Дж. Мак Кинси

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ИГР

ФМ

Дж МАК-КИНСИ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ИГР

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
И. В. СОЛОВЬЕВА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Д. Б. ЮДИНА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1960

INTRODUCTION TO THE THEORY OF GAMES

J. C. C. McKINSEY

THE RAND CORPORATION

БИБЛИОТЕКА

FIRST EDITION

NEW YORK. TORONTO. LONDON
McGRAW-HILL BOOK COMPANY, INC.
1952

Дж. Мак-Кинси. Введение в теорию игр.

Редактор *А. Н. Копылова.*

Технический редактор *С. Н. Ахламов.* Корректор *Л. О. Сечейко.*

Сдано в набор 21/XI 1960 г. Подписано к печати 16/XI 1960 г.
Бумага 84×108 1/32. Физ. печ. л. 13,125. Условн. печ. л. 21,53.
Уч.-изд. л. 19,19. Тираж 15 000 экз. Т-08987. Цена книги 11 руб. 10 коп.
С 1/I 1961 г. цена 1 р. 11 к. Заказ № 584.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Московская типография № 5 Мосгорсовнархоза. Москва, Трехпрудный пер., 9.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода 7
Предисловие автора 9

ГЛАВА I

ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ИГРЫ (11)

1. Введение 11
2. Терминология и классификация игр 14
3. Определение прямоугольных игр 17
4. Прямоугольные игры с седловыми точками 20
Библиографические замечания 29
Упражнения 29

ГЛАВА II

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ИГР (33)

1. Смешанные стратегии 33
2. Геометрическое обоснование 38
3. Доказательство основной теоремы для произвольных прямоугольных игр 45
4. Свойства оптимальных стратегий 52
5. Соотношения превосходства 61
6. Графический метод решения 69
Библиографические замечания 73
Упражнения 73

ГЛАВА III

РЕШЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ИГР (77)

1. Множество решений 77
2. Некоторые свойства матриц 80
3. Определение всех решений 86
Библиографические замечания 105
Упражнения 106

ГЛАВА IV

МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЦЕНЫ ИГРЫ (109)

Библиографические замечания 115
Упражнения 115

ГЛАВА V

ИГРЫ В РАЗВЕРНУТОЙ ФОРМЕ (117)

1. Нормальная и развернутая формы 117
2. Графическое представление 122
3. Информационные множества 124
4. Случайные ходы. 130
5. Игры с числом игроков больше двух 135
6. Ограничения, налагаемые на информационные множества 136
Библиографические замечания 139
Упражнения 139

ГЛАВА VI

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИГР В РАЗВЕРНУТОЙ ФОРМЕ (141)

1. Общее определение конечных игр 141
2. Игры с полной информацией. Точки равновесия 148
3. Игры с идеальной памятью и стратегии поведения 158
Библиографические замечания 162
Упражнения 162

ГЛАВА VII

ИГРЫ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТРАТЕГИЙ (165)

Библиографические замечания 171
Упражнения 171

ГЛАВА VIII

ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ (174)

1. Интуитивные соображения 174
2. Формальные выводы 180
Библиографические замечания 188
Упражнения 189

ГЛАВА IX

ИНТЕГРАЛ СТИЛТЬЕСА (190)

Библиографические замечания 207
Упражнения 207

ГЛАВА X

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ИГР (209)

1. Цена непрерывной игры 209
2. Алгебраические леммы 211
3. Основная теорема 213
4. Способы вычисления и проверки решений 221
Библиографические замечания 246
Упражнения 247

ГЛАВА XI

РАЗДЕЛИМЫЕ ИГРЫ (250)

1. Метод отображения 250
2. Пояснительный пример 263
3. Фиксированные точки 271
4. Дальнейшие примеры 279
5. Решение прямоугольной игры как разделимой игры . . . 287
6. Решение игры с ограничениями как разделимой игры . . 290
Библиографические замечания 292
Упражнения 292

ГЛАВА XII

ИГРЫ С ВЫПУКЛЫМИ ПЛАТЕЖНЫМИ ФУНКЦИЯМИ (295)

1. Выпуклые функции 295
2. Единственная стратегия для одного игрока 299
3. Стратегии для другого игрока 303
4. Замечания и примеры 309
Библиографические замечания 313
Упражнения 313

ГЛАВА XIII

ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ИГР К СТАТИСТИКЕ (315)

Библиографические замечания 329
Упражнения 330

ГЛАВА XIV

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ (332)

Библиографические замечания 340
Упражнения 341

ГЛАВА XV

ИГРЫ n ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ (344)

1. Характеристические функции 344
2. Приведенная форма 356
Библиографические замечания 366
Упражнения 366

ГЛАВА XVI

РЕШЕНИЯ ИГР n ЛИЦ (368)

1. Исход 368
2. Определение решения 373
3. Изоморфные игры 377
4. Игры трех лиц 379
Библиографические замечания 384
Упражнения 384

ГЛАВА XVII

ИГРЫ, В КОТОРЫХ СУММА ВЫИГРЫШЕЙ МОЖЕТ БЫТЬ НЕ РАВНА НУЛЮ. ТЕОРИЯ ФОН НЕЙМАНА—МОРГЕНШТЕРНА (386)

1. Характеристические функции 386
2. Исходы и решения 392
Библиографическое замечание 398
Упражнения 398

ГЛАВА XVIII

НЕКОТОРЫЕ НЕРЕШЕННЫЕ ЗАДАЧИ (400)

1. Два вида задач 400
2. Игры, проводимые на пространстве функций 401
3. Псевдоигры 403
4. Игры с ненулевой суммой и игры n лиц. 405
Библиографические замечания 407
Литература 408
Дополнительный список литературы 415
Литература на русском языке 418
Предметный указатель 419

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Первые работы по теории игр принадлежат Цермело и Борелю и относятся к началу XX в. В 1928 г. фон Нейман доказал основную теорему теории игр. Но только появление и широкое распространение быстродействующих электронных вычислительных машин, обеспечивающих возможность эффективноно решения громоздких игровых задач, привлекло к теории игр внимание широкого круга специалистов и прикладников.

В послевоенные годы за рубежом опубликовано большое количество статей и книг по теории игр. Естественно, не салонные игры определили интерес к этой науке. Теория игр — совокупность математических методов анализа и оценки конфликтных ситуаций — находит широкое применение к вопросам бизнеса в условиях конкуренции, к планированию военных операций и управлению военной техникой. Многочисленные исследования последних лет еще больше расширили рамки приложения игровых методов. В частности, установленная связь теории игр и линейного программирования позволяет применять методы решения игр к самым разнообразным задачам планирования народного хозяйства и управления производством.

В предлагаемой вниманию читателя книге Мак-Кинси систематически излагаются основные понятия теории игр, наиболее развитые методы решения игр и некоторые приложения теории.

Курс Мак-Кинси не является первой книгой по теории игр на русском языке. Недавно издательством иностранной литературы выпущен перевод монографии Блекуэлла и Гиршика «Теория игр и статистических решений». Монография рассчитана на специалистов по теории вероятностей. Теория игр здесь излагается в связи со статистическими задачами и далеко не все результаты теории, представляющие интерес для анализа экономических и военных задач, включены в монографию. В настоящее время подготавливается также к печати перевод чрезвычайно интересной книги Льюса и Райфа «Игры и решения», содержащей критический обзор важнейших математических проблем теории игр и возможных приложений этой дисциплины к анализу экономических и социальных явлений. Однако эта богатая идеями книга по самой своей структуре вряд ли может служить учебным руководством для изучения основ теории игр. Нам представляется, что курс Мак-Кинси «Введение в теорию игр», построенный как относительно элементарный учебник и охватывающий основные сложившиеся к настоящему времени направления развития теории соревнования, найдет широкий круг читателей.

По-видимому, целесообразно, чтобы изучение курса Мак-Кинси предшествовало работе над более специальной монографией Блекуэлла и Гршика и более широкими проблемами книги Льюса и Райфа.

В курсе Мак-Кинси удачно сочетаются математическая строгость и наглядность изложения. Большое количество примеров иллюстрирует не только основные понятия и методы решения теории игр, но и игровые постановки прикладных задач.

Материал книги вполне доступен инженеру. Специальные математические вопросы, обычно не включаемые в курсы технических вузов, выделены в книге в отдельные параграфы и главы.

Курс представляет безусловный интерес для широкого круга научных работников различных специальностей.

Достаточно обширная библиография, приведенная в книге, дополнена в переводе перечнем литературы по теории игр, опубликованной после издания курса. Ссылки на непереведенную литературу по специальным вопросам заменены ссылками на соответствующую отечественную литературу.

Д. Б. Юдин

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Эта книга предназначена служить учебником для аспирантов и студентов старших курсов университета. Предполагается, что учащиеся имеют по меньшей мере сведения из анализа в объеме курсов дифференциального и интегрального исчисления. Поэтому я пользуюсь без разъяснений такими понятиями, как сходимость, непрерывность, производная, интеграл Римана, нижняя и верхняя грани, максимум и минимум. При этом я использую без особых ссылок наиболее известные теоремы, связанные с этими понятиями.

Для понимания главы III полезно некоторое знакомство с классической алгеброй и теорией матриц. Для студентов, не знакомых с этой областью математики, я включил в эту главу краткий очерк основных операций над матрицами. Нужно отметить, что содержание последующих глав не зависит сколько-нибудь существенно от выводов главы III, так что читатель вполне может просто опустить эту главу.

Чтобы сделать книгу доступной более широкому кругу учащихся, я подробно останавливаюсь на некоторых менее известных понятиях. Это относится, в частности, к функциям распределения и интегралу Стилтьеса, которым я посвятил отдельные главы, и к некоторым основным топологическим понятиям, объяснение которых дано в § 2 главы III.

Я старался отдать должное авторам сформулированных здесь выводов, указывая их в исторических и библиографических замечаниях, приведенных в конце некоторых глав. Помимо этой дани общего характера, я хочу выразить свою благодарность ряду друзей, без помощи которых книга вряд ли была бы написана. М-р Оливер

Гросс из Рэнд Корпорейшн предоставил мне несколько примеров для главы X; м-р Д. Д. Уильямс, также из Рэнд Корпорейшн, любезно познакомил меня с несколькими примерами игр, которые он собрал для своей будущей книги; д-р А. В. Мартин из Калифорнийского университета и д-р Д. Г. Вендель из Рэнд Корпорейшн сделали несколько ценных указаний относительно глав IX и X; профессор Дэвид Блэквелл из Гарвардского университета помог сформулировать изложение теории статистических выводов в главе XIII; д-р Норман Дальки и д-р Ф. М. Томпсон — оба из Рэнд Корпорейшн — помогли мне при составлении глав V и VI; м-р Л. С. Шепли из Принстонского университета тщательно просмотрел всю рукопись, устранив много нелепостей и ошибок. Наконец, особенную благодарность я должен выразить д-ру Мельвину Дрешеру и д-ру Олафу Хельмеру, работникам Рэнд Корпорейшн, часто отрывавшимся от своей собственной работы, чтобы помочь мне. Их помощь неоценима.

Станфорд. Калифорния
Январь 1952 г.

Д-р Мак-Кинси

ГЛАВА I

ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ИГРЫ

1. Введение

В этой книге мы будем заниматься математической теорией стратегических игр. Примерами салонных стратегических игр являются такие игры, как шахматы, бридж и покер, в которых игроки применяют свою изобретательность для того, чтобы перехитрить друг друга. Теория игр приобретает значение вследствие того, что, помимо области развлечений, она вообще применима к ситуациям, в которых имеют место сталкивающиеся интересы и исход которых определяется частично одной, частично другой стороной. Таковы многие конфликтные ситуации, составляющие предмет экономических, социальных, политических и военных исследований.

Хотя многие реальные жизненные конфликты, так же как салонные игры, включают элементы случайности (как сданные карты в бридже или погода в военных операциях), мы обычно будем исключать из нашего рассмотрения игры, в которых исход зависит целиком от случая и совершенно не зависит от умения игроков.

Существенная разница между стратегическими играми и играми чисто случайными заключается в том, что в играх первого рода можно использовать мастерство и умственные способности игроков, а во вторых они бесполезны. Поэтому любитель поступил бы очень неразумно, если бы стал играть в шахматы на высокую ставку против мастера: он почти наверное разорился бы. Наоборот, вопреки обычным ~~рос~~казням (которые, вероятнее всего, распространяют содержатели игорных домов), «системы» игры в рулетку на несмещенном колесе не существует: идиот имеет такие же шансы на выигрыш в этой игре, как и умный человек (из этого, однако, не следует, что в случайных играх нет нерешенных математических задач; существуют некоторые стандартные методы подхода к этим задачам, разбирать которые мы здесь не будем).

Хотя наше внимание будет почти полностью посвящено чисто математической стороне теории стратегических игр, по-видимому, все-таки, уместно начать с кратких замечаний об истории экономики. Эти замечания помогут убедиться в том, что теория игр не совсем вздорна, ибо купля и продажа обычно считаются более серьезными и почтенными занятиями, чем игра в покер или даже в шахматы.

В своей науке экономисты в течение многих десятилетий принимали за образец положение Робинзона Крузо, выброшенного на необитаемый остров и стремящегося поступать так, чтобы получить максимум возможных благ от природы. Считалось, что можно получить понятие о поведении групп индивидуумов, начав с подробного анализа поведения индивидуума в этом простейшем возможном случае — случае одинокого индивидуума, борющегося с природой. Однако этот подход к экономическим вопросам имеет тот недостаток, что при переходе от общества из одного человека даже к обществу из двух человек возникают качественно различные положения, которые вряд ли можно предвидеть из рассмотрения поведения одиночки*). В обществе, состоящем из двух членов, может оказаться, что каждый из них хочет иметь некоторый продукт (запасы которого недостаточны для обоих) и управлять хотя бы некоторыми факторами, определяющими распределение этого продукта. Тогда поведение каждого, если оно разумно, должно определиться с учетом предполагаемого поведения другого. Такого положения не может быть для одного человека, так как он просто стремится к тому, чтобы получить максималь-

*) Это равносильно тому, как если бы мы пытались изучить природу окружностей путем изучения точек, представляющих, в конце концов, один из видов окружностей — окружности нулевого радиуса. Обычные окружности слишком радикально отличаются от окружностей нулевого радиуса, чтобы можно было использовать такой подход.

ное количество продукта от природы. Действительно, хотя мы часто персонифицируем природу (тем, что пишем ее с большой буквы и рассматриваем ее как существо женского рода) и иногда поэтически говорим об «извращенности» природы, никто всерьез не думает, что природа на самом деле сознательное существо, которое задумывается над тем, что мы собираемся делать, и сообразно этому строит свое поведение.

В обществе, состоящем из двух или нескольких членов, появляются совершенно новые проблемы, которые коренным образом отличаются от всего того, что мы находим в обществе, состоящем из одного человека. По этой причине свойства обычного человеческого общества нельзя определить путем простого распространения на него свойств общества, состоящего из одного Робинзона Крузо.

Рассуждения подобного рода и привели двадцать лет назад математика Джона фон Неймана к убеждению, что экономику лучше всего изучать посредством аналогии с салонными (стратегическими) играми, чем посредством простой аналогии с аналитической задачей нахождения максимумов и минимумов. Этот подход к экономике в настоящий момент исследован довольно основательно как математиками, так и экономистами. В библиографии в конце книги можно найти ссылки на соответствующие книги и статьи.

(В связи с вопросом об определении экономических законов общества, состоящего из n членов, с помощью законов общества, состоящего из одного человека, можно заметить, что, как это ни парадоксально, этот способ дает лучшее приближение, когда n велико, чем в том случае, когда n мало, но больше единицы. Действительно, если у Смита один конкурент, то он должен учитывать вполне реальную возможность того, что этот конкурент будет поступать разумно (то есть будет пытаться определить, что собирается сделать Смит, и соответственно этому строить свое поведение). Если же Смит имеет немного конкурентов, он не должен упускать из вида, что все они могут поступать разумно или могут вступить в союз против него и, таким образом, поступать так, как если бы это был один человек. Но когда n становится очень большим, вероятность того, что бо́льшая часть конкурентов Смита будет поступать разумно, очень мала, так как выгода, которую они могут получить от союза против него, становится ничтожной. Поэтому Смит с полным основанием может предполагать, что среднее поведение остального населения определяется, например, господствующими суевериями и заблуждениями или средним умственным уровнем, и может доверять своим предвидениям поведения конкурентов, например предвидению, основанному на их прошлом поведении, и рассматривать остальное человечество как часть природы. Но стороннику экономического учения Робинзона Крузо не следует слишком обольщаться по поводу этого маленького парадокса; он должен подумать о том, что в современном обществе люди стремятся объединиться в несколько больших коалиций, корпораций, кооперативов, профессиональных союзов и тому подобное, которые во многих отношениях поступают подобно отдельным человеческим индивидуумам.)

Наконец, нужно упомянуть, что теория стратегических игр может найти приложение в таких областях, которые обычно не считаются относящимися к экономике, например при решении вопросов, связанных с ухаживанием и браком, когда необязательно имеется в виду денежная выгода, или в задачах, возникающих при выборах в парламент, когда баллотироваться могут несколько человек. Возможно, что эта теория может пролить свет на все виды ситуаций, в которых участвуют люди, имеющие противоположные цели, причем каждый из них хотя, возможно, и оказывает некоторое влияние на течение событий, но полностью не может им управлять.

2. Терминология и классификация игр

Мы будем применять слово «игра» для обозначения некоторого набора правил и соглашений, составляющих данный вид игры, например шахматы, и будем употреблять слово «партия» для обозначения возможной реализации этих правил.

Подобно этому мы будем применять слово «ход» для обозначения момента игры, в котором один из игроков (или иногда случай) выбирает одну альтернативу из некоторого набора альтернатив; слово «выбор» будем применять для обозначения выбранной альтернативы (в обычном языке слово «ход» употребляется в двух смыслах, для обоих понятий). Таким образом, мы скажем «черные выиграли благодаря разумному выбору на десятом ходу».

Существует огромное число всевозможных стратегических игр. Рассмотрим некоторые способы их классификации.

Во-первых, мы различаем игры *по числу игроков*: игра одного лица, игра двух лиц и др. Например, пасьянс — игра одного лица, шахматы — игра двух лиц. Когда мы говорим «игра n лиц», мы не обязательно подразумеваем, что в каждой партии игры участвуют n человек, просто согласно правилам игры игроки распадаются на n непересекающихся множеств таким образом, что игроки, входящие в каждое множество, имеют одинаковые интересы. Эти n множеств людей с одинаковыми интересами называются «лицами» (так же, как в судебном деле корпорация считается лицом). Например, хотя в шахматы обычно играют два игрока, в них также могут играть две «команды», каждая из трех человек; но и в этом случае игра все же будет игрой двух, а не шести лиц. Точно так же бридж нужно считать игрой двух, а не четырех лиц, так как два партнера имеют одинаковые интересы и рассматриваются поэтому как одно лицо.

При игре в общественные игры игроки иногда решают, что в конце партии они произведут между собой денежные платежи так, как определено правилами игры. Так почти всегда поступают в совершенно случайных играх, например при игре в кости (так как иначе не будет заинтересованности), в покере и часто в бридже. В других случаях игроки ведут счет очков и в конце партии находят числа, измеряющие относительное умение, проявленное участниками игры, но никаких денег не выплачивают, так часто поступают при игре в бридж. Наконец, в некоторых случаях не подсчитывают никаких очков, а просто объявляют, кто «выиграл» и кто «проиграл»; так обычно делают, например, при играх в тик-так-ту*), шашки и шахматы. Однако нам удобно пренебречь вто-

*) Tick-tack-toe — детская игра, состоящая в том, чтобы с закрытыми глазами попасть на одно из чисел, написанных на грифельной доске. (*Прим. перев.*)

рым и третьим вариантом и говорить об игре так, как будто во все игры играют ради денег; таким образом, мы будем обычно говорить о «платежах», производимых между игроками в конце партии, и будем представлять эти платежи как денежные суммы. (Предположение о наличии денежных платежей может показаться ограничением поля нашего исследования, однако это не верно: если даже деньги не переходят из рук в руки, игроки получают от своих относительных очков какое-то удовлетворение или огорчение, и таким образом можно было бы установить денежную ценность испытываемых ими ощущений, следовательно, игру можно представить себе так, как будто она ведется ради этих эквивалентных денежных сумм. Мы не будем здесь вдаваться в эти вопросы, которые скорее относятся к области экономической науки или философии, чем к математике.)

Предположим, что мы рассматриваем партию n лиц с игроками P_1, $P_2, \ldots$, P_n, и пусть p_i $(i=1, \ldots, n)$ — платеж игроку P_i в конце партии (если P_i сам должен платить, то p_i отрицательно). Если при этом

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 0,$$

то мы называем партию *партией с нулевой суммой*. Если любая возможная партия некоторой игры имеет нулевую сумму, то и саму игру мы называем *игрой с нулевой суммой* *). Ясно, что все обычные салонные игры, в которых игра ведется на деньги, есть игры с нулевой суммой, так как в процессе игры сумма взносов всех игроков не возрастает и не уменьшается. Игры с ненулевой суммой дают нам возможность изучать при помощи теории игр модели экономических процессов, так как экономические процессы обычно создают (или уничтожают) богатство. Может даже случиться, что экономический процесс увеличивает или уменьшает богатство каждого из его участников.

Игры можно классифицировать и по *количеству ходов*. Например, тик-так-ту, если играть до самого конца, имеет девять ходов, из которых пять делает один игрок

*) Более широкое определение «игры с нулевой суммой» будет дано в главе VI после введения понятия стратегии.

и четыре — другой. В некоторых играх партии имеют разную продолжительность; так, шахматная партия может быть короткой или длинной в зависимости от относительного искусства партнеров.

Конечная игра имеет конечное число ходов, каждый из которых содержит лишь конечное число альтернатив; другие игры мы называем *бесконечными*.

Наконец, игры можно классифицировать по *количеству информации*, имеющейся у игроков относительно прошлых ходов. Например, в шашках и шахматах игроки все время информированы о предыдущих ходах; в бридже игрок не знает, какие карты были сданы другим участникам, и, следовательно, знает не все. Ясно, что из данной игры можно получить совершенно другую игру, изменив правила относительно информации, даваемой игрокам. Так, бридж превратился бы в совершенно другую игру, если бы каждый игрок должен был показывать свои карты в начале игры. И из шахмат получается совершенно новая игра (так называемая «военная игра») если игрокам нельзя получать информацию о выборах их противников.

Ин. 129

3. Определение прямоугольных игр

Игра одного лица с нулевой суммой не представляет особенных затруднений, ибо, независимо от того, что делает этот единственный игрок, он получает нуль и может с одинаковым успехом выбирать любой ход. При игре одного лица с ненулевой суммой игроку нужно решить обычную задачу на максимум: он должен выбрать из различных открывающихся ему возможностей ту, которая дает ему максимальный выигрыш, или, если игра включает также некоторые случайные ходы, ту, которая дает максимум математического ожидания его выигрыша. Таким образом, чтобы изучить характерные свойства стратегических игр, необходимо перейти к играм с участием больше чем одного игрока.

Мы начнем с изучения игры двух лиц с нулевой суммой, в которой каждый игрок имеет лишь один ход. Первый игрок выбирает число из первых m положительных целых чисел, а второй игрок, не будучи информирован

БИБЛИОТЕКА
Лаборатории
статистических
методов МГУ

о том, какой выбор сделал первый игрок, выбирает число из первых n положительных чисел. Затем эти два числа сравниваются, и один из игроков платит другому сумму, которая зависит от сделанных выборов и определяется правилами игры. Чтобы иметь какое-нибудь обозначение для таких игр, мы будем называть их *прямоугольными играми.* (Позднее мы увидим, что прямоугольные игры не составляют обособленного класса игр, как может показаться с первого взгляда: множество других весьма разнообразных игр можно привести к форме прямоугольных игр.)

Приведем пример прямоугольной игры. Игрок P_1 выбирает число из множества $\{1, 2, 3\}$, а игрок P_2 выбирает число из множества $\{1, 2, 3, 4\}$, не будучи информирован о том, какой выбор сделал P_1. После того как выборы были сделаны, игрок P_2 платит игроку P_1 сумму, определяемую следующей таблицей:

	1	2	3	4
1	2	1	10	11
2	0	—1	1	2
3	—3	—5	—1	1

Иначе говоря, если P_1, например, выбирает 1, а P_2 выбирает 3, то игрок P_2 платит игроку P_1 десять долларов (или десять центов, или десять любых других денежных единиц). Если P_1 выбирает 3, а P_2 выбирает 2, то игрок P_2 платит игроку P_1 минус пять долларов, т. е. игрок P_1 платит игроку P_2 пять долларов. Мы будем описывать впредь такую игру, указывая просто ее *платежную матрицу*

$$\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 10 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & -5 & -1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Другой пример прямоугольной игры — «two-finger Morra» (двухпальцевая Морра), в которую играли в Италии с античных времен. В эту игру играют два человека: каждый из них показывает один или два пальца и одновременно называет число пальцев, которые, по его мнению, покажет его противник. Если один из игроков угадывает правильно, он выигрывает сумму, равную сумме пальцев, показанных им и его противником; в противном случае — ничья. Если символ $\| 1 \quad 2 \|$ означает, что игрок показывает один палец и предполагает, что его противник показывает два пальца, то платежная матрица для этой игры будет иметь вид

	$\|1\quad 1\|$	$\|1\quad 2\|$	$\|2\quad 1\|$	$\|2\quad 2\|$
$\|1\quad 1\|$	0	2	−3	0
$\|1\quad 2\|$	−2	0	0	3
$\|2\quad 1\|$	3	0	0	−4
$\|2\quad 2\|$	0	−3	4	0

Важнейшим вопросом в случае прямоугольной, да и вообще любой игры является вопрос о том, имеется ли оптимальный способ игры, то есть можно ли доказать, что данный способ игры является наиболее рациональным.

Оказывается, что в случае первого примера на этот вопрос очень легко ответить. Действительно, мы замечаем, что каждый элемент первой строки больше соответствующего элемента второй строки и также больше соответствующего элемента третьей строки. Следовательно, независимо от того, какое число выбирает P_2, для P_1 лучше выбрать 1, чем 2 или 3, так что оптимальный способ игры для P_1 — это выбрать 1. Точно так же каждый элемент второго столбца меньше соответствующего элемента каждого из других столбцов; поэтому поскольку P_2 хочет играть таким образом, чтобы платеж был возможно меньшим, оптимальный способ игры для P_2— выбрать 2.

Этот вывод основан на специфическом свойстве платежной матрицы, т. е. на том, что каждый элемент данной строки (или столбца) больше соответствующего элемента другой строки (или столбца). Для того чтобы дать анализ прямоугольных игр, который можно было бы применить для более широкого класса игр, мы должны будем ввести некоторые новые понятия.

4. Прямоугольные игры с седловыми точками

Рассмотрим прямоугольную игру с матрицей порядка $m \times n$

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Если игрок P_1 в некоторой партии этой игры выбирает 1, то ему наверняка будет уплачен хотя бы минимальный элемент первой строки, то есть по меньшей мере

$$\min_j a_{1j}.$$

Вообще, если он выбирает число i, то ему обязательно будет уплачено по меньшей мере

$$\min_j a_{ij}.$$

Но поскольку он может выбрать i как угодно, он может, в частности, выбрать его так, чтобы сделать величину

$$\min_j a_{ij}$$

возможно большей. Итак, для P_1 имеется выбор, который гарантирует ему, что он получит хотя бы

$$\max_i \min_j a_{ij}.$$

Аналогично, платежи игроку P_2 представляют собой элементы матрицы A, взятые со знаком минус. Мы видим, что для P_2 имеется выбор, который гарантирует ему, что он получит по меньшей мере

$$\max_j \min_i (-a_{ij}).$$

Напомним теперь элементарное положение о максимумах и минимумах: если f — любая действительная функция и ее максимумы и минимумы существуют, то

$$\max_x [-f(x)] = -\min_x f(x)$$

и

$$\min_x [-f(x)] = -\max_x f(x).$$

Поскольку в рассматриваемом случае i и j имеют конечный интервал изменения и все максимумы и минимумы существуют, то справедливо соотношение

$$\max_j \min_i (-a_{ij}) = \max_j (-[\max_i a_{ij}]) = -\min_j \max_i a_{ij}.$$

Поэтому P_2 может играть так, чтобы наверняка получить хотя бы

$$-\min_j \max_i a_{ij},$$

и, следовательно, так, что P_1 получит самое большее

$$\min_j \max_i a_{ij}.$$

Итак, P_1 может гарантировать себе, что он получит по меньшей мере

$$\max_i \min_j a_{ij},$$

а P_2 может помешать ему получить больше, чем

$$\min \max a_{ij}.$$

Если оказывается, что

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = v, \tag{1}$$

то P_1 должен понять, что он может получить v, а его противник может помешать ему получить больше чем v. Таким образом, если только у P_1 нет серьезных оснований полагать, что P_2 будет поступать необдуманно (а это должно быть основано на чем-то, не относящемся к самой игре, например на том, что у P_2 есть предрассудок, который заставляет его играть всегда определенным образом), P_1 может делать ставку на v и играть так, чтобы получить v. Аналогично, P_2 может делать ставку на $-v$ и играть так, чтобы получить эту величину. Если бы равенство (1) было справедливо для всякой матрицы A, то на основании приведенных выше соображений поиски оптимального способа игры в прямоугольные игры на этом бы закончились. Но, к сожалению, положение не так просто; действительно, легко указать примеры матриц, для которых (1) неверно. Рассмотрим матрицу

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix},$$

где $a_{11}=a_{22}=+1$ и $a_{12}=a_{21}=-1$; тогда

$$\max_i \min_j a_{ij} = \max\,[\min_j a_{1j},\ \min_j a_{2j}] = \max\,[-1,\ -1] = -1$$

и

$$\min_j \max_i a_{ij} = \min\,[\max_i a_{i1},\ \max_i {}_{i2}] = \min\,[+1,\ +1] = +1,$$

так что

$$\max_i \min_j a_{ij} \neq \min_j \max_i a_{ij}.$$

Ввиду важности равенства (1) для нашей темы, мы, естественно, должны найти необходимое и достаточное условие его выполнения. Поскольку это условие нам понадобится в дальнейшем в более общем виде, мы получим его для произвольных действительных функций, выведя для матриц лишь как следствие. Мы докажем прежде всего, что максимальная величина минимумов никогда не бывает больше минимальной величины максимумов.

Теорема 1.1. *Пусть имеются множества* **A** *и* **B**; $f(x,\ y)$ *есть вещественная функция двух переменных при* $x \in \mathbf{A}$ *и* $y \in \mathbf{B}$, *и существуют*

$$\max_{x \in \mathbf{A}} \min_{y \in \mathbf{B}} f(x,\ y)$$

и

$$\min_{y \in \mathbf{B}} \max_{x \in \mathbf{A}} f(x,\ y).$$

Тогда

$$\max_{x \in \mathbf{A}} \min_{y \in \mathbf{B}} f(x,\ y) \leqslant \min_{y \in \mathbf{B}} \max_{x \in \mathbf{A}} f(x,\ y).$$

Доказательство. Для любых фиксированных x и y по определению минимума

$$\min_{y \in \mathbf{B}} f(x, y) \leqslant f(x, y)$$

и по определению максимума

$$f(x, y) \leqslant \max_{x \in \mathbf{A}} f(x, y).$$

Следовательно,

$$\min_{y \in \mathbf{B}} f(x, y) \leqslant \max_{x \in \mathbf{A}} f(x, y). \tag{2}$$

Поскольку левая часть неравенства (2) не зависит от y, мы заключаем, что

$$\min_{y \in \mathbf{B}} f(x, y) \leqslant \min_{y \in \mathbf{B}} \max_{x \in \mathbf{A}} f(x, y). \tag{3}$$

Поскольку правая часть неравенства (3) не зависит от x, мы заключаем, что

$$\max_{x \in \mathbf{A}} \min_{y \in \mathbf{B}} f(x, y) \leqslant \min_{y \in \mathbf{B}} \max_{x \in \mathbf{A}} f(x, y),$$

что и требовалось доказать.

Замечание 1.2. Возможность применения этого положения к матрицам основана на том, что матрицу

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

можно рассматривать как действительную функцию двух переменных $f(i, j)$, которая определена для $i = 1, 2, \dots, m$ и $j = 1, 2, \dots, n$ равенством

$$f(i, j) = a_{ij}.$$

Следствие 1.3. Пусть

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

произвольная матрица $m \times n$. Тогда

$$\max_i \min_j a_{ij} \leqslant \min_j \max_i a_{ij}.$$

Доказательство следует из теоремы 1.1, если принять за $\mathbf{A}$ множество первых m положительных целых чисел, а за $\mathbf{B}$ множество первых n положительных целых чисел.

Для того чтобы сформулировать необходимое и достаточное условие справедливости равенства (1), удобно ввести новое понятие из теории действительных функций двух переменных.

Определение 1.4. Пусть $f(x, y)$ — действительная функция, определенная для всех $x \in \mathbf{A}$ и $y \in \mathbf{B}$. Точка $\|x_0\, y_0\|$, где $x_0 \in \mathbf{A}$ и $y_0 \in \mathbf{B}$, называется *седловой точкой*, если выполняются следующие условия:

1) $f(x, y_0) \leqslant f(x_0, y_0)$ для всех $x \in \mathbf{A}$,

2) $f(x_0, y_0) \leqslant f(x_0, y)$ для всех $y \in \mathbf{B}$.

Следовательно, функция $y^2 - x^2$ имеет в качестве седловой точку $\|0\ 0\|$, так как для всех действительных x и y

$$0 - x^2 \leqslant 0^2 - 0^2 \leqslant y^2 - 0^2.$$

(Этот пример не удивителен, так как гиперболический параболоид

$$z = y^2 - x^2$$

обычно называется седловидной поверхностью. Однако нужно заметить, что наше определение седловой точки никоим образом не совпадает с понятием, употребляемым в дифференциальной геометрии; например, согласно нашему определению функция $x^2 - y^2$ не имеет седловой точки.)

Теорема 1.5. *Пусть $f(x, y)$ — действительная функция, определенная для $x \in \mathbf{A}$ и $y \in \mathbf{B}$, и существуют*

$$\max_{x \in \mathbf{A}} \min_{y \in \mathbf{B}} f(x, y)$$

и

$$\min_{y \in \mathbf{B}} \max_{x \in \mathbf{A}} f(x, y).$$

Тогда необходимое и достаточное условие того, чтобы

$$\max_{x \in A} \min_{y \in B} f(x, y) = \min_{y \in B} \max_{x \in A} f(x, y),$$

состоит в том, что $f(x, y)$ должна иметь седловую точку. Кроме того, если $\|x_0 \ \ y_0\|$ есть седловая точка функции $f(x, y)$, то

$$f(x_0, y_0) = \max_{x \in A} \min_{y \in B} f(x, y) = \min_{y \in B} \max_{x \in A} f(x, y).$$

Доказательство. Докажем достаточность условия. Пусть $\|x_0 \ \ y_0\|$ — седловая точка функции $f(x, y)$. Тогда для всех $x \in A$ и $y \in B$

$$f(x, y_0) \leqslant f(x_0, y_0), \tag{4}$$

$$f(x_0, y_0) \leqslant f(x_0, y). \tag{5}$$

Из (4) мы заключаем, что

$$\max_{x \in A} f(x, y_0) \leqslant f(x_0, y_0),$$

а из (5) следует, что

$$f(x_0, y_0) \leqslant \min_{y \in B} f(x_0, y),$$

так что

$$\max_{x \in A} f(x, y_0) \leqslant f(x_0, y_0) \leqslant \min_{y \in B} f(x_0, y). \tag{6}$$

Поскольку

$$\min_{y \in B} \max_{x \in A} f(x, y) \leqslant \max_{x \in A} f(x, y_0)$$

и

$$\min_{y \in B} f(x_0, y) \leqslant \max_{x \in A} \min_{y \in B} f(x, y),$$

мы заключаем из (6), что

$$\min_{y \in B} \max_{x \in A} f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0) \leqslant \max_{x \in A} \min_{y \in B} f(x, y). \tag{7}$$

Но по теореме 1.1 первый член неравенства (7) не менее третьего; отсюда мы заключаем, что все три члена равны, что и требовалось доказать. Чтобы убедиться в том, что условие необходимо, допустим, что x_0 есть элемент множества **A**, при котором

$$\min_{y \in \mathbf{B}} f(x, y)$$

имеет максимальное значение, а y_0 — элемент множества **B**, при котором

$$\max_{x \in \mathbf{A}} f(x, y)$$

имеет минимальное значение; иначе говоря, пусть x_0 и y_0 соответственно элементы множеств **A** и **B**, удовлетворяющие условиям

$$\left.\begin{aligned} \min_{y \in \mathbf{B}} f(x_0, y) &= \max_{x \in \mathbf{A}} \min_{y \in \mathbf{B}} f(x, y), \\ \max_{x \in \mathbf{A}} f(x, y_0) &= \min_{y \in \mathbf{B}} \max_{x \in \mathbf{A}} f(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Покажем, что $\| x_0 \; y_0 \|$ есть седловая точка функции $f(x, y)$.

Поскольку мы предполагаем, что

$$\max_{x \in \mathbf{A}} \min_{y \in \mathbf{B}} f(x, y) = \min_{y \in \mathbf{B}} \max_{x \in \mathbf{A}} f(x, y),$$

то из (8) следует равенство

$$\min_{y \in \mathbf{B}} f(x_0, y) = \max_{x \in \mathbf{A}} f(x, y_0). \tag{9}$$

Из определения минимума имеем

$$\min_{y \in \mathbf{B}} f(x_0, y) \leqslant f(x_0, y_0),$$

и, следовательно, учитывая (9), получаем

$$\max_{x \in \mathbf{A}} f(x, y_0) \leqslant f(x_0, y_0).$$

Из последнего неравенства и из определения максимума мы заключаем, что для всех $x \in \mathbf{A}$

$$f(x, y_0) \leqslant f(x_0, y_0),$$

а это есть условие (1) определения 1.4. Аналогично доказывается условие (2) определения 1.4, что завершает доказательство.

Замечание 1.6. На основании интерпретации матрицы как действительной функции (замечание 1. 2) мы видим, что седловая точка матрицы есть пара целых чисел $\| i \quad j \|$, таких, что a_{ij} в одно и то же время представляет минимум своей строки и максимум своего столбца. Таким образом, матрица

$$\begin{Vmatrix} 21 & 11 & 31 \\ 32 & 0 & 4 \end{Vmatrix}$$

имеет седловую точку $\| 1 \quad 2 \|$, так как 11 представляет наименьший элемент в первой строке и наибольший элемент во втором столбце. Матрица

$$\begin{Vmatrix} 12 & 13 & 12 \\ 10 & 31 & 9 \end{Vmatrix}$$

имеет две седловые точки $\| 1 \quad 1 \|$ и $\| 1 \quad 3 \|$. Матрица

$$\begin{Vmatrix} 12 & 13 & 12 \\ 10 & 31 & 13 \end{Vmatrix}$$

имеет лишь одну седловую точку, так как 12 не является максимумом третьего столбца.

Используя понятие седловой точки матрицы, мы выведем теперь из теоремы 1.5 следующее следствие.

Следствие 1.7. Пусть

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Необходимым и достаточным условием того, что

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij},$$

является существование седловой точки матрицы **A**, т. е. существование пары целых чисел $\| i_0 \quad j_0 \|$, для которых $a_{i_0 j_0}$ является одновременно минимумом своей строки и максимумом своего столбца.

Кроме того, если $\| i_0 j_0 \|$ — седловая точка матрицы **A**, то

$$a_{i_0 j_0} = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Из следствия 1.7 мы видим, что (1) справедливо тогда и только тогда, когда матрица A имеет седловую точку. Поэтому, если матрица прямоугольной игры имеет седловую точку $\|x_0\ y_0\|$ (в этом случае мы будем иногда говорить для краткости, что сама игра имеет седловую точку), то для P_1 лучше выбрать x_0, а для P_2 — y_0. Согласно этому назовем x_0 и y_0 *оптимальными выборами* соответственно для P_1 и P_2, а величину $a_{x_0y_0}$ *ценой* игры (для P_1).

Так, например, матрица

$$\begin{Vmatrix} -5 & 3 & 1 & 20 \\ 5 & 5 & 4 & 6 \\ -4 & -2 & 0 & -5 \end{Vmatrix}$$

имеет седловую точку $\|2\ 3\|$, так как 4 является минимумом второй строки и максимумом третьего столбца. Следовательно, при игре в прямоугольную игру, имеющую такую матрицу, оптимальным выбором для P_1 является 2, для P_2 — 3. Цена игры равна 4. Выбрав 2, P_1 может быть уверен, что он получит по меньшей мере 4, а выбрав 3, P_2 может не допустить, чтобы P_1 получил более 4.

Нужно заметить, что когда мы говорим, что оптимальным выбором для P_1 является 2, мы не имеем в виду, что для него всего разумнее будет выбирать 2 при всех обстоятельствах. Например, допустим, что P_1 знает, что P_2 выберет 4 (пусть P_1 знает, что P_2 всегда следует совету некоего человека, и P_1 подкупил последнего, чтобы он советовал P_2 выбирать 4); тогда, конечно, всего лучше для P_1 выбирать 1 вместо 2, так как при этом он получит 20 вместо 6. Но игрок может знать о намерениях своего противника лишь в исключительных случаях, поэтому вообще лучше играть математически оптимальным способом.

Таким образом, для того случая, когда матрица прямоугольной игры имеет седловую точку, мы получаем теорию, указывающую, как всего лучше играть в эту игру. Однако у нас остается вопрос о том, как играть в игру с матрицей, например

$$\begin{Vmatrix} 1 & -7 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix},$$

которая не имеет седловой точки. Этот вопрос будет рассмотрен в главе II.

Библиографические замечания

Первые работы по теории игр и применении этой теории к экономике принадлежат фон Нейману [88]*), Кальмару [54]. Теория была весьма полно разработана в книге фон Неймана и Моргенштерна [92], из которой многое вошло в эту книгу. Общий обзор этого вопроса был сделан в 1949 г. Паксоном [93], а более популярное изложение содержится в работах Макдональда [71], [72] и [73].

Упражнения

1. Как вы считаете, экономика Робинзона Крузо приближается больше к британской экономике 1900 года или 1952 года? Почему?

2. Если $\mathbf{A}$ — множество действительных чисел, то *нижней границей* множества $\mathbf{A}$ мы называем число y такое, что $y \leqslant x$ для любого $x \in \mathbf{A}$; *точной нижней границей* (или *нижней гранью*) множества $\mathbf{A}$ мы называем такую нижнюю границу, которая не меньше, чем любая другая нижняя граница. Укажите пример множества, не имеющего нижней границы. Покажите, что никакое множество действительных чисел не может иметь больше одной точной нижней границы.

3. Определите верхнюю границу и точную верхнюю границу множества действительных чисел, аналогичные нижним границам и точным нижним границам, и докажите утверждения, аналогичные утверждениям упражнения 2.

4. Если $f(x)$ — действительная функция, определенная на множестве $\mathbf{A}$, то

$$\inf_{x \in \mathbf{A}} f(x)$$

обозначает точную нижнюю границу множества $\mathbf{B}$ всех значений функции $f(x)$, т. е. множества $\mathbf{B}$ всех чисел y таких, что для каждого $x \in \mathbf{A}$

$$y = f(x).$$

---

*) Числа в квадратных скобках относятся к работам, указанным в библиографии в конце книги.

Аналогично, через

$$\sup_{x \in \mathbf{A}} f(x)$$

мы обозначаем точную верхнюю границу множества $\mathbf{B}$ всех значений функции $f(x)$. Докажите, что если указанные границы существуют, то

$$\sup_{x \in \mathbf{A}} [-f(x)] = -\inf_{x \in \mathbf{A}} f(x)$$

и

$$\inf_{x \in \mathbf{A}} [-f(x)] = -\sup_{x \in \mathbf{A}} f(x).$$

5. Покажите, что при существовании указанных границ справедливы неравенства:

$$\sup_{x} [f(x) + g(x)] \leqslant \sup_{x} f(x) + \sup_{x} g(x)$$

и

$$\inf_{x} f(x) + \inf_{x} g(x) \leqslant \inf_{x} [f(x) + g(x)].$$

6. Покажите, что знаки $\leqslant$ в упражнении 5 нельзя заменить знаками $=$.

7. *Максимумом* множества $\mathbf{A}$ действительных чисел мы называем элемент множества $\mathbf{A}$, который является верхней границей множества $\mathbf{A}$. Покажите, что максимум множества, если он вообще существует, единственен и является точной верхней границей множества. Покажите, что множество действительных чисел может иметь точную верхнюю границу и не иметь максимума.

8. Определите минимум множества действительных чисел аналогично определению максимума в упражнении 7 и докажите утверждения аналогичные утверждениям упражнения 7.

9. Если $f(x)$ — действительная функция, определенная на множестве $\mathbf{A}$, то

$$\max_{x \in \mathbf{A}} f(x)$$

обозначает максимум множества $\mathbf{B}$ всех значений функции $f(x)$ для $x \in \mathbf{A}$.

Аналогично,

$$\min_{x \in \mathbf{A}} f(x)$$

есть минимум множества всех значений функции $f(x)$ для $x \in \mathbf{A}$. Покажите, что если указанные максимумы и минимумы существуют, то

$$\max_{x \in \mathbf{A}} [-f(x)] = -\min_{x \in \mathbf{A}} f(x)$$

и

$$\min_{x \in \mathbf{A}} [-f(x)] = -\max_{x \in \mathbf{A}} f(x).$$

10. Покажите, что если $f(x)$ и $g(x)$ — действительные функции, определенные для $x \in \mathbf{A}$, и если максимумы и минимумы для них существуют, то

$$\max_{x \in \mathbf{A}} [f(x) + g(x)] \leqslant \max_{x \in \mathbf{A}} f(x) + \max_{x \in \mathbf{A}} g(x)$$

и

$$\min_{x \in \mathbf{A}} f(x) + \min_{x \in \mathbf{A}} g(x) \leqslant \min_{x \in \mathbf{A}} [f(x) + g(x)].$$

11. Покажите, что если $f(x, y)$ — действительная функция двух переменных, определенная для $x \in \mathbf{A}$ и $y \in \mathbf{B}$, и если указанные максимумы и минимумы существуют, то

$$\max_{x \in \mathbf{A}} \max_{y \in \mathbf{B}} f(x, y) = \max_{y \in \mathbf{B}} \max_{x \in \mathbf{A}} f(x, y)$$

и

$$\min_{x \in \mathbf{A}} \min_{y \in \mathbf{B}} f(x, y) = \min_{y \in \mathbf{B}} \min_{x \in \mathbf{A}} f(x, y).$$

12. Докажите следующее предложение: если $f(x, y)$ — действительная функция двух действительных переменных, определенная для $x \in \mathbf{A}$ и $y \in \mathbf{B}$, и если

$$\sup_{x \in \mathbf{A}} \inf_{y \in \mathbf{B}} f(x, y)$$

и

$$\inf_{y \in \mathbf{B}} \sup_{x \in \mathbf{A}} f(x, y)$$

существуют оба, то

$$\sup_{x \in \mathbf{A}} \inf_{y \in \mathbf{B}} f(x, y) \leqslant \inf_{y \in \mathbf{B}} \sup_{x \in \mathbf{A}} f(x, y).$$

13. Найдите седловые точки следующих матриц:

a) $\begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 10 \end{Vmatrix}$;

b) $\begin{Vmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$;

c) $\begin{Vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{Vmatrix}$;

d) $\begin{Vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{Vmatrix}$.

14. Найдите $\min\limits_{j} \max\limits_{i} a_{ij}$ и $\max\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij}$ для следующей матрицы:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \end{Vmatrix}.$$

15. Покажите, что если $\| x_1 \; y_1 \|$ и $\| x_2 \; y_2 \|$ — седловые точки действительной функции, то такими же точками будут $\| x_1 \; y_2 \|$ и $\| x_2 \; y_1 \|$. Что это значит в применении к матрицам?

16. Найдите $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$ и $\min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$ для платежной матрицы двухпальцевой Морра.

17. В трехпальцевой Морра игрок показывает один, два или три пальца и одновременно пытается угадать число пальцев, показанных его противником. Остальные правила такие же, как в двухпальцевой Морра. Найдите платежную матрицу и покажите, что игра не имеет седловой точки.

18. Два игрока имеют по n долларов и предмет ценою $c > 0$. Каждый игрок делает заявку в запечатанном конверте, предлагая i долларов (где i — одно из целых чисел от 0 до n) за предмет. Предложивший бо́льшую сумму получает предмет и платит другому предложенную им сумму. Если оба игрока предлагают одну и ту же сумму, то предмет назначается без компенсирующего одностороннего платежа одному из игроков путем бросания монеты, так что ожидаемая доля каждого в предмете в этом случае составляет $\frac{1}{2} c$. Напишите платежную матрицу и определите, имеет ли она седловую точку.

ГЛАВА II

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ИГР

1. Смешанные стратегии

Рассмотрим прямоугольную игру, имеющую матрицу

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} y & 1-y \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ 1-x \end{array} & \left\| \begin{array}{rr} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array} \right\| \end{array}.$$

Поскольку матрица не имеет седловой точки, наши прежние методы недостаточны, чтобы позволить нам определить оптимальные способы игры для P_1 и P_2. Кроме того, безразлично, выберет ли P_1 1 или 2, так как в обоих случаях он получит 1 или -1, если, соответственно, P_2 сделает такой же или противоположный выбор. С другой стороны, если P_2 знает, какой выбор сделает P_1, то P_2 может поступить так, что P_1 должен будет заплатить ему 1 (для этого он должен сделать противоположный выбор). Таким образом, оказывается, что для P_1 весьма важно сделать так, чтобы P_2 было трудно угадать, какой выбор он намеревается сделать. Один из способов, которым P_1 может этого достичь, является случайный выбор.

Допустим, например, что P_1 решает сделать свой выбор путем бросания монеты, выбирая 1, если монета показывает герб, и выбирая 2, если она показывает решку. В этом случае, поскольку вероятность того, что P_1 выберет 1, равна $^1/_2$ и вероятность того, что он выберет 2, такая же, математическое ожидание выигрыша для P_1 в случае, если P_2 выбирает 1, равно

$$1\cdot\frac{1}{2}+(-1)\cdot\frac{1}{2}=0,$$

и оно будет таким же, если P_2 выберет 2. Следовательно, если P_1 выбирает этим способом, то математическое ожидание его выигрыша будет равно нулю, независимо от того, что предпринимает P_2.

