^{(2)}$.

Возьмем для примера $\alpha=23, \beta=31$ и $\gamma=12$ и, чтобы не перегружать формулы индексами, будем временно обозначать оператор $\mathbf{Q}_{23, 31, 12}^{(2)}(z)$ просто через $\mathcal{Q}(z)$ и его ядро через $\mathcal{Q}(k, p; k', p'; z)$. Выбирая в (6.2) при $n=2$ и $\gamma_1=23, \gamma_2=31, \gamma_3=12$ в качестве переменных интегрирования $p_1^{(1)}, p_2^{(1)}=q, p_3^{(2)}, p_3^{(2)}$, мы получим для ядра $\mathcal{Q}(k, p; k', p'; z)$ следующее выражение:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(k, p; k', p'; z) = & \int t_{23}\left(k_{23}, -q - \frac{m_2}{m_2 + m_3} p_1, z - \frac{p_1^2}{2n_1}\right) \times \\ & \times \left[\frac{1}{2m_{23}} \left(q + \frac{m_2}{m_2 + m_3} p_1\right)^2 + \frac{p_1^2}{2n_1} - z \right]^{-1} \times \\ & \times t_{31}\left(p_1 + \frac{m_1}{m_3 + m_1} q, -p'_3 - \frac{m_3}{m_3 + m_1} q, z - \frac{q^2}{2n_2}\right) \times \\ & \times \left[\frac{1}{2m_{12}} \left(q + \frac{m_2}{m_1 + m_2} p'_3\right)^2 + \frac{p_3^2}{2n_3} - z \right]^{-1} \times \\ & \times t_{12}\left(q + \frac{m_2}{m_1 + m_2} p'_3, k'_{12}, z - \frac{p_3^2}{2n_3}\right) dq. \end{aligned}$$

Если вместо ядер t_{23} и t_{12} подставить сюда их выражение (6.3), то мы получим, что ядро $\mathcal{Q}(k, p; k', p'; z)$ является ядром типа $\mathcal{Q}_{23, 12}$. Обозначим через $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{J}$ и $\mathcal{H}$ его компоненты. Для ядра $\mathcal{F}(k, p; k', p'; z)$ мы имеем следующее представление:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(k, p; k', p'; z) = & \int t_{23}\left(k_{23}, -q - \frac{m_2}{m_2 + m_3} p_1, z - \frac{p_1^2}{2n_1}\right) \times \\ & \times \left[\frac{1}{2m_{23}} \left(q + \frac{m_2}{m_2 + m_3} p_1\right)^2 + \frac{p_1^2}{2n_1} - z \right]^{-1} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\hat{t}_{31} \left(p_1 + \frac{m_1}{m_3 + m_1} q, -p'_3 - \frac{m_3}{m_3 + m_1} q, z - \frac{q^2}{2n_2} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\varphi_{31} \left(p_1 + \frac{m_1}{m_3 + m_1} q \right) \overline{\varphi_{31} \left(-p'_3 - \frac{m_3}{m_3 + m_1} q \right)}}{z + x_{31}^2 - \frac{q^2}{2n_2}} \right] \times \\
& \quad \times \left[\frac{1}{2m_{12}} \left(q + \frac{m_2}{m_1 + m_2} p'_3 \right)^2 + \frac{p_3^2}{2n_3} - z \right]^{-1} \times \\
& \quad \times \hat{t}_{12} \left[q + \frac{m_2}{m_1 + m_2} p'_3, k'_{12}, z - \frac{p_3^2}{2n_3} \right] dq. \tag{6.8}
\end{aligned}$$

Ядра $\mathcal{G}$, $\mathcal{I}$ и $\mathcal{H}$ можно получить, если заменить в этом выражении $\hat{t}_{12}$ на $\varphi_{12} \left(q + \frac{m_2}{m_1 + m_2} p'_3 \right)$ или $\hat{t}_{23}$ на $\varphi_{23} \left(-q - \frac{m_2}{m_2 + m_3} p_1 \right)$ или сделать это одновременно.

Интеграл (6.8) состоит из двух слагаемых, одно из которых содержит произведение двух, а второе — трех, вообще говоря, сингулярных знаменателей в подынтегральном выражении. Некоторые из этих знаменателей сингулярны в разных частях области интегрирования. Имеем, например,

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{2m_{23}} \left(q + \frac{m_2}{m_2 + m_3} p_1 \right)^2 + \frac{p_1^2}{2n_1} - z \right] + \left[z + x_{31}^2 - \frac{q^2}{2n_2} \right] = \\
& = \left[\frac{1}{2m_{31}} \left(p_1 + \frac{m_1}{m_3 + m_1} q \right)^2 + \frac{q^2}{2n_2} - z \right] + \left[z + x_{31}^2 - \frac{q^2}{2n_2} \right] = \\
& = \frac{1}{2m_{31}} \left(p_1 + \frac{m_1}{m_3 + m_1} q \right)^2 + x_{31}^2 \geq x_{31}^2. \tag{6.9}
\end{aligned}$$

При выводе мы использовали приведенные в § 1 формулы, выражающие переменные типа k через переменные типа p . Аналогично

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{2m_{12}} \left(q + \frac{m_2}{m_1 + m_2} p'_3 \right)^2 + \frac{p_3^2}{2n_3} - z \right] + \left[z + x_{31}^2 - \frac{q^2}{2n_2} \right] = \\
& = \frac{1}{2m_{31}} \left(p'_3 + \frac{m_3}{m_3 + m_1} q \right)^2 + x_{31}^2 \geq x_{31}^2. \tag{6.10}
\end{aligned}$$

Мы видим, что выражения в левых частях (6.9) и (6.10) не могут одновременно обратиться в нуль.

Если переменные p_1 , p'_3 или q достаточно велики, то знаменатели в (6.8) не сингулярны. Действительно, пусть, например, $q^2 \geq 4M|z| + 1$. Имеем

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{2m_{23}} \left(q + \frac{m_2}{m_2 + m_3} p_1 \right)^2 + \frac{p_1^2}{2n_1} - z \right| = \left| \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_1} \right) p_1^2 + \right. \\
& \quad \left. + \frac{(p_1, q)}{m_3} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} \right) q^2 - z \right| \geq \frac{p_1^2}{4m_1} + \frac{q^2}{4m_2} + \\
& \quad + \left(\frac{q^2}{4m_2} + \frac{p_1^2}{4m_1} - |z| \right) \geq \frac{1}{4M} (p_1^2 + q^2 + 1). \tag{6.11}
\end{aligned}$$

Из вывода этой оценки ясно, что она справедлива также, если $p_1^2 \geq 4M|z| + 1$. Аналогично можно получить, что если $q^2 \geq 4M|z| + 1$ или $p_3'^2 \geq 4M|z| + 1$, то

$$\left| \frac{1}{2m_{12}} \left(q + \frac{m_2}{m_1 + m_2} p_3' \right)^2 + \frac{p_3'^2}{2n_3} - z \right| \geq \frac{1}{4M} (q^2 + p_3'^2 + 1). \quad (6.12)$$

Наконец, если $q^2 \geq 4M(|z| + x^2) + 1$, где $x^2 = \max_a (x_a^2)$, то

$$\left| z + x_{31}^2 - \frac{q^2}{2n_2} \right| \geq \frac{1}{4M} (1 + q^2). \quad (6.13)$$

Рассмотрим теперь свойства числителя в подынтегральном выражении (6.8). Все функции, входящие сюда, являются гельдеровскими функциями с показателем, не меньшим чем показатель ν в лемме 6.1. В качестве оценочной функции для числителей обоих слагаемых мы можем взять функцию

$$(1 + |z|)^{\frac{3\nu}{2}} (1 + |p_1 - p_1'|)^{-(1+\theta_0)} (1 + |p_2 - q|)^{-(1+\theta_0)} \times \\ \times [(1 + |p_1 + q + p_3'|)^{-(1+\theta_0)} + (1 + |q - p_2'|)^{-(1+\theta_0)}]. \quad (6.14)$$

Для первого слагаемого это очевидно, так как произведение оценочных функций каждого множителя в числителе

$$\left[(1 + |z|)^{\frac{\nu}{2}} \right]^3 (1 + |p_2 - q|)^{-(1+\theta_0)} (1 + |p_1 + q + p_3'|)^{-(1+\theta_0)} (1 + |q - p_2'|)^{-(1+\theta_0)}$$

оценивается через (6.14). Для того чтобы убедиться, что (6.14) является оценочной функцией числителя второго слагаемого, достаточно использовать элементарное неравенство

$$(1 + |k|)^{-\theta} (1 + |k'|)^{-\theta} \leq C (1 + |k - k'|)^{-\theta}$$

для оценки произведения

$$\varphi_{31} \left(p_1 + \frac{m_1}{m_3 + m_1} q \right) \overline{\varphi_{31} \left(-p_3' - \frac{m_3}{m_3 + m_1} q \right)},$$

входящего в этот числитель.

Переходим к оценке интеграла (6.8). Пусть $\eta(q^2)$ — срезающая функция

$$\eta(q^2) = \begin{cases} 1 & q^2 \leq 4M|z| + 1 \\ 0 & q^2 \geq 4M|z| + 2; \end{cases} \\ 0 \leq \eta(q^2) \leq 1; \quad |\eta'(q^2)| \leq C.$$

Представим $\mathcal{F}$ в виде суммы

$$\mathcal{F} = \int \eta(q^2) \{ \dots \} dq + \int [1 - \eta(q^2)] \{ \dots \} dq = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2.$$

Мы не выписываем здесь никаких аргументов и точек в фигурных скобках обозначаем все подынтегральное выражение в (6.8).

Оценка ядра $\mathcal{F}_2$ не представляет труда. В силу (6.11)–(6.13) знаменатели в области интегрирования несингулярны, и мы имеем

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_2(k, p; k', p'; z)| &\leq C(1+|z|)^{\frac{3\nu}{2}}(1+|p_1-p'_1|)^{-(1+\theta_0)} \times \\ &\times \int (1+p_1^2+q^2)^{-1}(1+q^2+p_3'^2)^{-1}(1+|p_2-q|)^{-(1+\theta_0)} \times \\ &\times [(1+|p_1+q+p'_3|)^{-(1+\theta_0)} + (1+|q-p'_2|)^{-(1+\theta_0)}] dq \leq \\ &\leq C(1+|z|)^{\frac{3\nu}{2}}(1+|p_1-p'_1|)^{-(1+\theta_0)}(1+p_1^2+p_3'^2)^{-1} \times \\ &\times \int (1+q^2)^{-1}(1+|p_2-q|)^{-(1+\theta_0)} [(1+|p_1+q+p'_3|)^{-(1+\theta_0)} + \\ &+ (1+|q-p'_2|)^{-(1+\theta_0)}] dq. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали очевидное неравенство

$$(1+a^2+x^2)^{-1}(1+x^2+b^2)^{-1} \leq (1+a^2+b^2)^{-1}(1+x^2)^{-1}.$$

Интегралы в правой части полученной оценки имеют вид

$$I(a, b) = \int (1+q^2)^{-1}(1+|q-a|)^{-\theta}(1+|q-b|)^{-\theta} dq.$$

В приложении II будет доказана следующая оценка для $I(a, b)$:

$$|I(a, b)| \leq C(1+|a|)^{-\theta}, \quad \theta < 2. \quad (6.15)$$

Используя эту оценку, мы получаем окончательно для $\mathcal{F}_2$

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_2(k, p; k', p'; z)| &\leq \\ &\leq C(1+|z|)^A(1+|p_1-p'_1|)^{-(1+\theta_0)}(1+|p_2|)^{-(1+\theta_0)}(1+p_1^2+p_3'^2)^{-1}, \end{aligned} \quad (6.16)$$

где $A = \frac{3\nu}{2}$. В дальнейшем в этом параграфе мы постоянно будем иметь дело с оценочными функциями, которые растут степенным образом при $|z| \rightarrow \infty$. Во всех таких случаях мы будем в соответствующем выражении писать множитель $(1+|z|)^A$, не конкретизируя каждый раз значение показателя A .

Гельдеровские разности ядра $\mathcal{F}_2(k, p; k', p'; z)$ по всем аргументам с показателем ν также удовлетворяют оценке (6.16). Мы получаем окончательно, что ядро $\mathcal{F}_2(k, p; k', p'; z)$ является гильбертовой функцией своих переменных с показателем ν и оценочной функцией

$$(1+|z|)^A(1+|p_1-p'_1|)^{-(1+\theta_0)}(1+|p_2|)^{-(1+\theta_0)}(1+p_1^2+p_3'^2)^{-1}. \quad (6.17)$$

Рассмотрим теперь ядро $\mathcal{F}_1(k, p; k', p'; z)$. Оценки для этого ядра значительно упрощаются, если p_1 или p_3' достаточно велики. Пусть, например, $p_1^2 \geq 4M|z|+1$ и $p_3'^2 \leq 4M|z|+1$. Тогда первый знаменатель в (6.8) несингулярен. Произведение двух других знаменателей во втором слагаемом в (6.8) можно представить в виде

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\frac{1}{2m_{31}} \left(p_3'^2 + \frac{m_3}{m_3+m_1} q \right)^2 + \kappa_{31}^2} \times \\ &\times \left[\frac{1}{\frac{1}{2m_{12}} \left(q + \frac{m_2}{m_1+m_2} p_3' \right)^2 + \frac{p_3'^2}{2n_3} - z} + \frac{1}{z + \kappa_{31}^2 - \frac{q^2}{2n_2}} \right]. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Первый множитель здесь равномерно ограничен. Таким образом, мы в рассматриваемом случае свели интеграл (6.8) к сумме интегралов с одним сингулярным знаменателем, т. е. к обычным сингулярным интегралам.

В качестве оценочной функции для числителя мы можем взять

$$(1+|z|)^4 (1+|p_1-p'_1|)^{-(1+\theta_0)} (1+|p_2|)^{-(1+\theta_0)}.$$

Это выражение следует из (6.14), если учесть, что в области интегрирования $|q|$ ограничено величиной порядка $(1+|z|)^{1/2}$. В интегралах с знаменателем $\left[\frac{1}{2m_{12}} \left(q + \frac{m_2}{m_1+m_2} p'_3 \right)^2 + \frac{p_3^2}{2n^2} - z \right]^{-1}$ мы можем сделать замену переменной интегрирования

$$q' = q + \frac{m_2}{m_1+m_2} p'_3$$

причем по условию $|q'|$, так же как и $|q|$, ограничено величиной порядка $(1+|z|)^{1/2}$. На основании леммы о сингулярных интегралах мы получаем, что при рассматриваемых p_1 и p'_3 ядро $\mathcal{F}(k, p; k', p'; z)$ является геллеровской функцией своих переменных с показателем ν' , меньшим и сколь угодно близким к ν , и оценочной функцией

$$(1+|z|)^4 (1+|p_1-p'_1|)^{-(1+\theta_0)} (1+|p_2|)^{-(1+\theta_0)} (1+p_1^2)^{-1}. \quad (6.19)$$

Совершенно так же можно доказать аналогичное утверждение в случае $p_1^2 \leq 4M|z|+1$, $p_3'^2 \geq 4M|z|+1$, только в оценочной функции (6.19) множитель $(1+p_1^2)^{-1}$ следует заменить на $(1+p_3'^2)^{-1}$. Еще проще рассматривается случай, когда $p_1^2 \geq 4M|z|+1$ и $p_3'^2 \geq 4M|z|+1$. Оценочной функцией в этом случае является функция (6.17). Заметим, что если $p_3'^2 \leq 4M|z|+1$, то

$$(1+p_1^2)^{-1} \leq C(1+|z|) (1+p_1^2)^{-1} (1+p_3'^2)^{-1} \leq C(1+|z|) (1+p_1^2+p_3'^2)^{-1}$$

и аналогично при $p_1^2 \leq 4M|z|+1$

$$(1+p_3'^2)^{-1} \leq C(1+|z|) (1+p_1^2+p_3'^2)^{-1},$$

так что мы можем утверждать, что (6.17) является оценочной функцией для ядра $\mathcal{F}_1$ во всех трех рассмотренных случаях.

Наибольшую трудность для исследования представляет случай, когда обе переменные p_1 и p'_3 малы, а точнее меняются в областях $p_1^2 \leq 4M|z|+1$ и $p_3'^2 \leq 4M|z|+1$. В этом случае не удастся свести интеграл (6.8) к обычным сингулярным интегралам, и мы будем поступать следующим образом: преобразуем знаменатель во втором слагаемом в (6.8) при помощи элементарного тождества

$$\frac{1}{A} \frac{1}{a} \frac{1}{B} = \frac{1}{A+a} \frac{1}{A} \frac{1}{B} + \frac{1}{A+a} \frac{1}{B+b} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{B} \right), \quad (6.20)$$

используя в качестве A , a и B первый, второй и третий знаменатели. Второе слагаемое здесь представляет сумму членов с одним сингулярным знаменателем. В первом слагаемом мы имеем произведение двух сингулярных знаменателей, причем тех же, что и в первом слагаемом в (6.8).

В качестве оценочной функции для числителя мы можем взять

$$(1 + |z|)^4 (1 + |p_2 - p_2'|)^{-(1+\theta_0)}. \quad (6.21)$$

Интеграл от части второго слагаемого в (6.8), соответствующий второму слагаемому в (6.20), представляет собой сумму обычных сингулярных интегралов, и на основании леммы о сингулярных интегралах мы получаем, что вклад в $\mathcal{F}_1$ от этого члена является гельдеровской функцией с оценочной функцией (6.21).

Интеграл для остального вклада в $\mathcal{F}_1$ представляется в следующем виде:

$$\int \left[\frac{1}{2m_{23}} \left(q + \frac{m_2}{m_2 + m_3} p_1 \right)^2 + \frac{p_1^2}{2n_1} - z \right]^{-1} f(k, p; k', p'; q, z) \times \\ \times \left[\frac{1}{2m_{12}} \left(q + \frac{m_2}{m_1 + m_2} p_3' \right)^2 + \frac{p_3'^2}{2n_3} - z \right]^{-1} dq,$$

где в числителе стоит гельдеровская функция с показателем ν и оценочной функцией (6.21), гладко исчезающая вне сферы $q^2 = 4M|z| + 1$. Если обозначить

$$a = -\frac{m_2}{m_2 + m_3} p_1; \quad b = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} p_3'; \\ \xi = 2m_{23} \left(z - \frac{p_1^2}{2n_1} \right); \quad \eta = 2m_{12} \left(z - \frac{p_3'^2}{2n_3} \right),$$

то этот интеграл принимает вид

$$I(a, b, \xi, \eta) = \int \frac{f(q) dq}{[(q-a)^2 - \xi][(q-b)^2 - \eta]}. \quad (6.22)$$

Нетрудно убедиться, что при наших условиях все переменные a, b, ξ и η меняются в конечных областях трехмерного пространства и комплексной плоскости Π_0 , соответственно таких, что $a^2, b^2, |\xi|$ и $|\eta|$ оцениваются через $C(1 + |z|)$ с некоторой константой C .

Интегралы вида (6.22) изучаются подробно в приложении III, где доказано следующее утверждение:

Лемма 6.2. Пусть $f(q)$ — гельдеровская функция с показателем μ и

$$f(q) = 0, \quad q^2 \geq R > 1.$$

Тогда интеграл $I(a, b, \xi, \eta)$ представляется в виде

$$I(a, b, \xi, \eta) = \pi |a - b|^{-1} \left\{ \mathcal{F}(a, b, \xi, \eta) + \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r dr}{r^2 - \eta} f\left(r \frac{a - b}{|a - b|} + b\right) \ln[(r + |a - b|)^2 - \xi] \right\}, \quad (6.23)$$

где $\mathcal{F}(a, b, \xi, \eta)$ при $a^2 \leq CR, b^2 \leq CR, |\xi| \leq CR, |\eta| \leq CR$ является гельдеровской функцией всех своих переменных с показателем $\frac{\mu}{4}$ и оценочной функцией

$$R^\mu |a - b - \theta h|^{-\mu} \|f\|_\mu. \quad (6.24)$$

Здесь под $\ln(-z)$ мы понимаем ветвь логарифма, однозначную на плоскости Π_0 с разрезом по положительной части вещественной оси и выделяемому условием

$$\operatorname{Im} \ln(-\omega^2 + i0) = -\operatorname{Im} \ln(-\omega^2 - i0).$$

Через $a + \theta h$ обозначена точка с декартовыми координатами $a_1 + \theta_1 h_1$, $a_2 + \theta_2 h_2$ и $a_3 + \theta_3 h_3$, где $a_1, a_2, a_3, h_1, h_2, h_3$ — декартовы координаты точек a и h , а $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ — некоторые числа, такие что $0 \leq \theta_i \leq 1, i = 1, 2, 3$. Конечно, называть функцию $|a - b - \theta h|^{-\mu}$ оценочной можно только условно, так как она сингулярна и явно зависит от h . Для сокращения изложения будем в этом параграфе допускать такие функции в качестве оценочных. Это позволит нам при помощи одной фразы избежать выписывания нескольких оценок. С той же целью условимся писать просто $|a + \theta h|^{-\mu}$ и в том случае, когда оценочная функция содержит произведение ряда множителей,

$$|a + \theta_1 h|^{-\mu_1} |a + \theta_2 h|^{-\mu_2} \dots |a + \theta_n h|^{-\mu_n},$$

где сумма показателей $\mu_1, \dots, \mu_n$ не превосходит μ . Через $\|f\|_\mu$ в (6.24) обозначено

$$\|f\|_\mu = \sup_{k, h} \left\{ |f(k)| + \frac{|f(k+h) - f(k)|}{|h|^\mu} \right\}.$$

При помощи леммы 6.2 мы получаем, что вклад в ядро $\mathcal{F}_1(k, p; k', p'; z)$, имеющий второстепенные особенности, представляется в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'_1(k, p; k', p'; z) = & \left| \frac{m_2}{m_2 + m_3} p_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} p'_3 \right|^{-1} \left\{ \mathcal{T}_2(k, p; k', p', z) + \right. \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r dr}{\frac{r^2}{2m_{23}} + \frac{p_1^2}{2n_1} - z} \ln \left[\frac{1}{2m_{12}} \left(r + \left| \frac{m_2}{m_2 + m_3} p_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} p'_3 \right| \right)^2 + \frac{p_3'^2}{2n_3} - z \right] \times \\ & \times \mathcal{T}_1(k, p; k', p'; z, r), \end{aligned}$$

где $\mathcal{T}_1(k, p; k', p'; z, r)$ и $\mathcal{T}_2(k, p; k', p'; z)$ являются гильдеровскими функциями своих переменных с показателями ν и $\frac{\nu}{4}$ и оценочными функ-

циями $(1+z)^4$ и $(1+z)^4 \left| \frac{m_2}{m_2 + m_3} p_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} p'_3 + \theta h \right|^{-\mu}$ соответственно. При этом ядро $\mathcal{T}_1$ в явном виде выражается в виде произведения ядер $t_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha, z)$ и функций $\varphi_\alpha(k_\alpha)$ с экзотическими аргументами. Мы не будем приводить соответствующее выражение.

Закончим на этом исследование ядра $\mathcal{F}(k, p; k', p'; z)$. Оценки для ядер $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ можно получить из оценок для ядра $\mathcal{F}$, если в соответствующих оценочных функциях положить $k'_{12} = 0, k_{23} = 0$ или одновременно $k_{23} = 0, k'_{12} = 0$ соответственно. Любое ядро $\mathcal{Q}_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3}^{(2)}$ можно исследовать подобно тому, как мы это сделали для ядра $\mathcal{Q}_{23, 31, 12}^{(2)}$.

Обозначим через $\mathbf{Q}_{\alpha\beta}^{(n)}(z)$ сумму всех операторов $\mathbf{Q}_{\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}}^{(n)}(z)$ с фиксированными и первым и последним индексами $\gamma_1 = \alpha$ и $\gamma_{n+1} = \beta$

$$\mathbf{Q}_{\alpha\beta}^{(n)}(z) = \sum'_{\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}} \mathbf{Q}_{\alpha, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}, \beta}^{(n)}(z).$$

Сумма берется по всем допустимым значениям индексов $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$. В случае $n=2$ в эту сумму входит одно слагаемое, если $\alpha \neq \beta$, и два, если $\alpha = \beta$. На примере ядра $\mathcal{Q}_{23, 31, 12}^{(2)}$ мы убедились, что ядра $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{(2)}$ обладают свойствами, которые сформулированы в следующем утверждении:

Лемма 6.3. Ядра $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{(2)}(k, p; k', p'; z)$ являются ядрами типа $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}$. При этом, если $p_\alpha^2 \geq 4M|z| + 1$ или $p_\beta'^2 \geq 4M|z| + 1$, то компоненты $\mathcal{F}_{\alpha\beta}^{(2)}(k, p; k', p'; z)$ этих ядер являются гельдеровскими функциями своих переменных с показателем $\nu' < \nu$ и оценочными функциями

$$(1 + |z|)^4 (1 + |p_\alpha - p'_\alpha|)^{-(1+\theta_0)} \sum_{\gamma \neq \alpha} (1 + |p_\gamma|)^{-(1+\theta_0)} (1 + p_\alpha^2 + p_\beta'^2)^{-1}. \quad (6.25)$$

Компоненты $\mathcal{F}_{\alpha\beta}^{(2)}$, $\mathcal{G}_{\alpha\beta}^{(2)}$ и $\mathcal{H}_{\alpha\beta}^{(2)}$ обладают аналогичными свойствами, причем для получения оценочных функций для них надо положить в (6.25) $k'_\beta = 0$, $k_\alpha = 0$ или $k_\alpha = 0$, $k'_\beta = 0$ соответственно. Если $p'_\alpha \leq 4M|z| + 1$ и $p'_\beta \leq 4M|z| + 1$, то эти компоненты имеют второстепенные сингулярности.

Перейдем теперь к изучению ядер операторов $\mathbf{Q}_{\alpha\beta}^{(3)}(z)$. Для примера рассмотрим ядро оператора $\mathbf{Q}_{12, 23, 31, 12}^{(3)}(z)$. Обозначим это ядро через $\mathcal{Q}^{(3)}$, а рассмотренное выше ядро $\mathcal{Q}$ будем теперь обозначать через $\mathcal{Q}^{(2)}$. Соответствующие компоненты также будем снабжать индексами 2 и 3. Ядро $\mathcal{Q}^{(3)}$ является ядром типа $\mathcal{Q}_{12, 12}$. Для его компоненты $\mathcal{F}^{(3)}(k, p; k', p'; z)$ мы имеем представление

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(3)}(k, p; k', p'; z) = & \int \hat{i}_{12} \left(k_{12}, k'_{12}, z - \frac{p_3^2}{2n_3} \right) \frac{\delta(p_3 - p'_3)}{\frac{k'^2}{2n} + \frac{p'^2}{2n} - z} \times \\ & \times \left[\mathcal{F}^{(2)}(k'', p''; k', p'; z) + \frac{\varphi_{23}(k''_{23}) \mathcal{F}^{(2)}(p''_1; k', p'; z)}{z + \chi_{23}^2 \frac{p_1^2}{2n_1}} \right] dk'' dp''. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Возьмем в качестве переменных интегрирования $p''_1 = q$ и p''_3 ; интеграл по последней переменной снимается δ -функцией. Так же как и выше, используя срезающую функцию $\eta(q^2)$, представим $\mathcal{F}^{(3)}$ в виде суммы двух слагаемых

$$\mathcal{F}^{(3)} = \int \eta(q^2) \{ \dots \} dq + \int [1 - \eta(q^2)] \{ \dots \} dq = \mathcal{F}_1^{(3)} + \mathcal{F}_2^{(3)}.$$

В интеграле для ядра $\mathcal{F}_2^{(3)}$ знаменатели несингулярны, а числитель является гельдеровской функцией с показателем $\nu' < \nu$ и оценочной функцией

$$\begin{aligned} & (1 + |p_1 - q|)^{-(1+\theta_0)} (1 + |q - p'_1|)^{-(1+\theta_0)} (1 + |q + p'_3|)^{-(1+\theta_0)} \leq \\ & \leq (1 + |p_2|)^{-(1+\theta_0)} [(1 + |p_1 - q|)^{-(1+\theta_0)} + (1 + |q + p_3|)^{-(1+\theta_0)}] \times \\ & \times (1 + |q - p'_1|)^{-(1+\theta_0)}. \end{aligned}$$

Используя это утверждение, оценку (6.15) и определение оценочной функции $N(k, p; \theta)$, мы получаем, что ядро $\mathcal{F}_2^{(3)}$ является гельдеровской функцией своих переменных с показателем $\nu' < \nu$ и оценочной функцией

$$(1 + |z|)^4 N(k, p; \theta_0) (1 + p_3^2 + p_3'^2)^{-1}. \quad (6.27)$$

Рассмотрим теперь ядро $\mathcal{F}_1^{(3)}(k, p; k', p'; z)$. Если $p_3'^2 \geq 4M|z| + 1$, то ядра $\mathcal{F}^{(2)}$ и $\mathcal{G}^{(2)}$ в подынтегральном выражении (6.26) являются гельдеровскими функциями. Во втором слагаемом (6.26) мы можем пере-

строить сингулярные знаменатели так, как мы это сделали в (6.18). В качестве оценочной функции для числителя мы можем взять функцию

$$(1+|z|)^4 (1+|p_1|)^{-(1+\theta_0)} (1+|p_3|)^{-(1+\theta_0)} \leq (1+|z|)^4 N(k, p; \theta_0),$$

так как $|q|$ в области интегрирования имеет порядок $(1+|z|)^{1/4}$. На основании леммы о сингулярных интегралах мы получаем, что в рассматриваемом случае $\mathcal{F}_1^{(3)}$ является гельдеровской функцией с показателем $\nu' < \nu$ и оценочной функцией (6.27).

Для рассмотрения случая $p_3^2 \geq 4M|z|+1$ следует использовать другое представление для ядра $\mathcal{F}^{(3)}$, которое получается, если мы выражаем это ядро в терминах ядер $\mathcal{F}_{12, 23, 31}^{(2)}$, $\mathcal{F}_{12, 23, 31}^{(2)}$ и $\hat{f}_{12}$, а не ядер $\hat{f}_{12}$, $\mathcal{F}_{23, 31, 12}^{(2)}$ и $\mathcal{F}_{23, 31, 12}^{(2)}$, как это сделано в (6.26). Случай $p_3^2 \geq 4M|z|+1$ и $p_3'^2 \geq 4M|z|+1$ рассматривается еще проще. Мы получаем, что если $p_3^2 \geq 4M|z|+1$ или $p_3'^2 \geq 4M|z|+1$, то ядро $\mathcal{F}_1^{(3)}$ обладает теми же свойствами, что и ядро $\mathcal{F}_2^{(3)}$.

Если, наконец, $p_3^2 \leq 4M|z|+1$ и $p_3'^2 \leq 4M|z|+1$, то ядро $\mathcal{F}_1^{(3)}$ имеет второстепенные сингулярности. Мы не будем здесь описывать их детально.

Аналогично тому, как мы это сделали для ядра $\mathcal{F}^{(3)}(k, p; k', p'; z)$, мы можем изучить любую компоненту любого ядра $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{(3)}(k, p; k', p'; z)$. В результате мы приходим к следующему утверждению:

Лемма 6.4. *Ядра $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{(3)}(k, p; k', p'; z)$ обладают всеми свойствами, сформулированными в лемме 6.3 для ядер $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{(2)}(k, p; k', p'; z)$ с единственным исключением. Именно, в качестве оценочной функции мы можем брать не (6.25), а*

$$(1+|z|)^4 N(k, p; \theta_0) (1+p_\alpha^2+p_\beta'^2)^{-1}. \quad (6.28)$$

Повторяя выкладки, которые привели нас от леммы 6.3 к лемме 6.4, мы можем показать, что утверждение, аналогичное последней лемме, справедливо для ядер $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{(n)}$ с любым конечным номером n . Однако, начиная с $n=4$, мы можем доказать, что второстепенные особенности при малых p_α и p_β' не возникают.

Проведем доказательство на примере ядра $\mathcal{Q}_{\gamma_1, \dots, \gamma_5}^{(4)}$ при $\gamma_1=23$, $\gamma_2=31$, $\gamma_3=12$, $\gamma_4=31$, $\gamma_5=23$. Анализируя предыдущие выкладки, мы можем убедиться, что интеграл, который может внести второстепенные особенности в это ядро, имеет вид

$$\begin{aligned} & \int \left[\frac{1}{2m_{23}} \left(q_1 + \frac{m_2}{m_2+m_3} p_1 \right)^2 + \frac{p_1^2}{2n_1} - z \right]^{-1} \times \\ & \times \left[\frac{1}{2m_{12}} \left(q_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2} q_2 \right)^2 + \frac{q_2^2}{2n_3} - z \right]^{-1} \times \\ & \times \eta(q_1^2) \eta(q_2^2) \eta(q_3^2) f(k, p; k', p'; q_1, q_2, q_3; z) \times \\ & \times \left[\frac{1}{2m_{12}} \left(q_3 + \frac{m_2}{m_1+m_2} q_2 \right)^2 + \frac{q_2^2}{2n_3} - z \right]^{-1} \times \\ & \times \left[\frac{1}{2m_{23}} \left(q_3 + \frac{m_2}{m_2+m_3} p_1' \right)^2 + \frac{p_1'^2}{2n_1} - z \right]^{-1} dq_1 dq_2 dq_3. \quad (6.29) \end{aligned}$$

Здесь в числителе стоит гельдеровская функция всех переменных с показателем ν и оценочной функцией

$$\begin{aligned} (1+|z|)^4 (1+|p_2-q_1|)^{-(1+\theta_0)} (1+|q_1+p_1+q_2|)^{-(1+\theta_0)} &\leq \\ &\leq C(1+|z|)^4 (1+|p_1|)^{-(1+\theta_0)} (1+|p_2|)^{-(1+\theta_0)} \leq \\ &\leq C(1+|z|)^4 N(k, p; \theta_0) (1+p_1^2+p_2^2)^{-1}. \end{aligned}$$

Мы поставили множитель $(1+p_1^2+p_2^2)^{-1}$ в правую часть этой оценки, так как в рассматриваемом случае p_1^2 и p_2^2 имеют порядок $1+|z|$.

В выражении (6.29) мы можем проинтегрировать сначала по q_1 и q_3 . Возникающие при этом интегралы имеют вид (6.22). Используя дважды лемму 6.2 мы получим, что интеграл (6.29) принимает вид

$$\begin{aligned} &\int \eta(q^2) dq \left| \frac{m_2}{m_1+m_2} q - \frac{m_2}{m_2+m_3} p_1 \right|^{-1} \left| \frac{m_2}{m_1+m_2} q - \frac{m_2}{m_2+m_3} p_1' \right|^{-1} \times \\ &\quad \times \left\{ \mathcal{T}_{11}(k, p; k', p'; z, q) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s ds}{\frac{s^2}{2m_{23}} + \frac{p_1^2}{2n_1} - z} \times \right. \\ &\quad \times \ln \left[\frac{1}{2m_{12}} \left(s + \left| \frac{m_2}{m_1+m_2} q - \frac{m_2}{m_2+m_3} p_1 \right| \right)^2 + \frac{q^2}{2n_3} - z \right] \mathcal{T}_{01}(k, p; k', p'; q, z, s) + \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r dr}{\frac{r^2}{2m_{23}} + \frac{p_1'^2}{2n_1} - z} \ln \left[\frac{1}{2m_{12}} \left(r + \left| \frac{m_2}{m_1+m_2} q - \frac{m_2}{m_2+m_3} p_1' \right| \right)^2 + \frac{q^2}{2n_3} - z \right] \times \\ &\quad \times \mathcal{T}_{10}(k, p; k', p'; q, z, r) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s ds}{\frac{s^2}{2m_{23}} + \frac{p_1^2}{2n_1} - z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r dr}{\frac{r^2}{2m_{23}} + \frac{p_1'^2}{2n_1} - z} \times \\ &\quad \times \ln \left[\frac{1}{2m_{12}} \left(s + \left| \frac{m_2}{m_1+m_2} q - \frac{m_2}{m_2+m_3} p_1 \right| \right)^2 + \frac{q^2}{2n_3} - z \right] \times \\ &\quad \times \ln \left[\frac{1}{2m_{12}} \left(r + \left| \frac{m_2}{m_1+m_2} q - \frac{m_2}{m_2+m_3} p_1' \right| \right)^2 + \frac{q^2}{2n_3} - z \right] \times \\ &\quad \times \mathcal{T}_{00}(k, p; k', p'; z, q, s, r) \Big\}, \end{aligned}$$

где ядра $\mathcal{T}_{00}$, $\mathcal{T}_{10}$, $\mathcal{T}_{01}$ и $\mathcal{T}_{11}$ являются гельдеровскими функциями своих переменных, оценочными функциями для которых являются функции, содержащие, кроме общего множителя

$$(1+|z|)^4 N(k, p; \theta_0) (1+p_1^2+p_2^2)^{-1},$$

еще множители: 1,

$$\left| \frac{m_2}{m_1+m_2} q - \frac{m_2}{m_2+m_3} p_1' + \theta h \right|^{-\mu}, \quad \left| \frac{m_2}{m_1+m_2} q - \frac{m_2}{m_2+m_3} p_1 + \theta h \right|^{-\mu}$$

и

$$\left\{ \left| \frac{m_2}{m_1+m_2} q - \frac{m_2}{m_2+m_3} p_1' + \theta_1 h \right| \left| \frac{m_2}{m_1+m_2} q - \frac{m_2}{m_2+m_3} p_1 + \theta_2 h \right| \right\}^{-\mu},$$

соответственно. Мы видим, что подынтегральное выражение в последнем интеграле имеет слабые особенности, исчезающие при интегрирова-

нии по q , после чего остаются обычные сингулярные интегралы по s и r с гельдеровскими подынтегральными выражениями.

В результате мы получаем, что имеется некоторый показатель $\tilde{\mu} < \frac{\nu}{4}$, такой что интеграл (6.29) является гельдеровской функцией k, p, k', p', z с этим показателем и оценочной функцией (6.28). Аналогичный анализ можно было бы провести для любого ядра $\mathcal{Q}_{\gamma_1, \dots, \gamma_s}^{(4)}$.

Ядра $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{(n)}$ при $n > 4$ выражаются последовательно через обычные сингулярные интегралы, содержащие ядра $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{(4)}$ в подынтегральных выражениях. При оценках этих интегралов второстепенные особенности не возникают.

Сформулируем основной полученный результат.

Теорема 6.1. Пусть выполняются условия A_0, B_0, R и C для всех трех потенциалов $v_\alpha(k)$, $\alpha = 23, 31, 12$. Тогда ядра $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{(n)}(k, p; k', p'; z)$ операторов $\mathbf{Q}_{\alpha\beta}^{(n)}(z)$ являются ядрами типа $\mathfrak{Q}_{\alpha\beta}$; при этом компоненты $\mathcal{F}_{\alpha\beta}^{(n)}, \mathcal{G}_{\alpha\beta}^{(n)}, \mathcal{J}_{\alpha\beta}^{(n)}, \mathcal{H}_{\alpha\beta}^{(n)}$ этих ядер при $n \geq 4$ являются гельдеровскими функциями своих переменных с некоторым показателем $\tilde{\mu} < \frac{1}{8}$ и оценочными функциями

$$(1 + |z|)^4 N(k, p; \bar{\theta}) (1 + p_\alpha^2 + p_\beta^2)^{-1};$$

$$(1 + |z|)^4 (1 + |p_\alpha|)^{-2(1+\bar{\theta})} (1 + p_\alpha^2 + p_\beta^2)^{-1},$$

где $\bar{\theta}$ можно брать меньшим и сколь угодно близким к θ_0 . Показатель $\tilde{\mu}$, вообще говоря, убывает, а A растет с ростом n .