В действительности это *единственный* способ, которым P_1 может играть в рассматриваемую игру, не подвергаясь риску проигрыша, даже в том случае, если P_2 узнает, какой выбор он собирается сделать. Допустим, что P_1 применяет метод случайного выбора, который определяет, что вероятность выбора 1 равна x и вероятность выбора 2 равна $1-x$, предположим, что P_2 знает, какой случайный механизм применяет P_1. Тогда математическое ожидание выигрыша игрока P_1, если P_2 выбирает 1, равно

$$1\cdot x+(-1)(1-x)=2x-1,$$

и если P_2 выбирает 2, математическое ожидание выигрыша игрока P_1 равно

$$(-1)\,x+(1)\,(1-x)=1-2x.$$

Если $x>\frac{1}{2}$, то $1-2x<0$, так что математическое ожидание выигрыша P_1, если P_2 выбирает 2, меньше нуля; и если $x<\frac{1}{2}$, то $2x-1<0$, математическое ожидание выигрыша P_1, если P_2 выбирает 1, тоже меньше нуля.

Отсюда следует, что оптимальный вариант игры в эту игру для P_1 (и, по тем же причинам, для P_2) — выбирать 1 или 2, каждое с вероятностью $\frac{1}{2}$. Цена игры для P_1 (т. е. математическое ожидание его выигрыша, если он играет оптимальным способом) равна нулю.

В приведенных выше рассуждениях мы все время говорили об использовании случайных механизмов которые определяют вероятности различных выборов. Однако иногда интуитивно проще говорить об относительных частотах различных выборов. На следующих страницах мы часто будем употреблять этот менее точный способ выражения.

Рассмотрим теперь несколько более сложный пример: прямоугольную игру с матрицей

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} y & 1-y \end{array} \\ \begin{array}{r} x \\ 1-x \end{array} & \left\| \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{array} \right\| \end{array}.$$

Поскольку матрица не имеет седловой точки, то, повидимому, для P_1 и P_2 желательно играть только с определенными частотами. Предположим, что P_1 выбирает 1 с частотой x и 2 с частотой $1-x$ (так что ни x, ни $1-x$ не отрицательны), а P_2 выбирает 1 с частотой y и 2 с частотой $1-y$. Тогда математическое ожидание выигрыша для P_1 равно

$$E(x,\ y) = 1xy + 3x(1-y) + 4(1-x)y + 2(1-x)(1-y).$$

Перед нами возникает задача — придать точный математический смысл интуитивному понятию оптимального выбора величины x (для P_1) и оптимального выбора величины y (для P_2).

Выполняя элементарные алгебраические преобразования, получим

$$E(x,\ y) = -4xy + x + 2y + 2 =$$
$$= -4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{4}\right)+\frac{5}{2}. \qquad (1)$$

Отсюда видно, что если P_1 берет $x=\frac{1}{2}$, то математическое ожидание его выигрыша по крайней мере будет $\frac{5}{2}$. Более того, он не может обеспечить себе выигрыш больше $\frac{5}{2}$, так как, взяв $y=\frac{1}{4}$, P_2 может гарантировать, что ожидаемый выигрыш у P_1 будет как раз $\frac{5}{2}$, и не больше чем $\frac{5}{2}$. Итак, P_1 может ставить на $\frac{5}{2}$ и, выбрав $x=\frac{1}{2}$, получить эту сумму. Подобно этому P_2 может примириться с тем, что он получит $-\frac{5}{2}$, и, выбрав $y=\frac{1}{4}$, получить эту сумму. Следовательно, для этой игры мы вправе сказать, что оптимальный способ игры для P_1 — выбирать 1 и 2 одинаково часто, а оптимальный способ игры для P_2 — выбирать 1 с вероятностью $\frac{1}{4}$ и выбирать 2 с вероятностью $\frac{3}{4}$. Очевидно, в этом случае $\frac{5}{2}$ можно принять за цену этой игры.

Из равенства (1) мы находим, что для всех x и y, лежащих между 0 и 1,

$$E\left(x, \frac{1}{4}\right) \leqslant E\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \leqslant E\left(\frac{1}{2}, y\right). \tag{2}$$

Таким образом, точка $\left\|\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\right\|$ есть седловая точка функции $E(x, y)$. Неравенство (2) вообще можно принять за определение оптимальных частот для любой прямоугольной игры с матрицей 2×2.

Итак, если $E(x, y)$ — математическое ожидание выигрыша первого игрока в такой игре, когда P_1 выбирает 1 и 2 с относительными частотами x и $1-x$, а P_2 выбирает 1 и 2 с относительными частотами y и $1-y$, то мы говорим, что x^* есть оптимальная частота для P_1, а y^* — оптимальная частота для P_2, если для всех x и y, лежащих между 0 и 1,

$$E(x, y^*) \leqslant E(x^*, y^*) \leqslant E(x^*, y).$$

Распространим это определение на все произвольные прямоугольные игры (т. е. прямоугольные игры, матрицы которых имеют произвольное число строк и столбцов).

Рассмотрим прямоугольную игру с матрицей

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Смешанной стратегией для P_1 мы будем называть упорядоченную систему m действительных неотрицательных чисел, удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1;$$

причем числа можно рассматривать как частоты, с которыми P_1 выбирает числа 1, 2, ..., m. Будем впредь употреблять символ S_m для обозначения этого множества m-мерных векторов (смешанных стратегий).

Аналогично, смешанной стратегией для P_2 мы будем называть элемент множества S_n, т. е. упорядоченную систему неотрицательных действительных чисел $\| y_1 \ldots y_n \|$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

Иногда мы будем называть сами числа 1, ..., m *чистыми стратегиями* игрока P_1, а числа 1, ..., n — *чистыми стратегиями* игрока P_2. Очевидно, что для P_1 игра с чистой стратегией k эквивалентна игре со смешанной стратегией $\| x_1 \ldots x_m \|$, где $x_k = 1$ и $x_i = 0$ для $i \neq k$.

Если P_1 применяет смешанную стратегию $X = \| x_1 \ldots x_m \|$, а P_2 применяет смешанную стратегию $Y = \| y_1 \ldots y_n \|$, то математическое ожидание выигрыша для P_1 определяется формулой

$$E(X, Y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i y_j.$$

Если оказывается, что для некоторого $X^* \in S_m$ и некоторого $Y^* \in S_n$ и для всех $X \in S_m$ и всех $Y \in S_n$

$$E(X, Y^*) \leqslant E(X^*, Y^*) \leqslant E(X^*, Y), \qquad (3)$$

то мы называем X^* и Y^* *оптимальными смешанными стратегиями* для P_1 и P_2, а $E(X^*, Y^*)$ — *ценой* игры для P_1. Если X^* и Y^* — оптимальные стратегии соответственно для P_1 и P_2, то мы называем иногда упорядоченную пару $\| X^*, Y^* \|$ *решением* игры или *стратегической седловой точкой.*

Интуитивная адекватность вышеизложенных определений заключается в следующем. Если X^* и Y^* — смешанные стратегии, удовлетворяющие условию (3), то, применяя X^*, P_1 может гарантировать себе, что он получит по меньшей мере $E(X^*, Y^*)$, независимо от того, как поступит P_2. Аналогично, используя Y^*, P_2

может не дать P_1 получить больше чем $E(X^*, Y^*)$. Итак, $E(X^*, Y^*)$ представляет ту сумму, которую P_1 может надеяться получить — он может получить ее, выбирая X^*, а P_2 может ограничить его этой суммой, выбирая Y^*.

Если две величины

$$v_1 = \max_{X \in \mathbf{S}_m} \min_{Y \in \mathbf{S}_n} E(X, Y)$$

и

$$v_2 = \min_{Y \in \mathbf{S}_n} \max_{X \in \mathbf{S}_m} E(X, Y)$$

существуют и равны между собой, то на основании теоремы 1.5 существуют смешанные стратегии, удовлетворяющие условию (3), так что игра имеет цену и имеются оптимальные стратегии для обоих игроков. Таким образом, вопрос о существовании v_1 и v_2 и равенстве их между собой является очень важным. В § 3 мы покажем, что они всегда существуют и равны между собой, и, следовательно, определений этого параграфа достаточно для того, чтобы найти цену произвольной прямоугольной игры и ее оптимальные стратегии. Прежде чем обратиться к доказательству этого положения, удобно ввести некоторые геометрические понятия и теоремы, которые понадобятся нам в дальнейшем.

2. Геометрическое обоснование

Евклидовым n-мерным пространством (обозначим его $\mathbf{E}_n$) мы будем называть множество всех упорядоченных систем n чисел $\|x_1 \ldots x_n\|$, где $x_1, \ldots, x_n$ — действительные числа. Если $X^{(1)} = \|x_1^{(1)} \ldots x_n^{(1)}\|$ и $X^{(2)} = \|x_1^{(2)} \ldots x_n^{(2)}\|$ — две точки множества $\mathbf{E}_n$, то мы определяем *расстояние* $d(X^{(1)}, X^{(2)})$ между $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ формулой

$$d(X^{(1)}, X^{(2)}) = \sqrt{(x_1^{(1)} - x_1^{(2)})^2 + \ldots + (x_n^{(1)} - x_n^{(2)})^2}.$$

Подмножество $\mathbf{X}$ множества $\mathbf{E}_n$ называется *ограниченным*, если существует такое число M, что для всех точек $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ из $\mathbf{X}$

$$d(X^{(1)}, X^{(2)}) \leqslant M.$$

Легко показать, что необходимым и достаточным условием ограниченности множества является нахождение его в некоторой гиперсфере, т. е. существование точки a множества $\mathbf{E}_n$ и числа R таких, что для всякого $x \in \mathbf{X}$

$$d(x, a) \leqslant R.$$

Назовем точку x пространства $\mathbf{E}_n$ *предельной точкой* подмножества $\mathbf{A}$ из $\mathbf{E}_n$, если для всякого положительного ε существует точка $y \in \mathbf{A}$, отличная от x и такая, что $d(x, y) < \varepsilon$.

Так, если $\mathbf{A}$ есть множество точек $\|x \ y\|$ пространства $\mathbf{E}_2$, для которых

$$x^2 + y^2 < 1,$$

то любая точка $\|x_0 \ y_0\|$, для которой выполняется равенство

$$x_0^2 + y_0^2 = 1,$$

есть предельная точка множества $\mathbf{A}$. Следует обратить внимание, что конечное множество точек не имеет предельных точек. С другой стороны, всякое ограниченное бесконечное множество точек имеет по меньшей мере одну предельную точку.

Замыканием множества называется множество, полученное путем добавления к данному множеству всех его предельных точек. Так, замыкание множества $\mathbf{A}$ упомянутых выше точек есть множество точек $\|x \ y\|$ пространства $\mathbf{E}_2$, таких, что

$$x^2 + y^2 \leqslant 1.$$

Конечное множество совпадает со своим замыканием. Множество называется *замкнутым*, если оно совпадает со своим замыканием. Таким образом, всякое конечное множество замкнуто, так же как, например, множество, состоящее из всех точек $\|x, y\|$ пространства $\mathbf{E}_2$, для которых

$$x^2 + y^2 \geqslant 1.$$

Множество называется *открытым*, если его дополнение замкнуто. Так, множество $\mathbf{A}$, упомянутое выше, открыто. Некоторые множества не являются ни открытыми, ни замкнутыми. Множество точек x пространства $\mathbf{E}_1$, для которых

$$0 < x \leqslant 1,$$

не открыто и не замкнуто.

Внутренняя часть множества есть дополнение замыкания его дополнения. Следовательно, внутренней частью множества точек x пространства $\mathbf{E}_1$, для которых $0 < x \leqslant 1$, является множество точек x пространства $\mathbf{E}_1$, таких, что $0 < x < 1$. Внутренней частью любого конечного множества является пустое множество. Легко видеть, что замыкание любого множества замкнуто и внутренняя часть любого множества открыта. Дополнение любого замкнутого множества открыто, а дополнение любого открытого множества замкнуто.

Множество $\mathbf{E}_n$ для любого n открыто и замкнуто, и то же справедливо для пустого множества; это единственные множества, которые и открыты, и замкнуты.

Границей множества мы называем пересечение его замыкания с замыканием его дополнения. Так, границей упомянутого выше множества $\mathbf{A}$ является множество всех точек $\|x \ y\|$ пространства $\mathbf{E}_2$, таких, что

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Если $\mathbf{B}$ есть множество всех точек $\|x \ y\|$ пространства $\mathbf{E}_2$, таких, что x и y суть рациональные числа, то граница множества есть все пространство $\mathbf{E}_2$.

Множество называется *связным*, если его нельзя представить в виде суммы двух непересекающихся множеств, ни одно из которых не содержит предельной точки другого. Так, упомянутое выше множество $\mathbf{A}$ — связное; то же справедливо, например, для множества всех точек $\|x \ y \ z\|$ пространства $\mathbf{E}_3$, для которых

$$3x + 2y + 5z = 7.$$

Если $\mathbf{C}$ есть множество всех точек $\|x \ y\|$ пространства $\mathbf{E}_2$, для которых $x \neq 0$, то множество $\mathbf{C}$ не связное; действительно, если $\mathbf{C}_1$ есть множество всех точек $\|x \ y\|$, для которых $x > 0$, и $\mathbf{C}_2$ есть множество всех точек $\|x \ y\|$, для которых $x < 0$, то $\mathbf{C}$ есть сумма множеств $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$, и ни одно из множеств C_1 и C_2 не содержит предельной точки другого.

Помимо этих общих понятий, мы используем также более специальные понятия, относящиеся к евклидову пространству. Эти понятия связаны с теорией выпуклых множеств, которая сама по себе представляет хорошо разработанную, весьма специальную область математики; мы дадим здесь лишь основы этой дисциплины и ограничимся теми положениями, которые будут полезны в связи с теорией игр.

Пусть

$$x^{(1)} = \| x_1^{(1)} \ldots x_n^{(1)} \|,$$
$$x^{(2)} = \| x_1^{(2)} \ldots x_n^{(2)} \|,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x^{(r)} = \| x_1^{(r)} \ldots x_n^{(r)} \|$$

и

$$x = \| x_1 \ldots x_n \|$$

суть точки пространства $\mathbf{E}_n$; $\| a_1 \ldots a_r \|$ — элемент множества S_2 (т. е. $a_i \geqslant 0$ для $i = 1, \ldots, r$ и $a_1 + \ldots + a_r = 1$); предположим еще, что

$$x_j = a_1 x_j^{(1)} + a_2 x_j^{(2)} + \ldots + a_r x_j^{(r)} \quad \text{для } j = 1, \ldots, n.$$

Тогда мы будем говорить, что x есть *выпуклая линейная комбинация* точек $x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}$ с *весами* $a_1, \ldots, a_2$, и записывать это так:

$$x = a_1 x^{(1)} + \ldots + a_r x^{(r)}.$$

Так, например, точка $\|0 \; 15\|$ пространства $\mathbf{E}_2$ есть выпуклая линейная комбинация точек $\|6 \; 12\|$, $\|-9 \; 15\|$ и $\|4 \; 16\|$ с весами $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$.

Аналогично точка $\|-1 \; 2 \; 11\|$ пространства $\mathbf{E}_3$ есть выпуклая линейная комбинация точек $\|3 \; 6 \; 9\|$ и $\|-3 \; 0 \; 12\|$ с весами $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$.

Мы называем подмножество $\mathbf{X}$ пространства $\mathbf{E}_n$ *выпуклым*, если всякая выпуклая линейная комбинация точек множества $\mathbf{X}$ есть точка множества $\mathbf{X}$. Так, множество **A**, состоящее из всех точек $\|x\ y\|$, таких, что

$$x^2+y^2<1,$$

и множество **B**, состоящее из всех точек $\|x\ y\|$, таких, что

$$x^2+y^2\leqslant 1,$$

оба выпуклые. Множество **C**, состоящее из всех точек $\|x\ y\|$, таких, что

$$x^2+y^2=1,$$

и множество **D**, состоящее из всех точек $\|x\ y\|$, таких, что

$$x^2+y^2\geqslant 1,$$

оба не выпуклые; действительно, точка $\|0\ 0\|$ есть выпуклая линейная комбинация $\left(\text{с весами } \frac{1}{2} \text{ и } \frac{1}{2}\right)$ точек $\|1\ 0\|$ и $\|-1\ 0\|$, которые принадлежат и множеству **C** и множеству **D**; сама же точка $\|0\ 0\|$ не принадлежит ни к **C**, ни к **D**.

Мы определили выпуклое множество как множество **X**, такое, что когда $y^{(1)}, \ldots, y^{(p)}$ — элементы множества **X** и $\|a_1 \ldots a_p\|$ принадлежит $\mathbf{S}_p$, то и

$$y=a_1y^{(1)}+\ldots+a_py^{(p)}$$

принадлежит **X**. Однако легко показать, что для того, чтобы множество было выпуклым, необходимо и достаточно, чтобы вышеуказанное условие выполнялось для $p=2$; таким образом, множество **X** выпуклое, если всегда, когда $y^{(1)}$ и $y^{(2)}$ принадлежат **X** и $\|a_1\ a_2\|$ принадлежит $\mathbf{S}_2$,

$$y=a_1y^{(1)}+a_2y^{(2)}$$

тоже принадлежит **X**.

Выпуклой оболочкой множества **X** называется пересечение всех выпуклых множеств, подмножеством которых является **X**. Так, выпуклой оболочкой множества **D** всех точек $\|x\ y\|$, таких, что

$$x^2+y^2=1,$$

является множество всех точек $\|x\ y\|$, таких, что

$$x^2 + y^2 \leqslant 1.$$

Выпуклой оболочкой множества всех точек $\|x\ y\|$, таких, что

$$x^2 + y^2 > 1,$$

является вся плоскость $\mathbf{E}_2$.

Поскольку пространство $\mathbf{E}_n$ выпуклое, очевидно, любое множество содержится по меньшей мере в одном выпуклом множестве, и, следовательно, любое множество имеет выпуклую оболочку. Нетрудно показать, что выпуклая оболочка множества $\mathbf{X}$ состоит как раз из тех точек, которые являются выпуклыми линейными комбинациями точек множества $\mathbf{X}$. В этом разделе мы не будем приводить ни одного доказательства, так как теория выпуклых множеств представляет лишь математический подготовительный аппарат к теории игр. Теорема Френкеля, которую мы здесь приводим, не будет использована в этой главе, но она нам будет необходима позднее при доказательстве теоремы 11.5.

Теорема 2.1. *Если $\mathbf{X}$ есть некоторое подмножество пространства $\mathbf{E}_n$, то любая точка выпуклой оболочки подмножества $\mathbf{X}$ может быть представлена как выпуклая линейная комбинация $n+1$ точек из $\mathbf{X}$. Если, кроме того, подмножество $\mathbf{X}$ связно, то любая точка выпуклой оболочки подмножества $\mathbf{X}$ может быть представлена как выпуклая линейная комбинация n точек $\mathbf{X}$.*

Замечание 2.2. Для пояснения теоремы допустим, что $\mathbf{X}$ состоит из четырех точек $\|0\ 0\|$, $\|0\ 1\|$, $\|1\ 1\|$ и $\|1\ 0\|$ пространства $\mathbf{E}_2$, то есть $\mathbf{X}$ состоит из четырех вершин квадрата (рис. 1). Тогда выпуклой оболочкой $\mathbf{X}$, очевидно, является весь квадрат, включая его границу. Каждую точку треугольника abd можно представить как выпуклую линейную комбинацию трех точек a, b и d, и аналогично любую точку треугольника bcd можно представить как выпуклую линейную комбинацию трех точек b, c и d. Точка $\left\|\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\right\|$, не находящаяся ни на границе квадрата, ни на одной из диагоналей ac и bd, не может быть представлена как выпуклая линейная комбинация двух точек подмножества $\mathbf{X}$.

С другой стороны, если $\mathbf{X}$ — *связное* множество, состоящее из всех точек, лежащих на границе квадрата, то выпуклая оболочка есть то же подмножество; в этом случае любую точку выпуклой оболочки можно представить как выпуклую линейную комбинацию д в у х точек множества $\mathbf{X}$.

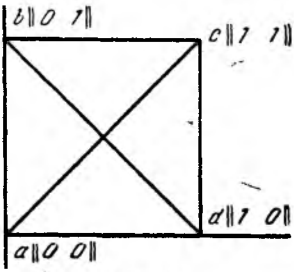

Рис. 1.

Пусть $a_1, \ldots, a_n$ суть n действительных чисел, не все равные нулю, и пусть b — какое-нибудь действительное число; тогда множество точек $\| x_1 \ldots x_n \|$ пространства $\mathbf{E}_n$ таких, что

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b,$$

называется *гиперплоскостью* пространства $\mathbf{E}_n$. Так, множество точек $\| x_1\ x_2\ x_3\ x_4 \|$, для которых

$$2x_1 + 3x_2 - 7x_3 + x_4 = 7,$$

есть гиперплоскость пространства $\mathbf{E}_4$. Гиперплоскость пространства $\mathbf{E}_3$ есть обычная плоскость, гиперплоскость пространства $\mathbf{E}_2$ есть прямая, а гиперплоскость пространства $\mathbf{E}_1$ есть точка.

Если

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$$

—уравнение гиперплоскости, то под двумя *полупространствами*, соответствующими данной гиперплоскости, будем подразумевать множество точек $\| x_1 \ldots x_n \|$, удовлетворяющих условию

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n > b,$$

и множество точек $\| x_1 \ldots x_n \|$, удовлетворяющих условию

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n < b.$$

Очевидно, гиперплоскость и два полупространства не пересекаются, и их сумма есть $\mathbf{E}_n$. Сформулируем теперь теорему, которая будет использована позднее в этой главе.

Теорема 2.3. *Пусть* $\mathbf{X}$ — *любое замкнутое выпуклое подмножество пространства* $\mathbf{E}_n$, *и пусть* x — *точка пространства* $\mathbf{E}_n$, *не принадлежащая множеству* $\mathbf{X}$; *тогда существует гиперплоскость* P, *содержащая* x, *такая, что* $\mathbf{X}$ *есть подмножество одного из полупространств, определенных гиперплоскостью* P.

В заключение этого параграфа мы введем еще одно понятие и сформулируем теорему, которая будет использована в главе III.

Если $\mathbf{X}$ есть подмножество пространства $\mathbf{E}_n$, то *экстремальным множеством* $\mathbf{K}(\mathbf{X})$ называется множество точек x, принадлежащих $\mathbf{X}$, которые не могут быть представлены в виде

$$x = \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2,$$

где x_1 и x_2 — различные точки множества $\mathbf{X}$.

Таким образом, экстремальным множеством замкнутого круга (т. е. круга вместе с его границей) является граница круга. Экстремальное множество замкнутого треугольника есть множество, состоящее из трех вершин треугольника.

Очевидно, у непустого множества может быть пустое экстремальное множество. Так, экстремальное множество всего пространства $\mathbf{E}_n$ пустое, так как любое открытое множество имеет пустое экстремальное множество. Следующая теорема указывает достаточное условие того, чтобы экстремальное множество не было пустым.

Теорема 2.4. *Пусть* $\mathbf{X}$ — *непустое ограниченное замкнутое выпуклое подмножество пространства* $\mathbf{E}_n$. *Тогда* $\mathbf{K}(\mathbf{X})$ — *непустое множество, а* $\mathbf{X}$ *есть выпуклая оболочка множества* $\mathbf{K}(\mathbf{X})$.

3. Доказательство основной теоремы для произвольных прямоугольных игр

В этом параграфе мы докажем для прямоугольных игр основную теорему, которая иногда называется «теоремой о минимаксе». Мы покажем, что если функция E определена так, как в разделе 1, то для любой прямоугольной игры величины

$$\max_{X \in S_m} \min_{Y \in S_n} E(X, Y) \quad \text{и} \quad \min_{Y \in S_n} \max_{X \in S_m} E(X, Y)$$

существуют и равны между собой.

Докажем предварительно лемму о матрицах.

Лемма 2.5. *Пусть дана матрица*

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots \\ a_{m1} \ldots a_{mn} \end{matrix} \right\|.$$

Тогда 1) *либо существует элемент* $\|x_1 \ldots x_m\|$ *множества* S_m, *такой, что*

$$a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \ldots + a_{mj}x_m \geqslant 0 \quad \textit{для} \quad j = 1, \ldots, n,$$

2) *либо существует элемент* $\|y_1 \ldots y_n\|$ *множества* S_n, *такой, что*

$$a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{in}y_n \leqslant 0 \quad \textit{для} \quad i = 1, \ldots, m.$$

Доказательство. В этом доказательстве мы будем использовать дельта-символы Кронекера, которые определяются следующим образом:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad i \neq j, \\ 1, & \text{если} \quad i = j. \end{cases}$$

Положим

$$\delta^{(1)} = \|\delta_{11} \quad \delta_{21} \ldots \delta_{m1}\|,$$
$$\delta^{(2)} = \|\delta_{12} \quad \delta_{22} \ldots \delta_{m2}\|,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\delta^{(m)} = \|\delta_{1m} \ \delta_{2m} \ldots \delta_{mm}\|.$$

Тогда $\delta^{(j)}$, где $j = 1, \ldots, m$, есть точка пространства E_m, j-я координата которой равна 1, а все другие координаты равны нулю.

Положим также

$$a^{(1)} = \|a_{11} \ldots a_{m1}\|,$$
$$a^{(2)} = \|a_{12} \ldots a_{m2}\|,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a^{(n)} = \|a_{1n} \ldots a_{mn}\|.$$

Таким образом, $a^{(j)}$, где $j=1, \ldots, n$, есть точка, координаты которой — элементы j-го столбца матрицы A. Пусть C — выпуклая оболочка множества $m+n$ точек

$$\delta^{(1)}, \ldots, \delta^{(m)}, a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}.$$

Пусть $z=\|0 \ldots 0\|$ — начало координат пространства E_m. Разберем два случая, когда $z \in \mathrm{C}$ и $z \notin \mathrm{C}$. Если $z \in \mathrm{C}$, то z есть выпуклая линейная комбинация точек $\delta^{(1)}, \ldots$ $\ldots, \delta^{(m)}, a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}$. Следовательно, существует элемент $\|u_1 \ldots u_m \; v_1 \ldots v_n\|$ множества S_{m+n}, такой, что

$$u_1\delta^{(1)}+\ldots+u_m\delta^{(m)}+v_1a^{(1)}+\ldots+v_na^{(n)}=z. \qquad (4)$$

Из уравнения (4) следует

$$u_1\delta_{i1}+\ldots+u_m\delta_{im}+v_1a_{i1}+\ldots+v_na_{in}=0 \text{ для } i=1, \ldots, m,$$

или, как это следует из определения дельта-символов,

$$u_i+v_1a_{i1}+\ldots+v_na_{in}=0, \text{ где } i=1, \ldots, m. \qquad (5)$$

Так как $\|u_1 \ldots u_m \; v_1 \ldots v_n\| \in \mathrm{S}_{m+n}$, то u_i неотрицательно, следовательно, из равенства (5) получим

$$v_1a_{i1}+\ldots+v_na_{in} \leqslant 0 \quad \text{для} \quad i=1, \ldots, m. \qquad (6)$$

Заметим теперь, что

$$v_1+\ldots+v_n>0, \qquad (7)$$

так как иначе, поскольку $v_i \geqslant 0$ для $i=1, \ldots, n$, мы должны иметь

$$v_1=v_2=\ldots=v_n=0,$$

то есть на основании равенства (5)

$$u_i=0 \quad \text{для } i=1, \ldots, m,$$

что противоречит тому, что $\|u_1 \ldots u_m \; v_1 \ldots v_n\| \in \mathrm{S}_{m+n}$. Поэтому мы можем положить

$$\left.\begin{array}{l} y_1=\dfrac{v_1}{v_1+\ldots+v_n}, \\ y_2=\dfrac{v_2}{v_1+\ldots+v_n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n=\dfrac{v_n}{v_1+\ldots+v_n}. \end{array}\right\} \qquad (8)$$

Из неравенств (6) и (7) мы заключаем, что

$$y_1 a_{i1} + \ldots + y_n a_{in} \leqslant 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, m.$$

Так как из равенств (8) очевидно, что $\| y_1 \ldots y_n \| \in \mathrm{S}_n$, мы заключаем, что условие (2) леммы 2.5 выполняется, так что лемма в случае, когда $z \in \mathrm{C}$, справедлива.

Предположим теперь, что $z \overline{\in} \mathrm{C}$. Тогда по теореме 2.3 существует гиперплоскость, содержащая z и такая, что все точки C содержатся в одном из соответствующих полупространств. Пусть уравнение этой гиперплоскости

$$b_1 t_1 + \ldots + b_m t_m = b_{m+1}.$$

Так как z лежит на гиперплоскости, то мы имеем

$$b_1 0 + \ldots + b_m 0 = b_{m+1},$$

и следовательно, $b_{m+1} = 0$.

Таким образом, уравнение гиперплоскости имеет вид

$$b_1 t_1 + \ldots + b_m t_m = 0. \tag{9}$$

Можно предположить, что любая точка $\| t_1 \ldots t_m \|$ множества C удовлетворяет неравенству

$$b_1 t_1 + \ldots + b_m t_m > 0, \tag{10}$$

ибо если точки множества C удовлетворяют неравенству

$$c_1 t_1 + \ldots + c_m t_m < 0,$$

то, умножая его на -1, получим

$$(-c_1) t_1 + \ldots + (-c_m) t_m > 0,$$

и можно получить неравенство (10), заменив $-c_i$ на b_i. Неравенство (10) должно быть справедливо, в частности, для точек $\delta^{(1)}, \ldots, \delta^{(m)}$ множества C; таким образом,

$$b_1 \delta_{1i} + \ldots + b_m \delta_{mi} > 0 \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

а это означает (согласно определению дельта-символов), что

$$b_i > 0 \qquad (i = 1, \ldots, m). \tag{11}$$

Кроме того, (10) должно быть справедливо для точек $a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}$; таким образом,

$$b_1 a_{1i} + \ldots + b_m a_{mi} > 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{12}$$

Из неравенства (11) ясно, что $b_1 + \ldots + b_m > 0$, и следовательно, мы можем написать

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1}{b_1 + \ldots + b_m}, \\ x_2 &= \frac{b_2}{b_1 + \ldots + b_m}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m &= \frac{b_m}{b_1 + \ldots + b_m}. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Из выражений (12) и (13) мы заключаем, что

$$x_1 a_{1i} + \ldots + x_m a_{mi} > 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

и тем более

$$x_1 a_{1i} + \ldots + x_m a_{mi} \geqslant 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \qquad (14)$$

Поскольку из выражений (11) и (13) следует, что $\| x_1 \ldots x_m \| \in S_m$, то неравенство (14) означает, что условие (1) леммы выполняется. Это завершает доказательство.

Докажем основную теорему теории прямоугольных игр.

Теорема 2.6. *Пусть*

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

— некоторая матрица, и пусть математическое ожидание выигрыша $E(X, Y)$ *для любого* $X = \| x_1 \ldots x_m \|$ *и любого* $Y = \| y_1 \ldots y_n \|$, *являющихся соответственно элементами множеств* S_m *и* S_n, *определено следующим образом:*

$$E(X, Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

Тогда величины

$$\max_{X \in S_m} \min_{Y \in S_n} E(X, Y)$$

и

$$\min_{Y \in S_n} \max_{X \in S_m} E(X, Y)$$

существуют и равны между собой.

Доказательство. Для каждого $Y = \| y_1 \ldots y_n \|$ функция $E(X, Y)$ есть непрерывная линейная функция от $X = \| x_1 \ldots x_m \|$, определенная на замкнутом подмножестве S_m пространства $\mathbf{E}_m$; отсюда

$$\max_{X \in \mathrm{S}_m} E(X, Y)$$

существует для любого Y из S_n. Далее, легко убедиться в том, что

$$\max_{X \in \mathrm{S}_m} E(X, Y)$$

есть непрерывная кусочно-линейная функция $\| y_1 \ldots y_n \|$. Поскольку S_n есть замкнутое подмножество пространства $\mathbf{E}_n$, мы заключаем отсюда, что

$$\min_{Y \in \mathrm{S}_n} \max_{X \in \mathrm{S}_m} E(X, Y)$$

существует. Аналогично можно показать, что

$$\max_{X \in \mathrm{S}_m} \min_{Y \in \mathrm{S}_n} E(X, Y)$$

существует.

Если первое условие леммы 2.5 выполняется, то существует элемент $\| x_1 \ldots x_m \|$ множества S_m такой, что

$$a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \ldots + a_{mj}x_m \geqslant 0 \quad (j = 1, \ldots, n),$$

и, следовательно, такой, что для любого $Y \in \mathrm{S}_n$

$$E(X, Y) = \sum_{j=1}^{n} (a_{1j}x_1 + \ldots + a_{mj}x_m)\, y_j \geqslant 0. \tag{15}$$

Так как (15) справедливо для любого $Y \in \mathrm{S}_n$, то

$$\min_{Y \in \mathrm{S}_n} E(X, Y) \geqslant 0$$

и, следовательно,

$$\max_{X \in \mathrm{S}_m} \min_{Y \in \mathrm{S}_n} E(X, Y) \geqslant 0. \tag{16}$$

Аналогично заключаем, что если условие (2) леммы 2.5 выполнено, то

$$\min_{Y \in \mathrm{S}_n} \max_{X \in \mathrm{S}_m} E(X, Y) \leqslant 0. \tag{17}$$

Но поскольку выполняется либо условие (1), либо условие (2) леммы 2.5, то по крайней мере одно из двух неравенств, (16) или (17), должно выполняться, и, следовательно, неравенство

$$\max_{X\in S_m}\min_{Y\in S_n} E(X, Y) < 0 < \min_{Y\in S_n}\max_{X\in S_m} E(X, Y) \tag{18}$$

не может быть справедливо.

Пусть A_k — матрица, которая получается из A при вычитании k из каждого элемента матрицы A, то есть

$$A_k = \begin{Vmatrix} a_{11}-k & \ldots & a_{1n}-k \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}-k & \ldots & a_{mn}-k \end{Vmatrix},$$

и пусть E_k — математическое ожидание выигрыша для A_k, так что для любого X и любого Y, являющихся соответственно элементами множеств S_m и S_n, мы имеем

$$E_k(X, Y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}-k)\,x_i\,y_j. \tag{19}$$

Тогда, точно так же, как мы показали, что неравенство (18) неверно для A, мы можем показать, что неравенство

$$\max_{X\in S_m}\min_{Y\in S_n} E_k(X, Y) < 0 < \min_{Y\in S_n}\max_{X\in S_m} E_k(X, Y) \tag{20}$$

неверно для A_k. Но из равенства (19) легко увидеть, что

$$E_k(X, Y) = E(X, Y) - k, \tag{21}$$

а из условий (20) и (21) мы заключаем, что неравенство

$$\max_{X\in S_m}\min_{Y\in S_n} E(X, Y) - k < 0 < \min_{Y\in S_n}\max_{X\in S_m} E(X, Y) - k \tag{22}$$

неверно. Следовательно, неверно неравенство

$$\max_{X\in S_m}\min_{Y\in S_n} E(X, Y) < k < \min_{Y\in S_n}\max_{X\in S_m} E(X, Y). \tag{23}$$

Поскольку (23) неверно для любого k, мы заключаем, что неравенство

$$\max_{X\in S_m}\min_{Y\in S_n} E(X, Y) < \min_{Y\in S_n}\max_{X\in S_m} E(X, Y)$$

неверно, отсюда справедливо неравенство

$$\max_{X \in S_m} \min_{Y \in S_n} E(X, Y) \geqslant \min_{Y \in S_n} \max_{X \in S_m} E(X, Y). \tag{24}$$

С другой стороны, согласно теореме 1.1, мы имеем

$$\max_{X \in S_m} \min_{Y \in S_n} E(X, Y) \leqslant \min_{Y \in S_n} \max_{X \in S_m} E(X, Y); \tag{25}$$

из неравенств (24) и (25) следует, что

$$\max_{X \in S_m} \min_{Y \in S_n} E(X, Y) = \min_{Y \in S_n} \max_{X \in S_m} E(X, Y),$$

что завершает доказательство теоремы.

В терминах теории игр теорема 2.6 может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 2.7. *Всякая прямоугольная игра имеет цену; игрок в прямоугольной игре всегда имеет оптимальную стратегию.*

Доказательство теоремы легко вытекает из теорем 2.6 и 1.5.

4. Свойства оптимальных стратегий

Иногда можно определить цену игры из интуитивных соображений или из непосредственного рассмотрения игры. В таких случаях для отыскания оптимальных стратегий для обоих игроков часто бывает удобно пользоваться следующей теоремой.

Теорема 2.8. *Пусть E — математическое ожидание выигрыша в прямоугольной игре с матрицей порядка $m \times n$, имеющей цену v. Тогда, для того чтобы элемент X^* множества S_m был оптимальной стратегией для P_1, необходимо и достаточно, чтобы для каждого элемента Y множества S_n имело место неравенство*

$$v \leqslant E(X^*, Y).$$

Аналогично, для того чтобы элемент Y^* множества S_n был оптимальной стратегией для P_2, необходимо и достаточно, чтобы для всякого элемента X множества S_m имело место неравенство

$$E(X, Y^*) \leqslant v.$$

Доказательство. Если X^* — оптимальная стратегия для P_1, то имеется элемент Y^* множества S_n, такой, что $\|X^*Y^*\|$ есть седловая точка функции $E(X, Y)$, и, следовательно, такой, что для всякого $Y \in S_n$

$$v = E(X^*, Y^*) \leqslant E(X^*, Y),$$

что и требовалось доказать.

С другой стороны, предположим, что X^* — элемент множества S_m, такой, что для всякого $Y \in S_n$

$$v \leqslant E(X^*, Y). \tag{26}$$

На основании теоремы 2.7 существует точка $\|X'Y'\|$, такая, что для всех $X \in S_m$ и всех $Y \in S_n$

$$E(X, Y') \leqslant E(X', Y') \leqslant E(X', Y); \tag{27}$$

а поскольку по условию v есть цена игры, мы имеем

$$E(X', Y') = v. \tag{28}$$

Из (26) и (28) мы заключаем, что

$$E(X', Y') \leqslant E(X^*, Y). \tag{29}$$

Заменяя Y на Y' в неравенстве (29), и заменяя X на X^* в первой части неравенства (27), получаем

$$E(X^*, Y') \leqslant E(X', Y') \leqslant E(X^*, Y').$$

Итак,

$$E(X', Y') = E(X^*, Y'). \tag{30}$$

Из (27), (29) и (30) мы заключаем, что

$$E(X, Y') \leqslant E(X^*, Y') \leqslant E(X^*, Y),$$

так что $\|X^*Y'\|$ есть седловая точка функции $E(X, Y)$ и, следовательно, X^* есть оптимальная стратегия для P_1, что и требовалось доказать. Доказательство второй части теоремы аналогично.

Следующая теорема позволяет нам сравнительно быстро проверить предположенное решение игры и, кроме того, как мы вскоре увидим, свести задачу отыскания решений к задаче элементарной алгебры. Чтобы упростить формулировку задачи, мы будем писать

$$E(i, Y)$$

вместо

$$E(X_i,\ Y),$$

где X_i — элемент множества S_m, i-я компонента которого равна 1, а все другие — нулю; аналогично мы будем писать

$$E(X,\ j)$$

вместо

$$E(X,\ Y_j),$$

где Y_j — элемент множества S_n, j-я компонента которого равна 1, а остальные — нулю. Если $X = \| x_1\ \dots\ x_m \|$ и $Y = \| y_1\ \dots\ y_n \|$, то

$$E(i,\ Y) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j$$

и

$$E(X,\ j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i.$$

Заметим также, что

$$E(X,\ Y) = \sum_{i=1}^{m} E(i,\ Y)\, x_i = \sum_{j=1}^{n} E(X,\ j)\, y_j.$$

Теорема 2.9. *Пусть E — математическое ожидание выигрыша прямоугольной игры с матрицей порядка $m \times n$, пусть v — действительное число, и пусть X^* и Y^* — соответственно элементы множеств S_m и S_n. Тогда, для того чтобы v было ценой игры, а X^* и Y^* — оптимальными стратегиями соответственно для P_1 и P_2, необходимо и достаточно, чтобы для $1 \leqslant i \leqslant m$ и $1 \leqslant j \leqslant n$*

$$E(i,\ Y^*) \leqslant v \leqslant E(X^*,\ j).$$

Доказательство. Необходимость условия следует непосредственно из определения седловой точки — при замене X на i и Y на j.

С другой стороны, если условие выполняется, то для любого $X = \| x_1\ \dots\ x_m \|$, являющегося элементом множества S_m

$$\sum_{i=1}^{m} E(i,\ Y^*)\, x_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} v x_i = v.$$

и, следовательно,

$$E(X,\ Y^*) \leqslant v. \tag{31}$$

Аналогично, для любого $Y = \| y_1 \ldots y_n \|$, являющегося элементом множества $\mathbf{S}_n$

$$v \leqslant E(X^*,\ Y). \tag{32}$$

Из неравенств (31) и (32), заменяя X на X^* и Y на Y^*, мы получаем соответственно

$$E(X^*,\ Y^*) \leqslant v$$

и

$$v \leqslant E(X^*,\ Y^*),$$

и, следовательно,

$$v = E(X^*,\ Y^*). \tag{33}$$

Тогда из неравенств (31), (32) и (33) мы получаем

$$E(X,\ Y^*) \leqslant E(X^*,\ Y^*) \leqslant E(X^*,\ Y),$$

так что $\|X^*\ Y^*\|$ есть действительно седловая точка функции E, а v — цена игры.

Следующая теорема является следствием теоремы 2.8; доказательство ее мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Теорема 2.10. *Пусть E — математическое ожидание выигрыша прямоугольной игры с матрицей порядка $m \times n$, цена которой есть v. Тогда, для того чтобы элемент X^* множества $\mathbf{S}_m$ был оптимальной стратегией для P_1, необходимо и достаточно, чтобы для $1 \leqslant j \leqslant n$ выполнялось*

$$v \leqslant E(X^*,\ j).$$

Аналогично, для того чтобы элемент Y^* множества $\mathbf{S}_n$ был оптимальной стратегией для P_2, необходимо и достаточно, чтобы для $1 \leqslant i \leqslant m$ выполнялось

$$E(i,\ Y^*) \leqslant v.$$

Теорема 2.11. *Пусть E — математическое ожидание выигрыша прямоугольной игры с матрицей порядка $m \times n$, и пусть $\|X^* Y^*\|$ — решение этой игры. Тогда*

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} E(i,\ Y^*) = \min_{1 \leqslant j \leqslant n} E(X^*,\ j).$$

Доказательство. На основании теоремы 2.10 для $1 \leqslant j \leqslant n$

$$v \leqslant E(X^*, j),$$

где v — цена игры; следовательно,

$$v \leqslant \min_{1 \leqslant j \leqslant n} E(X^*, j).$$

Но если

$$v < \min_{1 \leqslant j \leqslant n} E(X^*, j),$$

то для $1 \leqslant j \leqslant n$

$$v < E(X^*, j)$$

и, следовательно,

$$\sum_{j=1}^{n} v y_j^* < \sum_{j=1}^{n} E(X^*, j)\, y_j^*,$$

или

$$v < E(X^*, Y^*).$$

Но это противоречит условию, что v есть цена игры. Отсюда мы заключаем, что

$$v = \min_{1 \leqslant j \leqslant n} E(X^*, j).$$

Аналогично доказывается, что

$$v = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} E(i, Y^*).$$

Следующая более частная теорема оказывается нередко очень полезной при отыскании решения данной игры.

Теорема 2.12. *Пусть E — математическое ожидание выигрыша для прямоугольной игры с матрицей порядка $m \times n$, имеющей цену v, и пусть $X^* = \|x_1^* \ldots x_m^*\|$ и $Y^* = \|y_1^* \ldots y_n^*\|$ — оптимальные стратегии соответственно для P_1 и P_2. Тогда для любого i, при котором*

$$E(i, Y^*) < v,$$

имеет место равенство

$$x_i^* = 0,$$

а для любого j такого, что

$$v < E(X^*, j),$$

имеет место равенство

$$y_j^* = 0.$$

Доказательство. Допустим, что для некоторого h

$$E(h, Y^*) < v$$

и

$$x_h^* \neq 0.$$

Тогда мы заключаем, что

$$E(h, Y^*)x_h^* < vx_h^*.$$

Поскольку, для $k = 1, \ldots, h-1, h+1, \ldots, m$

$$E(k, Y^*) \leqslant v,$$

и, следовательно,

$$E(k, Y^*)x_k^* \leqslant vx_k^*,$$

мы заключаем, что

$$\sum_{i=1}^{m} E(i, Y^*)x_i^* < \sum_{i=1}^{m} vx_i^*,$$

и, следовательно,

$$E(X^*, Y^*) < v,$$

что противоречит условию, что v есть цена игры. Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

Доказательство следующей теоремы мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Теорема 2.13. *Пусть E — математическое ожидание выигрыша прямоугольной игры с матрицей порядка $m \times n$, и пусть X^* и Y^* — соответственно элементы множеств S_m и S_n. Тогда имеют место следующие эквивалентные утверждения:*

1) *X^* есть оптимальная стратегия для P_1, а Y^* есть оптимальная стратегия для P_2.*

2) *Если X есть любой элемент множества S_m, а Y — любой элемент множества S_n, то*

$$E(X, Y^*) \leqslant E(X^*, Y^*) \leqslant E(X^*, Y).$$

3) *Если i и j суть любые целые числа, такие, что $1 \leqslant i \leqslant m$ и $1 \leqslant j \leqslant n$, то*

$$E(i, Y^*) \leqslant E(X^*, Y^*) \leqslant E(X^*, j).$$

Покажем теперь на нескольких примерах, как можно применить эти теоремы для вычисления цен и решений данных игр. В изложенном виде эти способы чрезвычайно трудоемки и требуют много времени; позднее мы укажем методы, сокращающие процесс вычисления.

Пример 2.14. Требуется найти цену и оптимальные стратегии обоих игроков для прямоугольной игры, имеющей следующую матрицу:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{matrix} \right\|.$$

На основании теоремы 2.9 достаточно найти числа x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, v, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{gathered}
x_1+x_2+x_3=1, \quad y_1+y_2+y_3=1, \\
0 \leqslant x_1 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y_1 \leqslant 1, \\
0 \leqslant x_2 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y_2 \leqslant 1, \\
0 \leqslant x_3 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y_3 \leqslant 1, \\
(1)\, x_1+(-1)\, x_2+(-1)\, x_3 \geqslant v, \\
(-1)\, x_1+(-1)\, x_2+(2)\, x_3 \geqslant v, \\
(-1)\, x_1+(3)\, x_2+(-1)\, x_3 \geqslant v, \\
(1)\, y_1+(-1)\, y_2+(-1)\, y_3 \leqslant v, \\
(-1)\, y_1+(-1)\, y_2+(3)\, y_3 \leqslant v, \\
(-1)\, y_1+(2)\, y_2+(-1)\, y_3 \leqslant v.
\end{gathered}$$

Обычные способы элементарной алгебры не дают нам возможности решать системы, содержащие неравенства наряду с равенствами. Однако мы знаем из теоремы 2.6, что система имеет решение, и мы можем рассмотреть отдельно 2^6 возможных случаев, получающихся при замене знаков $\leqslant$ и $\geqslant$ в шести последних неравенствах соответственно на знаки $<$ и $=$ и знаки $>$ и $=$. Заменим сначала все эти шесть неравенств равенствами. При этом мы получим:

$$\begin{aligned}
x_1-x_2-x_3&=v, & y_1-y_2-y_3&=v, \\
-x_1-x_2+2x_3&=v, & -y_1-y_2+3y_3&=v, \\
-x_1+3x_2-x_3&=v, & -y_1+2y_2-y_3&=v,
\end{aligned}$$

и, очевидно, также

$$x_1+x_2+x_3=1; \quad y_1+y_2+y_3=1.$$

Применяя любой из известных методов элементарной алгебры, мы находим, что эта система уравнений имеет следующее решение:

$$x_1=\frac{6}{13}, \quad x_2=\frac{3}{13}, \quad x_3=\frac{4}{13},$$

$$y_1=\frac{6}{13}, \quad y_2=\frac{4}{13}, \quad y_3=\frac{3}{13},$$

$$v=-\frac{1}{13}.$$

Поскольку x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 и y_3, найденные таким образом, оказываются неотрицательными, мы нашли решение нашей первоначальной системы уравнений и неравенств. Итак, оптимальный способ для P_1 — выбирать числа 1, 2, 3 с соответствующими вероятностями $\frac{6}{13}$, $\frac{3}{13}$ и $\frac{4}{13}$; а оптимальный способ игры для P_2 — выбирать числа 1, 2, 3 с соответствующими вероятностями $\frac{6}{13}$, $\frac{4}{13}$ и $\frac{3}{13}$. Цена игры равна $-\frac{1}{13}$. Это значит, что игрок P_1 может играть таким образом, чтобы гарантировать себе, что проиграет не больше $\frac{1}{13}$, а P_2 может играть таким образом, чтобы P_1 наверняка проиграл по меньшей мере $\frac{1}{13}$.

Следующий пример показывает, как можно обойти затруднения, возникающие в том случае, когда уравнения, соответствующие шести уравнениям предыдущего примера, оказываются несовместными или не имеют решений, лежащих в интервале [0, 1].

Пример 2.15. Требуется найти цену и оптимальные стратегии обоих игроков для прямоугольной игры, имеющей матрицу

$$\begin{Vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{Vmatrix}.$$

На основании теоремы 2.9 достаточно найти числа x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 и v, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned}
x_1+x_2+x_3&=1, & y_1+y_2+y_3&=1,\\
0\leqslant x_1&\leqslant 1, & 0\leqslant y_1&\leqslant 1,\\
0\leqslant x_2&\leqslant 1, & 0\leqslant y_2&\leqslant 1,\\
0\leqslant x_3&\leqslant 1, & 0\leqslant y_3&\leqslant 1,\\
3x_1-x_2+2x_3&\geqslant v, & 3y_1-2y_2+4y_3&\leqslant v,\\
-2x_1+4x_2+2x_3&\geqslant v, & -y_1+4y_2+2y_3&\leqslant v,\\
4x_1+2x_2+6x_3&\geqslant v, & 2y_1+2y_2+6y_3&\leqslant v.
\end{aligned}$$

Рассмотрим сначала случай, когда все шесть неравенств заменены равенствами:

$$\begin{aligned}
3x_1-x_2+2x_3&=v, & 3y_1-2y_2+4y_3&=v,\\
-2x_1+4x_2+2x_3&=v, & -y_1+4y_2+2y_3&=v,\\
4x_1+2x_2+6x_3&=v, & 2y_1+2y_2+6y_3&=v,\\
x_1+x_2+x_3&=1, & y_1+y_2+y_3&=1.
\end{aligned}$$

Легко убедиться, что эти уравнения не имеют такого решения, чтобы все числа x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 были неотрицательны. Значит, нельзя найти решение нашей задачи путем замены всех неравенств равенствами. Поэтому мы рассмотрим другой случай. Заменим в первом неравенстве знак $\geqslant$ знаком $>$, а остальные неравенства — равенствами, получим

$$\begin{aligned}
3x_1-x_2+2x_3&>v, & 3y_1-2y_2+4y_3&=v,\\
-2x_1+4x_2+2x_3&=v, & -y_1+4y_2+2y_3&=v,\\
4x_1+2x_2+6x_3&=v, & 2y_1+2y_2+6y_3&=v,\\
x_1+x_2+x_3&=1, & y_1+y_2+y_3&=1.
\end{aligned}$$

Поскольку $3x_1-x_2+2x_3>v$, то на основании теоремы 2.12 $y_1=0$. Подставив вместо y_1 нуль, получим систему уравнений, которые нужно решить относительно x_1, x_2, x_3, y_2 и y_3. Однако, как легко видеть, эти уравнения несовместны, поэтому мы должны перейти к другому случаю (теорема 2.6 дает нам уверенность, что мы в конце концов найдем систему, имеющую решение). Продолжая поступать таким образом, мы рассмотрим, наконец, следующий случай:

$$\begin{aligned} 3x_1-x_2+2x_3&=v, & 3y_1-2y_2+4y_3&<v,\\ -2x_1+4x_2+2x_3&=v, & -y_1+4y_2+2y_3&=v,\\ 4x_1+2x_2+6x_3&>v, & 2y_1+2y_2+6y_3&=v,\\ x_1+x_2+x_3&=1, & y_1+y_2+y_3&=1. \end{aligned}$$

Из строгого неравенства $4x_1+2x_2+6x_3>v$ вытекает, на основании теоремы 2.12, что $y_3=0$, а из строгого неравенства $3y_1-2y_2+4y_3<v$ вытекает, что $x_1=0$.