В заключение этого параграфа покажем, что компоненты $\mathcal{F}_{\alpha\beta}^{(n)}, \mathcal{G}_{\alpha\beta}^{(n)}, \mathcal{J}_{\alpha\beta}^{(n)}$ и $\mathcal{H}_{\alpha\beta}^{(n)}$ любого ядра $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{(n)}$, $n \geq 1$, не имеют второстепенных особенностей, если z меняется в окрестности точки $z = -x_\beta^2 + \frac{p_\beta^2}{2n_\beta}$. Обозначим через $\mathcal{F}_{\alpha\beta}'^{(n)}(k, p; k', p'; \xi)$ ядро

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta}'^{(n)}(k, p; k', p'; \xi) = \mathcal{F}_{\alpha\beta}^{(n)}\left(k, p; k', p'; -x_\beta^2 + \frac{p_\beta^2}{2n_\beta} + \xi\right)$$

и аналогичным образом определим ядра $\mathcal{G}_{\alpha\beta}'^{(n)}, \mathcal{J}_{\alpha\beta}'^{(n)}$ и $\mathcal{H}_{\alpha\beta}'^{(n)}$. Точный результат можно сформулировать следующим образом:

Лемма 6.5. Пусть $|\xi| \leq \frac{1}{2} \bar{x}^2$, где $\bar{x}^2 = \min_\alpha (x_\alpha^2)$ и $\text{Im } \xi \geq 0$ или $\text{Im } \xi \leq 0$. Тогда ядра $\mathcal{F}_{\alpha\beta}'^{(n)}, \mathcal{G}_{\alpha\beta}'^{(n)}, \mathcal{J}_{\alpha\beta}'^{(n)}$ и $\mathcal{H}_{\alpha\beta}'^{(n)}$ являются гельдеровскими функциями k, p, k', p' и ξ с показателем $\nu' < \nu$. Соответствующая оценочная функция равномерно ограничена при всех k, p, k_β' и при p_β' , меняющемся в конечной области.

Доказательство. Рассмотрим случай $n = 1$. В § 5 приведено явное выражение ядра $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{(1)}$ при $\alpha = 23$ и $\beta = 31$ [см. (5.1)]. Как видно из (5.1), второстепенные особенности ядра $\mathcal{F}_{23,31}^{(1)}$ возникают, когда обращается в нуль выражение

$$\frac{p_1^2}{2m_{31}} + \frac{(p_1, p_2')}{m_3} + \frac{p_2'^2}{2m_{23}} - z = \frac{1}{2m_{23}} \left(p_1 + \frac{m_1}{m_2 + m_3} p_2' \right)^2 + \frac{p_2'^2}{2n_2} - z,$$

которое стоит в знаменателе в (5.1). Если положить

$$z = -x_{31}^2 + \frac{p_2^2}{2n_2} + \xi,$$

то последнее выражение принимает вид

$$\frac{1}{2m_{23}} \left(p_1 + \frac{m_1}{m_2 + m_3} p_2' \right)^2 + x_{31}^2 + \xi. \quad (6.30)$$

Если $|\xi| \leq \frac{1}{2} x_{31}^2$, то (6.30) не обращается в нуль, и, следовательно, ядро $\mathcal{F}_{23, 31}^{(1)}$ равномерно ограничено. Гельдеровские разности для этого ядра с показателем ν также равномерно ограничены, если p_2' меняется в конечной области.

Аналогично можно исследовать любую компоненту любого ядра $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{(1)}$.

Выше на примере перехода от ядер $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{(2)}$ к ядрам $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{(3)}$ уже проиллюстрированы все действия, которые необходимо произвести для того, чтобы построить компоненты ядра $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{(n)}$ в терминах компонент ядер $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{(n-1)}$ и t_α . Из этого примера ясно следует, что второстепенные особенности у ядер $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{(n)}$ не возникают, если их не было у ядер $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{(n-1)}$. В рассматриваемом случае ядра $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{(1)}$ не имеют второстепенных особенностей. Следовательно, эти особенности отсутствуют и у ядер $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{(n)}$ при любом $n \geq 1$, и поэтому компоненты этих ядер являются гильдеровскими функциями своих переменных с ограниченными оценочными функциями.

Лемма доказана.

Полученный результат будет использован в § 11.

§ 7. ОПЕРАТОР $\mathbf{A}(z)$

Настоящий параграф посвящен изучению оператора $\mathbf{A}(z)$, введенного в § 5, в банаховом пространстве $\mathfrak{B}(\theta, \mu)$, определенном там же. Мы покажем, что оператор $\mathbf{A}(z)$ определен на плотном множестве в $\mathfrak{B}(\theta, \mu)$, где $\mu < \nu$ из леммы 6.1, состоящем из функций, принадлежащих $\mathfrak{B}(\theta, \mu')$, где μ' — любой показатель $\mu' > \mu$. Далее мы покажем, что на $\mathfrak{B}(\theta, \mu')$ определены все целые степени $\mathbf{A}^n(z)$ оператора $\mathbf{A}(z)$ и что при $n \geq 5$ операторы $\mathbf{A}^n(z)$ продолжаются до вполне непрерывных операторов в $\mathfrak{B}(\theta, \mu)$, если $\theta < \bar{\theta}$ и $\mu < \bar{\mu}$ ($\bar{\theta}$ и $\bar{\mu}$ введены в § 6). Наконец, мы исследуем однородное уравнение $\omega = \mathbf{A}(z)\omega$. На основании полученных результатов мы сможем разобраться в вопросе о разрешимости уравнения второго рода с оператором $\mathbf{A}(z)$.

Начнем с изучения области определения $\mathbf{A}(z)$. Типичные интегралы, которые при этом придется оценивать, имеют вид

$$f_1(k, p, z) = \int \hat{t}_{23} \left(k_{23}, k'_{23}, z - \frac{p_1^2}{2n_1} \right) \frac{\delta(p_1 - p'_1)}{k'^2 + \frac{p'^2}{2n} - z} \rho_{31}(k', p') dk' dp'; \quad (7.1)$$

$$f_2(k, p, z) = \int \hat{t}_{23} \left(k_{23}, k'_{23}, z - \frac{p_1^2}{2n_1} \right) \frac{\delta(p_1 - p'_1)}{k'^2 + \frac{p'^2}{2n} - z} \frac{\varphi_{31}(k'_{31}) \varphi_{31}(p'_2)}{z + x_{31}^2 - \frac{p_2^2}{2n_2}} dk' dp'. \quad (7.2)$$

Лемма 7.1. Пусть функция

$$\bar{\rho}_{31}(k, p) = (1 + |k_{31}|)^\delta \rho_{31}(k, p)$$

принадлежит классу $\mathfrak{M}(\theta, \mu')$, а $\sigma_{31}(p)$ — классу $\mathfrak{N}(\theta, \mu')$, причем
 $\delta + \theta < 1$; $\theta < \theta_0$; $\mu' < \nu$.

Тогда при всех z из $\Pi_{-\alpha^2}$ функции

$$\tilde{f}_i(k, p) = (1 + |k_{23}|)^{\theta_0 - \theta} (1 + |z|)^{\frac{\delta_1 - \mu'}{2}} f_i(k, p), \quad i = 1, 2,$$

принадлежат классу $\mathfrak{M}(\theta, \mu)$, где μ — любой показатель, меньший и сколь угодно близкий к μ' , $\theta_0 < \theta_0$, $\delta_1 = \min(\theta, \delta)$.

Доказательство. Рассмотрим сначала $f_1(k, p)$. В качестве переменных интегрирования возьмем k'_{23} и p'_1 . Интеграл по p'_1 снимается δ -функцией. Для оценки интеграла по k'_{23} воспользуемся леммой о сингулярных интегралах (см. § 4). Для оценки интегралов по углам будем пользоваться приемами, использованными в § 4. Заметим, что из трех слагаемых, составляющих оценочную функцию $N(k, p; \theta)$, можно рассматривать только два. Действительно, имеем, например,

$$1 + |p_2|^{-1} (1 + |p_3|)^{-1} \leq C (1 + |p_2 + p_3|)^{-1} \{ (1 + |p_2|)^{-1} + (1 + |p_3|)^{-1} \} = \\ = C (1 + |p_1|)^{-1} \{ (1 + |p_2|)^{-1} + (1 + |p_3|)^{-1} \}.$$

Поэтому оценочной функцией для числителя в (7.1) является функция

$$(1 + |p_1|)^{-(1+\theta)} (1 + |k'_{31}|)^{-\delta} \left\{ (1 + |p_2 - p'_2|)^{-(1+\theta_0)} (1 + |p'_2|)^{-(1+\theta)} + \right. \\ \left. + (1 + |p_3 - p'_3|)^{-(1+\theta_0)} (1 + |p'_3|)^{-(1+\theta)} \right\}. \quad (7.3)$$

Мы воспользовались здесь тем, что при $p_1 = p'_1$

$$|k_{23} - k'_{23}| = |p_2 - p'_2| = |p_3 - p'_3|.$$

Первое слагаемое в (7.3) можно переписать в виде

$$M(k, p; k', p') = (1 + |p_1|)^{-(1+\theta)} (1 + |p_2|)^{-(1+\theta)} (1 + |k'_{31}|)^{-\delta} \times \\ \times (1 + |p_2 - p'_2|)^{-(\theta_0 - \theta)} \{ (1 + |p'_2|)^{-(1+\theta)} + (1 + |p_2 - p'_2|)^{-(1+\theta)} \},$$

и, выражая здесь p'_2 и k'_{31} через k'_{23} и $p'_1 = p_1$, получаем следующую оценку для интеграла по угловым переменным от этого слагаемого:

$$\int d\Omega_{k'_{23}} M(k, p; k', p') \Big|_{p'_1 = p_1} \leq \\ \leq C (1 + |p_1|)^{-(1+\theta) - \delta} (1 + |p_2|)^{-(1+\theta)} (1 + |k'_{23}|)^{-(\theta_0 - \theta)} (1 + |k'_{23}|)^{-(1+\theta)}.$$

Аналогично оценивается второе слагаемое. Напомним, что вследствие леммы 6.1 в оценочную функцию ядра $\hat{t}_{23} \left(k_{23}, k'_{23}, z - \frac{p_1^2}{2n_1} \right)$ входит множитель $(1 + |z|)^{\mu'/2}$. На основании леммы о сингулярных интегралах мы можем утверждать, что $f_1(k, p, z)$ является гельдеровской функцией с показателем $\mu < \mu'$ по всем переменным и оценочной функцией

$$N(k, p; \theta) (1 + |k_{23}|)^{-(\theta_0 - \theta)} (1 + |p_1|)^{-\delta} \left(1 + \left| z - \frac{p_1^2}{2n_1} \right| \right)^{-\theta/2} (1 + |z|)^{\nu/2} \leq \\ \leq CN(k, p; \theta) (1 + |z|)^{\frac{\mu' - \delta_1}{2}} (1 + |k_{23}|)^{-(\theta_0 - \theta)}; \quad \delta_1 = \min(\theta, \delta). \quad (7.4)$$

Рассмотрим теперь $f_2(k, p)$. В интеграле (7.2) отделим особенности в знаменателе

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\frac{k'^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} - z} = \frac{1}{z + \kappa_{31}^2 - \frac{p'^2}{2n_2}} = \\ & = \frac{1}{\frac{\kappa_{31}^2}{2m_{31}} + \kappa_{31}^2} \left(\frac{1}{\frac{k'^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} - z} + \frac{1}{z + \kappa_{31}^2 - \frac{p'^2}{2n_2}} \right). \end{aligned} \quad (7.5)$$

Интеграл с первым слагаемым из (7.5) оценивается так же, как $f_1(k, p, z)$. При этом следует учесть, что оценочной функцией для произведения $\varphi_{31}(\kappa_{31})\sigma_{31}(p_2)$ является функция

$$(1 + |\kappa_{31}|)^{-(1+\theta_0)} (1 + |p_2|)^{-2(1+\theta)} \leq CN(k, p; \theta) (1 + |\kappa_{31}|)^{-(\theta_0-\theta)},$$

т. е. та же самая функция, что и для $\rho_{31}(k, p)$, причем $\delta = \theta_0 - \theta$. Поэтому оценка для вклада в $f_2(k, p, z)$ от этого слагаемого в точности совпадает с (7.4), причем $\delta_1 = \min(\theta_0 - \theta, \theta)$.

При оценке интеграла с знаменателем $\left(z + \kappa_{31}^2 - \frac{p_2'^2}{2n_2}\right)^{-1}$ в качестве переменных интегрирования возьмем p_1' и p_2' . Интеграл по угловым переменным, соответствующим p_2' , оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int d\Omega_{p_2'} (1 + |p_2 - p_2'|)^{-(1+\theta_0)} (1 + |p_2'|)^{-(1+\theta)} \leq \\ & \leq C (1 + |p_2|)^{-(1+\theta)} (1 + |\kappa_{23}|)^{-(\theta_0-\theta)} (1 + |p_2'|)^{-(1+\theta)}. \end{aligned}$$

На основании леммы о сингулярных интегралах мы получаем, что вклад в $f_2(k, p, z)$ от второго слагаемого является гельдеровской функцией с оценочной функцией

$$N(k, p; \theta) (1 + |\kappa_{23}|)^{-(\theta_0-\theta)} (1 + |z|)^{-\theta/2},$$

которая подчинена оценочной функции в (7.4).

Лемма доказана.

Заметим, что в определении оператора $\mathbf{A}(z)$ мы имеем дело также с интегралами типа

$$f_3(k, p, z) = \int \overline{\varphi_{23}(k'_{23})} \frac{\delta(p_1 - p'_1)}{\frac{k'^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} - z} \rho_{31}(k', p') dk' dp'; \quad (7.6)$$

$$f_4(k, p, z) = \int \overline{\varphi_{23}(k'_{23})} \frac{\delta(p_1 - p'_1)}{\frac{k'^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} - z} \frac{\varphi_{31}(k'_{31}) \sigma_{31}(p'_2)}{z + \kappa_{31}^2 - \frac{p_2'^2}{2n_2}} dk' dp'. \quad (7.7)$$

Интегралы (7.6) и (7.7) оцениваются аналогично (7.1) и (7.2) соответственно. Оценочную функцию для этих интегралов можно получить из (7.4), если заменить оценочную функцию $N(k, p; \theta)$ в правой части на $(1 + |p_1|)^{-2(1+\theta)}$.

На основании полученных оценок мы можем утверждать, что интегральный оператор $\mathbf{A}(z)$ определен в $\mathfrak{B}(\theta, \mu)$ на плотном множестве, состоящем из $\omega \in \mathfrak{B}(\theta, \mu')$, $\mu' > \mu$, причем

$$\|\mathbf{A}(z)\omega\|_{\theta, \mu} \leq C(1+|z|)^{\frac{\mu'}{2}} \|\omega\|_{\theta, \mu'}; \quad (7.8)$$

$$\|[\mathbf{A}(z+\Delta) - \mathbf{A}(z)]\omega\|_{\theta, \mu} \leq C(1+|z|)^{\frac{\mu'}{2}} \|\omega\|_{\theta, \mu'} |\Delta|^{\mu'-\mu}. \quad (7.9)$$

Заметим, что для получения этого результата нам достаточно иметь более грубые оценки, чем доказанные в лемме 7.1. Именно, в условии и утверждении можно опустить мало существенные множители $(1+|k'_{31}|)^2$ и $(1+|k_{23}|)^{-(\theta_0-\theta)}$. При помощи оценок, доказанных в лемме 7.1, в полной форме мы можем доказать следующее утверждение:

$$\|\mathbf{A}^2(z)\omega\|_{\theta, \mu} \leq C(1+|z|)^{\mu'-\frac{\theta_0-\theta}{2}} \|\omega\|_{\theta, \mu'}. \quad (7.10)$$

Действительно, применяя последовательно два раза оператор $\mathbf{A}(z)$ к элементу $\omega \in \mathfrak{B}(\theta, \mu')$, мы первый раз приобретаем множитель типа $(1+|k|)^{-\frac{\theta_0-\theta}{2}}$, а второй раз с его помощью — множитель $(1+|z|)^{-\frac{\theta_0-\theta}{2}}$ и, таким образом, получим оценку (7.10).

Наконец, мы можем утверждать, что оценка типа (7.8) справедлива, если заменить в левой части $\mathbf{A}(z)$ на любую конечную степень $\mathbf{A}^n(z)$ этого оператора. Достаточно последовательно использовать (7.8) n раз.

Мы получили следующий результат:

Лемма 7.2. *Оператор $\mathbf{A}(z)$ при всех z из Π_{-x^2} определен в $\mathfrak{B}(\theta, \mu)$, $\theta < \theta_0$, $\mu < \nu$ на плотном множестве, состоящем из элементов ω из $\mathfrak{B}(\theta, \mu')$, $\mu' > \mu$. Любая конечная степень $\mathbf{A}^n(z)$ также определена на этом множестве. Если показатели θ и μ удовлетворяют условиям*

$$\frac{\theta_0 - \theta}{2} > \mu; \quad \theta_0 + \frac{\theta_0 - \theta}{2} < 1, \quad (7.11)$$

то отношение $\frac{\|\mathbf{A}^2(z)\omega\|_{\theta, \mu}}{\|\omega\|_{\theta, \mu'}}$ становится сколь угодно малым при $|z| \rightarrow \infty$.

Оценки, полученные в § 6 для ядер операторов $\mathbf{Q}_{\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}}^{(n)}(z)$, позволяют нам сказать больше о степенях $\mathbf{A}^{(n)}(z)$ оператора $\mathbf{A}(z)$ при $n \geq 5$. Сравнивая определение (5.12), (5.13) оператора $\mathbf{A}(z)$ и операторов $\mathbf{Q}_{\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}}^{(n)}(z)$, мы приходим к выводу, что при помощи ядер $\mathcal{Q}_{\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}}^{(n)}(k, p; k', p'; z)$ мы можем записать действие оператора $\mathbf{A}^{n+1}(z)$ следующим образом: $\omega' = \mathbf{A}^{n+1}(z)\omega$ означает, что

$$\begin{aligned} \rho'_\alpha(k, p) = & \int \sum_{\substack{\beta, \gamma \\ \beta \neq \gamma}} \left\{ \left[\mathcal{F}_{\alpha\gamma}^{(n)}(k, p; k', p'; z) + \mathcal{G}_{\alpha\gamma}^{(n)}(k, p; p'_\gamma) \frac{\overline{\varphi_\gamma(k'_\gamma)}}{z + x_\gamma^2 - \frac{p_\gamma^2}{2n_\gamma}} \right] \times \right. \\ & \left. \times \frac{1}{\frac{k'^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} - z} \left[\rho_\beta(k', p') + \frac{\varphi_\beta(k'_\beta) \alpha_\beta(p'_\beta)}{z + x_\beta^2 - \frac{p_\beta^2}{2n_\beta}} \right] \right\} dk' dp', \quad (7.12) \end{aligned}$$

$$\sigma'_\alpha(p_\alpha) = \int \sum_{\substack{\beta, \gamma \\ \beta \neq \gamma}} \left\{ \left[\mathcal{G}_{\alpha\gamma}^{(n)}(p_\alpha; k', p'; z) + \mathcal{H}_{\alpha\gamma}^{(n)}(p_\alpha; p'_\beta; z) \frac{\overline{\varphi_\gamma(k'_\gamma)}}{z + \kappa_\gamma^2 - \frac{p_\gamma^2}{2n_\gamma}} \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{\frac{k'^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} - z} \left[\rho_\beta(k', p') + \frac{\varphi_\beta(k'_\beta) \sigma_\beta(p'_\beta)}{z + \kappa_\beta^2 - \frac{p_\beta^2}{2n_\beta}} \right] \right\} dk' dp'. \quad (7.13)$$

Здесь, как и несколько раз выше, мы обозначили через $\mathcal{F}_{\alpha\beta}^{(n)}$, $\mathcal{G}_{\alpha\beta}^{(n)}$, $\mathcal{H}_{\alpha\beta}^{(n)}$ компоненты ядра $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{(n)}(k, p; k', p'; z)$ оператора $\mathbf{Q}_{\alpha\beta}^{(n)}(z)$

$$\mathbf{Q}_{\alpha\beta}^{(n)}(z) = \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}} \mathbf{Q}_{\alpha, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}, \beta}^{(n)}(z),$$

где суммирование ведется по всем допустимым значениям индексов $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$.

Возникающие при выводе (7.12) и (7.13) замены порядков интегрирования законны при $\text{Im } z \neq 0$, так как соответствующие интегралы сходятся абсолютно. При $\text{Im } z \rightarrow 0$ эти формулы следуют из непрерывности по z всех интегралов, участвующих в них.

На основании оценок, полученных в § 5 для ядер $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{(n)}(k, p; k', p'; z)$, и леммы о сингулярных интегралах мы можем доказать следующее утверждение:

Лемма 7.3. Пусть $\omega \in \mathfrak{B}(\theta, \mu)$ и $\theta < \bar{\theta}$, $\mu < \bar{\mu}$. Тогда при всех z из Π_{-x^2} и $n \geq 5$ справедливы оценки

$$\|\mathbf{A}^n(z)\|_{\theta', \mu'} \leq C(1 + |z|)^A \|\omega\|_{\theta, \mu}; \quad (7.14)$$

$$\|\mathbf{A}^n(z + \Delta) - \mathbf{A}^n(z)\|_{\theta', \mu'} \leq C(1 + |z|)^A \|\omega\|_{\theta, \mu} |\Delta|^{\delta}; \quad (7.15)$$

где μ' , θ' и δ — любые показатели, такие что

$$\mu' < \bar{\mu}; \quad \theta' < \bar{\theta}; \quad \delta < \bar{\mu} - \mu',$$

и A — некоторое фиксированное число.

Мы не будем приводить здесь детального доказательства этой леммы. Все средства, необходимые для этого доказательства, уже рассмотрены выше. Следует отделить особенности в знаменателях интегралов, выбрать подходящие переменные интегрирования, оценить интегралы по угловым переменным от соответствующих оценочных функций и использовать лемму о сингулярных интегралах.

Воспользуемся теперь тем фактом, что последовательность ω_n , равномерно ограниченная в $\mathfrak{B}(\theta', \mu')$, компактна в $\mathfrak{B}(\theta, \mu)$ при любых $\theta < \theta'$, $\mu < \mu'$. Из леммы 7.3 и сформулированного критерия компактности следует:

Лемма 7.4. Оператор $\mathbf{A}^n(z)$ при $n \geq 5$ продолжается с плотного множества на все $\mathfrak{B}(\theta, \mu)$ при $\bar{\theta} < \bar{\theta}$, $\bar{\mu} < \bar{\mu}$, причем получающийся оператор вполне непрерывен и непрерывно зависит от z в любой конечной области на комплексной плоскости Π_{-x^2} .

Перейдем теперь к исследованию однородного уравнения

$$\omega = \mathbf{A}(z)\omega. \quad (7.16)$$

Лемма 7.5. Пусть ω — решение уравнения (7.16), причем $\omega \in \mathfrak{B}(\theta, \mu)$, $\theta < \bar{\theta}$, $\mu < \bar{\mu}$. Тогда $\omega \in \mathfrak{B}(\theta', \mu')$, $\theta' = \bar{\theta} - \varepsilon$, $\mu' = \bar{\mu} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Для доказательства заметим, что ω , удовлетворяющее уравнению (7.16), удовлетворяет также уравнению

$$\omega = \mathbf{A}^n(z) \omega. \quad (7.17)$$

Лемма 7.5. следует теперь из леммы 7.3.

Лемма 7.6. Пусть $\operatorname{Im} z \neq 0$. Уравнение (7.16) не имеет нетривиальных решений из $\mathfrak{B}(\theta, \mu)$ при любых $\theta < \bar{\theta}$, $\mu < \bar{\mu}$.

Доказательство. Пусть ω — решение (7.16) из $\mathfrak{B}(\theta, \mu)$. Через $\rho_\alpha(k, p)$ и $\sigma_\alpha(p_\alpha)$ обозначим компоненты ω . На основании леммы 7.5 $\rho_\alpha(k, p) \in \mathfrak{M}(\bar{\theta} - \varepsilon, \bar{\mu} - \varepsilon)$ и $\sigma_\alpha(p_\alpha) \in \mathfrak{N}(\bar{\theta} - \varepsilon, \bar{\mu} - \varepsilon)$. Вспомогая, что $\bar{\theta} > \frac{1}{2}$, мы видим, что функции $\chi_\alpha(k, p; z)$, соответствующие $\rho_\alpha(k, p)$ и $\sigma_\alpha(p_\alpha)$ [см. (5.10)], квадратично интегрируемы по всему пространству, т. е. $\chi_\alpha(k, p) \in \mathfrak{S}$, а

$$\psi_\alpha(k, p) = \left(\frac{k^2}{2m} = \frac{p^2}{2n} - z \right)^{-1} \chi_\alpha(k, p; z) \in \mathfrak{D}.$$

Уравнение (7.16) в терминах $\psi_\alpha(k, p)$ можно переписать в виде

$$\psi_\alpha = -\mathbf{R}_0(z) \mathbf{T}_\alpha(z) \sum_{\beta \neq \alpha} \psi_\beta. \quad (7.18)$$

Обозначим

$$\psi(k, p) = \psi_{23}(k, p) + \psi_{31}(k, p) + \psi_{12}(k, p).$$

Умножим (7.18) на $\mathbf{E} + \mathbf{R}_\alpha(z) \mathbf{V}_\alpha$. Учитывая (3.12), мы получим

$$\psi_\alpha = -\mathbf{R}_0(z) \mathbf{V}_\alpha \psi \quad (7.19)$$

и после суммирования по α

$$\psi = -\mathbf{R}_0(z) (\mathbf{V}_{23} + \mathbf{V}_{31} + \mathbf{V}_{12}) \psi. \quad (7.20)$$

Умножая (7.20) на $\mathbf{H}_0 - z\mathbf{E}$ мы получаем, что ψ удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{H}\psi = z\psi,$$

которое не имеет нетривиальных решений при $\operatorname{Im} z \neq 0$ в силу самосопряженности $\mathbf{H}$. Мы получаем, что $\psi \equiv 0$, а следовательно, на основании (7.19), $\psi_\alpha = 0$, $\alpha = 23, 31, 12$, откуда мы можем заключить, что $\chi_\alpha(k, p; z) = 0$. Наконец, из определения оператора $\mathbf{A}(z)$ следует, что $\rho_\alpha(k, p) = 0$ и $\sigma_\alpha(p_\alpha) = 0$, т. е. $\omega = 0$.

Лемма доказана.

Лемма 7.7. Уравнение (7.16) не имеет нетривиальных решений при достаточно больших $|z|$.

Доказательство. На основании леммы 7.5 мы без ограничения общности можем считать, что $\omega \in \mathfrak{B}(\theta, \mu)$, где $\theta \leq \bar{\theta} - \varepsilon$, $\mu \leq \bar{\mu} - \varepsilon$, и подберем показатели θ и μ , так, чтобы удовлетворялись соотношения (7.11). В уравнении (7.17) возьмем $n = 2N + 5$ и используем оценки (7.14) и (7.10). Мы получим

$$\|\omega\|_{\theta, \mu} \leq C \frac{(1 + |z|)^4}{\left[\frac{\theta_0 - \theta}{2} - \mu \right]^N} \|\omega\|_{\theta, \mu}. \quad (7.21)$$

Показатели θ и μ подобраны так, что $\frac{\theta_0 - \theta}{2} - \mu = \delta > 0$. Возьмем $N = \left[\frac{A}{\delta} \right] + 1$. Тогда при достаточно больших $|z|$ коэффициент при $\|\omega\|_{\theta, \mu}$ в правой части (7.21) станет сколь угодно малым, откуда $\omega = 0$.

Лемма доказана.

Обозначим через $\Phi^{(+)}$ множество вещественных точек λ , при которых уравнение (7.16) при $z = \lambda + i0$ имеет нетривиальное решение. Множество $\Phi^{(-)}$ определяется аналогично, если рассмотреть уравнение (7.16) при $z = \lambda - i0$. Точки λ из $\Phi^{(+)}$ и $\Phi^{(-)}$ будем называть особыми точками оператора $\mathbf{A}(z)$.

Лемма 7.8. *Множество $\Phi^{(+)}$ замкнуто.*

Доказательство. Пусть $\{\lambda_n\}$, $n = 1, 2, \dots$ — бесконечная последовательность особых точек из $\Phi^{(+)}$, сходящаяся к точке λ_0 . Обозначим через ω_n решения уравнения (7.16) при $z = \lambda_n + i0$, нормированные условием

$$\|\omega_n\|_{\theta, \mu} = 1,$$

где θ, μ — некоторые показатели, причем $\theta < \bar{\theta}$, $\mu < \bar{\mu}$.

Рассмотрим последовательность элементов

$$\tilde{\omega}_n = \mathbf{A}^N(\lambda_0 + i0) \omega_n,$$

где мы считаем, что $N \geq 5$. В силу полной непрерывности оператора $\mathbf{A}^N(\lambda_0 + i0)$ из последовательности $\{\tilde{\omega}_n\}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу ω_0 . В дальнейшем будем иметь дело только с этой подпоследовательностью и обозначение $\{\tilde{\omega}_n\}$ и $\{\omega_n\}$ используем для нее и соответствующей подпоследовательности элементов ω_n . На основании уравнения (7.17), которому ω_n удовлетворяют при $z = \lambda_n + i0$, мы можем записать, что

$$\omega_n = \tilde{\omega}_n + [\mathbf{A}^N(\lambda_n + i0) - \mathbf{A}^N(\lambda_0 + i0)] \omega_n.$$

В силу непрерывности оператора $\mathbf{A}^N(z)$ по z мы получаем, что ω_n также сходятся к ω_0 . Мы можем поэтому перейти к пределу в уравнении

$$\omega_n = \mathbf{A}(\lambda_n + i0) \omega_n$$

и в результате получим, что ω_0 является нетривиальным решением уравнения (7.16) при $z = \lambda_0 + i0$, так что $\lambda_0 \in \Phi^{(+)}$.

Лемма доказана.

Лемма 7.9. *Пусть $\lambda \in \Phi^{(+)}$, ω — решение (7.16) при $z = \lambda + i0$ и $\rho_\alpha(k, p)$ и $\sigma_\alpha(p_\alpha)$ — компоненты элемента ω . Справедливы соотношения*

$$\int |\tilde{\chi}_{23}(k, p) + \tilde{\chi}_{31}(k, p) + \tilde{\chi}_{12}(k, p)|^2 \delta\left(\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - \lambda\right) dk dp = 0; \quad (7.22)$$

$$\int |\sigma_\alpha(p_\alpha)|^2 \delta\left(-x_\alpha^2 + \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} - \lambda\right) dp_\alpha = 0; \quad \alpha = 23, 31, 12. \quad (7.23)$$

Здесь через $\tilde{\chi}_\alpha(k, p)$ мы обозначили функции

$$\tilde{\chi}_\alpha(k, p) = \rho_\alpha(k, p) + \frac{\varphi_\alpha(k_\alpha) \sigma_\alpha(p_\alpha)}{\frac{k_\alpha^2}{2m_\alpha} + x_\alpha^2}, \quad (7.24)$$

получающиеся из $\chi_\alpha(k, p; z)$ при $z = \frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n}$.

Доказательство будет вестись по тому же пути, что и доказательство леммы 4.7, но будет значительно более громоздким. По функциям $\rho_\alpha(k, p)$ и $\sigma_\alpha(p_\alpha)$ построим функции

$$\chi_\alpha(k, p; \lambda + i\varepsilon) = \rho_\alpha(k, p) + \frac{\varphi_\alpha(k_\alpha) \sigma_\alpha(p_\alpha)}{\lambda + i\varepsilon + x_\alpha^2 - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha}} \quad (7.25)$$

и рассмотрим функции

$$\hat{\chi}_\alpha(k, p; \varepsilon) = - \int t_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha, \lambda + i\varepsilon - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha}) \frac{\delta(p_\alpha - p'_\alpha)}{\frac{k'^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} - z} \times \\ \times \sum_{\beta} \chi_\beta(k', p'; \lambda + i\varepsilon) dk' dp'. \quad (7.26)$$

Функции $\hat{\chi}_\alpha(k, p; \varepsilon)$ представляются в виде (7.25), через $\rho_\alpha(k, p; \varepsilon)$ и $\sigma_\alpha(p_\alpha; \varepsilon)$ мы обозначим соответствующие компоненты и через $\omega(\varepsilon)$ элемент с этими компонентами. Соотношение (7.26) можно записать в виде

$$\omega(\varepsilon) = \mathbf{A}(\lambda + i\varepsilon) \omega = \omega + [\mathbf{A}(\lambda + i\varepsilon) - \mathbf{A}(\lambda + i0)] \omega,$$

и на основании леммы 7.2 мы можем заключить, что при $\varepsilon \rightarrow +0$

$$\|\omega(\varepsilon) - \omega\|_{\theta, \mu} = o(1),$$

где θ, μ — некоторые показатели, причем $\theta < \bar{\theta}, \mu < \bar{\mu}$.

При $\varepsilon \neq 0$ функции $\chi_\alpha(k, p; \lambda + i\varepsilon)$ и $\hat{\chi}_\alpha(k, p; \varepsilon)$ квадратично интегрируемы по всему пространству, и соотношение (7.26) мы можем записать в виде

$$\hat{\chi}_\alpha = -\mathbf{T}_\alpha(\lambda + i\varepsilon) \mathbf{R}_0(\lambda + i\varepsilon) \sum_{\beta \neq \alpha} \chi_\beta. \quad (7.27)$$

Здесь $\hat{\chi}_\alpha$ и χ_α — элементы $\mathfrak{D}$, определяемые функциями $\hat{\chi}_\alpha(k, p; \varepsilon)$ и $\chi_\alpha(k, p; \lambda + i\varepsilon)$ соответственно.

Умножим (7.27) на $\mathbf{E} + \mathbf{V}_\alpha \mathbf{R}_0(\lambda + i\varepsilon)$ и используем (3.12). Мы получим

$$\hat{\chi}_\alpha = -\mathbf{V}_\alpha \mathbf{R}_0(\lambda + i\varepsilon) \hat{\chi}_\alpha - \mathbf{V}_\alpha \mathbf{R}_0(\lambda + i\varepsilon) \sum_{\beta \neq \alpha} \chi_\beta. \quad (7.28)$$

Умножим (7.28) скалярно слева и справа сначала на $\mathbf{R}_0(\lambda + i\varepsilon) \hat{\chi}_\alpha$, а затем на $\mathbf{R}_0(\lambda + i\varepsilon) \sum_{\beta \neq \alpha} \chi_\beta$. Комбинируя полученные соотношения и используя симметрию операторов $\mathbf{V}_\alpha$ на $\mathfrak{D}$, мы получим соотношение

$$([\mathbf{R}_0(\lambda + i\varepsilon) - \mathbf{R}_0(\lambda - i\varepsilon)] \hat{\chi}_\alpha, \hat{\chi}_\alpha) + \left(\mathbf{R}_0(\lambda + i\varepsilon) \sum_{\beta \neq \alpha} \chi_\beta, \hat{\chi}_\alpha \right) - \\ - \left(\hat{\chi}_\alpha, \mathbf{R}_0(\lambda + i\varepsilon) \sum_{\beta \neq \alpha} \chi_\beta \right) = 0. \quad (7.29)$$

Рассмотрим типичный интеграл, дающий вклад во второе и третье слагаемое в (7.29),

$$\int \left\{ \rho_\alpha(k, p; \varepsilon) + \frac{\varphi_\alpha(k_\alpha) \sigma_\alpha(p_\alpha; \varepsilon)}{\lambda + i\varepsilon + x_\alpha^2 - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha}} \right\} \frac{1}{\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - \lambda + i\varepsilon} \times \\ \times \left\{ \overline{\rho_\beta(k, p)} + \frac{\overline{\varphi_\beta(k_\beta) \sigma_\beta(p_\beta)}}{\lambda - i\varepsilon + x_\beta^2 - \frac{p_\beta^2}{2n_\beta}} \right\} dk dp.$$

При $\alpha \neq \beta$ все особенности в знаменателях подынтегрального выражения отделяются и интеграл непрерывно зависит от $\rho_\alpha(k, p)$ и $\sigma_\alpha(p_\alpha)$ в гильбертовской метрике, используемой нами. Мы можем поэтому с точ-

ностью до $o(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ заменить здесь $\rho_\alpha(k, p; \varepsilon)$ и $\sigma_\alpha(p_\alpha; \varepsilon)$ на $\rho_\alpha(k, p)$ и $\sigma_\alpha(p_\alpha)$ соответственно. Возвращаясь к (7.29), мы получаем

$$([R_0(\lambda + i\varepsilon) - R_0(\lambda - i\varepsilon)] \hat{\chi}_\alpha, \hat{\chi}_\alpha) + (R_0(\lambda + i\varepsilon) \sum_{\beta \neq \alpha} \chi_\beta, \chi_\alpha) - \\ - (R_0(\lambda - i\varepsilon) \chi_\alpha, \sum_{\beta \neq \alpha} \chi_\beta) = o(1).$$

и, суммируя эти равенства по α , мы приходим к соотношению

$$\sum_\alpha ([R_0(\lambda + i\varepsilon) - R_0(\lambda - i\varepsilon)] \hat{\chi}_\alpha, \hat{\chi}_\alpha) + \\ + \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ \alpha \neq \beta}} ([R_0(\lambda + i\varepsilon) - R_0(\lambda - i\varepsilon)] \chi_\alpha, \chi_\beta) = o(1). \quad (7.30)$$

Рассмотрим теперь предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$ в каждом слагаемом в левой части (7.30). Нам придется иметь дело с интегралами типа

$$I_{\alpha\beta} = \int \left\{ \rho_\alpha(k, p) + \frac{\varphi_\alpha(k_\alpha) \sigma_\alpha(p_\alpha)}{\lambda + i\varepsilon + \kappa_\alpha^2 - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha}} \right\} \times \\ \times \left[\frac{1}{\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - \lambda - i\varepsilon} - \frac{1}{\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - \lambda + i\varepsilon} \right] \left\{ \overline{\rho_\beta(k, p)} + \frac{\overline{\varphi_\beta(k_\beta) \sigma_\beta(p_\beta)}}{\lambda - i\varepsilon + \kappa_\beta^2 - \frac{p_\beta^2}{2n_\beta}} \right\} dk dp.$$

Перестроим здесь сингулярные знаменатели. Наибольшее число сингулярностей мы получаем при перемножении вторых слагаемых в фигурных скобках. Это произведение преобразуем следующим образом:

$$2i\varepsilon \frac{1}{\lambda + i\varepsilon + \kappa_\alpha^2 - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha}} \frac{1}{\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - \lambda - i\varepsilon} \frac{1}{\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - \lambda + i\varepsilon} \frac{1}{\lambda - i\varepsilon + \kappa_\beta^2 - \frac{p_\beta^2}{2n_\beta}} = \\ = 2i\varepsilon \frac{1}{\frac{k_\alpha^2}{2m_\alpha} + \kappa_\alpha^2} \left(\frac{1}{\lambda + i\varepsilon + \kappa_\alpha^2 - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha}} + \frac{1}{\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - \lambda - i\varepsilon} \right) \times \\ \times \left(\frac{1}{\lambda - i\varepsilon + \kappa_\beta^2 - \frac{p_\beta^2}{2n_\beta}} + \frac{1}{\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - \lambda + i\varepsilon} \right) \frac{1}{\frac{k_\beta^2}{2m_\beta} + \kappa_\beta^2}. \quad (7.31)$$

При $\alpha \neq \beta$ мы можем взять в качестве переменных интегрирования p_α и p_β , и отличный от нуля результат в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ будет давать только слагаемое, полученное при перемножении сингулярных знаменателей $(\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - \lambda - i\varepsilon)^{-1}$ и $(\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - \lambda + i\varepsilon)^{-1}$ в (7.31). Мы получим

$$I_{\alpha\beta} = \int \left\{ \rho_\alpha(k, p) + \frac{\varphi_\alpha(k_\alpha) \sigma_\alpha(p_\alpha)}{\frac{k_\alpha^2}{2m_\alpha} + \kappa_\alpha^2} \right\} \frac{2i\varepsilon}{(\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - \lambda)^2 + \varepsilon^2} \times \\ \times \left\{ \overline{\rho_\beta(k, p)} + \frac{\overline{\varphi_\beta(k_\beta) \sigma_\beta(p_\beta)}}{\frac{k_\beta^2}{2m_\beta} + \kappa_\beta^2} \right\} dk dp + o(1) = \\ = 2\pi i \int \tilde{\chi}_\alpha(k, p) \overline{\tilde{\chi}_\beta(k, p)} \delta\left(\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - \lambda\right) dk dp + o(1).$$

В случае $\alpha = \beta$ в качестве переменных интегрирования возьмем k_α и p_α . При этом вклад от произведения знаменателей $\left(\lambda \mp i\varepsilon + \kappa_\alpha^2 - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha}\right)^{-1}$ в (7.31) будет отличен от нуля в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$. Мы получим

$$I_{\alpha\alpha} = 2\pi i \int |\tilde{\chi}_\alpha(k, p)|^2 \delta\left(\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - \lambda\right) dk dp + \\ + \int \frac{|\varphi_\alpha(k_\alpha)|^2}{\left(\frac{k_\alpha^2}{2m_\alpha} + \kappa_\alpha^2\right)^2} |\sigma_\alpha(p_\alpha)|^2 \frac{2i\varepsilon}{\left(\frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} - \kappa_\alpha^2 - \lambda\right)^2 + \varepsilon^2} dk_\alpha dp_\alpha + o(1).$$

Интеграл по k_α во втором слагаемом дает 1, так как

$$\varphi_\alpha(k_\alpha) = \left(\frac{k_\alpha^2}{2m_\alpha} + \kappa_\alpha^2\right) \psi_\alpha(k_\alpha),$$

где ψ_α — нормированные на 1 собственные функции операторов типа **h**. Мы получаем окончательно

$$I_{\alpha\alpha} = 2\pi i \left\{ \int |\tilde{\chi}_\alpha(k, p)|^2 \delta\left(\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - \lambda\right) dk dp + \right. \\ \left. + \int |\sigma_\alpha(p_\alpha)|^2 \delta\left(-\kappa_\alpha^2 + \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} - \lambda\right) dp_\alpha \right\} + o(1).$$

В приведенных выкладках мы не различали $\rho_\alpha(k, p)$, $\sigma_\alpha(p_\alpha)$ и $\rho_\alpha(k, p; \varepsilon)$, $\sigma_\alpha(p_\alpha; \varepsilon)$, так как при этом мы делаем ошибку порядка $o(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Мы можем теперь переписать (7.30) в виде

$$2\pi i \left\{ \int |\tilde{\chi}_{23}(k, p) + \tilde{\chi}_{31}(k, p) + \tilde{\chi}_{12}(k, p)|^2 \delta\left(\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - \lambda\right) dk dp + \right. \\ \left. + \sum_\alpha \int |\sigma_\alpha(p_\alpha)|^2 \delta\left(-\kappa_\alpha^2 + \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} - \lambda\right) dp_\alpha \right\} = o(1). \quad (7.32)$$

Все слагаемые в левой части (7.32) положительны и не зависят от ε , так что каждое из них порознь равно нулю.