Итак, нам нужно решить следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} -x_2+2x_3&=v, & -y_1+4y_2&=v,\\ 4x_2+2x_3&=v, & 2y_1+2y_2&=v,\\ x_2+x_3&=1, & y_1+y_2&=1. \end{aligned}$$

Эта система имеет решение

$$x_2=0,\ x_3=1,\ y_1=\frac{2}{5},\ y_2=\frac{3}{5},\ v=2.$$

Мы подставляем значения

$$\begin{gathered} x_1=0,\quad x_2=0,\quad x_3=1,\\ y_1=\frac{2}{5},\quad y_2=\frac{3}{5},\quad y_3=0,\\ v=2 \end{gathered}$$

в первоначальную систему неравенств и находим, что она удовлетворяется.

Таким образом, цена игры равна 2, вектор $\|0\ 0\ 1\|$ — оптимальная стратегия для первого игрока, а вектор $\left\|\frac{2}{5}\ \frac{3}{5}\ 0\right\|$ — оптимальная стратегия для второго игрока.

5. Соотношения превосходства

Как мы видели в разделе 3 главы I, иногда на основании простого рассмотрения матрицы прямоугольной игры можно сказать, что некоторые чистые стратегии могут войти в оптимальные смешанные стратегии лишь с нулевой вероятностью. Так, например, если

$$\begin{Vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 6 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & 6 \end{Vmatrix} \qquad (34)$$

— матрица прямоугольной игры, то, как подсказывают интуитивные соображения, ни при какой оптимальной стратегии игрока P_1 не следует приписывать положительную вероятность третьей строке, ибо, что бы ни делал P_2, для P_1 лучше выбирать вторую строку, чем третью строку. Таким образом, оказывается, что для решения этой игры нам достаточно найти решение игры с матрицей

$$\begin{Vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 6 & 2 & 7 \end{Vmatrix}. \qquad (35)$$

Цены обеих игр должны быть одинаковы; P_2 должен иметь в обеих играх одинаковые оптимальные стратегии. Если $\| x_1 \ x_2 \|$ есть оптимальная стратегия для P_1 во второй игре, то оптимальная стратегия для P_1 в первой игре будет $\| x_1 \ x_2 \ 0 \|$.

Поскольку каждый элемент первого столбца матрицы (35) меньше соответствующего элемента третьего столбца, и поскольку P_2 хочет свести платеж к минимуму, то мы можем вычеркнуть третий столбец матрицы (35) и получить матрицу

$$\begin{Vmatrix} 1 & 7 \\ 6 & 2 \end{Vmatrix}. \qquad (36)$$

Таким образом, мы можем найти решение первоначальной игры, решая игру с матрицей (36). Цена игры, имеющей матрицу (36), равна 4, и поскольку $\begin{Vmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{Vmatrix}$ и $\begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{Vmatrix}$ есть оптимальные стратегии P_1 и P_2, то мы вправе предположить, что цена первоначальной игры тоже равна 4, $\begin{Vmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{Vmatrix}$ — оптимальная стратегия для P_1 и $\begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{Vmatrix}$ — оптимальная стратегия для P_2; легко проверить, что это так и есть.

Эти рассуждения можно несколько обобщить на тот случай, когда элементы одной строки не все меньше соответствующих элементов другой строки, но все меньше некоторых выпуклых линейных комбинаций соответствующих элементов других строк. Так, например, рассмотрим игру с платежной матрицей

$$\begin{Vmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8 \\ 4 & 5 \end{Vmatrix}. \tag{37}$$

Заметим, что

$$4 < \frac{1}{4}\cdot 24 + \frac{3}{4}\cdot 0,$$

$$5 < \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{3}{4}\cdot 8,$$

и, следовательно, для P_1 будет неразумно ставить на третью строку, он поступит лучше, разделив между первыми двумя строками (в отношении 1 к 3) вероятность, которую он мог бы приписать третьей строке. В этом случае мы опять можем найти цену и оптимальные стратегии, решая игру с матрицей

$$\begin{Vmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8 \end{Vmatrix}.$$

Поскольку цена последней игры равна 6 и поскольку $\begin{Vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{Vmatrix}$ есть оптимальная стратегия для каждого игрока, мы заключаем, что игра, имеющая матрицу (37), также имеет цену, равную 6, $\begin{Vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{Vmatrix}$ есть оптимальная стратегия для P_1 и $\begin{Vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{Vmatrix}$ есть оптимальная стратегия для P_2.

Аналогично, если каждый элемент некоторого столбца *больше* некоторой выпуклой линейной комбинации соответствующих элементов некоторых других столбцов, то этот столбец можно исключить. Так, мы можем решить игру с матрицей

$$\begin{Vmatrix} 10 & 0 & 6 \\ 0 & 10 & 7 \end{Vmatrix},$$

решая игру с матрицей

$$\begin{Vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{Vmatrix}.$$

Для того чтобы строго обосновать этот метод, удобно ввести некоторые определения.

Если $a = \| a_1 \ldots a_n \|$ и $b = \| b_1 \ldots b_n \|$ есть векторы (или строки, или столбцы матрицы) и если $a_i \geqslant b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, то мы говорим, что *a превосходит b*; если $a_i > b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, мы говорим, что *a строго превосходит b*. Оба эти соотношения транзитивны: если a превосходит b и b превосходит c, то a превосходит c, и такое же соотношение имеет место для строгого превосходства. Мы замечаем также, что соотношение превосходства рефлексивно, так что всякая величина превосходит сама себя, а соотношение строгого превосходства нерефлексивно, так что никакая величина строго не превосходит сама себя. Однако, применяя эти понятия, всегда нужно иметь в виду, что когда два вектора различны, из этого не следует, что один из них обязательно превосходит другой: например, это видно на векторах $\| 1 \quad 2 \|$ и $\| 2 \quad 1 \|$.

Введем также понятие расширения смешанной стратегии на i-м месте. Если $x = \| x_1 \ \ldots \ x_n \|$ есть элемент множества S_n и $1 \leqslant i \leqslant n+1$, *то расширением элемента x на i-м месте* называется вектор $\| x_1 \ \ldots \ x_{i-1} \, 0 \, x_i \ \ldots \ x_n \|$. Так, расширением элемента $\begin{Vmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{7}{10} \end{Vmatrix}$ на 2-м месте является вектор $\begin{Vmatrix} \frac{1}{10} & 0 & \frac{2}{10} & \frac{7}{10} \end{Vmatrix}$; расширением на 1-м месте является вектор $\begin{Vmatrix} 0 & \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{7}{10} \end{Vmatrix}$; расширением на 4-м месте — вектор $\begin{Vmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{7}{10} & 0 \end{Vmatrix}$. Очевидно, если x есть какой-либо элемент множества S_n, то всякое расширение элемента x на i-м месте является элементом множества S_{n+1}.

Теорема 2.16. *Пусть Γ — прямоугольная игра с матрицей A. Предположим, что i-ю строку матрицы A для некоторого i превосходит некоторая выпуклая линей-*

ная комбинация других строк матрицы A; пусть A' — матрица, получающаяся из A после исключения i-й строки, и пусть Γ' — прямоугольная игра, матрица которой есть A'. Тогда цена игры Γ' — такая же, как цена игры Γ; всякая оптимальная стратегия игрока P_2 в Γ' есть также оптимальная стратегия игрока P_2 в Γ; если w — любая оптимальная стратегия игрока P_1 в Γ' и x — расширение стратегии w на i-м месте, то x есть оптимальная стратегия игрока P_1 в Γ. Далее, если i-ю строку матрицы A строго превосходит выпуклая линейная комбинация других строк матрицы A, то любое решение игры Γ можно получить указанным способом из решения игры Γ'.

Доказательство. Пусть

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Можно предположить, не нарушая общности, что последнюю строку матрицы A превосходит выпуклая линейная комбинация других строк. Поэтому существует элемент $z = \| z_1 \dots z_{m-1} \|$ множества S_{m-1}, такой, что

$$a_{mj} \leqslant \sum_{i=1}^{m-1} a_{ij} z_i \qquad (j = 1, \dots, n). \tag{38}$$

Пусть v — цена игры Γ', $w = \| w_1 \dots w_m \|$ — оптимальная стратегия игрока P_1 в Γ' и $y = \| y_1 \dots y_n \|$ — оптимальная стратегия игрока P_2 в Γ'. Тогда по теореме 2.9

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leqslant v \qquad (i = 1, \dots, m-1), \tag{39}$$

$$v \leqslant \sum_{i=1}^{m-1} a_{ij} w_i \qquad (j = 1, \dots, n). \tag{40}$$

Для доказательства первой части теоремы теперь достаточно показать, что v есть также цена игры Γ,

y — оптимальная стратегия игрока P_2 в Г и $\| w_1 \ldots w_m 0 \|$ — оптимальная стратегия игрока P_1 в Г.

Из теоремы 2.9 следует, что для этого нужно доказать справедливость следующих неравенств:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leqslant v \qquad (i = 1, \ldots, m), \tag{39a}$$

$$v \leqslant \sum_{i=1}^{m-1} a_{ij} w_i + a_{mj} 0 \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{40a}$$

Поскольку неравенство (40a) есть очевидное следствие неравенства (40), то достаточно доказать неравенство (39a). Следовательно, пользуясь неравенством (39), достаточно показать, что

$$\sum_{j=1}^{n} a_{mj} y_j \leqslant v. \tag{41}$$

Но из неравенств (38) и (39) мы получаем непосредственно

$$\sum_{j=1}^{n} a_{mj} y_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m-1} a_{ij} z_i y_j = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j z_i \leqslant \sum_{i=1}^{m-1} v z_i = v,$$

что доказывает первую часть теоремы.

Для доказательства второй части теоремы достаточно отметить, что если ни в одном из соотношений (38) нет равенства, то

$$\sum_{j=1}^{n} a_{mj} y_j < \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m-1} a_{ij} z_i y_j \leqslant v.$$

Следовательно, из теоремы 2.12 вытекает, что у всякой оптимальной стратегии игрока P_1 в Г m-я компонента будет равна нулю.

Доказательство следующей теоремы аналогично, и мы его опустим.

Теорема 2.17. *Пусть Г — прямоугольная игра с матрицей A. Предположим, что j-й столбец матрицы A для некоторого j превосходит некоторую выпуклую линей-*

ную комбинацию других столбцов матрицы A; пусть A' — матрица, получающаяся из A после исключения j-го столбца, и пусть Γ' — прямоугольная игра с матрицей A'. Тогда цена игры Γ' такая же, как цена игры Γ; всякая оптимальная стратегия игрока P_1 в Γ' есть также оптимальная стратегия игрока P_1 в Γ; если z — любая оптимальная стратегия игрока P_2 в Γ и y — расширение стратегии z на j-м месте, то y есть оптимальная стратегия игрока P_2 в Γ. Далее, если j-й столбец матрицы A строго превосходит выпуклую линейную комбинацию других столбцов матрицы, то любое решение игры Γ можно получить этим способом из решения игры Γ'.

Приведем несколько более сложный пример применения этих теорем.

Пример 2.18. Дана следующая платежная матрица прямоугольной игры:

$$\begin{Vmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{Vmatrix}.$$

Так как третья строка матрицы превосходит первую, то, вычеркивая первую строку, мы получаем:

$$\begin{Vmatrix} 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{Vmatrix}.$$

В новой матрице первый столбец превосходит третий; вычеркивая первый столбец, мы получаем:

$$\begin{Vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{Vmatrix}.$$

В этой матрице никакая строка (и никакой столбец) не превосходит другие строки (и столбцы); но первый столбец превосходит выпуклую линейную комбинацию второго и третьего столбцов, потому что

$$4 > \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 4,$$

$$2 = \frac{1}{2}\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 0,$$

$$4 = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 8.$$

Поэтому мы исключаем первый столбец и получаем:

$$\begin{Vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{Vmatrix}.$$

В свою очередь в этой матрице выпуклая линейная комбинация второй и третьей строк превосходит первую строку, так как

$$2 = \frac{1}{2}\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 0,$$

$$4 = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 8.$$

Таким образом, наша матрица приведена к матрице

$$\begin{Vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{Vmatrix}.$$

Цена игры с этой матрицей равна $\frac{8}{3}$, а оптимальная стратегия для первого игрока (и для второго игрока) будет равна $\begin{Vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{Vmatrix}$. Следовательно, поскольку мы получили матрицу 2×2 из первоначальной матрицы 4×4 путем вычеркивания первых двух строк и первых двух столбцов, мы заключаем, что оптимальная стратегия для первого игрока (и для второго игрока) в первоначальной игре будет $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{Vmatrix}$.

З а м е ч а н и е 2.19. Из теорем 2.16 и 2.17 можно заметить, что когда мы вычеркиваем строку (или столбец), которая строго превосходит что-либо, мы получаем матрицу, которая приводит к точно такой же системе решений, которая получилась бы при решении первоначальной игры. Однако это не имеет места, когда соотношение превосходства не является строгим; в этом случае мы можем «потерять» некоторые из решений первоначальной матрицы.

В качестве примера рассмотрим игру с платежной матрицей

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Легко убедиться, что любой элемент множества S_3 вида $\|a\,b\,b\|$ будет оптимальной стратегией для P_1. С другой стороны, если мы вычеркнем первую строку (которую превосходит, но не строго, выпуклая линейная комбинация двух других строк) и затем вычеркнем первый столбец, мы получим матрицу

$$\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix},$$

для которой P_1 имеет единственную оптимальную стратегию $\begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{Vmatrix}$; таким образом, этим способом мы получили бы для первоначальной игры лишь одну оптимальную стратегию: $\begin{Vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{Vmatrix}$.

6. Графический метод решения

В этом разделе мы опишем графический метод нахождения решений прямоугольной игры. Этот метод очень просто применять к играм, имеющим матрицы $2 \times n$ или $m \times 2$. Его можно также применять (тому, кто умеет чертить трехмерные диаграммы) к играм, имеющим матрицы $3 \times n$ и $m \times 3$; но он непригоден для матриц $m \times n$, когда m и n больше 3. Мы поясним этот метод на нескольких примерах решения игр $2 \times n$.

П р и м е́ р. 2.20. Рассмотрим игру с платежной матрицей

$$\begin{array}{c|ccc|}
 & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \\
\boxed{1} & 2 & 3 & 11 \\
\boxed{2} & 7 & 5 & 2
\end{array}.$$

Здесь под номерами $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{1}$ и т. д. подразумеваются различные стратегии обоих игроков. Если P_1

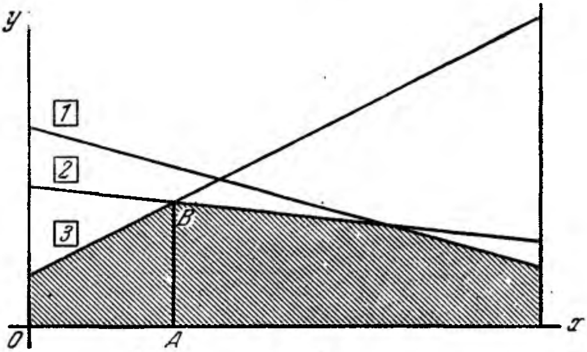

Рис. 2.

применяет смешанную стратегию $\|x \; 1-x\|$, а P_2 — чистую стратегию $\boxed{1}$, то ожидаемый платеж игроку P_1 будет

$$2x+7(1-x)=7-5x.$$

Аналогично, если P_2 применяет чистую стратегию $\boxed{2}$, то ожидаемый платеж игроку P_1 равен

$$3x+5(1-x)=5-2x,$$

а если P_2 применяет чистую стратегию $\boxed{3}$, то ожидаемый платеж игроку P_1 равен

$$11x+2(1-x)=2+9x.$$

Проведем на интервале [0, 1] три прямые,

$$y = 7 - 5x, \ y = 5 - 2x, \ y = 2 + 9x,$$

и обозначим их соответственно через $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ и $\boxed{3}$ (рис. 2). При каждом выборе игроком P_1 стратегии x он может быть уверен, что получит по крайней мере наименьшую из ординат трех прямых, соответствующих x. Таким образом, для P_1 выбрать оптимальное x — это значит выбрать такое x, при котором наименьшая из трех ординат возможно больше; из рисунка видно, что оптимальным x будет отрезок OA, а цена игры равна отрезку AB. Мы можем, следовательно, найти оптимальную стратегию для P_1 (в этой игре, как видно из рисунка, для P_1 есть только одна оптимальная стратегия) и цену игры, решив совместно уравнения

$$y = 5 - 2x, \quad y = 2 + 9x.$$

Проделав вычисления, мы находим, что оптимальная стратегия для P_1 — $\left\| \frac{3}{11} \ \frac{8}{11} \right\|$ и цена игры равна $\frac{49}{11}$.

Далее, из рисунка видно, что стратегия $\boxed{1}$ не войдет в оптимальную смешанную стратегию игрока P_2. Следовательно, мы можем найти оптимальную стратегию для P_2 при помощи матрицы

$$\begin{Vmatrix} 3 & 11 \\ 5 & 2 \end{Vmatrix},$$

так что оптимальная стратегия для P_2 равна $\left\| 0 \ \frac{9}{11} \ \frac{2}{11} \right\|$.

Замечание 2.21. Цена игры в приведенном выше примере находится следующим образом: берем максимальную ординату выпуклого множества, которое ограничено сверху прямыми линиями. Такой же способ применяется для любой игры с матрицей порядка $2 \times n$. Для игры с матрицей порядка $m \times 2$ графическое построение, очевидно, аналогично, но в этом случае цена игры равна минимальной ординате выпуклого множества, ограниченного снизу прямыми линиями.

Перейдем теперь к примеру, когда P_1 имеет много оптимальных стратегий.

Пример 2.22. Рассмотрим игру с платежной матрицей

$$\begin{Vmatrix} 2 & 4 & 11 \\ 7 & 4 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Обозначив стратегии, как в примере 2.20, и проведя соответствующие прямые, как в предыдущем примере, мы получим рис. 3.

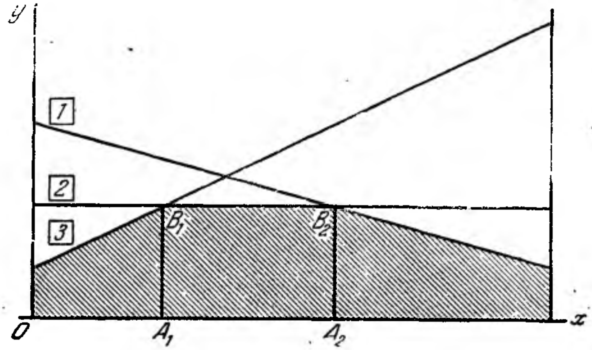

Рис. 3.

Из рис. 3 видно, что цена игры равна 4 и что любое x, удовлетворяющее условию $OA_1 \leqslant x \leqslant OA_2$, будет оптимальным для P_1. Решая совместно уравнения $\boxed{2}$ и $\boxed{3}$, $\boxed{1}$ и $\boxed{2}$, находим соответственно, что $OA_1 = \frac{2}{9}$, а $OA_2 = \frac{3}{5}$. Итак, оптимальной стратегией для P_1 является любая пара $\|x \; 1-x\|$, где $\frac{2}{9} \leqslant x \leqslant \frac{3}{5}$. Оптимальная стратегия для P_2 в этой игре равна $\|0 \; 1 \; 0\|$.

Замечание 2.23. В примере 2.22 мы нашли, что множество оптимальных смешанных стратегий игрока P_1 состоит из точек прямолинейного отрезка; очевидно, это всегда будет иметь место для игры $2 \times n$ (хотя, конечно, отрезок может стянуться в одну точку, как в примере 2.20). Далее, с полным основанием можно предположить, что для игры с матрицей порядка $m \times n$ множеством оптимальных стратегий каждого игрока будет естественное обобщение отрезка прямой в пространстве более высокой размерности, а именно выпуклая оболочка конечного множества точек (многогранник). Подробное доказательство этого читатель найдет в следующей главе.

Библиографические замечания

Первое доказательство основной теоремы (теоремы 2.6) было дано фон Нейманом [88], это доказательство было основано на топологической теореме Брауэра о неподвижной точке; позднее Вилль [109] дал элементарное доказательство. В книге фон Неймана и Моргенштерна [92] было дано простое доказательство, основанное на теории выпуклых множеств; доказательство, приведенное выше, по существу есть доказательство, фон Неймана и Моргенштерна. Другие доказательства этой теоремы или ее обобщения можно найти у Боненблуста и Карлина [9], у Брауна и фон Неймана [19] и у Вейля [122].

Для дальнейших сведений по теории выпуклых множеств рекомендуется обратиться к работам Глезермана и Понтрягина [46] или Боннезена и Фенхеля [12].

Упражнения

1. Пусть $\mathbf{A}$ — множество всех точек пространства $\mathbf{E}_3$, координаты которых $\|xyz\|$ удовлетворяют условиям

$$x^2+y^2+z^2<4, \quad x-y+z\geqslant 0.$$

Найдите замыкание, внутреннюю часть и границу множества $\mathbf{A}$.

2. Покажите, что всякое выпуклое множество является связным. Дайте пример связного множества, которое не является выпуклым.

3. Найдите экстремальное множество множества $\mathbf{A}$, описанного в упражнении 1.

4. Постройте доказательство теоремы 2.3 или найдите его в литературе.

5. Покажите, что теорема 2.3 не будет справедлива, если мы опустим условие, что $\mathbf{X}$ есть выпуклое множество.

6. Покажите, что теорема 2.3 не будет справедлива, если мы опустим условие, что $\mathbf{X}$ есть замкнутое множество.

7. Докажите теорему 2.3 для $n=2$. (Указание: пусть y есть точка множества $\mathbf{X}$, ближайшая к x; рассмотрите прямую, проходящую через x и перпендикулярную к прямой, соединяющей x и y.) Затем попробуйте обобщить это доказательство так, чтобы установить справедливость теоремы для произвольного n.

8. Докажите теорему 2.4 для частного случая, когда граница множества $\mathbf{X}$ не содержит прямолинейных отрезков.

9. Найдите цены прямоугольных игр, матрицы которых указаны ниже, и найдите оптимальные стратегии для обоих игроков:

$$\text{а) } \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\text{б) } \begin{Vmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 3 & 9 & -6 \\ 3 & -1 & 2 \end{Vmatrix},$$

$$\text{в) } \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{Vmatrix}.$$

10. Дана прямоугольная игра с матрицей порядка $m \times m$

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{Vmatrix},$$

где

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \neq j, \\ -1, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Покажите с помощью теоремы 2.9, что оптимальный способ игры для каждого игрока — выбирать каждое из чисел от 1 до m с одинаковой вероятностью, т. е. играть со смешанной стратегией $\begin{Vmatrix} \frac{1}{m} & \frac{1}{m} & \dots & \frac{1}{m} \end{Vmatrix}$, и покажите, что

$$v = \frac{m-2}{m}.$$

11. Квадратная матрица

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{Vmatrix}$$

называется *кососимметрической*, если $a_{ij} = -a_{ji}$ (для $i = 1, \dots, m$ и $j = 1, \dots, m$), так что, в частности, $a_{ii} = -a_{ii}$ (для $i = 1, \dots, m$) и, следовательно, $a_{ii} = 0$. Покажите, что цена прямоугольной игры с кососимметрической матрицей равна нулю, и если $\| X^*Y^* \|$ есть стратегическая седловая точка такой игры, то такой же является и точка $\| Y^*X^* \|$.

12. Докажите теорему 2.10.

13. В примере 2.15 мы нашли, что оптимальная стратегия для P_1 равна $\| 0 \; 0 \; 1 \|$, то есть всего лучше для него всегда выбирать число 3. Поскольку первые два элемента последней строки матрицы равны, то может показаться, что является несущественным, какую смешанную стратегию $\| y_1 y_2 y_3 \|$ применяет P_2, если он берет $y_3 = 0$. Почему это не так?

14. Дайте пример, показывающий, что выполнение равенств

$$E(X^*, Y^*) = \max_{X \in S_m} \min_{Y \in S_n} E(X, Y) = \min_{Y \in S_n} \max_{X \in S_m} E(X, Y)$$

не есть достаточное условие, чтобы $\| X^* Y^* \|$ было решением прямоугольной игры.

15. Матрица некоторой прямоугольной игры есть

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix},$$

а матрица второй игры

$$A = \begin{Vmatrix} ka_{11} & \dots & ka_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & \dots & ka_{mn} \end{Vmatrix},$$

где k — положительная константа. Покажите, что эти две игры имеют одинаковые оптимальные стратегии и что если v_1 есть цена первой игры, а v_2 — цена второй игры, то

$$v_2 = kv_1.$$

16. Покажите, что утверждение, приведенное в упражнении 15, не будет справедливо, если мы опустим условие, что k положительно.

17. Матрица порядка $m \times m$ называется *латинским квадратом*, если каждая строка и каждый столбец ее содержат все целые числа от 1 до m, например,

$$\begin{Vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Покажите, что игра $m \times m$, у которой матрица есть латинский квадрат, имеет цену $\frac{(m+1)}{2}$.

18. Покажите, что цена игры является единственной.

19. Покажите, что $\left\| 0 \ 0 \ \frac{5}{12} \ 0 \ \frac{4}{12} \ 0 \ \frac{3}{12} \ 0 \ 0 \right\|$ есть оптимальная стратегия для каждого игрока в трехпальцевой Морра (описанной в упражнении 17 главы I).

20. Найдите, используя понятие превосходства, решение прямоугольной игры, имеющей следующую матрицу:

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 7 & -5 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & -2 & 2 & 2 \end{Vmatrix}$$

21. Используйте графический метод, описанный в разделе 5, чтобы найти решение прямоугольной игры, имеющей такую матрицу:

$$\begin{Vmatrix} 19 & 15 & 17 & 16 \\ 0 & 20 & 15 & 5 \end{Vmatrix}.$$

22. Решите графическим методом игру с платежной матрицей

$$\begin{Vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \\ 11 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Сравните рисунок для этой игры с рисунком примера 2.20 (см. замечание 2.21).

ГЛАВА III

РЕШЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ИГР

1. Множество решений

В этой главе мы будем изучать множество решений произвольной прямоугольной игры Г. Поскольку пара $\|XY\|$ является решением игры Г тогда и только тогда, когда X и Y суть оптимальные стратегии соответственно для первого и второго игроков, то достаточно исследовать множество $\mathbf{T}_1(\Gamma)$ оптимальных стратегий игрока P_1 и множество $\mathbf{T}_2(\Gamma)$ оптимальных стратегий игрока P_2. Мы увидим, что если Г есть игра с матрицей порядка $m \times n$, то $\mathbf{T}_1(\Gamma)$ есть выпуклая оболочка некоторого конечного множества точек m-мерного пространства и, аналогично, $\mathbf{T}_2(\Gamma)$ есть выпуклая оболочка конечного множества точек n-мерного пространства. Таким образом, множества $\mathbf{T}_1(\Gamma)$ и $\mathbf{T}_2(\Gamma)$ имеют простую геометрическую интерпретацию — они представляют собою многогранники. Доказательство этого положения приведет нас к общему методу отыскания решений данной прямоугольной игры, более короткому и лучше приспособленному для машинного вычисления, чем способ, описанный в конце главы II.

Замечание 3.1. Некоторые доказательства этой главы, вероятно, окажутся более трудными, чем доказательства, приводимые в остальных главах книги, особенно для тех, кто мало знаком с матричной алгеброй. При первом чтении можно опустить доказательства леммы 3.5 и теоремы 3.6, а также разделы 2 и 3, поскольку в остальном тексте на них нет ссылок.

Лемма 3.2. *Если Г — прямоугольная игра с матрицей порядка $m \times n$, то* $\mathbf{T}_1(\Gamma)$ *и* $\mathbf{T}_2(\Gamma)$ *суть непустые* *ограниченные выпуклые и замкнутые подмножества соответственно m-мерного и n-мерного пространств.*

Доказательство. Докажем лемму 3.2 только для $\mathbf{T}_1(\Gamma)$; доказательство для $\mathbf{T}_2(\Gamma)$ аналогично. Согласно теореме 2.3 $\mathbf{T}_1(\Gamma)$ — непустое.

Поскольку $\mathbf{T}_1(\Gamma)$ есть подмножество множества S_m, то, для того чтобы доказать ограниченность $\mathbf{T}_1(\Gamma)$, достаточно доказать ограниченность S_m. Это очевидно, так как каждый элемент множества S_m есть вектор $\| x_1 \ldots x_m \|$, компоненты которого удовлетворяют условию

$$x_1 + \ldots + x_m = 1,$$

где

$$x_i \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, m)$$

и, следовательно,

$$x_1^2 + \ldots + x_m^2 \leqslant 1,$$

так что S_m лежит в гиперсфере радиуса 1 с центром в начале координат.

Пусть платежная матрица игры Γ есть

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \ldots a_{mn} \end{Vmatrix}$$

и пусть математическое ожидание выигрыша игры Γ равно E, так что если

$$X = \| x_1 \ldots x_m \| \in \mathrm{S}_m \text{ и } Y = \| y_1 \ldots y_n \| \in \mathrm{S}_n,$$

то

$$E(X, Y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i y_j. \tag{1}$$

Пусть v — цена игры. Чтобы убедиться в том, что множество $\mathbf{T}_1(\Gamma)$ выпуклое, возьмем любые элементы $X^{(1)} \ldots X^{(r)}$ множества $\mathbf{T}_1(\Gamma)$ и некоторый элемент $\alpha = \| \alpha_1 \ldots \alpha_r \|$ множества S_r; образуем сумму

$$X^* = \alpha_1 X^{(1)} + \ldots + \alpha_r X^{(1)}. \tag{2}$$

Нужно показать, что $X^* \in \mathbf{T}_1(\Gamma)$. Поскольку $X^{(1)}, \ldots, X^{(r)}$ из $\mathbf{T}_1(\Gamma)$, то по теореме 2.8 для всякого элемента Y

множества S_n

$$v \leqslant E(X^{(i)}, Y) \text{ для } i = 1, \ldots, r. \qquad (3)$$

Поскольку $\alpha_i \geqslant 0$, то из неравенства (3) получаем, что

$$\alpha_i v \leqslant \alpha_i E(X^{(i)}, Y) \text{ для } i = 1, \ldots, r,$$

и следовательно,

$$\alpha_1 v + \ldots + \alpha_r v \leqslant \alpha_1 E(X^{(1)}, Y) + \ldots + \alpha_r E(X^{(r)}, Y),$$

или

$$v \leqslant \alpha_1 E(X^{(1)}, Y) + \ldots + \alpha_r E(X^{(r)}, Y). \qquad (4)$$

Из выражений (1) и (2) находим

$$\alpha_1 E(X^{(1)}, Y) + \ldots + \alpha_r E(X^{(r)}, Y) =$$
$$= E(\alpha_1 X^{(1)} + \ldots + \alpha_r X^{(r)}, Y) = E(X^*, Y), \qquad (5)$$

а из (4) и (5) следует

$$v \leqslant E(X^*, Y). \qquad (6)$$

Поскольку неравенство (6) справедливо для всякого элемента Y множества S_n, то из теоремы 2.8 следует, что X^* принадлежит множеству $\mathbf{T}_1(\Gamma)$, что и требовалось доказать.

Для доказательства замкнутости $\mathbf{T}_1(\Gamma)$ возьмем последовательность $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots$ элементов множества $\mathbf{T}_1(\Gamma)$, сходящуюся к вектору X^*. Поскольку S_m замкнуто, то, очевидно, $X^* \in S_m$; нам нужно показать, что $X^* \in \mathbf{T}_1(\Gamma)$. Так как $X^{(i)} \in \mathbf{T}_1(\Gamma)$, то на основании теоремы 2.8 для всякого элемента Y множества S_n

$$v \leqslant E(X^{(i)}, Y). \qquad (7)$$

Но так как $E(X, Y)$ есть линейная (и, следовательно, непрерывная) функция компонент X, то на основании неравенства (7)

$$v \leqslant E(X^*, Y).$$

Следовательно, по теореме 2.8 $X^* \in \mathbf{T}_1(\Gamma)$, что и требовалось доказать.

Замечание 3.3. Из выпуклости множества $\mathbf{T}_1(\Gamma)$ следует, что если $\mathbf{T}_1(\Gamma)$ имеет больше одного элемента, то оно имеет бесконечное число элементов. То же самое справедливо для $\mathbf{T}_2(\Gamma)$. Итак, прямоугольная игра имеет либо только одно, либо бесконечное число решений.

Из леммы 3.2 мы видим, что множества $\mathbf{T}_1(\Gamma)$ и $\mathbf{T}_2(\Gamma)$ удовлетворяют условию теоремы 2.4. Таким образом, множества $\mathbf{K}[\mathbf{T}_i(\Gamma)]$ (для $i=1,2$) не пусты, и каждый элемент множества $\mathbf{T}_i(\Gamma)$ есть выпуклая линейная комбинация элементов множества $\mathbf{K}[\mathbf{T}_i(\Gamma)]$. Поэтому, для того чтобы найти все элементы множества $\mathbf{T}_i(\Gamma)$, достаточно найти все элементы множества $\mathbf{K}[\mathbf{T}_i(\Gamma)]$. Позднее в этой главе мы покажем, что $\mathbf{K}[\mathbf{T}_i(\Gamma)]$ есть конечное множество.

2. Некоторые свойства матриц

В утверждениях и доказательствах следующих двух лемм мы будем широко пользоваться теорией матриц.

Обозначим через I_n матрицу порядка $n \times n$, каждый элемент главной диагонали которой равен 1, а все другие — нулю; например:

$$I_1 = \|1\|,$$

$$I_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Через J_n обозначим вектор (т. е. матрицу, состоящую из одной строки) с n компонентами, каждая из которых равна 1; например:

$$J_1 = \|1\|,$$
$$J_2 = \|1 \ \ 1\|,$$
$$J_3 = \|1 \ \ 1 \ \ 1\|.$$

Через O_n обозначим n-мерный нулевой вектор; например:

$$O_1 = \|0\|,$$
$$O_2 = \|0 \ \ 0\|,$$
$$O_3 = \|0 \ \ 0 \ \ 0\|.$$

Матрицу, транспонированную по отношению к матрице A, обозначим через A'; например:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{Vmatrix},$$

$$A' = \begin{Vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{Vmatrix}.$$

Таким образом, для любого n

$$I'_n = I_n.$$

J'_n есть матрица, состоящая из одного столбца:

$$J'_1 = \| \; 1 \; \|,$$

$$J'_2 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix},$$

$$J'_3 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Если A — матрица, а k — некоторое число, то скалярное произведение A на k обозначим через Ak или kA, например:

$$3 \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \\ 7 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \\ 7 & 0 \end{Vmatrix} 3 = \begin{Vmatrix} 3 & 6 \\ 9 & -6 \\ 21 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Произведение матриц A и B будем обозначать через $A \cdot B$ или просто AB; например:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{Vmatrix},$$

$$B = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{Vmatrix},$$

$$A \cdot B = AB = \begin{Vmatrix} 1\cdot1 + 2\cdot0 + 3\cdot5 & 1\cdot2 + 2\cdot1 + 3\cdot6 \\ 1\cdot1 + 3\cdot0 + 4\cdot5 & 1\cdot2 + 3\cdot1 + 4\cdot6 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 16 & 22 \\ 21 & 29 \end{Vmatrix}.$$

Если A — квадратная матрица n-го порядка, то под A^{-1} будем понимать такую матрицу (если она существует), для которой

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n.$$

Матрица A^{-1} называется *обратной* к матрице A. Так, обратной матрицей к матрице

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{Vmatrix}$$

будет

$$\begin{Vmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Матрица A имеет обратную матрицу тогда и только тогда, когда она невырожденная, т. е. когда определитель матрицы A, который мы обозначаем через $|A|$, отличен от нуля.

Если A — матрица, имеющая лишь один элемент a, и если $a \neq 0$, то A^{-1} есть матрица, имеющая единственный элемент $1/a$. Так,

$$\| 10 \|^{-1} = \left\| \frac{1}{10} \right\|.$$

Матрица $\| 0 \|$, очевидно, не имеет обратной матрицы. Если $\| a \|$ — матрица, имеющая лишь один элемент, мы будем иногда опускать двойные вертикальные линии, служащие для обозначения матрицы, и писать просто a вместо $\| a \|$.

Пусть A — квадратная матрица. Назовем *присоединенной* к матрице A (и обозначим через $\operatorname{adj} A$) матрицу, получающуюся при замене элемента i-й строки и j-го столбца матрицы A на алгебраическое дополнение элемента j-й строки i-го столбца. Так, например,

$$\operatorname{adj} \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Если A — матрица, имеющая лишь один элемент a, то независимо от величины a мы полагаем $\operatorname{adj} A = \| 1 \|$, так что

$$\operatorname{adj}\|1\| = \operatorname{adj}\|-3\| = \operatorname{adj}\|0\| = \|1\| = 1.$$

Отметим, что для всякой квадратной матрицы существует присоединенная матрица; если A — невырожденная матрица (так что A^{-1} существует), то

$$A^{-1}|A| = \operatorname{adj} A,$$

где $|A|$ есть определитель матрицы A. Если A и B — две матрицы с одинаковым числом строк и столбцов, то мы будем обозначать сумму A и B через $A+B$, а разность матриц A и B — через $A-B$. Так,

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 4 & -6 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1+0 & 2-2 & 3+3 \\ 4+4 & 5-6 & 6+0 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 8 & -1 & 6 \end{Vmatrix}$$

и

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 4 & -6 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1-0 & 2-(-2) & 3-3 \\ 4-4 & 5-(-6) & 6-0 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 11 & 6 \end{Vmatrix}.$$

Умножение матриц дистрибутивно по отношению к сложению и вычитанию, так что для любых A, B и C

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

и

$$A \cdot (B - C) = A \cdot B - A \cdot C.$$

Подматрицей матрицы A мы будем называть матрицу B, которая или тождественна с A, или может быть получена из A вычеркиванием некоторых строк и столбцов. Так, например, матрица

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{Vmatrix}$$

имеет следующие подматрицы:

$$\left\|\begin{matrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix}1 & 3\\ 4 & 6\end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{matrix}\right\|,$$

$$\|1\ \ 2\ \ 3\|, \quad \|4\ \ 5\ \ 6\|,$$

$$\left\|\begin{matrix}1\\ 4\end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix}2\\ 5\end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix}3\\ 6\end{matrix}\right\|,$$

$$\|1\ 2\|, \quad \|1\ 3\|, \quad \|2\ 3\|, \quad \|4\ 5\|, \quad \|4\ 6\|, \quad \|5\ 6\|,$$

$$\|1\|, \quad \|2\|, \quad \|3\|, \quad \|4\|, \quad \|5\|, \quad \|6\|.$$

Чтобы упростить одно из последующих доказательств, докажем следующую лемму.

Лемма 3.4. *Пусть*

$$A = \left\|\begin{matrix}a_{11} \ldots a_{1r}\\ \ldots\ldots\ldots\\ a_{r1} \ldots a_{rr}\end{matrix}\right\|$$

квадратная матрица порядка r и пусть

$$A_x = \left\|\begin{matrix}a_{11}+x \ldots a_{1r}+x\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{r1}+x \ldots a_{rr}+x\end{matrix}\right\|$$

— матрица, полученная из A путем прибавления к каждому из ее элементов некоторого действительного числа x. Тогда

$$J_r \operatorname{adj} A_x = J_r \operatorname{adj} A; \tag{8}$$

$$|A_x| = |A| + xJ_r \operatorname{adj} AJ_r'. \tag{9}$$

Доказательство. Как легко видеть, равенство

$$\left|\begin{matrix}a_{11}+b_1 & a_{12} \ldots a_{1r}\\ a_{21}+b_2 & a_{22} \ldots a_{2r}\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\\ a_{r1}+b_r & a_{r2} \ldots a_{rr}\end{matrix}\right| =$$

$$= \left|\begin{matrix}a_{11} & a_{12} \ldots a_{1r}\\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2r}\\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\\ a_{r1} & a_{r2} \ldots a_{rr}\end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix}b_1 & a_{12} \ldots a_{1r}\\ b_2 & a_{22} \ldots a_{2r}\\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\\ b_r & a_{r2} \ldots a_{rr}\end{matrix}\right| \tag{10}$$

является тождеством. Аналогичное тождество, очевидно, справедливо для произвольной строки (или столбца). Умножив первую строку определителя левой части на x и вычтя ее из каждой последующей строки, можно убедиться в справедливости следующего равенства:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \dots & a_{2r}+x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1}+x & a_{r2}+x & \dots & a_{rr}+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Аналогичное равенство, очевидно, справедливо для произвольной строки (или столбца).

Можно легко доказать, что

$$J_r \operatorname{adj} A = \left\| \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \dots \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r-1,1} & \dots & a_{r-1,r} \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \right\|. \quad (12)$$

Кроме того, очевидно, что равенство (8) непосредственно следует из равенства (11). Чтобы установить справедливость равенства (9), заметим, что из равенства (10) вытекает:

$$|A_x| = |A| + \begin{vmatrix} x & x & \dots & x \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r-1,1} & \dots & a_{r-1,r} \\ x & \dots & x \end{vmatrix} =$$

$$= |A| + x \left[\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r-1,1} & \dots & a_{r-1,r} \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \right]. \quad (13)$$

И, наконец, сопоставляя последнее выражение и равенство (12), получаем, что член в квадратных скобках в выражении (13) равен $J_r \operatorname{adj} AJ'_r$.

3. Определение всех решений

Лемма. 3.5. *Пусть* Γ — *прямоугольная игра, платежная матрица которой есть* A, *пусть* $v(\Gamma)$ — *цена игры, отличная от нуля,* $X \in \mathrm{T}_1(\Gamma)$ *и* $Y \in \mathrm{T}_2(\Gamma)$. *Тогда, для того чтобы* $X \in \mathrm{K}[\mathrm{T}_1(\Gamma)]$ *и* $Y \in \mathrm{K}[\mathrm{T}_2(\Gamma)]$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала невырожденная подматрица* B *матрицы* A *такая, что*

$$v = \frac{1}{J_r B^{-1} J_r'}, \tag{14}$$

$$\dot{X} = \frac{J_r B^{-1}}{J_r B^{-1} J_r'}, \tag{15}$$

$$\dot{Y} = \frac{J_r (B^{-1})'}{J_r B^{-1} J_r'}, \tag{16}$$

где r *есть порядок матрицы* B, $\dot{X}$ — *вектор, полученный из* X *путем вычеркивания элементов, соответствующих вычеркнутым строкам при образовании матрицы* B *из матрицы* A, *а* $\dot{Y}$ *есть вектор, полученный из* Y *путем вычеркивания элементов, соответствующих вычеркнутым столбцам при образовании матрицы* B *из матрицы* A.

Доказательство. Положим

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot \;\cdot\; \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Чтобы убедиться в достаточности нашего условия, предположим, что имеется невырожденная матрица B, удовлетворяющая условиям (14), (15) и (16), и что при этом условия $X \in \mathrm{K}[\mathrm{T}_1(\Gamma)]$ и $Y \in \mathrm{K}[\mathrm{T}_2(\Gamma)]$ не выполняются одновременно, так что либо $X \in \overline{\mathrm{K}}[\mathrm{T}_1(\Gamma)]$, либо $Y \in \overline{\mathrm{K}}[\mathrm{T}_2(\Gamma)]$. Покажем, что предположение, будто $X \in \overline{\mathrm{K}}[\mathrm{T}_1(\Gamma)]$, приводит к противоречию; доказательство противоречивости предположения $Y \in \overline{\mathrm{K}}[\mathrm{T}_2(\Gamma)]$ аналогично.

Поскольку задача определения решений игры не меняется существенно при перестановке строк или столбцов, мы можем, не нарушая общности, положить, что B

находится в левом верхнем углу матрицы A, то есть что

$$B = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{Vmatrix}.$$

Таким образом, если $X = \| x_1 \dots x_m \|$, то $\dot{X} = \| x_1 \dots x_r \|$. Но поскольку $X \in S_m$, то $x_i \geqslant 0$ (для $i = 1, \dots, m$ и, следовательно, тем более для $i = 1, \dots, r$). Далее, из равенства (15) мы заключаем, что

$$\sum_{i=1}^{r} x_i = \dot{X} \cdot J'_r = \frac{J_r B^{-1} J'_r}{J_r B^{-1} J'_r} = 1.$$

Поэтому

$$\dot{X} \in S_r \tag{17}$$

и

$$x_i = 0 \qquad (r < i \leqslant m). \tag{18}$$

Поскольку мы предположили, что $X \overline{\in} K[T_1(\Gamma)]$, следовательно, существуют несовпадающие между собой элементы $U = \| u_1 \dots u_m \|$ и $W = \| w_1 \dots w_m \|$ множества $T_1(\Gamma)$, такие, что

$$X = \frac{1}{2}(U + W),$$

то есть такие, что

$$x_i = \frac{1}{2}(u_i + w_i) \qquad (i = 1, \dots, m). \tag{19}$$

Из выражений (17), (18) и (19)

$$u_i = w_i = 0 \qquad (r < i \leqslant m). \tag{20}$$

Следовательно, будем иметь:

$$u_1 a_{1j} + \dots + u_r a_{rj} = u_1 a_{1j} + \dots + u_m a_{mj} \quad (j = 1, \dots, m). \tag{21}$$

Но поскольку $\| u_1 \dots u_m \| \in T_1(\Gamma)$, то

$$u_1 a_{1j} + \dots + u_m a_{mj} \geqslant v,$$

и, следовательно, на основании равенства (21)

$$u_1 a_{1j} + \dots + u_r a_{rj} \geqslant v; \tag{22}$$

совершенно аналогично можно получить

$$w_1 a_{1j} + \ldots + w_r a_{rj} \geqslant v. \tag{23}$$

Из равенств (14) и (15) имеем:

$$XB = \frac{J_r B^{-1} B}{J_r B^{-1} J'_r} = \frac{J_r}{J_r B^{-1} J'_r} = vJ_r,$$

и, следовательно,

$$x_1 a_{1j} + \ldots + x_r a_{rj} = v \qquad (j = 1, \ldots, r),$$

так что, используя (19), получаем:

$$\frac{1}{2}(u_1 + w_1) a_{1j} + \ldots + \frac{1}{2}(u_r + w_r) a_{rj} = v,$$

или

$$[u_1 a_{1j} + \ldots + u_r a_{rj}] + [w_1 a_{1j} + \ldots + w_r a_{rj}] = 2v. \tag{24}$$

Из выражений (22), (23) и (24) имеем:

$$[u_1 a_{1j} + \ldots + u_r a_{rj}] = [w_1 a_{1j} + \ldots + w_r a_{rj}] = v \tag{25}$$
$$(j = 1, \ldots, r),$$

и, следовательно,

$$U \cdot B = W \cdot B,$$

откуда вытекает, что

$$U \cdot B - W \cdot B = O_r$$

и, следовательно, что

$$(U - W) \cdot B = O_r. \tag{26}$$

Поскольку предполагалось, что U и W различные векторы, то

$$U - W \neq O_r. \tag{27}$$

Тогда из выражений (26) и (27) следует, что B есть вырожденная матрица, что противоречит условию.

Остается показать, что условие необходимо. Допустим, что $X \in \mathrm{K}[\mathbf{T}_1(\Gamma)]$ и $Y \in \mathrm{K}[\mathbf{T}_2(\Gamma)]$, и построим невырожденную матрицу B, удовлетворяющую условиям (14), (15) и (16).

Не нарушая общности, мы можем предположить, что строки матрицы A расположены таким образом, что

$$x_i \neq 0 \quad (i \leqslant m') \tag{28}$$

и

$$x_i = 0 \quad (i > m'), \tag{29}$$

и кроме того, предположим, что столбцы матрицы A расположены таким образом, что

$$y_j \neq 0 \quad (j \leqslant n') \tag{30}$$

и

$$y_j = 0 \quad (j > n'). \tag{31}$$

На основании теоремы 2.9 мы заключаем, что

$$a_{1j}x_1 + \ldots + a_{mj}x_m = v \quad (j = 1, \ldots, n') \tag{32}$$

и

$$a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n = v \quad (i = 1, \ldots, m'). \tag{33}$$

Далее, не нарушая общности, мы можем также предположить, что строки и столбцы матрицы A расположены таким образом, что для некоторого $n'' \geqslant n'$ и некоторого $m'' \geqslant m'$

$$a_{1j}x_1 + \ldots + a_{mj}x_m = v \qquad (j = 1, \ldots, n''), \tag{34}$$

$$a_{1j}x_i + \ldots + a_{mj}x_m > v \qquad (j > n''), \tag{35}$$

$$a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n = v \qquad (i = 1, \ldots, m''), \tag{36}$$

$$a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n < v \qquad (i > m''). \tag{37}$$

Пусть D_j есть вектор $\|a_{1j} \ldots a_{mj}\|$, где j — любое целое число из множества $\{1, \ldots, n\}$. Определим рекуррентно некоторые множества целых чисел $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{n''-n'}$. Положим

$$\mathbf{A}_0 = \{1, \ldots, n'\}.$$

Предположив, что $\mathbf{A}_k$ определено и равно

$$\mathbf{A}_k = \{k_1, \ldots, k_u\},$$

мы будем различать два случая:

Случай 1. Существует целое число j в множестве $\{1, 2, \ldots, n''\} - \mathbf{A}_k$, такое, что вектор D_j линейно независим от векторов $D_{k_1}, \ldots, D_{k_u}$, то есть такой, что не существует постоянных чисел $c_1, \ldots, c_{k_u}$, одновременно отличных от нуля и удовлетворяющих условию

$$D_j = c_1 D_{k_1} + \ldots + c_{k_u} D_{k_u}.$$

Случай 2. Такого целого числа j не существует.

В первом случае, обозначая через j_0 наименьшее целое число в множестве $\{1, \ldots, n''\} - \mathbf{A}_k$, такое, что D_{j_0} линейно независимо от $D_{k_1}, \ldots, D_{k_u}$, положим

$$\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{A}_k \bigcup \{j_0\}.$$

Во втором случае считаем $\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{A}_k$. Положим теперь

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{n''-n'}.$$

Не нарушая общности, мы можем предположить, что столбцы матрицы $\mathbf{A}$ расположены в таком порядке, что для некоторого t

$$\mathbf{A} = \{1, \ldots, n', \; n'+1, \ldots, t\}.$$

Тогда легко видеть, что для $n' < j \leqslant t$ вектор D_j линейно не зависит от векторов $D_1, \ldots, D_{j-1}, \; D_{j+1}, \ldots, D_t$; кроме того, если $t < j \leqslant n''$, то D_j линейно зависит от $D_1, \ldots, D_t$.

Аналогично, если положить

$$C_i = \| a_{i1} \ldots a_{in'} \|,$$

где i — любой элемент множества $\{1, \ldots, m\}$, то по аналогичным соображениям мы можем, не нарушая общности, предположить, что существует целое s, удовлетворяющее условию $m' \leqslant s \leqslant m''$, такое, что для $m' < i \leqslant s$ вектор C_i линейно не зависит от векторов $C_1, \ldots, C_{i-1}, C_{i+1}, \ldots, C_s$; если же $s < i \leqslant m''$, то C_i линейно зависит от $C_1, \ldots, C_s$.

Положим теперь

$$B = \begin{Vmatrix} a_{11} \ldots a_{1t} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ a_{s1} \ldots a_{st} \end{Vmatrix}.$$

Допустим, что матрица B вырождена, так что либо строки, либо столбцы ее линейно зависимы. Разберем случай линейной зависимости строк (в случае линейной зависимости столбцов доказательство аналогично).

Для $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ введем обозначение

$$B_i = \| a_{i1} \ldots a_{it} \|.$$

Поскольку строки матрицы B зависимы, то существуют такие постоянные $c_1, \ldots, c_s$, не все равные нулю, что

$$c_1 B_1 + \ldots + c_s B_s = O_t. \tag{38}$$

Кроме того, для $i > m'$ мы должны иметь $c_i = 0$, так как в противном случае мы могли бы разделить равенство (38) на c_i и прийти к выводу, что B_i линейно зависит от $B_1, \ldots, B_{i-1}, B_{i+1}, \ldots, B_s$ и, следовательно (так как C_i — часть вектора B_i), C_i линейно зависит от $C_1, \ldots, C_{i-1}, C_{i+1}, \ldots, C_s$, что противоречит построению. Поэтому из условий (28) и (29) заключаем, что

$$c_i = 0 \quad \text{для } x_i = 0 \ (i = 1, \ldots, t). \tag{39}$$

На основании равенства (36) имеем:

$$\| y_1 \ldots y_n \| \begin{Vmatrix} a_{i1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{in} \end{Vmatrix} = v \quad (i = 1, \ldots, m'),$$

и, следовательно, из (31), учитывая, что $n' \leqslant t$, получаем:

$$\| y_1 \ldots y_t \| \begin{Vmatrix} a_{i1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{it} \end{Vmatrix} = v.$$

Итак, полагая $Y^* = \| y_1 \ldots y_t \|$, имеем:

$$Y^* \cdot (B_i)' = v \quad (i = 1, \ldots, m'). \tag{40}$$

Используя (40) и (38), мы видим, что

$$v \sum_{i=1}^{s} c_i = \sum_{i=1}^{s} v c_i = \sum_{i=1}^{s} Y^* (B_i)' c_i =$$

$$= Y^* \sum_{i=1}^{s} (B_i)' c_i = Y^* (O_t)' = 0.$$

а поскольку, по условию, $v \neq 0$, то

$$\sum_{i=1}^{s} c_i = 0. \tag{41}$$

Положим теперь $c_i = 0$ для $s < i \leqslant m$ и

$$C = \| c_1 \ldots c_m \|. \tag{42}$$

Из условия (39) и из определения c_i для $i > s$ имеем:

$$c_i = 0 \text{ для } x_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{43}$$

Для любого действительного числа α определим вектор X_α.

$$X_\alpha = X + \alpha C. \tag{44}$$

Так как не все компоненты вектора C равны нулю, очевидно, что $X_\alpha = X$ тогда и только тогда, когда $\alpha = 0$; в общем случае $X_\alpha = X_\beta$ тогда и только тогда, когда $\alpha = \beta$.

Из равенства (41) вытекает, что если $X_\alpha = \| z_1 \ldots z_m \|$, то

$$\sum_{i=1}^{m} z_i = \sum_{i=1}^{m} (x_i + \alpha c_i) = \sum_{i=1}^{m} x_i + \alpha \sum_{i=1}^{m} c_i = 1 + \alpha \cdot 0 = 1. \tag{45}$$

Далее, из условия (43) видно, что, выбрав α достаточно малым, мы можем получить $z_i = x_i + \alpha c_i \geqslant 0$ для $i = 1, \ldots, m$; следовательно, существует такое ε_1, что

$$X_\alpha \in S_m \quad (|\alpha| < \varepsilon_1). \tag{46}$$

Обозначив через $A^{(j)}$ j-й столбец матрицы A, мы видим на основании (43) и (38), что для $j = 1, \ldots, t$,

$$C \cdot A^{(j)} = \| c_1 \ldots c_m \| \cdot \left\| \begin{matrix} a_{1j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mj} \end{matrix} \right\| =$$

$$= c_1 a_{1j} + \ldots + c_m a_{mj} = c_1 a_{1j} + \ldots + c_s a_{sj} = 0. \tag{47}$$

Если $t < j \leqslant n'$, то, как мы видели выше, D_j линейно зависит от $D_1, \ldots, D_t$. Таким образом, существуют такие постоянные $d_1, \ldots, d_t$, что

$$D_j = d_1 D_1 + \ldots + d_t D_t.$$

Отсюда, используя равенство (47), получаем:

$$C\cdot A^{(j)}=\|c_1\ldots c_m\|\begin{Vmatrix}a_{1j}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ a_{mj}\end{Vmatrix}=\|c_1\ldots c_{m'}\|\begin{Vmatrix}a_{1j}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ a_{m'j}\end{Vmatrix}=$$

$$=\|c_1\ldots c_{m'}\|\cdot D'_j=$$

$$=\|c_1\ldots c_{m'}\|\cdot[d_1D'_1+\ldots+d_tD'_t]=$$

$$=\|c_1\ldots c_{m'}\|[d_1A^{(1)}+\ldots+d_tA^{(t)}]=$$

$$=C[d_1A^{(1)}+\ldots+d_tA^{(t)}]=$$

$$=d_1CA^{(1)}+\ldots+d_tCA^{(t)}=0. \qquad (48)$$

Таким образом, из равенств (47) и (48) следует

$$C\cdot A^{(j)}=0 \quad \text{для } j=1,\ldots,n'',$$

и поэтому для $j=1,\ldots,n''$ получаем равенство

$$X_\alpha\cdot A^{(j)}=(X+\alpha\cdot C)\,A^{(j)}=X\cdot A^{(j)}+\alpha\cdot C\cdot A^{(j)}=X\cdot A^{(j)}=v, \qquad (49)$$

справедливое при всех α.

Для всех $j>n''$ имеем $X\cdot A^{(j)}>v$. Следовательно, мы можем найти такое ε_2, что

$$X_\alpha\cdot A^{(j)}=(X+\alpha C)\,A^{(j)}=X\cdot A^{(j)}+\alpha C\cdot A^{(j)}>v \qquad (50)$$

$$\text{при } |\alpha|<\varepsilon_2.$$

Введем обозначение $\varepsilon=\min(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)$. Тогда из (46), (49) и (50) получим, что для $|\alpha|<\varepsilon$ выполняется $X_\alpha\in S_m$ и $X_\alpha\cdot A^{(j)}\geqslant v$ $(j=1,\ldots,n)$, поэтому $X_\alpha\in \mathbf{T}_1(\Gamma)$. В частности, положив $\beta=\frac{1}{2}\varepsilon$, мы получим:

$$X_\beta\in \mathbf{T}_1(\Gamma) \qquad \text{и} \qquad X_{-\beta}\in \mathbf{T}_1(\Gamma).$$

Но так как

$$X=\frac{1}{2}(X_\beta+X_{-\beta}),$$

то $X\overline{\in} \mathrm{K}[\mathbf{T}_1(\Gamma)]$, что противоречит условию. Отсюда заключаем, что матрица B невырожденная, что и требовалось доказать.

Для завершения доказательства остается проверить выполнение для B равенств (14), (15) и (16). Поскольку матрица B невырожденная, $s=t$; положим $r=s=t$, тогда

$$B=\begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} \\ \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} \end{Vmatrix}.$$

Пусть $\dot{X}=\|x_1 \ldots x_r\|$ и $\dot{Y}=\|y_1 \ldots y_r\|$. Вектор $\dot{X}$ получается из X путем вычеркивания элементов, соответствующих вычеркнутым строкам при образовании B из A; вектор $\dot{Y}$ получается аналогичным образом. Если верно равенство (34), то тем более справедливо, что

$$a_{1j}x_1+\ldots+a_{mj}x_m=v \quad (j=1, \ldots, r),$$

и, следовательно, поскольку $x_i=0$ $(i>r)$, то

$$a_{1j}x_1+\ldots+a_{rj}x_r=v \quad (j=1, \ldots, r). \tag{51}$$

Из (51) следует, что

$$\dot{X}\cdot B=vJ_r,$$

а отсюда в силу невырожденности B

$$\dot{X}=\dot{X}BB^{-1}=vJ_rB^{-1}. \tag{52}$$

Аналогично, с помощью равенства (36) мы заключаем, что

$$a_{i1}y_1+\ldots+a_{ir}y_r=v \quad (i=1, \ldots, r),$$

откуда

$$\dot{Y}B'=vJ_r.$$

Следовательно,

$$\dot{Y}=\dot{Y}B'(B')^{-1}=vJ_r(B')^{-1}=vJ_r(B^{-1})'. \tag{53}$$

Из равенства (52) мы получаем:

$$v[J_rB^{-1}J_r']=(vJ_r)(B^{-1}J_r')=\dot{X}BB^{-1}J_r'=\dot{X}J_r'=1, \tag{54}$$

откуда

$$v=\frac{1}{J_rB^{-1}J_r'}.$$

Это и есть равенство (14) нашей леммы. Равенства (15) и (16) вытекают непосредственно из равенств (52), (53) и (54). Доказательство закончено.

Теорема 3.6. *Пусть* Γ — *прямоугольная игра с матрицей* A. *Предположим, что* $X \in \mathbf{T}_1(\Gamma)$ *и* $Y \in \mathbf{T}_2(\Gamma)$. *Тогда, для того чтобы* $X \in \mathbf{K}[\mathbf{T}_1(\Gamma)]$ *и* $Y \in \mathbf{K}[(T_2(\Gamma)]$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала квадратная подматрица* B *матрицы* A *порядка* r, *такая, что*

$$J_r(\operatorname{adj} B) J_r' \neq 0$$

и

$$v = \frac{|B|}{J_r(\operatorname{adj} B) J_r'}, \tag{55}$$

$$\dot{X} = \frac{J_r \operatorname{adj} B}{J_r(\operatorname{adj} B) J_r'}, \tag{56}$$

$$\dot{Y} = \frac{J_r(\operatorname{adj} B)'}{J_r(\operatorname{adj} B) J_r'}, \tag{57}$$

где $\dot{X}$ *есть вектор, полученный из* X *путем вычеркивания элементов, соответствующих вычеркнутым строкам при образовании* B *из* A, *а* $\dot{Y}$ *есть вектор, полученный из* Y *путем вычеркивания элементов, соответствующих вычеркнутым столбцам при образовании* B *из* A.

Доказательство. Для $v(\Gamma) \neq 0$ теорему легко вывести из леммы 3.5, если вспомнить, что для невырожденной матрицы B

$$B^{-1} = \frac{\operatorname{adj} B}{|B|}.$$

Для $v(\Gamma) = 0$ мы определяем новую игру Γ' с матрицей A', прибавляя к каждому элементу матрицы A число $b \neq 0$. Например, при

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix},$$

полагаем

$$a_{ij}' = a_{ij} + b \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \; 1 \leqslant j \leqslant n, \tag{58}$$

то есть

$$A' = \left\| \begin{matrix} a'_{11} & \ldots & a'_{1n} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ a'_{m1} & \ldots & a'_{mn} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} a_{11}+b & \ldots & a_{1n}+b \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ a_{m1}+b & \ldots & a_{mn}+b \end{matrix} \right\|.$$

Теперь легко проверить с помощью теоремы 2.6, что

$$v(\Gamma') = v(\Gamma) + b = b \neq 0, \tag{59}$$

и далее, что

$$\mathbf{T}_1(\Gamma') = \mathbf{T}_1(\Gamma) \tag{60}$$

и

$$\mathbf{T}_2(\Gamma') = \mathbf{T}_2(\Gamma), \tag{61}$$

так что, очевидно,

$$\mathbf{K}[\mathbf{T}_1(\Gamma')] = \mathbf{K}[\mathbf{T}_1(\Gamma)] \tag{62}$$

и

$$\mathbf{K}[\mathbf{T}_2(\Gamma')] = \mathbf{K}[\mathbf{T}_2(\Gamma)]. \tag{63}$$

Поскольку, согласно (59), $v(\Gamma') \neq 0$, теорема справедлива для Γ' (см. выше). Из равенств (60) и (61) получаем $X \in \mathbf{T}_1(\Gamma')$ и $Y \in \mathbf{T}_2(\Gamma')$. Поэтому, для того чтобы $X \in \mathbf{K}[\mathbf{T}_1(\Gamma')]$ и $Y \in \mathbf{K}[\mathbf{T}_2(\Gamma')]$, необходимо и достаточно, чтобы существовала квадратная подматрица B' матрицы A' порядка r, такая, что

$$\left.\begin{aligned} &J_r(\operatorname{adj} B')J'_r \neq 0, \\ &v(\Gamma') = \frac{|B'|}{J_r(\operatorname{adj} B')J'_r}, \\ &\dot{X} = \frac{J_r \operatorname{adj} B'}{J_r(\operatorname{adj} B')J'_r}, \\ &\dot{Y} = \frac{J_r(\operatorname{adj} B')'}{J_r(\operatorname{adj} B')J'_r}, \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

где $\dot{X}$ и $\dot{Y}$ суть векторы. полученные путем вычеркивания элементов, соответствующих вычеркнутым строкам и столбцам при образовании B' из A'.

Из равенств (62) и (63) мы видим, что существование матрицы, удовлетворяющей условиям (64), есть также необходимое и достаточное условие того, что

$$X \in \mathbf{K}[\mathbf{T}_1(\Gamma)] \quad \text{и} \quad Y \in \mathbf{K}[\mathbf{T}_2(\Gamma)].$$

Предположим, что B — матрица, полученная из B' путем вычитания b из каждого элемента матрицы B'; очевидно, B есть квадратная подматрица матрицы A, которая может быть получена из A путем вычеркивания тех же строк и столбцов, которые вычеркиваются из A' при образовании B'. Тогда из формулы (59) и леммы 3.4 видно, что условия (64) равносильны следующим:

$$J_r(\operatorname{adj} B)J_r' \neq 0,$$

$$v(\Gamma) = \frac{|B|}{J_r(\operatorname{adj} B)J_r'},$$

$$\dot{X} = \frac{J_r \operatorname{adj} B}{J_r(\operatorname{adj} B)J_r'},$$

$$\dot{Y} = \frac{J_r(\operatorname{adj} B)'}{J_r(\operatorname{adj} B)J_r'}.$$

Это завершает доказательство теоремы.

Теорема 3.7. *Если* Γ — *некоторая прямоугольная игра, то множества* $\mathbf{K}[\mathbf{T}_1(\Gamma)]$ *и* $\mathbf{K}[\mathbf{T}_2(\Gamma)]$ *конечны, а* $\mathbf{T}_1(\Gamma)$ *и* $\mathbf{T}_2(\Gamma)$ *являются соответственно их выпуклыми оболочками; следовательно,* $\mathbf{T}_1(\Gamma)$ *и* $\mathbf{T}_2(\Gamma)$ — *многогранники с вершинами в точках, принадлежащих соответственно* $\mathbf{K}[\mathbf{T}_1(\Gamma)]$ *и* $\mathbf{K}[\mathbf{T}_2(\Gamma)]$.

Доказательство. На основании теоремы 3.6 любой элемент множества $\mathbf{K}[\mathbf{T}_1(\Gamma)]$ можно получить из квадратной подматрицы матрицы A игры Γ, а данная квадратная подматрица не может образовать более одного элемента множества $\mathbf{K}[\mathbf{T}_1(\Gamma)]$. Поскольку матрица A имеет лишь конечное число подматриц, то отсюда следует, что $\mathbf{K}[\mathbf{T}_1(\Gamma)]$ есть конечное множество. Доказательство конечности $\mathbf{K}[\mathbf{T}_2(\Gamma)]$ аналогично. Остальные предложения теоремы следуют из леммы 3.2.

Замечание 3.8. Теорема 3.6 дает нам следующий удобный метод нахождения всех решений прямоугольной игры:

Пусть дана прямоугольная игра с платежной матрицей A, мы рассматриваем поочередно каждую квадратную подматрицу B матрицы A. Для подматрицы B порядка r из формул теоремы 3.6 мы определяем v, $\dot{X}$ и $\dot{Y}$ и решаем прежде всего, принадлежат ли $\dot{X}$ и $\dot{Y}$ множеству S_r.

Если нет, мы отбрасываем эту подматрицу B и переходим к другой квадратной подматрице. Если X и Y оба принадлежат множеству S_r, то мы образуем векторы X и Y, прибавляя к $\dot{X}$ и $\dot{Y}$ нулевые компоненты, соответствующие строкам и столбцам, вычеркнутым из A для образования B, и определяем с помощью теоремы 2.9, действительно ли $X \in \mathbf{T}_1(\Gamma)$ и $Y \in \mathbf{T}_2(\Gamma)$. Если нет, мы также отбрасываем B и переходим к другой квадратной подматрице матрицы A. Если да, то $\|XY\|$ есть решение, и, кроме того, на основании теоремы 3.6 $X \in \mathbf{K}[\mathbf{T}_1(\Gamma)]$ и $Y \in \mathbf{K}[\mathbf{T}_2(\Gamma)]$. Так мы можем определить все элементы множеств $\mathbf{K}[\mathbf{T}_1(\Gamma)]$ и $\mathbf{K}[\mathbf{T}_2(\Gamma)]$ и, следовательно, найти все элементы множеств $\mathbf{T}_1(\Gamma)$ и $\mathbf{T}_2(\Gamma)$, образовав выпуклые линейные комбинации элементов множеств соответственно $\mathbf{K}[\mathbf{T}_1(\Gamma)]$ и $\mathbf{K}[\mathbf{T}_2(\Gamma)]$.

В связи с этим отметим, что нам не следует рассматривать подматрицы первого порядка, так как они определяют решения по формулам теоремы 3.6 тогда и только тогда, когда соответствующие точки являются седловыми точками первоначальной матрицы.

Поясним этот метод на нескольких примерах.

Пример 3.9. Рассмотрим игру Γ с платежной матрицей

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{Vmatrix}.$$

Поскольку матрица не имеет седловой точки, мы рассмотрим три подматрицы 2-го порядка:

$$B = \begin{Vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$C = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{Vmatrix},$$

$$D = \begin{Vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{Vmatrix}.$$

Легко проверить, что

$$|B| = -4$$

и

$$\operatorname{adj} B = \begin{Vmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix};$$

следовательно,

$$(\operatorname{adj} B)' = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Таким образом,

$$J_2 (\operatorname{adj} B) = \| -1 \ -2 \|,$$
$$J_2 (\operatorname{adj} B)' = \| -4 \ 1 \|$$

и

$$J_2 (\operatorname{adj} B) J_2' = -3.$$

Подставляя эти значения в формулы теоремы 3.6, мы находим теперь, что

$$v = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3},$$
$$\dot{X} = \frac{\| -1 \ -2 \|}{-3} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{Vmatrix},$$
$$\dot{Y} = \frac{\| -4 \ 1 \|}{-3} = \begin{Vmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{Vmatrix}.$$

Но поскольку вторая компонента вектора $\dot{Y}$ отрицательна, то $\dot{Y} \bar{\in} S_2$; отсюда делаем вывод, что матрица B не дает решения нашей игры (тот факт, что $\dot{Y} \bar{\in} S_2$, можно вывести также из того, что не все компоненты вектора $J_2 (\operatorname{adj} B)'$ одного знака).

Обращаясь к матрице C, мы находим по формулам теоремы 3.6:

$$v = \frac{8}{5},$$
$$\dot{X} = \begin{Vmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{Vmatrix},$$
$$\dot{Y} = \begin{Vmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{Vmatrix},$$

где $\dot{X} \in S_2$ и $\dot{Y} \in S_2$. Так как при образовании C из A

строки не вычеркивались, то

$$X = \dot{X} = \left\| \frac{3}{5} \quad \frac{2}{5} \right\|,$$

а поскольку при образовании C из A был вычеркнут второй столбец, то

$$Y = \left\| \frac{4}{5} \quad 0 \quad \frac{1}{5} \right\|.$$

Далее, проверяя величины v, X и Y согласно теореме 2.9, мы находим, что

$$E(X, 1) = \frac{3}{5}\cdot 2 + \frac{2}{5}\cdot 1 = \frac{8}{5} = v,$$

$$E(X, 2) = \frac{3}{5}\cdot 4 + \frac{2}{5}\cdot 0 = \frac{12}{5} > v,$$

$$E(X, 3) = \frac{3}{5}\cdot 0 + \frac{2}{5}\cdot 4 = \frac{8}{5} = v,$$

$$E(1, Y) = \frac{4}{5}\cdot 2 + 0\cdot 4 + \frac{1}{5}\cdot 0 = \frac{8}{5} = v,$$

$$E(2, Y) = \frac{4}{5}\cdot 1 + 0\cdot 0 + \frac{1}{5}\cdot 4 = \frac{8}{5} = v.$$

Итак, найденные X и Y действительно представляют решение.

Возвращаясь к D, мы находим из теоремы 3.6, что

$$v = 2,$$

$$\dot{X} = \left\| \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right\|,$$

$$\dot{Y} = \left\| \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right\|,$$

и, следовательно,

$$X = \left\| \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right\|,$$

$$Y = \left\| \frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2} \right\|.$$

Но при проверке величин X, Y и v согласно теореме 2.9 мы находим, что

$$E(1, X) = \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2} < v,$$

и, следовательно, найденные X и Y не составляют решения. (Кстати, это можно было предвидеть из того, что полученная цена игры отлична от цены, найденной из матрицы C, которая, как мы уже видели, составляет решение.)

Итак, игра имеет единственное решение:

$$v = \frac{8}{5},$$

$$X = \begin{Vmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{Vmatrix},$$

$$Y = \begin{Vmatrix} \frac{4}{4} & 0 & \frac{1}{5} \end{Vmatrix}.$$

Этот результат можно легко проверить графическим способом, изложенным в главе II.

Пример 3.10. Рассмотрим игру Г с платежной матрицей

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Мы полагаем

$$B = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$C = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix},$$

$$D = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Применяя формулы теоремы 3.6 к B, мы находим, что

$$v = 1,$$

$$\dot{X} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{Vmatrix},$$

$$\dot{Y} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

и, следовательно,

$$X = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{Vmatrix},$$

$$Y = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Из теоремы 2.6 мы видим, что эти величины действительно представляют решение первоначальной матрицы.

Аналогично, используя матрицу C, мы получаем:

$$v = 1,$$

$$X = \left\| \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right\|,$$

$$Y = \left\| \frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2} \right\|,$$

и, применяя теорему 2.6, опять убеждаемся в том, что это есть решение.

Наконец, используя матрицу D, получаем, что

$$v = 1,$$

$$X = \left\| \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right\|,$$

$$Y = \| 0 \quad 1 \quad 0 \|,$$

то есть то же решение, что и найденное с помощью матрицы B.

Итак, в этой игре $\mathbf{K}[\mathbf{T}_1(\Gamma)]$ содержит лишь один элемент, а именно $\left\| \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right\|$ и, следовательно, $\mathbf{T}_1(\Gamma)$ содержит лишь один элемент. Но множество $\mathbf{K}[\mathbf{T}_2(\Gamma)]$ содержит два элемента, а именно $\| 0 \quad 1 \quad 0 \|$ и $\left\| \frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2} \right\|$. Поэтому общий элемент множества $\mathbf{T}_2(\Gamma)$ можно написать в виде

$$\alpha_1 \| 0 \quad 1 \quad 0 \| + \alpha_2 \left\| \frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2} \right\|,$$

или просто

$$\left\| \frac{1}{2}\alpha_2 \quad \alpha_1 \quad \frac{1}{2}\alpha_2 \right\|,$$

где $\| \alpha_1 \quad \alpha_2 \| \in S_2$. Это значит, что для P_2 будет оптимальной любая стратегия, которая указывает ему выбирать первый и третий столбец одинаково часто.

Пример 3.11. Рассмотрим игру с платежной матрицей

$$A = \left\| \begin{matrix} -1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Для этой матрицы

$$\operatorname{adj} A = \begin{Vmatrix} -3 & -3 & 9 \\ 6 & 6 & -3 \\ 2 & 7 & -6 \end{Vmatrix},$$

откуда получаем решение

$$X = \begin{Vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{Vmatrix}, \quad Y = \begin{Vmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{Vmatrix}.$$

Из девяти подматриц порядка 2×2 лишь одна дает дополнительное решение, а именно

$$B = \begin{Vmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 3 \end{Vmatrix},$$

для которой

$$\dot{X} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{Vmatrix}, \quad \dot{Y} = \begin{Vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{Vmatrix};$$

отсюда

$$X = \begin{Vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{Vmatrix}, \quad Y = \begin{Vmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{Vmatrix}.$$

Итак, P_1 имеет единственную оптимальную стратегию

$$X = \begin{Vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{Vmatrix},$$

в то время как P_2 имеет множество оптимальных стратегий

$$Y = \alpha_1 \begin{Vmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{Vmatrix} + \alpha_2 \begin{Vmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{Vmatrix},$$

где $\| \alpha_1 \alpha_2 \|$ — произвольный элемент множества S_2. Цена игры равна 1.

Замечание 3.12. Следует отметить, что метод решения прямоугольных игр, изложенный в этой главе, хотя и весьма прозрачен (и, конечно, более эффективен, чем трудоемкий метод, указанный в главе II), все же приводит к громоздким вычислениям для игр с большими платежными матрицами, ибо число квадратных подматриц, имеющихся у матриц высокого порядка, само очень велико, и поэтому чрезвычайно утомительно вычислять присоединенную матрицу квадратной матрицы высокого порядка. Число арифметических операций, необходимых при этом способе, так быстро возрастает с повышением порядка матрицы, что представляется мало вероятным применение даже современных электронных вычислительных машин для решения игр порядка, скажем, 100×100.

Замечание 3.13. Из выводов этой главы следует, что для многих прямоугольных игр имеется бесконечно много оптимальных стратегий как для одного, так и для двух игроков. Естественно, возникает вопрос, возможно ли сделать выбор между различными оптимальными стратегиями. Это можно сделать различными способами, один из которых будет сейчас описан.

Предположим, что когда первый игрок выбирает смешанную стратегию X, а второй — чистую стратегию j, математическое ожидание выигрыша первого игрока равно

$$E(X, j).$$

Мы говорим, что смешанная стратегия X превосходит смешанную стратегию X', если для каждой чистой стратегии j игрока P_2

$$E(X, j) \geqslant E(X', j),$$

и существует по меньшей мере одна стратегия j игрока P_2 такая, что

$$E(X, j) > E(X', j).$$

Мы называем стратегию X *наилучшей*, если она оптимальна и никакая другая стратегия не превосходит ее. Аналогично определяются соотношения превосходства и наилучшие стратегии для P_2.

Интуитивное обоснование этих определений заключается в том, что если X превосходит X', то, независимо от того, как решает поступить игрок P_2, P_1 заведомо поступит не хуже при использовании X, чем при использовании X'. Далее, если P_2 делает какие-то ошибки, для P_1 лучше применять X, чем X'. Итак, стратегия X позволяет лучше, чем X', использовать возможные ошибки противника. Поэтому игрок может вполне выбрать стратегию из класса «наилучших». Легко показать, что во всякой прямоугольной игре существуют наилучшие стратегии. Доказательство этого мы оставляем в качестве упражнения.

Пример 3.14. Рассмотрим игру с платежной матрицей

$$\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{Vmatrix}.$$

Поскольку каждый из элементов первого столбца является седловой точкой, то *любая* смешанная стратегия первого игрока оптимальна.

Если P_1 применяет стратегию $\| x_1 x_2 \|$, то математическое ожидание его выигрыша в зависимости от того, какой столбец выбирает P_2, будет:

$$E(\| x_1 \quad x_2 \|, 1) = 2x_1 + 2x_2 = 2,$$
$$E(\| x_1 \quad x_2 \|, 2) = 3x_1 + 5x_2,$$
$$E(\| x_1 \quad x_2 \|, 3) = 4x_1 + 6x_2.$$

В частности,

$$E(\| 0 \quad 1 \|, 1) = 2,$$
$$E(\| 0 \quad 1 \|, 2) = 5,$$
$$E(\| 0 \quad 1 \|, 3) = 6.$$

Поскольку для всех $\| x_1 \quad x_2 \|$ из S_2

$$2 \geqslant 2,$$
$$5 \geqslant 3x_1 + 5x_2,$$
$$6 \geqslant 4x_1 + 6x_2,$$

мы заключаем, что $\| 0 \quad 1 \|$ есть единственная наилучшая стратегия для P_1.

Для P_2 имеется лишь одна оптимальная стратегия, а именно $\| 1 \quad 0 \quad 0 \|$, и, следовательно, также лишь одна наилучшая стратегия.

Библиографические замечания

Материал этой главы был взят в основном из работы Шепли и Сноу [101]. С задачей, которой мы здесь занимаемся, ~~тесно~~ связана такая задача: найти условия, которым должны удовлетворять два множества **X** и **Y** для того, чтобы для некоторой прямоугольной игры имели место равенства $X = T_1(\Gamma)$ и $Y = T_2(\Gamma)$. Эта задача решена в работе Боненблуста, Карлина и Шепли [10] и в работе Гейла и Шермана [42].

Полную теорию можно найти в книгах Бохера [8] и Мак-Даффи [68] *).

Упражнения

1. Применяя методы, изложенные в этой главе, найдите все решения игр со следующими матрицами:

$$\text{а)}\ \begin{Vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 5 \\ 9 & 3 \end{Vmatrix},$$

$$\text{б)}\ \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{Vmatrix},$$

$$\text{в)}\ \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{Vmatrix}.$$

2. Найдите все решения игры, имеющей матрицу

$$\begin{Vmatrix} 6 & 4 & -6 & 19 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ -5 & -2 & 16 & -35 \end{Vmatrix}.$$

Используйте при этом понятие превосходства и примените методы, изложенные в этой главе, для матрицы порядка 3×3.

3. Покажите, что игра с матрицей

$$\begin{Vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{Vmatrix},$$

где $a > b > c > 0$, имеет единственное решение. Найдите его и цену игры. Каково будет решение, если $a > b > c$ и $c < 0$?

4. Пусть Γ_c — прямоугольная игра, имеющая матрицу

$$\begin{Vmatrix} c & c & c \\ c & 3 & 4 \\ c & 5 & 1 \end{Vmatrix}.$$

---

*) См. также [202] и [207]. (*Прим. ред.*)

При каких значениях c множество $T_1(\Gamma_c)$ будет бесконечным? При каких значениях c множество $T_2(\Gamma_c)$ будет бесконечным? Покажите, что $v(\Gamma_c) = c$ для всех c.

5. Покажите, что игра с матрицей

$$\begin{Vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{Vmatrix}$$

имеет единственное решение.

6. Покажите, что если элементы матрицы некоторой игры суть целые числа, цена игры есть рациональное число.

7. Пусть E — математическое ожидание выигрыша для прямоугольной игры Γ с матрицей порядка $m \times n$; $X^{(1)}, \ldots, X^{(r)}$ — элементы множества $T_1(\Gamma)$; Y — элемент множества $T_2(\Gamma)$; $\| \alpha_1 \ldots \alpha_r \|$ принадлежит множеству S_r. Покажите, что

$$\alpha_1 E(X^{(1)}, Y) + \ldots + \alpha_r E(X^{(r)}, Y) = E(\alpha_1 X^{(1)} + \ldots + \alpha_r X^{(r)}, Y).$$

8. Найдите все решения двухпальцевой Морра, описанной в разделе 3 главы I.

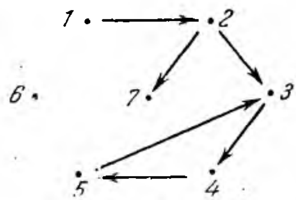

Рис. 4.

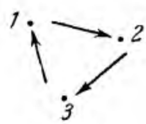

Рис. 5.

9. *Сетевая* игра определяется следующим образом: имеются n точек; некоторые пары этих точек соединены стрелками, как показано на рис. 4. Оба игрока одновременно выбирают по точке; если они выбирают одну и ту же точку или разные, но не соединенные

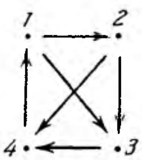

Рис. 6.

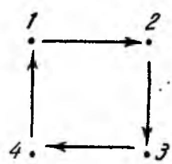

Рис. 7.

стрелкой, платеж равен нулю; если они выбирают связную пару точек, то игрок, выбравший острие стрелки, получает от своего противника 1.

Решите сетевую игру, соответствующую рис. 5.

10. Решите сетевую игру (см. предыдущий пример), соответствующую рис. 6 и рис. 7.

11. Найдите наилучшую стратегию для каждого игрока в прямоугольной игре, имеющей матрицу

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \\ 14 & 7 & -1 \end{Vmatrix}.$$

12. Покажите, что каждый игрок во всякой прямоугольной игре имеет по меньшей мере одну наилучшую стратегию.

13. Покажите, что множество наилучших стратегий данного игрока замкнуто.

ГЛАВА IV

МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЦЕНЫ ИГРЫ

В этой главе мы изложим метод приближенного решения прямоугольной игры, который позволит нам находить цену и оптимальные стратегии с какой угодно степенью точности. Затрата труда при использовании этого метода растет, грубо говоря, пропорционально числу строк и столбцов матрицы, так что для игры с очень большой матрицей этот способ значительно быстрее позволит найти решение игры, чем точный метод, описанный в главе III. Мы не будем доказывать, что указанный метод действительно приводит к приближенному решению, поскольку этот вопрос довольно специален.

Описываемый нами приближенный метод основан на следующих интуитивных соображениях. Допустим, что два человека играют ряд партий данной игры, причем ни один из них не знает оптимальной стратегии (возможно, потому, что они не знают теории игры или потому, что матрица игры слишком велика, чтобы они смогли произвести необходимые вычисления), тогда может случиться, что каждый из них решает вести себя так, как если бы он имел дело с неодушевленным предметом, а не с разумным противником, то есть играть таким образом, чтобы максимально увеличить свой выигрыш, предполагая, что «будущее будет походить на прошлое». Если известно, что сделал каждый из игроков в первой партии, то этот принцип максимизации приведет к определенной последовательности партий игры. Для каждой партии этой последовательности можно вычислить верхнюю и нижнюю границы цены игры, а также приближенную оптимальную стратегию для каждого игрока.

Не пытаясь давать подробное и точное описание этого способа в общем случае, мы объясним его лишь для некоторой игры с матрицей порядка 3×3.

Пусть дана игра с матрицей

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Обозначим возможные стратегии для P_1 через A, B и C, считая, что выбор стратегии A означает выбор первой строки; выбор стратегии B — выбор второй и т. д. Аналогично стратегии игрока P_2 (три столбца) обозначим через α, β и γ. Предположим, что в первой партии P_1 выбирает A, а P_2 выбирает α. Во второй партии P_2 знает, что P_1 в первой партии выбрал A, и, поскольку он предполагает, что P_1 будет поступать так же и в будущем, он имеет дело со следующей ситуацией:

если P_2 выберет	α	β	γ,
он получит	-1	-2	-3.

Поскольку P_2 хочет обеспечить себе максимум выигрыша, он решает снова выбрать α. Аналогично, поскольку P_1 перед началом второй партии знает, что P_2 в первой партии выбрал α, он имеет дело (в предположении, что P_2 в будущем будет поступать так же, как и раньше) со следующей ситуацией:

если P_1 выберет	A	B	C,
он получит	1	4	2.

Поскольку наибольшее из этих чисел 4, P_1 во второй партии выбирает B. Таким образом, после второй партии окажется, что P_1 выбрал один раз A и один раз B. Составим теперь таблицу (таблица 1), которая показывает, что P_2 было бы лучше выбрать β в обеих партиях: поэтому он решает в третьей партии выбрать β.

Аналогично, для P_1 мы получаем таблицу 2, которая показывает, что P_1 опять решает выбрать B.

Таблица 1

Партия	Выбор P_1	Выигрыш P_2		
		α	β	γ
1	A	—1	—2	—3
2	B	—4	0	—1
Итого . . .		—5	—2	—4

Таблица 2

Партия	Выбор P_2	Выигрыш P_1		
		A	B	C
1	α	1	4	2
2	α	1	4	2
Итого . . .		2	8	4

Теперь мы составляем таблицу 3, соответствующую первым трем партиям, в которой ожидаемые выигрыши каждого игрока складываются. Как можно видеть, в четвертой партии P_2 опять выбирает β, а P_1 опять выбирает B.

Таблица 3

Партия	Выбор P_1	Суммарный ожидаемый выигрыш P_2			Выбор P_2	Суммарный ожидаемый выигрыш P_1		
		α	β	γ		A	B	C
1	A	—1	—2	—3	α	1	4	2
2	B	—5	—2	—4	α	2	8	4
3	B	—9	—2	—5	β	4	8	7

Продолжая эту таблицу, мы получаем таблицу 4.

Таблица 4

Первые восемь партий игры

Партия	Выбор P_1	Выбор P_2	Суммарный ожидаемый выигрыш P_1			Суммарный ожидаемый выигрыш P_2		
			A	B	C	α	β	γ
1	A	α	1	4	2	—1	—2	—3
2	B	α	2	8	4	—5	—2	—4
3	B	β	4	8	7	—9	—2	—5
4	B	β	6	8	10	—13	—2	—6
5	C	β	8	8	13	—15	—5	—6
6	C	β	10	8	16	—17	—8	—6
7	C	γ	13	9	16	—19	—11	—6
8	C	γ	16	10	16	—21	—14	—6

Для следующих партий (после восьмой) наше правило в том виде, как оно сформулировано, недостаточно для нахождения следующего выбора для P_1. Действительно, максимум чисел 16, 10, 16 достигается в двух случаях, а правило не дает возможности сделать выбор между A и C. В таких случаях мы разрешаем все подобные затруднения, уславливаясь выбирать стратегию в алфавитном порядке. Так, в данном случае P_1 должен выбрать A; если его ожидаемые выигрыши были 10, 16, 16, то ему

Таблица 5

Партии от девятой до двадцатой

Партия	Выбор P_1	Выбор P_2	Суммарный ожидаемый выигрыш P_1			Суммарный ожидаемый выигрыш P_2		
			A	B	C	α	β	γ
9	A	γ	19	11	16	—22	—16	—9
10	A	γ	22	12	16	—23	—18	—12
11	A	γ	25	13	16	—24	—20	—15
12	A	γ	28	14	16	—25	—22	—18
13	A	γ	31	15	16	—26	—24	—21
14	A	γ	34	16	16	—27	—26	—24
15	A	γ	37	17	16	—28	—28	—27
16	A	γ	40	18	16	—29	—30	—30
17	A	α	41	22	18	—30	—32	—33
18	A	α	42	26	20	—31	—34	—36
19	A	α	43	30	22	—32	—36	—39
20	A	α	44	34	24	—33	—38	—42

нужно выбрать B. При этом новом условии мы можем продолжить таблицу 4 и получим таблицу 5.

Пусть $\bar{v}_i$ — максимальное из чисел в i-й строке таблицы, соответствующей выигрышу P_1.

Из таблиц 4 и 5 мы имеем:

$$\begin{array}{llll}
\bar{v}_1 = 4, & \bar{v}_6 = 16, & \bar{v}_{11} = 25, & \bar{v}_{16} = 40, \\
\bar{v}_2 = 8, & \bar{v}_7 = 16, & \bar{v}_{12} = 28, & \bar{v}_{17} = 41, \\
\bar{v}_3 = 8, & \bar{v}_8 = 16, & \bar{v}_{13} = 31, & \bar{v}_{18} = 42, \\
\bar{v}_4 = 10, & \bar{v}_9 = 19, & \bar{v}_{14} = 34, & \bar{v}_{19} = 43, \\
\bar{v}_5 = 13, & \bar{v}_{10} = 22, & \bar{v}_{15} = 37, & \bar{v}_{20} = 44.
\end{array}$$

Пусть $\underline{v}_i$ — максимальное число в i-й строке таблицы, соответствующей выигрышу P_2, но с отрицательным знаком. Таким образом, из таблиц 4 и 5 мы имеем:

$$\begin{array}{llll}
\underline{v}_1 = 1, & \underline{v}_6 = 6, & \underline{v}_{11} = 15, & \underline{v}_{16} = 29, \\
\underline{v}_2 = 2, & \underline{v}_7 = 6, & \underline{v}_{12} = 18, & \underline{v}_{17} = 30, \\
\underline{v}_3 = 2, & \underline{v}_8 = 6, & \underline{v}_{13} = 21, & \underline{v}_{18} = 31, \\
\underline{v}_4 = 2, & \underline{v}_9 = 9, & \underline{v}_{14} = 24, & \underline{v}_{19} = 32, \\
\underline{v}_5 = 5, & \underline{v}_{10} = 12, & \underline{v}_{15} = 27, & \underline{v}_{20} = 33.
\end{array}$$

Для любой игры Г можно показать, что числа $\bar{v}_i$ и $\underline{v}_i$, найденные таким способом, удовлетворяют неравенству

$$\frac{\underline{v}_i}{i} \leqslant v \leqslant \frac{\bar{v}_i}{i}$$

для всех i; здесь v — цена игры. Так, например, для нашей игры мы имеем:

$$1 = \frac{1}{1} \leqslant v \leqslant \frac{4}{1} = 4,$$

$$1 = \frac{2}{2} \leqslant v \leqslant \frac{8}{2} = 4,$$

$$\frac{2}{3} \leqslant v \leqslant \frac{8}{3},$$

$$\frac{6}{4} \leqslant v \leqslant \frac{10}{4} = \frac{5}{2},$$

$$1 = \frac{5}{5} \leqslant v \leqslant \frac{13}{5},$$

. . . .

Наиболее благоприятные из найденных таким образом неравенств:

$$v \leqslant \frac{\bar{v}_8}{8} = \frac{16}{8} = 2$$

и

$$v \geqslant \frac{\underline{v}_{16}}{16} = \frac{29}{16} = 1{,}8125.$$

Итак, мы получаем довольно хорошую апроксимацию для цены игры (которая на самом деле равна 1,85).

Можно также показать, что v есть точная нижняя граница величины $\frac{\bar{v}_i}{i}$ и точная верхняя граница величины $\frac{\underline{v}_i}{i}$. Это дает нам уверенность в том, что, проведя способ приближения достаточно далеко, мы можем найти цену игры v с какой угодно степенью точности.

Приняв во внимание число выборов каждой чистой стратегии в i ступенях вышеописанного способа приближений, мы можем также найти апроксимацию для оптимальной стратегии. Так, мы видим, что в первых восьми строках таблиц 4 и 5 P_1 выбирает стратегию A один раз, стратегию B три раза, стратегию C четыре раза; следовательно, апроксимация оптимальной стратегии для P_1 будет $\left\| \frac{1}{8} \frac{3}{8} \frac{4}{8} \right\|$. Пусть для каждого i

$$X^{(i)} = \| x_1^{(i)} x_2^{(i)} x_3^{(i)} \|$$

есть найденная таким образом стратегия игрока P_1; аналогично, пусть

$$Y^{(i)} = \| y_1^{(i)} y_2^{(i)} y_3^{(i)} \|$$

есть найденная аналогичным образом стратегия игрока P_2. Итак,

$$X^{(1)} = \| 1 \quad 0 \quad 0 \|, \qquad Y^{(1)} = \| 1 \quad 0 \quad 0 \|,$$

$$X^{(2)} = \left\| \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 0 \right\|, \qquad Y^{(2)} = \| 1 \quad 0 \quad 0 \|,$$

$$X^{(3)} = \left\| \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad 0 \right\|, \qquad Y^{(3)} = \left\| \frac{2}{3} \quad \frac{1}{3} \quad 0 \right\|,$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

$$X^{(20)} = \left\| \frac{13}{20} \quad \frac{3}{20} \quad \frac{4}{20} \right\|, \qquad Y^{(20)} = \left\| \frac{6}{20} \quad \frac{4}{20} \quad \frac{10}{20} \right\|.$$

(Можно проверить, что точные оптимальные стратегии будут

$$X^* = \left\| \frac{11}{20} \ \frac{4}{20} \ \frac{5}{20} \right\| \quad \text{и} \quad Y^* = \left\| \frac{8}{20} \ \frac{7}{20} \ \frac{5}{20} \right\| .)$$

Можно показать, что если у P_1 имеется единственная оптимальная стратегия X, то последовательность

$$X^{(1)}, \ X^{(2)}, \ \ldots, \ X^{(i)}, \ \ldots \tag{1}$$

сходится к X; аналогично, если у P_2 имеется единственная оптимальная стратегия, то соответствующая последовательность сходится к ней. Если же P_1 имеет больше чем одну оптимальную стратегию, то может случится, что последовательность (1) не сходится. Можно, однако, показать, что в любом случае всякая сходящаяся подпоследовательность последовательности (1) сходится к оптимальной стратегии для P_1.

Библиографические замечания

Описанный в этой главе способ отыскания приближенных решений прямоугольных игр был сформулирован в работе Брауна [17]. Сходимость процесса была доказана в работе Робинсона [96].

Упражнения

1. Используя способ, изложенный в этой главе, найдите с точностью до двух десятичных знаков цену игры, имеющей матрицу

$$\begin{Vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

2. Найдите цену игры, имеющей матрицу

$$\begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

3. Пусть

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

матрица игры, в которой $\|1 \quad 1\|$ — седловая точка, то есть в которой a_{11} есть минимум первой строки и максимум первого столбца. Покажите, что способ, описанный в этой главе, указывает для цены игры величину a_{11}.

4. Покажите, что для игры 2×2 с седловой точкой (расположенной не обязательно в верхнем левом углу) описанный здесь способ дает истинную цену игры.

5. Покажите описанным здесь способом, что игра с матрицей

$$\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}$$

имеет цену нуль.

ГЛАВА V

ИГРЫ В РАЗВЕРНУТОЙ ФОРМЕ*)

1. Нормальная и развернутая формы

Выше мы успешно рассмотрели решение прямоугольной игры двух лиц, то есть дали интуитивно приемлемое определение цены и оптимальных стратегий для такой игры, доказали, что решения всегда существуют, и даже показали, как их можно вычислить. Но рассуждения, к которым мы прибегали, хотя большей частью и элементарны, не всегда вполне тривиальны; и читателя, возможно, пугает задача распространения этих выводов на игры более общего вида, то есть с числом игроков >2 и такие, в которых некоторые ходы, возможно, связаны с применением случайных механизмов, игроки могут иметь по нескольку ходов каждый, и знание о ранее происшедшем может меняться от хода к ходу.

Однако положение не так уж плохо, как может показаться с первого взгляда, ибо оказывается, что задача решения игры, в которой игроки делают выборы из конечных множеств (мы будем называть такие игры *конечными*), всегда тождественна с задачей решения некоторой прямоугольной игры. Поэтому наши выводы о прямоугольных играх можно применить в более общем виде к любой игре двух лиц с нулевой суммой. Этот процесс отыскания прямоугольной игры, эквивалентной некоторой произвольной игре, называется *нормализацией*, а получающаяся прямоугольная игра называется игрой в *нормальной форме*; когда нужно провести различие между

*) В отечественной литературе игры в развернутой форме называются также позиционными играми. (*Прим. ред.*)

этими видами игр, мы будем называть произвольные игры играми *в развернутой форме.* Начнем с примера игры в развернутой форме.

Пример 5.1. Ход I. Игрок P_1 выбирает число x из множества $\{1, 2\}$.

Ход II. Игрок P_2, будучи информирован о том, какое число x было выбрано на первом ходу, в свою очередь выбирает число y из множества $\{1, 2\}$.

Ход III. Игрок P_1, будучи информирован о том, что второй игрок выбрал y, и помня, что сам он выбрал на первом ходу x, выбирает число z из множества $\{1, 2\}$.

После того как были выбраны три числа x, y и z, игрок P_2 платит игроку P_1 сумму $M(x, y, z)$, где M есть функция, определенная следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&M(1, 1, 1) = -2, && M(2, 1, 1) = 5,\\
&M(1, 1, 2) = -1, && M(2, 1, 2) = 2,\\
&M(1, 2, 1) = 3, && M(2, 2, 1) = 2,\\
&M(1, 2, 2) = -4, && M(2, 2, 2) = 6.
\end{aligned}
$$

Чтобы объяснить, как привести игру к прямоугольной форме, введем общее понятие стратегии, которое мы рассматривали до сих пор лишь для прямоугольных игр. *Стратегией* данного игрока в данной игре мы назовем полный набор указаний, которые говорят ему, как нужно поступить во всех мыслимых ситуациях или, вернее говоря, при любом мыслимом состоянии информации, которую он может иметь в любой момент партии. Так, например, одна из стратегий, которую может применять P_1 в рассматриваемой игре, состоит в том, чтобы выбирать 1 во время обоих ходов (независимо от того, что делает P_2 на втором ходу). Другая возможная стратегия для P_1 — выбирать 1 на первом ходу и затем на третьем выбирать то же число, которое выбрал P_2 на втором ходу. Возможная стратегия для P_2 — выбрать 1 на втором ходу, независимо от того, какой выбор сделал P_1 на первом ходу; другая возможная стратегия для P_2 — выбрать 1 на втором ходу, если на первом ходу было выбрано 2, и выбрать 2, если на первом ходу была выбрана единица.

Легко видеть, что у игрока P_2 в этой игре четыре стратегии, то есть как раз столько, сколько имеется способов отображения множества $\{1, 2\}$ в себя. Если мы обозначим через f_{ij} такую функцию, что

$$f_{ij}(1) = i, \quad f_{ij}(2) = j,$$

то четыре стратегии игрока P_2 суть f_{11}, f_{12}, f_{21} и f_{22}. Говоря, что P_2 применяет, например, стратегию $f_{21}(x)$, мы подразумеваем, что он решил выбрать 2 на втором ходу, если P_1 выбрал 1 на первом, и выбрать 1 на втором ходу, если P_1 выбрал 2 на первом.