Лемма доказана.

Лемма 7.10. Пусть ω , λ , $\rho_\alpha(k, p)$ и $\sigma_\alpha(p_\alpha)$ — те же, что и в лемме 7.9. Существует такой показатель $\mu > \frac{1}{2}$, что

$$|\rho_\alpha(k_\alpha + h, p_\alpha) - \rho_\alpha(k_\alpha, p_\alpha)| \leq C |h|^\mu; \quad (7.33)$$

$$|\sigma_\alpha(p_\alpha + l) - \sigma_\alpha(p_\alpha)| \leq C |l|^\mu; \quad \lambda - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} < 0. \quad (7.34)$$

Доказательство. Оценка (7.33) следует из того, что зависимость $\rho_\alpha(k, p)$ от k_α происходит только от ядра $t_\alpha\left(k_\alpha, k'_\alpha, z - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha}\right)$, которое является достаточно гладкой функцией k_α . Для получения оценки

(7.34) рассмотрим выражение для $\sigma_\alpha(p_\alpha)$, которое следует из уравнения (7.17) при $n=2$. Вклад в $\sigma_{23}(p_1)$ будут давать интегралы вида

$$\int \frac{\varphi_{23} \left(-p'_2 - \frac{m_2}{m_2 + m_3} p_1 \right) t_{31} \left(p_1 + \frac{m_1}{m_3 + m_1} p'_2, k'_{31}, z - \frac{p_2'^2}{2n_2} \right) \chi_{23}(k', p')}{\left(\frac{1}{2m_{23}} \left(p'_2 + \frac{m_2}{m_2 + m_3} p_1 \right)^2 + \frac{1}{2n_1} p_1^2 - z \right) \left(\frac{k'^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} - z \right)} dk' dp' \\ (z = \lambda + i0).$$

При $\lambda - \frac{p_1^2}{2n_1} < 0$ знаменатель, содержащий p_1 , несингулярен. Выражение в числителе зависит от p_1 посредством достаточно гладких функций. Из приведенных рассуждений следует доказательство леммы.

Лемма 7.11. Пусть $\lambda \in \Phi^{(+)}$, причем $\lambda \neq -x_\alpha^2$, $\alpha = 23, 31, 12$. Тогда λ является дискретным собственным значением оператора $\mathbf{H}$.

Доказательство. Пусть ω — нетривиальное решение (7.16) при $z = \lambda + i0$ и $\rho_\alpha(k, p)$, $\sigma_\alpha(p_\alpha)$ — его компоненты.

Рассмотрим функцию

$$\psi(k, p; \varepsilon) = \frac{1}{\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - \lambda - i\varepsilon} \sum_\alpha \left\{ \rho_\alpha(k, p) + \frac{\varphi_\alpha(k_\alpha) \sigma_\alpha(p_\alpha)}{\lambda + i\varepsilon + x_\alpha^2 - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha}} \right\}. \quad (7.35)$$

Покажем, что если $\lambda \neq -x_\alpha^2$, $\alpha = 23, 31, 12$, то $\psi(k, p; \varepsilon) \in \mathfrak{D}$ при всех $\varepsilon \geq 0$, т. е. $|\psi|$ и $(1 + k^2 + p^2)|\psi|$ квадратично интегрируемы по всему пространству равномерно по ε . Основную трудность составляет оценка интеграла от $|\psi|^2$ по конечной области. Действительно, если

$$p_\alpha^2 \geq 4M(|\lambda| + x_\alpha^2) + 1, \quad \alpha = 23, 31, 12,$$

то знаменатели в (7.35) несингулярны и ψ удовлетворяет оценке

$$|\psi(k, p; \varepsilon)| \leq CN(k, p; \theta)(1 + k^2 + p^2)^{-1}, \quad (7.36)$$

где θ может быть взято $> \frac{1}{2}$, откуда следует, что

$$\int_{\Omega_\infty} (1 + k^2 + p^2)^2 |\psi(k, p; \varepsilon)|^2 dk dp < \infty.$$

Здесь через Ω_∞ мы обозначим бесконечную область, в которой одновременно выполняются три условия:

$$p_\alpha^2 \geq 4M(|\lambda| + x_\alpha^2) + 1; \quad k_\alpha^2 \geq 1; \quad \alpha = 23, 31, 12.$$

В конечной области $E_\theta - \Omega_\infty$, где E_θ — все шестимерное пространство, представим $\psi(k, p; \varepsilon)$ в виде

$$\psi(k, p; \varepsilon) = \frac{1}{\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - \lambda - i\varepsilon} \sum_\alpha \left\{ \rho_\alpha(k, p) + \frac{\varphi_\alpha(k_\alpha) \sigma_\alpha(p_\alpha)}{\lambda + i\varepsilon + x_\alpha^2 - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha}} \right\} + \\ + \sum_\alpha \frac{\varphi_\alpha(k_\alpha)}{\frac{k_\alpha^2}{2m_\alpha} + x_\alpha^2} \frac{\sigma_\alpha(p_\alpha)}{\lambda + i\varepsilon + x_\alpha^2 - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha}} = \psi_0 + \psi_{23} + \psi_{31} + \psi_{12}$$

и оценим каждое слагаемое в отдельности. В функции ψ_α зависимость от k_α и p_α факторизована, и нам надо только доказать квадратичную

интегрируемость второго множителя, зависящего от p_α . Основное место составляет оценка в окрестности сингулярности знаменателя. Если $\lambda < -x_\alpha^2$, то этой сингулярности нет, и все функции ограничены, а следовательно, квадратично интегрируемы, равномерно по ε . Если же $\lambda > -x_\alpha^2$, то мы используем свойство (7.23) и вычтем из $\sigma_\alpha(p_\alpha)$ в числителе его нулевое значение при $\frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} = \lambda + x_\alpha^2$. Мы получим

$$\left| \frac{\sigma_\alpha(p_\alpha)}{\lambda + i\varepsilon + x_\alpha^2 - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha}} \right| = \left| \frac{\sigma_\alpha(p_\alpha) - \sigma_\alpha\left(\frac{p_\alpha}{|p_\alpha|} \sqrt{2n_\alpha(\lambda + x_\alpha^2)}\right)}{\lambda + i\varepsilon + x_\alpha^2 - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha}} \right| \leq \\ \leq C \frac{1}{\left| \lambda + x_\alpha^2 - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} \right|^{1-\mu}},$$

где $\mu > \frac{1}{2}$ на основании леммы (7.11), так как $\lambda - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} < 0$ в окрестности сингулярности знаменателя. Мы получим при помощи этой оценки, что

$$\int \left| \frac{\sigma_\alpha(p_\alpha)}{\lambda + i\varepsilon + x_\alpha^2 - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha}} \right|^2 dp_\alpha \leq \\ \left| \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} - \lambda - x_\alpha^2 \right| \leq \Delta \\ \leq C \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{dt}{|t^2|^{1-\mu}} \leq C |\Delta|^{2\mu-1}. \quad (7.37)$$

Мы сделали здесь замену переменных $\frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} - \lambda - x_\alpha^2 = t$. В области $\left| \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} - \lambda - x_\alpha^2 \right| \geq \Delta$ все функции равномерно ограничены. Мы получили, что функция ψ_α равномерно по ε квадратично интегрируема по конечной области.

Рассмотрим теперь слагаемое ψ_0 , считая сначала $\lambda > 0$. Основную трудность составляет оценка интеграла от ψ_0 по окрестности поверхности, на которой знаменатель $\left(\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - \lambda - i\varepsilon\right)^{-1}$ сингулярен. В качестве этой окрестности возьмем область Ω_Δ , определяемую условием

$$\left| \frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - \lambda \right| \leq \Delta.$$

При помощи следующих дополнительных условий определяются четыре подобласти области Ω_Δ :

$$\Omega_0: \frac{p_1^2}{2n_1} \leq \lambda; \quad \frac{p_2^2}{2n_2} \leq \lambda; \quad \frac{p_3^2}{2n_3} \leq \lambda; \quad . \\ \Omega_\alpha: \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} \geq \lambda; \quad \alpha = 23, 31, 12.$$

Области Ω_0 и Ω_α , вообще говоря, пересекаются и заведомо покрывают всю область Ω_Δ .

Покажем, что сингулярный знаменатель $\left(\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - \lambda - i\varepsilon\right)^{-1}$ квадратично интегрируем по любой области Ω_α . Действительно, в качестве переменных интегрирования возьмем k_α и p_α и получим

$$\int_{\Omega_\alpha} dkdp \frac{1}{\left|\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - \lambda - i\varepsilon\right|^2} \leq \int_{\Omega_\alpha} dkdp \frac{1}{\left|\frac{k_\alpha^2}{2m_\alpha} + \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} - \lambda\right|^2} \leq \\ \leq C \int_{x^2+y^2 \leq \Delta} \frac{x^2 y dx dy}{(x^2 + y^2)^2} \leq C |\Delta|^{1/2}.$$

Мы сделали здесь замену переменных $\frac{k_\alpha^2}{2m_\alpha} = x^2$, $\frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} - \lambda = y^2$. Заметив теперь, что числитель функции $\psi_0(k, p; \varepsilon)$ равномерно ограничен, мы получаем, что

$$\int_{\Omega_\alpha} |\psi(k, p; \varepsilon)|^2 dkdp \leq C |\Delta|^{1/2}. \quad (7.38)$$

Рассмотрим теперь интеграл по области Ω_0 . Используем свойство (7.22) функции, стоящей в числителе $\psi_0(k, p; \varepsilon)$. Мы получим

$$\int_{\Omega_0} |\psi_0(k, p; \varepsilon)|^2 dkdp \leq C \int_{\Omega_0} \frac{1}{\left|\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - \lambda\right|^2} \times \\ \times \sum_\alpha \left\{ \left| \varphi_\alpha(k, p) - \varphi_\alpha \left(\sqrt{2m_\alpha \left(\lambda - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} \right)} \frac{k_\alpha}{|k_\alpha|}, p_\alpha \right) \right|^2 + \right. \\ \left. + \frac{|\sigma_\alpha(p_\alpha)|^2}{\left| \frac{k_\alpha^2}{2m_\alpha} + \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} \right|^2} \left| \varphi_\alpha(k_\alpha) - \varphi_\alpha \left(\sqrt{2m_\alpha \left(\lambda - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} \right)} \frac{k_\alpha}{|k_\alpha|} \right) \right|^2 \right\} dkdp.$$

Мы вычли здесь нулевое значение числителя при $\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} = \lambda$, т. е. при $\frac{k_\alpha^2}{2m_\alpha} = \lambda - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha}$, $\alpha = 23, 31, 12$.

Оценим каждое слагаемое в отдельности, выбирая в соответствующих интегралах в качестве переменных интегрирования k_α и p_α . Функции, стоящие в числителе, являются гладкими функциями переменной k_α — точную формулировку дает лемма 7.10. Поэтому мы имеем

$$\int_{\Omega_0} |\psi_0(k, p; \varepsilon)|^2 dkdp \leq C \int_{x^2+y^2 \leq \Delta} x^2 dx dy \frac{|x-y|^{2\mu}}{|x^2-y^2|^2} \leq C |\Delta|^\mu. \quad (7.39)$$

Здесь мы сделали замену переменных $\frac{k_\alpha^2}{2m_\alpha} = x^2$, $\lambda - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} = y^2$ в каждом слагаемом. Объединяя (7.38) и (7.39), мы получаем, что

$$\int_{\Omega_\Delta} |\psi_0(k, p; \varepsilon)|^2 dkdp \leq C (|\Delta|^{1/2} + |\Delta|^\mu). \quad (7.40)$$

Интеграл от $|\psi_0(k, p; \varepsilon)|^2$ по остальной части конечной области равномерно ограничен в силу ограниченности всех функций.

Пусть теперь $\lambda = 0$. Покажем, что $\left(\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} + i\varepsilon\right)^{-1}$ равномерно квадратично интегрируема по окрестности начала координат. Имеем

$$\left| \frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} \right| \leq \Delta \quad \left| \frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - i\varepsilon \right|^2 \leq C \quad \int_{|x^2 + y^2| \leq \Delta} x^2 dx y^2 dy \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \leq C |\Delta|. \quad (7.41)$$

Здесь опять сделана замена переменных $\frac{k^2}{2m} = x^2$; $\frac{p^2}{2n} = y^2$.

Наконец, в случае $\lambda < 0$ знаменатель $\left(\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - \lambda - i\varepsilon\right)^{-1}$ несингулярен, так что $\psi_0(k, p; \varepsilon)$ также квадратично интегрируема. Мы показали, что

$$\int_{|E_6 - \Omega_\infty|} |\psi_0(k, p; \varepsilon)|^2 dk dp \leq C.$$

Но в области $E_6 - \Omega_\infty$

$$1 + p^2 + k^2 \leq C.$$

Этим заканчивается доказательство того, что $\psi(k, p; \varepsilon) \in \mathfrak{D}$.

Покажем теперь, что $\psi(k, p; 0)$ удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{H}\psi = \lambda\psi. \quad (7.42)$$

Используем для этого соотношение (7.28). Умножим его на гладкую финитную функцию $f(k, p)$ и проинтегрируем по k и p . Тогда с точностью до $o(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ мы получим

$$(f, \chi_\alpha(\varepsilon) + \mathbf{V}_\alpha \mathbf{R}_0(\lambda + i\varepsilon) \sum_\beta \chi_\beta(\varepsilon)) = o(1). \quad (7.43)$$

Здесь, в отличие от (7.28), мы явно обозначаем зависимость χ_α от ε . Заметим, что

$$\mathbf{R}_0(\lambda + i\varepsilon) \sum_\beta \chi_\beta(\varepsilon) = \psi(\varepsilon).$$

Суммируя (7.43) по α , мы получим, что

$$[(\mathbf{H}_0 + \mathbf{V}_{23} + \mathbf{V}_{31} + \mathbf{V}_{12} - \lambda)f, \psi(\varepsilon)] = o(1), \quad (7.44)$$

причем можно считать, что $f, \mathbf{H}_0 f, \mathbf{V}_\alpha f, \alpha = 23, 31, 12$ — функции из класса $\mathfrak{M}(\theta, \mu)$. Заметим теперь, что для любой $f(k, p) \in \mathfrak{M}(\theta, \mu)$

$$(f, \psi(\varepsilon)) = (f, \psi(0)) + o(1). \quad (7.45)$$

Действительно, вспоминая определение (7.35) функции $\psi(k, p; \varepsilon)$, мы видим, что в левую часть (7.45) дает вклад несколько сингулярных интегралов, числители в которых гельдеровски непрерывны. Таким образом, мы можем перейти в (7.44) к пределу и получить

$$(f, (\mathbf{H} - \lambda \mathbf{E})\psi(0)) = 0,$$

откуда в силу произвольности f следует (7.42).

Покажем теперь, что $\psi \neq 0$. Действительно, если $\psi(k, p; 0) = 0$, то из (7.43) мы видим, что

$$\int f(k, p) \chi_\alpha(k, p; \lambda + i\varepsilon) dk dp = o(1)$$

для любой гладкой функции $f(k, p)$, и из уравнения, связывающего $\rho_\alpha(k, p)$, $\sigma_\alpha(p_\alpha)$ и $\chi_\alpha(k, p; \lambda \rightarrow i0)$, следует, что $\rho_\alpha(k, p) = 0$ и $\sigma_\alpha(p_\alpha) = 0$, т. е. $\omega = 0$, что противоречит нашему условию.

Таким образом, мы доказали, что если $\lambda \in \Phi^{(+)}$ и $\lambda \neq -x_\alpha^2$, $\alpha = 23, 31, 12$, то уравнение (7.42) имеет нетривиальное решение $\psi \in \mathfrak{D}$, т. е. λ является дискретным собственным значением оператора **H**.

Лемма доказана.

Как следствие леммы 7.11 мы получаем, что множество $\Phi^{(+)}$ счетно.

Лемма 7.12. *Предельными точками для множества $\Phi^{(+)}$ могут служить только точки $-x_\alpha^2$, $\alpha = 23, 31, 12$.*

Доказательство. Будем вести доказательство от противного. Пусть λ_0 — предельная точка множества $\Phi^{(+)}$, причем $\lambda_0 \neq -x_\alpha^2$, $\alpha = 23, 31, 12$. Рассмотрим построенную при доказательстве леммы 7.8 последовательность точек λ_n и решений уравнения (7.16) при $z = \lambda_n + i0$, таких что при $n \rightarrow \infty$, $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$, а ω_n сильно сходятся к элементу ω_0 , являющемуся решением уравнения (7.16) при $z = \lambda_0 + i0$, причем

$$\|\omega_n\|_{\theta, \mu} = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.46)$$

где θ, μ — некоторые показатели, такие что $\theta < \bar{\theta}$ и $\mu < \bar{\mu}$. Ясно, что можно считать, что λ_n сосредоточены на интервале, не содержащем точек $-x_\alpha^2$, $\alpha = 23, 31, 12$. По компонентам $\rho_\alpha^{(n)}(k, p)$ и $\sigma_\alpha^{(n)}(p_\alpha)$ элементов ω_n построим функции $\psi_n(k, p)$ так, как это сделано при доказательстве леммы 7.11. На основании этой леммы, $\psi_n(k, p) \in \mathfrak{D}$ и являются собственными функциями оператора **H** с собственными значениями λ_n и поэтому ортогональны

$$(\psi_0, \psi_n) = \int \psi_0(k, p) \overline{\psi_n(k, p)} dk dp = 0. \quad (7.47)$$

В соотношении (7.47) можно перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$. Действительно, разобьем область интегрирования на бесконечную область Ω_∞ , окрестность сингулярных знаменателей Ω_Δ и остальную область Ω . Интеграл по Ω_∞ можно сделать сколь угодно малым равномерно по n при подходящем выборе Ω_∞ , так как в этой области все $\psi_n(k, p)$ удовлетворяют условию (7.36) при $\theta > \frac{1}{2}$. Интеграл по Ω_Δ также можно сделать сколь угодно малым на основании оценок типа (7.37), (7.40) и (7.41). Наконец, в интеграле по Ω мы можем перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$, используя равномерную сходимость функций, стоящих в числителе $\psi_n(k, p)$ и равномерную ограниченность знаменателей.

Мы получаем, что $(\psi_0, \psi_0) = 0$, откуда следует, что $\omega = 0$, и приходим к противоречию с условием (7.46) при $n = 0$. Таким образом, точка $\lambda_0 \neq -x_\alpha^2$, $\alpha = 23, 31, 12$, не может быть предельной точкой для множества $\Phi^{(+)}$.

Лемма доказана.

Мы рассматривали множество $\Phi^{(+)}$ просто для определенности. Все утверждения, начиная с леммы 7.8, совершенно аналогично доказываются для множества $\Phi^{(-)}$. Обозначим через Φ теоретикомножественную сумму множеств $\Phi^{(+)}$ и $\Phi^{(-)}$.

Объединим полученные выше результаты. Мы доказали следующее утверждение:

Теорема 7.1. *Пусть выполнены условия, сформулированные в начале § 5. Тогда оператор $\mathbf{A}(z)$ при любом z на комплексной плоскости Π_{-x} вместе со всеми своими степенями определен в $\mathfrak{B}(\theta, \mu)$, где $\theta < \bar{\theta}$, $\mu < \bar{\mu}$, на плотном множестве, состоящем из элементов $\omega \in \mathfrak{B}(\theta, \mu')$, $\mu' > \mu$. При $n \geq 5$ оператор $\mathbf{A}^n(z)$ продолжается на все*

$\mathfrak{B}(\theta, \mu)$ как вполне непрерывный оператор, гладко зависящий от z . Множество Φ точек z , при которых однородное уравнение (7.16) имеет нетривиальное решение, сосредоточено на конечном интервале на вещественной оси, счетно, замкнуто и может иметь в качестве предельных точек только точки $-x_\alpha^2$, $\alpha = 23, 31, 12$. Все точки из Φ , за исключением может быть предельных точек, являются точками дискретного спектра оператора $\mathbf{H}$.

Воспользуемся теперь следующим общим утверждением:

Пусть оператор $\mathbf{A}$, определенный в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$ на плотной области $\mathfrak{D}(\mathbf{A})$, удовлетворяет условиям: 1) все степени $\mathbf{A}^n$, $n = 1, 2, \dots$ определены на $\mathfrak{D}(\mathbf{A})$; 2) при $n \geq N$, где N — некоторое число, операторы $\mathbf{A}^n$ продолжаются на все $\mathfrak{B}$ как вполне непрерывные операторы; 3) уравнение

$$\omega = \mathbf{A}\omega$$

не имеет нетривиальных решений из $\mathfrak{D}(\mathbf{A})$. Тогда, если $\omega_0 \in \mathfrak{D}(\mathbf{A})$, то уравнение

$$\omega = \omega_0 + \mathbf{A}\omega$$

имеет единственное решение $\omega \in \mathfrak{B}$.

В случае, когда оператор $\mathbf{A}$ ограничен, сформулированное утверждение следует из известной теоремы С. М. Никольского [8]. Почти дословно повторяя доказательство этой последней теоремы, приведенное, например, в [9] или [10], мы можем доказать сформулированное выше более общее утверждение.

Обозначим через Π'_{-x^2} комплексную плоскость Π_{-x^2} с вырезанными окрестностями точек из Φ . Из теоремы 7.1 и сформулированного выше утверждения вытекает

Теорема 7.2. Пусть выполнены условия теоремы 7.1 и $\omega_0 \in \mathfrak{B}(\theta, \mu)$. Тогда уравнение

$$\omega(z) = \omega_0 + \mathbf{A}(z)\omega(z)$$

при всех z из Π'_{-x^2} имеет единственное решение $\omega(z) \in \mathfrak{B}(\theta_1, \mu_1)$, где $\theta_1 < \min(\bar{\theta}, \theta)$, $\mu_1 < \min(\bar{\mu}, \mu)$, причем

$$\|\omega(z)\|_{\theta_1, \mu_1} \leq C(|z|),$$

$$\|\omega(z + \Delta) - \omega(z)\|_{\theta_1, \mu_1} \leq C(|z|)|\Delta|^{\delta}, \quad \delta < \bar{\mu} - \mu_1.$$

Константы $C(|z|)$ при $|z| \rightarrow \infty$ растут не быстрее некоторой степени $|z|$.

§ 8. ТЕОРЕМА РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОПЕРАТОРА $\mathbf{h}$

В § 4 было предположено, что дискретный спектр оператора $\mathbf{h}$ состоит из единственного собственного значения, отрицательного и невырожденного. В настоящем параграфе будет охарактеризован непрерывный спектр оператора $\mathbf{h}$.

Разложим оператор $\mathbf{h}$ в сумму

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_d + \mathbf{h}_c, \quad (8.1)$$

где $\mathbf{h}_d$ — одномерный оператор

$$\mathbf{h}_d f(k) = -x^2(f, \psi)\psi(k), \quad (8.2)$$

представляющий собой инвариантную часть $\mathbf{h}$ в подпространстве дискретного спектра. Точное утверждение относительно непрерывного спектра дается следующей теоремой, которая будет доказана в этом параграфе:

Теорема 8.1. Оператор $\mathbf{h}_0$, рассмотренный в подпространстве $\mathfrak{h}_0$, ортогональном к собственному элементу $\psi(k)$, унитарно эквивалентен оператору $\mathbf{h}_0$, т. е. существует изометрический оператор $\mathbf{u}$, такой что выполняются соотношения

$$\mathbf{u}^* \mathbf{u} = \mathbf{e}; \quad \mathbf{u} \mathbf{u}^* = \mathbf{e} - \mathbf{p}; \quad \mathbf{h} \mathbf{u} = \mathbf{u} \mathbf{h}_0. \quad (8.3)$$

Здесь $\mathbf{p}$ — проектор на элемент ψ .

Ниже мы построим в явном виде оператор $\mathbf{u}$, обладающий свойствами (8.3), и тем самым докажем теорему 8.1.

Пусть $\mathfrak{d}_0$ — плотное в $\mathfrak{h}$ множество гладких и финитных функций $f(k)$. Для любой $f(k) \in \mathfrak{d}_0$ имеет смысл интеграл

$$g(k; \varepsilon_1, \varepsilon_2; f) = \int \frac{t \left(k, k', \frac{k'^2}{2m} + i\varepsilon_1 \right)}{\frac{k^2}{2m} - \frac{k'^2}{2m} - i\varepsilon_2} f(k') dk'. \quad (8.4)$$

Лемма 8.1. Пусть $f(k) \in \mathfrak{d}_0$. Тогда для $g(k; \varepsilon_1, \varepsilon_2; f)$ справедливы оценки

$$|g(k; \varepsilon_1, \varepsilon_2; f)| \leq C(1 + |k|)^{-(1+\theta_0)};$$

$|g(k; \varepsilon'_1, \varepsilon'_2; f) - g(k; \varepsilon_1, \varepsilon_2; f)| \leq C(1 + |k|)^{-(1+\theta_0)} [|\varepsilon'_1 - \varepsilon_1|^\mu + |\varepsilon'_2 - \varepsilon_2|^\mu]$, равномерные по $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon'_1, \varepsilon'_2$, если ε_1 и ε'_1 , так же как ε_2 и ε'_2 , неотрицательны или неположительны одновременно.

Доказательство следует из оценок (4.34) и леммы о сингулярных интегралах.

Из леммы 8.1 следует, что на $\mathfrak{d}_0$ мы можем рассмотреть оператор

$$\mathbf{k}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) f(k) = g(k; \varepsilon_1, \varepsilon_2; f), \quad (8.5)$$

действующий в $\mathfrak{h}$, причем $\mathbf{k}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ непрерывен на $\mathfrak{d}_0$ по ε_1 и ε_2 , изменяющимся в промежутках $[-1, 0]$ или $[0, 1]$ в отдельности. Введем следующие операторы:

$$\mathbf{u}^{(+)} = \mathbf{e} - \mathbf{k}(-0, -0); \quad \mathbf{u}^{(-)} = \mathbf{e} - \mathbf{k}(+0, +0). \quad (8.6)$$

Лемма 8.2. Операторы $\mathbf{u}^{(+)}$ и $\mathbf{u}^{(-)}$ изометричны, т. е.

$$\mathbf{u}^{(+)*} \mathbf{u}^{(+)} = \mathbf{e}; \quad \mathbf{u}^{(-)*} \mathbf{u}^{(-)} = \mathbf{e}. \quad (8.7)$$

Для доказательства мы воспользуемся тождеством (2.17), полученным в § 2, записав его в виде

$$\frac{t(k, k', z_1)}{z_2 - z_1} - \frac{t(k, k', z_2)}{z_2 - z_1} = \int \frac{t(k, q, z_1)}{\frac{q^2}{2m} - z_1} \frac{t(q, k', z_2)}{\frac{q^2}{2m} - z_2} dq. \quad (8.8)$$

Положим в (8.8)

$$z_1 = \frac{k^2}{2m} - i\varepsilon, \quad z_2 = \frac{k'^2}{2m} + i\varepsilon,$$

так что

$$z_2 - z_1 = -\frac{k^2}{2m} + \frac{k'^2}{2m} + 2i\varepsilon,$$

умножим (8.8) на $f(k') \overline{f(k)}$, где $f \in \mathfrak{d}_0$ и $f' \in \mathfrak{d}_0$, и проинтегрируем по k и k' . При $\varepsilon \neq 0$ интегралы сходятся абсолютно, так что мы можем инте-

гировать в любом порядке. Используя свойство симметрии ядра $t(k, k', z)$ [см. (2.15)]

$$t(k, k', z) = \overline{t(k', k, z)} \quad (8.9)$$

и определение (8.4), (8.5), мы можем переписать полученное равенство в следующем виде:

$$(\mathbf{k}(\varepsilon, 2\varepsilon)f, f') + (f, \mathbf{k}(\varepsilon, 2\varepsilon)f') = (\mathbf{k}(\varepsilon, \varepsilon)f, \mathbf{k}(\varepsilon, \varepsilon)f'). \quad (8.10)$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$ или $\varepsilon \rightarrow -0$, мы получаем отсюда в терминах операторов $\mathbf{u}^{(-)}$ и $\mathbf{u}^{(+)}$

$$(\mathbf{u}^{(\pm)}f, \mathbf{u}^{(\pm)}f') = (f, f'). \quad (8.11)$$

Из (8.11) следует, что операторы $\mathbf{u}^{(\pm)}$ ограничены и поэтому могут быть при замыкании продолжены на все пространство $\mathfrak{h}$, причем (8.11) при этом сохраняется.

Лемма доказана.

Лемма 8.3. Пусть $\text{Im } z \neq 0$. Имеет место соотношение

$$\mathbf{r}(z)\mathbf{u}^{(\pm)} = \mathbf{u}^{(\pm)}\mathbf{r}_0(z). \quad (8.12)$$

Для доказательства используем опять тождество (8.8), положив в нем $z_1 = z$ и $z_2 = \frac{k'^2}{2m} + i\varepsilon$, так что

$$z_2 - z_1 = \frac{k'^2}{2m} - z + i\varepsilon.$$

Умножим обе части (8.8) на $f(k') \in \mathfrak{d}_0$ и проинтегрируем по k' . При этом знаменатель во втором слагаемом в левой части (8.8) перестроим следующим образом:

$$\frac{1}{\frac{k'^2}{2m} - z + i\varepsilon} = -\frac{1}{\frac{k^2}{2m} - \frac{k'^2}{2m} - i\varepsilon} + \left(\frac{k^2}{2m} - z\right) \frac{1}{\frac{k^2}{2m} - \frac{k'^2}{2m} - i\varepsilon} \frac{1}{\frac{k'^2}{2m} - z + i\varepsilon}.$$

В терминах введенных обозначений мы можем полученное равенство записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(z)\mathbf{r}_0(z - i\varepsilon)f + \mathbf{k}(\varepsilon, \varepsilon)f - (\mathbf{h}_0 - z\varepsilon)\mathbf{k}(\varepsilon, \varepsilon)\mathbf{r}_0(z - i\varepsilon)f = \\ = \mathbf{t}(z)\mathbf{r}_0(z)\mathbf{k}(\varepsilon, \varepsilon)f. \end{aligned}$$

Умножим обе части на $\mathbf{r}_0(z)$, добавим к ним $\mathbf{r}_0(z)f$ и сгруппируем члены подходящим образом. Мы получим

$$\begin{aligned} [\mathbf{r}_0(z) - \mathbf{r}_0(z)\mathbf{t}(z)\mathbf{r}_0(z - i\varepsilon)]f - [\mathbf{r}_0(z) - \mathbf{r}_0(z)\mathbf{t}(z)\mathbf{r}_0(z)]\mathbf{k}(\varepsilon, \varepsilon)f = \\ = [\mathbf{r}_0(z) - \mathbf{k}(\varepsilon, \varepsilon)\mathbf{r}_0(z - i\varepsilon)]f. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow \mp 0$ и используя выражение (2.10) для $\mathbf{r}(z)$ через $\mathbf{t}(z)$ и определение (8.6), мы можем переписать (8.13) в виде

$$\mathbf{r}(z)\mathbf{u}^{(\pm)}f = \mathbf{u}^{(\pm)}\mathbf{r}_0(z)f. \quad (8.14)$$

В силу плотности $\mathfrak{d}_0$ в $\mathfrak{h}$ и ограниченности всех операторов в (8.14) мы заключаем, что это равенство справедливо для всех $f \in \mathfrak{h}$.

Лемма доказана.

Следствие. Для любой ограниченной функции $\varphi(x)$, $-\infty < x < \infty$ имеет место соотношение

$$\varphi(\mathbf{h})\mathbf{u}^{(\pm)} = \mathbf{u}^{(\pm)}\varphi(\mathbf{h}_0). \quad (8.15)$$

Заметим, что если формально рассмотреть „ядра“ операторов $u^{(\pm)}$ и записать соотношение (8.15) в терминах этих ядер для случая $\varphi(x) = x$, мы получим

$$\frac{k^2}{2m} u^{(\pm)}(k, k^{(0)}) + \int v(k - k') u^{(\pm)}(k', k^{(0)}) dk' = \frac{k^{(0)^2}{2m} u^{(\pm)}(k, k^{(0)}).$$

Мы видим, что ядра $u^{(\pm)}(k, k^{(0)})$, которые можно рассматривать как обобщенные функции

$$u^{(\pm)}(k, k^{(0)}) = \delta(k - k^{(0)}) - \frac{t\left(k, k^{(0)}, \frac{k^{(0)^2}{2m} \mp i0\right)}{\frac{k^2}{2m} - \frac{k^{(0)^2}{2m} \pm i0}, \quad (8.16)$$

являются собственными функциями непрерывного спектра оператора $\mathbf{h}$. Соотношение (8.7) можно назвать условием ортогональности этих функций. В координатном представлении, т. е. после преобразования Фурье по переменной k , функции $u^{(\pm)}(k, k^{(0)})$ становятся обычными функциями $\psi^{(\pm)}(x, k^{(0)})$, которые удовлетворяют уравнению

$$-\frac{1}{2m} \nabla^2 \psi^{(\pm)}(x, k^{(0)}) + v(x) \psi^{(\pm)}(x, k^{(0)}) = \frac{k^{(0)^2}{2m} \psi^{(\pm)}(x, k^{(0)})$$

и при больших $|x|$ имеют асимптотику

$$\psi^{(\pm)}(x, k^{(0)}) = \exp\{i(x, k^{(0)})\} + f^{(\pm)}\left(\frac{x}{|x|}, k^{(0)}\right) \frac{\exp\{\mp i|k^{(0)}||x|\}}{|x|},$$

где

$$f^{(\pm)}\left(\frac{x}{|x|}, k^{(0)}\right) = 2m2\pi^2 t\left(|k^{(0)}| \frac{x}{|x|}, k^{(0)}, \frac{k^{(0)^2}{2m} \mp i0\right).$$

Таким образом, операторы $u^{(\pm)}$ тесно связаны с решениями задачи рассеяния для оператора $\mathbf{h}$ в стационарной постановке.