С другой стороны, стратегия игрока P_1 должна указывать ему, что нужно сделать на первом и на третьем ходу. Поскольку первому ходу ничто не предшествовало, у него нет сведений, которые позволили бы ему отличать разные случаи; поэтому стратегия должна просто указывать ему, нужно ли выбрать 1 или 2. Перед третьим ходом стратегия должна сказать ему, какое z нужно выбрать для каждого возможного выбора величин x и y. Итак, стратегию игрока P_1 можно представить как систему

$$\| i_0 \| \; i_{11} \; i_{12} \; i_{21} \; i_{22} \| \; \|,$$

где i_0 — число, которое ему нужно выбрать на первом ходу, а i_{jk} — число, которое ему нужно выбрать на третьем ходу в том случае, если j было выбрано на первом ходу и k на втором (поскольку каждое i может иметь два значения, у P_1 имеется всего 32 возможные стратегии). Если говорится, что P_1 применяет, например, стратегию

$$\| 1 \; \| 2 \;\; 1 \;\; 2 \;\; 1 \| \; \|,$$

то это значит, что P_1 выбирает 1 на первом ходу; затем, если на первом ходу была выбрана 1 и на втором ходу P_2 также выбрал 1, то игроку P_1 на третьем ходу нужно выбрать 2, и аналогично для трех других возможностей для третьего хода.

В этой игре описанные нами стратегии игрока P_1 обладают некоторой избыточностью; так, второе «2» в данном примере бесполезно, так как оно означает, что если на втором ходу была выбрана 1, а на первом 2 (чего не могло быть, так как данная стратегия указывает игроку P_1, что на первом ходу нужно выбрать 1), то на третьем ходу нужно выбрать 2. (Следовательно, это «2» говорит игроку P_1, что делать в таком случае, какого не может быть, если он применяет данную стратегию!). Эту избыточность можно устранить, считая стратегией игрока P_1 систему $\| i \| i_1 \ i_2 \| \|$, где i — число, которое нужно выбрать игроку P_1 на первом ходу, а i_1 и i_2 — числа, которые ему нужно выбрать на третьем ходу, соответственно тому, выбрал ли P_2 на втором ходу 1 или 2. Итак, в этом случае мы могли бы упростить описание стратегий игрока P_1, если учесть, что он помнит свой первый ход.

Но наличие этих избыточных сведений не приносит существенного вреда, а описание стратегий для общего случая весьма усложнится, если мы будем пытаться всегда избегать их. Полный разбор этого вопроса смотрите в работе Крентеля, Мак-Кинси и Куайна [61] и в работе Дэлки [22].

Выбрать возможную стратегию для игры и затем играть согласно этой стратегии — это равносильно тому, чтобы составить все возможные решения перед началом игры. Как только каждый игрок выбрал стратегию, никаких других выборов ему не нужно делать, ибо стратегия предопределяет поведение игрока во все такие моменты игры, когда он должен был бы принимать решения, если бы он не выбрал стратегию. Выбор стратегии определяет исход игры, так что саму игру могла бы провести вычислительная машина.

Предположим, что в рассматриваемой игре игрок P_1 решает применять стратегию

$$\| 1 \ \| 2 \ 1 \ 2 \ 2 \| \ \|,$$

а игрок P_2 решает применять стратегию f_{21}. Из описания стратегии игрока P_1 мы видим, что на первом ходу он выбирает 1; из описания стратегии игрока P_2 следует, что на втором ходу он выбирает 2. Возвращаясь к стратегии игрока P_1, мы заключаем, что на третьем ходу P_1 выбирает 1. Тогда, поскольку $M(1, 2, 1)=3$, мы видим, что если игроки применяют эту пару стратегий, то игрок P_2 должен будет заплатить 3 игроку P_1. Рассуждая аналогичным образом для других возможных пар стратегий, мы можем записать матрицу стратегий (матрица 1) для прямоугольной игры, к которой приводится данная игра

Матрица 1

	f_{11}	f_{12}	f_{21}	f_{22}
‖ 1 ‖ 1 1 1 1 ‖ ‖	—2	—2	3	3
‖ 1 ‖ 1 1 1 2 ‖ ‖	—2	—2	3	3
‖ 1 ‖ 1 1 2 1 ‖ ‖	—2	—2	3	3
‖ 1 ‖ 1 1 2 2 ‖ ‖	—2	—2	3	3
‖ 1 ‖ 1 2 1 1 ‖ ‖	—2	—2	—4	—4
‖ 1 ‖ 1 2 1 2 ‖ ‖	—2	—2	—4	—4
‖ 1 ‖ 1 2 2 1 ‖ ‖	—2	—2	—4	—4
‖ 1 ‖ 1 2 2 2 ‖ ‖	—2	—2	—4	—4
‖ 1 ‖ 2 1 1 1 ‖ ‖	—1	—1	3	3
‖ 1 ‖ 2 1 1 2 ‖ ‖	—1	—1	3	3
‖ 1 ‖ 2 1 2 1 ‖ ‖	—1	—1	3	3
‖ 1 ‖ 2 1 2 2 ‖ ‖	—1	—1	3	3
‖ 1 ‖ 2 2 1 1 ‖ ‖	—1	—1	—4	—4
‖ 1 ‖ 2 2 1 2 ‖ ‖	—1	—1	—4	—4
‖ 1 ‖ 2 2 2 1 ‖ ‖	—1	—1	—4	—4
‖ 1 ‖ 2 2 2 2 ‖ ‖	—1	—1	—4	—4
‖ 2 ‖ 1 1 1 1 ‖ ‖	5	2	5	2
‖ 2 ‖ 1 1 1 2 ‖ ‖	5*	6	5*	6
‖ 2 ‖ 1 1 2 1 ‖ ‖	2	2	2	2
‖ 2 ‖ 1 1 2 2 ‖ ‖	2	6	2	6
‖ 2 ‖ 1 2 1 1 ‖ ‖	5	2	5	2
‖ 2 ‖ 1 2 1 2 ‖ ‖	5*	6	5*	6
‖ 2 ‖ 1 2 2 1 ‖ ‖	2	2	2	2
‖ 2 ‖ 1 2 2 2 ‖ ‖	2	6	2	6
‖ 2 ‖ 2 1 1 1 ‖ ‖	5	2	5	2
‖ 2 ‖ 2 1 1 2 ‖ ‖	5*	6	5*	6
‖ 2 ‖ 2 1 2 1 ‖ ‖	2	2	2	2
‖ 2 ‖ 2 1 2 2 ‖ ‖	2	6	2	6
‖ 2 ‖ 2 2 1 1 ‖ ‖	5	2	5	2
‖ 2 ‖ 2 2 1 2 ‖ ‖	5*	6	5*	6
‖ 2 ‖ 2 2 2 1 ‖ ‖	2	2	2	2
‖ 2 ‖ 2 2 2 2 ‖ ‖	2	6	2	6

Эта матрица имеет седловые точки, которые отмечены звездочками. Цена игры для P_1 равна 5. Любая из четырех стратегий

$$\|2\ \|1\ 1\ 1\ 2\|\ \|, \quad \|2\ \|1\ 2\ 1\ 2\|\ \|,$$
$$\|2\ \|2\ 1\ 1\ 2\|\ \|, \quad \|2\ \|2\ 2\ 1\ 2\|\ \|$$

является оптимальной для P_1, а любая из стратегий f_{11} или f_{21} является оптимальной для P_2. По отношению к игре в ее первоначальной форме это значит, что один из оптимальных способов игры для P_1 следующий: на первом ходу выбрать 2; на третьем ходу выбрать то же число, которое P_2 выбрал на втором. Один из оптимальных способов игры для P_2: на втором ходу выбрать 1 независимо от того, что выбрал P_1 на первом ходу. Другой оптимальный способ игры для P_2: выбрать число, отличное от того, которое выбрал P_1 на первом ходу.

2. Графическое представление

Иногда хорошо помогает графическое изображение игры. Ее можно представить посредством так называемого «дерева», то есть плоской фигуры, состоящей из узлов и конечного числа направленных вверх прямолинейных

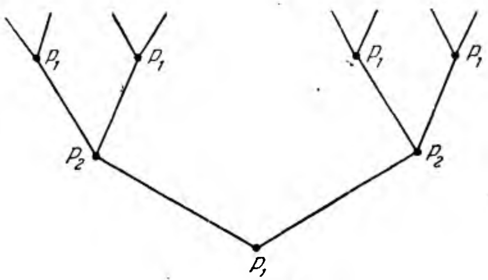

Рис. 8.

отрезков. Каждый узел соединяется только с одним узлом на нижнем уровне, а на самом низшем уровне имеется всего один узел (термин «дерево» применяется в топологии в несколько более общем смысле). Узлы изображают ходы; с ними мы связываем символы, указывающие, какой игрок делает соответствующий ход. Так, только что рассмотренная игра изображена на рис. 8. Около нижнего узла стоит символ «P_1», который указывает, что первый ход делает игрок P_1; два узла на втором уровне изображают второй ход, который делает игрок P_2; четыре узла на третьем уровне изображают третий ход, который делает P_1 и т. д. Два отрезка, идущие вверх

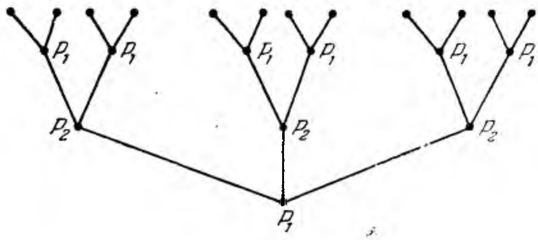

Рис. 9.

из нижнего узла, изображают два выбора, имеющиеся у игрока P_1 на первом ходу; они соответствуют 1 и 2, если идти против часовой стрелки; таким образом, прямая с положительным наклоном означает, что игрок P_1 выбирает 1, а прямая с отрицательным наклоном означает, что игрок P_1 выбирает 2. Если у P_1 на первом ходу три альтернативы, игра изображалась бы как на рис. 9.

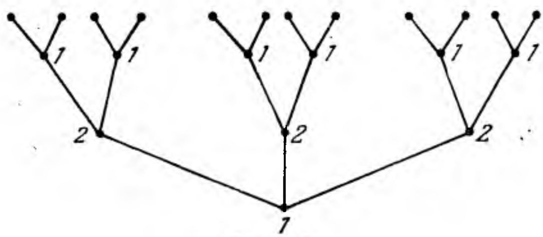

Рис. 10.

В этом графическом представлении вся партия игры изображается ломаной, идущей от нижнего узла к одному из верхних. Поскольку число таких путей равно числу верхних узлов, мы видим, что в игре, изображенной на рис. 8, восемь возможных партий, а в игре, изображенной на рис. 9, двенадцать. При изучении таких диаграмм обычно удобнее писать не «P_1» и «P_2», а просто «1» и «2». Таким образом вместо рис. 9 мы получаем рис. 10.

Игра, разобранная в примере 5.1, есть так называемая игра с «полной информацией», то есть игра, в которой каждый игрок всегда осведомлен о всей предшествующей истории игры. То, что матрица стратегий для этой игры оказалась имеющей седловую точку, не есть простая случайность; в главе VI мы покажем, что всякая игра с полной информацией обладает этим свойством.

3. Информационные множества

Следующим примером будет игра, в которой доступная игрокам информация не является полной. Игрок P_1, делая третий ход, не знает, какой выбор сделал P_2 на втором ходу, и даже не помнит, какой выбор делал он сам на первом ходу. Этот пробел памяти со стороны P_1 может осуществиться на практике, если игроком является команда из двух человек, из которых один делает первый ход, а другой — третий.

П р и м е р 5.2. Ход I. Игрок P_1 выбирает число x из множества $\{1, 2\}$.

Ход II. Игрок P_2, зная, какое число x было выбрано в первый ход, в свою очередь выбирает число y из множества $\{1, 2\}$.

Ход III. Игрок P_1, не зная о выборе числа y и забыв, какое было выбрано x, выбирает число z из множества $\{1, 2\}$.

После того как были выбраны три числа x, y и z, игрок P_2 платит игроку P_1 сумму $M(x, y, z)$, где $M(x, y, z)$ — функция, определенная в примере 5.1.

Чтобы получить графическое представление этой игры, необходимо каким-то образом указать, что, когда P_1 делает третий ход, он не знает о прошлых ходах, то есть, делая третий ход, P_1 не знает, в каком именно узле рис. 8 он находится. Это дополнительное условие учтено на рис. 11; здесь четыре узла, которые P_1 не может различить, делая третий ход, окружены пунктиром.

Однако мы несколько видоизменим это изображение, обозначив пунктирными линиями некоторое разбиение всего множества узлов (за исключением самых верхних узлов, изображающих конечные точки игры, когда никаких выборов делать не нужно). Так мы получаем рис. 12.

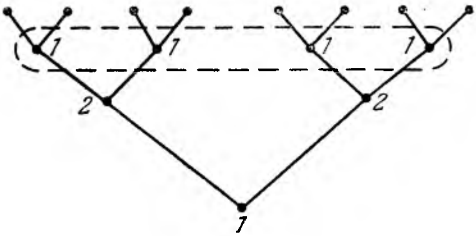

Рис. 11.

На нем самый нижний узел является в своей области единственным. Это показывает, что P_1 во время первого хода знает точно, в какой точке дерева он находится;

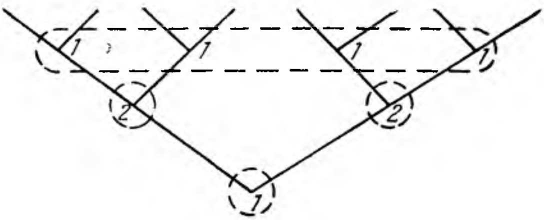

Рис. 12.

то же имеет место для двух узлов, соответствующих второму ходу. Мы будем обозначать множества, на которые разбиты узлы, *информационными множествами*.

Перейдем теперь к описанию стратегий этой игры. Очевидно, у P_2 имеются те же стратегии, что и в примере 5.1, а именно, четыре функции f_{11}, f_{12}, f_{21} и f_{22}. Но поскольку P_1 ничего не знает о предыдущем течении игры, его стратегией будет просто одна из упорядоченных пар чисел: $\| 1 \quad 1 \|$, $\| 1 \quad 2 \|$, $\| 2 \quad 1 \|$, $\| 2 \quad 2 \|$. Например, когда говорят, что P_1 применяет стратегию $\| 1 \quad 2 \|$, то это значит, что он выбирает 1 на первом ходу и 2 на втором.

Используя определение функции M, легко написать для новой игры матрицу стратегий.

Матрица 2

	f_{11}	f_{12}	f_{21}	f_{22}
$\|1\ 1\|$	-2	-2	3	3
$\|1\ 2\|$	-1	-1	-4	-4
$\|2\ 1\|$	5	2	5	2
$\|2\ 2\|$	2	6	2	6

Мы замечаем, что эта игра не имеет седловой точки. С помощью теоремы 2.9 учащийся может проверить, что цена игры равна $\frac{26}{7}$, оптимальная стратегия для P_1 — $\left\| 0 \ \frac{4}{7} \ \frac{3}{7} \right\|$ и оптимальная стратегия для P_2 — $\left\| \frac{4}{7} \ \frac{3}{7} \ 0 \ 0 \right\|$. Таким образом, в этой игре P_1 должен рассчитывать на меньший выигрыш, чем в игре, описанной в примере 5.1; это и неудивительно, так как он находится теперь в менее выгодном положении.

Замечание 5.3. В примере 5.2 матрица игры в нормальной форме имеет порядок лишь 4×4, тогда как в примере 5.1 матрица игры порядка 32×4. Вообще при уменьшении количества доступной информации уменьшается число возможных стратегий и тем самым уменьшается размер матрицы. Это иногда кажется учащимся парадоксальным, так как уменьшение информации должно было бы привести к увеличению трудностей, а не к их уменьшению. Но размер матрицы не является верным показателем трудности игры; кроме того (это почти всеобщая истина), чем меньше мы знаем, тем легче нам решиться на что-нибудь (например, глухому человеку легче выбрать жену, чем человеку с нормальным слухом).

Изменив информационные множества, можно получить другие модификации игры, описанной в примере 5.1.

Пример 5.4. Ход I. Игрок P_1 выбирает x из множества, $\{1, 2\}$.

Ход II. Игрок P_2, не зная значения x, выбирает y из множества $\{1, 2\}$.

Ход III. Игрок P_1, зная значение x и y, выбирает z из множества $\{1, 2\}$.

Платежная функция игры такая же, как в примере 5.1.

Для этой игры мы получаем диаграмму, изображенную на рис. 13; здесь мы включили два узла, соответствующие второму ходу, в одно и то же информационное множество, потому что во время второго хода игрок P_2 не знает, в какой из этих точек он находится. Мы оставляем в качестве упражнения описание стратегий этой игры и определение матрицы стратегий.

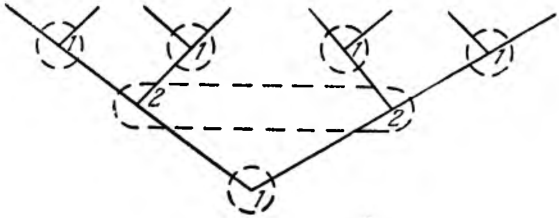

Рис. 13.

Пример 5.5. Ход I. Игрок P_1 выбирает x из множества $\{1, 2\}$.

Ход II. Игрок P_2, не зная значения x, выбирает y из множества $\{1, 2\}$.

Ход III. Игрок P_1, не зная ни значения x, ни значения y, выбирает z из множества $\{1, 2\}$.

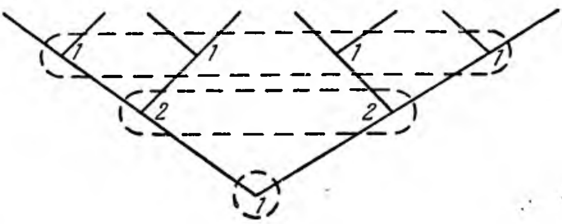

Рис. 14.

Платежная функция игры такая же, как в примере 5.1.

Для этой игры мы получаем диаграмму, изображенную на рис. 14.

В этой игре стратегия игрока P_1 состоит просто из пары чисел $\| i \ j \|$, где i — его выбор на первом ходу, а j — на третьем. Стратегией игрока P_2 является число i, представляющее его выбор на втором ходу. Итак, у P_1 имеются четыре стратегии, у P_2 — две. Матрицей стратегий является матрица 3.

Матрица 3

	1	2
$\|1 \quad 1\|$	-2	3
$\|1 \quad 2\|$	-1	-4
$\|2 \quad 1\|$	5	2
$\|2 \quad 2\|$	2	6

Можно легко проверить, что цена игры равна $\frac{26}{7}$, оптимальная стратегия для P_1 — $\left\| 0 \; 0 \; \frac{4}{7} \; \frac{3}{7} \right\|$ и оптимальная стратегия для P_2 — $\left\| \frac{4}{7} \; \frac{3}{7} \right\|$. Таким образом, оказывается, что цена этой игры такая же, как цена игры, описанной в примере 5.2; итак, мы видим, что сведения, которыми обладает P_1 в этой игре, не приносят ему пользы. Но это просто случайность, которая вызвана тем, что для определения платежной функции были взяты именно эти числа. Очевидно, вообще P_1 может быть в лучшем положении в игре такого типа, как описанная в примере 5.2, чем в такой игре, как в примере 5.5.

Может показаться, что пример 5.5 представляет крайнюю степень неведения, в каком могут оказаться игроки, ибо ни один из них ни в один момент не знает, каковы были прошлые выборы. Но это не совсем так, поскольку игрок P_1, делая третий ход, знает хотя бы то, что этому ходу предшествовали два. Нижеследующий пример показывает, что могут быть положения, когда нет даже этих сведений.

Пример 5.6. Дана игра двух лиц, в которой P_1 — один человек, а P_2 — команда из двух человек A и B. Эти три человека изолированы друг от друга в отдельных комнатах и во время игры не могут сообщаться между собой. В начале партии судья входит в комнату, в которой находится P_1, и предлагает ему выбрать число x из множества $\{1, 2\}$. Если P_1 выбирает 1, то судья идет в комнату, в которой находится A, и предлагает ему выбрать число y из множества $\{1, 2\}$; если же P_1 выбирает 2, судья идет в комнату, в которой находится B, и предлагает ему выбрать число y из множества $\{1, 2\}$. После того как было выбрано y, судья идет в комнату, в которой находится другой член команды P_2, и предлагает ему выбрать число z из множества $\{1, 2\}$. После того как выбраны три числа, P_2 платит игроку P_1 сумму $M(x, y, z)$, где M определено следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&M(1, 1, 1) = 0, \quad M(2, 1, 1) = 4,\\
&M(1, 1, 2) = 2, \quad M(2, 1, 2) = 0,\\
&M(1, 2, 1) = 6, \quad M(2, 2, 1) = 5,\\
&M(1, 2, 2) = 8, \quad M(2, 2, 2) = 6.
\end{aligned}
$$

При рассмотрении этой игры нужно иметь в виду, что когда члену команды P_2 предлагают сделать выбор, он не

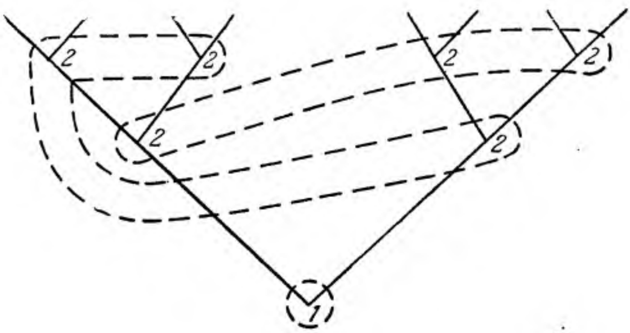

Рис. 15.

знает, делает ли он второй или третий ход партии, так как он не знает, какой выбор сделал P_1. Игра изображена на рис. 15.

У P_1 имеются две стратегии: он может выбрать либо 1, либо 2. У P_2 — 4 стратегии: A и B могут оба выбрать 1; или A может выбрать 1, а B может выбрать 2; или A может выбрать 2, а B может выбрать 1; или оба они могут выбрать 2. Мы представляем эти четыре стратегии соответственно упорядоченными парами:

$$\|1\ 1\|,\quad \|1\ 2\|,\quad \|2\ 1\|,\quad \|2\ 2\|.$$

Чтобы понять, как вычисляются платежи для различных стратегий, предположим, например, что P_1 применяет стратегию 2, а P_2 — стратегию $\|1\ 2\|$. Тогда на первом ходу P_1 выбирает $x = 2$, следовательно, судья идет сначала в комнату, в которой находится B, который выбирает $y = 2$; наконец, судья идет в комнату, в которой находится A, который выбирает $z = 1$. Следовательно, платеж будет $M(2,\ 2,\ 1) = 5$.

Матрица 4 указывает платеж для всех возможных комбинаций стратегий. Цена игры равна $\frac{12}{5}$; оптимальная стратегия для $P_1 - \left\|\frac{2}{5}\,\frac{3}{5}\right\|$, а для $P_2 - \left\|\frac{3}{5}\ 0\ \frac{2}{5}\ 0\right\|$.

Матрица 4

	$\|1\ 1\|$	$\|1\ 2\|$	$\|2\ 1\|$	$\|2\ 2\|$
1	0	2	6	8
2	4	5	0	6

4. Случайные ходы

Рассмотрим игры, в которых есть случайные ходы, то есть некоторые выборы производятся случайными механизмами, а не самими игроками. Случайные ходы имеются во многих обычных салонных играх, например в большинстве карточных игр карты сдаются случайно.

Случайные ходы могут входить в игру тремя способами: 1) изменяя платеж, 2) изменяя размер и природу множеств, из которых игроки могут делать выборы, и 3) определяя порядок, в котором игроки будут делать ходы. Мы рассмотрим примеры, поясняющие эти три варианта, и в каждом случае покажем, как описывать стратегии, чтобы привести игру к прямоугольной форме.

Пример 5.7. Ход I. Бросается монета.

Ход II. Игрок P_1, не зная, выпала ли монета гербом или решкой, выбирает число x из множества $\{1,\ 2\}$.

Ход III. Игрок P_2, не зная исхода бросания монеты, но зная, какое число x было выбрано на втором ходу, выбирает число y из множества $\{1, 2\}$. Герб мы будем изображать единицей, а решку двойкой. Тогда, если выборы за три хода были соответственно u, x, y, игроку P_1 уплачивается $M(u, x, y)$, где M есть функция, определенная в примере 5.1. (Таким образом, $M(1, 1, 1) = -2$ означает, что если монета выпадает гербом, а P_1 и P_2 оба выбирают 1, то игрок P_1 платит игроку P_2 2.)

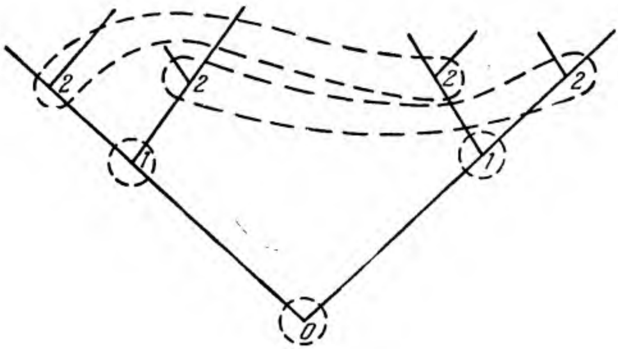

Рис. 16.

Игра представлена на рис. 16, где у нижнего узла стоит символ «О», который указывает, что этот ход определяется случаем (а не игроками 1 или 2). (Ради общности мы также заключаем этот узел в круг, как если бы это было информационное множество — хотя, конечно, случай ничего не знает.) Стратегия игрока P_1 есть функция, указывающая ему выбор 1 или 2, в зависимости от того, какой стороной упала монета. Таким образом, стратегия есть функция f_{ij} (см. пример 5.1), которая отображает множество $\{1, 2\}$ в себя. Аналогично, стратегия игрока P_2 есть функция f_{ij}, указывающая ему, какой сделать выбор в зависимости от выбора P_1 на втором ходу.

Предположим, например, что P_1 применяет стратегию f_{21}, а P_2 — стратегию f_{12}. Тогда мы должны различать два случая в зависимости от того, что показывает монета — ~~герб~~ или решку. Если герб (то есть «1»), то стратегия f_{21} указывает игроку P_1, что нужно выбрать 2, а стратегия f_{12} указывает игроку P_2, что нужно также выбрать 2; таким образом, поскольку $M(1, 2, 2) = -4$, платеж игроку P_1 равен -4. Если же монета выпадет решкой, то P_1 выберет 1 и, следовательно, P_2 выберет 1; поскольку $M(2, 1, 1) = 5$, платеж игроку P_1 будет равен 5. Мы предполагаем, что монета «правильная», то есть такая, для которой вероятность выпадения герба и решки одинакова (и равна $^1/_2$). Математическое ожидание выигрыша P_1 равно

$$(-4)\frac{1}{2} + 5\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Естественно рассматривать это математическое ожидание как платеж игроку P_1 в том случае, если выбраны эти стратегии.

Аналогичным способом мы можем вычислить платеж игроку P_1 для других пар стратегий; таким образом, мы получаем матрицу 5:

Матрица 5

	f_{11}	f_{12}	f_{21}	f_{22}
f_{11}	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
f_{12}	0	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
f_{21}	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	-1
f_{22}	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{5}{2}$	1

Матрица не имеет седловой точки. Вычисление цены и оптимальных смешанных стратегий мы оставляем в качестве упражнения.

В следующем примере перед нами простая игра, в которой число альтернатив, имеющихся у одного из игроков, зависит от случая.

Пример 5.8. Ход I. Игрок P_1 выбирает число x из множества $\{1, 2\}$.

Ход II. Выбирается число y из множества $\{1, 2\}$ посредством случайного механизма, такого, что вероятность выбора единицы равна $^1/_4$ (следовательно, вероятность выбора двойки равна $^3/_4$).

Ход III. Игрок P_2, зная значение y, но не зная x, выбирает число z из множества $\{1, 2\}$, если $y=1$, и из множества $\{1, 2, 3\}$, если $y=2$.

После того как были сделаны три хода, игрок P_2 уплачивает игроку P_1 сумму $M(x, y, z)$, где M есть функция, определенная следующим образом:

$$\begin{array}{ll} M(1, 1, 1)=2, & M(2, 1, 1)=0, \\ M(1, 1, 2)=-2, & M(2, 1, 2)=5, \\ M(1, 2, 1)=1, & M(2, 2, 1)=-1, \\ M(1, 2, 2)=0, & M(2, 2, 2)=-3, \\ M(1, 2, 3)=-2, & M(2, 2, 3)=3. \end{array}$$

(Мы не указываем значение $M(1, 1, 3)$ и $M(2, 1, 3)$, так как P_2 не может выбрать 3, если случайный механизм выбрал 1.) На рис. 17 изображена диаграмма этой игры. Здесь символами «$^1/_4$» и «$^3/_4$» обозначены две альтернативы, из которых случайный механизм делает выбор.

Задачу описания стратегий и составления матрицы стратегий мы оставляем в качестве упражнения.

В следующем примере описана игра, в которой случайный механизм определяет, какой из игроков сделает следующий ход.

Пример 5.9. Ход I. Игрок P_1 выбирает число x из множества $\{1, 2\}$.

Ход II. Выбирается число y из множества $\{1, 2\}$ посредством случайного механизма такого, что вероятность выбора единицы равна $^1/_5$ (следовательно, вероятность выбора двойки равна $^4/_5$).

Если на втором ходу выбрана единица, то на последнем ходу P_2, зная значения x и y, выбирает число z из множества $\{1, 2\}$; если же на втором ходу было выбрано 2, то последний ход делает P_1, который, зная значения x и y, выбирает число z из множества $\{1, 2\}$. После трех ходов игроку P_1 уплачивается сумма $M(x, y, z)$, где M есть функция, определенная в примере 5.1. Диаграмма этой игры представлена на рис. 18.

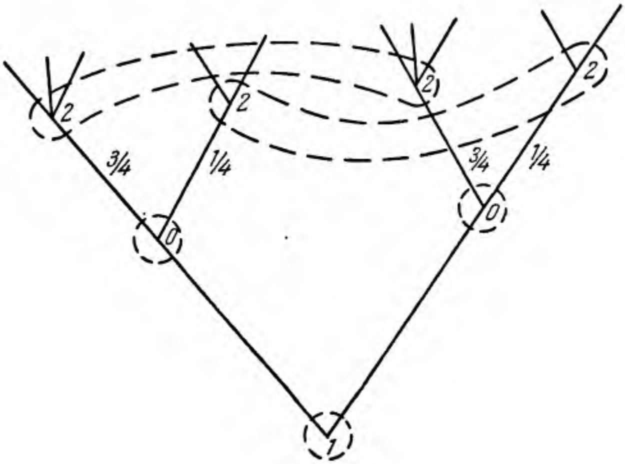

Рис. 17.

Поскольку у P_1 в этой игре имеются три возможные информационные множества и поскольку в каждом информационном множестве у него выбор из двух альтернатив, то всего у P_1 имеются $2^3 = 8$ возможных стратегий, у P_2 четыре возможные стратегии.

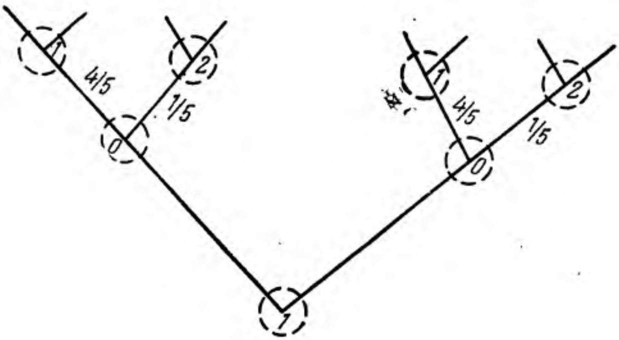

Рис. 18.

мационном множестве у него выбор из двух альтернатив, то всего у P_1 имеются $2^3 = 8$ возможных стратегий, у P_2 четыре возможные стратегии.

Задачу вычисления матрицы стратегий мы оставляем в качестве упражнения.

Поскольку эта игра с полной информацией, матрица стратегий имеет седловую точку.

5. Игры с числом игроков больше двух

До сих пор мы рассматривали лишь игры двух лиц, но, очевидно, наши замечания применимы с соответствующими видоизменениями к игре n лиц, где $n > 2$. В частности, для нее можно начертить диаграмму, вполне аналогичную описанным выше диаграммам для игр двух лиц. Введя понятие стратегии, можно привести игру n лиц к нормальной форме (хотя до сих пор мы еще не указали никакого способа «решения» таких игр в нормальной форме). Эти замечания мы поясним на следующем примере.

Пример 5.10. Первый ход заключается в том, что случайный механизм, назначающий числам 1 и 2 вероятности соответственно $^1/_3$ и $^2/_3$, выбирает число x из множества $\{1, 2\}$. Если $x = 1$, то на втором ходу игрок P_1, зная значение x, выбирает число y из множества $\{1, 2, 3\}$. Если $x = 2$, то на втором ходу игрок P_2, зная значение x, выбирает число y из множества $\{1, 2, 3\}$. Если $y = 1$, то на третьем ходу игрок P_3, зная значение y, но не зная x, выбирает число z из множества $\{1, 2\}$. Если $y \neq 1$, то на третьем ходу игрок P_4, зная значение x и зная, было ли выбрано $y = 1$ или $y \neq 1$, выбирает число z из множества $\{1, 2\}$. После того как были выбраны x, y и z, игрокам P_1, P_2, P_3 и P_4 уплачиваются соответственно суммы $M_1(x, y, z)$, $M_2(x, y, z)$, $M_3(x, y, z)$ и $M_4(x, y, z)$, где M_1, M_2, M_3 и M_4 — некоторые действительные функции. Диаграмма этой игры изображена на рис. 19.

Стратегия игрока P_1 есть одно из чисел 1, 2, 3. Такова же стратегия игрока P_2. Стратегия игрока P_3 есть 1 или 2. Стратегия игрока P_4 должна указать ему, какое значение z из множества $\{1, 2\}$ выбирать при $x = 1$ и $x = 2$. Обозначим четыре возможные стратегии для P_4 через f_{11}, f_{12}, f_{21} и f_{22}. Например, когда говорят, что P_4 применяет стратегию f_{21}, то это значит, что он выберет $z = 2$, если $x = 1$, и $z = 1$, если $x = 2$.

Чтобы понять, как вычислять элементы матрицы стратегий, предположим, что P_1 применяет стратегию 1, P_2 — стратегию 3, P_3 — стратегию 2 и P_4 — стратегию f_{21}. Как и при разборе примера 5.7, нужно рассмотреть отдельно случаи, когда $x = 1$ и когда $x = 2$.

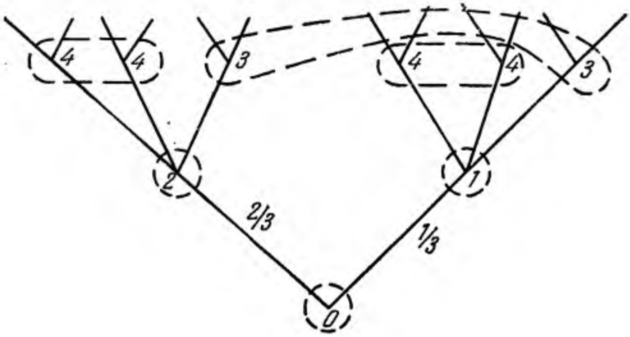

Рис. 19.

Если $x = 1$, то второй ход делает P_1, и, следовательно, $y = 1$. Тогда третий ход делает P_3, и, следовательно, $z = 2$. В этом случае платеж игроку P_i (где $i = 1, 2, 3, 4$) равен $M_i(1, 1, 2)$.

Если $x = 2$, то второй ход делает P_2, и, следовательно, $y = 3$. Тогда третий ход делает P_4, и, следовательно, $z = f_{21}(x) = f_{21}(2) = 1$. В этом случае платеж игроку P_i (для $i = 1, 2, 3, 4$) равен $M_i(2, 3, 1)$. Поскольку вероятность того, что $x = 1$, равна $^1/_3$, мы заключаем, что если игроки применяют указанные стратегии, то математическое ожидание выигрыша игрока P_i будет

$$\frac{1}{3} M_i(1, 1, 2) + \frac{2}{3} M_i(2, 3, 1).$$

6. Ограничения, налагаемые на информационные множества

Как мы видели в примере 5.6, узлы, принадлежащие данному информационному множеству, могут не находиться на одном уровне (то есть им не обязательно должно предшествовать одинаковое число узлов); поэтому можно подумать, что не следует налагать каких-либо ограничений на узлы, принадлежащие данному информационному множеству, за исключением очевидных условий,

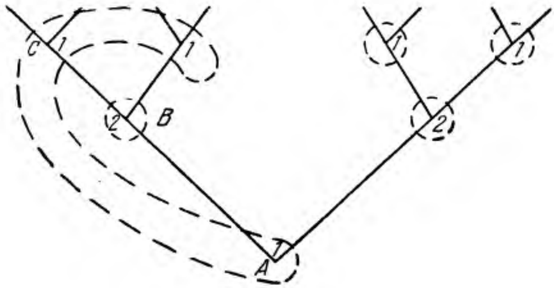

Рис. 20.

что все они должны относиться к одному игроку и предоставлять ему одно и то же число альтернатив. Однако в действительности необходимо еще дополнительное условие, чтобы игра могла осуществиться: линия игры не должна пересекать одно и то же информационное множество больше одного раза. Это значит, что никакая игра не может иметь такой диаграммы, как, например, на рис. 20, на которой из трех узлов A, B и C, составляющих партию, два узла, A и C, принадлежат одному информационному множеству. Это условие исключает также возможность такой диаграммы, как изображенная на рис. 21.

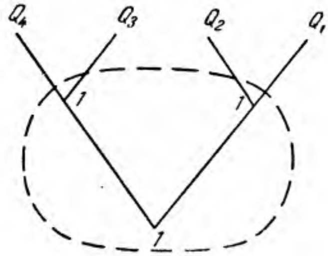

Рис. 21.

Чтобы понять, почему должно быть наложено такое условие, предположим, например, что мы пытаемся составить действительную партию игры, имеющей диаграмму, представленную на рис. 21. Очевидно, для роли игрока P_1 нужно иметь двух человек, ибо если он один, то при втором выборе он вспомнит свой первый выбор и, следовательно, будет знать, в какой точке диаграммы он находится, тогда как информационное множество указывает, что он не должен этого знать.

Допустим теперь, что P_1 состоит из двух человек A и B, которые помещены в отдельные комнаты и не могут сообщаться между собой. В начале игры судья должен пойти в одну комнату и предложить находящемуся в ней человеку выбрать число из множества $\{1, 2\}$; затем он идет в другую комнату и предлагает другому человеку выбрать число из множества $\{1, 2\}$. В результате игроку P_1 будет уплачена сумма $M(x, y)$, где x есть первое выбранное число, y — второе, а M — некоторая действительная функция, определенная на декартовом произведении множества $\{1, 2\}$ на себя.

Игрокам A и B не разрешается сообщаться между собой во время игры, но мы предположим, что перед началом игры они встретились, чтобы договориться о том, как им следует поступать. Они должны решить, выберут ли они оба 1 или 2, или A выберет 1, а B — 2, или A выберет 2, а B — 1. Игроки не знают, кого выберет судья сначала, A или B, и поэтому не знают, будет ли число, выбранное игроком A, называться «x» или «y»; причем, конечно, вовсе не обязательно будет $M(x, y) = M(y, x)$. В действительности, они даже не знают вероятности того, что судья выберет сперва A; поэтому им невозможно вычислить ожидаемый платеж в случае, если A выберет x, а B выберет y. Если α есть вероятность того, что судья выберет сперва A, то математическое ожидание выигрыша равно

$$\alpha M(x, y) + (1 - \alpha) M(y, x).$$

Можно подумать, что затруднений такого рода можно избежать, рассматривая абстрактные игры, то есть игры не людей, а каких-то машин, не имеющих памяти. В этом случае получим: если машина установлена так, чтобы выбрать правую альтернативу в изображенной выше игре, она выберет эту альтернативу оба раза и, следовательно, закончит партию в Q_1; если она установлена на выбор левой альтернативы, она обязательно закончит партию в Q_4. Следовательно,— и это является непреодолимым препятствием — узлы Q_2 и Q_3 никогда не будут достигнуты, и их можно с таким же успехом исключить из диаграммы.

Таким образом, оказывается невозможным найти реализацию игры, соответствующей рис. 21, в которой игроки знали бы ожидаемые последствия, если они поступят тем или иным образом. Поэтому мы не будем рассматривать такие диаграммы, то есть определим игру так, чтобы она не имела подобной диаграммы.

Библиографические замечания

Подробное описание игр в развернутой форме приведено в книге фон Неймана и Моргенштерна [92]. Мы в своем изложении опирались на формулировки, приведенные в работе Куна [63].

Упражнения

1. Найдите цену и оптимальные стратегии для игры, описанной в примере 5.7.

2. Определите матрицы стратегий и решения для игр, описанных в примерах 5.4 и 5.8.

3. Опишите матрицу стратегий для игры, описанной в примере 5.3. Найдите оптимальные чистые стратегии обоих игроков.

4. Начертите диаграмму игры, в которой происходят следующие ходы:

Ход I. P_1 выбирает число x из множества

$$\{1, 2, 3, 4\}.$$

Ход II. P_2, зная четное x или нечетное, выбирает число y из множества $\{1, 2\}$.

Ход III. Если $y=1$, то случайный механизм выбирает число z из множества $\{1, 2\}$ таким образом, что вероятность выбрать 1 равна $^1/_{10}$. Если $y=2$, то P_1, зная значения x и y, выбирает число z из множества $\{1, 2\}$.

Ход IV. P_1, зная значение y, но не зная x и z, выбирает число w из множества $\{1, 2\}$.

5. Сколько стратегий в тик-так-ту?

6. Найдите платежную функцию M, при которой цена игры примера 5.5 будет отличаться от цены игры примера 5.2.

7. Покажите, что иногда полезно помнить, что было сделано раньше.

8. Дана следующая игра. Ход I. Игрок P_1 выбирает x из множества $\{1, 2\}$.

Ход II. Игрок P_2, не зная значения x, выбирает число y из множества $\{1, 2\}$.

Ход III. Случайный механизм выбирает число z из множества $\{1, 2\}$ с вероятностью α для 1 и вероятностью $(1-\alpha)$ для 2.

После того, как выбраны x, y и z, игроку P_1 уплачивается сумма $M_1(x, y, z)$ и игроку P_2 уплачивается сумма $M_2(x, y, z)$. (Мы не требуем, чтобы $M_2(x, y, z)=-M_1(x, y, z)$ для всех x, y, z.) Диаграмма этой игры приведена на рис. 22.

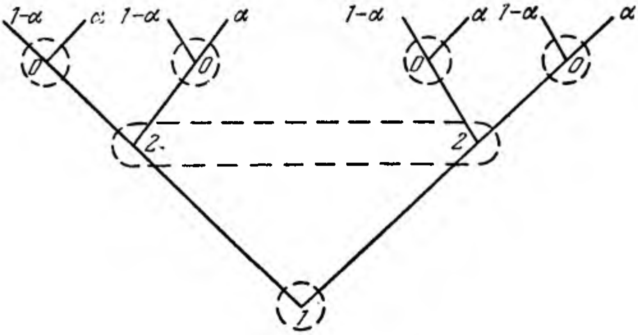

Рис. 22.

Опишите стратегии этой игры, найдите ожидаемый платеж каждому из игроков для каждой возможной пары стратегий и найдите условия, которым должны удовлетворять α, M_1 и M_2, чтобы игра была игрой с нулевой суммой (то есть чтобы сумма математических ожиданий выигрыша игроков P_1 и P_2 всегда была равна нулю).

Какие условия нужно наложить на M_1 и M_2, чтобы игра имела нулевую сумму независимо от значения α?

9. Каким условиям должны удовлетворять функции M_1, M_2, M_3 и M_4, чтобы игра, описанная в примере 5.10, была игрой с нулевой суммой (то есть чтобы для всех стратегий сумма математических ожиданий выигрышей четырех игроков была равна нулю)?

ГЛАВА VI
ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИГР В РАЗВЕРНУТОЙ ФОРМЕ

1. Общее определение конечных игр

В примерах главы V было очень полезно представлять игры в развернутой форме посредством диаграмм, которые часто оказываются понятней, чем словесные описания. Поэтому с формальной стороны удобно просто отождествлять игры с диаграммами, служащими для их изображения, что мы и будем делать в этой главе, посвященной точному определению игр в развернутой форме и доказательству важной теоремы относительно этих игр.

Итак, мы будем рассматривать конечную игру n лиц как систему, состоящую из следующих частей:

1. Дерево T (в том смысле, как было объяснено в главе V).

2. n действительных функций $F_1, \ldots, F_n$, определенных в каждой из вершин дерева T таким образом, что если t есть вершина, то $F_i(t)$ есть сумма, которая должна быть уплачена игроку P_i, если партия заканчивается в точке t.

3. Набор чисел $0, 1, \ldots, n$, таких, что каждой точке разветвления дерева T ставится в соответствие число, указывающее, какой игрок делает очередной ход в рассматриваемой точке (число 0 означает, что в этой точке применяется случайный механизм).

4. Каждой точке q разветвления дерева T, которой, согласно пункту 3, ставится в соответствие число 0, соответствует элемент $\| x_1 \ldots x_k \|$ множества S_k. Здесь k есть число альтернатив в точке q, то есть число прямых, выходящих из q.

5. Разбиения точек разветвления на непересекающиеся и полные множества (информационные множества), удовлетворяющие следующим условиям:

а) Все точки разветвления, принадлежащие данному информационному множеству, относятся, согласно пункту 3, к одному игроку.

б) Все точки разветвления, принадлежащие одному информационному множеству, имеют одинаковое число альтернатив, которые мы будем нумеровать справа налево.

в) Если (см. пункт 3) точке разветвления q поставлено в соответствие число 0, то информационное множество, в котором находится q, состоит только из этой точки.

г) Если S — партия игры, то есть ломаная линия, идущая от основания дерева к одной из его вершин, и если A — любое информационное множество, то существует самое большее одна точка разветвления, принадлежащая обоим множествам S и A.

Из примеров, приведенных в главе V, должно быть ясно, какие функции выполняют различные части этого информационного аппарата и какие причины побудили нас принять четыре вышеуказанных условия для информационных множеств. Впрочем, как легко видеть, условие в) вполне произвольно и принято лишь для определенности.

Пользуясь этим общим определением игр, мы можем теперь так определить стратегии: *стратегией* игрока P_i (для $i=1, \ldots, n$) мы называем функцию, которая определена для каждого информационного множества, соответствующего игроку P_i, и значение которой для каждого такого информационного множества представляет одну из альтернатив, имеющихся у P_i. Таким образом, стратегия указывает игроку, что нужно делать при любой возможной информации.

Рассмотрим игру, диаграмма которой приведена на рис. 23 (на этом рисунке по причинам, изложенным ниже, мы дали обозначения точкам разветвления и конечным точкам).

Здесь имеются два информационных множества для P_1: $\{q_2, q_3\}$ и $\{q_8, q_{10}, q_{11}\}$, и два информационных множества для P_2: $\{q_4, q_7\}$ и $\{q_5, q_6\}$. Следовательно, стратегией игрока P_1 является любая из четырех функций, определенных для аргументов $\{q_2, q_3\}$ и $\{q_8, q_{10}, q_{11}\}$ и принимающих значения 1 и 2. Стратегией игрока P_2 является

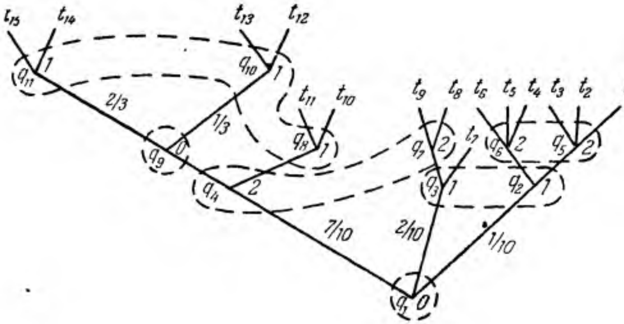

Рис. 23.

функция F, определенная для $\{q_4, q_7\}$ и $\{q_5, q_6\}$ и такая, что

$$F(\{q_4, q_7\}) \in \{1, 2\},$$
$$F(\{q_5, q_6\}) \in \{1, 2, 3\}.$$

Если мы говорим, что P_2 выбирает, например, следующую стратегию:

$$F(\{q_4, q_7\}) = 1,$$
$$F(\{q_5, q_6\}) = 2,$$

то это значит, что если во время игры P_2 находится в одной из точек q_4 или q_7, он выбирает правую альтернативу, а если в одной из точек q_5 или q_6, он выбирает среднюю.

Если игрок P_i выбирает стратегию x_i, то вектор $x = \| x_1 \ldots x_n \|$ определяет для каждой альтернативы в каждой точке разветвления некоторую вероятность — вероятность того, что партия, достигшая данной точки разветвления, будет продолжаться по указанной альтернативе. Если выбор в этой точке должен делать один из игроков, то эта вероятность будет 1 или 0, соответственно тому, указывает ли игроку его стратегия, выбрать эту альтернативу или нет.

Если выбор является случайным, то вероятность определяется согласно пункту 4 определения игры. Мы обозначаем эти вероятности через $p(x, q, i)$, где x есть упорядоченное множество стратегий, которые применяют игроки, q — точка разветвления, а i — альтернатива.

Так, предположим, что в игре, изображенной на рис. 23, P_1 применяет стратегию F:

$$F(\{q_2, q_3\}) = 1,$$
$$F(\{q_8, q_{10}, q_{11}\}) = 2,$$

а P_2 применяет стратегию G:

$$G(\{q_4, q_7\}) = 2,$$
$$G(\{q_5, q_6\}) = 3.$$

Обозначим упорядоченную пару $\|F\ G\|$ через a. Тогда легко проверить следующие соотношения:

$$p(a, q_1, 1) = \frac{1}{10}, \quad p(a, q_1, 2) = \frac{2}{10}, \quad p(a, q_1, 3) = \frac{7}{10},$$
$$p(a, q_2, 1) = p(a, q_3, 1) = 1,$$
$$p(a, q_2, 2) = p(a, q_3, 2) = 0,$$
$$p(a, q_5, 1) = p(a, q_6, 1) = 0,$$
$$p(a, q_5, 2) = p(a, q_6, 2) = 0,$$
$$p(a, q_5, 3) = p(a, q_6, 3) = 1,$$
$$p(a, q_4, 1) = p(a, q_7, 1) = 0,$$
$$p(a, q_4, 2) = p(a, q_7, 2) = 1,$$
$$p(a, q_9, 1) = \frac{1}{3}, \quad p(a, q_9, 2) = \frac{2}{3},$$
$$p(a, q_8, 1) = p(a, q_9, 1) = p(a, q_{11}, 1) = 0,$$
$$p(a, q_8, 2) = p(a, q_9, 2) = p(a, q_{11}, 2) = 1.$$

Однако для некоторых целей направление партии после выбора лучше обозначать указанием не числа альтернатив, а вершины, к которым приведет этот выбор. Так, на рис. 23 первая альтернатива для точки q_1 может привести к одной из вершин t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 и t_6, вторая альтернатива — к одной из вершин t_7, t_8 и t_9, а третья альтернатива —

к одной из вершин t_{10}, t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{14} и t_{15}. Первая альтернатива для точки q_2 может привести к t_1, t_2 или t_3, а вторая альтернатива — к t_4, t_5 или t_6.