Нетрудно убедиться, что ядра $u^{(\pm)}(k, k^{(0)})$ можно получить также и на основании второго рецепта, приведенного во введении. Именно, если мы свернем ядро резольвенты $\mathbf{r}(z)$ с собственной функцией оператора $\mathbf{h}_0$, т. е. $\delta(k - k^{(0)})$, и сосчитаем вычет при $z = \frac{k^{(0)^2}{2m}$, то получим

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \pm 0} -i\varepsilon \int r\left(k, k', \frac{k^{(0)^2}{2m} + i\varepsilon\right) \delta(k' - k^{(0)}) dk' &= \lim_{z \rightarrow \pm 0} -i\varepsilon r\left(k, k^{(0)}, \frac{k^{(0)^2}{2m} + i\varepsilon\right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow \pm 0} \left\{ \frac{-i\varepsilon \delta(k - k^{(0)})}{\frac{k^2}{2m} - \frac{k^{(0)^2}{2m} - i\varepsilon} - \frac{1}{\frac{k^2}{2m} - \frac{k^{(0)^2}{2m} - i\varepsilon} t\left(k, k^{(0)}, \frac{k^{(0)^2}{2m} + i\varepsilon\right) \frac{-i\varepsilon}{-i\varepsilon}} \right\} = \\ &= \delta(k - k^{(0)}) - \frac{t\left(k, k^{(0)}, \frac{k^{(0)^2}{2m} \pm i0\right)}{\frac{k^2}{2m} - \frac{k^{(0)^2}{2m} \mp i0}, \end{aligned}$$

т. е. выражение (8.16). Мы использовали здесь следующее выражение для ядра оператора $\mathbf{r}(z)$:

$$r(k, k', z) = \frac{\delta(k - k')}{\frac{k^2}{2m} - z} - \frac{1}{\frac{k^2}{2m} - z} t(k, k', z) \frac{1}{\frac{k'^2}{2m} - z},$$

которое является записью соотношения (2.10) в ядрах соответствующих операторов. Подчеркнем еще раз, что приведенные рассуждения имеют эвристический характер.

Перейдем к доказательству полноты введенных собственных функций. Для этого свяжем операторы $u^{(\pm)}$ со спектральной функцией оператора h . Естественно воспользоваться для этого известной связью между резольventой и спектральной функцией самосопряженного оператора. Спектральную функцию оператора h обозначим через $e(\lambda)$. Справедливо соотношение

$$\int_{\mu}^y d(e(\lambda)f, f') = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mu}^y ([r(\lambda + i\varepsilon) - r(\lambda - i\varepsilon)]f, f') d\lambda. \quad (8.17)$$

Введем удобное представление для подынтегрального выражения в правой части. В тождестве Гильберта

$$r(\lambda + i\varepsilon) - r(\lambda - i\varepsilon) = 2i\varepsilon r(\lambda - i\varepsilon) r(\lambda + i\varepsilon)$$

представим правую часть через $r_0(z)$ и $t(z)$. Мы получим

$$r(\lambda + i\varepsilon) - r(\lambda - i\varepsilon) = [e - r_0(\lambda - i\varepsilon)t(\lambda - i\varepsilon)] \times \\ \times [r_0(\lambda + i\varepsilon) - r_0(\lambda - i\varepsilon)][e - t(\lambda + i\varepsilon)r_0(\lambda + i\varepsilon)]. \quad (8.18)$$

Лемма 8.4. Пусть $f \in \mathfrak{D}_0$. Тогда

$$g(k; z; f) = f(k) - \int \frac{t(k, k', z)}{k'^2 - \frac{2m}{2m} - z} f(k') dk' \quad (8.19)$$

удовлетворяет оценкам

$$|g(k; z; f)| \leq C(1 + |k|)^{-(1-\theta_0)}; \\ |g(k + h; z + \Delta; f) - g(k; z; f)| \leq \\ \leq C(1 + |k|)^{-(1+\theta_0)} [|h|^\mu + |\Delta|^\mu]; \quad \mu < \frac{1}{2}$$

при всех $z \in \Pi_0$ за исключением окрестности точки $z = -x^2$.

Доказательство следует из оценок (4.33), (4.34) и леммы о сингулярных интегралах.

Лемма 8.5. Пусть $f(k) \in \mathfrak{D}_0$ и $f'(k) \in \mathfrak{D}_0$. Тогда $(e(\lambda)f, f')$ непрерывно дифференцируема по λ при $\lambda > 0$ и

$$\frac{d}{d\lambda} (e(\lambda)f, f') = \\ = \int g(k; \frac{k^2}{2m} \pm i0; f) \overline{g(k, \frac{k^2}{2m} \pm i0; f')} \delta(\frac{k^2}{2m} - \lambda) dk. \quad (8.20)$$

Для доказательства перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow \pm 0$ в формуле

$$([r(\lambda + i\varepsilon) - r(\lambda - i\varepsilon)]f, f') = \\ = \int g(k; \lambda + i\varepsilon; f) \frac{2i\varepsilon}{(\frac{k^2}{2m} - \lambda)^2 + \varepsilon^2} \overline{g(k, \lambda + i\varepsilon; f')} dk, \quad (8.21)$$

которая непосредственно следует из (8.18)–(8.19).

На основании оценок для функции $g(k; z; f)$, доказанных в лемме 8.4, мы можем утверждать, что предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ правой части этого соотношения существует и совпадает с выражением в правой части (8.20),

которое является непрерывной функцией λ . Дифференцируя в (8.17) по верхнему пределу и используя полученные соотношения, мы приходим к (8.20).

Лемма доказана.

Лемма 8.6. *Имеет место соотношение*

$$\int_{-\infty}^0 d\mathbf{e}(\lambda) = \mathbf{p}. \quad (8.22)$$

Доказательство. Мы можем перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$ в формуле (8.21) при любом $\lambda < 0$, $\lambda \neq -x^2$, и при этом получим, что

$$\frac{d\mathbf{e}(\lambda)}{d\lambda} = 0; \quad \lambda < 0, \quad \lambda \neq -x^2. \quad (8.23)$$

В точке $\lambda = -x^2$ оператор $\mathbf{h}$ имеет дискретное собственное значение, и, следовательно,

$$\mathbf{e}(-x^2 + 0) - \mathbf{e}(-x^2 - 0) = \mathbf{p}. \quad (8.24)$$

Формула (8.22) следует из (8.23) и (8.24).

Лемма доказана.

Лемма 8.7. *Имеет место соотношение*

$$\mathbf{u}^{(\pm)} \mathbf{u}^{(\pm)*} = \mathbf{e} - \mathbf{p}. \quad (8.25)$$

Доказательство. Покажем сначала, что если $f \in \mathfrak{d}_0$, то

$$g\left(k; \frac{k^2}{2m} \pm i0; f\right) = \mathbf{u}^{(\pm)*} f(k). \quad (8.26)$$

Действительно, из определения $\mathbf{k}(\varepsilon, \varepsilon)$ имеем для любой $f'(k) \in \mathfrak{d}_0$

$$\begin{aligned} (f, [\mathbf{e} - \mathbf{k}(\varepsilon, \varepsilon)]f') &= (f, f') - \int f(k) \left[\int \frac{t\left(k, k', \frac{k^2}{2m} + i\varepsilon\right)}{\frac{k^2}{2m} - \frac{k'^2}{2m} - i\varepsilon} f'(k') dk' \right] dk = \\ &= (f, f') - \int \overline{f'(k)} \left[\int \frac{t\left(k, k', \frac{k^2}{2m} - i\varepsilon\right)}{\frac{k^2}{2m} - \frac{k'^2}{2m} + i\varepsilon} f(k') dk' \right] dk = \\ &= \int g\left(k; \frac{k^2}{2m} - i\varepsilon; f\right) \overline{f'(k)} dk. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Мы сделали здесь замену порядков интегрирования, которая законна при $\varepsilon \neq 0$, и использовали (8.9). Переходя в (8.27) к пределу при $\varepsilon \rightarrow \pm 0$, получаем требуемое соотношение (8.26). Проинтегрируем теперь (8.20) по λ в пределах от 0 до ∞ . Учитывая (8.26) и (8.22), мы получим

$$\int_0^\infty d(\mathbf{e}(\lambda) f, f') = (\mathbf{u}^{(\pm)*} f, \mathbf{u}^{(\pm)*} f') = ([\mathbf{e} - \mathbf{p}] f, f'),$$

т. е. соотношение (8.25) справедливо.

Из полученных результатов вытекает следующая теорема:

Теорема 8.2. *Любая функция $f \in \mathfrak{h}$ единственным образом представляется в виде*

$$f(k) = c\psi(k) + \mathbf{u}^{(\pm)} f^{(\pm)}(k), \quad (8.28)$$

причем для любой ограниченной функции $\varphi(x)$, $-\infty < x < \infty$

$$\varphi(\mathbf{h})f = \varphi(-x^2)c\psi + \mathbf{u}^{(\pm)}\varphi(\mathbf{h}_0)f^{(\pm)}. \quad (8.29)$$

Коэффициент c и функции $f^{(\pm)}$ определяются по формулам

$$c = (f, \psi); \quad f^{(\pm)} = \mathbf{u}^{(\pm)*}f \quad (8.30)$$

и

$$\|f\|^2 = |c|^2 + \|f^{(\pm)}\|^2. \quad (8.31)$$

Приведенные формулы представляют собой простую и точную запись теоремы разложения по собственным функциям оператора $\mathbf{h}$. Формула (8.31) дает равенство Парсеваля.

Теорема 8.1 следует из теоремы 8.2. В качестве оператора $\mathbf{u}$ в формулировке теоремы 8.1 мы можем взять $\mathbf{u}^{(+)}$ или $\mathbf{u}^{(-)}$. Заметим, что всякий оператор вида

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(+)}\mathbf{m}, \quad (8.32)$$

где $\mathbf{m}$ — унитарный оператор, коммутирующий с $\mathbf{h}_0$, также обладает свойствами, сформулированными в этой теореме. Оператор $\mathbf{u}^{(-)}$ может быть выражен через $\mathbf{u}^{(+)}$ по формуле типа (8.32). Покажем это в заключении настоящего параграфа.

Рассмотрим оператор

$$\mathbf{s} = \mathbf{u}^{(+)*}\mathbf{u}^{(-)}. \quad (8.33)$$

Лемма 8.8. Оператор $\mathbf{s}$ — унитарный и коммутирует с произвольной ограниченной функцией оператора $\mathbf{h}_0$. Имеет место соотношение

$$\mathbf{u}^{(-)} = \mathbf{u}^{(+)}\mathbf{s}. \quad (8.34)$$

Доказательство. Покажем сначала, что

$$\mathbf{p}\mathbf{u}^{(+)} = \mathbf{p}\mathbf{u}^{(-)} = 0. \quad (8.35)$$

Действительно, мы можем записать произведение $\mathbf{u}\mathbf{u}^*\mathbf{u}$ двумя способами (для сокращения записи мы опускаем знаки $\pm$)

$$\mathbf{u}\mathbf{u}^*\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{u}^*\mathbf{u}) = \mathbf{u};$$

$$\mathbf{u}\mathbf{u}^*\mathbf{u} = (\mathbf{u}\mathbf{u}^*)\mathbf{u} = (\mathbf{e} - \mathbf{p})\mathbf{u},$$

откуда немедленно следует (8.35). Имеем теперь

$$\mathbf{s}^*\mathbf{s} = \mathbf{u}^{(-)*}\mathbf{u}^{(+)}\mathbf{u}^{(+)*}\mathbf{u}^{(-)} = \mathbf{u}^{(-)*}(\mathbf{e} - \mathbf{p})\mathbf{u}^{(-)} = \mathbf{e};$$

$$\mathbf{s}\mathbf{s}^* = \mathbf{u}^{(+)*}\mathbf{u}^{(-)}\mathbf{u}^{(-)*}\mathbf{u}^{(+)} = \mathbf{u}^{(+)*}(\mathbf{e} - \mathbf{p})\mathbf{u}^{(+)} = \mathbf{e},$$

и таким образом оператор $\mathbf{s}$ унитарен.

Используем теперь соотношение (8.15) в форме

$$\varphi(\mathbf{h})\mathbf{u}^{(-)} = \mathbf{u}^{(-)}\varphi(\mathbf{h}_0);$$

$$\mathbf{u}^{(+)*}\varphi(\mathbf{h}) = \varphi(\mathbf{h}_0)\mathbf{u}^{(+)*}.$$

Умножая первое из этих равенств на $\mathbf{u}^{(+)*}$ слева, а второе на $\mathbf{u}^{(-)}$ справа и вычитая, мы получим

$$\mathbf{s}\varphi(\mathbf{h}_0) = \varphi(\mathbf{h}_0)\mathbf{s}, \quad (8.36)$$

т. е. требуемое соотношение коммутации.

Наконец (8.34) следует из определения (8.33) оператора $\mathbf{s}$ и свойства (8.35).

Лемма доказана.

Выразим теперь оператор s через ядро $t(k, k', z)$. Для этого положим в (8.8)

$$z_1 = \frac{k^2}{2m} + 2i\varepsilon, \quad z_2 = \frac{k'^2}{2m} + i\varepsilon,$$

так что

$$z_2 - z_1 = \frac{k'^2}{2m} - \frac{k^2}{2m} - i\varepsilon,$$

умножим полученное равенство на $f(k')f'(k)$ и проинтегрируем его по k и k' .

Мы получим

$$(f, \mathbf{k}(-2\varepsilon, -\varepsilon)f') + (\mathbf{k}(\varepsilon, -\varepsilon)f, f') = (\mathbf{k}(\varepsilon, \varepsilon)f, \mathbf{k}(-2\varepsilon, -2\varepsilon)f'),$$

откуда после перехода к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$ следует

$$(\mathbf{u}^{(-)}f, \mathbf{u}^{(+)}f') = (f, f') + (\mathbf{k}(+0, -0)f, f') - (\mathbf{k}(+0, +0)f, f'),$$

так что

$$sf = f + [\mathbf{k}(+0, -0) - \mathbf{k}(+0, +0)]f. \quad (8.37)$$

На основании определения (8.4), (8.5) оператора $\mathbf{k}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ мы можем записать (8.37) для $f \in \mathfrak{D}_0$ в следующем виде:

$$sf = f(k) - 2\pi i \int t\left(k, k', \frac{k^2}{2m} + i0\right) \delta\left(\frac{k^2}{2m} - \frac{k'^2}{2m}\right) f(k') dk'.$$

Таким образом, ядро оператора s тесно связано с амплитудой рассеяния $f(n, k)$.

§ 9. ТЕОРЕМА РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОПЕРАТОРА $\mathbf{H}$

В настоящем параграфе мы охарактеризуем непрерывный спектр оператора $\mathbf{H}$. Аналогично тому, как это было сделано в § 8 для оператора $\mathbf{h}$, мы покажем, что инвариантная часть оператора $\mathbf{H}$ в подпространстве, ортогональном собственным функциям дискретного спектра, унитарно эквивалентна некоторому оператору $\hat{\mathbf{H}}$, спектр которого легко описывается.

Прежде чем доказывать точные утверждения, приведем несколько соображений, имеющих эвристический характер. Как уже отмечалось во введении, мы не можем взять в качестве оператора $\hat{\mathbf{H}}$ оператор $\mathbf{H}_0$ или какой-нибудь из операторов $\mathbf{H}_\alpha$, $\alpha = 23, 31, 12$. Так, каждый из перечисленных операторов имеет меньше собственных функций, чем оператор $\mathbf{H}$. По идее стационарной теории рассеяния последний оператор должен иметь собственные функции, соответствующие как собственным функциям оператора $\mathbf{H}_0$, т. е. функциям

$$\Phi_0(k, p; k^{(0)}, p^{(0)}) = \delta(k - k^{(0)}) \delta(p - p^{(0)}),$$

так и функциям

$$\Phi_\alpha(k, p; p_\alpha^{(0)}) = \delta(p_\alpha - p_\alpha^{(0)}) \psi_\alpha(k_\alpha), \quad \alpha = 23, 31, 12.$$

Функции $\Phi_0(k, p; k^{(0)}, p^{(0)})$ описывают асимптотическое свободное движение всех трех частиц, в асимптотическом состоянии, описываемом функцией $\Phi_{23}(k, p; p_1^{(0)})$, частицы 2 и 3 образуют связанную пару, и аналогичный смысл имеют функции $\Phi_{31}(k, p; p_2^{(0)})$ и $\Phi_{12}(k, p; p_3^{(0)})$.

Зная резольвенту $\mathbf{R}(z)$ оператора $\mathbf{H}$, мы можем найти подходящие собственные функции этого оператора на основании рецепта, уже проиллюстрированного во введении и § 8. Пусть $\mathcal{R}(k, p; k', p'; z)$ — ядро резольвенты оператора $\mathbf{H}$. Тогда функции

$$\Psi_0^{(\pm)}(k, p; k^{(0)}, p^{(0)}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \mp 0} -i\varepsilon \mathcal{R}\left(k, p; k^{(0)}, p^{(0)}; \frac{k^{(0)2}}{2m} + \frac{p^{(0)2}}{2n} + i\varepsilon\right);$$

$$\Psi_\alpha^{(\pm)}(k, p; p_\alpha^{(0)}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \pm 0} -i\varepsilon \int \mathcal{R}\left(k, p; k_\alpha, p_\alpha^{(0)}; -x_\alpha^2 + \frac{p_\alpha^{(0)2}}{2n_\alpha} + i\varepsilon\right) \psi_\alpha(k'_\alpha) dk'_\alpha$$

должны образовывать полную систему собственных функций непрерывного спектра оператора $\mathbf{H}$. Посмотрим, как выражаются эти функции в терминах ядер $\mathcal{M}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z)$.

Комбинируя (3.5) и (3.8), мы имеем соотношение

$$\mathbf{R}(z) = \mathbf{R}_0(z) - \mathbf{R}_0(z) \sum_{\alpha, \beta} \mathbf{M}_{\alpha\beta}(z) \mathbf{R}_0(z), \quad (9.1)$$

которое в терминах ядер участвующих здесь операторов записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(k, p; k', p'; z) &= \delta(k - k') \delta(p - p') \left(\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - z \right)^{-1} - \\ &- \left(\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - z \right)^{-1} \sum_{\alpha, \beta} \mathcal{M}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z) \left(\frac{k'^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} - z \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Из (9.2) немедленно вытекает следующее выражение для функций $\Psi_0^{(\pm)}(k, p; k^{(0)}, p^{(0)})$:

$$\begin{aligned} \Psi_0^{(\pm)}(k, p; k^{(0)}, p^{(0)}) &= \delta(k - k^{(0)}) \delta(p - p^{(0)}) - \\ &- \left(\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - \frac{k^{(0)2}}{2m} - \frac{p^{(0)2}}{2n} \pm i0 \right)^{-1} \times \\ &\times \sum_{\alpha, \beta} \mathcal{M}_{\alpha\beta}\left(k, p; k^{(0)}, p^{(0)}; \frac{k^{(0)2}}{2m} + \frac{p^{(0)2}}{2n} \mp i0\right). \end{aligned} \quad (9.3)$$

Умножим (9.2) на $\psi_\alpha(k_\alpha)$ и проинтегрируем по k_α . Учтем, что

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z) &= \\ &= t_\alpha\left(k_\alpha, k'_\alpha, z - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha}\right) \delta(p_\alpha - p'_\alpha) \delta_{\alpha\beta} + \mathcal{W}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z). \end{aligned} \quad (9.4)$$

На основании формул типа (5.25) следует ожидать, что

$$\int \mathcal{W}_{\alpha\beta}\left(k, p; k', p'; -x_\gamma^2 + \frac{p_\gamma^{(0)2}}{2n_\gamma} + i\varepsilon\right) \frac{\psi_\gamma(k'_\gamma)}{\frac{k'^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} + x_\gamma^2 - \frac{p_\gamma^{(0)2}}{2n_\gamma} - i\varepsilon} dk'_\gamma$$

при $\beta = \gamma$ имеет сингулярность типа $\frac{1}{\varepsilon}$, в то время как при $\beta \neq \gamma$ такой сингулярности не возникает. Отсюда следует, что функции $\Psi_\alpha^{(\pm)}(k, p; p_\alpha^{(0)})$ представляются в виде

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha^{(\pm)}(k, p; p_\alpha^{(0)}) &= \psi_\alpha(k_\alpha) \delta(p_\alpha - p_\alpha^{(0)}) - \\ &- \left(\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} + x_\alpha^2 - \frac{p_\alpha^{(0)2}}{2n_\alpha} \pm i0 \right)^{-1} \sum_\beta \mathcal{X}_{\beta\alpha}\left(k, p; p_\alpha^{(0)}; -x_\alpha^2 + \frac{p_\alpha^{(0)2}}{2n_\alpha} \mp i0\right). \end{aligned} \quad (9.5)$$

Здесь, в отличие от § 5, через $\mathcal{K}_{\alpha\beta}(k, p; p'; z)$ мы обозначили ядра, полученные по формуле типа (5.23) в терминах компонент ядер $\mathcal{W}_{\alpha\beta}$, а не ядер $\tilde{\mathcal{W}}_{\alpha\beta}$. Напомним, что эти два последних ядра отличаются на несколько первых итераций системы (3.20).

Наша задача в настоящем параграфе — придать точный смысл выражениям типа (9.3) и (9.5) и доказать теорему разложения произвольной функции в интеграл по функциям $\Psi_0^{(\pm)}(k, p; k^{(0)}, p^{(0)})$ и $\Psi_\alpha^{(\pm)}(k, p; p_\alpha^{(0)})$. Так же как и в § 8, мы не будем иметь дела с самими функциями Ψ_0 и Ψ_α , а будем связывать с ними изометрические операторы, приводящие оператор $\hat{\mathbf{H}}$ к диагональному виду.

Переходим к строгому изложению. Начнем с описания оператора $\hat{\mathbf{H}}$. Рассмотрим четыре гильбертовых пространства: $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_{23}, \mathcal{S}_{31}$ и $\mathcal{S}_{12}$. Элементами $\mathcal{S}_0$ являются квадратично интегрируемые функции $f(k, p)$ двух переменных, так что это пространство абсолютно идентично пространству $\mathcal{S}$. Элементами пространств $\mathcal{S}_{23}, \mathcal{S}_{31}$ и $\mathcal{S}_{12}$ являются квадратично интегрируемые функции $f(p)$ одной переменной. Чтобы различать пространства $\mathcal{S}_0$ и $\mathcal{S}$, а также пространства $\mathcal{S}_\alpha, \alpha=23, 31, 12$, с разными индексами между собой, будем снабжать элементы этих пространств и знак скалярного произведения в них соответствующим индексом, так что $f_0(k, p) \in \mathcal{S}_0, f_\alpha(p_\alpha) \in \mathcal{S}_\alpha$, а $(\cdot, \cdot)_0$ и $(\cdot, \cdot)_\alpha$ — скалярное произведение в $\mathcal{S}_0$ и $\mathcal{S}_\alpha$ соответственно.

Обозначим через $\hat{\mathcal{S}}$ ортогональную сумму

$$\hat{\mathcal{S}} = \mathcal{S}_0 \oplus \mathcal{S}_{23} \oplus \mathcal{S}_{31} \oplus \mathcal{S}_{12}. \quad (9.6)$$

Оператор $\hat{\mathbf{H}}$ действует в $\hat{\mathcal{S}}$, причем подпространства $\mathcal{S}_0$ и $\mathcal{S}_\alpha, \alpha=23, 31, 12$, приводят его, так что

$$\hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{H}}_0 \oplus \hat{\mathbf{H}}_{23} \oplus \hat{\mathbf{H}}_{31} \oplus \hat{\mathbf{H}}_{12}, \quad (9.7)$$

где $\hat{\mathbf{H}}_0$ действует в $\mathcal{S}_0$, а $\hat{\mathbf{H}}_\alpha$ — в $\mathcal{S}_\alpha$, причем эти операторы определяются на естественной области определения следующими выражениями:

$$\hat{\mathbf{H}}_0 f_0(k, p) = \left(\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} \right) f_0(k, p); \quad (9.8)$$

$$\hat{\mathbf{H}}_\alpha f_\alpha(p_\alpha) = \left(-\kappa_\alpha^2 + \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} \right) f_\alpha(p_\alpha), \quad \alpha=23, 31, 12. \quad (9.9)$$

Обозначим через $\mathbf{P}_d$ проектор в $\mathcal{S}$ на подпространство $\mathcal{S}_d$, натянутое на собственные функции дискретного спектра оператора $\hat{\mathbf{H}}$. Через $\mathcal{S}_c$ обозначим ортогональное дополнение в $\mathcal{S}$ к подпространству $\mathcal{S}_d$. Подпространство $\mathcal{S}_c$ приводит оператор $\hat{\mathbf{H}}$. Обозначим через $\mathbf{H}_c$ соответствующую инвариантную часть $\hat{\mathbf{H}}$ в $\mathcal{S}_c$. Через $\hat{\mathbf{E}}, \mathbf{E}_0$ и $\mathbf{E}_\alpha$ обозначим единичные операторы в $\hat{\mathcal{S}}, \mathcal{S}_0$ и $\mathcal{S}_\alpha$ соответственно.

В настоящем параграфе будет доказано следующее утверждение:

Теорема 9.1. *Операторы $\mathbf{H}_c$ и $\hat{\mathbf{H}}$ унитарно эквивалентны, так что существует изометрический оператор $\mathbf{U}$ из $\hat{\mathcal{S}}$ в $\mathcal{S}$, такой что выполняются соотношения*

$$\mathbf{U}^* \mathbf{U} = \hat{\mathbf{E}}, \quad \mathbf{U} \mathbf{U}^* = \mathbf{E} - \mathbf{P}_d; \quad \mathbf{H} \mathbf{U} = \mathbf{U} \hat{\mathbf{H}}. \quad (9.10)$$

Для доказательства этой теоремы мы построим в явном виде оператор $\mathbf{U}$, обладающий перечисленными в теореме 9.1 свойствами. В соответствующих выражениях будут участвовать ядра $\mathcal{M}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z)$ операторов $\mathbf{M}_{\alpha\beta}(z)$ и связанные с этими ядрами ядра $\mathcal{W}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z)$. Эти последние ядра являются ядрами типа $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}$. В этом параграфе, в отличие от § 5, мы будем обозначать через $\mathcal{F}_{\alpha\beta}, \mathcal{G}_{\alpha\beta}, \mathcal{Z}_{\alpha\beta}$ и $\mathcal{H}_{\alpha\beta}$ компо-

ненты ядер $\mathcal{W}_{\alpha\beta}$ и через $\mathcal{H}_{\alpha\beta}$ и $\tilde{\mathcal{H}}_{\alpha\beta}$ ядра, построенные по формулам (5.23) и (5.24) в терминах этих компонент.

Введем обозначения

$$\mathcal{L}_{\alpha\beta}(k, p; p'_\beta; z) = \varphi_\alpha(k_\alpha) \delta(p_\alpha - p'_\alpha) \delta_{\alpha\beta} + \mathcal{H}_{\alpha\beta}(k, p; p'_\beta; z); \quad (9.11)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\alpha\beta}(p_\alpha; k', p'; z) = \tilde{\mathcal{H}}_{\alpha\beta}(p_\alpha; k', p'; z) + \delta_{\alpha\beta} \delta(p_\alpha - p'_\alpha) \overline{\varphi_\alpha(k_\alpha)}. \quad (9.12)$$

Повторяя доказательство лемм 5.1 и 5.2, мы можем доказать следующие соотношения:

$$\int \mathcal{M}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z) \frac{\psi_\beta(k'_\beta)}{k'^2 + \frac{p'^2}{2n} - z} dk'_\beta = \mathcal{L}_{\alpha\beta}(k, p; p'_\beta; z) \frac{1}{z + \kappa_\beta^2 - \frac{p_\beta^2}{2n_\beta}}; \quad (9.13)$$

$$\int \frac{\overline{\psi_\alpha(k_\alpha)}}{k^2 + \frac{p^2}{2n} - z} \mathcal{M}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z) dk_\alpha = \frac{1}{z + \kappa_\alpha^2 - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha}} \tilde{\mathcal{L}}_{\alpha\beta}(p_\alpha; k', p'; z). \quad (9.14)$$

Как подсказывают нам наводящие соображения, приведенные в начале этого параграфа, целесообразно рассмотреть следующие выражения:

$$\int \frac{\mathcal{M}_{\alpha\beta}\left(k, p; k', p'; \frac{k'^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} + i\varepsilon_1\right)}{\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - \frac{k'^2}{2m} - \frac{p'^2}{2n} - i\varepsilon_2} f_0(k', p') dk' dp'; \quad (9.15)$$

$$\int \frac{\mathcal{L}_{\alpha\beta}\left(k, p; p'_\beta; -\kappa_\beta^2 + \frac{p_\beta^2}{2n_\beta} + i\varepsilon_1\right)}{\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} + \kappa_\beta^2 - \frac{p_\beta^2}{2n_\beta} - i\varepsilon_2} f_\beta(p'_\beta) dp'_\beta, \quad (9.16)$$

где ε_1 и ε_2 — вещественные параметры [ср. (9.3), (9.5)]. Если $\varepsilon_1 \neq 0$ и $\varepsilon_2 \neq 0$, то выражения (9.15) и (9.16) определяют операторы, действующие из $\mathcal{S}_0$ в $\mathcal{S}$ и из $\mathcal{S}_\beta$ в $\mathcal{S}$ соответственно. Обозначим эти операторы через $\hat{\mathbf{M}}_{\alpha\beta}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ и $\hat{\mathbf{L}}_\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Обозначим через $\mathcal{D}_0$ и $\mathcal{D}_\alpha$ плотные множества в $\mathcal{S}_0$ и $\mathcal{S}_\alpha$, состоящие из функций $f_0(k, p)$ и $f_\alpha(p_\alpha)$, гладких, финитных и исчезающих в окрестностях поверхностей $\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} = \lambda_n$ и $-\kappa_\alpha^2 + \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} = \lambda_n$ соответственно. Здесь λ_n — особые точки оператора $\mathbf{A}(z)$ (см. § 7). В отличие от случая, рассмотренного в § 8, нам не удалось получить оценки для интегралов (9.15) и (9.16), равномерные по ε_1 и ε_2 , меняющимся вплоть до 0. Осложнения связаны с второстепенными особенностями первых итераций системы (3.20), входящих в ядра $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ (ср. § 6). Поэтому мы не можем непосредственно доказать, что операторы $\hat{\mathbf{M}}_{\alpha\beta}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ и $\hat{\mathbf{L}}_\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ имеют сильные пределы на соответствующих плотных множествах, когда $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ и $\varepsilon_2 \rightarrow 0$, и для доказательства этого факта нам придется воспользоваться косвенным методом, описанным ниже.

Пусть $f(k, p) \in \mathcal{M}(\theta, \mu)$ с некоторыми показателями θ и μ , причем $\theta > \frac{1}{2}$. Класс функций $\mathcal{M}(\theta, \mu)$ определен в § 5, и при $\theta > \frac{1}{2}$ функции

$f(k, p)$ из $\mathfrak{M}(\theta, \mu)$ образуют плотное множество в $\mathfrak{S}$. Рассмотрим интегралы

$$m_{\alpha\beta}(k, p; z_1, z_2; f) = \int \mathcal{M}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z_1) \frac{f(k', p')}{\frac{k'^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} - z_2} dk' dp'. \quad (9.17)$$

Из (9.4) и формулы типа (5.3) для ядер $\mathcal{W}_{\alpha\beta}$ следует, что функции $m_{\alpha\beta}(k, p; z_1, z_2; f)$ можно представить в следующем виде:

$$m_{\alpha\beta}(k, p; z_1, z_2; f) = n_{\alpha\beta}(k, p; z_1, z_2; f) + \frac{\varphi_{\alpha}(k_{\alpha}) l_{\alpha\beta}(p_{\alpha}; z_1, z_2; f)}{z_1 + \kappa_{\alpha}^2 - \frac{p_{\alpha}^2}{2n_{\alpha}}}, \quad (9.18)$$

где, в частности,

$$l_{\alpha\beta}(p_{\alpha}; z_1, z_2; f) = \int \mathcal{L}_{\alpha\beta}(p_{\alpha}; k', p'; z_1) \frac{f(k', p')}{\frac{k'^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} - z_2} dk' dp'. \quad (9.19)$$

Лемма 9.1. Пусть $f(k, p) \in \mathfrak{M}(\theta, \mu')$. Тогда $n_{\alpha\beta}(k, p; z_1, z_2; f)$ и $l_{\alpha\beta}(p_{\alpha}; z_1, z_2; f)$ как функции k, p и p_{α} соответственно принадлежат классам $\mathfrak{M}(\theta, \mu)$ и $\mathfrak{N}(\theta, \mu)$, $\mu < \mu'$. При этом оценки типа (5.6)–(5.9) для этих функций равномерны по всем $z_2 \in \Pi_0$ и z_1 из конечной области на плоскости Π_{-2} , не содержащей особых точек λ_n .

Для доказательства можно было бы оценить по отдельности интегралы от всех вкладов в ядро $\mathcal{M}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z)$. Мы поступим несколько по-другому. Рассмотрим интеграл

$$m_{\alpha}^{(0)}(k, p; z_1, z_2; f) = \int t_{\alpha}\left(k_{\alpha}, k'_{\alpha}, z_1 - \frac{p_{\alpha}^2}{2n_{\alpha}}\right) \frac{\delta(p_{\alpha} - p'_{\alpha})}{\frac{k'^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} - z_2} f(k', p') dk' dp'.$$

В соответствии с (4.50) $m_{\alpha}^{(0)}(k, p; z_1, z_2; f)$ представляется в виде

$$m_{\alpha}^{(0)}(k, p; z_1, z_2; f) = n_{\alpha}^{(0)}(k, p; z_1, z_2; f) + \frac{\varphi_{\alpha}(k_{\alpha}) l_{\alpha}^{(0)}(p_{\alpha}; z_2; f)}{z_1 + \kappa_{\alpha}^2 - \frac{p_{\alpha}^2}{2n_{\alpha}}},$$

где

$$n_{\alpha}^{(0)}(k, p; z_1, z_2; f) = \int \hat{t}_{\alpha}\left(k_{\alpha}, k'_{\alpha}, z_1 - \frac{p_{\alpha}^2}{2n_{\alpha}}\right) \frac{\delta(p_{\alpha} - p'_{\alpha})}{\frac{k'^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} - z_2} f(k', p') dk' dp',$$

$$l_{\alpha}^{(0)}(p_{\alpha}; z_2; f) = \int \overline{\varphi_{\alpha}(k'_{\alpha})} \frac{\delta(p_{\alpha} - p'_{\alpha})}{\frac{k'^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} - z_2} f(k', p') dk' dp'.$$

Интегралы такого вида уже рассматривались в § 7. Используя оценки, доказанные в лемме 7.1, мы можем рассмотреть совокупность функций

$n_{\alpha}^{(0)}(k, p; z_1, z_2; f) \delta_{\alpha\beta}$ и $l_{\alpha}^{(0)}(p_{\alpha}; z_2; f) \delta_{\alpha\beta}$ как компоненты элемента $\omega_{\beta}^{(0)}(z_1, z_2; f) \in \mathfrak{B}(\theta, \mu)$, удовлетворяющего оценкам

$$\|\omega_{\beta}^{(0)}(z_1, z_2; f)\|_{\theta, \mu} \leq C;$$

$$\|\omega_{\beta}^{(0)}(z_1 + \Delta_1, z_2 + \Delta_2; f) - \omega_{\beta}^{(0)}(z_1, z_2; f)\|_{\theta, \mu} \leq C[|\Delta_1|^{\delta} + |\Delta_2|^{\delta}]$$

с некоторыми показателями $\theta, \mu < \mu'$ и $\delta < \mu' - \mu$.

Нетрудно убедиться, что компоненты элементов $\omega_{\beta}(z_1, z_2; f)$, удовлетворяющих уравнениям

$$\omega_{\beta}(z_1, z_2; f) = \omega_{\beta}^{(0)}(z_1, z_2; f) - \mathbf{A}(z_1) \omega_{\beta}(z_1, z_2; f),$$

являются исследуемыми функциями $n_{\alpha\beta}(k, p; z_1, z_2; f)$ и $l_{\alpha\beta}(p_{\alpha}; z_1, z_2; f)$. Для этого достаточно использовать систему уравнений

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z) &= t_{\alpha} \left(k_{\alpha}, k'_{\alpha}, z - \frac{p_{\alpha}^2}{2n_{\alpha}} \right) \delta(p_{\alpha} - p'_{\alpha}) \delta_{\alpha\beta} - \\ &- \int t_{\alpha} \left(k_{\alpha}, k'_{\alpha}, z - \frac{p_{\alpha}^2}{2n_{\alpha}} \right) \frac{\delta(p_{\alpha} - p'_{\alpha})}{\frac{k'^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} - z} \sum_{\gamma \neq \alpha} \mathcal{M}_{\gamma\beta}(k'', p''; k', p'; z) dk'' dp'' \end{aligned}$$

для ядер $\mathcal{M}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z)$, положить в ней $z = z_1$, умножить полученное соотношение на $\left(\frac{k'^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} - z_2 \right)^{-1} f(k', p')$, проинтегрировать по k' и p' и вспомнить определение оператора $\mathbf{A}(z)$. На основании теоремы 7.2 мы можем утверждать, что при всех z_1 и z_2 , указанных в формулировке леммы,

$$\|\omega_{\beta}(z_1, z_2; f)\|_{\theta, \mu} \leq C; \quad \theta < \theta_0; \quad \mu < \mu';$$

$$\|\omega_{\beta}(z_1 + \Delta_1, z_2 + \Delta_2; f) - \omega_{\beta}(z_1, z_2; f)\|_{\theta, \mu} \leq C[|\Delta_1|^{\delta} + |\Delta_2|^{\delta}],$$

откуда следует доказательство леммы.

При помощи леммы 9.1 мы без труда можем убедиться, что можно переходить к пределу при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ и $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ в формах типа

$$(\hat{\mathbf{M}}_{\alpha\beta}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) f_0, f) = \tilde{m}_{\alpha\beta}(\varepsilon_1, \varepsilon_2; f_0, f); \quad (9.20)$$

$$(\hat{\mathbf{L}}_{\alpha\beta}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) f_{\beta}, f) = \tilde{l}_{\alpha\beta}(\varepsilon_1, \varepsilon_2; f_{\beta}, f). \quad (9.21)$$

Именно, справедливо следующее утверждение:

Лемма 9.2. Пусть $f \in \mathfrak{M}(\theta, \mu)$, $f_0 \in \mathfrak{D}_0$ и $f_{\beta} \in \mathfrak{D}_{\beta}$. Тогда функции $\tilde{m}_{\alpha\beta}(\varepsilon_1, \varepsilon_2; f_0, f)$ и $\tilde{l}_{\alpha\beta}(\varepsilon_1, \varepsilon_2; f_{\beta}, f)$ являются гельдеровски непрерывными функциями ε_1 и ε_2 , когда каждый из этих параметров меняется в промежутках $[-1, 0]$ или $[0, 1]$.

Доказательство. На основании определения оператора $\hat{\mathbf{M}}_{\alpha\beta}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ мы можем записать

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{\alpha\beta}(\varepsilon_1, \varepsilon_2; f_0, f) &= (\hat{\mathbf{M}}_{\alpha\beta}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) f_0, f) = \\ &= \int \overline{f(k, p)} \frac{\mathcal{M}_{\alpha\beta} \left(k, p; k', p'; \frac{k'^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} + i\varepsilon_1 \right)}{\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - \frac{k'^2}{2m} - \frac{p'^2}{2n} - i\varepsilon_2} f_0(k', p') dk dp dk' dp' = \\ &= \int f_0(k, p) \overline{m_{\beta\alpha} \left(k, p; \frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - i\varepsilon_1, \frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - i\varepsilon_2; f \right)} dk dp. \quad (9.22) \end{aligned}$$

При выводе мы изменили порядок интегрирования, пользуясь абсолютной сходимостью всех интегралов при $\varepsilon_1 \neq 0$ и $\varepsilon_2 \neq 0$, использовали условие симметрии ядер $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z) = \overline{\mathcal{M}_{\beta\alpha}(k', p'; k, p; \bar{z})} \quad (9.23)$$

и определение (9.17) функции $m_{\alpha\beta}(k, p; z_1, z_2; f)$.