Символом $p(x, q, t)$, где x — упорядоченное множество стратегий, q — точка разветвления и t — вершина, мы будем обозначать вероятность того, что после того, как в партии достигнута точка разветвления q, партия будет продолжаться по пути, который окончится в t. Так, для игры, изображенной на рис. 23, вместо того чтобы писать

$$p(a, q_1, 1) = \frac{1}{10},$$

мы можем написать

$$p(a, q_1, t_1) = \frac{1}{10}$$

или

$$p(a, q_1, t_2) = \frac{1}{10}$$

и т. д. Вместо того чтобы писать

$$p(a, q_4, 1) = 0,$$

мы можем написать

$$p(a, q_4, t_{10}) = 0$$

или

$$p(a, q_4, t_{11}) = 0.$$

Применяя это обозначение, мы, конечно, также получим $p(x, q, t) = 0$, когда t не является конечной точкой партии, проходящей через q. Так, например, для игры, изображенной на рис. 23, мы получим

$$p(a, q_2, t_7) = 0,$$

так как партия, проходящая через q_2, не может закончиться в t_7. Посредством этой функции мы можем также определить вероятность того, что для любых фиксированных стратегий игроков партия закончится в данной вершине. Пусть x — упорядоченное множество чистых стратегий n игроков, пусть t — вершина, соответствующая некоторой партии, и пусть $q_1, q_2, \ldots, q_r$ — точки разветвления партии, оканчивающейся в точке t. Тогда если положить

$$p(x,\ t)=\prod_{i=1}^{r} p(x,\ q_i,\ t),$$

то ясно, что $p(x,\ t)$ есть вероятность того, что партия закончится в точке t, если игроки применяют упорядоченное множество стратегий x. Использование одной и той же буквы p для обеих функций не может внести путаницы, так как в одном случае это функция двух переменных, а в другом — трех. Так, для игры, изображенной на рис. 23, используя то же множество стратегий a, как и раньше, мы имеем:

$$p(a,\ t_1)=p(a,\ q_1,\ t_1)\ p(a,\ q_2,\ t_1)\ p(a,\ q_5,\ t_1)=\frac{1}{10}\cdot 1\cdot 0=0,$$

$$p(a,\ t_2)=p(a,\ q_1,\ t_2)\ p(a,\ q_2,\ t_2)\ p(a,\ q_5,\ t_2)=\frac{1}{10}\cdot 1\cdot 0=0,$$

$$p(a,\ t_3)=p(a,\ q_1,\ t_3)\ p(a,\ q_2,\ t_3)\ p(a,\ q_5,\ t_3)=\frac{1}{10}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{10}\,.$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
&p(a,\ t_4)=0, && p(a,\ t_{10})=0,\\
&p(a,\ t_5)=0, && p(a,\ t_{11})=0,\\
&p(a,\ t_6)=0, && p(a,\ t_{12})=0,\\
&p(a,\ t_7)=\frac{2}{10}\,, && p(a,\ t_{13})=\frac{7}{30}\,,\\
&p(a,\ t_8)=0, && p(a,\ t_{14})=0,\\
&p(a,\ t_9)=0 && p(a,\ t_{15})=\frac{7}{15}\,.
\end{aligned}$$

Для проверки мы замечаем, что

$$\sum_{i=1}^{15} p(a,\ t_i)=1.$$

Используя введенные сейчас вероятности, мы можем теперь в свою очередь найти математические ожидания выигрышей игроков при различных чистых стратегиях. Пусть x — упорядоченное множество стратегий, пусть $t_1,\ \ldots,\ t_s$ — вершины диаграммы игры и пусть H_i — платежная функция для игрока P_i. Тогда математическое ожидание выигрыша игрока P_i выражается формулой

$$M_i(x) = \sum_{j=1}^{s} H_i(t_j)\, p(x, t_j).$$

Так, например, предположим, что платежная функция H_1 для первого игрока в игре, изображенной на рис. 23, такова:

$$\begin{array}{ll}
H_1(t_1) = 10, & H_1(t_8) = 30, \\
H_1(t_2) = -10, & H_1(t_9) = 20, \\
H_1(t_3) = 10, & H_1(t_{10}) = -30, \\
H_1(t_4) = 20, & H_1(t_{11}) = 0, \\
H_1(t_5) = 30, & H_1(t_{12}) = 30, \\
H_1(t_6) = 0, & H_1(t_{13}) = -30, \\
H_1(t_7) = -10, & H_1(t_{14}) = 40,
\end{array}$$

$$H_1(t_{15}) = 15.$$

Тогда для упорядоченного множества стратегий a, рассмотренного выше, мы имеем

$$M_1(a) = \sum_{j=1}^{15} H_1(t_j)\, p(a, t_j) =$$

$$= 10 \cdot \frac{1}{10} + (-10) \cdot \frac{2}{10} + (-30) \cdot \frac{7}{30} + 15 \cdot \frac{7}{15} = -1.$$

Мы показали в общем виде, что задача решения произвольной конечной игры сводится к задаче решения игры в прямоугольной форме. Мы находим эту нормализованную форму исходной игры, перечислив все возможные стратегии игроков и вычислив затем значения функций $M_1, \ldots, M_n$.

Мы имеем теперь платежные функции двух видов: 1) функции $H_1, \ldots, H_n$, которые определены на множестве вершин диаграммы игры и указывают, сколько получит каждый игрок, если игра закончится в данной вершине; 2) функции $M_1, \ldots, M_n$, которые определены на множестве упорядоченных чистых стратегий и указывают, сколько получит каждый игрок (в среднем), если игроки будут применять данные чистые стратегии. Для того чтобы различить эти два вида платежных функций, мы будем называть первые *платежными функциями партии*, а вторые — *платежными функциями стратегии*. Однако обычно будет видно из контекста, какой вид платежных функций мы имеем в виду, так что мы будем опускать обозначения «партии» и «стратегии».

Следует заметить, что правильное определение игры с нулевой суммой — это определение посредством платежных функций стратегии, а не платежных функций партии. Игра называется *игрой с нулевой суммой*, если для всякого n-мерного набора x стратегий игроков $P_1, \ldots, P_n$ мы имеем

$$\sum_{i=1}^{n} M_i(x) = 0,$$

где $M_1, \ldots, M_n$ суть платежные функции стратегии. Из упражнений 8 и 9 главы V видно, что это условие может быть выполнено в некоторых случаях и тогда, когда соответствующее уравнение для платежных функций партии не будет справедливо.

2. Игры с полной информацией. Точки равновесия

Обратимся теперь к играм особого рода — к так называемым играм с «полной информацией». Эти игры характеризуются тем, что во всякой точке в любой партии игрок, чья очередь делать ход, точно знает, какие выборы были сделаны раньше. По отношению к диаграмме игры это значит, что любое информационное множество состоит из одного элемента. Так, например, игра, изображенная на рис. 24, есть игра с полной информацией. Поскольку в диаграмме игры с полной информацией каждая пунктирная линия заключает лишь одну точку разветвления, мы можем в случае таких игр опустить совсем пунктирные линии. Таким образом, рис. 24 мы заменим на рис. 25.

Учащийся сам может распознать, какие из обычных салонных игр являются играми с полной информацией. Таковы, например, тик-так-ту, шашки, шахматы и триктрак. Напротив, большинство карточных игр (например, бридж, покер, канаста) не является играми с полной информацией, так как игроки не знают, какие карты были выданы другим игрокам.

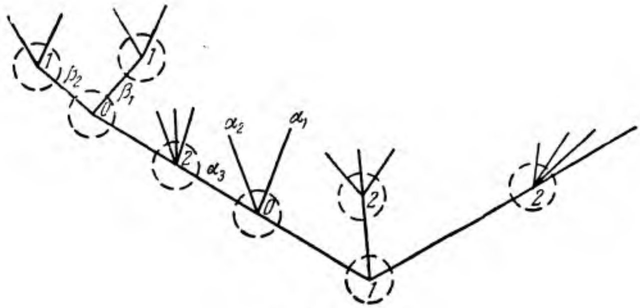

Рис. 24.

Мы покажем теперь, что матрица любой игры в нормальной форме двух лиц с нулевой суммой и полной информацией имеет седловую точку, то есть в такой игре

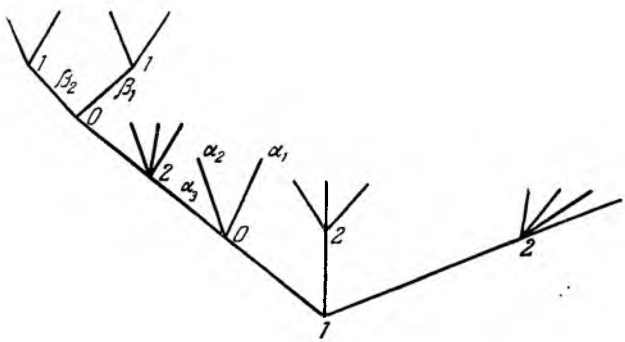

Рис. 25.

есть оптимальные чистые стратегии. Для такой простой игры, как тик-так-ту, это, конечно, известно каждому, кто когда-нибудь играл в эту игру хоть несколько раз. Каждый игрок в тик-так-ту может играть таким образом, что он выиграет (если другой игрок будет играть неправильно) или добьется ничьей. По этой причине взрослые редко играют в тик-так-ту: после того как они узнали оптимальные стратегии для этой игры, она уже не ставит перед ними умственных задач. Чтобы найти такие оптимальные стратегии игры, нужно лишь переписать все стратегии игры, написать матрицу (поставив «1», «0» и «—1» для «выигрыша», «ничьей» и «проигрыша») и выбрать седловую точку. Но число возможных стратегий для шахмат так велико, что вряд ли возможно провести такое перечисление. Поэтому, вероятно, люди будут еще долгое время увлекаться игрой в шахматы.

Вследствие того, что наше доказательство будет проводиться путем математической индукции, оказывается удобнее доказать несколько более сильное утверждение, чем упомянутое выше, — теорему, относящуюся ко всем играм двух лиц с полной информацией, а не только к играм двух лиц с нулевой суммой и полной информацией. Для формулировки этой более сильной теоремы необходимо ввести понятие точки равновесия, являющееся обобщением понятия седловой точки.

Пусть платежные функции стратегии игры n лиц суть $M_1, \ldots, M_n$, множество чистых стратегий игрока P_i (для $i = 1, \ldots, n$) есть $\mathbf{A}_i$, и $\mathbf{A}$ — декартово произведение множеств $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$. Мы говорим, что элемент $\| x_1 \ldots x_n \|$ множества $\mathbf{A}$ есть *точка равновесия*, если для каждого i и для любого элемента y множества $\mathbf{A}_i$

$$M_i(x_1, \ldots, x_n) \geqslant M_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Интуитивный смысл точки равновесия таков: это такой способ игры, что если все игроки, кроме одного, принимают его, то и оставшемуся игроку лучше всего тоже принять этот способ.

В случае игры двух лиц с нулевой суммой точка равновесия есть то же самое, что и седловая точка матрицы для игры в нормальной форме. Действительно, предположим, что $\| x_1 \; x_2 \|$ есть точка равновесия игры двух лиц с нулевой суммой и платежными функциями M_1 и M_2, и пусть $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ — стратегии, имеющиеся у игроков P_1 и P_2. Поскольку $\| x_1 \; x_2 \|$ есть точка равновесия, мы имеем для любого элемента y_1 множества $\mathbf{A}_1$ и любого элемента y_2

множества $\mathbf{A}_2$

$$M_1(x_1,\ x_2) \geqslant M_1(y_1,\ x_2),$$
$$M_2(x_1,\ x_2) \geqslant M_2(x_1,\ y_2).$$

Но поскольку игра имеет нулевую сумму, мы имеем:

$$M_2(x_1,\ x_2) = -M_1(x_1,\ x_2),$$
$$M_2(x_1,\ y_2) = -M_1(x_1,\ y_2);$$

поэтому из второго неравенства, написанного выше, мы заключаем, что

$$-M_1(x_1,\ x_2) \geqslant -M_1(x_1,\ y_2),$$

или

$$M_1(x_1,\ x_2) \leqslant M_1(x_1,\ y_2).$$

Отсюда мы получаем:

$$M_1(y_1,\ x_2) \leqslant M_1(x_1,\ x_2) \leqslant M_1(x_1,\ y_2).$$

Это значит, что точка $\| x_1\ x_2 \|$ является седловой точкой матрицы игры в нормальной форме, что и требовалось доказать. С другой стороны, легко убедиться в том, что седловая точка есть также точка равновесия.

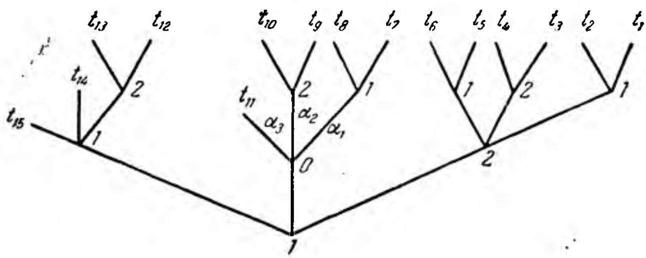

Рис. 26.

Итак, чтобы показать, что всякая игра двух лиц с нулевой суммой и полной информацией имеет седловую точку, достаточно показать, что всякая игра двух лиц с полной информацией имеет точку равновесия; это мы сейчас и сделаем.

Чтобы провести наше доказательство, удобно ввести понятие *усечения* игры с полной информацией. Мы подразумеваем под этим игру, которая получается из данной исключением первого хода. Так, предположим, что игра имеет диаграмму, показанную на рис. 26, и платежная функция для P_i (для $i=1, 2$) выражается действительной функцией H_i, определенной в точках $t_1, \ldots, t_{15}$. Тогда

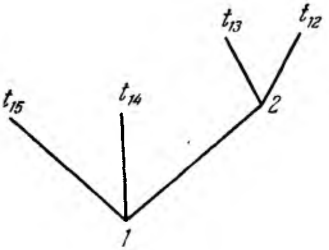

Рис. 27.

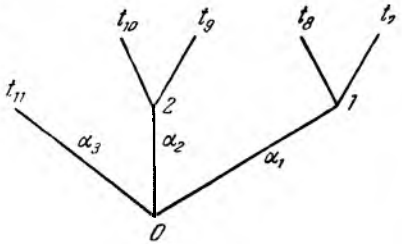

Рис. 28.

имеются три усечения этой игры, соответствующие трем альтернативам при первом ходе. Их диаграммы приведены на рис. 27, 28, 29. Платежные функции для этих усеченных игр суть первоначальные платежные функции, но их области определения соответственно ограничены. Так, платежная функция для P_i игры, изображенной на рис. 27, есть функция K_i, определенная в точках t_{12}, t_{13}, t_{14}, t_{15} и такая, что $K_i(t_j) = H_i(t_j)$ для $j = 12, 13, 14, 15$.

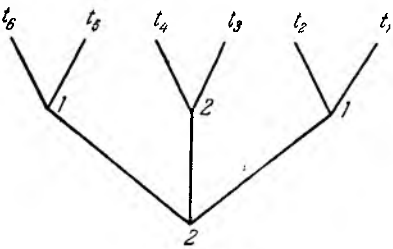

Рис. 29.

(Нужно заметить, что такой способ образования усеченных игр возможен потому, что игра является игрой с полной информацией. Если бы мы попытались определить усечения для такой игры, как, например, игра, изображенная на рис. 23, то перед нами возникла бы задача разделить какимнибудь образом информационные множества $\{q_2, q_3\}$ и $\{q_4, q_7\}$.)

Поскольку стратегия игрока в игре с полной информацией есть функция, определяющая некоторую альтернативу при каждом ходе игрока, мы можем также рассматривать усечения данной стратегии, соответствующие усечениям данной игры, *усечение стратегии* определяется только в точках разветвления соответствующего усечения игры и выбирает те же альтернативы в точках разветвления, что и первоначальная стратегия.

Теорема 6.1. *Пусть* $\mathbf{A}^{(1)}$ *и* $\mathbf{A}^{(2)}$ — *множества стратегий, имеющихся у* P_1 и P_2 *в игре двух лиц с полной информацией, и пусть* $\mathbf{A}$ — *их декартово произведение. Тогда* $\mathbf{A}$ *имеет точку равновесия.*

Доказательство. Мы докажем теорему индукцией по длине игры, то есть по числу точек разветвления в самой длинной возможной партии игры.

Для игр длиною 0 (то есть для игр, не имеющих ходов) теорема очевидна. Действительно, в этом случае каждый из игроков имеет только одну стратегию, которая состоит в том, чтобы ничего не делать, и, следовательно, декартово произведение $\mathbf{A}$ содержит лишь один элемент, который по определению является точкой равновесия.

Мы предполагаем, что теорема справедлива для всех игр длины меньше k; пусть Γ — игра длиной k. Предположим, что для первого хода имеются r альтернатив, и пусть $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_r$ — r усечений игры Γ (они существуют потому, что игра Γ есть игра с полной информацией).

Пусть для каждой из игр Γ_i $(i = 1, \ldots, r)$ $\mathbf{A}_i^{(1)}$ есть множество чистых стратегий, имеющихся у P_1, $\mathbf{A}_i^{(2)}$ — множество чистых стратегий, имеющихся у P_2, и $\mathbf{A}_i$ — декартово произведение множеств $\mathbf{A}_i^{(1)}$ и $\mathbf{A}_i^{(2)}$. Согласно условиям теоремы, $\mathbf{A}^{(1)}$ и $\mathbf{A}^{(2)}$ суть стратегии, имеющиеся у P_1 и P_2 в первоначальной игре Γ, и пусть $\mathbf{A}$ — декартово произведение множеств $\mathbf{A}^{(1)}$ и $\mathbf{A}^{(2)}$.

По условию индукции, имеется точка равновесия в каждом из множеств $\mathbf{A}_i$. Пусть $\| f_i^* \ g_i^* \|$ для каждого i есть точка равновесия множества $\mathbf{A}_i$. Тогда, обозначив платежные функции стратегий в игре Γ_i через $M_i^{(1)}$ и $M_i^{(2)}$, имеем:

$$\left.\begin{aligned} M_i^{(1)}(f_i^*, g_i^*) &\geqslant M_i^{(1)}(f_i, g_i^*), \\ M_i^{(2)}(f_i^*, g_i^*) &\geqslant M_i^{(2)}(f_i^*, g_i) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

для $i = 1, \ldots, r$, для любого f_i из $\mathbf{A}_i^{(1)}$ и для любого g_i из $\mathbf{A}_i^{(2)}$.

Мы будем различать три случая: 1) первый ход игры Г случайный, 2) первый ход игры Г делает P_1 и 3) первый ход игры Г делает P_2.

Случай 1. Если q есть точка разветвления одной из усеченных игр Γ_i, соответствующая ходу, который делает P_1, то мы полагаем

$$f^*(q) = f_i^*(q).$$

Аналогично, если q есть точка разветвления одной из усеченных игр Γ_i, соответствующая ходу игрока P_2, мы полагаем

$$g^*(q) = g_i^*(q).$$

Поскольку первый ход выбирает случай (то есть ни P_1, ни P_2), очевидно, f^* определена в любой точке разветвления игры Г, соответствующей ходу, который делает P_1, и, следовательно, есть элемент множества $\mathbf{A}^{(1)}$.

Аналогично, g^* есть элемент множества $\mathbf{A}^{(2)}$. Мы хотим показать, что точка $\| f^*g^* \|$, находящаяся, таким образом, в $\mathbf{A}$, есть точка равновесия множества $\mathbf{A}$.

Пусть альтернативам при первом ходе назначены вероятности $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, так что $\alpha_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, r)$ и $\sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i = 1$. Пусть $M^{(1)}$ и $M^{(2)}$ — платежные функции стратегий в игре Г соответственно для P_1 и P_2. Тогда очевидно, что если f и g — любые стратегии игроков P_1 и P_2 в игре Г и если f_i и g_i $(i = 1, \ldots, n)$ — усечения этих стратегий для усеченной игры Γ_i, то

$$M^{(1)}(f, g) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i M_i^{(1)}(f_i, g_i),$$

$$M^{(2)}(f, g) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i M_i^{(2)}(f_i, g_i).$$

В частности, поскольку стратегии $f_1^*, \ldots, f_r^*$ суть усечения стратегии f^* и $g_1^*, \ldots, g_r^*$ суть усечения стратегии g^*, мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} M^{(1)}(f, g^*) &= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i M_i^{(1)}(f_i, g_i^*), \\ M^{(2)}(f^*, g) &= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i M_i^{(2)}(f_i^*, g_i), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

и

$$\left.\begin{aligned} M^{(1)}(f^*, g^*) &= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i M_i^{(1)}(f_i^*, g_i^*), \\ M^{(2)}(f^*, g^*) &= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i M_i^{(2)}(f_i^*, g_i^*). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Из неравенств (1), с учетом неотрицательности всех $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, выводим:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{r} \alpha_i M_i^{(1)}(f_i^*, g_i^*) &\geqslant \sum_{i=1}^{r} \alpha_i M_i^{(1)}(f_i, g_i^*), \\ \sum_{i=1}^{r} \alpha_i M_i^{(2)}(f_i^*, g_i^*) &\geqslant \sum_{i=1}^{r} \alpha_i M_i^{(2)}(f_i^*, g_i). \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Подставляя (2) и (3) в (4), получаем:

$$M^{(1)}(f^*, g^*) \geqslant M^{(1)}(f, g^*),$$
$$M^{(2)}(f^*, g^*) \geqslant M^{(2)}(f^*, g),$$

так что пара $\| f^* g^* \|$ действительно есть точка равновесия игры Γ, что и требовалось доказать.

Случай 2. В этом случае первый ход q_0 игры Γ делает P_1. Множество чисел

$$\{M_1^{(1)}(f_1^*, g_1^*), M_2^{(1)}(f_2^*, g_2^*), \ldots, M_r^{(1)}(f_r^*, g_r^*)\}$$

конечно и, следовательно, имеет максимум. Пусть целое число μ таково, что

$$M_\mu^{(1)}(f_\mu^*, g_\mu^*) = \max_i M_i^{(1)}(f_i^*, g_i^*). \qquad (5)$$

Определим функцию f^*, положив

$$f^*(q_0) = \mu, \qquad (6)$$

а если q — точка одной из усеченных игр Γ_i, соответствующая ходу, который делает P_1, то

$$f^*(q) = f_i^*(q).$$

Мы определяем функцию g^* точно так же, как в первом случае, то есть если q — точка одной из усеченных игр Γ_i, соответствующая ходу, который делает P_2, то мы полагаем

$$g^*(q) = g_i^*(q).$$

Очевидно, f^* и g^* суть стратегии соответственно для P_1 и P_2 в игре Γ. Мы хотим показать, что $\| f^* g^* \|$ есть точка равновесия множества **А**. Из равенства (6) мы видим, что если g есть любая стратегия игрока P_2 в Γ и если g_μ есть ее усечение для игры Γ_μ, то

$$M^{(1)}(f^*, g) = M_\mu^{(1)}(f_\mu^*, g_\mu) \tag{7}$$

и

$$M^{(2)}(f^*, g) = M_\mu^{(2)}, (f_\mu^*, g_\mu). \tag{8}$$

Из равенств (7) и (8), поскольку g_μ^* есть усечение стратегии g^* для игры Γ_μ, мы получаем, в частности,

$$M^{(1)}(f^*, g^*) = M_\mu^{(1)}(f_\mu^*, g_\mu^*) \tag{9}$$

и

$$M^{(2)}(f^*, g^*) = M_\mu^{(2)}(f_\mu^*, g_\mu^*). \tag{10}$$

Итак, если g есть любая стратегия игрока P_2 в Γ и если g_μ есть ее усечение для игры Γ_μ, то мы видим из равенства (10), из второго неравенства (1) и из равенства (8), что

$$M^{(2)}(f^*, g^*) = M_\mu^{(2)}(f_\mu^*, g_\mu^*) \geqslant M_\mu^{(2)}(f_\mu^*, g_\mu) = M^{(2)}(f^*, g). \tag{11}$$

Пусть теперь f — любая стратегия игрока P_1 в Γ. Предположим, что f выбирает i-ю альтернативу на первом ходу, то есть

$$f(q_0) = i.$$

Пусть f_i — усечение стратегии f для Γ_i. Тогда мы видим, что если g есть любая стратегия игрока P_2 в Γ и g_i есть ее усечение для игры Γ_i, то

$$M^{(1)}(f, g) = M_i^{(1)}(f_i, g_i),$$

в частности,

$$M^{(1)}(f, g^*) = M_i^{(1)}(f_i, g_i^*). \tag{12}$$

Из равенства (5) мы имеем:

$$M_{\mu}^{(1)}(f_{\mu}^{*},\ g_{\mu}^{*}) \geqslant M_{i}^{(1)}(f_{i}^{*},\ g_{i}^{*}). \qquad (13)$$

Из (9), (13), первого неравенства (1) и из (12) мы заключаем, что

$$M^{(1)}(f^{*},\ g^{*}) = M_{\mu}^{(1)}(f_{\mu}^{*},\ g_{\mu}^{*}) \geqslant M_{i}^{(1)}(f_{i}^{*},\ g_{i}^{*}) \geqslant$$
$$\geqslant M_{i}^{(1)}(f_{i},\ g_{i}^{*}) = M^{(1)}(f,\ g^{*}). \qquad (14)$$

Из (11) и (14) мы видим, что $\| f^{*}g^{*} \|$ есть точка равновесия игры Г, что и требовалось доказать.

Случай 3 аналогичен случаю 2.

Теорема доказана.

Следствие 6.2. Матрица любой игры в нормальной форме двух лиц с нулевой суммой и полной информацией имеет седловую точку.

Доказательство следует из теоремы 6.1, поскольку, как было указано выше, точка равновесия игры двух лиц с нулевой суммой является седловой точкой.

Замечание 6.3. Теорему 6.1 можно столь же легко доказать для игр n лиц, но обозначения будут несколько сложнее. Это расширение теоремы мы оставляем в качестве упражнения.

Мы определили точки равновесия только среди множеств чистых стратегий. Однако можно, очевидно, определить точки равновесия также среди смешанных стратегий. Действительно, можно доказать, что всякая игра n лиц имеет точку равновесия в множестве смешанных стратегий. Этому факту большое значение придают те, кто лелеет надежду построить всю теорию рационального способа игры в играх n лиц на понятии точки равновесия. Не принимая полностью эту точку зрения, мы можем, по крайней мере, сделать следующее замечание. Когда группа лиц часто и в течение долгого времени играет в некоторую игру, они иногда приобретают привычку выбирать точку равновесия. Если кто-нибудь играет в эту игру с членами данной группы, самое лучшее для него — самому выбрать точку равновесия. Таким образом, точка равновесия представляет, так сказать, принятую норму поведения для группы: нарушающий соглашение рискует проиграть, если ему не удастся убедить и других нарушить соглашение.

3. Игры с идеальной памятью и стратегии поведения

Интересным и полезным обобщением игр с полной информацией является понятие игр с *идеальной памятью.* Игрой с идеальной памятью мы называем игру, в которой каждый из игроков всегда помнит все, что он делал или знал во время каждого из своих ходов. Таким образом, всякая игра двух лиц, в которой могут играть лишь два человека (а не команды) является игрой с идеальной памятью; например, rummy есть игра с идеальной памятью, а бридж нет, потому что в бридже каждый игрок — это команда из двух человек, и ни один из них не знает, какие карты были сданы другому.

Это понятие игры с идеальной памятью можно определить точно через информационные множества игры. Игра с идеальной памятью — это игра, удовлетворяющая следующему условию: пусть P и Q — любые два хода, которые делает один игрок, и такие, что в некоторой партии игры ход P предшествует ходу Q; $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ — информационные множества, содержащие соответственно P и Q; каждая точка множества $\mathbf{U}$ дает k альтернатив; $\mathbf{U}_i$ $(i=1, \ldots, k)$ — множество всех узлов дерева (то есть ходов), которых можно достигнуть, выбрав i-ю альтернативу в некоторой точке множества $\mathbf{U}$; тогда для любого i мы имеем $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{U}_i$.

Обратимся теперь к понятию стратегии поведения. Очевидно, выбор смешанной стратегии равнозначен применению случайного механизма для того, чтобы выбрать чистую стратегию, то есть решить, что делать на каждом ходу игры. Подобно этому можно применять случайный механизм на каждом ходу, чтобы решить, какую альтернативу выбрать на этом ходу. Такая система игры называется *стратегией поведения.* В широком смысле стратегия поведения данного игрока есть функция, определенная на классе его информационных множеств, которая назначает каждому информационному множеству $\mathbf{U}$ элемент множества $\mathbf{S}_r$, где r есть число альтернатив, которое дает $\mathbf{U}$. Очевидно, по данной стратегии поведения одного игрока и по данной чистой или смешанной стратегии или стратегии поведения другого игрока можно вычислить ожидаемый выигрыш каждого игрока.

Рассмотрим, например, игру, диаграмма которой изображена на рис. 30; здесь цифрами у вершин дерева мы обозначили платеж первому игроку при различных возможных исходах. Стратегия поведения для первого игрока есть функция, определенная на $\{U_1, U_2, U_3\}$, элементы

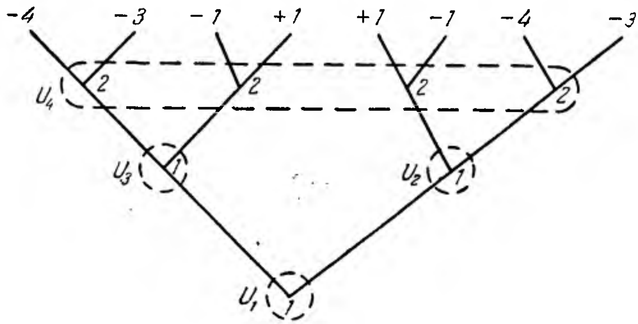

Рис. 30.

которой принадлежат множеству S_2 (так как в каждом из этих информационных множеств можно выбрать одну из двух альтернатив). С другой стороны, стратегия поведения для P_2 есть функция, определенная только на U_4, со значением в S_2. Итак, стратегия поведения для P_2 в этой игре по существу — такая же, как и смешанная стратегия; это, очевидно, всегда имеет место, когда у игрока лишь одно информационное множество.

Теперь предположим, что P_1 применяет стратегию поведения f такую, что

$$f(U_1) = \| \alpha_1 \ \ 1 - \alpha_1 \|,$$
$$f(U_2) = \| \alpha_2 \ \ 1 - \alpha_2 \|,$$
$$f(U_3) = \| \alpha_3 \ \ 1 - \alpha_3 \|,$$

а P_2 применяют стратегию поведения g такую, что

$$g(U_4) = \| \beta \ \ 1 - \beta \|.$$

Тогда математическое ожидание выигрыша игрока P_1 $E(f, g)$, или (как мы будем иногда писать) $E(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta)$

выражается формулой

$$\begin{aligned} E(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta) = & -4\alpha_1\alpha_3\beta - 3\alpha_1\alpha_3(1-\beta) - \\ & -\alpha_1(1-\alpha_3)\beta + \alpha_1(1-\alpha_3)(1-\beta) + \\ & +(1-\alpha_1)\alpha_2\beta - \\ & -(1-\alpha_1)\alpha_2(1-\beta) - 4(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\beta - \\ & -3(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\beta) = \\ & = \alpha_1\alpha_3\beta - 3\alpha_1\alpha_2\beta - 4\alpha_1\alpha_3 - 2\alpha_1\alpha_2 - \\ & -\alpha_1\beta + 3\alpha_2\beta + 4\alpha_1 + 2\alpha_2 - \beta - 3. \end{aligned}$$

Интуитивно очевидно и нетрудно доказать формально, что, применяя смешанные стратегии, игрок поступает по крайней мере не хуже, чем в случае применения стратегий поведения; но легко построить игры, в которых игроку лучше применять смешанные стратегии, чем любую стратегию поведения. С другой стороны, можно показать, что игра с идеальной памятью всегда имеет оптимальные стратегии поведения; если E есть математическое ожидание выигрыша для игры с идеальной памятью, то имеется стратегия поведения f для P_1 и стратегия поведения g для P_2 такие, что если α и β — любые смешанные стратегии (или любые стратегии поведения) соответственно для P_1 и P_2, то

$$E(\alpha, g) \leqslant E(f, g) \leqslant E(f, \beta).$$

(В исторических и библиографических замечаниях в конце этой главы указано, где можно найти доказательство этой теоремы.)

Пример 6.4. Рассмотрим игру, диаграмма которой приведена на рис. 30. Поскольку это игра с идеальной памятью, очевидно, имеются оптимальные стратегии поведения для обоих игроков. Как и раньше, мы имеем:

$$\begin{aligned} E(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta) = \alpha_1\alpha_3\beta - 3\alpha_1\alpha_2\beta - 4\alpha_1\alpha_3 - 2\alpha_1\alpha_2 - \\ -\alpha_1\beta + 3\alpha_2\beta + 4\alpha_1 + 2\alpha_2 - \beta - 3. \end{aligned}$$

Коэффициент при α_3 в этом уравнении равен $(\alpha_1\beta - 4\alpha_1) = \alpha_1(\beta - 4)$; так как он никогда не бывает положительным, то, очевидно, игрок P_1, поскольку он хочет увеличить $E(\alpha_1, \alpha_2\, \alpha_3; \beta)$, должен взять

$$\alpha_3 = 0.$$

Коэффициент при α_2 равен

$$-3\alpha_1\beta - 2\alpha_1 + 3\beta + 2 = (3\beta + 2)\,(-\alpha_1 + 1)$$

и никогда не может быть отрицательным, поэтому игроку P_1 лучше всего взять

$$\alpha_2 = 1.$$

Поскольку, наконец,

$$E(\alpha_1, 1, 0; \beta) = -4\alpha_1\beta + 2\alpha_1 + 2\beta - 1 = -(2\alpha_1 - 1)\,(2\beta - 1),$$

мы заключаем, что для P_1 лучше всего взять

$$\alpha_1 = \frac{1}{2},$$

и подобно этому для игрока P_2 лучший выход — взять

$$\beta = \frac{1}{2}.$$

Итак, оптимальная система игры для P_1 — бросить монету, чтобы решить, какую альтернативу выбрать в U_1, выбирать всегда левую альтернативу в U_2 и выбирать всегда правую альтернативу в U_3.

Замечание 6.5. Следует заметить, что вообще число параметров, которые нужно определить при вычислении оптимальных стратегий поведения, гораздо меньше, чем число параметров, связанных с вычислением оптимальных смешанных стратегий. Так, в примере 6.4 при вычислении оптимальной стратегии поведения для P_1 нам нужно было иметь дело лишь с тремя параметрами. С другой стороны, поскольку игрок P_1 в этой игре имеет восемь чистых стратегий, смешанная стратегия есть элемент множества S_8 и, следовательно, вычисление оптимальных смешанных стратегий связано с семью независимыми параметрами.

Однако это преимущество стратегии поведения, по крайней мере частично, компенсируется тем, что математическое ожидание обычно удобнее выражать через смешанные стратегии.

Библиографические замечания

Данное выше формальное определение игр в развернутой форме весьма сходно с определением, которое приведено в работе Куна [63]. Там же приведено доказательство теоремы 6.1. Понятие точки равновесия было введено в работе Нэша [85]. Он же дал доказательство того, что во всякой игре n лиц среди смешанных стратегий имеется точка равновесия.

Доказательство того, что игра с идеальной памятью имеет оптимальные стратегии поведения, можно найти у Куна [63].

Упражнения

1. Сформулируйте и докажите обобщение теоремы 6.1 для игры n лиц.

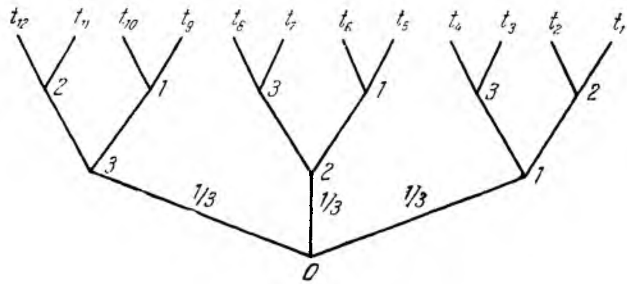

Рис. 31.

2. Найдите точки равновесия (всего восемь точек) для игры с полной информацией, диаграмма которой изображена на рис. 31, а платежные функции приведены в таблице 1.

Таблица 1

t	$H_1(t)$	$H_2(t)$	$H_3(t)$	t	$H_1(t)$	$H_2(t)$	$H_3(t)$
t_1	1	5	3	t_7	7	3	11
t_2	2	6	4	t_8	8	4	12
t_3	3	7	1	t_9	9	11	5
t_4	4	8	2	t_{10}	10	12	6
t_5	5	1	9	t_{11}	11	9	7
t_6	6	2	10	t_{12}	12	10	8

3. Покажите, что в игре двух лиц с нулевой суммой седловая точка является также точкой равновесия.

4. Определите точку равновесия для множества n-мерных векторов смешанных стратегий нормализованной игры n лиц.

5. Используя понятие точки равновесия для смешанных стратегий, определенное в упражнении 4, найдите точку равновесия для прямоугольной игры двух лиц, у которой платежные матрицы первого и второго игрока такие:

$$\begin{Vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 8 \end{Vmatrix}.$$

6. Покажите, что всякая пара смешанных стратегий есть точка равновесия для игры, имеющей платежные матрицы

$$\begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

7. Найдите платежную функцию для игры с нулевой суммой, диаграмма которой изображена на рис. 32 и у которой нет седловой точки (в чистых стратегиях).

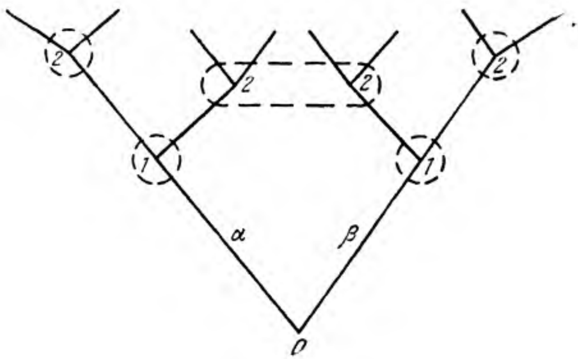

Рис. 32.

8. Найдите оптимальные стратегии поведения для игры с такой же диаграммой, как на рис. 30, но в которой платежи, считая слева направо, такие:

$$-10,\ -9,\ -1,\ +1,\ +3,\ -2,\ -10,\ -9$$

вместо

$$-4,\ \ -3,\ -1,\ +1,\ +1,\ -1,\ -4,\ -3.$$

9. Постройте пример игры, не имеющей оптимальной стратегии поведения для P_1.

10. Имеются три одинаковые колоды из n карт; каждый набор карт обозначен положительными числами $x_1, \ldots, x_n$. Каждый из

двух игроков держит одну колоду, а третья положена вниз лицом. Игра имеет три этапа, состоящие в следующем:

1. Верхняя карта третьей колоды переворачивается вверх лицом.

2. Игроки выбирают одновременно по одной карте из своих колод.

3. Игрок, положивший старшую карту, выигрывает у своего противника стоимость перевернутой карты из колоды (если они кладут карты с одинаковым номером, то никто не платит). Игра, очевидно, имеет цену нуль, так как она симметрична.

Постройте диаграмму этой игры для $n = 2$ и покажите, что в этом случае существуют оптимальные чистые стратегии. Покажите, кроме того, что имеются чистые стратегии для $n = 3$, если $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ и $x_3 = 3$. Найдите оптимальные стратегии для $n=3$, если $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ и $x_3 = 4$.

ГЛАВА VII

ИГРЫ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТРАТЕГИЙ

До сих пор мы ограничивались рассмотрением конечных игр. Однако в некоторых практически важных ситуациях, которые удобно изучать с точки зрения теории игр, участники производят выборы из бесконечных множеств. Так, предположим, например, что предприниматель сталкивается с вопросом, какой величины делать кусок мыла, который он намеревается продать за десять центов. Ему хотелось бы сделать его достаточно большим, чтобы быть в состоянии успешно соревноваться с другими предпринимателями и, таким образом, продать много кусков, но, конечно, он не хочет делать его столь большим, чтобы терпеть убыток на каждом проданном куске. Поскольку он должен стремиться как-то угадывать действия других предпринимателей, интересы которых противоположны его интересам, получается нечто подобное игре. А поскольку кусок мыла может иметь бесконечное число весов (или такое большое конечное число, что его удобно рассматривать как бесконечное), мы сталкиваемся с игроподобной ситуацией, в которой игроки производят выборы из бесконечных множеств. Поэтому представляется полезным расширить наше понятие игры так, чтобы включить также *бесконечные* игры, то есть игры, в которых некоторые из выборов игроки совершают из бесконечных множеств. Однако мы их будем разбирать далеко не в такой общей форме, в какой мы рассматривали конечные игры. Во-первых, мы будем рассматривать лишь игры с одним ходом для каждого игрока и такие, что ни один из игроков не получает информации о выборе другого. Таким образом, мы будем иметь дело лишь с играми, в которых, как в прямоугольных играх, определенных в главе I, игрок P_1 выбирает элемент x из множества **A**, а игрок P_2 выбирает элемент y из множества **B**. Кроме того, как и для прямоугольных игр, мы предположим, что имеется действительная функция M двух переменных, такая, что если игрок P_1 выбирает x, а игрок P_2 выбирает y, то игрок P_2 платит игроку P_1 сумму $M(x, y)$. Итак, мы обобщаем понятие прямоугольных игр только в том отношении, что допускаем бесконечные множества **A** и **B**.

Наше внимание будет почти исключительно ограничено случаем, когда оба множества **A** и **B** суть замкнутые интервалы $[0, 1]$; мы будем называть такие игры *непрерывными*. Это название происходит оттого, что замкнутый интервал (точек или действительных чисел) иногда называют континуумом, а не оттого, что на функцию M налагаются какие-либо свойства непрерывности. Следует заметить, что это ограничение для множеств **A** и **B** не так существенно, как может показаться с первого взгляда: если **A** и **B** — любые замкнутые интервалы, то простым переименованием элементов множеств **A** и **B** мы получим игру, в которой выборы совершаются из замкнутого интервала $[0, 1]$. Итак, непрерывной игрой (или игрой, которая может быть приведена к непрерывной игре) называется игра, подобная прямоугольной, но в которой игроки делают выборы из конечных замкнутых интервалов.

Пример 7.1. Рассмотрим, например, игру, в которой P_1 выбирает число x из интервала $[0, 1]$, а игрок P_2 независимо от него выбирает число y из того же интервала и в которой платеж игроку P_1 равен

$$M(x, y) = 2x^2 - y^2.$$

Эта игра по существу так проста, что мы можем сразу узнать оптимальные стратегии игроков: P_1, желая обеспечить максимум функции $M(x, y)$, выберет $x = 1$, а P_2, чтобы обеспечить минимум функции $M(x, y)$, также выберет $y = 1$; тогда платеж будет равен 1.

Пример 7.2. В качестве примера немного более сложной непрерывной игры рассмотрим следующую ситуацию: некий полковник, назовем его Блотто, хочет атаковать две равноценные позиции A и B, послав часть x своего полка к A, а остальную часть $(1-x)$ — к B. Его противник, защитник этих позиций, имеет в своем распоряжении лишь часть полка α, где $0 < \alpha < 1$, которую ему нужно разделить между позициями A и B. Допустим, что защитник выделяет долю y своих сил на A и $(1-y)$ на B, так что обороняющие силы равны соответственно αy и $\alpha(1-y)$ полка. Допустим, что все схватки смертельны, и обе стороны потеряли одинаковое число людей — число, равное численности меньшего отряда, и позиции в результате захватывает больший отряд. Для каждой позиции выигрышем победителя считается сама позиция (оцениваемая в один полк) плюс число уцелевших солдат; если никто не захватил позицию, выигрыши равны нулю. Следовательно, мы можем записать выигрыши полковника Блотто таким образом:

$$M(x, y) = \operatorname{sgn}[x - \alpha y] + x - \alpha y + \\ + \operatorname{sgn}[1 - x - \alpha(1 - y)] + 1 - x - \alpha(1 - y),$$

где $\operatorname{sgn} z$ определяется так:

$$\operatorname{sgn} z = \begin{cases} -1, & \text{если } z < 0, \\ 0, & \text{если } z = 0, \\ 1, & \text{если } z > 0. \end{cases}$$

Возвращаясь к исследованию задачи в общем виде, мы рассмотрим теперь игру, имеющую платежную функцию M. Пусть существуют

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} \min_{0 \leqslant y \leqslant 1} M(x, y) = v_1$$

и

$$\min_{0 \leqslant y \leqslant 1} \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} M(x, y) = v_2.$$

Тогда, рассуждая, как в главе I, мы видим, что P_1 может сделать выбор, который обеспечит ему получение по меньшей мере v_1, а P_2 может позаботиться о том, чтобы P_1 получил не больше v_2. Если $v_1 = v_2$, то на основании теоремы 1.5 мы видим, что M имеет седловую точку $\| x_0 y_0 \|$ и

$$M(x_0, y_0) = v_1 = v_2.$$

В этом случае естественно назвать x_0 и y_0 оптимальными способами игры для P_1 и P_2, а v_1 (и, следовательно, v_2) ценой игры. Так, в примере 7.1 мы имели:

$$M(x, y) = 2x^2 - y^2.$$

Эта функция имеет седловую точку $\|1 \ 1\|$; отсюда

$$M(1, 1) = v_1 = v_2 = 1.$$

Напротив, в примере 7.2, как можно показать, седловой точки нет.

Нам остались два более трудных случая: 1) случай, когда v_1 и v_2 не существуют, и 2) случай, когда обе эти величины существуют, но не одинаковы. Второй случай будет рассмотрен в главе X после того, как в главах VIII и IX мы введем некоторые необходимые чисто математические понятия. Что касается первого случая, то мы ограничимся тем, что покажем возможность такой ситуации.

Часто, когда v_1 и v_2 не существуют, мы не знаем, как определить цену игры или оптимальные стратегии для обоих игроков.

Пример 7.3. Платежная функция непрерывной игры определена следующим образом:

$$M(x, y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}, \text{ если } x \neq 0 \text{ и } y \neq 0,$$

$$M(0, y) = -\frac{1}{y}, \text{ если } y \neq 0,$$

$$M(x, 0) = \frac{1}{x}, \text{ если } x \neq 0,$$

$$M(0, 0) = 0.$$

Очевидно, игроку P_1 не следует всегда выбирать 0, ибо тогда P_2 может выиграть большие суммы, беря для y положительные малые числа. Далее, игроку P_1 не следует выбирать все время одно и то же число, ибо тогда P_2 может выиграть, выбрав y положительное, но меньше, чем x. Поэтому игроку P_1, по-видимому, следует выбирать x при помощи случайного механизма, но так, чтобы малые положительные значения выбирались чаще, чем большие. Однако и такой способ не может быть оптимальным, ибо P_2 может всегда увеличить свой ожидаемый выигрыш, применив другой случайный механизм, который позволит ему выбирать еще более малые числа с данными частотами. Итак, по-видимому, мы не можем приписать какую-либо цену этой игре и не можем показать, что для нее существуют оптимальные способы игры.

Однако не следует думать, что такая ситуация имеет место во всех случаях, когда v_1 и v_2 не существуют. Напротив, может даже оказаться, что игра имеет седловую точку, хотя v_1 и v_2 не существуют. Рассмотрим, например, непрерывную игру, у которой платежная функция M определена следующим образом:

$$M(x,\ y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}, \text{ если } x \neq 0 \text{ и } y \neq 0,$$

$$M(x,\ 0) = M(0,\ y) = 0.$$

Легко убедиться, что $\min\limits_{y} M(x,\ y)$ для $x \neq 0$ не существует. Поэтому $\max\limits_{x} \min\limits_{y} M(x,\ y)$ не существует, и $\min\limits_{y} \max\limits_{x} M(x,\ y)$ также не существует. С другой стороны, функция имеет седловую точку $\|0\ 0\|$. Итак, у P_1 имеется способ игры (а именно, взять $x = 0$), который гарантирует ему, что он получит по меньшей мере $M(0,\ y) = 0$, и у P_2 есть способ игры (а именно, взять $y = 0$), который гарантирует ему, что P_1 получит самое большее $M(x,\ 0) = 0$. Поэтому мы можем вполне обоснованно назвать 0 ценой этой игры и сказать, что оптимальный способ игры для P_1 — взять $x = 0$, а оптимальный способ игры для P_2 — взять $y = 0$.

Замечание 7.4. Легко найти функцию M двух переменных такую, что

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} \min_{0 \leqslant y \leqslant 1} M(x,\ y) \tag{1}$$

и

$$\min_{0 \leqslant y \leqslant 1} \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} M(x,\ y) \tag{2}$$

не существуют, а величины

$$\sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} \inf_{0 \leqslant y \leqslant 1} M(x,\ y) \tag{3}$$

и

$$\inf_{0 \leqslant y \leqslant 1} \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} M(x, y) \tag{4}$$

обе существуют и равны. Если у непрерывной игры имеется подобная платежная функция, то, хотя игра и не имеет седловой точки, общее значение величин (3) и (4) иногда называют **ценой игры** v. В таком случае P_1 вообще не может выбрать стратегию x_0, которая гарантировала бы ему, что для любой стратегии y_0, выбранной игроком P_2,

$$M(x_0, y) \geqslant 0,$$

но он может, тем не менее, для любого $\varepsilon > 0$ выбрать стратегию x_ε, такую, что для любого y, выбранного игроком P_2,

$$M(x_\varepsilon, y) \geqslant v - \varepsilon.$$

Таким образом, P_1 может подойти как угодно близко к оптимальному способу игры.

Пример 7.5. Платежная функция M непрерывной игры определена следующими условиями:

$$M(x, y) = x + y \text{ для } x \neq 1 \text{ и } y \neq 0,$$

$$M(1, y) = \frac{1}{2} + y \text{ для } y \neq 0,$$

$$M(x, 0) = \frac{1}{2} + x \text{ для } x \neq 1,$$

$$M(1, 0) = 2.$$

В этом случае мы легко убеждаемся, что величины (1) и (2) не существуют. С другой стороны, мы имеем:

$$\inf_y \sup_x M(x, y) = 1 = \sup_x \inf_y M(x, y).$$

Поэтому мы называем 1 ценой этой игры. Выбрав $x_\varepsilon = 1 - \varepsilon$, игрок P_1 может быть уверен в том, что для любого y, выбранного игроком P_2,

$$M(x_\varepsilon, y) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Аналогично, выбрав $y_\varepsilon = \varepsilon$, игрок P_2 может быть уверен, что для любого x, выбранного игроком P_1,

$$M(x, y_\varepsilon) \leqslant 1 + \varepsilon.$$

Библиографические замечания

Первый общий обзор бесконечных игр можно найти в работе Виля [109].