Аналогично мы можем получить, что

$$\begin{aligned} \tilde{l}_{\alpha\beta}(\varepsilon_1, \varepsilon_2; f_\beta, f) &= \overline{(\hat{\mathbf{L}}_{\alpha\beta}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)f_\beta, f)} = \\ &= \int f_\beta(p_\beta) l_{\beta\alpha} \left(p_\beta; -x_\beta^2 + \frac{p_\beta^2}{2n_\beta} - i\varepsilon_1; -x_\beta^2 + \frac{p_\beta^2}{2n_\beta} - i\varepsilon_2; f \right). \end{aligned} \quad (9.24)$$

Доказательство леммы следует теперь из оценок для функций $n_{\alpha\beta}(k, p; z_1, z_2; f)$ и $l_{\alpha\beta}(p_\alpha; z_1, z_2; f)$, полученных в лемме 9.1, и формулы (9.18).

Обозначим через $\hat{\mathbf{E}}_0$ тождественный оператор из $\mathcal{S}_0$ в $\mathcal{S}$

$$\hat{\mathbf{E}}_0 f_0 = f: \quad f_0(k, p) = f(k, p), \quad (9.25)$$

и пусть

$$\mathbf{U}_0(\varepsilon) = \hat{\mathbf{E}}_0 + \sum_{\alpha, \beta} \hat{\mathbf{M}}_{\alpha\beta}(\varepsilon, \varepsilon). \quad (9.26)$$

Лемма 9.3. Оператор $\mathbf{U}_0(\varepsilon)$ сильно сходится при $\varepsilon \rightarrow \pm 0$ на любом элементе $f_0 \in \mathcal{D}_0$. Предельные операторы

$$\mathbf{U}_0^{(\pm)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow \mp 0} \mathbf{U}_0(\varepsilon) \quad (9.27)$$

продолжаются при замыкании на все $\mathcal{S}_0$ и являются изометрическими операторами, так что

$$\mathbf{U}_0^{(\pm)*} \mathbf{U}_0^{(\pm)} = \mathbf{E}_0. \quad (9.28)$$

Доказательство. Используем тождество Гильберта для резольвенты $\mathbf{R}(z)$, выраженное в терминах ядер $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ [см. (3.36)]

$$\begin{aligned} & \frac{\mathcal{M}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z_1)}{z_2 - z_1} - \frac{\mathcal{M}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z_2)}{z_2 - z_1} = \\ &= \int \sum_{\gamma} \mathcal{M}_{\alpha\gamma}(k, p; k'', p''; z_1) \frac{1}{\frac{k''^2}{2m} + \frac{p''^2}{2n} - z_1} \frac{1}{\frac{k''^2}{2m} + \frac{p''^2}{2n} - z_2} \times \\ & \quad \times \sum_{\gamma} \mathcal{M}_{\gamma\beta}(k'', p''; k', p'; z_2) dk'' dp''. \end{aligned} \quad (9.29)$$

Положим здесь

$$z_1 = \frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - i\varepsilon_1, \quad z_2 = \frac{k'^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} + i\varepsilon_2,$$

так что

$$z_2 - z_1 = - \left(\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - \frac{k'^2}{2m} - \frac{p'^2}{2n} - i(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \right),$$

умножим полученное равенство на $f_0(k', p') \overline{f_0(k, p)}$, где $f_0(k, p) \in \mathcal{D}_0$ и $f_0'(k, p) \in \mathcal{D}_0$, и проинтегрируем по k, p и k', p' . Получающееся при

этом соотношении можно записать в терминах операторов $\hat{M}_{\alpha\beta}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} & (\hat{M}_{\alpha\beta}(\varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_2)f_0, \hat{E}_0 f'_0) + (\hat{E}_0 f_0, \hat{M}_{\alpha\beta}(\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2)f'_0) = \\ & = \left(\sum_{\gamma} \hat{M}_{\gamma\beta}(\varepsilon_2, \varepsilon_2)f_0, \sum_{\gamma} \hat{M}_{\gamma\alpha}(\varepsilon_1, \varepsilon_1)f'_0 \right). \end{aligned} \quad (9.30)$$

При выводе мы произвольно меняли порядок интегрирования и использовали соотношение симметрии (9.23) для ядер $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$.

После суммирования по α и β мы можем переписать соотношение (9.30) в терминах операторов $U_0(\varepsilon_1)$ и $U_0(\varepsilon_2)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} & (U_0(\varepsilon_2)f_0, U_0(\varepsilon_1)f'_0) - (f_0, f'_0)_0 = \\ & = \left(\sum_{\alpha, \beta} \{\hat{M}_{\alpha\beta}(\varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_2) - \hat{M}_{\alpha\beta}(\varepsilon_2, \varepsilon_2)\} f_0, \hat{E}_0 f'_0 \right) + \\ & + \left(\hat{E}_0 f_0, \sum_{\alpha, \beta} \{\hat{M}_{\alpha\beta}(\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2) - \hat{M}_{\alpha\beta}(\varepsilon_1, \varepsilon_1)\} f'_0 \right), \end{aligned} \quad (9.31)$$

или, выражая правую часть в (9.31) в терминах форм $m_{\alpha\beta}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, f_0, f)$,

$$\begin{aligned} & (U_0(\varepsilon_2)f_0, U_0(\varepsilon_1)f'_0) - (f_0, f'_0)_0 = \\ & = \sum_{\alpha, \beta} \{ \tilde{m}_{\alpha\beta}(\varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_2; f_0, \hat{E}_0 f'_0) - \tilde{m}_{\alpha\beta}(\varepsilon_2, \varepsilon_2; f_0, \hat{E}_0 f'_0) \} + \\ & + \sum_{\alpha, \beta} \{ \tilde{m}_{\alpha\beta}(\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2; f'_0, \hat{E}_0 f_0) - \tilde{m}_{\alpha\beta}(\varepsilon_1, \varepsilon_1; f'_0, \hat{E}_0 f_0) \}. \end{aligned} \quad (9.32)$$

На основании леммы 9.2 мы можем утверждать, что если ε_1 и ε_2 одного знака, то правая часть этого равенства исчезает в пределе при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ и $\varepsilon_2 \rightarrow 0$. Точнее, существует некоторый показатель $\delta > 0$, такой, что для любых f_0 и f'_0 из $\mathfrak{D}_0$

$$(U_0(\varepsilon_2)f_0, U_0(\varepsilon_1)f'_0) - (f_0, f'_0)_0 = O(|\varepsilon_1|^\delta) + O(|\varepsilon_2|^\delta). \quad (9.33)$$

Пусть теперь $f_0 \in \mathfrak{D}_0$ и $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} > 0$. Имеем

$$\begin{aligned} d^2 & \equiv \| [U_0(\varepsilon_1) - U_0(\varepsilon_2)] f_0 \|^2 = (U_0(\varepsilon_1)f_0, U_0(\varepsilon_1)f_0) - \\ & - 2\text{Re}(U_0(\varepsilon_1)f_0, U_0(\varepsilon_2)f_0) + (U_0(\varepsilon_2)f_0, U_0(\varepsilon_2)f_0). \end{aligned}$$

Из (9.33) следует, что правая часть здесь имеет порядок $O(|\varepsilon_1|^\delta) + O(|\varepsilon_2|^\delta)$, так что d может быть сделано сколь угодно малым при достаточно малых ε_1 и ε_2 одного знака. Сходимость $U_0(\varepsilon)$ на $\mathfrak{D}_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ следует из этих рассуждений.

Положим в (9.33) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ и перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Мы получим, что при любых $f_0(k, p)$ и $f'_0(k, p)$ из $\mathfrak{D}_0$ справедливо соотношение:

$$(U_0^{(\pm)} f_0, U_0^{(\pm)} f'_0) = (f_0, f'_0)_0.$$

В силу плотности множества $\mathfrak{D}_0$ в $\mathfrak{H}_0$ отсюда следует, что операторы $U_0^{(+)}$ и $U_0^{(-)}$ продолжаются при замыкании на все $\mathfrak{H}_0$ как изометрические операторы.

Лемма доказана.

Обозначим через $U_\alpha(\varepsilon)$ следующий оператор, действующий из $\mathfrak{H}_\alpha$ в $\mathfrak{H}$:

$$U_\alpha(\varepsilon) = \sum_{\beta} \hat{L}_{\beta\alpha}(\varepsilon, \varepsilon). \quad (9.34)$$

Нашей ближайшей целью является доказательство того, что операторы $U_\alpha(\varepsilon)$ сильно сходятся на $\mathfrak{D}_\alpha$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и что предельные операторы изометричны. Для этого будем использовать тождество Гильберта в форме (9.29). Умножим (9.29) на

$$\overline{\psi_\alpha(k_\alpha)} \left(\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - z_1 \right)^{-1} \left(\frac{k'^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} - z_2 \right)^{-1} \psi_\beta(k'_\beta)$$

и проинтегрируем полученное соотношение по k_α и k'_β . Мы получим, используя (9.13) и (9.14),

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{L}_{\alpha\beta}(p_\alpha; k', p'; z_1) \frac{\psi_\beta(k'_\beta)}{k'^2 + \frac{p'^2}{2n} - z_2} dk'_\beta \frac{z_2 + x_\beta^2 - \frac{p_\beta'^2}{2n_\beta}}{z_2 - z_1} - \\ & - \frac{z_1 + x_\alpha^2 - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha}}{z_2 - z_1} \int \frac{\overline{\psi_\alpha(k_\alpha)}}{\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - z_1} \mathcal{L}_{\alpha\beta}(k, p; p'_\beta; z_2) dk_\alpha = \\ & = \int \sum_\gamma \mathcal{L}_{\alpha\gamma}(p_\alpha; k'', p''; z_1) \frac{1}{k''^2 + \frac{p''^2}{2n} - z_1} \frac{1}{\frac{k''^2}{2m} + \frac{p''^2}{2n} - z_2} \times \\ & \quad \times \sum_\gamma \mathcal{L}_{\gamma\beta}(k'', p''; p'_\beta; z_2) dk'' dp''. \end{aligned} \quad (9.35)$$

Положим здесь

$$z_1 = -x_\alpha^2 + \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} - i\varepsilon_1, \quad z_2 = -x_\beta^2 + \frac{p_\beta'^2}{2n_\beta} + i\varepsilon_2,$$

так что

$$z_2 - z_1 = -x_\beta^2 + \frac{p_\beta'^2}{2n_\beta} + x_\alpha^2 - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} + i(\varepsilon_1 + \varepsilon_2),$$

умножим полученное выражение на $\overline{f'_\alpha(p_\alpha)} f_\beta(p'_\beta)$ и проинтегрируем по p_α и p'_β . Выражение в правой части можно будет переписать в виде

$$(U_\beta(\varepsilon_2) f_\beta, U_\alpha(\varepsilon_1) f_\alpha),$$

и нам надо заняться левой частью.

При $\alpha = \beta$ в левой части содержится слагаемое, которое до интегрирования выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\delta(p_\alpha - p'_\alpha)}{i(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \left\{ i\varepsilon_2 \int \frac{\overline{\varphi_\alpha(k_\alpha)} \psi_\alpha(k_\alpha)}{\frac{k_\alpha^2}{2m_\alpha} + x_\alpha^2 - i\varepsilon_2} dk_\alpha + i\varepsilon_1 \int \frac{\overline{\psi_\alpha(k_\alpha)} \varphi_\alpha(k_\alpha)}{\frac{k_\alpha^2}{2m_\alpha} + x_\alpha^2 + i\varepsilon_1} dk_\alpha \right\} \times \\ & \quad \times \overline{f'_\alpha(p_\alpha)} f_\alpha(p'_\alpha). \end{aligned} \quad (9.36)$$

Встречающийся в этом соотношении интеграл

$$I(\varepsilon) = \int \frac{\overline{\varphi_\alpha(k)} \psi_\alpha(k)}{\frac{k^2}{2m_\alpha} + x_\alpha^2 + i\varepsilon} dk$$

аналитически зависит от ε в окрестности точки $\varepsilon=0$ и при $\varepsilon=0$ превращается в нормировочный интеграл для собственной функции $\psi_\alpha(k)$, так что $I(0)=1$. Мы можем поэтому переписать (9.36) после интегрирования по p_α и p'_α в следующем виде:

$$(f_\alpha, f'_\alpha)_\alpha + O(\varepsilon_1) + O(\varepsilon_2).$$

Остальные слагаемые левой части выражаются через интегралы типа

$$i\varepsilon_2 \int \frac{\tilde{\mathcal{H}}_{\alpha\beta}(p_\alpha; k', p'; -\kappa_\alpha^2 + \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} - i\varepsilon_1)}{f'_\alpha(p_\alpha)} \times \\ \times \frac{\psi_\beta(k'_\beta)}{\frac{k_\beta'^2}{2m_\beta} + \kappa_\beta^2 - i\varepsilon_2} f_\beta(p'_\beta) dp_\alpha dk'_\beta dp'_\beta. \quad (9.37)$$

Если мы будем сначала интегрировать по p'_β , то мы будем иметь дело с интегралом

$$k_{\alpha\beta}(p_\alpha, k'_\beta, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = i\varepsilon_2 \int \frac{\tilde{\mathcal{H}}_{\alpha\beta}(p_\alpha; k', p'; -\kappa_\alpha^2 + \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} - i\varepsilon_1)}{\kappa_\beta^2 - \frac{p_\beta^2}{2n_\beta} - \kappa_\alpha^2 + \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} - i(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} f_\beta(p'_\beta) dp'_\beta. \quad (9.38)$$

В конце настоящего параграфа будет доказана

Лемма 9.4. Пусть $f_\beta(p'_\beta) \in \mathfrak{N}(\theta, \mu)$ и $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} > 0$. Тогда для $k_{\alpha\beta}(p_\alpha, k'_\beta; \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ справедлива оценка

$$|k_{\alpha\beta}(p_\alpha; k'_\beta; \varepsilon_1, \varepsilon_2)| \leq C(\varepsilon_2),$$

равномерная по всем $k'_\beta, |\varepsilon_i| \leq 1, i=1, 2$, и p_α , меняющемуся в области, не содержащей особых поверхностей $-\kappa_\alpha^2 + \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} = \lambda_n$, причем $C(\varepsilon_2) \rightarrow 0$ при $\varepsilon_2 \rightarrow 0$.

При помощи этой леммы и предшествующих ей рассуждений мы можем доказать следующее утверждение:

Лемма 9.5. Операторы $\mathbf{U}_\alpha(\varepsilon)$, $\alpha=23, 31, 12$, сильно сходятся на $\mathfrak{D}_\alpha$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Предельные операторы

$$\mathbf{U}_\alpha^{(\pm)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow \mp 0} \mathbf{U}_\alpha(\varepsilon) \quad (9.39)$$

продолжаются на все $\mathfrak{H}_\alpha$ как изометрические операторы, причем области значений операторов $\mathbf{U}_\alpha^{(\pm)}$ и $\mathbf{U}_\beta^{(\pm)}$ при $\alpha \neq \beta$ ортогональны, т. е. выполняются соотношения

$$\mathbf{U}_\alpha^{(\pm)*} \mathbf{U}_\beta^{(\pm)} = \delta_{\alpha\beta} \mathbf{E}_\alpha. \quad (9.40)$$

Доказательство. На основании леммы 9.4 мы можем утверждать, что если $f'_\alpha \in \mathfrak{D}_\alpha$, $f_\beta \in \mathfrak{D}_\beta$, то интегралы типа (9.37) исчезают при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ и $\varepsilon_2 \rightarrow 0$, так что мы можем записать

$$(\mathbf{U}_\beta(\varepsilon_2) f_\beta, \mathbf{U}_\alpha(\varepsilon_1) f'_\alpha) = \delta_{\alpha\beta} (f_\alpha, f'_\alpha)_\alpha + o(1) \quad (9.41)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\varepsilon_2 \rightarrow 0$, $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} > 0$. Комбинируя подходящим образом соотношения типа (9.41), мы имеем, что, если $f_\alpha \in \mathfrak{D}_\alpha$, то

$$\|[\mathbf{U}_\alpha(\varepsilon_1) - \mathbf{U}_\alpha(\varepsilon_2)]f_\alpha\| = o(1)$$

при ε_1 и $\varepsilon_2 \rightarrow 0$, откуда вытекает сильная сходимость $\mathbf{U}_\alpha(\varepsilon)$ на $\mathfrak{D}_\alpha$. Положим в (9.41) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ и перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Мы получим, что для любых $f_\alpha \in \mathfrak{D}_\alpha$, $f'_\beta \in \mathfrak{D}_\beta$

$$(\mathbf{U}_\alpha^{(\pm)}f_\alpha, \mathbf{U}_\beta^{(\pm)}f'_\beta) = \delta_{\alpha\beta}(f_\alpha, f'_\alpha).$$

В силу плотности $\mathfrak{D}_\alpha$ в $\mathfrak{H}_\alpha$ отсюда следует, что при замыкании операторы $\mathbf{U}_\alpha^{(\pm)}$ продолжаются на все $\mathfrak{H}_\alpha$, $\alpha = 23, 31, 12$, причем справедливы соотношения (9.40).

Лемма доказана.

Мы собираемся теперь доказать, что области значений операторов $\mathbf{U}_\alpha^{(\pm)}$ и $\mathbf{U}_\alpha^{(\pm)}$, $\alpha = 23, 31, 12$, также ортогональны. Для этого опять используем тождество Гильберта. Умножим (9.29) на $\left(\frac{k'^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} - z_2\right)^{-1} \psi_\beta(k'_\beta)$ и проинтегрируем по k'_β . Используя (9.13), мы получим

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{M}_{\alpha\beta}(k, p; k', p', z_1) \frac{\psi_\beta(k'_\beta)}{k'^2 + \frac{p'^2}{2n} - z_2} dk'_\beta \frac{z_2 + \frac{p_\beta^2}{2n} - \frac{p_\beta'^2}{2n_\beta}}{z_2 - z_1} = \\ & = \frac{\mathcal{L}_{\alpha\beta}(k, p; p'_\beta; z_2)}{z_2 - z_1} + \int \sum_\gamma \mathcal{M}_{\alpha\gamma}(k, p; k'', p''; z_1) \frac{1}{k''^2 + \frac{p''^2}{2n} - z_1} \times \\ & \times \frac{1}{k'^2 + \frac{p'^2}{2n} - z_2} \sum_\gamma \mathcal{L}_{\gamma\beta}(k'', p''; p'_\beta; z_2) dk'' dp''. \end{aligned} \quad (9.42)$$

Положим здесь

$$z_1 = \frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - i\varepsilon, \quad z_2 = -\frac{k_\beta^2}{2n_\beta} + \frac{p_\beta^2}{2n_\beta} + i\varepsilon,$$

так что

$$z_2 - z_1 = -\left(\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} + \frac{k_\beta^2}{2n_\beta} - \frac{p_\beta^2}{2n_\beta} - 2i\varepsilon\right),$$

умножим полученное соотношение на $\overline{f'_0(k, p)} f_\beta(p'_\beta)$ и проинтегрируем по k, p и p'_β . После суммирования по α и β выражение в правой части можно записать в виде

$$(\mathbf{U}_\beta(\varepsilon)f_\beta, \mathbf{U}_0(\varepsilon)f_0) + o(1).$$

Для того чтобы получить выражение в левой части, надо вычислить интеграл

$$m_{\alpha\beta}(k, p; k'_\beta; \varepsilon) = i\varepsilon \int \frac{\mathcal{M}_{\alpha\beta}\left(k, p; k', p'; \frac{k'^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} + i\varepsilon\right)}{\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} + \frac{k_\beta^2}{2n_\beta} - \frac{p_\beta^2}{2n_\beta} - 2i\varepsilon} f_\beta(p'_\beta) dp'_\beta, \quad (9.43)$$

умножить полученное выражение на

$$\overline{f_0(k, p)} \psi_\beta(k'_\beta) \left(\frac{k'^2_\beta}{2m_\beta} + x^2_\beta + i\varepsilon \right)^{-1},$$

проинтегрировать по k, p, k'_β и просуммировать по α и β . В конце этого параграфа будет доказана

Лемма 9.6. Пусть $f_\beta(p_\beta) \in \mathfrak{N}(\theta, \mu)$. Тогда для $m_{\alpha\beta}(k, p; k'_\beta; \varepsilon)$ справедлива оценка

$$|m_{\alpha\beta}(k, p; k'_\beta; \varepsilon)| \leq C(\varepsilon),$$

равномерная по $\varepsilon, |\varepsilon| \leq 1, k'_\beta$ и k, p , меняющимся в области, не содержащей особых поверхностей $\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} = \lambda_n$. При этом $C(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

При помощи леммы 9.6 мы можем доказать следующее утверждение:

Лемма 9.7. Области значений операторов $U_0^{(\pm)}$ и $U_\beta^{(\pm)}$, $\beta = 23, 31, 12$, ортогональны, т. е. имеют место соотношения

$$U_0^{(\pm)*} U_\beta^{(\pm)} = U_\beta^{(\pm)*} U_0^{(\pm)} = 0. \quad (9.44)$$

Доказательство. На основании леммы 9.6 и предшествующих ей рассуждений мы можем утверждать, что если $f_0 \in \mathfrak{D}_0$ и $f_\beta \in \mathfrak{D}_\beta$, то

$$(U_\beta(\varepsilon)f_\beta, U_0(\varepsilon)f_0) = o(1)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Переходя здесь к пределу при $\varepsilon \rightarrow \pm 0$, мы получаем, что для таких f_0 и f_β $(U_\beta^{(\pm)}f_\beta, U_0^{(\pm)}f_0) = 0$. При замыкании это соотношение продолжается на все $\mathfrak{D}_\alpha$ и $\mathfrak{D}_0$, откуда следует (9.44).

Лемма доказана.

Итак, мы показали, какой точный смысл имеют формальные выражения (9.3) и (9.5) для функций $\Psi_0^{(\pm)}(k, p; k^{(0)}, p^{(0)})$ и $\Psi_\alpha^{(\pm)}(k, p; p_\alpha^{(0)})$ и доказали ортогональность этих функций. Перейдем к доказательству того, что эти функции являются собственными функциями оператора $\mathbf{H}$.

Обозначим через $\tilde{\mathbf{R}}_0(z)$ и $\tilde{\mathbf{R}}_\alpha(z)$ резольвенты операторов $\tilde{\mathbf{H}}_0$ и $\tilde{\mathbf{H}}_\alpha$, действующих в пространствах $\mathfrak{D}_0$ и $\mathfrak{D}_\alpha$, $\alpha = 23, 31, 12$, соответственно.

Лемма 9.8. Справедливы соотношения

$$\mathbf{R}(z)U_0^{(\pm)} = U_0^{(\pm)}\tilde{\mathbf{R}}_0(z); \quad (9.45)$$

$$\mathbf{R}(z)U_\beta^{(\pm)} = U_\beta^{(\pm)}\tilde{\mathbf{R}}_\beta(z), \quad \beta = 23, 31, 12. \quad (9.46)$$

Доказательство. Положим в (9.29)

$$z_1 = z \text{ и } z_2 = \frac{k^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} + i\varepsilon,$$

так что

$$z_2 - z_1 = \frac{k'^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} - z + i\varepsilon.$$

Во втором слагаемом в левой части полученного соотношения знаменатель $(z_2 - z_1)^{-1}$ запишем в виде

$$-\frac{1}{\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - \frac{k'^2}{2m} - \frac{p'^2}{2n} - i\varepsilon} + \left(\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - z \right) \times \\ \times \left(\frac{1}{\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - \frac{k'^2}{2m} - \frac{p'^2}{2n} - i\varepsilon} \cdot \frac{1}{\frac{k'^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} - z + i\varepsilon} \right)$$

и придем к соотношению, эквивалентному операторному равенству

$$\mathbf{M}_{\alpha\beta}(z) \mathbf{R}_0(z - i\varepsilon) \hat{\mathbf{E}}_0 + \hat{\mathbf{M}}_{\alpha\beta}(\varepsilon, \varepsilon) - (\mathbf{H}_0 - z\mathbf{E}) \hat{\mathbf{M}}_{\alpha\beta}(\varepsilon, \varepsilon) \tilde{\mathbf{R}}_0(z - i\varepsilon) = \\ = \sum_{\gamma} \mathbf{M}_{\alpha\gamma}(z) \mathbf{R}_0(z) \sum_{\gamma} \hat{\mathbf{M}}_{\gamma\beta}(\varepsilon, \varepsilon). \quad (9.47)$$

Умножим (9.47) на $\mathbf{R}_0(z)$, добавим и вычтем одинаковое слагаемое

$$\mathbf{R}_0(z) \hat{\mathbf{E}}_0 = \hat{\mathbf{E}}_0 \tilde{\mathbf{R}}_0(z),$$

просуммируем по α и β и сгруппируем слагаемые подходящим образом. Мы получим

$$\left[\mathbf{R}_0(z) - \mathbf{R}_0(z) \sum_{\alpha, \beta} \mathbf{M}_{\alpha\beta}(z) \mathbf{R}_0(z - i\varepsilon) \right] \left[\hat{\mathbf{E}}_0 - \sum_{\alpha, \beta} \hat{\mathbf{M}}_{\alpha\beta}(\varepsilon, \varepsilon) \right] = \\ = \hat{\mathbf{E}}_0 \tilde{\mathbf{R}}_0(z) - \sum_{\alpha, \beta} \hat{\mathbf{M}}_{\alpha\beta}(\varepsilon, \varepsilon) \tilde{\mathbf{R}}_0(z - i\varepsilon),$$

откуда следует (9.45), если вспомнить (9.1), (9.26) и перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Положим теперь в (9.42)

$$z_1 = z, \quad z_2 = -x_\beta^2 + \frac{p_\beta^2}{2n_\beta} + i\varepsilon,$$

так что

$$z_2 - z_1 = -x_\beta^2 + \frac{p_\beta^2}{2n_\beta} - z + i\varepsilon.$$

Знаменатель $(z_2 - z_1)^{-1}$ запишем в виде

$$-\frac{1}{\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} + x_\beta^2 - \frac{p_\beta^2}{2n_\beta} - i\varepsilon} + \left(\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - z \right) \times \\ \times \left(\frac{1}{\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} + x_\beta^2 - \frac{p_\beta^2}{2n_\beta} - i\varepsilon} - x_\beta^2 + \frac{p_\beta^2}{2n_\beta} - z + i\varepsilon \right).$$

Тогда выражение в правой части полученного соотношения можно записать в виде

$$-\hat{\mathbf{L}}_{\alpha\beta}(\varepsilon, \varepsilon) + (\mathbf{H}_0 - z\mathbf{E}) \hat{\mathbf{L}}_{\alpha\beta}(\varepsilon, \varepsilon) \tilde{\mathbf{R}}_\beta(z - i\varepsilon) + \sum_{\gamma} \mathbf{M}_{\alpha\gamma}(z) \mathbf{R}_0(z) \sum_{\gamma} \hat{\mathbf{L}}_{\gamma\beta}(\varepsilon, \varepsilon).$$

В левой части мы имеем несингулярное выражение, содержащее множитель ε . Умножим последнее соотношение на $\mathbf{R}_0(z)$ и просуммируем по α . После перехода к пределу $\varepsilon \rightarrow \pm 0$ мы получим (9.46).

Лемма доказана.

В качестве следствия леммы 9.8 мы получаем, что если функция $\varphi(x)$ ограничена при всех x , $-\infty < x < \infty$, то

$$\varphi(\mathbf{H}) \mathbf{U}_0^{(\pm)} = \mathbf{U}_0^{(\pm)} \varphi(\tilde{\mathbf{H}}_0); \quad (9.48)$$

$$\varphi(\mathbf{H}) \mathbf{U}_\alpha^{(\pm)} = \mathbf{U}_\alpha^{(\pm)} \varphi(\tilde{\mathbf{H}}_\alpha). \quad (9.49)$$

Мы можем поэтому говорить, что ядра операторов $\mathbf{U}_0^{(\pm)}$ и $\mathbf{U}_\alpha^{(\pm)}$, т. е. функции

$$\Psi_0^{(\pm)}(k, p; k^{(0)}, p^{(0)}) \text{ и } \Psi_\alpha^{(\pm)}(k, p; p_\alpha^{(0)}),$$

являются в некотором смысле решениями уравнений

$$\mathbf{H} \Psi_0^{(\pm)}(k, p; k^{(0)}, p^{(0)}) = \left(\frac{k^{(0)2}}{2m} + \frac{p^{(0)2}}{2n} \right) \Psi_0^{(\pm)}(k, p; k^{(0)}, p^{(0)});$$

$$\mathbf{H} \Psi_\alpha^{(\pm)}(k, p; p_\alpha^{(0)}) = \left(-x_\alpha^2 + \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} \right) \Psi_\alpha^{(\pm)}(k, p; p_\alpha^{(0)}),$$

так что их можно называть собственными функциями оператора $\mathbf{H}$.

Следующая наша задача — доказательство полноты полученной системы собственных функций. Так же, как и в § 8, получим для этого удобное представление для спектральной функции $\mathbf{E}(\lambda)$ оператора $\mathbf{H}$.

Обозначим

$$m_{\alpha\beta}(k, p; z; f) = m_{\alpha\beta}(k, p; z_1, z_2; f)|_{z_1=z_2=z}; \quad (9.50)$$

$$l_{\alpha\beta}(p_\alpha; z; f) = l_{\alpha\beta}(p_\alpha; z_1, z_2; f)|_{z_1=z_2=z}; \quad (9.51)$$

[определение правых частей см. в (9.17), (9.19)] и

$$g_0^{(\pm)}(k, p; f) = f(k, p) + \sum_{\alpha, \beta} m_{\alpha\beta} \left(k, p; \frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} \pm i0; f \right); \quad (9.52)$$

$$g_\alpha^{(\pm)}(p_\alpha; f) = \sum_{\beta} l_{\alpha\beta} \left(p_\alpha; -x_\alpha^2 + \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} \pm i0; f \right). \quad (9.53)$$

На основании леммы 9.1 мы можем утверждать, что эти функции во всяком случае определены, если $\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} \neq \lambda_n$ или $-x_\alpha^2 + \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} \neq \lambda_n$ соответственно.

Лемма 9.9. Пусть λ не является особой точкой оператора $\mathbf{A}(z)$. Тогда, если f и $f' \in \mathfrak{M}(\theta, \mu)$, то $(\mathbf{E}(\lambda)f, f')$ дифференцируема по λ , причем

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} (\mathbf{E}(\lambda)f, f') &= \int \int g_0^{(\pm)}(k, p; f) \overline{g_0^{(\pm)}(k, p; f')} \delta \left(\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - \lambda \right) dk dp + \\ &+ \sum_{\alpha} \int g_\alpha^{(\pm)}(p_\alpha; f) \overline{g_\alpha^{(\pm)}(p_\alpha; f')} \delta \left(-x_\alpha^2 + \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} - \lambda \right) dp_\alpha. \end{aligned} \quad (9.54)$$

Доказательство. Используем связь спектральной функции и резольвенты

$$\int_{\mu}^{\nu} d(\mathbf{E}(\lambda)f, f') = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mu}^{\nu} [(\mathbf{R}(\lambda + i\varepsilon) - \mathbf{R}(\lambda - i\varepsilon))f, f'] d\lambda. \quad (9.55)$$

Разность резольвент в правой части (9.55) на основании (9.1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\lambda + i\varepsilon) - \mathbf{R}(\lambda - i\varepsilon) = & \left[\mathbf{E} - \mathbf{R}_0(\lambda + i\varepsilon) \sum_{\alpha, \beta} \mathbf{M}_{\alpha\beta}(\lambda + i\varepsilon) \right] \times \\ & \times (\mathbf{R}_0(\lambda + i\varepsilon) - \mathbf{R}_0(\lambda - i\varepsilon)) \left[\mathbf{E} - \sum_{\alpha', \beta'} \mathbf{M}_{\alpha'\beta'}(\lambda - i\varepsilon) \mathbf{R}_0(\lambda - i\varepsilon) \right]. \end{aligned} \quad (9.56)$$

Составим квадратичную форму этого выражения с элементами f и f' из $\mathfrak{M}(\theta, \mu)$. Выражение в правой части представляет собой сумму интегралов вида

$$\begin{aligned} & \int \left\{ n_{\alpha\beta}(k, p; \lambda + i\varepsilon; f) + \frac{\varphi_{\alpha}(k_{\alpha}) l_{\alpha\beta}(p_{\alpha}; \lambda + i\varepsilon; f)}{\lambda + i\varepsilon + x_{\alpha}^2 - \frac{p_{\alpha}^2}{2n_{\alpha}}} \right\} \times \\ & \times \left[\left(\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - \lambda - i\varepsilon \right)^{-1} - \left(\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - \lambda + i\varepsilon \right)^{-1} \right] \times \\ & \times \left\{ \frac{n_{\alpha'\beta'}(k, p; \lambda - i\varepsilon; f') + \frac{\varphi_{\alpha'}(k_{\alpha'}) l_{\alpha'\beta'}(p_{\alpha'}; \lambda - i\varepsilon; f')}{\lambda - i\varepsilon + x_{\alpha'}^2 - \frac{p_{\alpha'}^2}{2n_{\alpha'}}}}{dkdp} \right\} \end{aligned}$$

Здесь мы выписали интеграл, получающийся при перемножении вторых слагаемых в квадратных скобках в правой части (9.56), и использовали обозначения (9.17), (9.18), (9.50) и (9.51) и условие (9.23) симметрии ядер $\mathcal{M}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z)$. В точности такие интегралы уже рассматривались в § 7. Дословно повторяя рассуждения, применявшиеся при доказательстве леммы 7.9, мы можем показать, что

$$\frac{1}{2\pi i} ([\mathbf{R}(\lambda + i\varepsilon) - \mathbf{R}(\lambda - i\varepsilon)]f, f')$$

имеет предел при $\varepsilon \rightarrow +0$, и этот предел представляет собой выражение, выписанное в правой части (9.54).

Лемма доказана.

Разложим спектральную функцию $\mathbf{E}(\lambda)$ на два слагаемых: функцию скачков $\mathbf{E}_d(\lambda)$ и непрерывную часть $\mathbf{E}_c(\lambda)$. Полное изменение функции $\mathbf{E}_d(\lambda)$ дает нам проектор $\mathbf{P}_d$ на собственное подпространство дискретного спектра оператора $\mathbf{H}$. Ясно также, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{E}_c(\lambda) = \mathbf{E} - \mathbf{P}_d \quad (9.57)$$

и что в левой части формулы (9.54) мы можем заменить $\mathbf{E}(\lambda)$ на $\mathbf{E}_c(\lambda)$.

Лемма 9.10. *Справедливо соотношение*

$$\mathbf{U}_0^{(\pm)} \mathbf{U}_0^{(\pm)*} + \mathbf{U}_{23}^{(\pm)} \mathbf{U}_{23}^{(\pm)*} + \mathbf{U}_{31}^{(\pm)} \mathbf{U}_{31}^{(\pm)*} + \mathbf{U}_{12}^{(\pm)} \mathbf{U}_{12}^{(\pm)*} = \mathbf{E} - \mathbf{P}_d. \quad (9.58)$$

Доказательство. Покажем сначала, что функции $g_0^{(\pm)}(k, p; f)$ и $g_{\alpha}^{(\pm)}(p_{\alpha}; f)$ квадратично интегрируемы по всему шестимерному и трехмерному пространству соответственно. Обозначим через l_{ε} вещественную ось с вырезанными интервалами $[\lambda_n - \varepsilon, \lambda_n + \varepsilon]$ и через $\mathcal{Q}_{\varepsilon}^{(0)}$ и $\mathcal{Q}_{\varepsilon}^{(\alpha)}$ шестимерное и три трехмерных пространства с вырезанными сферическими слоями $\left| \frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - \lambda_n \right| \leq \varepsilon$ и $\left| -x_{\alpha}^2 + \frac{p_{\alpha}^2}{2n_{\alpha}} - \lambda_n \right| \leq \varepsilon$ соответственно. Поло-

жим в (9.54) $f=f'$ и проинтегрируем обе части равенства по λ на оси l_ε . Мы получим

$$\int_{l_\varepsilon} \frac{d}{d\lambda} (\mathbf{E}_\varepsilon(\lambda) f, f) d\lambda = \int_{\mathfrak{D}_\varepsilon^{(0)}} |g_0^{(\pm)}(k, p; f)|^2 dk dp + \\ + \sum_\alpha \int_{\mathfrak{D}_\alpha^{(\alpha)}} |g_\alpha^{(\pm)}(p_\alpha; f)|^2 dp_\alpha. \quad (9.59)$$

Интегралы в обеих частях равенства монотонно зависят от ε и не убывают при уменьшении ε . При $\varepsilon \rightarrow 0$ левая часть (9.59) сходится к $([\mathbf{E} - \mathbf{P}_d]f, f)$, а интегралы в правой части распространяются на все шестимерное и трехмерные пространства соответственно. Мы получаем, что

$$\int |g_0^{(\pm)}(k, p; f)|^2 dk dp + \sum_\alpha \int |g_\alpha^{(\pm)}(p_\alpha; f)|^2 dp_\alpha = \\ = ([\mathbf{E} - \mathbf{P}_d]f, f) \leq (f, f), \quad (9.60)$$

откуда, в частности, следует требуемая квадратичная интегрируемость.

Обозначим через $g_0^{(\pm)}(f)$ и $g_\alpha^{(\pm)}(f)$ элементы $\mathfrak{H}_0$ и $\mathfrak{H}_\alpha$, порождаемые функциями $g_0^{(\pm)}(k, p; f)$ и $g_\alpha^{(\pm)}(p_\alpha; f)$. Покажем, что

$$g_0^{(\pm)}(f) = \mathbf{U}_0^{(\pm)*} f; \quad g_\alpha^{(\pm)}(f) = \mathbf{U}_\alpha^{(\pm)*} f. \quad (9.61)$$

Заметим, что на основании (9.22) мы можем записать для любой $f_0 \in \mathfrak{D}_0$ и $f \in \mathfrak{M}(\theta, \mu)$

$$(\hat{\mathbf{M}}_{\alpha\beta}(\varepsilon, \varepsilon) f_0, f) = \int f_0(k, p) \overline{m_{\beta\alpha}\left(k, p; \frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - i\varepsilon; f\right)} dk dp.$$

Просуммируем это соотношение по α и β и добавим к обеим частям равенства

$$(\hat{\mathbf{E}}_0 f_0, f) = \int f_0(k, p) \overline{f(k, p)} dk dp.$$

Мы получим

$$(\mathbf{U}_0(\varepsilon) f_0, f) = \int f_0(k, p) \overline{g_0\left(k, p; \frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - i\varepsilon; f\right)} dk dp.$$

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon \rightarrow \mp 0$, мы получим

$$(\mathbf{U}_0^{(\pm)} f_0, f) = (f_0, g_0^{(\pm)}(f))_0,$$

откуда, в силу плотности множества $\mathfrak{D}_0$ в $\mathfrak{H}_0$, следует первое соотношение (9.61).