Упражнения

1. Непрерывная игра имеет платежную функцию M, определенную следующим образом:

$$M(x, y)=xy-\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y.$$

Покажите, что точка $\left\| \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \right\|$ — седловая для этой функции. Иными словами, вспомнив определения, данные в главе I, покажите, что неравенства

$$M\left(x, \frac{1}{3}\right) \leqslant M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \leqslant M\left(\frac{1}{2}, y\right)$$

справедливы для всех x и y, лежащих в замкнутом интервале $[0, 1]$. Отсюда выведите, что цена игры (для P_1) равна $-\frac{1}{6}$ и что оптимальный способ игры для P_1 — взять $x=\frac{1}{2}$, а оптимальный способ игры для P_2 — взять $y=\frac{1}{3}$.

2. Непрерывная игра имеет платежную функцию, определенную следующим образом:

$$M(x, y)=\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^4-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]\left[1+\left(y-\frac{1}{3}\right)G(x, y)\right]+$$
$$+\left[\left(y-\frac{1}{3}\right)^2-\left(y-\frac{1}{3}\right)^3\right]\left[1+\left(x-\frac{1}{2}\right)H(x, y)\right],$$

где G и H суть функции, определенные на замкнутом единичном квадрате. Покажите, что цена игры равна 0, оптимальной стратегией для P_1 будет выбор $x=\frac{1}{2}$, а для P_2 — выбор $y=\frac{1}{3}$. Иными словами, покажите, что неравенства

$$M\left(x, \frac{1}{3}\right) \leqslant M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)=0 \leqslant M\left(\frac{1}{2}, y\right)$$

справедливы для всех x и y, лежащих в замкнутом интервале $[0, 1]$.

3. Пусть M — платежная функция непрерывной игры, и пусть $\frac{\partial M}{\partial x}$ и $\frac{\partial M}{\partial y}$ существуют во всех точках открытого единичного

квадрата, то есть для всех x и y, таких, что

$$0 < x < 1,$$
$$0 < y < 1.$$

Покажите, что если $\| x_0 \ y_0 \|$ есть седловая точка игры, лежащая в открытом единичном квадрате, то

$$\left.\frac{\partial M}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = 0 \text{ и } \left.\frac{\partial M}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = 0.$$

4. С помощью предложения, установленного в упражнении 3, найдите седловую точку и, следовательно, цену и оптимальные стратегии непрерывной игры, имеющей платежную функцию

$$M(x, y) = 15xy - 3x - 5y + 2.$$

5. Найдите значение k, такое, чтобы игра с платежной функцией

$$M(x, y) = 10xy - x - y + k$$

имела нулевую цену.

6. Покажите, что игра с платежной функцией

$$M(x, y) = xy + x + y$$

не имеет седловой точки внутри открытого единичного квадрата. Покажите, что игра не имеет седловой точки вида $\| 0 \ y_0 \|$. Найдите число x_0, такое, что $\| x_0 \ 0 \|$ будет седловой точкой.

7. Найдите неравенства, которым должны удовлетворять коэффициенты α и β, чтобы игра с платежной функцией

$$M(x, y) = xy - \alpha x - \beta y + \gamma$$

имела седловую точку в открытом единичном квадрате.

8. Покажите, что всякая непрерывная игра, имеющая платежную функцию вида

$$M(x, y) = xy - \alpha x - \beta y + \gamma,$$

имеет седловую точку (которая, однако, может лежать на границе единичного квадрата).

Указание. Используйте известное положение, что всякий многочлен данного типа может быть представлен в виде

$$(x + a)(y + b) + c,$$

где a, b и c — действительные числа.

9. Покажите, что непрерывная игра с платежной функцией

$$M(x, y) = (x - y)^2$$

совсем не имеет седловой точки, то есть не имеет седловой точки ни внутри единичного квадрата, ни на его границе.

10. Покажите, что непрерывная игра с платежной функцией

$$M(x, y) = \frac{1}{1 + 2(x - y)^2}$$

совсем не имеет седловой точки.

11. Пусть F_1 и F_2 — непрерывные возрастающие функции (то есть такие, что из $u > v$ следует $F_1(u) > F_1(v)$ и $F_2(u) > F_2(v)$), удовлетворяющие равенствам

$$F_1(0) = F_2(0) = 0,$$
$$F_1(1) = F_2(1) = 1,$$

и пусть функция M определена следующим образом:

$$M(x, y) = 2F_1(x) - 1 \text{ для } x < y,$$
$$M(x, y) = F_1(x) - F_2(y) \text{ для } x = y,$$
$$M(x, y) = 1 - 2F_2(y) \text{ для } x > y.$$

Покажите, что игра, платежная функция которой есть M, не имеет седловой точки.

Указание. Из условия относительно F_1 и F_2 следует, что существует единственная точка u в $[1, 0]$, такая, что

$$F_1(u) + F_2(u) = 1.$$

12. Покажите, что игра с платежной функцией $\operatorname{sgn}(x-y)$ имеет седловую точку (смотрите определение символа «sgn» в примере 7.2).

13. Вычислите v_1 и v_2 для игры, описанной в примере 7.2.

14. Покажите, что игра, описанная в примере 7.2, имеет цену, если принять $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Найдите эту цену и пару оптимальных стратегий.

15. Измените формулировку примера 7.2 для того случая, когда позиция A имеет ценность в 1 полк, а позиция B имеет ценность в c полков ($c > 1$).

16. Покажите, что если M есть ограниченная функция, определенная на единичном квадрате и имеющая седловую точку, то

$$\sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} \inf_{0 \leqslant y \leqslant 1} M(x, y)$$

и

$$\inf_{0 \leqslant y \leqslant 1} \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} M(x, y)$$

существуют и равны между собой.

17. Платежная функция игры определена так:

$$M(x, y) = 10xy - y - 5x \text{ для } x \neq \frac{1}{10},$$
$$M\left(\frac{1}{10}, y\right) = -y.$$

Найдите цену игры v. Какая стратегия игрока P_1 гарантирует ему, что он получит по меньшей мере $v - \varepsilon$?

ГЛАВА VIII

ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Интуитивные соображения

Напомним, что для отыскания оптимальных способов игры в прямоугольные игры без седловых точек оказалось необходимым рассматривать смешанные стратегии, то есть способы, позволяющие делать выборы наудачу и лишь с известными вероятностями. Очевидно, нечто аналогичное нужно сделать для непрерывных игр без седловых точек (примеры таких игр были даны в упражнениях 9 и 10 главы VII).

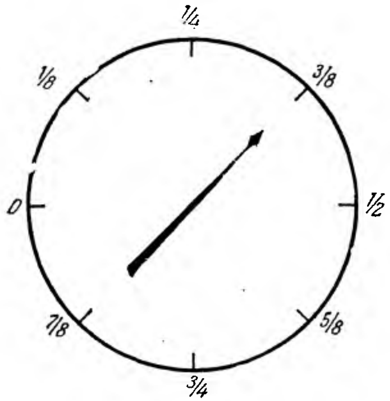

Рис. 33.

Прежде всего нужно исключить ошибочное представление о том, что смешанная стратегия непрерывной игры есть просто правило, приписывающее некоторую вероятность каждому числу, лежащему в замкнутом интервале [0, 1], ибо может случиться, что при случайном способе выбора каждому числу в интервале приписывается вероятность 0 и даже два случайных способа могут быть различны, хотя оба они приписывают каждому отдельному числу вероятность 0.

Так, предположим, что мы наносим числа x, $0 \leqslant x \leqslant 1$, по окружности единичной длины (рис. 33), крутим стрелку и выбираем число, соответствующее тому месту, где остановилась стрелка. Если допустить, что ось стрелки хорошо смазана и весь прибор сделан достаточно хорошо, то вероятность (в смысле относительной частоты) того, что стрелка остановится в некотором интервале, равна просто длине интервала; например, вероятность того, что она остановится в интервале $[3/8, 5/8]$, равна $1/4$. Вообще, вероятность того, что выбранное число попадет в интервал $\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \frac{1}{2}+\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]$, равна ε. Так как вероятность $P\left(\frac{1}{2}\right)$ того, что стрелка остановится на $\frac{1}{2}$, конечно, не больше, чем вероятность того, что она остановится в интервале $\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\right]$, то $p\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant\varepsilon$ для всех положительных ε, и, следовательно, $p\left(\frac{1}{2}\right)=0$. Поскольку это доказательство не основано на каком-нибудь особом свойстве точки $\frac{1}{2}$, мы имеем случайный способ выбора числа из интервала $[0, 1]$, при котором каждому отдельному числу в интервале приписывается вероятность 0.

Рис. 34.

Допустим теперь, что устройство слегка изменили, нанеся числа от 0 до $1/2$ на первой четверти окружности, а числа от $1/2$ до 1 — на остальных трех четвертях, как показано на рис. 34. Ясно, что вероятность выбора какого-либо отдельного числа опять равна 0. И тем не менее этот способ выбора числа из интервала $[0, 1]$ отличается от первого, ибо в первом способе вероятность получить число, лежащее между 0 и $1/2$, была равна $1/2$, а теперь она равна $1/4$.

Размышляя над этими примерами, мы убеждаемся, что для формального математического описания случайного процесса выбора числа из интервала $[0, 1]$ достаточно задать функцию F, такую, что $F(a)$ для всех a из $[0, 1]$ есть вероятность того, что выбранное число будет не больше a. Однако для удобства математических выводов в излагаемой ниже теории оказывается лучше несколько изменить это определение для случая, когда $a=0$. Поэтому мы рассматриваем функции F, такие, что $F(a)$ для $a \neq 0$ есть вероятность того, что выбранное число будет не больше a, и $F(0)=0$ (следовательно, $F(0)$ есть вероятность того, что выбранное число будет меньше нуля, а не того, что оно будет не больше нуля). Если a и b суть два числа из интервала $[0, 1]$, такие, что $0 < a < b$, то, очевидно, $F(b)-F(a)$ есть вероятность того, что число x будет выбрано в интервале $a < x \leqslant b$, а $F(b)-F(0)$ есть вероятность того, что число x будет выбрано в интервале $0 \leqslant x \leqslant b$. Такая функция F называется *интегральной функцией распределения* или, для краткости, просто *функцией распределения*.

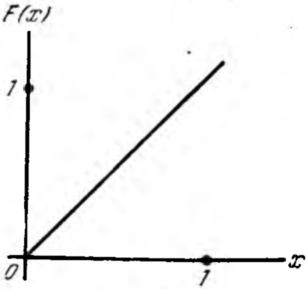

Рис. 35.

Функция распределения для первого из приведенных выше примеров есть такая функция F, что для всех x в $[0, 1]$

$$F(x)=x.$$

На рис. 35 представлен график этой функции (функция, очевидно, определена только для $0 \leqslant x \leqslant 1$).

Функция распределения для второго примера есть такая функция F, что

$$F(x)=\frac{1}{2}x \quad \text{для } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2},$$

$$F(x)=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2} \text{ для } \frac{1}{2} < x \leqslant 1.$$

График этой функции представлен на рис. 36.

Мы замечаем, что обе эти функции *неубывающие*, то есть $F(x_1) \leqslant F(x_2)$, при $x_1 \leqslant x_2$ (на графике это выражается характером кривых, идущих направо вверх). Как мы сразу видим, это справедливо для всякой функции распределения, ибо если $x_1 \leqslant x_2$, то вероятность того, что выбранное число лежит в интервале $[0,\ x_2]$, должна быть по меньшей мере равна вероятности того, что оно лежит в интервале $[0,\ x_1]$.

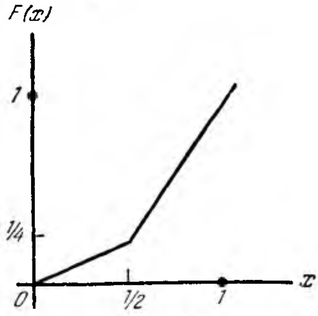

Рис. 36.

Рассмотренные нами две частные функции суть так называемые *возрастающие* функции, то есть $F(x_1)<F(x_2)$, когда $x_1<x_2$. Но это не всегда выполняется для функций распределения. Так, например, функция распределения может иметь такой график, как на рис. 37. Горизонтальный отрезок на этом графике показывает, что

$$F\left(\frac{3}{4}\right)-F\left(\frac{1}{4}\right)=0;$$

следовательно, вероятность того, что выбранное число будет лежать в интервале $^1/_4<x\leqslant{}^3/_4$, равна 0. Легко видеть, как можно построить случайный механизм, который будет порождать такую функцию распределения: нужно лишь изготовить устройство, подобное вышеописанному, но исключить интервал $[^1/_4,\ ^3/_4]$.

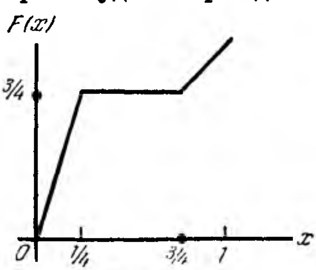

Рис. 37.

Мы замечаем, что все графики проходят через точку $\|1\quad 1\|$. Это должно быть для всех функций распределения, то есть для любой функции распределения F мы имеем:

$$F(1)=1.$$

Это вытекает непосредственно из определения функции распределения; действительно, выборы совершаются в интервале $[0,\ 1]$, и, следовательно, выбранное число заведомо не будет превышать 1.

Кроме того, в определении функции распределения указывается, что график функции должен проходить через точку $\|0 \quad 0\|$.

Все рассмотренные до сих пор функции распределения непрерывны, но это относится не ко всем функциям распределения. Простейший образец разрывной функции распределения можно получить посредством «случайного» механизма, который всегда выбирает 0. Функция распределения удовлетворяет тогда следующим условиям:

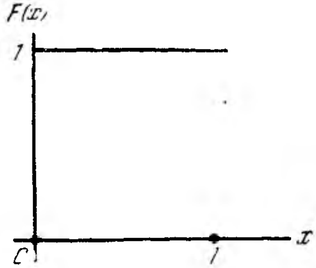

Рис. 38.

$$F(x) = 1 \quad \text{для} \quad x > 0,$$
$$F(0) = 0,$$

а график ее показан на рис. 38. Приведем менее тривиальный пример. Мы бросаем правильную монету. Если она показывает герб, мы выбираем $^1/_4$; если она показывает решку, то применяем устройство, изображенное на рис. 33, для выбора числа из интервала $[0, 1]$. Тогда, очевидно, функция распределения F удовлетворяет следующим условиям:

$$F(x) = \frac{1}{2}x \qquad \text{для} \quad x < \frac{1}{4},$$

$$F(x) = \frac{1}{2}(1 + x) \quad \text{для} \quad x \geqslant \frac{1}{4}.$$

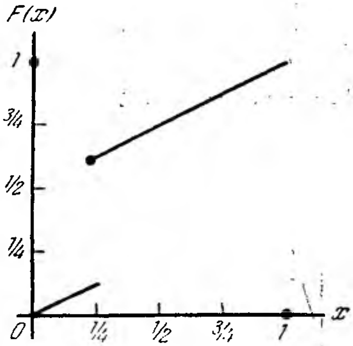

Рис. 39.

График этой функции представлен на рис. 39 (жирная точка в левом конце верхнего отрезка указывает, что $F(^1/_4) = {}^5/_8$, а не $^1/_8$).

График, изображенный на рис. 39, имеет скачок при $x = {}^1/_4$, то есть в точке, которой функция распределения приписывает конечную (не нулевую) вероятность. Легко видеть, что точки, которым приписывается конечная вероятность, всегда соответствуют точкам разрыва графика функции распределения.

Все рассмотренные до сих пор функции распределения имели графики, состоящие либо из прямолинейного отрезка, либо из ряда таких отрезков. Но из следующего примера можно видеть, что это не всегда так. Допустим, что в устройстве, изображенном на рис. 33, кончик стрелки сделан из стали и в плоскости круга помещен небольшой магнит справа от точки с отметкой «$^1/_2$». Тогда стрелка будет чаще останавливаться вблизи от $^1/_2$, чем в других местах (но вероятность остановки в одной данной точке по-прежнему равна 0). При этом, очевидно, функция распределения будет иметь криволинейный график, подобный изображенному на рис. 40.

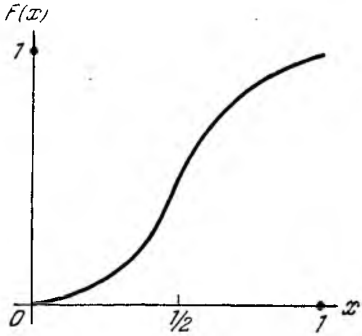

Рис. 40.

Рассмотрим, наконец, несколько менее элементарное свойство функций распределения. Для этого введем одно определение. Функция F называется *непрерывной справа* в точке x, если

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} F(x+\varepsilon) = F(x).$$

Аналогично мы называем функцию *непрерывной слева* в точке x, если

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} F(x-\varepsilon) = F(x).$$

Мы замечаем, что функция, изображенная на рис. 39, в точке $x = {}^1/_4$ непрерывна справа, но не непрерывна слева. Функция, изображенная на рис. 38, в точке $x = 0$ не непрерывна справа.

Мы имеем следующую теорему.

Теорема 8.1. *Всякая функция распределения непрерывна справа во всех точках открытого интервала* (0, 1).

Доказательство. Пусть F — функция распределения, и пусть $0<x<1$. Мы хотим показать, что

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}[F(x+\varepsilon)-F(x)]=0.$$

Величина

$$F(x+\varepsilon)-F(x)$$

по определению функции распределения равна вероятности того, что число z, выбранное согласно этой функции распределения, удовлетворяет неравенству

$$x<z\leqslant x+\varepsilon.$$

Но для любого заданного z можно найти такое малое положительное ε, чтобы это неравенство стало невозможным. Следовательно, вероятность того, что z будет удовлетворять этому неравенству, стремится к нулю, когда ε стремится к нулю, что завершает доказательство.

2. Формальные выводы

Итак, мы видим, что функция распределения F всегда удовлетворяет следующим условиям: 1) $F(x)\geqslant 0$ для любого x из $[0, 1]$; 2) $F(0)=0$ и $F(1)=1$; 3) $F(x)$ есть неубывающая функция в замкнутом интервале $[0, 1]$; 4) $F(x)$ непрерывна справа в открытом интервале $(0, 1)$.

С точки зрения наших интуитивных догадок о вероятности представляется возможным такое утверждение: любая функция, удовлетворяющая условиям (1), (2), (3) и (4), есть функция распределения, то есть если F — некоторая функция, удовлетворяющая этим условиям, то существует способ выбора чисел из интервала $[0, 1]$, имеющий своей функцией распределения функцию F. Во всяком случае, понятие функции распределения станет математически строгим, если мы будем впредь применять этот термин просто для обозначения функции, удовлетворяющей указанным четырем условиям. Итак, чтобы проверить, что некоторая функция есть функция распределения, нам не нужно описывать сам случайный процесс, который ее порождает, а следует лишь проверить, что она определена на замкнутом интервале $[0, 1]$, не принимает отрицательных значений, не убывает и т. д.

Мы будем применять букву **D** для обозначения множества всех функций распределения, то есть множества всех функций, которые удовлетворяют указанным четырем условиям.

Приведем теорему, полезную в дальнейшем.

Теорема 8.2. *Всякая последовательность функций распределения содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторой функции распределения F во всякой точке непрерывности функции F.*

Доказательство. Известно, что правильные дроби можно расположить в упорядоченную бесконечную последовательность. Мы можем это сделать, например, так: на первое место поместим единственную правильную дробь, имеющую знаменатель $2\left(\text{а именно } \frac{1}{2}\right)$; затем в порядке возрастания расположим правильные дроби, имеющие знаменатель 3; затем дроби со знаменателем 4 (пропуская уже записанные) и т. д. Так мы получим:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{7}, \ldots$$

Очевидно, таким путем можно дойти до любой правильной дроби. Запишем полученную последовательность правильных дробей так:

$$r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots$$

Пусть

$$G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots \tag{1}$$

есть произвольная последовательность функций распределения. Рассмотрим сначала последовательность чисел

$$G_1(r_1), G_2(r_1), \ldots, G_n(r_1), \ldots$$

Поскольку эта последовательность бесконечна и ограничена, она содержит сходящуюся подпоследовательность

$$G_{i_1}(r_1), G_{i_2}(r_1), \ldots, G_{i_n}(r_1), \ldots$$

Положив

$$F_n^{(1)}(x) = G_{i_n}(x) \quad \text{для} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

мы видим, что последовательность

$$F_1^{(1)}, F_2^{(1)}, \ldots, F_n^{(1)}, \ldots$$

есть подпоследовательность последовательности (1), сходящаяся к пределу в точке r_1.

Теперь рассмотрим последовательность чисел

$$F_1^{(1)}(r_2),\ F_2^{(1)}(r_2),\ \ldots,\ F_n^{(1)}(r_2),\ \ldots$$

Как и раньше, мы видим, что эта последовательность содержит подпоследовательность

$$F_{i_1}^{(1)}(r_2),\ F_{i_2}^{(1)}(r_2),\ \ldots,\ F_{i_n}^{(1)}(r_2),\ \ldots,$$

которая является сходящейся. Положив

$$F_n^{(2)}(x)=F_{i_n}^{(1)}(x) \quad \text{для } i=1,\ 2,\ \ldots,$$

мы заключаем, что последовательность

$$F_1^{(2)},\ F_2^{(2)},\ \ldots,\ F_n^{(2)},\ \ldots$$

есть подпоследовательность последовательности (1), сходящаяся к пределу как в точке r_1, так и в точке r_2.

Продолжая этот процесс и далее, мы получаем последовательность последовательностей

$$\begin{array}{l}
F_1^{(1)},\ F_2^{(1)},\ F_3^{(1)},\ \ldots,\ F_n^{(1)},\ \ldots\\
F_1^{(2)},\ F_2^{(2)},\ F_3^{(2)},\ \ldots,\ F_n^{(2)},\ \ldots\\
F_1^{(3)},\ F_2^{(3)},\ F_3^{(3)},\ \ldots,\ F_n^{(3)},\ \ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
F_1^{(m)},\ F_2^{(m)},\ F_3^{(m)},\ \ldots,\ F_n^{(m)},\ \ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Каждая из этих последовательностей, по построению, есть подпоследовательность всех предыдущих и, следовательно, первоначальной последовательности (1), причем m-я последовательность сходится к пределу в точках $r_1,\ \ldots,\ r_m$.

Из этой последовательности последовательностей мы образуем теперь «диагональную последовательность»

$$F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_n,\ \ldots, \tag{2}$$

положив

$$F_n=F_n^{(n)} \quad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Очевидно, (2) есть подпоследовательность последовательности (1). Кроме того, для любого m все (за исключением конечного числа) элементы последовательности (2) принадлежат последовательности

$$F_1^{(m)},\ F_2^{(m)},\ \ldots,\ F_n^{(m)},\ \ldots,$$

и, следовательно, последовательность (2) сходится к пределу для всех правильных дробей.

Теперь мы определим функцию φ на правильных дробях, положив для любой правильной дроби r

$$\varphi(r) = \lim_{n\to\infty} F_n(r), \tag{3}$$

и затем определим функцию F на всех числах в открытом единичном интервале, положив для любого такого числа

$$F(x) = \inf_{r>x} \varphi(r); \tag{4}$$

мы полагаем также

$$\left.\begin{aligned} F(0) &= 0, \\ F(1) &= 1, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

так что F определена на всем единичном интервале (включая его конечные точки). Для доказательства теоремы достаточно проверить, что F есть функция распределения и что последовательность (2) сходится к F во всякой точке непрерывности F. Из (5) следует, что для этого, в свою очередь, достаточно показать, что F неубывающая и непрерывна справа. Если x и y — любые числа, такие, что $x < y$, то множество $\mathbf{A}_y$ всех рациональных чисел, больших чем y, есть подмножество множества $\mathbf{A}_x$ всех рациональных чисел, больших чем x; следовательно,

$$\inf_{r\in\mathbf{A}_x} \varphi(r) \leqslant \inf_{r\in\mathbf{A}_y} \varphi(r),$$

или, на основании (4),

$$F(x) \leqslant F(y).$$

Итак, F — неубывающая функция. Чтобы показать, что F непрерывна справа, мы замечаем прежде всего, что функция φ, по ее определению (3), неубывающая. Предположим, что

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

есть произвольная убывающая последовательность чисел, предел которых есть точка x интервала $(0, 1)$; нам нужно показать, что

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F(x_n).$$

Из (4) мы видим, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует рациональное число r, такое, что

$$r > x, \tag{6}$$

$$\varphi(r) - F(x) < \varepsilon. \tag{7}$$

Взяв столь большое целое N, что $x < x_N < r$, получим для всех $n > N$

$$x < x_n < r,$$

и, следовательно, ввиду того, что функция F неубывающая, и ввиду (4)

$$F(x) \leqslant F(x_n) \leqslant \varphi(r). \tag{8}$$

Из (7) и (8) мы заключаем, что для $n > N$

$$0 \leqslant F(x_n) - F(x) \leqslant \varepsilon,$$

так что

$$\lim_{n\to\infty} [F(x_n) - F(x)] = 0,$$

что и требовалось доказать.

Прежде чем перейти к последней части доказательства, уместно заметить следующее следствие из (4): для рационального r и произвольного x $(r < x)$ мы имеем:

$$\varphi(r) \leqslant F(x). \tag{9}$$

Наконец, мы покажем теперь, что диагональная последовательность (2) сходится к F во всякой точке непрерывности функции F. Пусть x — точка непрерывности F, и пусть ε — произвольное положительное число. Из (4) мы немедленно заключаем, что существует рациональное число r, такое, что $r > x$ и

$$0 \leqslant \varphi(r) - F(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{6}. \tag{10}$$

Из непрерывности функции F в x мы видим, что существует некоторое y, $y<x$, такое, что

$$0 \leqslant F(x) - F(y) \leqslant \frac{\varepsilon}{6}. \tag{11}$$

Пусть теперь s — любое рациональное число, такое, что

$$y < s < x. \tag{12}$$

Из (12), (4) и (9) заключаем, что

$$F(y) \leqslant \varphi(s) \leqslant F(x); \tag{13}$$

далее, на основании (11) и (13),

$$0 \leqslant F(x) - \varphi(s) \leqslant \frac{\varepsilon}{6}. \tag{14}$$

Из (3) мы видим, что существует целое число N, такое, что для всех $n > N$

$$|\varphi(r) - F_n(r)| \leqslant \frac{\varepsilon}{6} \tag{15}$$

и

$$|\varphi(s) - F_n(s)| \leqslant \frac{\varepsilon}{6}. \tag{16}$$

Далее, поскольку F_n есть функция распределения и, следовательно, неубывающая функция, то

$$F_n(s) \leqslant F_n(x) \leqslant F_n(r). \tag{17}$$

Из (16), (14), (10) и (15) мы получаем теперь:

$$\begin{aligned} |F_n(s) - F_n(r)| &\leqslant |F_n(s) - \varphi(s)| + \\ &+ |\varphi(s) - F(x)| + |F(x) - \varphi(r)| + \\ &+ |\varphi(r) - F_n(r)| \leqslant 4\left(\frac{\varepsilon}{6}\right) = \frac{2}{3}\varepsilon. \end{aligned} \tag{18}$$

Из (17) и (18) следует, что

$$|F_n(x) - F_n(s)| \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon. \tag{19}$$

Из (14), (16) и (19) мы заключаем окончательно, что для всех $n > N$

$$\begin{aligned} |F(x) - F_n(x)| &\leqslant |F(x) - \varphi(s)| + |\varphi(s) - F_n(s)| + \\ &+ |F_n(s) - F_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{2}{3}\varepsilon = \varepsilon, \end{aligned} \tag{20}$$

и, следовательно,

$$F(x)=\lim_{n\to\infty} F_n(x),$$

что завершает доказательство теоремы.

Следующая теорема дает нам полезный способ построения новой функции распределения по данным функциям.

Теорема 8.3. *Пусть $F_1, \ldots, F_n$ — множество функций распределения, $\|a_1 \ \ldots \ a_n\|$ — некоторый элемент множества S_n, и функция F определена для всех x в* $[0, 1]$ *соотношением*

$$F(x)=a_1F_1(x)+\ldots+a_nF_n(x).$$

Тогда F есть также функция распределения.

Доказательство. Исходя из того, что функции $F_i \in \mathbf{D}$, т. е. удовлетворяют условиям 1—4, покажем, что функция F также удовлетворяет этим четырем условиям. Прежде всего, мы имеем:

$$F(x)=a_1F_1(x)+\ldots+a_nF_n(x)\geqslant 0,$$

так как по условию $a_i \geqslant 0$ и $F_i(x) \geqslant 0$.

Далее, поскольку $F_i(1)=1$, имеем:

$$F(1)=a_1F_1(1)+\ldots+a_nF_n(1)=a_1+\ldots+a_n=1.$$

Аналогично доказывается, что $F(0)=0$.

Положим теперь, что u и v — любые числа в $[0, 1]$, такие, что $u \geqslant v$; нам нужно показать, что $F(u) \geqslant F(v)$. Поскольку каждая F_i неубывающая,

$$F_i(u) \geqslant F_i(v),$$

и, следовательно, в силу неотрицательности a_i,

$$a_iF_i(u) \geqslant a_iF_i(v).$$

Складывая эти неравенства, получаем:

$$a_1F_1(u)+\ldots+a_nF_n(u) \geqslant a_1F_1(v)+\ldots+a_nF_n(v),$$

или

$$F(u) \geqslant F(v),$$

что и требовалось доказать.

Для завершения нашего доказательства остается показать, что F непрерывна справа в (0, 1). Возьмем произвольное положительное число x из (0, 1). Тогда на основании того, что каждая из функций $F_1, \ldots, F_n$ непрерывна справа в x, мы имеем:

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} F(x+\varepsilon) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} [a_1F_1(x+\varepsilon) + \ldots + a_nF_n(x+\varepsilon)] =$$
$$= a_i \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} F_1(x+\varepsilon) + \ldots + a_n \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} F_n(x+\varepsilon) =$$
$$= a_1F_1(x) + \ldots + a_nF_n(x) = F(x),$$

что и требовалось доказать.

Замечание 8.4. Установленную выше теорему можно обобщить в том смысле, что можно построить функцию распределения F по бесконечной последовательности F_1, $F_2, \ldots, F_n, \ldots$ функций распределения и по бесконечной последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ неотрицательных чисел, сумма которых равна 1, положив

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_iF_i(x).$$

Но поскольку мы не будем применять теорему в этой форме, мы ограничились тем, что доказали ее для конечного числа функций распределения. Доказательство ее для бесконечных последовательностей функций распределения оставляется в качестве упражнения.

В заключение полезно выделить частный класс функций распределения, на который мы будем часто ссылаться в дальнейшем. Пусть имеется конечная возрастающая последовательность точек интервала [0, 1]

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n,$$

такая, что функция распределения F имеет разрывы в каждой из этих n точек, но постоянна во всех других точках, то есть $F(u) = F(v)$, если для некоторого i мы имеем $x_i < u < x_{i+1}$ и $x_i < v < x_{i+1}$. Тогда F называется *ступенчатой функцией с n ступенями*. Мы обозначаем класс всех ступенчатых функций с n ступенями через $\mathbf{D}_n$.

График ступенчатой функции всегда состоит из конечного числа горизонтальных отрезков, прерывающихся в точках разрыва; так, например, функция распределения, изображенная на рис. 41, есть элемент класса $\mathbf{D}_4$, имеющий разрывы при 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ и 1.

Легко видеть, что если $F_1, \ldots, F_r$ суть ступенчатые функции и если $a_1, \ldots, a_r$ суть неотрицательные действительные числа, сумма которых равна 1, то функция F, определенная соотношением

$$F(x) = a_1F_1(x) + \ldots$$
$$\ldots + a_nF_n(x),$$

также есть ступенчатая функция. Число разрывов функции F не больше суммы числа разрывов функций $F_1, \ldots, F_n$; если никакие из функций $F_1, \ldots, F_n$ не имеют общих точек разрыва и $a_i \neq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, то число разрывов функции F равно этой сумме. Элементы класса $\mathbf{D}_1$ имеют лишь одну ступень, разрыв в которой равен единице. Поэтому для указания элемента класса $\mathbf{D}_1$ достаточно лишь сказать, где происходит этот скачок; символом I_a обозначаем элемент класса $\mathbf{D}_1$, имеющий скачок при $x = a$. Итак, I_a для $a \neq 0$ удовлетворяет равенствам

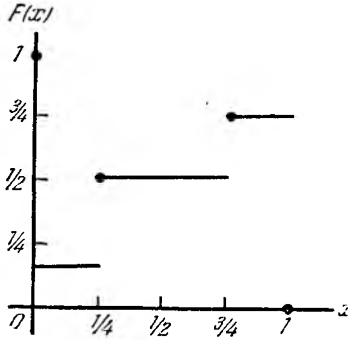

Рис. 41.

$$I_a(x) = 0 \qquad (x < a),$$
$$I_a(x) = 1 \qquad (x \geqslant a).$$

Функция I_0 удовлетворяет равенствам

$$I_0(0) = 0,$$
$$I_0(x) = 1 \qquad (x > 0).$$

Библиографические замечания

Более подробное рассмотрение функций распределения можно найти у Крамера [21]*).

---

*) См. также [189] и [195]. (*Прим. ред.*)

Упражнения

1. Найдите функцию распределения, соответствующую следующему случайному процессу выбора числа из [0, 1]: 1) бросаются две монеты; 2) если обе монеты показывают герб, выбирается число $^1/_4$; 3) если обе монеты показывают решку, то число из интервала [0, 1] выбирается посредством прибора, изображенного на рис. 33; 4) если одна монета показывает герб, а другая — решку, то число из интервала [0, 1] выбирается посредством прибора, изображенного на рис. 34.

2. Найдите функцию распределения для следующего случайного процесса: бросается игральная кость и берется число, обратное тому, которое показывает кость.

3. Покажите, что если функция непрерывна справа и непрерывна слева в данной точке, то она непрерывна в этой точке.

4. Покажите, что способом, установленным в теореме 8.3, из элементов класса $\mathbf{D}_1$ можно построить любой элемент класса $\mathbf{D}_n$ для любого n.

5. Докажите следующее обобщение теоремы 8.3: пусть $F_1, \ldots, F_n, \ldots$ — бесконечная последовательность функций распределения, $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ — бесконечная последовательность неотрицательных действительных чисел, таких, что

$$a_1 + \ldots + a_n + \ldots = 1,$$

и функция F определена так:

$$F(x) = a_1 F_1(x) + \ldots + a_n F_n(x) + \ldots;$$

тогда F есть также функция распределения.

6. Покажите, что множество разрывов функции распределения не может быть более чем счетным.

7. Покажите, что если $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$, то

$$I_a(x)\, I_b(x) = I_b(x).$$

8. Покажите, что произведение двух функций распределения есть также функция распределения, то есть если $F_1, F_2 \in \mathbf{D}$, то и $F \in \mathbf{D}$, где

$$F(x) = F_1(x)\, F_2(x) \text{ для всех } x \text{ в } [0,\ 1].$$

9. Покажите, что произведение двух ступенчатых функций есть ступенчатая функция. Покажите, что если $F_1 \in \mathbf{D}_r$ и $F_2 \in \mathbf{D}_s$, то существует число t, $t \leqslant r + s$, такое, что $F_1 F_2 \in \mathbf{D}_t$.

ГЛАВА IX

ИНТЕГРАЛ СТИЛТЬЕСА

Пусть дана непрерывная игра с платежной функцией M, и P_2 выбирает число y_0. Тогда для каждого x, которое может выбрать P_1, выигрыш P_1 определяется функцией

$$G(x) = M(x, y_0).$$

Предположим теперь, что P_1, вместо того чтобы всегда выбирать одно и то же число x, решает применить случайный механизм, которому соответствует функция распределения F. Очевидно, игроку P_1, для того чтобы сделать выбор между различными возможными функциями распределения, необходимо уметь находить математическое ожидание своего выигрыша, если он применяет F.

Итак, перед нами следующая задача.

Пусть $G(x)$ для $0 \leqslant x \leqslant 1$ есть сумма, которую получит P_1, если он выберет x (причем P_1 делает выборы по функции распределения F). Каково математическое ожидание выигрыша у P_1?

Очевидно, мы не можем сказать, что это математическое ожидание равно сумме всех произведений $G(x)P(x)$, где $P(x)$ есть вероятность того, что будет выбрано x, ибо, как мы видели в предыдущей главе, вероятность $P(x)$ может быть равна нулю для всех x.

С другой стороны, математическое ожидание выигрыша мы можем выразить приближенно следующим образом. Берем три значения x, скажем, $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ и $x = 1$, и составляем следующее выражение:

$$G\left(\frac{1}{2}\right)\left[F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0)\right] + G(1)\left[F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right)\right].$$

Первый член этой суммы равен выигрышу P_1, если он выберет $\frac{1}{2}$, умноженному на вероятность того, что он выберет x в интервале $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$; второй член равен выигрышу его в случае, если выберет 1, умноженному на вероятность того, что он выберет x в интервале $\frac{1}{2} < x \leqslant 1$. Другое приближение можно получить из данного разбиения интервала, написав

$$G(x_1)\left[F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0)\right] + G(x_2)\left[F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right)\right],$$

где x_1 и x_2 — любые числа из интервалов $0 \leqslant x_1 \leqslant \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2} < x_2 \leqslant 1$. Если G изменяется незначительно в интервале $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ или в интервале $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, то эти два приближения не будут сильно отличаться друг от друга. Если мы будем считать, что минимальное значение в интервале $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ G принимает при $\bar{z}_1$, а в интервале $\frac{1}{2} < x \leqslant 1$ при $\bar{z}_2$, то наше интуитивное представление подсказывает, что математическое ожидание выигрыша для P_1 равно по меньшей мере

$$G(\bar{z}_1)\left[F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0)\right] + G(\bar{z}_2)\left[F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right)\right].$$

Аналогично, если G принимает максимальные значения в этих двух интервалах соответственно при z_1 и z_2, то математическое ожидание выигрыша для P_1 равно самое большее

$$G(z_1)\left[F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0)\right] + G(z_2)\left[F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right)\right].$$

Но оказывается, что можно получить более точные верхнюю и нижнюю границы для математического ожидания выигрыша игрока P_1, если взять четыре точки разбиения; или еще лучше — пять и т. д. Итак, нам нужно рассмотреть разбиение интервала точками $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$

и образовать сумму

$$\sum_{i=1}^{n} G(z_i)\,[F(x_i)-F(x_{i-1})],$$

где $x_{i-1} < z_i \leqslant x_i$ $(i=1,\ldots,n)$. Интуитивно представляется очевидным, что если G есть функция «приемлемого» вида, то можно подойти как угодно близко к математическому ожиданию выигрыша игрока P_1, беря n достаточно большим и следя за тем, чтобы все разности $x_i - x_{i-1}$ стремились к нулю при возрастании n. (Если G не «пригодна» для того, чтобы приближение сделать сколь угодно точным, то мы уже не можем вполне уверенно сказать, что именно назвать математическим ожиданием выигрыша игрока P_1.)

Сумма

$$\sum_{i=1}^{n} G(z_i)\,[F(x_i)-F(x_{i-1})] \tag{1}$$

имеет некоторое сходство с суммой

$$\sum_{i=1}^{n} G(z_i)\,[x_i - x_{i-1}], \tag{2}$$

применяемой при определении обычного (риманова) интеграла; действительно, сумма (2) есть лишь частный случай суммы (1), когда для всех x $F(x)=x$. Поэтому естественно рассматривать предел суммы (1) также как интеграл. Мы переходим теперь к формальному определению интеграла этого вида, который называется *интегралом Стилтьеса.*

Определение 9.1. Пусть Δ обозначает разбиение интервала $[a, b]$ точками $x_0, x_1, \ldots, x_n$, где

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Обозначим наибольшую из разностей

$$x_1 - x_0, \quad x_2 - x_1, \ \ldots, \ x_n - x_{n-1}$$

через $\|\Delta\|$. Если предел

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \|\Delta\|\to 0}} \sum_{i=1}^{n} G(z_i)\,[F(x_i)-F(x_{i-1})] \tag{3}$$

(где $x_{i-1}\leqslant z_i\leqslant x_i$, $i=1, \ldots, n$) существует и не зависит от выбора значений z_i, то этот предел называется *интегралом Стилтьеса* функции G по F от a до b и обозначается так:

$$\int_a^b G(x)\,dF(x).$$

Мы можем теперь сказать, что если $G(x)$ есть выигрыш игрока P_1, когда он выбирает x, и если он выбирает x по функции распределения F, то математическое ожидание его выигрыша будет равно

$$\int_0^1 G(x)\,dF(x).$$

Поскольку интеграл Стилтьеса определен путем сложного предельного перехода, не удивительно, что он не всегда существует. В частности, легко показать, что он не существует, если G и F имеют общую точку разрыва.

Например, пусть

$$F(x)=G(x)=0 \qquad (0\leqslant x\leqslant 1),$$

и пусть

$$F(x)=G(x)=1 \qquad (1<x\leqslant 2).$$

Здесь одна из разностей $F(x_k)-F(x_{k-1})$ при $0\leqslant x_{k-1}\leqslant 1$, $1<x_k\leqslant 2$ не может быть сделана меньше 1. $G(z_k)$ может быть равна либо 0, либо 1, в зависимости от выбора z_k. Следовательно, в этом случае сумма (1) равна либо 0, либо 1, в зависимости от того, равна $G(z_k)$ нулю или единице. Итак, предел (3) зависит от выбора z_i, и, следовательно, интеграл

$$\int_0^2 G(x)\,dF(x)$$

не существует.

Теперь мы сформулируем и докажем теорему, которая указывает достаточные условия существования интеграла Стилтьеса.

Теорема 9.2. *Если функция G непрерывна в интервале $[a, b]$ и функция F — неубывающая, то интеграл*

$$\int_a^b G(x)\,dF(x)$$

существует.

Замечание 9.3. В частном случае, когда $F(x) \equiv x$, теорема 9.2 сводится к известной теореме интегрального исчисления, которая гласит, что если G непрерывна на интервале $[a, b]$, то интеграл Римана $\int_a^b G(x)\,dx$ существует. Ввиду этого соотношения естественно, что доказательство теоремы 9.2 весьма похоже на доказательство соответствующей теоремы для интеграла Римана, хотя и несколько сложнее. Доказательство теоремы 9.2 мы дадим полностью, но опустим доказательства других теорем, аналогичных соответствующим теоремам относительно интегралов Римана.

Введем некоторые дополнительные обозначения, которые будут применяться в доказательстве теоремы 9.2 и некоторых вспомогательных лемм. Мы принимаем везде, что Δ, Δ_1, Δ_2 и т. д. суть разбиения интервала $[a, b]$, G непрерывна на $[a, b]$ и F — неубывающая на $[a, b]$. Мы определяем:

$$M_k = \max_{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k} G(x),$$

$$m_k = \min_{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k} G(x),$$

$$S_\Delta = \sum_{i=1}^{n} M_i\,[F(x_i) - F(x_{i-1})],$$

$$s_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i\,[F(x_i) - F(x_{i-1})].$$

Очевидно, $m_k \leqslant M_k$; а поскольку F не убывает, то $s_\Delta \leqslant S_\Delta$.

Точки $x_0=a$, x_1, ..., x_{n-1}, $x_n=b$, которые определяют разбиение Δ, называются *точками разбиения* Δ. Если всякая точка разбиения Δ_1 есть также точка разбиения Δ_2, то разбиение Δ_2 называется *подразбиением* разбиения Δ_1. Очевидно, если Δ_2 есть подразбиение Δ_1, а Δ_1 есть подразбиение Δ_2, то Δ_1 и Δ_2 тождественны.

Лемма 9.4. *Если Δ_0 есть подразбиение разбиения Δ,* то $s_{\Delta_0}\geqslant s_\Delta$.

Доказательство. Пусть точки разбиения Δ суть x_0, x_1, ..., x_n, а разбиение Δ_0 включает в себя все точки Δ плюс еще одну точку $\bar{x}$, которая не является точкой разбиения Δ. Пусть

$$m'_j=\min_{x_{j-1}\leqslant x\leqslant\bar{x}} G(x)$$

и

$$m''_j=\min_{\bar{x}\leqslant x\leqslant x_j} G(x).$$

Очевидно, $m'_j\geqslant m_j$ и $m''_j\geqslant m_j$. Следовательно,

$$m'_j[F(\bar{x})-F(x_{j-1})]+m''_j[F(x_j)-F(\bar{x})]\geqslant m_j[F(x_j)-F(x_{j-1})],$$

причем для $i=1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$ член $m_i[F(x_i)-F(x_{i-1})]$ входит и в выражение для s_Δ, и в выражение для s_{Δ_0}. Следовательно, в этом частном случае $s_\Delta\leqslant s_{\Delta_0}$.

Если Δ_0 есть какое-либо подразбиение разбиения Δ, отличное от самого Δ, то имеется конечная цепь разбиений, начинающаяся с Δ и кончающаяся Δ_0 и имеющая то свойство, что каждое разбиение этой цепи (за исключением Δ) есть такое подразбиение предыдущего, которое состоит из всех точек предыдущего разбиения и еще одной новой точки. Теперь лемма легко устанавливается путем повторных применений вышеуказанного рассуждения.

Аналогично доказывается

Лемма 9. 5. *Если Δ_0 — подразбиение разбиения Δ, то $S_{\Delta_0}\leqslant S_\Delta$.*

Лемма 9.6. *Если Δ_1 и Δ_2 суть разбиения интервала $[a, b]$, то $s_{\Delta_1}\leqslant S_{\Delta_2}$.*

Доказательство. Построим разбиение Δ_3, каждая точка которого есть точка либо Δ_1, либо Δ_2. Тогда Δ_3

есть подразбиение разбиений Δ_1 и Δ_2. Следовательно, на основании лемм 9.4 и 9.5 $s_{\Delta_1} \leqslant s_{\Delta_3}$ и $S_{\Delta_3} \leqslant S_{\Delta_2}$. Поскольку $s_{\Delta_3} \leqslant S_{\Delta_3}$, мы получаем искомый вывод.

Из этого предложения следует, что если Δ_1 — некоторое разбиение, то S_{Δ_1} является верхней границей чисел s_Δ для любых разбиений Δ. Следовательно, числа s_Δ имеют наименьшую верхнюю границу, которую мы обозначим через s. Аналогично, числа S_Δ имеют наибольшую нижнюю границу, которую мы обозначим через S.

Лемма 9.7. $\lim\limits_{\|\Delta\| \to 0} S_\Delta = \lim\limits_{\|\Delta\| \to 0} s_\Delta = S = s.$

Доказательство. Поскольку G непрерывна в замкнутом интервале $[a, b]$, она равномерно непрерывна в нем, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $|G(z_1) - G(z_2)| < \varepsilon$, как только $|z_1 - z_2| < \delta$. Это значит, что если $\|\Delta\| < \delta$, то $|M_k - m_k| < \varepsilon$ для $k = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно,

$$0 \leqslant S_\Delta - s_\Delta = \sum_{i=1}^{n} M_i [F(x_i) - F(x_{i-1})] - \sum_{i=1}^{n} m_i [F(x_i) - F(x_{i-1})] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) [F(x_i) - F(x_{i-1})] < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] = \varepsilon [F(b) - F(a)].$$

Поэтому мы можем написать:

$$0 \leqslant S_\Delta - s_\Delta = (S_\Delta - S) + (S - s) + (s - s_\Delta) \leqslant \varepsilon [F(b) - F(a)].$$

Каждая из трех скобок неотрицательна. Следовательно, поскольку разность $F(b) - F(a)$ фиксирована и ε произвольно мало, каждая из трех скобок должна стремиться к нулю, когда $\|\Delta\|$ стремится к нулю. Этим завершается доказательство.

Доказательство теоремы 9.2. Из определений символов m_k, M_k, s_Δ и S_Δ следует, что для любого разбиения Δ и для любого выбора величин z_i в (3) мы имеем:

$$s_\Delta \leqslant \sum_{i=1}^{n} G(z_i)\,[F(x_i) - F(x_{i-1})] \leqslant S_\Delta.$$

Из этого неравенства и из леммы 9.7 вытекает, что предел (3) существует и равен $s = S$.

Замечание 9.8. Легко показать, что условия, наложенные на G и F, не являются необходимыми для существования интеграла $\int\limits_a^b G(x)\,dF(x)$. В частности, очевидно, что вместо неубывающей функции F можно взять невозрастающую. Возможны другие обобщения, но для наших целей они не нужны. Следующие девять теорем можно установить посредством очень простых доказательств, из коих некоторые аналогичны обычным доказательствам подобных же теорем относительно римановых интегралов. Мы опустим такие доказательства.

Теорема 9.9. *Если $a < b < c$, то*

$$\int\limits_a^c G(x)\,dF(x) = \int\limits_a^b G(x)\,dF(x) + \int\limits_b^c G(x)\,dF(x)$$

при условии, что эти интегралы существуют.

Теорема 9.10. *Если указанные ниже интегралы существуют, то*

$$\int\limits_a^b [G(x) + H(x)]\,dF(x) = \int\limits_a^b G(x)\,dF(x) + \int\limits_a^b H(x)\,dF(x).$$

Теорема 9.11. *Если указанные ниже интегралы существуют, то*

$$\int\limits_a^b G(x)\,d[F(x) + H(x)] = \int\limits_a^b G(x)\,dF(x) + \int\limits_a^b G(x)\,dH(x).$$

Теорема 9.12. *Если указанные ниже интегралы существуют и если k — любое действительное число, то*

$$\int_a^b kG(x)\,dF(x) = k\int_a^b G(x)\,dF(x).$$

Теорема 9.13. *Если указанные ниже интегралы существуют и если k — любое действительное число, то*

$$\int_a^b G(x)\,d[kF(x)] = k\int_a^b G(x)\,dF(x).$$

Теорема 9.14. *Если указанные ниже интегралы существуют и если F — неубывающая функция, то*

$$\left|\int_a^b G(x)\,dF(x)\right| \leqslant \int_a^b \left|G(x)\right| dF(x).$$

Теорема 9.15. *Если указанные ниже интегралы существуют, если F — неубывающая и если $G(x) \leqslant H(x)$ для всех x из $[a, b]$, то*

$$\int_a^b G(x)\,dF(x) \leqslant \int_a^b H(x)\,dF(x).$$

Далее, если F непостоянна на $[a, b]$, если G и H непрерывны на $[a, b]$ и если $G(x) < H(x)$ для всех x из $[a, b]$, то

$$\int_a^b G(x)\,dF(x) < \int_a^b H(x)\,dF(x).$$

Теорема 9.16. *Если F есть любая функция распределения, то*

$$\int_0^1 1\,dF(x) = F(1) - F(0) = 1.$$

Теорема 9.17. *Если указанные ниже интегралы существуют, то*

$$\int_a^b G(x)\,dF(x) = G(b)F(b) - G(a)F(a) - \int_a^b F(x)\,dG(x).$$

Замечание 9.18. Теорема 9.17 соответствует общеизвестному способу интегрирования по частям обычных неопределенных интегралов.