Аналогично доказывается второе соотношение (9.61). Пусть $f_\alpha \in \mathfrak{D}_\alpha$ и $f \in \mathfrak{M}(\theta, \mu)$. На основании (9.24) имеем

$$(\mathbf{L}_{\beta\alpha}(\varepsilon, \varepsilon) f_\alpha, f) = \int f_\alpha(p_\alpha) \overline{l_{\alpha\beta}\left(p_\alpha; -x_\alpha^2 + \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} - i\varepsilon; f\right)} dp_\alpha.$$

Суммируя здесь по β и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow \mp 0$, мы получим

$$(\mathbf{U}_\alpha^{(\pm)} f_\alpha, f) = (f_\alpha, g_\alpha^{(\pm)}(f))_\alpha,$$

откуда, в силу плотности $\mathfrak{D}_\alpha$ в $\mathfrak{H}_\alpha$, следует второе соотношение (9.61).

Заменим в левой части (9.54) $E(\lambda)$ на $E_c(\lambda)$ и проинтегрируем полученное соотношение по λ от $-\infty$ до ∞ . Мы получим, учитывая (9.61) и (9.57), что

$$((E - P_d)f, f) = (U_0^{(\pm)*}f, U_0^{(\pm)*}f) + (U_{23}^{(\pm)*}f, U_{23}^{(\pm)*}f) + \\ + (U_{31}^{(\pm)*}f, U_{31}^{(\pm)*}f) + (U_{12}^{(\pm)*}f, U_{12}^{(\pm)*}f),$$

откуда следует (9.58).

Лемма доказана.

Из полученных выше результатов вытекает следующее утверждение:

Теорема 9.2. *Существуют операторы $U_0^{(\pm)}$ и $U_\alpha^{(\pm)}$, $\alpha = 23, 31, 12$, действующие из $\mathcal{S}_0$ и $\mathcal{S}_\alpha$ соответственно в $\mathcal{S}$ и обладающие следующими свойствами:*

1. *Всякая функция $f \in \mathcal{S}$ однозначно представляется в виде*

$$f = f_d + U_0^{(\pm)}f_0^{(\pm)} + U_{23}^{(\pm)}f_{23}^{(\pm)} + U_{31}^{(\pm)}f_{31}^{(\pm)} + U_{12}^{(\pm)}f_{12}^{(\pm)}, \quad (9.62)$$

где

$$f_d \in \mathcal{S}_d, f_0^{(\pm)} \in \mathcal{S}_0, f_\alpha^{(\pm)} \in \mathcal{S}_\alpha, \alpha = 23, 31, 12.$$

2. *Для любой функции $\varphi(x)$, ограниченной на всей вещественной оси, справедливо соотношение*

$$\varphi(H)f = \varphi(P_d H)f_d + U_0^{(\pm)}\varphi(\tilde{H}_0)f_0^{(\pm)} + \sum_\alpha U_\alpha^{(\pm)}\varphi(\tilde{H}_\alpha)f_\alpha^{(\pm)}. \quad (9.63)$$

3. *Функции $f_0^{(\pm)}$, $f_\alpha^{(\pm)}$ определяются следующим образом:*

$$f_0^{(\pm)} = U_0^{(\pm)*}f; \quad f_\alpha^{(\pm)} = U_\alpha^{(\pm)*}f. \quad (9.64)$$

4. *Имеет место соотношение*

$$\|f\|^2 = \|f_d\|^2 + \|f_0^{(\pm)}\|^2 + \sum_\alpha \|f_\alpha^{(\pm)}\|^2. \quad (9.65)$$

Формулы (9.62) и (9.64) представляют собой краткую и точную формулировку теоремы разложения произвольной функции по собственным функциям оператора H . Соотношение (9.65) представляет собой равенство Парсеваля.

Теорема 9.1 следует из теоремы 9.2. В качестве оператора U , упомянутого в формулировке теоремы 9.1, мы можем взять операторы $U^{(\pm)}$ определяющиеся следующим образом: если $\hat{f} \in \hat{\mathcal{S}}$ и $f_0, f_{23}, f_{31}, f_{12}$ — компоненты этого элемента, то

$$U^{(\pm)}\hat{f} = U_0^{(\pm)}f_0 + U_{23}^{(\pm)}f_{23} + U_{31}^{(\pm)}f_{31} + U_{12}^{(\pm)}f_{12}. \quad (9.66)$$

В силу теоремы 9.2 нетрудно проверить, что операторы $U^{(\pm)}$ изометрично отображают $\hat{\mathcal{S}}$ на $\mathcal{S}_c$ и обладают свойствами, перечисленными в теореме 9.1.

Рассмотрим в $\hat{\mathcal{S}}$ оператор

$$S = U^{(+)*}U^{(-)}. \quad (9.67)$$

Если $\hat{f}$ и $\hat{f}' \in \hat{\mathcal{S}}$ и $f_0, f_\alpha, f'_0, f'_\alpha$, $\alpha = 23, 31, 12$, — компоненты $\hat{f}$ и $\hat{f}'$ соответственно, то

$$\hat{f}' = S\hat{f}$$

означает, что

$$f'_\alpha = \sum_\beta S_{\alpha\beta}f_\beta.$$

Здесь суммирование ведется по значениям $\beta = 0, 23, 31, 12$ и через $S_{\alpha\beta}$ обозначены операторы из S_β в S_α , определенные соотношениями

$$S_{\alpha\beta} = U_\alpha^{(+)*} U_\beta^{(-)}, \quad \alpha, \beta = 0, 23, 31, 12. \quad (9.68)$$

Лемма 9.11. Оператор S унитарен и коммутирует с любой ограниченной функцией оператора $\hat{H}$. Справедливы соотношения

$$U^{(-)} = U^{(+)} S, \quad (9.69)$$

или, более подробно,

$$U_\alpha^{(-)} = \sum_\beta U_\beta^{(+)} S_{\beta\alpha}, \quad \alpha, \beta = 0, 23, 31, 12. \quad (9.70)$$

Доказательство можно получить, повторяя почти дословно доказательство леммы 8.8. Тот факт, что в рассматриваемом случае операторы $U^{(\pm)}$ связывают разные пространства, не играет никакой роли.

Для операторов $S_{\alpha\beta}$ можно получить явные выражения в терминах ядер $\mathcal{M}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z)$. Приведем для примера вывод одного из таких соотношений, не обосновывая строго всех действий.

Положим в (9.31) $\varepsilon_2 = -\varepsilon$ и $\varepsilon_1 = 2\varepsilon$. Мы получим, что

$$(U_0(-\varepsilon)f_0, U_0(2\varepsilon)f'_0) = (f_0, f'_0)_0 + \left(\sum_{\alpha, \beta} [\mathbf{M}_{\alpha\beta}(-\varepsilon, \varepsilon) - \mathbf{M}_{\alpha\beta}(-\varepsilon, -\varepsilon)] f_0, \hat{E}_0 f'_0 \right).$$

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon \rightarrow -0$, мы получим, что

$$S_{00}f_0 = \{E_0 + \hat{E}_0^* \sum_{\alpha, \beta} [\hat{\mathbf{M}}_{\alpha\beta}(+0, -0) - \hat{\mathbf{M}}_{\alpha\beta}(+0, +0)]\} f_0, \quad (9.71)$$

причем предел в правой части существует, во всяком случае, в слабом смысле на плотном множестве. Из (9.71) и определения (9.15) операторов $\hat{\mathbf{M}}_{\alpha\beta}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ мы можем формально выписать ядро оператора S_{00}

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{00}(k, p; k', p') &= \delta(k - k') \delta(p - p') - \\ &- 2\pi i \delta \left(\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - \frac{k'^2}{2m} - \frac{p'^2}{2n} \right) \sum_{\alpha, \beta} \mathcal{M}_{\alpha\beta} \left(k, p; k', p'; \frac{k'^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} + i0 \right). \end{aligned}$$

Приведем без вывода выражения для ядер других операторов $S_{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{0\alpha}(k, p; p'_\alpha) &= -2\pi i \delta \left(\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} + x_\alpha^2 - \frac{p_\alpha'^2}{2n_\alpha} \right) \times \\ &\times \sum_\beta \mathcal{H}_{\beta\alpha} \left(k, p; p'_\alpha; -x_\alpha^2 + \frac{p_\alpha'^2}{2n_\alpha} + i0 \right), \\ \mathcal{S}_{\alpha\beta}(p_\alpha; p'_\beta) &= \delta_{\alpha\beta} \delta(p_\alpha - p'_\beta) - \\ &- 2\pi i \delta \left(-x_\alpha^2 + \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} + x_\beta^2 - \frac{p_\beta'^2}{2n_\beta} \right) \mathcal{H}_{\alpha\beta} \left(p_\alpha; p'_\beta; -x_\beta^2 + \frac{p_\beta'^2}{2n_\beta} + i0 \right). \end{aligned}$$

В заключение этого параграфа докажем леммы 9.4 и 9.6. Для этого изучим интегралы несколько более общего вида, чем приведенные в формулировке этих лемм, а именно

$$\begin{aligned} w_{\alpha\beta}(k, p; k'_\beta; z_1, z_2; f) &= \\ &= (z_2 - z_1) \int \frac{w_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z_1)}{z_2 + x_\beta^2 - \frac{p_\beta'^2}{2n_\beta}} f_\beta(p'_\beta) dp'_\beta. \end{aligned} \quad (9.72)$$

В соответствии с формулой типа (5.3) для ядра $\mathcal{W}_{\alpha\beta}$ мы можем представить эти интегралы в виде

$$w_{\alpha\beta}(k, p; z_1, z_2; k'_\beta) = \rho_{\alpha\beta}(k, p; z_1, z_2; k'_\beta) + \frac{\varphi_\alpha(k_\alpha) \sigma_{\alpha\beta}(p_\alpha; z_1, z_2; k'_\beta)}{z_1 + x_\alpha^2 - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha}}, \quad (9.73)$$

где, в частности,

$$\sigma_{\alpha\beta}(p_\alpha; z_1, z_2; k'_\beta) = (z_2 - z_1) \int \frac{\tilde{\mathcal{H}}_{\alpha\beta}(p_\alpha; k', p'; z_1)}{z_2 + x_\beta^2 - \frac{p_\beta^2}{2n_\beta}} f_\beta(p'_\beta) dp'_\beta. \quad (9.74)$$

Сравнивая (9.43), (9.38) и (9.72), (9.74) и используя (9.4), мы видим, что интегралы (9.43) и (9.38) выражаются через введенные следующим образом:

$$\begin{aligned} m_{\alpha\beta}(k, p; k'_\beta; \varepsilon) &= i\varepsilon t_\alpha \left(k_\alpha, k'_\alpha, \frac{k_\alpha'^2}{2m_\alpha} + i\varepsilon \right) f_\beta(p'_\beta) \delta_{\alpha\beta} + \\ &+ w_{\alpha\beta} \left(k, p; \frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} + i\varepsilon; \frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} + 2i\varepsilon; k'_\beta \right); \\ k_{\alpha\beta}(p_\alpha, k'_\beta, \varepsilon_1, \varepsilon_2) &= \\ &= \sigma_{\alpha\beta} \left(p_\alpha; -x_\alpha^2 + \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} + i\varepsilon_1; -x_\alpha^2 + \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} + i\varepsilon_2; k'_\beta \right). \end{aligned}$$

Докажем следующее утверждение:

Лемма 9.12. Пусть $f_\beta \in \mathfrak{N}(\theta, \mu)$. Тогда для функций $\rho_{\alpha\beta}$ и $\sigma_{\alpha\beta}$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} |\rho_{\alpha\beta}(k, p; z_1, z_2; k'_\beta)| &\leq C(|z_1 - z_2|); \\ |\sigma_{\alpha\beta}(p_\alpha; z_1, z_2; k'_\beta)| &\leq C(|z_1 - z_2|), \end{aligned}$$

равномерные по всем k'_β, z_1 , изменяющемуся в любой конечной области на плоскости Π_{-x} , не содержащей особых точек, и z_2 , изменяющемуся в той же области и удовлетворяющему условию $|z_1 - z_2| \leq \delta$, где $\delta \leq \frac{1}{2} \min_a x_a^2$. При этом $C(|z_1 - z_2|) \rightarrow 0$ при $z_1 \rightarrow z_2$.

Доказательство. Будем использовать тот же прием, что и при доказательстве леммы 9.1. Именно, покажем, что функции

$$\rho_{\alpha\beta}(k, p; z_1, z_2; k'_\beta) \quad \text{и} \quad \sigma_{\alpha\beta}(p_\alpha; z_1, z_2; k'_\beta)$$

можно рассматривать как компоненты элементов $\omega_\beta(z_1, z_2; k'_\beta)$, удовлетворяющих уравнениям

$$\omega_\beta(z_1, z_2; k'_\beta) = \omega_\beta^{(0)}(z_1, z_2; k'_\beta) - \mathbf{A}(z_1) \omega_\beta(z_1, z_2; k'_\beta), \quad (9.75)$$

где для $\omega_\beta^{(0)}(z_1, z_2; k'_\beta)$ справедливы оценки

$$\|\omega_\beta^{(0)}(z_1, z_2; k'_\beta)\|_{\theta, \mu} \leq C(|z_1 - z_2|), \quad (9.76)$$

причем $C(|z_1 - z_2|) \rightarrow 0$ при $z_1 \rightarrow z_2$.

Ясно, что элементы $\omega_{\beta}^{(0)}(z_1, z_2; k_{\beta}')$ должны порождаться интегралами

$$w_{\alpha\beta}^{(0)}(k, p; z_1, z_2; k_{\beta}') = (z_2 - z_1) \int \frac{\mathcal{W}_{\alpha\beta}^{(0)}(k, p; k', p'; z_1)}{z_2 + \kappa_{\beta}^2 - \frac{p_{\beta}^2}{2n_{\beta}}} f_{\beta}(p_{\beta}') dp_{\beta}',$$

где $\mathcal{W}_{\alpha\beta}^{(0)}(k, p; k', p'; z)$ — ядра операторов $\mathbf{W}_{\alpha\beta}^{(0)}(z)$ [см. (3.16)]. Для этих ядер справедливы представления

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\alpha\beta}^{(0)}(k, p; k', p'; z) = & \int t_{\alpha} \left(k_{\alpha}, k_{\alpha}'', z - \frac{p_{\alpha}^2}{2n_{\alpha}} \right) \times \\ & \times \frac{\delta(p_{\alpha} - p_{\alpha}'') \delta(p_{\beta}'' - p_{\beta}')}{\frac{k''^2}{2m} + \frac{p''^2}{2n} - z} t_{\beta} \left(k_{\beta}'', k_{\beta}', z - \frac{p_{\beta}^2}{2n_{\beta}} \right) dk'' dp''. \end{aligned}$$

Подставляя сюда вместо $t_{\alpha} \left(k_{\alpha}, k_{\alpha}', z - \frac{p_{\alpha}^2}{2n_{\alpha}} \right)$ его выражение типа (4.50),

мы получим, что $w_{\alpha\beta}^{(0)}$ естественным образом распадается на два слагаемых

$$w_{\alpha\beta}^{(0)}(k, p; z_1, z_2; k_{\beta}') = \rho_{\alpha\beta}^{(0)}(k, p; z_1, z_2; k_{\beta}') + \frac{\varphi_{\alpha}(k_{\alpha}) \sigma_{\alpha\beta}^{(0)}(p_{\alpha}; z_1, z_2; k_{\beta}')}{z_1 + \kappa_{\alpha}^2 - \frac{p_{\alpha}^2}{2n_{\alpha}}}.$$

Как уже несколько раз отмечалось выше, достаточно исследовать функции $\rho_{\alpha\beta}^{(0)}$. Оценки для $\sigma_{\alpha\beta}^{(0)}$ получаются из оценок для $\rho_{\alpha\beta}^{(0)}$, если в соответствующих оценочных функциях положить $k_{\alpha} = 0$.

Рассмотрим функцию $\rho_{\alpha\beta}^{(0)}$, положив для определенности $\alpha = 23$ и $\beta = 31$. Будем опускать индексы 23 и 31 у $\rho_{23,31}^{(0)}$. Имеем

$$\begin{aligned} \rho^{(0)}(k, p; z_1, z_2; k_{31}') = & (z_2 - z_1) \int \hat{t}_{23} \left(k_{23}, -p_2' - \frac{m_2}{m_2 + m_3} p_1, z_1 - \frac{p_1^2}{2n_1} \right) \times \\ & \times \left[\frac{1}{2m_{31}} \left(p_1 + \frac{m_1}{m_3 + m_1} p_2' \right)^2 + \frac{p_2'^2}{2n_2} - z_1 \right]^{-1} \times \\ & \times \left\{ \hat{t}_{31} \left(p_1 + \frac{m_1}{m_3 + m_1} p_2', k_{31}', z - \frac{p_2^2}{2n_2} \right) + \frac{\varphi_{31} \left(p_1 + \frac{m_1}{m_3 + m_1} p_2' \right) \overline{\varphi_{31}(k_{31}')}}{z_1 + \kappa_{31}^2 - \frac{p_2^2}{2n_2}} \right\} \times \\ & \times \frac{1}{z_2 + \kappa_{31}^2 - \frac{p_2^2}{2n_2}} f_2(p_2') dp_2'. \end{aligned}$$

Обозначим через $\rho_1^{(0)}$ вклад в $\rho^{(0)}$ от выписанного интеграла, когда в фигурных скобках мы берем только первое слагаемое. Мы можем так перестроить знаменатель у соответствующего подынтегрального выражения, что он примет вид

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{\frac{1}{2m_{23}} \left(p_2' + \frac{m_2}{m_2 + m_3} p_1 \right)^2 + \frac{p_1^2}{2n_1} - z_1} + \frac{1}{z_2 + \kappa_{31}^2 - \frac{p_2^2}{2n_2}} \right] \times \\ & \times \frac{z_2 - z_1}{\frac{1}{2m_{31}} \left(p_1 + \frac{m_1}{m_3 + m_1} p_2' \right)^2 + \kappa_{31}^2 + z_2 - z_1}. \end{aligned}$$

Если $|z_1 - z_2| \leq \frac{1}{2} x_{31}^2$, то второй множитель здесь аналитически зависит от z_1 и z_2 и исчезает при $z_1 \rightarrow z_2$. На основании леммы о сингулярных интегралах и при помощи привычных уже оценок интегралов по угловым переменным мы можем показать, что $\rho^{(0)}(k, p; z_1, z_2; k'_{31}) \in \mathfrak{M}(\theta, \mu)$ с некоторыми показателями θ, μ при всех $z_1 \in \Pi_{-x^2}$ и z_2 , таких что $|z_1 - z_2| \leq \frac{1}{2} x_{31}^2$, причем $|\rho^{(0)}| \rightarrow 0$ при $z_1 \rightarrow z_2$.

Подынтегральное выражение для остального вклада в $\rho^{(0)}$ содержит три сингулярных знаменателя. Произведение первых двух мы можем представить в виде

$$\left[\frac{1}{\frac{1}{2m_{31}} \left(p_1 + \frac{m_1}{m_3 + m_1} p'_2 \right)^2 + \frac{p_2'^2}{2n_2} - z_1} + \frac{1}{z_1 + x_{31}^2 - \frac{p_2'^2}{2n_2}} \right] \times \\ \times \frac{1}{\frac{1}{2m_{31}} \left(p_1 + \frac{m_1}{m_3 + m_1} p'_2 \right)^2 + x_{31}^2}.$$

Интеграл $\rho_2^{(0)}$ с первым слагаемым из этого выражения изучается так же, как $\rho_1^{(0)}$. Рассмотрим интеграл со вторым слагаемым

$$\rho_3^{(0)} = (z_2 - z_1) \int \hat{t}_{23} \left(k_{23}, -p'_2 - \frac{m_2}{m_2 + m_3} p_1, z - \frac{p_1^2}{2n_1} \right) \times \\ \times \psi_{31} \left(p_1 + \frac{m_1}{m_3 + m_1} p'_2 \right) \overline{\varphi}_{31}(k'_{31}) \left(z_1 + x_{31}^2 - \frac{p_2'^2}{2n_2} \right)^{-1} \times \\ \times \left(z_2 + x_{31}^2 - \frac{p_2'^2}{2n_2} \right)^{-1} f_2(p'_2) dp'_2.$$

Знаменатели здесь мы можем перестроить следующим образом:

$$\frac{z_2 - z_1}{\left(z_1 + x_{31}^2 - \frac{p_2'^2}{2n_2} \right) \left(z_2 + x_{31}^2 - \frac{p_2'^2}{2n_2} \right)} = \frac{1}{z_1 + x_{31}^2 - \frac{p_2'^2}{2n_2}} - \frac{1}{z_2 + x_{31}^2 - \frac{p_2'^2}{2n_2}},$$

так что $\rho_3^{(0)}(k, p; z_1, z_2; k'_{31})$ представляется в виде разности

$$\rho_3^{(0)}(k, p; z_1, z_2; k'_{31}) = [\rho(k, p; z_1, z_2; k'_{31}) - \rho(k, p; z_1, z_2; k'_{31})] \varphi_{31}(k'_{31})$$

интегралов вида

$$\rho(k, p; z_1, z_2; k'_{31}) = \\ = \int \hat{t}_{23} \left(k_{23}, -p'_2 - \frac{m_2}{m_2 + m_3} p_1, z_1 - \frac{p_1^2}{2n_1} \right) \frac{\psi_{31} \left(p_1 + \frac{m_1}{m_3 + m_1} p'_2 \right)}{z_2 + x_{31}^2 - \frac{p_2'^2}{2n_2}} f_2(p'_2) dp'_2.$$

На основании леммы о сингулярных интегралах мы можем получить для $\rho(k, p; z_1, z_2; k'_{31})$ оценки

$$|\rho(k, p; z_1, z_2; k'_{31})| \leq CN(k, p; \theta), \\ |\rho(k + h, p + l, z_1 + \Delta_1, z_2 + \Delta_2; k'_{31}) - \rho(k, p; z_1, z_2; k'_{31})| \leq \\ \leq CN(k, p; \theta) [|h|^\mu + |l|^\mu + |\Delta_1|^\mu + |\Delta_2|^\mu],$$

откуда следует, что $p_{\beta}^{(0)}(k, p; z_1, z_2; k'_{\beta 1})$ также удовлетворяет оценкам такого типа, но с константой $C(|z_1 - z_2|)$, которая исчезает при $z_1 \rightarrow z_2$.

Функции $\rho_{\alpha\beta}^{(0)}(k, p; z_1, z_2; k'_{\beta})$ с любыми индексами α и β изучаются аналогично. Мы приходим к выводу, что функции $\rho_{\alpha\beta}^{(0)}(k, p; z_1, z_2; k'_{\beta})$ и $\sigma_{\alpha\beta}^{(0)}(p_{\alpha}; z_1, z_2; k'_{\beta})$ можно рассматривать как компоненты элементов $\omega_{\beta}^{(0)}(z_1, z_2; k'_{\beta})$, для которых выполняются оценки (9.76).

Из построения функций $\rho_{\alpha\beta}^{(0)}(k, p; z_1, z_2; k'_{\beta})$, $\sigma_{\alpha\beta}^{(0)}(p_{\alpha}; z_1, z_2; k'_{\beta})$ следует, что компоненты решений уравнений (9.75) совпадают с функциями $\rho_{\alpha\beta}(k, p; z_1, z_2; k'_{\beta})$ и $\sigma_{\alpha\beta}(p_{\alpha}; z_1, z_2; k'_{\beta})$. На основании теоремы 7.2 мы можем утверждать, что при всех z_1 из конечной области на плоскости Π_{-x^2} , не содержащей особых точек, и таких z_2 , что $|z_2 - z_1| \leq \delta$, где $\delta \leq \frac{1}{2} \min_{\alpha} x_{\alpha}^2$,

$$\|\omega_{\beta}(z_1, z_2; k'_{\beta})\| \leq C(|z_1 - z_2|), \quad (9.77)$$

где $C(|z_1 - z_2|) \rightarrow 0$ при $z_1 \rightarrow z_2$.

Оценки для функций $\rho_{\alpha\beta}(k, p; z_1, z_2; k'_{\beta})$ и $\sigma_{\alpha\beta}(p_{\alpha}; z_1, z_2; k'_{\beta})$, сформулированные в лемме, следуют из оценок (9.77).

Лемма доказана.

Доказательство лемм 9.4 и 9.6 следует из леммы 9.12 и предшествующих ей рассуждений.

§ 10. ОБОСНОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ С ОПЕРАТОРОМ $\mathbf{H}$

В настоящем параграфе мы покажем, что введенные в § 8 операторы $\mathbf{u}^{(+)}$ и $\mathbf{u}^{(-)}$ играют важную роль при описании асимптотики при $t \rightarrow \pm\infty$ решения нестационарного уравнения Шредингера

$$i \frac{\partial}{\partial t} f(t) = \mathbf{H} f(t). \quad (10.1)$$

Мы докажем следующее утверждение:

Теорема 10.1. *Оператор*

$$\mathbf{u}(t) = \exp \{i\mathbf{H}t\} \exp \{-i\mathbf{H}_0 t\} \quad (10.2)$$

сильно сходится при $t \rightarrow \pm\infty$. При этом

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^{(\pm)}. \quad (10.3)$$

Доказательство дано ниже.

Заметим, что решение уравнения (10.1), удовлетворяющее начальному условию $f(t)|_{t=0} = f^{(0)}$, записывается в виде

$$f(t) = \exp \{-i\mathbf{H}t\} f^{(0)},$$

так что ясно, что в теореме 10.1 говорится об асимптотике решения уравнения (10.1) при $t \rightarrow \pm\infty$. При помощи теоремы 10.1 мы можем показать, что для системы с оператором энергии $\mathbf{H}$ имеет смысл нестационарная постановка задачи рассеяния в следующей форме:

По заданному элементу f_- найти решение уравнения (10.1), удовлетворяющее условию

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|f(t) - \exp \{-i\mathbf{H}_0 t\} f_-\| = 0. \quad (10.4)$$

Показать, что существует такой элемент f_+ , что при $t \rightarrow +\infty$ это решение имеет асимптотику

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|f(t) - \exp\{-i\mathbf{h}_0 t\} f_+\| = 0. \quad (10.5)$$

Теорема 10.2. *Сформулированная задача имеет единственное решение. При этом*

$$f_+ = s f_-, \quad (10.6)$$

где s — унитарный оператор, введенный в § 8.

Теорема 10.2 дает математическое оправдание нестационарной постановки задачи рассеяния для рассматриваемой системы. Элемент $\exp\{-i\mathbf{h}_0 t\} f_-$ при $t \rightarrow -\infty$ описывает свободное относительное движение двух далеко разведенных и не взаимодействующих частиц. Решение $f(t)$ описывает поведение системы во время столкновения этих частиц. Асимптотика (10.5) показывает, что после столкновения частицы вновь расходятся на большое расстояние и движение опять становится свободным. Вся информация об изменении этого свободного движения в результате взаимодействия содержится в операторе s . Этот оператор называется оператором рассеяния.

Перейдем к доказательству сформулированных теорем. Докажем сначала теорему 10.2, используя теорему 10.1. Рассмотрим элемент

$$f(t) = \exp\{-i\mathbf{h}t\} \mathbf{u}^{(-)} f_- \quad (10.7)$$

и покажем, что он дает решение поставленной задачи. Действительно, в силу унитарности $\exp\{-i\mathbf{h}t\}$ мы имеем

$$\|f(t) - \exp\{-i\mathbf{h}_0 t\} f_-\| = \|\mathbf{u}^{(-)} - \exp\{i\mathbf{h}t\} \exp\{-i\mathbf{h}_0 t\}\| f_-,$$

и выражение в правой части исчезает при $t \rightarrow -\infty$ по теореме 10.1. Построенное решение единственно. Действительно, пусть $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — два решения нашей задачи. Обозначим $f_1^{(0)} = f_1(0)$ и $f_2^{(0)} = f_2(0)$. Имеем

$$\|f_1^{(0)} - f_2^{(0)}\| = \|f_1(t) - f_2(t)\| \leq \|f_1(t) - \exp\{-i\mathbf{h}_0 t\} f_-\| + \\ + \|f_2(t) - \exp\{-i\mathbf{h}_0 t\} f_-\|,$$

и правая часть может быть сделана сколь угодно малой при $t \rightarrow -\infty$.

Докажем теперь асимптотику (10.5). Обозначим

$$f^{(0)} = f(t)|_{t=0} = \mathbf{u}^{(-)} f_-.$$

В силу (8.34) мы имеем

$$f^{(0)} = \mathbf{u}^{(+)} s f_- = \mathbf{u}^{(+)} f_+,$$

где $f_+ = s f_-$, и, таким образом,

$$f(t) = \exp\{-i\mathbf{h}t\} \mathbf{u}^{(+)} f_+.$$

Повторяя приведенные в начале доказательства рассуждения, мы можем доказать теперь, что при нашем выборе f_+ (10.5) справедливо. Теорема доказана.

Для доказательства теоремы 10.1 достаточно доказать следующее утверждение:

Лемма 10.1. *Пусть f и $f' \in \mathfrak{d}_0$. Тогда*

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (\exp\{-i\mathbf{h}t\} \mathbf{u}^{(\pm)} f, \exp\{-i\mathbf{h}_0 t\} f') = (f, f'). \quad (10.8)$$

Покажем, как теорема 10.1 следует из этой леммы. В силу изометричности операторов $\mathbf{u}^{(+)}$ и $\mathbf{u}^{(-)}$ мы имеем

$$\begin{aligned} & \|\exp\{i\mathbf{h}t\}\exp\{-i\mathbf{h}_0t\}f - \mathbf{u}^{(\pm)}f\|^2 = \\ & = 2\{(f, f) - \operatorname{Re}(\mathbf{u}^{(\pm)}f, \exp\{i\mathbf{h}t\}\exp\{-i\mathbf{h}_0t\}f)\}, \end{aligned}$$

и правая часть исчезает в пределе при $t \rightarrow \pm\infty$, если лемма 10.1 верна. Таким образом, оператор $\mathbf{u}(t)$ сходится на элементах $f \in \mathfrak{D}_0$. В силу плотности множества $\mathfrak{D}_0$ в $\mathfrak{H}$ и унитарности оператора $\mathbf{u}(t)$ мы заключаем отсюда, что $\mathbf{u}(t)$ сильно сходится, и теорема доказана.

Докажем теперь лемму 10.1. Используя (8.15), преобразуем скалярное произведение в левой части (10.8)

$$\begin{aligned} & (\exp\{-i\mathbf{h}t\}\mathbf{u}^{(\pm)}f, \exp\{-i\mathbf{h}_0t\}f) = \\ & = (\mathbf{u}^{(\pm)}\exp\{-i\mathbf{h}_0t\}f, \exp\{-i\mathbf{h}_0t\}f') = \\ & = (f, f') - (\mathbf{k}(\mp 0, \mp 0)\exp\{-i\mathbf{h}_0t\}f, \exp\{-i\mathbf{h}_0t\}f'). \end{aligned} \quad (10.9)$$

Нам надо показать, что второе слагаемое в (10.9) исчезает в пределе при $t \rightarrow \pm\infty$. Рассмотрим его подробнее

$$\begin{aligned} & (\mathbf{k}(\mp 0, \mp 0)\exp\{-i\mathbf{h}_0t\}f, \exp\{-i\mathbf{h}_0t\}f') = \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow \mp 0} \int \frac{f'(k)}{\frac{k^2}{2m} - \frac{k'^2}{2m} - i\varepsilon} \exp\left\{i\left[\frac{k^2}{2m} - \frac{k'^2}{2m}\right]t\right\} f(k') dk dk'. \end{aligned}$$

После интегрирования по угловым переменным и замены переменных $\frac{k^2}{2m} = x$, $\frac{k'^2}{2m} = y$ этот интеграл принимает вид

$$I(t, \varepsilon) = \int_0^A dx \int_0^A dy \Phi(x, y) \frac{\exp\{i(x-y)t\}}{x-y-i\varepsilon}.$$

Здесь A связано с радиусом сферы, вне которой $f(k) = f'(k) = 0$. Воспользуемся хорошо известным утверждением:

Лемма 10.2. Пусть $\Phi(x, y)$ — ограниченная, гельдеровски непрерывная функция, заданная на квадрате $0 \leq x \leq A$, $0 \leq y \leq A$. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow \mp 0} I(t, \varepsilon) = 0.$$

Напомним, что часто сформулированное утверждение символически записывают в виде

$$\frac{\exp\{itx\}}{x \pm i0} \rightarrow 0; \quad t \rightarrow \pm\infty.$$

Доказательство леммы 10.1 следует из приведенных выше рассуждений и леммы 10.2.

§ 11. О НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ С ОПЕРАТОРОМ $\mathbf{H}$

В настоящем параграфе мы покажем, как операторы $\mathbf{U}^{(\pm)}$, построенные в § 9, связаны с пределами решений уравнения Шредингера

$$i \frac{\partial f(t)}{\partial t} = \mathbf{H}f(t) \quad (11.1)$$

при $|t| \rightarrow \infty$.

Операторы $U_0^{(\pm)}$ и $U_\alpha^{(\pm)}$, $\alpha=23, 31, 12$, с помощью которых строятся $U^{(\pm)}$, действуют из $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_\alpha$ в $\mathcal{H}$. Здесь мы построим по этим операторам тесно связанные с ними, но действующие в $\mathcal{H}$ операторы $\tilde{U}_0^{(\pm)}$ и $\tilde{U}_\alpha^{(\pm)}$. Введем для этого предварительно несколько определений.

Обозначим через I_0 тождественный оператор, действующий из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}_0$, т. е. оператор, обратный к оператору E_0 , введенному в § 9. Через P_α , $\alpha=23, 31, 12$, обозначим проектор в $\mathcal{H}$ на подпространство, образованное функциями вида

$$f_\alpha(k, p) = \psi_\alpha(k_\alpha) f_\alpha(p_\alpha), \quad (11.2)$$

где $f_\alpha(p)$ — произвольная квадратично интегрируемая функция. Наконец, через I_α обозначим оператор из $P_\alpha \mathcal{H}$ в $\mathcal{H}_\alpha$, сопоставляющий функции вида (11.2) элемент $f_\alpha \in \mathcal{H}_\alpha$, представляемый функцией $f(p_\alpha)$.

Операторы $\tilde{U}_0^{(\pm)}$ и $\tilde{U}_\alpha^{(\pm)}$, $\alpha=23, 31, 12$, с которыми мы будем иметь дело в этом параграфе, определяются следующим образом:

$$\tilde{U}_0^{(\pm)} = U_0^{(\pm)} I_0; \quad (11.3)$$

$$\tilde{U}_\alpha^{(\pm)} = U_\alpha^{(\pm)} I_\alpha P_\alpha, \quad \alpha=23, 31, 12. \quad (11.4)$$

Ясно, что операторы $U_0^{(\pm)}$, $U_\alpha^{(\pm)}$ и $\tilde{U}_0^{(\pm)}$, $\tilde{U}_\alpha^{(\pm)}$ определяют друг друга однозначно.

Основным результатом этого параграфа является следующее утверждение:

Теорема 11.1. Операторы

$$U_0(t) = \exp \{iHt\} \exp \{-iH_0 t\}; \quad (11.5)$$

$$U_\alpha(t) = \exp \{iHt\} \exp \{-iH_\alpha t\} P_\alpha \quad (11.6)$$

сильно сходятся при $t \rightarrow \pm\infty$, причем

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} U_0(t) = \tilde{U}_0^{(\pm)}, \quad (11.7)$$

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} U_\alpha(t) = \tilde{U}_\alpha^{(\pm)}. \quad (11.8)$$

Заметим, что решение уравнения (11.1), удовлетворяющее начальному условию $f(t)|_{t=0} = f^{(0)}$, записывается в виде

$$f(t) = \exp \{-iHt\} f^{(0)} = W(t) f^{(0)}, \quad (11.9)$$

так что ясно, что в теореме 11.1 речь идет об асимптотике этого решения при $t \rightarrow \pm\infty$.

Теорема 11.1 аналогична теореме 10.1, в которой рассматривается оператор $w(t) = \exp \{-iht\}$. Однако видно существенное отличие результатов, относящихся к операторам $w(t)$ и $W(t)$. Сравнивая (10.2) и (11.5), мы видим, что по своему построению операторы $u(t)$ и $U_0(t)$ аналогичны. Важным свойством асимптотики оператора $u(t)$, т. е. операторов $u^{(+)}$ и $u^{(-)}$, которое позволяет ввести унитарный оператор рассеяния $s = u^{(+)*} u^{(-)}$, является совпадение областей значений этих операторов. Операторы $\tilde{U}_0^{(\pm)}$ не обладают этим свойством. Как следует из теоремы 9.2, совпадают только ортогональные суммы областей значений операторов $\tilde{U}_0^{(+)}$, $\tilde{U}_\alpha^{(+)}$ и $\tilde{U}_0^{(-)}$, $\tilde{U}_\alpha^{(-)}$, $\alpha=23, 31, 12$.

Это отличие, конечно, тесно связано с отмеченным во введении принципиальным отличием системы двух частиц от системы трех частиц. В терминах общей теории рассеяния первая система является одноканальной, а вторая — многоканальной. Результаты, которые мы доказы-

ваем в настоящем параграфе, позволяют придать точный математический смысл понятиям канала, волновых операторов и оператора рассеяния для многоканальной системы на примере рассмотренной системы трех частиц. Именно, каналами естественно называть подпространства $\mathcal{S}_0$ и $\mathcal{S}_\alpha$ пространства $\mathfrak{S}$, волновыми операторами — операторы $\mathbf{U}^{(\pm)}$ и оператором рассеяния — оператор $\mathbf{S}$. Все эти понятия введены в § 9.

Так же, как и в § 10, основу доказательства теоремы 11.1 составляет

Лемма 11.1. *Справедливы следующие утверждения:*

1. Пусть $f(k, p)$ и $f'(k, p)$ — финитные гладкие функции, причем $f(k, p) = 0$ в окрестности особых поверхностей $\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} = \lambda_n$. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (\exp\{-i\mathbf{H}t\} \tilde{\mathbf{U}}_0^{(\pm)} f, \exp\{-i\mathbf{H}_0 t\} f') = (f, f'). \quad (11.10)$$

2. Пусть $f(k, p)$ и $f'(k, p)$ представляются в виде (11.2), т. е. $f \in \mathbf{P}_\alpha \mathcal{S}$ и $f' \in \mathbf{P}_\alpha \mathcal{S}$, и пусть $f_\alpha(p_\alpha)$ и $f'_\alpha(p_\alpha)$ — финитные гладкие функции, причем $f_\alpha(p_\alpha) = 0$ в окрестности особых поверхностей $-\frac{x_\alpha^2}{2} + \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} = \lambda_n$. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (\exp\{-i\mathbf{H}t\} \tilde{\mathbf{U}}_\alpha^{(\pm)} f, \exp\{-i\mathbf{H}_\alpha t\} \mathbf{P}_\alpha f') = (\mathbf{P}_\alpha f, \mathbf{P}_\alpha f'). \quad (11.11)$$

Прежде чем доказывать эту лемму, покажем, как из нее следует теорема 11.1. В силу изометричности операторов $\mathbf{U}_0^{(\pm)}$ и $\mathbf{U}_\alpha^{(\pm)}$, $\alpha = 23, 31, 12$, операторы $\tilde{\mathbf{U}}_0^{(\pm)}$ изометричны, а $\tilde{\mathbf{U}}_\alpha^{(\pm)}$, $\alpha = 23, 31, 12$, частично изометричны. Точнее, выполняются соотношения

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{U}}_0^{(\pm)} f, \tilde{\mathbf{U}}_0^{(\pm)} f') &= (f, f'); \\ (\tilde{\mathbf{U}}_\alpha^{(\pm)} f, \tilde{\mathbf{U}}_\alpha^{(\pm)} f') &= (\mathbf{P}_\alpha f, \mathbf{P}_\alpha f'). \end{aligned}$$

При помощи этих соотношений мы получаем, что

$$\begin{aligned} \|[\mathbf{U}_0(t) - \tilde{\mathbf{U}}_0^{(\pm)}] f\|^2 &= 2\|f\|^2 - \operatorname{Re}(\exp\{-i\mathbf{H}t\} \tilde{\mathbf{U}}_0^{(\pm)} f, \exp\{-i\mathbf{H}_0 t\} f); \\ \|[\mathbf{U}_\alpha(t) - \tilde{\mathbf{U}}_\alpha^{(\pm)}] f\|^2 &= 2\|\mathbf{P}_\alpha f\|^2 - \operatorname{Re}(\exp\{-i\mathbf{H}t\} \tilde{\mathbf{U}}_\alpha^{(\pm)} f, \exp\{-i\mathbf{H}_\alpha t\} \mathbf{P}_\alpha f). \end{aligned}$$

На основании леммы 11.1 правые части здесь исчезают при $t \rightarrow \pm\infty$, и мы получаем, что соотношения (11.7) и (11.8) выполняются на плотных множествах. В силу ограниченности всех операторов, входящих в эти соотношения, они продолжаются на все пространство, так что теорему 11.1 можно считать доказанной.

Займемся теперь доказательством леммы 11.1. Сравнивая определения операторов $\mathbf{H}_\alpha$, $\tilde{\mathbf{H}}_\alpha$ и $\mathbf{I}_\alpha$, $\alpha = 0, 23, 31, 12$, мы видим, что

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{I}_0^{-1} \tilde{\mathbf{H}}_0 \mathbf{I}_0, \quad \mathbf{H}_\alpha \mathbf{P}_\alpha = \mathbf{I}_\alpha^{-1} \tilde{\mathbf{H}}_\alpha \mathbf{I}_\alpha.$$

Используя (9.48) и (9.49) при $\varphi(x) = \exp\{itx\}$, мы получаем отсюда следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \exp\{i\mathbf{H}t\} \tilde{\mathbf{U}}_0^{(\pm)} &= \tilde{\mathbf{U}}_0^{(\pm)} \exp\{i\mathbf{H}_0 t\}; \\ \exp\{i\mathbf{H}t\} \tilde{\mathbf{U}}_\alpha^{(\pm)} &= \tilde{\mathbf{U}}_\alpha^{(\pm)} \exp\{i\mathbf{H}_\alpha t\} \mathbf{P}_\alpha, \end{aligned}$$

при помощи которых мы можем переписать выражения в левой части (11.10) и (11.11) в виде

$$(\tilde{\mathbf{U}}_0^{(\pm)} \exp\{-i\mathbf{H}_0 t\} f, \exp\{-i\mathbf{H}_0 t\} f')$$

и

$$(\tilde{U}_\alpha^{(\pm)} \exp \{-i\mathbf{H}_\alpha t\} \mathbf{P}_\alpha f, \exp \{-i\mathbf{H}_\alpha t\} \mathbf{P}_\alpha f')$$

соответственно.

Для доказательства леммы нам достаточно показать, что

$$I_0^{(\pm)}(t) = ([\tilde{U}_0^{(\pm)} - \mathbf{E}] \exp \{-i\mathbf{H}_0 t\} f, \exp \{-i\mathbf{H}_0 t\} f') \quad (11.12)$$

и

$$I_\alpha^{(\pm)}(t) = ([\tilde{U}_\alpha^{(\pm)} - \mathbf{P}_\alpha] \exp \{-i\mathbf{H}_\alpha t\} \mathbf{P}_\alpha f, \exp \{-i\mathbf{H}_\alpha t\} \mathbf{P}_\alpha f') \quad (11.13)$$

исчезают при $t \rightarrow \pm\infty$, если f и f' обладают свойствами, перечисленными в ее формулировке. Рассмотрим сначала выражение (11.12). Используя определение оператора $\mathbf{U}_0^{(\pm)}$ [см. (9.26)], мы можем переписать его в следующем виде:

$$I_0^{(\pm)}(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \pm 0} \sum I_{\alpha\beta}(t, \varepsilon),$$

где

$$I_{\alpha\beta}(t, \varepsilon) = - \int \overline{f'(k, p)} \mathcal{M}_{\alpha\beta} \left(k, p; k', p'; \frac{k'^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} + i\varepsilon \right) f(k', p') \times \\ \times \frac{\exp \left\{ i \left[\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - \frac{k'^2}{2m} - \frac{p'^2}{2n} \right] t \right\}}{\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - \frac{k'^2}{2m} - \frac{p'^2}{2n} - i\varepsilon} dk dp dk' dp'.$$

Если обозначить

$$\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} = x, \quad \frac{k'^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} = y$$

и

$$\Phi_{\alpha\beta}(x, y, \varepsilon) = - \int \delta \left(\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - x \right) \overline{f'(k, p)} \times \\ \times \mathcal{M}_{\alpha\beta} \left(k, p; k', p'; \frac{k'^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} + i\varepsilon \right) f(k', p') \delta \left(\frac{k'^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} - y \right) dk dp dk' dp',$$

то $I_{\alpha\beta}(t, \varepsilon)$ перепишется в виде

$$I_{\alpha\beta}(t, \varepsilon) = \int_0^A dx \int_0^A dy \Phi_{\alpha\beta}(x, y; \varepsilon) \frac{\exp \{ i (x - y) t \}}{x - y - i\varepsilon}.$$

Нетрудно убедиться, что встречающаяся при построении $\Phi_{\alpha\beta}(x, y; \varepsilon)$ функция

$$m_{\alpha\beta}(k', p'; x, \varepsilon) = \int \mathcal{M}_{\alpha\beta} \left(k, p; k', p'; \frac{k'^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} + i\varepsilon \right) \times \\ \times \overline{f'(k, p)} \delta \left(\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} - x \right) dk dp$$

выражается в виде разности введенных в § 9 функций $m_{\alpha\beta}(k, k; z_1, z_2; f')$ [см. (9.17)] при $z_1 = \frac{k'^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} + i\varepsilon$ и $z_2 = x \pm i0$ и поэтому обладает свойствами, перечисленными в лемме 9.1. В частности, из этой леммы мы получаем, что $m_{\alpha\beta}(k', p'; x, \varepsilon)$ является гладкой функцией всех своих переменных при всех k', p' из ограниченной области, не содержащей

особых поверхностей $\frac{k'^2}{2m} + \frac{p'^2}{2n} = \lambda_n$. Так как $f(k', p')$ исчезает в окрестности этих поверхностей, то произведение

$$f(k', p') m_{\alpha\beta}(k', p', x, \varepsilon)$$

является гладкой ограниченной функцией при всех значениях своих переменных, и, следовательно, это справедливо также и для $\Phi_{\alpha\beta}(x, y; \varepsilon)$. На основании леммы 10.2 мы получаем, что $I_{\alpha\beta}^{(\pm)}(t)$ исчезает при $t \rightarrow \pm\infty$, так что первое утверждение леммы 11.1 доказано.

Рассмотрим теперь выражение (11.13), которое можно переписать в следующем виде:

$$I_{\alpha}^{(\pm)}(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \mp 0} \sum_{\beta} \tilde{I}_{\alpha\beta}(t, \varepsilon),$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{\alpha\beta}(t, \varepsilon) = & - \int \overline{\psi_{\alpha}(k_{\alpha})} \overline{f'_{\alpha}(p_{\alpha})} \mathcal{K}_{\beta\alpha} \left(k, p; p'_{\alpha}; -x_{\alpha}^2 + \frac{p_{\alpha}^{'2}}{2n_{\alpha}} + i\varepsilon \right) f_{\alpha}(p'_{\alpha}) \times \\ & \times \frac{\exp \left\{ i \left[\frac{p_{\alpha}^2}{2n_{\alpha}} - \frac{p_{\alpha}^{'2}}{2n_{\alpha}} \right] t \right\}}{\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} + x_{\alpha}^2 - \frac{p_{\alpha}^{'2}}{2n_{\alpha}} - i\varepsilon} dk dp dp_{\alpha}. \end{aligned}$$

Распишем здесь $\mathcal{K}_{\beta\alpha}$ в терминах компонент $\mathcal{G}_{\beta\alpha}$ и $\mathcal{H}_{\beta\alpha}$ по формуле типа (5.23). Мы получим

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{\alpha\beta}(t, \varepsilon) = & - \int \overline{\psi_{\alpha}(k_{\alpha})} \overline{f'_{\alpha}(p_{\alpha})} f_{\alpha}(p'_{\alpha}) \frac{\exp \left\{ i \left[\frac{p_{\alpha}^2}{2n_{\alpha}} - \frac{p_{\alpha}^{'2}}{2n_{\alpha}} \right] t \right\}}{\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} + x_{\alpha}^2 - \frac{p_{\alpha}^{'2}}{2n_{\alpha}} - i\varepsilon} \times \\ & \times \left[\mathcal{G}_{\alpha\beta} \left(k, p; p'_{\alpha}; -x_{\alpha}^2 + \frac{p_{\alpha}^{'2}}{2n_{\alpha}} + i\varepsilon \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\varphi_{\beta}(k_{\beta}) \mathcal{H}_{\beta\alpha} \left(p_{\beta}; p'_{\alpha}; -x_{\alpha}^2 + \frac{p_{\alpha}^{'2}}{2n_{\alpha}} + i\varepsilon \right)}{-x_{\alpha}^2 + \frac{p_{\alpha}^{'2}}{2n_{\alpha}} + x_{\beta}^2 - \frac{p_{\beta}^2}{2n_{\beta}} + i\varepsilon} \right] dk dp dp_{\alpha}. \end{aligned}$$

Мы можем перестроить здесь произведение сингулярных знаменателей, так что оно примет вид

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} + x_{\alpha}^2 - \frac{p_{\alpha}^{'2}}{2n_{\alpha}} - i\varepsilon \right)^{-1} + \right. \\ & \left. + \left(-x_{\alpha}^2 + \frac{p_{\alpha}^{'2}}{2n_{\alpha}} + x_{\beta}^2 - \frac{p_{\beta}^2}{2n_{\beta}} + i\varepsilon \right)^{-1} \right] \left(\frac{k_{\beta}^2}{2m_{\beta}} + x_{\beta}^2 \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Можно считать, что в числителе в подынтегральном выражении для $\tilde{I}_{\alpha\beta}(t, \varepsilon)$ стоят гладкие функции. Действительно, хотя компоненты ядер $\mathcal{W}_{\alpha\beta}$ сингулярны при $z = \lambda_n$, эти особенности погашаются, так как функция $f_{\alpha}(p'_{\alpha})$ по условию исчезает в окрестности поверхностей

$-\kappa_\alpha^2 + \frac{p_\alpha'^2}{2n_\alpha} = \lambda_n$. Вклад в $\mathcal{G}_{\beta\alpha}$ и $\mathcal{H}_{\beta\alpha}$ от первых итераций системы уравнений (3.20) также не нарушает гладкости, так как на основании леммы 6.5 соответствующие ядра не имеют второстепенных особенностей, если z меняется в окрестности $-\kappa_\alpha^2 + \frac{p_\alpha'^2}{2n_\alpha}$.

Если $\alpha \neq \beta$, то при оценке $\tilde{I}_{\alpha\beta}(t, \varepsilon)$ мы можем взять в качестве переменных интегрирования p_α и p'_α . При интегрировании по p_β мы имеем дело с обыкновенными сингулярными интегралами. Мы получаем, что после этого интегрирования $\tilde{I}_{\alpha\beta}$ представляется в виде

$$\tilde{I}_{\alpha\beta}(t, \varepsilon) = \int \Phi(p_\alpha, p'_\alpha; \varepsilon) \exp \left\{ i \left[\frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} - \frac{p_\alpha'^2}{2n_\alpha} \right] t \right\} dp_\alpha dp'_\alpha,$$

где $\Phi(p_\alpha, p'_\alpha; \varepsilon)$ — финитная, гладкая и равномерно по ε ограниченная функция. На основании леммы Римана—Лебега мы можем заключить, что $\tilde{I}_{\alpha\beta}(t, \varepsilon)$, $\alpha \neq \beta$ исчезает при $|t| \rightarrow \infty$ равномерно по ε .

Пусть теперь $\alpha = \beta$. В качестве переменных интегрирования возьмем k_α и p_α . После интегрирования по k_α слагаемое с знаменателем $\left[\frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2n} + \kappa_\alpha^2 - \frac{p_\alpha'^2}{2n_\alpha} - i\varepsilon \right]^{-1}$ станет гладкой функцией p_α и p'_α , и вклад в $\tilde{I}_{\alpha\alpha}$ от него исчезает при $|t| \rightarrow \infty$. В оставшемся члене интеграл по k_α представляет собой просто нормировочный интеграл функции $\phi_\alpha(k_\alpha)$. Мы получим в результате, что при $|t| \rightarrow \infty$

$$I_\alpha^{(\pm)}(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \mp 0} \int \overline{f'_\alpha(p_\alpha)} \mathcal{H}_{\alpha\alpha} \left(p_\alpha, p'_\alpha, -\kappa_\alpha^2 + \frac{p_\alpha'^2}{2n_\alpha} + i\varepsilon \right) f_\alpha(p'_\alpha) \times \\ \times \exp \left\{ i \left[\frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} - \frac{p_\alpha'^2}{2n_\alpha} \right] t \right\} \left[\frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} - \frac{p_\alpha'^2}{2n_\alpha} - i\varepsilon \right]^{-1} dp_\alpha dp'_\alpha + o(1).$$

На основании леммы 10.2 первое слагаемое здесь исчезает при $t \rightarrow \pm \infty$, так что второе утверждение леммы также можно считать доказанным.

Лемма доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

СВОЙСТВА ГЕЛЬДЕРОВСКИХ ФУНКЦИЙ

Здесь мы докажем сформулированные в начале § 4 утверждения относительно гельдеровских функций. В этих утверждениях речь шла о функциях $f(k_1, \dots, k_n, z_1, \dots, z_m)$, зависящих от n трехмерных и m комплексных переменных. Здесь удобно заменять все или почти все эти переменные одной буквой и говорить о функциях $f(x)$, заданных на метрическом пространстве $\mathfrak{X}$ и имеющих значения в метрическом пространстве $\mathfrak{Y}$. Обозначим через $|x - x'|$ и $|f(x) - f(x')|$ расстояние в $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ соответственно.

Лемма I. 1. Пусть $f(x_1, x_2)$ — функция, заданная на $\mathfrak{X} \otimes \mathfrak{X}$ и имеющая значения в $\mathfrak{Y}$, причем

$$|f(x_1, x_2) - f(x'_1, x'_2)| \leq C(|x_1 - x'_1|^{\mu_1} + |x_2 - x'_2|^{\mu_2}). \quad (\text{I. 1})$$

Тогда

$$f(x) = f(x, x)$$

удовлетворяет условию

$$|f(x) - f(x')| \leq C|x - x'|^\mu, \quad |x - x'| \leq 1, \quad (\text{I. 2})$$

где $\mu = \min(\mu_1, \mu_2)$.

Доказательство немедленно следует из такой последовательности оценок:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x')| &= |f(x, x) - f(x', x')| \leq |f(x, x') - f(x', x')| + \\ &+ |f(x, x) - f(x, x')| \leq C(|x - x'|^{\mu_1} + |x - x'|^{\mu_2}) \leq C|x - x'|^\mu. \end{aligned}$$

Лемма I. 2. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — два, вообще говоря, различных метрических пространства и $f(x, y)$ — заданная на $\mathfrak{X} \otimes \mathfrak{Y}$ функция со значениями в $\mathfrak{Y}$ и удовлетворяющая условию

$$|f(x, y) - f(x', y')| \leq C(|x - x'|^\mu + |y - y'|^\nu). \quad (\text{I. 3})$$

Справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x, y') - f(x', y) + f(x', y')| &\leq C|x - x'|^{\mu\gamma} |y - y'|^{\nu(1-\gamma)}, \\ 0 &\leq \gamma \leq 1. \end{aligned} \quad (\text{I. 4})$$

Доказательство. Пусть

$$|x - x'|^\mu \geq |y - y'|^\nu.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x, y') - f(x', y) + f(x', y')| &\leq |f(x, y) - f(x, y')| + \\ &+ |f(x', y) - f(x', y')| \leq C|y - y'|^\nu \leq C|y - y'|^{\nu[\gamma + (1-\gamma)]} \leq \\ &\leq C|x - x'|^{\mu\gamma} |y - y'|^{\nu(1-\gamma)}. \end{aligned}$$

Случай $|x - x'|^\mu \leq |y - y'|^\nu$ рассматривается аналогично, если сгруппировать в левой части (I. 4) первое слагаемое с третьим, а второе с четвертым. Лемма доказана.

Из доказанных лемм следуют утверждения I и II из § 4. Перейдем к доказательству утверждения III, т. е. леммы о сингулярных интегралах. К сожалению,

нам не удалось найти нужный результат в литературе, посвященной сингулярным интегралам. Однако нетрудно свести его доказательство к известным результатам.

Обычно рассматриваются сингулярные интегралы вида

$$\Phi(z) = \oint_{\gamma} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt, \quad (I.5)$$

где контур γ расположен в конечной части комплексной плоскости. При этом, для того чтобы придать интегралу (I.5) смысл при всех z вплоть до контура, на подынтегральную функцию $\varphi(t)$ накладывают условия Гельдера

$$|\varphi(t)| \leq C; \quad |\varphi(t) - \varphi(t')| \leq C|t - t'|^\mu, \quad (I.6)$$

где $|t - t'|$ — расстояние по дуге между точками контура t и t' , μ — некоторый показатель, $0 < \mu \leq 1$. Если условие (I.6) выполняется при всех малых $|t - t'|$, то оно выполняется и для любых расстояний между t и t' .

В интересующем нас случае контуром интегрирования является прямая, уходящая на бесконечность. В этом случае условия (I.6) следует модифицировать, добавляя условия на бесконечности. Мы будем использовать следующие условия:

$$\begin{aligned} |\varphi(t)| &\leq C(1 + |t|)^{-\theta}; \\ |\varphi(t + l) - \varphi(t)| &\leq C(1 + |t|)^{-\theta} |l|^\mu. \end{aligned} \quad (I.7)$$

Здесь считается, что $\varphi(t)$ задана на вещественной оси $-\infty < t < \infty$, l — вещественное число, θ и μ — некоторые показатели, причем $0 < \theta < 1$; $0 < \mu < 1$. Если (I.7) выполнено для малых $|l|$, то его можно считать выполненным и для любых l , удовлетворяющих условию $|l| \leq A$, где A — фиксированное конечное число. Однако с ростом A соответствующая константа, вообще говоря, растет. Мы обычно будем считать, что (I.7) выполнено для $|l| \leq 1$. Обозначим

$$\|\varphi\|_{\theta, \mu} = \sup_{t, |l| \leq 1} (1 + |t|)^\theta \left\{ |\varphi(t)| + \frac{|\varphi(t + l) - \varphi(t)|}{|l|^\mu} \right\}. \quad (I.8)$$

Будем использовать следующее утверждение:

Пусть $\varphi(t)$ задана на вещественной оси $-\infty < t < \infty$, причем $\|\varphi\|_{0, \mu} < \infty$ и $\varphi(t) \equiv 0$ при $|t| \geq A$. Тогда

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt = \int_{-A}^A \frac{\varphi(t)}{t-z} dt$$

является аналитической функцией комплексной переменной z на всей плоскости с разрезом по вещественной оси от $-A$ до A , причем при всех z на этой плоскости выполняются оценки

$$\begin{aligned} |\Phi(z)| &\leq C \|\varphi\|_{0, \mu} (1 + |z|)^{-1}, \\ |\Phi(z + \Delta) - \Phi(z)| &\leq C \|\varphi\|_{0, \mu} (1 + |z|)^{-1} |\Delta|^\mu, \end{aligned}$$

где C зависит только от A и μ .

Для $|z| \geq 2A$ приведенные оценки очевидны, так как при таких $|z|$ интеграл несингулярен. При малых $|z|$ утверждение следует из известной леммы Привалова об интегралах в смысле главного значения с гильбертовской плотностью и принципа максимума для аналитических функций. Доказательство леммы Привалова и других свойств сингулярных интегралов, необходимых для доказательства сформулированного утверждения, можно найти, например, в книге [11]. Условимся для краткости ссылаться на это утверждение просто как на лемму Привалова.

Применим лемму Привалова для доказательства следующей леммы:

Лемма 1.3. Пусть $\varphi(t)$ задана на вещественной оси, причем $\|\varphi(t)\|_{\theta, \mu} < \infty$.
Функция

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt \quad (I.9)$$

аналитична по z в верхней и нижней полуплоскостях и непрерывна вплоть до вещественной оси, причем при всех z с $\text{Im } z \geq 0$ или с $\text{Im } z \leq 0$ выполняются оценки

$$\begin{aligned} |\Phi(z)| &\leq C \|\varphi\|_{\theta, \mu} (1 + |z|)^{-\theta'}, \\ |\Phi(z + \Delta) - \Phi(z)| &\leq C \|\varphi\|_{\theta, \mu} (1 + |z|)^{-\theta'} |\Delta|^\mu, \end{aligned} \quad (I.10)$$

где θ' можно брать меньшим и сколь угодно близким к θ .

Доказательство. Будем использовать обычные обозначения

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z, \quad \rho = |z|, \quad \varphi = \arg z,$$

так что

$$z = x + iy = \rho \exp \{i\varphi\} = \rho \cos \varphi + i\rho \sin \varphi.$$

Рассмотрим для определенности случай $y \geq 0$ и разобьем верхнюю полуплоскость $\Pi^{(+)}$ на полосы $\Pi_n^{(+)}$, определяемые условием

$$|x - n| \leq \frac{1}{2},$$

где n пробегает целочисленные значения, как положительные, так и отрицательные

$$n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

Пусть $\eta(t)$ — срезающая функция

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq 1, \\ 0 & |t| \geq 2, \end{cases}$$

$$0 \leq \eta(t) \leq 1; \quad |\eta'(t)| \leq C.$$

Рассмотрим случай, когда $z \in \Pi_n^{(+)}$ при некотором фиксированном n . Представим $\Phi(z)$ в следующем виде:

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta(t-n)f(t)}{t-z} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[1-\eta(t-n)]f(t)}{t-z} dt = \Phi_1^{(n)}(z) + \Phi_2^{(n)}(z)$$

и оценим каждое слагаемое отдельно. В интеграле для $\Phi_2^{(n)}(z)$ знаменатель несингулярен, так что $\Phi_2^{(n)}(z)$ аналитична по z из $\Pi_n^{(+)}$. При этом

$$\begin{aligned} |\Phi_2^{(n)}(z)| &\leq C \|\varphi\|_{\theta, \mu} \left(\int_{-\infty}^{n-1} + \int_{n+1}^{\infty} \right) (1+|t|)^{-\theta} ((t-x)^2 + y^2)^{-1/2} dt \leq \\ &\leq C \|\varphi\|_{\theta, \mu} \int_{1/2}^{\infty} (t-|x|)^{-\theta} (t^2 + y^2)^{-1/2} dt \leq C \|\varphi\|_{\theta, \mu}. \end{aligned}$$

Если $\rho \geq 1$, то в последнем интеграле можно сделать замену переменной интегрирования $t = \rho t'$, так что

$$|\Phi_2^{(n)}(z)| \leq C \|\varphi\|_{\theta, \mu} \rho^{-\theta} \int_{1/2}^{\infty} |t - |\cos \varphi||^{-\theta} (t^2 + \sin^2 \varphi)^{-1/2} dt \leq C \|\varphi\|_{\theta, \mu} \rho^{-\theta} \ln \rho.$$

При последнем шаге следует отдельно рассмотреть случай $\sin^2 \varphi > \frac{1}{2}$ и $\sin^2 \varphi < \frac{1}{2}$.

Окончательно получаем

$$|\Phi_2^{(n)}(z)| \leq C \|\varphi\|_{\theta, \mu} (1+|z|)^{-\theta'}. \quad (\text{I. 11})$$

Аналогично

$$\left| \frac{d}{dz} \Phi_2^{(n)}(z) \right| \leq C \|\varphi\|_{\theta, \mu} \int_{1/2}^{\infty} |t - |x||^{-\theta} (t^2 + y^2)^{-1} dt \leq C \|\varphi\|_{\theta, \mu} (1+|z|)^{-\theta}. \quad (\text{I. 12})$$

Рассмотрим теперь $\Phi_1^{(n)}(z)$. В интеграле для $\Phi_1^{(n)}(z)$ сделаем замену переменной

$$t' = t - n$$

и обозначим

$$z' = z - n$$

При $z \in \Pi_n^{(+)}$

$$|z'| \geq |y|.$$

Мы получаем

$$\Phi_1^{(n)}(z) = \tilde{\Phi}^{(n)}(z') = \int_{-2}^2 \frac{\tilde{\varphi}_n(t)}{t - z'} dt,$$

где

$$\tilde{\varphi}_n(t) = \gamma(t) \varphi(t + n).$$

Из свойств $\varphi(t)$ следует, что

$$\begin{aligned} |\tilde{\varphi}_n(t)| &\leq C \|\varphi\|_{\theta, \mu} (1 + |n|)^{-\theta}, \\ |\tilde{\varphi}_n(t + l) - \tilde{\varphi}_n(t)| &\leq C \|\varphi\|_{\theta, \mu} (1 + |n|)^{-\theta} |l|^\mu. \end{aligned}$$

На основании леммы Привалова мы получаем оценки

$$\begin{aligned} |\tilde{\Phi}^{(n)}(z')| &\leq C \|\varphi\|_{\theta, \mu} (1 + |n|)^{-\theta} (1 + |y|)^{-1}, \\ |\tilde{\Phi}^{(n)}(z' + \Delta) - \tilde{\Phi}^{(n)}(z')| &\leq C \|\varphi\|_{\theta, \mu} (1 + |n|)^{-\theta} (1 + |y|)^{-1} |\Delta|^\mu. \end{aligned} \quad (I. 13)$$

Очевидно, что при $z \in \Pi_n^{(+)}$

$$(1 + |n|)^{-\theta} (1 + |y|)^{-1} \leq C (1 + |z|)^{-\theta}. \quad (I. 14)$$

Из (I. 13) и (I. 14) следует, что $\Phi_1^{(n)}(z)$ удовлетворяет оценкам (2. 10) при $z \in \Pi_n^{(+)}$. Из (I. 11) и (I. 12) следует это утверждение для $\Phi_2^{(n)}$. В силу произвольности n отсюда мы получаем, что оценки (I. 10) справедливы для $\Phi(z)$ при любых z .

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь гельдеровскую функцию $f(q)$ трехмерной переменной q . Будем считать, что $f(q)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} |f(q)| &\leq CM(q), \\ |f(q + h) - f(q)| &\leq CM(q) |h|^\mu, \end{aligned} \quad (I. 15)$$

причем

$$M(q) > 0, \quad \int d\Omega_q M(q) \leq (1 + |q|)^{-1-\theta}.$$

Здесь h — трехмерный вектор, причем $|h| \leq 1$, а θ и μ — некоторые показатели, $0 < \theta < 1$, $0 < \mu < 1$. Обозначим

$$\|f\|_{\theta, \mu} = \sup_{q, |h| \leq 1} M(q)^{-1} \left\{ |f(q)| + \frac{|f(q + h) - f(q)|}{|h|^\mu} \right\}. \quad (I. 16)$$

Хотя это обозначение совпадает с (1. 8), недоразумений не возникнет.

Л е м м а I. 4. Пусть $m > 0$. Функция

$$\Phi(z) = \int \frac{f(q)}{\frac{q^2}{2m} - z} dq \quad (I. 17)$$

аналитична на комплексной плоскости Π_0 с разрезом по положительной части вещественной оси, причем при всех z на этой плоскости

$$\begin{aligned} |\Phi(z)| &\leq C \|f\|_{\theta, \mu} (1 + |z|)^{-\frac{\theta'}{2}}, \\ |\Phi(z + \Delta) - \Phi(z)| &\leq C \|f\|_{\theta, \mu} (1 + |z|)^{-\frac{\theta'}{2}} |\Delta|^\nu. \end{aligned} \quad (I. 18)$$

Здесь $\nu = \min\left(\frac{1}{2}, \mu\right)$, а θ' можно взять меньшим и сколь угодно близким к θ .

Если $\operatorname{Re} z < -1$, то для $\Phi'(z)$ справедлива оценка

$$|\Phi'(z)| \leq C \|f\|_{\theta, \mu} (1 + |z|)^{-\left(1 + \frac{\theta}{2}\right)}. \quad (I. 19)$$

Доказательство. Вводя сферические переменные, мы можем записать $\Phi(z)$ в следующем виде:

$$\Phi(z) = \int_0^{\infty} \frac{|q| d|q|}{\frac{q^2}{2m} - z} \bar{\varphi}(|q|), \quad (I. 20)$$

где

$$\bar{\varphi}(|q|) = |q| \int d\Omega_g f(q). \quad (I. 21)$$

Если обозначить $t = \frac{q^2}{2m}$ и

$$\varphi(t) = \begin{cases} m \bar{\varphi}(\sqrt{2mt}), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (I. 22)$$

то $\Phi(z)$ перепишется следующим образом:

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t - z} dt.$$

Из (I. 15), (I. 21), (I. 22) мы можем получить, что

$$|\varphi(t)| \leq C \|f\|_{\theta, \mu} (1 + |t|)^{-\frac{\theta}{2}},$$

$$|\varphi(t+l) - \varphi(t)| \leq C \|f\|_{\theta, \mu} (1 + |t|)^{-\frac{\theta}{2}} |l|^{\nu}, \quad (I. 23)$$

где $\nu = \min\left(\mu, \frac{1}{2}\right)$. Выведем вторую из этих оценок. Пусть $|l| \leq \frac{1}{2}|t|$. Если $t < 0$, то $t+l < 0$ и $\varphi(t) = \varphi(t+l) = 0$, так что достаточно рассмотреть $t > 0$. В этом случае

$$|\varphi(t+l) - \varphi(t)| \leq C \|f\|_{\theta, \mu} \left[|\sqrt{t+l} - \sqrt{t}| (1 + |t|)^{-\frac{1+\theta}{2}} + \right. \\ \left. + \sqrt{t} |\sqrt{t+l} - \sqrt{t}|^{\mu} (1 + |t|)^{-\frac{1+\theta}{2}} \right] \leq C \|f\|_{\theta, \mu} (1 + |t|)^{-\frac{\theta}{2}} \left(|l|^{\frac{1}{2}} + |l|^{\mu} \right).$$

Если же $|l| \geq \frac{1}{2}|t|$, то

$$|\varphi(t+l) - \varphi(t)| \leq C \left(|t+l|^{\frac{1}{2}} + |t|^{\frac{1}{2}} \right) \|f\|_{\theta, \mu} (1 + |t|)^{-\frac{1+\theta}{2}} \leq \\ \leq C \|f\|_{\theta, \mu} (1 + |t|)^{-\frac{\theta}{2}} |l|^{\frac{1}{2}},$$

так что интересующая нас оценка доказана.

Мы видим, что функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям леммы I. 3, откуда следует, что $\Phi(z)$ аналитична в верхней и нижней полуплоскостях и удовлетворяет в каждой из них оценкам (I. 18). Из (I. 20) очевидно, что $\Phi(z)$ аналитична в окрестности отрицательной части вещественной оси, так что оценки (I. 18) справедливы для $\Phi(z)$ на плоскости Π_0 .

Нам остается доказать оценку (I. 19). Нетрудно убедиться, что

$$|\bar{\varphi}(|q|)| \leq C \|f\|_{\theta, \mu} (1 + |q|)^{-\theta},$$

так что

$$|\Phi'(z)| \leq C \|f\|_{\theta, \mu} \int_0^{\infty} r dr (1+r)^{-\theta} \left[\left(\frac{r^2}{2m} - x \right)^2 + y^2 \right]^{-1}.$$

Если $x < 0$, то мы получаем отсюда, что

$$|\Phi'(z)| \leq C \|f\|_{\theta, \mu} |z|^{-\left(1 + \frac{\theta}{2}\right)},$$

так что (I. 19) справедлива при $x < -1$.

Лемма доказана.

Утверждение III из § 4 следует из лемм I. 2 и I. 4.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

ОЦЕНКИ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Здесь мы докажем оценки для трех интегралов, которые были сформулированы в основном тексте.

В § 4 мы встретились со следующим интегралом:

$$I(k, |q|, \theta) = \int d\Omega_q (1 + |k - q|)^{-\theta}. \quad (\text{II. 1})$$

Лемма II. 1. Пусть $\theta < 2$. Тогда для $I(k, |q|, \theta)$ справедлива оценка

$$|I(k, |q|, \theta)| \leq C (1 + |k|)^{-\theta_1} (1 + |q|)^{-\theta_2}, \quad (\text{II. 2})$$

$$\theta_1 + \theta_2 = \theta.$$

Доказательство. В сферических переменных интеграл $I(k, |q|, \theta)$ записывается в следующем виде:

$$I(k, |q|, \theta) = 2\pi \int_{-1}^1 d\eta [1 + (k^2 - 2|k||q|\eta + q^2)^{1/2}]^{-\theta}.$$

откуда следует, что он является симметричной функцией $|k|$ и $|q|$. Рассмотрим два случая:

1. $|k| \leq 1$. В этом случае

$$|I(k, |q|, \theta)| \leq 2\pi \int_{-1}^1 d\eta \leq 4\pi. \quad (\text{II. 3})$$

2. $|k| \geq 1$. В этом случае

$$|I(k, |q|, \theta)| \leq 2\pi \int_{-1}^1 d\eta (k^2 - 2|k||q|\eta + q^2)^{-\frac{\theta}{2}} =$$

$$= \frac{2\pi}{2-\theta} \frac{(|k| + |q|)^{2-\theta} - ||k| - |q||^{2-\theta}}{|k||q|} = \frac{1}{|k|^\theta} \frac{2\pi}{2-\theta} \frac{(1+t)^{2-\theta} - |1-t|^{2-\theta}}{t}.$$

Здесь мы обозначили $t = \frac{|q|}{|k|}$. Нетрудно убедиться, что при $0 \leq t \leq 2$

$$f(t) = \frac{(1+t)^\alpha - |1-t|^\alpha}{t}$$

равномерно ограничена при $0 \leq t \leq \infty$, откуда следует, что при $\theta < 2$

$$|I(k, |q|, \theta)| \leq C |k|^{-\theta}. \quad (\text{II. 4})$$

Объединяя (II. 3) и (II. 4), мы получаем, что

$$|I(k, |q|, \theta)| \leq C (1 + |k|)^{-\theta}.$$

Вследствие симметрии I по $|k|$ и $|q|$ отсюда следует (II. 2).

Лемма доказана.

В том же § 4 встречается интеграл

$$I(a) = \int (1 + |q|)^{-\alpha} (1 + |q - a|)^{-\beta} dq. \quad (\text{II. 5})$$

Л е м м а II.2. Пусть $\alpha < 3$, $\beta < 3$ и $\alpha + \beta > 3$. Тогда

$$|I(\alpha)| \leq C(1 + |\alpha|)^{-(\alpha + \beta - 3)}. \quad (\text{II. 6})$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим два случая:

1. $|\alpha| \leq 1$. В этом случае

$$|I(\alpha)| \leq C \int (1 + |q|)^{-(\alpha + \beta)q} dq \leq C, \quad (\text{II. 7})$$

так как по условию $\alpha + \beta > 3$.

2. $|\alpha| > 1$. В этом случае

$$|I(\alpha)| \leq \int |q|^{-\alpha} |q - \alpha|^{-\beta} dq \leq |\alpha|^{\alpha + \beta - 3} \int |q'|^{-\alpha} |q' - \tilde{\alpha}|^{-\beta} dq' \leq C |\alpha|^{\alpha + \beta - 3}. \quad (\text{II. 8})$$

Здесь мы сделали замену переменных $q' = |\alpha|q$ и обозначили $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{|\alpha|}$. Объединяя (II. 7) и (II. 8), мы получаем (II. 6).

Лемма доказана.

В § 6 встречается интеграл

$$I(\alpha, b) = \int (1 + q^2)^{-1} (1 + |q - \alpha|)^{-\theta} (1 + |q - b|)^{-\theta} dq. \quad (\text{II. 9})$$

Л е м м а II.3. Пусть $1 < \theta < 2$. Тогда

$$|I(\alpha, b)| \leq C(1 + |\alpha|)^{-\theta}. \quad (\text{II. 10})$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В сферических переменных получаем

$$|I(\alpha, b)| \leq \int_0^\infty d|q| \int d\Omega_q (1 + |q - \alpha|)^{-\theta} (1 + |q - b|)^{-\theta}.$$

Подберем $\delta < 1$, такое что $\theta + \delta < 2$, и оценим интеграл по угловым переменным следующим образом:

$$\begin{aligned} \int d\Omega_q (1 + |q - \alpha|)^{-\theta} (1 + |q - b|)^{-\theta} &\leq \int d\Omega_q (1 + |q - \alpha|)^{-\theta} (1 + |q - b|)^{-\delta} \times \\ &\times (1 + ||q| - |b||)^{-1 + \frac{\delta}{2}} \leq C(1 + |\alpha|)^{-\theta} (1 + |q|)^{-\delta} (1 + ||q| - |b||)^{-1 + \frac{\delta}{2}}. \end{aligned}$$

Здесь мы огрубili оценку, заменив $(1 + |q - b|)^{-\theta}$ на $(1 + |q - b|)^{-\left(1 + \frac{\delta}{2}\right)}$, и использовали тривиальную оценку

$$(1 + |q - b|)^{-\theta} \leq (1 + ||q| - |b||)^{-\theta}, \quad \theta > 0,$$

неравенство Гельдера с подходящими показателями и лемму II.1. Мы получаем в результате

$$|I(\alpha, b)| \leq C(1 + |\alpha|)^{-\theta} \int_0^\infty dx x^{-\delta} (1 + |x - |b||)^{-1 + \frac{\delta}{2}} \leq C(1 + |\alpha|)^{-\theta}.$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6.2

Мы получим здесь оценки для интеграла

$$I(a, b, \xi, \eta) = \int \frac{f(q) dq}{[(q-a)^2 - \xi][q-b]^2 - \eta], \quad (\text{III. 1})$$

сформулированные в лемме 6.2. Здесь a, b, q — трехмерные переменные, ξ, η — комплексные переменные и $f(q)$ — гельдеровская функция, удовлетворяющая условиям

$$|f(q)| \leq C; |f(q+h) - f(q)| \leq C|h|^\mu \quad (\text{III. 2})$$

и исчезающая вне шара, квадрат радиуса которого имеет порядок R , где $R > 1$ — фиксированное число, причем нас будет интересовать зависимость всех оценок от R в явном виде.

Будем считать, что все переменные a, b, ξ, η меняются в конечной области в трехмерном пространстве и на комплексной плоскости Π_0 соответственно, причем

$$a^2 \leq CR; b^2 \leq CR; |\xi| \leq CR; |\eta| \leq CR. \quad (\text{III. 3})$$

Достаточно изучить интеграл (III. 1) при $b=0$, т. е.

$$I(a, \xi, \eta) = \int \frac{f(q) dq}{[(q-a)^2 - \xi][q^2 - \eta]}. \quad (\text{III. 4})$$

Действительно, в общем случае при $b \neq 0$ мы можем в (III. 1) сделать замену переменной интегрирования $q' = q - b$, так что

$$I_1(a, b, \xi, \eta) = \int \frac{f(q+b) dq}{[(q-a')^2 - \xi][q^2 - \eta]}. \quad (\text{III. 5})$$

Здесь мы обозначили $a' = a - b$. Гладкость этого интеграла в зависимости от переменной b , стоящей в числителе, исследуется тривиально, если мы сумеем оценить интеграл (III. 4) через константы в условии (III. 2) и R . В остальном интеграл (III. 5) имеет вид (III. 4).

В подынтегральном выражении (III. 4) имеются два сингулярных знаменателя, причем соответствующие особенности, вообще говоря, не отделяются. Естественно поэтому пытаться подобрать такую систему координат, чтобы в этой системе знаменатели зависели от разных переменных. Удобной в этом смысле является сферическая система координат, причем полярный угол отсчитывается от вектора a .

Опишем подробно соответствующую замену переменных в (III. 4). Пусть q_1, q_2, q_3 и a_1, a_2, a_3 — декартовы координаты векторов q и a в некоторой фиксированной системе с осями O_1, O_2, O_3 . Без ограничения общности можно считать, что $a_3 \geq 0$. Действительно, в противном случае мы можем произвести отражение оси O_3 . Вместо переменных интегрирования q_1, q_2, q_3 введем переменные r, s, φ по следующим формулам:

$$\begin{aligned} q_1 &= a_{11}r \sqrt{1-s^2} \sin \varphi + a_{12}r \sqrt{1-s^2} \cos \varphi + a_{13}rs; \\ q_2 &= a_{21}r \sqrt{1-s^2} \sin \varphi + a_{22}r \sqrt{1-s^2} \cos \varphi + a_{23}rs; \\ q_3 &= a_{31}r \sqrt{1-s^2} \sin \varphi + a_{32}r \sqrt{1-s^2} \cos \varphi + a_{33}rs. \end{aligned} \quad (\text{III. 6})$$

Здесь $a_{ij}, i, j=1, 2, 3$, — элементы ортогональной матрицы, описывающей поворот системы координат вокруг вектора, ортогонального оси O_3 и вектору a , такой что новая ось O_3 совпадает по направлению с вектором a . Элементы a_{ij} зависят от направляющих косинусов вектора a в исходной системе координат, которые мы обозначим через $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3$, так что вектор $\tilde{a}$ с координатами $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3$ является единичным вектором, направленным по a , $\tilde{a} = \frac{a}{|a|}$. В явном виде матрица $\|a_{ij}(a)\|$ имеет вид

$$\|a_{ij}(a)\| = \begin{pmatrix} \tilde{a}_3 + \frac{\tilde{a}_2^2}{1+\tilde{a}_3} & -\frac{\tilde{a}_1\tilde{a}_2}{1+\tilde{a}_3} & \tilde{a}_1 \\ \frac{\tilde{a}_1\tilde{a}_2}{1+\tilde{a}_3} & \tilde{a}_3 + \frac{\tilde{a}_1^2}{1+\tilde{a}_3} & \tilde{a}_2 \\ -\tilde{a}_1 & -\tilde{a}_2 & \tilde{a}_3 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$|\tilde{a}_i| \leq 1; |\text{grad } \tilde{a}_i| \leq \frac{1}{|a|},$$

откуда следует, что

$$|a_{ij}(a)| \leq 1; |\text{grad } a_{ij}(a)| \leq \frac{C}{|a|} \quad (\text{III. 7})$$

за исключением окрестности точки $\tilde{a}_3 = -1$.

В переменных r, s, φ интеграл (III. 4) принимает вид

$$I(a, \xi, \eta) = \int_0^\infty \frac{r^2 dr}{r^2 - \eta} \int_{-1}^1 ds \frac{\Phi(s, r, a)}{r^2 - 2|a|rs + a^2 - \xi}, \quad (\text{III. 8})$$

где

$$\Phi(s, r, a) = \int_0^{2\pi} f(q) d\varphi, \quad (\text{III. 9})$$

причем считается, что в (III. 9) переменные q_1, q_2, q_3 заменены на r, s, φ по формуле (III. 6). В интеграле (III. 8) — два сингулярных знаменателя, однако один из них зависит только от переменной r . Мы можем поэтому изучить сначала интеграл по s как функцию всех переменных, а затем применить полученные результаты для оценки интеграла по r . В первую же очередь нам надо исследовать гладкость функции $\Phi(s, r, a)$.

Лемма III.1. При фиксированном s функция $\Phi(s, r, a)$ является гельдеровской функцией r и a , причем

$$|\Phi(s, r, a)| \leq C; \quad (\text{III. 10})_1$$

$$|\Phi(s, r + \Delta, a) - \Phi(s, r, a)| \leq C|\Delta|^\mu; \quad (\text{III. 10})_2$$

$$|\Phi(s, r, a + h) - \Phi(s, r, a)| \leq CR^{\frac{\mu}{2}} \frac{|h|^\mu}{|a + \theta h|^\mu}. \quad (\text{III. 10})_3$$

Здесь через $a + \theta h$ мы обозначили точку с координатами $a_1 + \theta_1 h_1, a_2 + \theta_2 h_2, a_3 + \theta_3 h_3$, где $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ — некоторые числа $0 \leq \theta_i \leq 1, i = 1, 2, 3$.

Доказательство. Первые две оценки немедленно следуют из свойств функции $f(q)$. Для вывода последней оценки рассмотрим два случая:

$$1. |h| \leq \frac{1}{2}|a|. \text{ Так как } a_3 \geq 0, \text{ то при этом условии } a_3 + h_3 \geq -\frac{1}{2}, \text{ так что мы мо-}$$

жем воспользоваться оценками (III. 7) и формулой конечных приращений для того, чтобы утверждать, что

$$|a_{ij}(a + h) - a_{ij}(a)| \leq C \frac{|h|}{|a + \theta h|}; \quad (\text{III. 11})$$

$$2. |h| \geq \frac{1}{2}|a|. \text{ В этом случае}$$

$$|a_{ij}(a + h) - a_{ij}(a)| \leq (|a_{ij}(a + h)| + |a_{ij}(a)|) \frac{2|h|}{|a|} \leq C \frac{|h|}{|a|},$$

что является частным случаем (III. 11) при $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$. Таким образом, мы получаем, что при всех h

$$|\Phi(s, r, a+h) - \Phi(s, r, a)| \leq \\ \leq Cr^\mu \max_{i,j} |a_{ij}(a+h) - a_{ij}(a)|^\mu \leq CR^{\frac{\mu}{2}} \frac{|h|^\mu}{|a+\theta h|^\mu}.$$

Лемма доказана.

Лемма III. 2. Функция $\Phi(s, r, a)$ при фиксированных r и a является геллеровской функцией s , причем

$$|\Phi(s+\Delta, r, a) - \Phi(s, r, a)| \leq Cr^\mu |\Delta|^{\frac{\mu}{2}}. \quad (\text{III. 10})_4$$

Доказательство. Предположим сначала, что $f(q)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция

$$|\text{grad } f(q)| \leq C_1; \quad |\text{grad}^2 f(q)| \leq C_2.$$

Покажем, что в этом случае $\Phi(s, r, a)$ дифференцируема по s , причем

$$\left| \frac{\partial}{\partial s} \Phi(s, r, a) \right| \leq C(C_1 r + C_2 r^2). \quad (\text{III. 12})$$

Из определения функции $\Phi(s, r, a)$ мы имеем, что

$$\frac{\partial}{\partial s} \Phi(s, r, a) = \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \frac{\partial f(q)}{\partial q_1} \left(a_{11} r \frac{-s}{\sqrt{1-s^2}} \sin \varphi + \right. \right. \\ \left. \left. + a_{12} r \frac{-s}{\sqrt{1-s^2}} \cos \varphi + a_{13} r \right) + \frac{\partial f}{\partial q_2} (\dots) + \frac{\partial f}{\partial q_3} (\dots) \right\}. \quad (\text{III. 13})$$

Здесь невыписанные выражения аналогичны выражению в первой скобке. Из (III. 13) немедленно следует, что

$$\left| \frac{\partial}{\partial s} \Phi(s, r, a) \right| \leq CC_1 \frac{r}{\sqrt{1-s^2}}. \quad (\text{III. 14})$$

Однако множитель $(1-s^2)^{-1/2}$ в правой части (III. 14) можно убрать. Действительно, рассмотрим типичное слагаемое в правой части (III. 13), содержащее сингулярный множитель

$$c(s, r, a) = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial f(q)}{\partial q_1} \sin \varphi \frac{a_{11} r s}{\sqrt{1-s^2}}.$$

При $s = \pm 1$ функция $\frac{\partial f(q)}{\partial q_1}$ перестает зависеть от φ и интеграл от $\sin \varphi$ по периоду исчезает. Приведем точное рассуждение, основанное на этом соображении. Будем для определенности считать, что $s > 0$. Мы можем написать

$$c(s, r, a) = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{\partial f(q)}{\partial q_1} - \frac{\partial f(q)}{\partial q_1} \Big|_{s=1} \right) \sin \varphi \frac{a_{11} r s}{\sqrt{1-s^2}} = \\ = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_s^1 \frac{\partial^2 f}{\partial q_1 \partial s'} ds' \sin \varphi \frac{a_{11} r s}{\sqrt{1-s^2}}.$$

Для стоящей здесь второй производной мы можем, повторяя вывод оценки (III. 14), получить оценку

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial q_1 \partial s} \right| \leq CC_2 \frac{r}{\sqrt{1-s^2}},$$

используя которую, получаем, что

$$|c(s, r, a)| \leq CC_2 r^2 \int_s^1 \frac{ds'}{\sqrt{1-s'^2}} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \leq CC_2 r^2,$$

откуда следует (III. 12).

Пусть теперь $f(q)$ удовлетворяет только условию (III. 2). В этом случае мы можем подобрать для $f(q)$ такое усреднение $f_h(q)$, что

$$|f(q) - f_h(q)| \leq C|h|^\mu;$$

$$|\text{grad } f_h(q)| \leq \frac{C}{|h|^{1-\mu}}; |\text{grad}^2 f_h(q)| \leq \frac{C}{|h|^{2-\mu}}.$$

По функции $f_h(q)$ построим по формуле (III. 9) функцию $\Phi_h(s, r, a)$. Имеем теперь

$$\begin{aligned} |\Phi(s+\Delta, r, a) - \Phi(s, r, a)| &\leq |\Phi(s+\Delta, r, a) - \Phi_h(s+\Delta, r, a)| + \\ &+ |\Phi(s, r, a) - \Phi_h(s, r, a)| + |\Phi_h(s+\Delta, r, a) - \Phi_h(s, r, a)| \leq \\ &\leq C \left[|h|^\mu + \left(\frac{r}{|h|^{1-\mu}} + \frac{r^2}{|h|^{2-\mu}} \right) \Delta \right]. \end{aligned}$$

Выбирая в качестве параметра усреднения $h = r\Delta^{1/2}$, мы получаем окончательно

$$|\Phi(s+\Delta, r, a) - \Phi(s, r, a)| \leq Cr^\mu |\Delta|^{\frac{\mu}{2}}.$$

Лемма доказана.

Выяснив поведение функции $\Phi(s, r, a)$, мы можем приступить к исследованию внутреннего интеграла в (III. 8), который имеет вид

$$I(r, a, \xi) = \int_{-1}^1 \frac{\Phi(s) ds}{r^2 - 2|a|rs + a^2 - \xi}. \quad (\text{III. 15})$$

Здесь и ниже, пока это удобно, мы опускаем аргументы r и a функции $\Phi(r, s, a)$. Интеграл (III. 15) является обыкновенным сингулярным интегралом по конечному интервалу и поэтому имеет известные логарифмические особенности. Чтобы в явном виде выделить эти особенности, мы поступим следующим образом: пусть $\varphi(s)$ — гладкая интерполирующая функция, обладающая свойствами

$$\varphi(s) = \begin{cases} 1 & -1 \leq s \leq -\frac{1}{2}, \\ -1 & \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \end{cases}$$

$$|\varphi(s)| \leq 1; |\varphi'(s)| \leq C; |\varphi''(s)| \leq C.$$

Представим $\Phi(s)$ в виде

$$\Phi(s) = \Phi_1(s) + \Phi_2(s),$$

где

$$\Phi_2(s) = \frac{1}{2} [\Phi(-1) + \Phi(1)] + \frac{1}{2} [\Phi(-1) - \Phi(1)] \varphi(s) \quad (\text{III. 16})$$

и

$$\Phi_1(s) = \Phi(s) - \Phi_2(s).$$

Функция $\Phi_1(s)$ исчезает на концах интервала интегрирования, а функция $\Phi_2(s)$ дифференцируема по s . Кроме того, функция $\Phi_1(s, r, a)$ исчезает при $r \rightarrow 0$, а точнее, удовлетворяет оценке

$$|\Phi_1(s, r, a)| \leq Cr^\mu. \quad (\text{III. 17})$$

Действительно, $d = \Phi(s, 0, a)$ не зависит от s и a , и, добавляя и вычитая эту постоянную в подходящих местах, мы можем получить

$$|\Phi_1(s, r, a)| \leq |\Phi(s, r, a) - d| + |\Phi(1, r, a) - d| + |\Phi(-1, r, a) - d|,$$

откуда на основании (III. 2) следует (III. 17).

Рассмотрим в отдельности интегралы типа (III. 15) с $\Phi_1(s)$ и $\Phi_2(s)$ в качестве подынтегральной функции. В случае $\Phi_2(s)$ естественно проинтегрировать по частям

$$\begin{aligned} I_2(r, a, \xi) &= \int_{-1}^1 \Phi_2(s) \frac{dr}{r^2 - 2|a|rs + a^2 - \xi} = \frac{1}{2|a|r} \int_{-1}^1 \Phi_2'(s) d \ln(r^2 - 2|a|rs + a^2 - \xi) = \\ &= \frac{1}{2|a|r} \left\{ \Phi(-1) \ln[(r + |a|)^2 - \xi] - \Phi(1) \ln[(r - |a|)^2 - \xi] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} [\Phi(-1) - \Phi(1)] \int_{-1}^1 \varphi'(s) \ln(r^2 - 2|a|rs + a^2 - \xi) ds \right\}. \quad (\text{III. 18}) \end{aligned}$$

Здесь мы выбрали ветвь функции $\ln(-z)$, однозначную на плоскости с разрезом по положительной части вещественной оси и удовлетворяющую условию

$$\text{Im} \ln(-\omega^2 + i0) = -\text{Im} \ln(-\omega^2 - i0).$$

Последний интеграл в правой части (III. 18) можно переписать в виде

$$\frac{1}{4|a|r} [\Phi(-1) - \Phi(1)] \left[-\ln 2|a|r + \int_{-1}^1 ds \varphi'(s) \ln(t - s) \right],$$

где через $t = t(r, a, \xi)$ мы обозначили выражение

$$t = \frac{r^2 + a^2 - \xi}{2|a|r}.$$

Интеграл с функцией $\Phi_1(s)$ также естественно выразить через функцию $t(r, a, \xi)$. Имеем

$$I_1(r, a, \xi) = \int_{-1}^1 \frac{\Phi_1(s) ds}{r^2 - 2|a|rs + a^2 - \xi} = \frac{1}{2|a|r} \int_{-1}^1 \Phi_1(s) \frac{ds}{t - s}.$$

Поэтому ближайшей задачей является исследование зависимости $t(r, a, \xi)$ от своих переменных.

Лемма III. 3. *Справедливы оценки*

$$|t(r, a, \xi + \Delta) - t(r, a, \xi)| \leq C \frac{|\Delta|}{|a|r}; \quad (\text{III. 19})_1$$

$$|t(r + \Delta, a, \xi) - t(r, a, \xi)| \leq CR \frac{|\Delta|}{|a|r^2}; \quad \Delta \leq \frac{1}{2}r; \quad (\text{III. 19})_2$$

$$|t(r, a + h, \xi) - t(r, a, \xi)| \leq CR \frac{|h|}{r|a||a + h|}; \quad (\text{III. 19})_3$$

$$|t(r, a, \xi)| \leq \frac{CR}{|a|r}. \quad (\text{III. 19})_4$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} |t(r, a, \xi + \Delta) - t(r, a, \xi)| &\leq \left| -\frac{\Delta}{2|a|r} \right| \leq C \frac{|\Delta|}{|a|r}; \\ |t(r, a + h, \xi) - t(r, a, \xi)| &\leq \left| \frac{a^2 + r^2 - \xi}{2|a + h|r} - \frac{a^2 + r^2 - \xi}{2|a|r} \right| + \\ + \left| \frac{a^2 - (a + h)^2}{2|a + h|r} \right| &\leq \frac{CR}{r} \frac{||a + h| - |a||}{|a||a + h|} \leq \frac{CR}{r} \frac{|h|}{|a||a + h|}; \\ |t| &= \frac{|a^2 + r^2 - \xi|}{2|a|r} \leq \frac{CR}{|a|r}; \end{aligned}$$

оценка (III.19)₂ доказывается аналогично тому, как мы доказали (III.19)₃. При этом используется, что при $|\Delta| \leq \frac{1}{2}r$ $\frac{1}{r + \Delta} \leq \frac{2}{r}$.

Лемма доказана.

Возвращаемся к интегралу (III.15).

Лемма III. 4. Интеграл $I(r, a, \xi)$ представляется в виде

$$\begin{aligned} I(r, a, \xi) &= \frac{1}{2|a|r} \{ 2\pi f(-r\bar{a}) \ln[(r + |a|)^2 - \xi] + \\ &+ 2\pi f(r\bar{a}) \ln[(r - |a|)^2 - \xi] + \mathcal{P}(r, a, \xi) \}, \end{aligned} \quad (\text{III. 20})$$

где $f(q)$ — подинтегральная функция в (III.4), а для $\mathcal{P}(r, a, \xi)$ справедливы оценки

$$|\mathcal{P}(r, a, \xi)| \leq CR^{\frac{\mu}{2}} \frac{r^{\frac{\mu}{2}}}{|a|^{\frac{\mu}{2}}}; \quad (\text{III. 21})_1$$

$$|\mathcal{P}(r + \Delta, a, \xi) - \mathcal{P}(r, a, \xi)| \leq CR^{\frac{3\mu}{4}} \frac{|\Delta|^{\frac{\mu}{2}}}{|a|^{\frac{\mu}{2}}}; \quad (\text{III. 21})_2$$

$$|\mathcal{P}(r, a + h, \xi) - \mathcal{P}(r, a, \xi)| \leq CR^{\frac{3\mu}{4}} \frac{|h|^{\frac{\mu}{2}}}{|a + \theta h|^{\frac{\mu}{2}}}; \quad (\text{III. 21})_3$$

$$|\mathcal{P}(r, a, \xi + \Delta) - \mathcal{P}(r, a, \xi)| \leq CR^{\frac{\mu}{4}} \frac{|\Delta|^{\frac{\mu}{2}}}{|a|^{\frac{\mu}{2}}}. \quad (\text{III. 21})_4$$

Доказательство. Первые два члена в (III.20) происходят из соответствующих слагаемых в (III.18). Достаточно заметить, что

$$\Phi(-1) = \int_0^{2\pi} d\varphi f(-\bar{a}_1 r, -\bar{a}_2 r, -\bar{a}_3 r) = 2\pi f(-r\bar{a})$$

и аналогично

$$\Phi(1) = 2\pi f(r\bar{a}).$$

Все остальные вклады в $I(r, a, \xi)$ мы собрали в $\mathcal{P}(r, a, \xi)$, так что

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(r, a, \xi) &= \pi [f(r\bar{a}) - f(-r\bar{a})] \ln 2|a|r + \\ &+ \pi [f(-r\bar{a}) - f(r\bar{a})] \psi_1(t) + \psi_2(r, a, t), \end{aligned} \quad (\text{III. 22})$$

где

$$\psi_1(t) = \int_{-1}^1 \varphi'(s) \ln(t - s) ds \quad (\text{III. 23})$$

и

$$\psi_2(r, \alpha, t) = \int_{-1}^1 \frac{\Phi_1(s, r, \alpha)}{t-s} ds. \quad (\text{III. 24})$$

Функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(r, \alpha, t)$ легко исследуются как функции своих аргументов. Именно, справедливы оценки

$$|\psi_1(t)| \leq C(1+|t|)^\delta; \quad (\text{III. 25})_1$$

$$|\psi_1(t+\Delta) - \psi_1(t)| \leq C|\Delta|^\nu; \quad 0 \leq \nu \leq 1; \quad (\text{III. 25})_2$$

и

$$|\psi_2(r, \alpha, t)| \leq Cr^\mu; \quad (\text{III. 26})_1$$

$$|\psi_2(r, \alpha, t+\Delta) - \psi_2(r, \alpha, t)| \leq Cr^{\frac{\mu}{2}} |\Delta|^{\frac{\mu}{2}}. \quad (\text{III. 26})_2$$

Оценка (III. 25) при $|t| > 2$ следует из простой оценки для $\ln z$

$$|\ln z| \leq C \left(|z| + \frac{1}{|z|} \right)^\delta, \quad (\text{III. 27})$$

где $\delta > 0$ — здесь и ниже любое сколь угодно малое число. При $|t| \leq 2$ мы можем в (III. 23) проинтегрировать по частям еще раз и воспользоваться ограниченностью $\varphi''(s)$. Оценка (III. 26) следует из оценок (III. 17) и (III. 10)₄ и леммы Привалова в той форме, как она приведена в приложении I.

Выпишем все остальные оценки для функций, входящих в $\mathcal{P}(r, \alpha, \xi)$. При этом мы будем оценивать гильбертовские разности с показателем $\frac{\mu}{2}$, так как этот показатель уже появился в (III. 26)₂. Из (III. 27) и формулы конечных приращений следует, что

$$|\ln 2|\alpha|r| = |\ln 2 + \ln|\alpha| + \ln r| \leq CR^\delta \left(\frac{1}{|\alpha|^\delta} + \frac{1}{r^\delta} \right); \quad (\text{III. 28})_1$$

$$|\ln 2|\alpha|(r+\Delta) - \ln 2|\alpha|r| \leq CR^\delta \frac{|\Delta|^{\frac{\mu}{2}}}{r^{\frac{\mu}{2}+\delta}}; \quad 0 \leq |\Delta| \leq \frac{1}{2}r; \quad (\text{III. 28})_2$$

$$|\ln 2|\alpha+h|r - \ln 2|\alpha|r| \leq CR^\delta \frac{|h|^{\frac{\mu}{2}}}{|a+\theta h|^{\frac{\mu}{2}+\delta}}. \quad (\text{III. 28})_3$$

Далее, используя (III. 2), мы можем получить, что

$$|f(r\bar{a}) - f((r+\Delta)\bar{a})| \leq C|\Delta|^\mu; \quad (\text{III. 29})_1$$

$$|f(r(\bar{a}+h)) - f(r\bar{a})| \leq Cr^{\frac{\mu}{2}} \frac{|h|^{\frac{\mu}{2}}}{|a|^{\frac{\mu}{2}}}. \quad (\text{III. 29})_2$$

Выведем подробнее вторую из этих оценок. Из (III. 2) следует, что

$$\left| f\left(r \frac{a+h}{|a+h|}\right) - f\left(r \frac{a}{|a|}\right) \right| \leq Cr^{\frac{\mu}{2}} \left| \frac{a+h}{|a+h|} - \frac{a}{|a|} \right|^{\frac{\mu}{2}}.$$

Последний множитель здесь можно оценить следующим образом:

$$\left| \frac{a+h}{|a+h|} - \frac{a}{|a|} \right| \leq \left| \frac{a}{|a|} - \frac{a+h}{|a|} \right| + |a+h| \left| \frac{1}{|a|} - \frac{1}{|a+h|} \right| \leq C \frac{|h|}{|a|},$$

откуда следует (III. 29)₂.

Функция $f(r\bar{a})$ входит в (III. 22) в комбинации

$$g(r, \alpha) = f(r\bar{a}) - f(-r\bar{a}).$$

Используя (III. 2) и (III. 29), мы получаем для $g(r, a)$ следующие оценки:

$$|g(r, a)| \leq Cr^\mu; \quad (\text{III. 30})_1$$

$$|g(r + \Delta, a) - g(r, a)| \leq Cr^{\frac{\mu}{2}} |\Delta|^{\frac{\mu}{2}}; \quad |\Delta| \leq \frac{1}{2}r; \quad (\text{III. 30})_2$$

$$|g(r, a + h) - g(r, a)| \leq Cr^{\frac{\mu}{2}} \frac{|h|^{\frac{\mu}{2}}}{|a|^{\frac{\mu}{2}}}. \quad (\text{III. 30})_3$$

Наконец, $\psi_2(r, a, t)$ при фиксированном t является гельдеровской функцией r и a с любым показателем, меньшим μ , и с такими же оценочными функциями, как и $\Phi(s, r, a)$, так что мы можем утверждать, что

$$|\psi_2(r + \Delta, a, t) - \psi_2(r, a, t)| \leq C |\Delta|^{\frac{\mu}{2}}; \quad (\text{III. 31})_1$$

$$|\psi_2(r, a + h, t) - \psi_2(r, a, t)| \leq CR^{\frac{\mu}{2}} \frac{|h|^{\frac{\mu}{2}}}{|a + \theta h|^{\frac{\mu}{2}}}. \quad (\text{III. 31})_2$$

Оценки (III. 21) следуют из приведенных здесь оценок для всех функций, входящих в (III. 22), и оценок (III. 19). Например, объединяя оценки (III. 28)₁, (III. 30)₁, (III. 25)₁, (III. 19)₁ и (III. 26)₁, мы получаем, что

$$|\mathcal{P}(r, a, \xi)| \leq CR^{\frac{\mu}{2}} \frac{r^{\mu-\delta}}{|a|^{\delta}}; \quad (\text{III. 32})$$

положив здесь $\delta = \frac{\mu}{2}$, получим (III. 21)₁. Для вывода оценки (III. 21)₂ мы рассмотрим два случая:

1. $|\Delta| \leq \frac{1}{2}r$. Используем (III. 28)₁, (III. 28)₂, (III. 30)₁, (III. 30)₂, (III. 25)₁, (III. 25)₂, (III. 31)₁, (III. 26)₂, (III. 19)₂ и получим

$$\begin{aligned} & |\mathcal{P}(r + \Delta, a, \xi) - \mathcal{P}(r, a, \xi)| \leq \\ & \leq CR^{\frac{\mu}{2}} \frac{|\Delta|^{\frac{\mu}{2}}}{|a|^{\frac{\mu}{2}}} + CR^{\frac{\mu}{2}} |\Delta|^{\frac{\mu}{2}} \leq CR^{\frac{3\mu}{2}} \frac{|\Delta|^{\frac{\mu}{2}}}{|a|^{\frac{\mu}{2}}}. \end{aligned}$$

2. $|\Delta| \geq \frac{1}{2}r$. Оценим $\mathcal{P}(r + \Delta, a, \xi)$ и $\mathcal{P}(r, a, \xi)$ отдельно по формуле (III. 32)

и, положив $\delta = \frac{\mu}{2}$, получим

$$|\mathcal{P}(r + \Delta, a, \xi) - \mathcal{P}(r, a, \xi)| \leq CR^{\frac{\mu}{2}} \frac{|r + \Delta|^{\frac{\mu}{2}} + r^{\frac{\mu}{2}}}{|a|^{\frac{\mu}{2}}} \leq CR^{\frac{\mu}{2}} \frac{|\Delta|^{\frac{\mu}{2}}}{|a|^{\frac{\mu}{2}}},$$

и, таким образом, (III. 21)₂ доказано. Остальные оценки получаются аналогично. Лемма доказана.

Характерной особенностью оценок (III. 21) является то, что оценочные функции в правых частях не зависят от r . Поэтому оценка интеграла по r

$$\mathcal{P}(a, \xi, \eta) = \int_0^\infty \frac{r dr}{r^2 - \eta} \mathcal{P}(r, a, \xi) \quad (\text{III. 33})$$

не представляет большого труда. Сделаем замену переменных $r^2 = t$, после чего интеграл принимает вид

$$\mathcal{S}(a, \xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t - \eta} \mathcal{S}(t, a, \xi),$$

где

$$\mathcal{S}(t, a, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2} \mathcal{S}(\sqrt{t}, a, \xi), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

— гельдеровская функция t с показателем $\frac{\mu}{4}$, исчезающая при $|t| \geq CR$. Применяя лемму о сингулярных интегралах, мы получаем для этого интеграла оценки, сформулированные в лемме 6.2. В интеграле по r , содержащем логарифмические члены из (III.20), можно сделать в подходящем месте замену $r' = -r$, в результате чего этот интеграл примет вид (6.23). Нетрудно проследить, что все константы в оценках типа (III.21) можно взять пропорциональными $\|f\|_{\mu}$, где

$$\|f\|_{\mu} = \sup_{k, h} \left\{ |f(k)| + \frac{|f(k+h) - f(k)|}{|h|^{\mu}} \right\},$$

так что этот множитель появится и в оценках для функции $\mathcal{S}$.

На этом мы закончим доказательство леммы 6.2.

ПРИЛОЖЕНИЕ IV

ЗАМЕЧАНИЯ И ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

Введение. Приведем несколько ссылок на физическую литературу, посвященную квантово-механической теории рассеяния. Классическим источником таких ссылок является монография Мотта и Мессии [12]. В этой книге задачи теории рассеяния разбираются в стационарной постановке. Впервые нестационарная постановка была предложена, по-видимому, в работах Меллера [13], являющихся продолжением работ Гейзенберга по теории оператора рассеяния или S -матрицы. Техника, развитая в работах Меллера, была усовершенствована в так называемой формальной теории рассеяния. Типичное изложение этого формализма можно найти, например, в работе Гелмана и Гольдбергера [14]. Специфике формальной теории рассеяния для систем, состоящих из большого числа частиц ($N \geq 3$), посвящена статья Экштейна [15]. В этой работе последовательно сформулирован рецепт отбора решений стационарного уравнения Шредингера путем предельного перехода из комплексной плоскости в ядре резольвенты оператора энергии.

§ 1. Используемые нами переменные k, p в пространстве импульсов являются сопряженными к так называемым координатам Якоби, которые часто используются для описания системы трех частиц в координатном представлении.

Сравним условия A_{θ_0} и B_{μ_0} , которые мы накладываем на потенциал $v(k)$ в импульсном представлении, с условиями, которые обычно требуют относительно потенциала $\hat{v}(x)$ в координатном представлении. В работе А. Я. Повзнера [1] предполагается, что $\hat{v}(x)$ — ограниченная функция, удовлетворяющая на бесконечности оценке

$$|\hat{v}(x)| \leq C|x|^{-\alpha},$$

где $\alpha = 3,5 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. В работе Икебе [4] это значение снижено до $\alpha = 2 + \varepsilon$. Можно сформулировать условия на $\hat{v}(x)$, достаточные для того, чтобы соответствующий потенциал $v(k)$ удовлетворял условиям A_{θ_0} и B_{μ_0} , однако они будут выглядеть гораздо сильнее, чем выписанная оценка. В то же время эта оценка не может быть получена только на основании условий A_{θ_0} и B_{μ_0} . Таким образом, условия, которые мы используем в нашей работе, отличаются от условий, которые обычно накладываются на потенциал в координатном представлении. Согласованность оценок, проведенных в основном тексте, показывает, что эти условия хорошо приспособлены для работы в импульсном представлении.

§ 3. Процедура, аналогичная той, которую мы использовали для перехода от уравнения (3.8) к системе уравнений (3.13), встречается в физической литературе. Ватсон [16] назвал ее „методом многократного рассеяния“. Последнее время идеи, связанные

с такой перестройкой интегральных уравнений теории рассеяния, нашли применение при решении задач статистической физики (см., например, [17]). В [18] и [19] автор предложил использовать систему уравнений типа (3.13) для математически строгого исследования резольвенты оператора энергии системы трех частиц. В [19] сформулировано утверждение, эквивалентное теореме 3.1.

§ 4. При исследовании интегрального уравнения (4.1) мы, во-первых, выбрали банахово пространство, такое что уравнение (4.1) свелось в нем к уравнению второго рода с вполне непрерывным оператором, и, во-вторых, показали, что соответствующее однородное уравнение имеет нетривиальные решения только при таких значениях параметра z , которые соответствуют дискретным собственным значениям исследуемого оператора энергии. Впервые подобная схема в теории рассеяния была использована А. Я. Повзнером в [1] при исследовании интегрального уравнения для ядра резольвенты оператора типа $\mathbf{h}$ в координатном представлении.

§§ 5, 9, 11. Результаты относительно поведения резольвенты оператора энергии системы трех частиц и доказательство теоремы разложения по собственным функциям этого оператора принадлежат автору и опубликованы впервые в [20].

Нам не удалось доказать, что собственные функции дискретного спектра оператора $\mathbf{H}$ являются достаточно гладкими. В связи с этим мы не можем утверждать, что всякая такая функция связана с решением однородного уравнения типа

$$\mathbf{A}(z)\psi = 0$$

и что все собственные значения оператора $\mathbf{H}$ имеют конечную кратность.

Подчеркнем еще раз, что для анализа, проведенного в этих параграфах, существенную роль играет предположение о том, что собственные значения „парных“ $\mathbf{h}_\alpha$, $\alpha = 23, 31, 12$, отрицательны. Именно это условие позволяет нам так просто разделять особенности в знаменателях подынтегральных выражений, с которыми приходится иметь дело.

§ 7. Лемма 7.8 аналогична лемме 2 из работы Повзнера [1].

§ 10. Доказательству существования пределов при $t \rightarrow \pm \infty$ для операторов вида

$$\exp\{i\mathbf{A}t\} \exp\{-i\mathbf{B}t\}$$

при различных предположениях относительно $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ посвящено большое количество математических работ. Первой из них является, по-видимому, работа Фридрихса [21], продолженная впоследствии О. А. Ладыженской и автором [22]. Большое количество ссылок можно найти в обзорной статье Курода [23].

§ 11. В литературе существует несколько определений $\mathbf{S}$ -матрицы для случая многоканального рассеяния. Отметим работы [24] и [25]. Определение, принятое в нашей работе, было предложено в докладе Ф. А. Березина, Р. А. Минлоса и автора на IV Всесоюзном математическом съезде в Ленинграде в июне 1961 г., который будет опубликован во II томе „Трудов“ съезда.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Я. Повзнер, О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора $-\Delta u + qu$, Матем. сборник, т. 32 (74): 1, (1953), 109—156.
2. А. Я. Повзнер, О разложении по собственным функциям уравнения Шредингера, ДАН СССР, т. 104, № 3 (1955).
3. T. Kato, Fundamental properties of Hamilton operators of Schroedinger type, Trans. Amer. Math. Soc., 70, № 2 (1952), 195—211.
4. T. Ikebe, Eigenfunction expansions associated with the Schroedinger operators and their applications to scattering theory, Archive for. Rat. Mech. Anal., 5, № 1, (1960), 1—34.
5. T. Kato, Growth properties of solutions of the reduced wave equation with variable coefficient, Comm. Pure Appl. Math., 12, № 3 (1959), 402—425.
6. Л. Д. Фаддеев, О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора Шредингера, Вестн. АГУ, № 7, вып. 2 (1957), 164—172.
7. М. Ш. Бирман, О числе собственных значений в задаче квантового рассеяния (замечания к одной работе Икебе), Вестн. АГУ, № 13, вып. 3 (1961), 163—166.
8. С. М. Никольский, Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах, Изв. АН СССР; сер. матем., т. 7, № 3 (1943), 147—166.
9. Л. В. Канторович и Г. П. Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз (1959).
10. С. Г. Михлин. Лекции по линейным интегральным уравнениям. Физматгиз (1959).
11. Н. И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз (1962).
12. Мотт и Мессн. Теория атомных столкновений. ОНТИ (1936).
13. C. Moller, General Properties of the characteristic matrix in the theory of elementary particles, Kgl. Danske Videnskab Selskab mat.-fis. medd., 23, № 1 (1945); 22, № 19 (1946).
14. M. Gellmann and M. Goldberger, The formal theory of scattering, Phys. Rev., 91, № 2 (1953), 398—412.
15. H. Ekstein, Theory of time-dependent scattering for multichannel processes, Phys. Rev., 101, № 1, (1956), 880—890.
16. K. M. Watson, Multiple scattering and the many body problem, Phys. Rev., 89, № 3 (1953), 575—586.
17. T. D. Lee, C. N. Yang, Many Body Problem in statistical mechanics, I. General Foundations, Phys. Rev., 113, № 5 (1959), 1165—1177.
18. Л. Д. Фаддеев, Теория рассеяния для системы из трех частиц, ЖЭТФ, т. 39, вып. 11 (1960), 1459—1467.
19. Л. Д. Фаддеев, Строение резольвенты оператора Шредингера системы трех частиц с парным взаимодействием, ДАН СССР, т. 138 № 3, (1961), 565—567.
20. Л. Д. Фаддеев, Строение резольвенты оператора энергии системы трех частиц и задача рассеяния, ДАН СССР, т. 145, № 2 (1962), 301—304.
21. K. O. Friedrichs, On the perturbations of continuous spectra, Comm. Pure Appl. Math., 1, № 4 (1948), 361—406.
22. О. А. Ладыженская и Л. Д. Фаддеев, К теории возмущений непрерывного спектра, ДАН СССР, т. 120, № 6 (1958), 1187—1190.
23. S. T. Kuroda, On the existence and the unitary property of the scattering operator, Nuovo Cimento, 12, № 3, (1959), 431—454.
24. J. M. Jauch, Theory of scattering operator, Helv. Phys. Acta, 31, № 7 (1958), 661—684.
25. G. Grawert, J. Petzold. Formale Mehrkanal-Streutheorie, Zs. f. Naturforsch., 15a, № 4 (1960), 311—319.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Введение	3
§ 1. Операторы $\mathbf{h}$ и $\mathbf{H}$	6
§ 2. Строение резольвенты оператора $\mathbf{h}$ при $\text{Im } z \neq 0$	11
§ 3. Строение резольвенты оператора $\mathbf{H}$ при комплексных z	14
§ 4. Исследование ядра $t(k, k', z)$	19
§ 5. Общая схема исследования ядер $\mathcal{U}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z)$	31
§ 6. Оценки для ядер $\mathcal{Q}_{\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}}^{(n)}(k, p; k', p'; z)$	40
§ 7. Оператор $\mathbf{A}(z)$	53
§ 8. Теорема разложения по собственным функциям оператора $\mathbf{h}$	68
§ 9. Теорема разложения по собственным функциям оператора $\mathbf{H}$	75
§ 10. Обоснование нестационарной постановки задачи рассеяния для системы с оператором $\mathbf{h}$	96
§ 11. О нестационарной постановке задачи рассеяния для системы с оператором $\mathbf{H}$	98
Приложение I. Свойства гельдеровских функций	104
Приложение II. Оценки некоторых интегралов	109
Приложение III. Доказательство леммы 6.2	111
Приложение IV. Замечания и литературные указания	119
Литература	121