Мы докажем теперь теорему, которая позволяет нам в некоторых случаях свести задачу вычисления интеграла Стилтьеса к задаче вычисления обычного (риманова) интеграла.

Теорема 9.19. *Если указанные ниже интегралы существуют и если функция F имеет производную F' в каждой точке $[a, b]$, то*

$$\int_a^b G(x)\,dF(x) = \int_a^b G(x)\,F'(x)\,dx.$$

Доказательство. Пусть точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ образуют разбиение Δ интервала $[a, b]$. Поскольку F имеет производную в $[a, b]$, то по теореме о среднем из этого следует, что имеются числа $y_1, \ldots, y_n$, такие, что $x_{i-1} \leqslant y_i \leqslant x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ и

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(y_i)[x_i - x_{i-1}]. \qquad (4)$$

Поскольку интеграл Римана $\int_a^b G(x)\,F'(x)\,dx$ существует, то существует и предел

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \|\Delta\|\to 0}} \sum_{i=1}^{n} G(y_i)\,F'(y_i)\,[x_i - x_{i-1}],$$

не зависящий от выбора величин y_i. Ввиду (4) имеем:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \|\Delta\|\to 0}} \sum_{i=1}^{n} G(y_i)\,F'(y_i)\,[x_i - x_{i-1}] =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \|\Delta\|\to 0}} \sum_{i=1}^{n} G(y_i)\,[F(x_i) - F(x_{i-1})].$$

Теперь наше предложение вытекает из этого равенства и из условия, что указанные в теореме два интеграла существуют.

Теперь мы докажем теорему, которая позволит нам вычислять интеграл Стилтьеса от функции $G(x)$ по ступенчатой функции $F(x)$.

Теорема 9.20. *Пусть a, b и $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — действительные числа, удовлетворяющие неравенствам*

$$a \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant b,$$

пусть $b_1, \ldots, b_n$ — действительные числа, и пусть ступенчатая функция F определена следующим образом:

$$F(x) = b_1 I_{a_1}(x) + b_2 I_{a_2}(x) + \ldots + b_n I_{a_n}(x).$$

Пусть G — любая функция, определенная на интервале $[a, b]$ и непрерывная в точках $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Тогда

$$\int_a^b G(x)\, dF(x) = b_1 G(a_1) + \ldots + b_n G(a_n).$$

Замечание 9.21. Заметим, что если условие непрерывности функции G в точках $a_1, a_2, \ldots, a_n$ не выполнено, то интеграл не существует. Следовательно, теорема позволяет нам вычислять интеграл $\int_a^b G(x)\, dF(x)$, когда F — ступенчатая функция и интеграл существует.

Напомним, что $I_a(x)$ мы определяли в последнем абзаце главы VIII.

Доказательство теоремы 9.20. На основании теорем 9.10 и 9.12, очевидно, достаточно доказать теорему для случая, когда

$$F(x) = I_{a_1}(x).$$

Функция G непрерывна при $x = a_1$; следовательно, всякому положительному числу ε соответствует положительное число δ, такое, что если $|x - a_1| < \delta$, то $|G(x) - G(a_1)| < \varepsilon$. Пусть Δ — некоторое разбиение интервала $[a, b]$, для которого $\|\Delta\| < \delta$, и пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — точки разбиения Δ. Пусть $x_{j-1} < a_1 \leqslant x_j$. Тогда $F(x_j) - F(x_{j-1}) = 1$, и $F(x_i) - F(x_{i-1}) = 0$ для $i \neq j$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} G(z_i)[F(x_i) - F(x_{i-1})] = G(z_j)[F(x_j) - F(x_{j-1})] = G(z_j).$$

Поскольку $x_{j-1} < a_1 \leqslant x_j$, $x_{j-1} \leqslant z_j \leqslant x_j$ и $|x_{j-1} - x_j| < \delta$, о $|z_j - a_1| < \delta$. Следовательно,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} G(z_i)[F(x_i) - F(x_{i-1})] - G(a_1)\right| = |G(z_j) - G(a_1)| < \varepsilon.$$

Отсюда непосредственно вытекает

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \|\Delta\|\to 0}} \sum_{i=1}^{n} G(z_i)[F(x_i) - F(x_{i-1})] = G(a_1).$$

Теорема доказана.

В заключение этой главы мы докажем три специальные теоремы, которыми воспользуемся в последующих главах.

Теорема 9.22. *Если G — непрерывная функция в замкнутом интервале* $[0, 1]$, *то*

$$\min_{F\in \mathbf{D}} \int_0^1 G(x)\,dF(x)$$

существует и

$$\min_{F\in \mathbf{D}} \int_0^1 G(x)\,dF(x) = \min_{0\leqslant x\leqslant 1} G(x);$$

кроме того,

$$\max_{F\in \mathbf{D}} \int_0^1 G(x)\,dF(x)$$

существует и

$$\max_{F\in \mathbf{D}} \int_0^1 G(x)\,dF(x) = \max_{0\leqslant x\leqslant 1} G(x).$$

Доказательство. Напомним, что $\mathbf{D}$ есть множество всех функций распределения. Поскольку функция G непрерывна в замкнутом интервале, то $\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} G(x)$ существует. Пусть a — число в интервале $[0, 1]$, такое, что

$$G(a) = \min_{0\leqslant x\leqslant 1} G(x).$$

Но поскольку для всех x в $[0,\ 1]$

$$G(a) \leqslant G(x),$$

то на основании теорем 9.16, 9.12 и 9.15 для любой функции распределения F

$$G(a) = G(a) \int_0^1 1dF(x) = \int_0^1 G(a)\,dF(x) \leqslant \int_0^1 G(x)\,dF(x),$$

и, следовательно,

$$G(a) \leqslant \inf_{F \in D} \int_0^1 G(x)\,dF(x). \tag{5}$$

Кроме того, на основании теоремы 9.20 имеем:

$$\inf_{F \in D} \int_0^1 G(x)\,dF(x) \leqslant \int_0^1 G(x)\,dI_a(x) = G(a). \tag{6}$$

Из (5) и (6) заключаем, что

$$\inf_{F \in D} \int_0^1 G(x)\,dF(x) = G(a) = \int_0^1 G(x)\,dI_a(x).$$

Итак, точная нижняя грань по F чисел

$$\int_0^1 G(x)\,dF(x)$$

действительно достигается (именно, при $F = I_a$), а это значит, что

$$\min_{F \in D} \int_0^1 G(x)\,dF(x)$$

существует и что

$$\min_{F \in D} \int_0^1 G(x)\,dF(x) = G(a). \tag{7}$$

Этим завершается доказательство первой части теоремы. Вторая часть доказывается аналогично.

Теорема 9.23. *Если G есть непрерывная функция в замкнутом интервале $[0, 1]$ и если $F_1, F_2, \ldots$ — последовательность функций распределения, сходящаяся к функции распределения F (во всякой точке непрерывности функции F), то*

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^1 G(x)\,dF_t(x)=\int_0^1 G(x)\,dF(x).$$

Замечание 9.24. При доказательстве этой теоремы мы применим обозначение, введенное перед леммой 9.4, конкретизируя его для случая, когда интервал $[a, b]$ совпадает с отрезком $[0, 1]$. Мы используем также следующую лемму, доказательство которой не представляет труда и здесь не приводится (см. упражнение 5 главы VIII).

Лемма 9.25. *Если F — функция распределения и δ — положительное число, то существуют точки*

$$0=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=1,$$

такие, что F непрерывна при x_i $(i=1, \ldots, n-1)$ и $|x_i-x_{i-1}|<\delta$ $(i=1, \ldots, n)$.

Доказательство теоремы 9.23. Пусть задано положительное число ε, и пусть δ — положительное число, такое, что если Δ_1 — любое разбиение интервала $[0, 1]$, для которого $\|\Delta_1\|<\delta$, то $S_{\Delta_1}-s_{\Delta_1}<\varepsilon$. Выберем разбиение Δ интервала $[0, 1]$, для которого $\|\Delta\|<\delta$ и такое, что точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$, образующие разбиение Δ (за исключением, быть может, x_0 и x_n), суть точки непрерывности функции F (лемма гарантирует нам, что такое разбиение существует).

Поскольку последовательность $F_t(x_i)$ $(t=1, 2, \ldots)$ сходится к $F(x_i)$ для любого i, то отсюда следует, что существует целое T, такое, что если $t\geqslant T$, то

$$|F_t(x_i)-F(x_i)|<\frac{\varepsilon}{n}\quad(i=0, 1, \ldots, n). \tag{8}$$

Поскольку $S_\Delta-s_\Delta<\varepsilon$, то

$$\left|\sum_{i=1}^{n}M_i[F(x_i)-F(x_{i-1})]-\int_0^1 G(x)\,dF(x)\right|<\varepsilon \tag{9}$$

и

$$\left|\sum_{i=1}^{n} m_i [F(x_i) - F(x_{i-1})] - \int_0^1 G(x)\,dF(x)\right| < \varepsilon. \quad (10)$$

Далее,

$$\sum_{i=1}^{n} M_i [F_t(x_i) - F_t(x_{i-1})] \geqslant \int_0^1 G(x)\,dF_t(x) \quad (11)$$

и

$$\int_0^1 G(x)\,dF_t(x) \geqslant \sum_{i=1}^{n} m_i [F_t(x_i) - F_t(x_{i-1})]. \quad (12)$$

Пусть

$$A = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |G(x)|.$$

Тогда $M_i \leqslant A$ $(i = 1, \ldots, n)$. Но если $t \geqslant T$, мы имеем:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} M_i [F(x_i) - F(x_{i-1})] - \sum_{i=1}^{n} M_i [F_t(x_i) - F_t(x_{i-1})]\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} M_i [F(x_i) - F_t(x_i) + F_t(x_{i-1}) - F(x_{i-1})]\right| \leqslant$$

$$\leqslant A\left[\sum_{i=1}^{n} |F(x_i) - F_t(x_i)| + \sum_{i=1}^{n} |F_t(x_{i-1}) - F(x_{i-1})|\right] \leqslant 2A\varepsilon, \quad (13)$$

где последнее неравенство вытекает из (8) и (9). Из (9) и (13) имеем:

$$\left|\int_0^1 G(x)\,dF(x) - \sum_{i=1}^{n} M_i [F_t(x_i) - F_t(x_{i-1})]\right| \leqslant (1 + 2A)\,\varepsilon. \quad (14)$$

Используя (10) и (13), аналогично получаем:

$$\left|\int_0^1 G(x)\,dF(x) - \sum_{i=1}^{n} m_i [F_t(x_i) - F_t(x_{i-1})]\right| \leqslant (1 + 2A)\,\varepsilon. \quad (15)$$

Из (14) и (15) ввиду (11) и (12) вытекает, что

$$\left| \int_0^1 G(x)\, dF(x) - \int_0^1 G(x)\, dF_t(x) \right| \leqslant (1+2A)\,\varepsilon. \quad (16)$$

Поскольку $2A+1$ фиксировано, а ε произвольно, то из (16) следует:

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^1 G(x)\, dF_t(x) = \int_0^1 G(x)\, dF(x),$$

что и требовалось доказать.

Прежде чем доказать последнюю теорему этой главы, введем одно определение.

Определение 9.26. Пусть F — функция, определенная в интервале $[a-h,\ a]$, где h — положительное число. Предположим, что для всякой убывающей последовательности $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ неотрицательных чисел, стремящихся к нулю при $n \longrightarrow \infty$, для которых $\varepsilon_1 \leqslant h$, мы имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{F(a)-F(a-\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} \right] = c.$$

Тогда мы говорим, что c есть *производная функции F в точке a слева.*

Аналогично, пусть F определена в интервале $[a,\ a+h]$, где h — любое положительное число, и пусть для всякой убывающей последовательности $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ неотрицательных чисел, стремящихся к нулю, для которых $\varepsilon_1 \leqslant h$, мы имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{F(a+\varepsilon_n)-F(a)}{\varepsilon_n} \right] = d.$$

Тогда мы говорим, что d есть *производная функции F в точке a справа.* Очевидно, если производная функции F в точке a существует, то существуют обе односторонние производные, равные этой производной. Обратно, если обе односторонние производные существуют и равны между собой, то и обычная производная функции F также существует. Поскольку функция распределения неубывающая, она не может иметь отрицательной производной ни слева, ни справа.

Теорема 9.27. *Пусть $H(x)$ — непрерывная функция на $[0, 1]$, v — действительное число, такое, что $H(x) \leqslant v$ для всех $x \in [0, 1]$, и $F(x)$ — функция распределения, такая, что*

$$\int_0^1 H(x)\,dF(x) = v.$$

Тогда, если $\bar{x}$ — любая точка интервала $0 < \bar{x} < 1$ и производная слева функции F в точке $\bar{x}$ не равна нулю (то есть положительна или бесконечна), то

$$H(\bar{x}) = v.$$

Доказательство. Допустим, что теорема неверна. Тогда $H(\bar{x}) = v - 2\varepsilon$, где ε положительно. Поскольку H непрерывна, существует положительное число δ, такое, что $H(x) < v - \varepsilon$, когда $|x - \bar{x}| \leqslant \delta$. Мы имеем, далее,

$$v = \int_0^1 H(x)\,dF(x) = \int_0^{x-\delta} H(x)\,dF(x) + \int_{\bar{x}-\delta}^{\bar{x}} H(x)\,dF(x) +$$

$$+ \int_{\bar{x}}^1 H(x)\,dF(x) \leqslant v \int_0^{\bar{x}-\delta} 1 dF(x) + (v - \varepsilon) \int_{\bar{x}-\delta}^{x} 1 dF(x) +$$

$$+ v \int_{\bar{x}}^1 1 dF(x) = v \int_0^1 1 dF(x) - \varepsilon \int_{\bar{x}-\delta}^{\bar{x}} 1 dF(x) =$$

$$= v - \varepsilon \int_{\bar{x}-\delta}^{x} 1 dF(x). \qquad (17)$$

Легко доказать, что

$$\int_{\bar{x}-\delta}^{\bar{x}} 1 dF(x) = F(\bar{x}) - F(\bar{x} - \delta). \qquad (18)$$

Поскольку F — неубывающая и ее производная слева в точке $\bar{x}$ отлична от нуля, то

$$F(\bar{x}) - F(\bar{x} - \delta) > 0,$$

так что

$$\varepsilon \int\limits_{\bar{x}-\delta}^{\bar{x}} 1\, dF(x) > 0.$$

Так как это противоречит формуле (17), то мы заключаем, что теорема справедлива.

Библиографические замечания

Более подробный разбор интеграла Стилтьеса можно найти в работах Виддера [123] и [124], на которых в большой степени основана настоящая глава *).

Упражнения

1. Пусть функция F определена следующим образом:

$$F(x) = 0 \quad \text{для} \quad x < \frac{1}{2},$$

$$F(x) = x^2 \quad \text{для} \quad x \geqslant \frac{1}{2}.$$

Вычислите интегралы:

$$\int\limits_0^1 x^3\, dF(x),$$

$$\int\limits_0^1 \sin x\, dF(x).$$

2. Пусть функция G определена следующим образом:

$$G(x) = 0 \quad \text{для} \quad x < \frac{1}{2},$$

$$G(x) = \frac{1}{10} \quad \text{для} \quad \frac{1}{2} \leqslant x < \frac{3}{4},$$

$$G(x) = x^3 \quad \text{для} \quad \frac{3}{4} \leqslant x \leqslant 1.$$

---

*) См. также [194] и [206]. (*Прим. ред.*)

Вычислите интеграл

$$\int_0^1 e^x \, dG(x).$$

3. Вычислите интеграл

$$\int_0^1 x^2 \, db(x),$$

где

$$b(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} I_{\frac{k}{n}}(x).$$

4. Пусть F — функция, определенная в упражнении 1, а G — функция, определенная в упражнении 2. Покажите, что интеграл

$$\int_0^1 G(x) \, dF(x)$$

не существует.

5. Докажите теорему 9.9.

6. Докажите теорему 9.10.

7. Докажите теорему 9.14.

8. Докажите теорему 9.25.

9. Докажите равенство (18).

10. Покажите, что вывод теоремы 9.14 не будет верен, если мы опустим условие, что функция F неубывающая.

11. Покажите, что функция F, определенная уравнением

$$F(x) = |x|,$$

имеет при $x=0$ производные слева и справа.

12. Пусть функция F определена следующим образом:

$$F(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad \text{если} \quad x \neq 0,$$

$$F(0) = 0.$$

Покажите, что при $x=0$ функция F не имеет ни одной односторонней производной.

13. Постройте функцию, которая имела бы при $x=0$ производную справа, но не имела бы производной слева.

ГЛАВА X

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ИГР

1. Цена непрерывной игры

Обратимся теперь к определению цены непрерывной игры и оптимальных смешанных стратегий для обоих игроков. Мы докажем, что при непрерывной платежной функции эти величины всегда существуют.

Предположим, что M есть платежная функция непрерывной игры, и пусть P_1 выбирает x из $[0, 1]$ согласно функции распределения F, а P_2 выбирает y из $[0, 1]$ согласно функции распределения G. Тогда для любого заданного y математическое ожидание выигрыша у игрока P_1 будет

$$\int_0^1 M(x, y)\, dF(x),$$

и, следовательно, поскольку y выбрано по функции распределения G, общее математическое ожидание выигрыша у P_1 будет

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 M(x, y)\, dF(x) \right] dG(y).$$

Это можно написать просто так:

$$\int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dF(x)\, dG(y).$$

Положив

$$E(F, G) = \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dF(x)\, dG(y),$$

мы тем самым говорим, что математическое ожидание выигрыша для P_1, если P_1 применяет функцию распределения F, а P_2 — функцию распределения G, равно $E(F, G)$. Поскольку эта игра с нулевой суммой, математическое ожидание выигрыша для P_2 равно $-E(F, G)$.

Можно показать (см. работу Брея [15]), что если M непрерывна, то

$$\int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dG(y)\, dF(x) = \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dF(x)\, dG(y).$$

Следовательно, когда M непрерывна, мы могли бы точно так же определить $E(F, G)$:

$$E(F, G) = \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dG(y)\, dF(x).$$

Если оказывается, что

$$v_1 = \max_{F \in D} \min_{G \in D} E(F, G)$$

и

$$v_2 = \min_{G \in D} \max_{F \in D} E(F, G)$$

оба существуют, то, как можно убедиться (путем рассуждения, аналогичного использованному в главе I в связи с прямоугольными играми), P_1 может выбрать функцию распределения так, чтобы быть уверенным, что он получит по меньшей мере v_1, а P_2 может выбрать такую функцию распределения, которая воспрепятствует игроку P_1 получить больше чем v_2. Если v_1 и v_2 равны, то P_1 может получить в точности $v_1 (= v_2)$ и не может надеяться получить больше, если только P_2 не совершает глупостей. Поэтому вопрос о том, когда v_1 и v_2 существуют и равны между собой, очень важен для теории игр.

Когда величины v_1 и v_2 существуют и равны между собою, мы называем их общее значение *ценой* игры (для P_1). В этом случае, как было показано в теореме 1.5, существует седловая точка $\| F_0 G_0 \|$ функции $E(F, G)$, то есть имеется пара функций распределения F_0 и G_0

таких, что для всех функций распределения F и G

$$E(F,\ G_0) \leqslant E(F_0,\ G_0) \leqslant E(F_0,\ G).$$

Такая F_0 или такая G_0 называется *оптимальной смешанной стратегией* соответственно для P_1 или P_2. Мы называем иногда упорядоченную пару $\|F_0 G_0\|$ оптимальных стратегий обоих игроков *решением* игры.

2. Алгебраические леммы

Чтобы доказать основную теорему о непрерывных играх, уместно сначала установить две алгебраические леммы.

Лемма 10.1. *Пусть*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n$$

суть m однородных линейных форм n неизвестных (с действительными коэффициентами), и пусть ν-действительное число, такое, что для всякого элемента $\|x_1 \ldots x_n\|$ в S_n существует целое число $k \leqslant m$, для которого

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j \leqslant \nu.$$

Тогда существует элемент $\|\bar{y}_1 \ldots \bar{y}_m\|$ множества S_m такой, что для всякого элемента $\|x_1 \ldots x_n\|$ множества S_n

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{y}_i x_j \leqslant \nu.$$

Доказательство. Пусть $\|\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n\|$, $\|\bar{y}_1 \ldots \bar{y}_m\|$ — оптимальные стратегии соответственно для P_1 и P_2 в прямоугольной игре, имеющей матрицу

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{matrix} \right\|.$$

(Эти оптимальные стратегии существуют на основании теоремы 2.6.) По условию леммы имеется целое $k_0 \leqslant m$, такое, что

$$\sum_{j=1}^{n} a_{k_0 j}\overline{x}_j \leqslant \nu.$$

Пусть $\| y_1^* y_2^* \ldots y_m^* \|$ — элемент множества S_m такой, что $y_i = 1$, если $i = k_0$, и $y_i = 0$, если $i \neq k_0$. Далее, если $\| x_1 \ldots x_n \|$ есть любой элемент множества S_n, то мы получаем, используя теорему 2.6,

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{y}_i x_j \leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{y}_i\overline{x}_j \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i^* \overline{x}_j = \sum_{j=1}^{n} a_{k_0 j}\overline{x}_j \leqslant \nu,$$

что и требовалось доказать.

Следующую лемму можно доказать таким же образом.

Лемма 10.2. *Пусть*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n$$

суть m однородных линейных форм n неизвестных (с действительными коэффициентами), и пусть ν — действительное число, такое, что для всякого элемента $\| x_1 \ldots x_n \|$

в S_n *существует целое* $k \leqslant m$, *для которого*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j \geqslant v.$$

Тогда существует элемент $\|\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_m\|$ *множества* S_m *такой, что для всякого элемента* $\|x_1 \ldots x_n\|$ *множества* S_n

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{y}_i x_j \geqslant v.$$

Замечание 10.3. Следует отметить, что хотя леммы 10.1 и 10.2 являются чисто алгебраическими, мы доказали их при помощи теоремы, относящейся к играм (теорема 2.6). С другой стороны, приняв эти алгебраические леммы, мы легко можем доказать теорему 2.6.

3. Основная теорема

Теорема 10.4. *Если* M *есть непрерывная функция двух переменных в замкнутом единичном квадрате, то величины*

$$\max_{F\in D}\min_{G\in D} \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dF(x)\, dG(y)$$

и

$$\min_{G\in D}\max_{F\in D} \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dF(x)\, dG(y)$$

существуют и равны между собой.

Доказательство. Поскольку $M(x, y)$ непрерывна по x и y, мы заключаем, что для любой функции распределения G

$$\int_0^1 M(x, y)\, dG(y)$$

непрерывная функция от x в замкнутом интервале $[0, 1]$. Поэтому на основании теоремы 9.22

$$\max_{F\in D} \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dG(y)\, dF(x)$$

существует и

$$\max_{F \in \mathbf{D}} \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dG(y)\, dF(x) = \max_x \int_0^1 M(x, y)\, dG(y). \qquad (1)$$

Обозначив через x_G значение x, при котором интеграл в правой части равенства имеет максимальную величину, получим:

$$\max_x \int_0^1 M(x, y)\, dG(y) = \int_0^1 M(x_G, y)\, dG(y). \qquad (2)$$

Поскольку $M(x_G, y) \geqslant \min\limits_x \min\limits_y M(x, y)$, то из (1) и (2), на основании теоремы 9.15, следует, что

$$\max_{F \in \mathbf{D}} \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dG(y)\, dF(x) = \int_0^1 M(x_G, y)\, dG(y) \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^1 [\min_x \min_y M(x, y)]\, dG(y) =$$

$$= [\min_x \min_y M(x, y)] \int_0^1 dG(y) = \min_x \min_y M(x, y).$$

Поскольку это неравенство справедливо для любого G и правая часть не содержит G, мы заключаем, что

$$\max_{F \in \mathbf{D}} \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dG(y)\, dF(x)$$

имеет нижнюю границу и, следовательно, нижнюю грань. Положим

$$\mu = \inf_{G \in \mathbf{D}} \max_{F \in \mathbf{D}} \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dG(y)\, dF(x). \qquad (3)$$

Из определения нижней грани следует, что существует последовательность $G_1, G_2, G_3, \ldots$ функций распределения такая, что

$$\mu = \lim_{n\to\infty} \max_{F\in D} \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dG_n(y)\, dF(x). \qquad (4)$$

В соответствии с теоремой 8.2 мы вправе предположить, что последовательность $G_1, G_2, G_3, \ldots$ выбрана так, что она сходится к функции распределения G_0 во всех точках непрерывности функции G_0.

Пусть $\bar{x}$ — значение x такое, что

$$\max_x \int_0^1 M(x, y)\, dG_0(y) = \int_0^1 M(\bar{x}, y)\, dG_0(y). \qquad (5)$$

По теореме 9.23 мы имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 M(\bar{x}, y)\, dG_n(y) = \int_0^1 M(\bar{x}, y)\, dG_0(y). \qquad (6)$$

Поскольку для каждого n

$$\int_0^1 M(\bar{x}, y)\, dG_n(y) \leqslant \max_x \int_0^1 M(x, y)\, dG_n(y),$$

мы видим, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 M(\bar{x}, y)\, dG_n(y) \leqslant \lim_{n\to\infty} \max_x \int_0^1 M(x, y)\, dG_n(y). \qquad (7)$$

Из (5), (6) и (7) мы получаем:

$$\max_x \int_0^1 M(x, y)\, dG_0(y) \leqslant \lim_{n\to\infty} \max_x \int_0^1 M(x, y)\, dG_n(y). \qquad (8)$$

На основании теоремы 9.22 мы заключаем из неравенства (8), что

$$\max_{F\in D} \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dG_0(y)\, dF(x) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \max_{F\in D} \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dG_n(y)\, dF(x), \qquad (9)$$

и, следовательно, на основании равенств (3) и (4)

$$\max_{F\in D}\int_0^1\int_0^1 M(x,\ y)\,dG_0(y)\,dF(x)\leqslant$$
$$\leqslant \inf_{G\in D}\max_{F\in D}\int_0^1\int_0^1 M(x,\ y)\,dG(y)\,dF(x). \qquad (10)$$

С другой стороны, из определения нижней грани следует, что

$$\inf_{G\in D}\max_{F\in D}\int_0^1\int_0^1 M(x,\ y)\,dG(y)\,dF(x)\leqslant$$
$$\leqslant\max_{F\in D}\int_0^1\int_0^1 M(x,\ y)\,dG_0(y)\,dF(x), \qquad (11)$$

откуда получим:

$$\inf_{G\in D}\max_{F\in D}\int_0^1\int_0^1 M(x,\ y)\,dG(y)\,dF(x)=$$
$$=\max_{F\in D}\int_0^1\int_0^1 M(x,\ y)\,dG_0(y)\,dF(x). \qquad (12)$$

Равенство (12) означает, что нижняя грань выражения

$$\max_{F\in D}\int_0^1\int_0^1 M(x,\ y)\,dG(y)\,dF(x)$$

достигается при $G=G_0$, и следовательно, это выражение имеет минимум. Поэтому мы можем написать:

$$\mu=\min_{G\in D}\max_{F\in D}\int_0^1\int_0^1 M(x,\ y)\,dG(y)\,dF(x). \qquad (13)$$

Доказательство существования величины

$$\nu=\max_{F\in D}\min_{G\in D}\int_0^1\int_0^1 M(x,\ y)\,dG(y)\,dF(x) \qquad (14)$$

аналогично.

Остается показать, что $\mu = \nu$. Если G есть любой элемент множества $\mathbf{D}$, то из (1) и (2) мы видим, что число x_G удовлетворяет следующему условию:

$$\int_0^1 M(x_G, y)\,dG(y) = \max_x \int_0^1 M(x, y)\,dG(y) =$$

$$= \max_{F \in \mathbf{D}} \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\,dG(y)\,dF(x) \geqslant$$

$$\geqslant \min_{G \in \mathbf{D}} \max_{F \in \mathbf{D}} \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\,dG(y)\,dF(x) = \mu.$$

Отсюда мы заключаем: для всякого G из $\mathbf{D}$ существует $\bar{x}$ в $[0, 1]$ такое, что

$$\int_0^1 M(\bar{x}, y)\,dG(y) \geqslant \mu. \qquad (15)$$

Пусть теперь ε — любое положительное число. Из непрерывности функции M мы видим, что существует такое n, что, когда $|x' - x''| < \frac{1}{n}$ и $|y' - y''| < \frac{1}{n}$, имеем: $|M(x', y') - M(x'', y'')| < \varepsilon$. Если $\pi = \| p_1 \ \ldots \ p_n \|$ есть любой элемент множества $\mathbf{S}_n$, то пусть G_π есть ступенчатая функция, определенная следующим образом:

$$G_\pi(y) = 0 \quad \text{для} \quad y < \frac{1}{n},$$

$$G_\pi(y) = p_1 \quad \text{для} \quad \frac{1}{n} \leqslant y < \frac{2}{n},$$

$$G_\pi(y) = p_1 + p_2 \quad \text{для} \quad \frac{2}{n} \leqslant y < \frac{3}{n},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$G_\pi(y) = p_1 + \ldots + p_{n-1} \quad \text{для} \quad \frac{n-1}{n} \leqslant y < 1,$$

$$G_\pi(y) = p_1 + \ldots + p_n = 1 \quad \text{для} \quad y = 1.$$

Очевидно, для любого x из $[0, 1]$ существует $i \leqslant n$ такое, что $\left| x - \frac{i}{n} \right| < \frac{1}{n}$, и, следовательно, ввиду непрерывности функции M такое, что

$$\left|\int_0^1 M(x, y)\,dG_\pi(y) - \int_0^1 M\left(\frac{i}{n}, y\right) dG_\pi(y)\right| =$$

$$= \left|\int_0^1 \left[M(x, y) - M\left(\frac{i}{n}, y\right)\right] dG_\pi(y)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \varepsilon\, dG_\pi(y) = \varepsilon.$$

Итак, для всякого x из $[0, 1]$ существует $i \leqslant n$ такое, что

$$\int_0^1 M\left(\frac{i}{n}, y\right) dG_\pi(y) \geqslant \int_0^1 M(x, y)\,dG_\pi(y) - \varepsilon. \qquad (16)$$

Из (16) и (15) мы заключаем, что

$$\int_0^1 M\left(\frac{i}{n}, y\right) dG_\pi(y) \geqslant \mu - \varepsilon. \qquad (17)$$

Оценивая левую часть выражения (17) с помощью теоремы 9.20, мы заключаем, что существует $i \leqslant n$ такое, что

$$\sum_{j=1}^{n} M\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) p_j \geqslant \mu - \varepsilon.$$

Итак, мы показали следующее: для всякого положительного ε существует такое n, что для всякого элемента $\| p_1 \ \ldots \ p_n \|$ множества S_n существует такое i, что

$$\sum_{j=1}^{n} M\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) p_j \geqslant \mu - \varepsilon. \qquad (18)$$

Для фиксированного n величины $M\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $M\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$, $M\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right)$ и т. д. постоянны. Таким образом, мы имеем n линейных форм

$$\sum_{j=1}^{n} M\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) p_j \quad (i=1, \ldots, n)$$

с n неизвестными $p_1, \ldots, p_n$; неравенство (18) означает, что эти формы удовлетворяют условию леммы 10.2. Следовательно, на основании леммы 10.2 мы заключаем: для всякого положительного ε существует число n и элемент $\| q_1 \ldots q_n \|$ множества S_n такие, что для всякого элемента $\| p_1 \ldots p_n \|$ множества S_n

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) p_j q_i \geqslant \mu - \varepsilon. \tag{19}$$

Определим теперь ступенчатую функцию F_0, положив

$$\begin{aligned}
&F_0(x) = 0 && \left(0 \leqslant x < \frac{1}{n}\right), \\
&F_0(x) = q_1 && \left(\frac{1}{n} \leqslant x < \frac{2}{n}\right), \\
&F_0(x) = q_1 + q_2 && \left(\frac{2}{n} \leqslant x < \frac{3}{n}\right), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && \\
&F_0(x) = q_1 + \ldots + q_{n-1} && \left(\frac{n-1}{n} \leqslant x < 1\right), \\
&F_0(x) = q_1 + \ldots + q_n = 1 && (x = 1).
\end{aligned}$$

Тогда из теоремы 9.20 мы видим, что для всех y

$$\int_0^1 M(x, y)\, dF_0(x) = \sum_{i=1}^{n} M\left(\frac{i}{n}, y\right) q_i.$$

В частности, мы имеем:

$$\int_0^1 M\left(x, \frac{j}{n}\right) dF_0(x) = \sum_{i=1}^{n} M\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) q_i \ (j=1, \ldots, n). \tag{20}$$

Умножая j-е уравнение в (20) на p_j и складывая, мы получаем на основании (19):

$$\sum_{j=1}^{n}\left[p_j\int_0^1 M\left(x,\frac{j}{n}\right)dF_0(x)\right]=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left[p_j\sum_{i=1}^{n}M\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\right)q_i\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}M\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\right)p_jq_i\geqslant\mu-\varepsilon. \tag{21}$$

Поскольку (21) справедливо для всех элементов $\|p_1\ldots p_n\|$ из S_n, мы можем, в частности, взять $p_j=1$ и $p_k=0$ при $k\neq j$; отсюда мы заключаем, что

$$\int_0^1 M\left(x,\frac{j}{n}\right)dF_0(x)\geqslant\mu-\varepsilon\quad(j=1,\ \ldots,\ n). \tag{22}$$

Из непрерывности функции M вытекает, что для всякого y существует некоторое j такое, что

$$\int_0^1 M(x,\ y)\,dF_0(x)\geqslant\int_0^1 M\left(x,\ \frac{j}{n}\right)dF_0(x)-\varepsilon. \tag{23}$$

Из неравенств (22) и (23) заключаем, что для всякого y

$$\int_0^1 M(x,\ y)\,dF_0(x)\geqslant\mu-2\varepsilon. \tag{24}$$

Применяя теорему 9.15 к неравенству (24), мы видим, что для всякой функции распределения G

$$\int_0^1\int_0^1 M(x,\ y)\,dF_0(x)\,dG(y)\geqslant\int_0^1(\mu-2\varepsilon)\,dG(y)=\mu-2\varepsilon,.$$

и, следовательно,

$$\min_{G\in D}\int_0^1\int_0^1 M(x,\ y)\,dF_0(x)\,dG(y)\geqslant\mu-2\varepsilon. \tag{25}$$

Из (14), (25) и определения максимума мы получаем теперь, что

$$\nu = \max_{F \in D} \min_{G \in D} \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dF(x)\, dG(y) \geqslant$$

$$\geqslant \min_{G \in D} \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dF_0(x)\, dG(y) \geqslant \mu - 2\varepsilon.$$

Поскольку неравенство

$$\nu \geqslant \mu - 2\varepsilon$$

имеет место для всех положительных ε, мы заключаем, что

$$\nu \geqslant \mu.$$

С другой стороны, на основании (13), (14) и теоремы 1.1, мы имеем:

$$\nu \leqslant \mu,$$

откуда

$$\mu = \nu,$$

что и требовалось доказать.

4. Способы вычисления и проверки решений

Хотя мы теперь уверены в том, что непрерывные игры с непрерывными платежными функциями имеют решения (то есть имеют цены и оптимальные стратегии), у нас еще нет никакого способа вычисления решений для заданных платежных функций. Это вообще трудная задача, так как для ее решения нужно найти максимальное значение интеграла Стилтьеса относительно множества всех функций распределения. Вполне общих методов решения этой задачи у нас нет, но в следующих двух главах мы рассмотрим два частных случая, в которых можно найти решения.

Докажем некоторые теоремы, с помощью которых можно решить, являются ли данные стратегии действительно оптимальными.

Теорема 10.5. *Пусть M — непрерывная платежная функция непрерывной игры, и пусть F_0 и G_0 — функции* *распределения. Тогда имеют место следующие равносильные условия:*

1) F_0 *есть оптимальная стратегия для* P_1, *а* G_0 *есть оптимальная стратегия для* P_2;

2) *если* F *и* G — *любые функции распределения, то*

$$\int_0^1\int_0^1 M(x, y)\,dF(x)\,dG_0(y) \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1\int_0^1 M(x, y)\,dF_0(x)\,dG_0(y) \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1\int_0^1 M(x, y)\,dF_0(x)\,dG(y);$$

3) *если* z *и* w - *любые точки интервала* $[0, 1]$, *то*

$$\int_0^1 M(z, y)\,dG_0(y) \leqslant \int_0^1\int_0^1 M(x, y)\,dF_0(x)\,dG_0(y) \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 M(x, w)\,dF_0(x).$$

Доказательство. Равносильность условий (1) и (2) следует прямо из теоремы 10.4 и из определения седловой точки. Чтобы убедиться в том, что из условия (2) вытекает условие (3), мы берем $F(x) = I_z(x)$ и $G(y) = I_w(y)$ и применяем теорему 9.20. Чтобы убедиться в том, что из условия (3) вытекает условие (2), предположим, что для всех z и w в $[0, 1]$ мы имеем:

$$\int_0^1 M(z, y)\,dG_0(y) \leqslant \int_0^1\int_0^1 M(x, y)\,dF_0(x)\,dG_0(y) \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 M(x, w)\,dF_0(x).$$

Заменив z на x в первой части этого неравенства, мы получим (на основании теоремы 9.15) для любой функции распределения F

$$\int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dG_0(y)\, dF(x) \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \left[\int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dF_0(x)\, dG_0(y) \right] dF(x) =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dF_0(x)\, dG_0(y).$$

Аналогичным образом мы можем получить вторую часть неравенства (2) из второй части неравенства (3), что завершает доказательство.

Теорема 10.6. *Пусть M — непрерывная платежная функция непрерывной игры, цена которой равна v. Функция распределения F_0 есть оптимальная стратегия для первого игрока тогда и только тогда, когда для всякого y из* $[0, 1]$

$$v \leqslant \int_0^1 M(x, y)\, dF_0(x).$$

Функция распределения G_0 есть оптимальная стратегия для второго игрока тогда и только тогда, когда для всякого x из $[0, 1]$

$$\int_0^1 M(x, y)\, dG_0(y) \leqslant v.$$

Доказательство. Если F_0 — оптимальная стратегия первого игрока, то на основании теоремы 10.5 мы заключаем, что для всех y

$$v \leqslant \int_0^1 M(x, y)\, dF_0(x). \tag{26}$$

Предположим теперь, что F_0 есть функция распределения, которая удовлетворяет неравенству (26) для всех y. Пусть $\overline{G}$ — оптимальная стратегия для второго игрока. На основании теорем 9.16 и 9.15 из неравенства (26) мы заключаем, что

$$v = \int_0^1 v\, d\overline{G}(y) \leqslant \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dF_0(x)\, d\overline{G}(y). \tag{27}$$

Поскольку $\overline{G}$ оптимальна, мы видим на основании теоремы 10.5, что для любой функции распределения F

$$\int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dF(x)\, d\overline{G}(y) \leqslant v;$$

в частности,

$$\int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dF_0(x)\, d\overline{G}(y) \leqslant v. \tag{28}$$

Из (27) и (28) мы имеем:

$$v = \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dF_0(x)\, d\overline{G}(y), \tag{29}$$

и, следовательно, из (26) для всех y

$$\int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dF_0(x)\, d\overline{G}(y) \leqslant \int_0^1 M(x, y)\, dF_0(x). \tag{30}$$

Поскольку $\overline{G}$ оптимальна, мы заключаем из теоремы 10.5, что для всех x

$$\int_0^1 M(x, y)\, d\overline{G}(y) \leqslant v,$$

и, следовательно, в соответствии с равенством (29) приходим к выводу, что

$$\int_0^1 M(x, y)\, d\overline{G}(y) \leqslant \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dF_0(x)\, d\overline{G}(y). \tag{31}$$

Из (30) и (31) на основании теоремы 10.5 мы заключаем, что F_0 есть оптимальная стратегия для первого игрока, что и требовалось доказать.

Доказательство второй части теоремы аналогично.

Теорема 10.7. *Пусть M — непрерывная платежная функция непрерывной игры, ν — действительное число и F_0 и G_0 суть функции распределения такие, что для всех x и y из* $[0, 1]$

$$\int_0^1 M(x, y)\, dG_0(y) \leqslant \nu \leqslant \int_0^1 M(x, y)\, dF_0(x).$$

Тогда ν есть цена игры, а F_0 и G_0 суть оптимальные стратегии соответственно для первого и второго игрока.

Доказательство. Из условия мы заключаем, как и в доказательстве теоремы 10.5, что для всех функций распределения F и G

$$\int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dF(x)\, dG_0(y) \leqslant \nu \leqslant \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dF_0(x)\, dG(y);$$

отсюда

$$v = \min_G \max_F \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dF(x)\, dG(y) \leqslant$$

$$\leqslant \max_F \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dF(x)\, dG_0(y) \leqslant \nu \leqslant$$

$$\leqslant \min_G \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dF_0(x)\, dG(y) \leqslant$$

$$\leqslant \max_F \min_G \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dF(x)\, dG(y) = v,$$

так что $\nu = v$. Теперь на основании теоремы 10.6 вытекает, что F_0 и G_0 суть оптимальные стратегии.

Только что доказанные теоремы дают нам способы проверки решения игры. Мы поясним это на примерах.

Пример 10.8. Платежная функция непрерывной игры есть

$$M(x, y) = \frac{1}{1+(x-y)^2}.$$

Мы хотим показать, что решение игры определяется так:

$$v = \frac{4}{5},$$

$$F_0(x) = I_{\frac{1}{2}}(x),$$

$$G_0(y) = \frac{1}{2} I_0(y) + \frac{1}{2} I_1(y).$$

По теореме 10.7 нам необходимо лишь показать, что

$$\frac{4}{5} \leqslant \int_0^1 \left[\frac{1}{1+(x-y)^2}\right] dI_{\frac{1}{2}}(x) \quad \text{для} \quad 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

и

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{1+(x-y)^2}\right] d\left[\frac{1}{2} I_0(y) + \frac{1}{2} I_1(y)\right] \leqslant \frac{4}{5} \quad \text{для} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

На основании теорем 9.11 и 9.20 вместо этого мы можем доказать равносильные неравенства

$$\frac{4}{5} \leqslant \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}-y\right)^2} \quad \text{для} \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \tag{32}$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(x-1)^2}\right] \leqslant \frac{4}{5} \quad \text{для} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{33}$$

Умножая обе части неравенства (32) на положительную величину

$$5\left[1+\left(\frac{1}{2}-y\right)^2\right],$$

получаем равносильное неравенство

$$4 + 4\left(\frac{1}{2}-y\right)^2 \leqslant 5,$$

которое в свою очередь равносильно неравенству

$$\left(\frac{1}{2}-y\right)^2 \leqslant \frac{1}{4},$$

а последнее, очевидно, выполняется для всех y из $[0, 1]$.

Аналогичным образом, умножая обе части неравенства (33) на произведение знаменателей входящих в него дробей (это произведение положительно) и производя очевидные упрощения, приходим к равносильному неравенству

$$8x^4-16x^3+14x^2-6x+1\geqslant 0,$$

которое можно также записать так:

$$(2x-1)^2[x^2+(x-1)^2]\geqslant 0.$$

Поскольку последнее неравенство, очевидно, имеет место для всех x, мы заключаем, что (33) выполняется и, следовательно, предложенные величины действительно представляют решение данной игры.

Теорема 10.9. *Пусть M — непрерывная платежная функция непрерывной игры, цена которой равна v, и пусть F_0 и G_0 — оптимальные стратегии соответственно для первого и второго игрока. Если мы положим*

$$H(x)=\int_0^1 M(x,\ y)\,dG_0(y)$$

и

$$K(y)=\int_0^1 M(x,\ y)\,dF_0(x),$$

то

$$v=\max_x H(x)=\min_y K(y).$$

Доказательство. По теореме 10.6 мы имеем для всех x

$$H(x)\leqslant v$$

и, следовательно,

$$\max_x H(x)\leqslant v.$$

Допустим теперь, что

$$\max_x H(x)<v.$$

Тогда для всех x

$$H(x) < v$$

и, следовательно,

$$v = \int_0^1 H(x)\,dF_0(x) < \int_0^1 v\,dF_0(x) = v.$$

Мы пришли к противоречию. Следовательно,

$$\max_x H(x) = v,$$

что и требовалось доказать. Аналогично доказывается, что

$$\min_y K(y) = v.$$

Следующая теорема дает достаточное условие того, что чистая стратегия, если она применяется против оптимальной смешанной стратегии противника, дает цену игры.

Теорема 10.10. *Пусть M — непрерывная платежная функция непрерывной игры, цена которой равна v, пусть F_0 и G_0 — оптимальные смешанные стратегии соответственно для первого и второго игрока. Положим*

$$H(x) = \int_0^1 M(x, y)\,dG_0(y)$$

и

$$K(y) = \int_0^1 M(x, y)\,dF_0(x).$$

Тогда, если $\bar{x}$ есть любая точка интервала [0, 1], *в которой производная слева функции F_0 отлична от нуля* (*то есть положительна и конечна или бесконечна*), *то*

$$H(\bar{x}) = v = \max_x H(x);$$

аналогично, если $\bar{y}$ есть любая точка интервала [0, 1], *в которой производная слева функции G_0 отлична от нуля, то*

$$K(\bar{y}) = v = \min_y K(y).$$

В частности, если F_0 — ступенчатая функция, так что

$$F_0(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i I_{a_i}(x), \text{ где } \alpha_i \neq 0,$$

то

$$H(a_1) = H(a_2) = \ldots = H(a_m) = v = \max_x H(x).$$

А если G_0 — ступенчатая функция, так что

$$G_0(y) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i I_{b_i}(y), \quad \text{где } \beta_i \neq 0,$$

то

$$K(b_1) = K(b_2) = \ldots = K(b_n) = v = \min_y K(y).$$

Доказательство. По теореме 10.6, для всех x из $[0, 1]$ мы имеем:

$$H(x) \leqslant v.$$

Далее, по определению цены игры, мы имеем:

$$\int_0^1 H(x)\, dF_0(x) = v.$$

Отсюда, если производная слева функции F_0 отлична от нуля при $x = \bar{x}$, мы заключаем (на основании теорем 9.27 и 10.9), что

$$H(\bar{x}) = v = \max_x H(x).$$

В частности, если a_i есть точка, в которой F_0 имеет скачок, то производная слева функции F_0 в точке a_i равна бесконечности, и, следовательно,

$$H(a_i) = v = \max_x H(x).$$

Доказательство остальной части теоремы аналогично.

Следующий пример указывает достаточно общий метод действительного нахождения решения данной игры. Метод состоит в основном в том, что пытаются найти решение данного вида (в нашем случае в виде ступенчатых функций). Если метод не дает решения данной формы, мы можем продолжать пробовать функции другого вида (например, ступенчатые функции с бо́льшим числом ступеней).

Пример 10.11. Дана платежная функция непрерывной игры

$$M(x, y) = \frac{1}{1+\frac{5}{4}(x-y)^2}.$$

Мы хотим найти оптимальные стратегии обоих игроков в виде

$$\left.\begin{aligned} F_0(x) &= I_a(x), \\ G_0(y) &= \beta I_b(y) + (1-\beta) I_c(y). \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Допуская, что имеется решение вида (34), мы получим:

$$v = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{5}{4}(x-y)^2}\, dF_0(x)\, dG_0(y) =$$

$$= \frac{\beta}{1+\frac{5}{4}(a-b)^2} + \frac{1-\beta}{1+\frac{5}{4}(a-c)^2};$$

следовательно, по теореме 10.6 для всех y из $[0, 1]$

$$\frac{\beta}{1+\frac{5}{4}(a-b)^2} + \frac{1-\beta}{1+\frac{5}{4}(a-c)^2} \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{5}{4}(x-y)^2}\, dF_0(x) =$$

$$= \frac{1}{1+\frac{5}{4}(a-y)^2}. \tag{35}$$

Поскольку $c \in [0, 1]$, из (35) мы получим, в частности,

$$\frac{\beta}{1+\frac{5}{4}(a-b)^2} + \frac{1-\beta}{1+\frac{5}{4}(a-c)^2} \leqslant \frac{1}{1+\frac{5}{4}(a-c)^2},$$

или

$$\frac{\beta}{1+\frac{5}{4}(a-b)^2} \leqslant \frac{\beta}{1+\frac{5}{4}(a-c)^2}. \tag{36}$$

Применяя способы, описанные в главе VII, мы можем показать, что функция $M(x, y)$ не имеет седловой точки в единичном квадрате, поэтому игра не может иметь решений вида (34), где $\beta=0$ или $1-\beta=0$. Игак, из неравенства (36) мы заключаем, что

$$\frac{1}{1+\frac{5}{4}(a-b)^2} \leqslant \frac{1}{1+\frac{5}{4}(a-c)^2}.$$

Аналогично, подставляя в (35) b вместо y, мы получаем:

$$\frac{1}{1+\frac{5}{4}(a-c)^2} \leqslant \frac{1}{1+\frac{5}{4}(a-b)^2},$$

откуда

$$\frac{1}{1+\frac{5}{4}(a-c)^2} = \frac{1}{1+\frac{5}{4}(a-b)^2}.$$

Из этого равенства на основании (35) мы заключаем, что для всех y из $[0, 1]$

$$\frac{\beta}{1+\frac{5}{4}(a-b)^2} + \frac{1-\beta}{1+\frac{5}{4}(a-b)^2} \leqslant \frac{1}{1+\frac{5}{4}(a-y)^2},$$

или

$$\frac{1}{1+\frac{5}{4}(a-b)^2} \leqslant \frac{1}{1+\frac{5}{4}(a-y)^2}, \tag{37}$$

откуда

$$(a-b)^2 \geqslant (a-y)^2. \tag{38}$$

Из неравенства (38) вытекает, что либо $b=0$, либо $b=1$. Аналогично либо $c=0$, либо $c=1$. Далее, b не может быть равно c, поскольку M не имеет седловой точки. Не ограничивая общности, мы можем считать, что

$$\left.\begin{aligned} b &= 0, \\ c &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Из (38) и (39) получаем:

$$a^2 \geqslant (a-1)^2,$$

откуда

$$a \geqslant \frac{1}{2}.$$

Аналогично,

$$a \leqslant \frac{1}{2},$$

$$a = \frac{1}{2}. \tag{40}$$

Итак, функции F_0 и G_0 имеют следующий вид:

$$F_0(x) = I_{1/2}(x),$$
$$G_0(y) = \beta I_0(x) + (1-\beta) I_1(x),$$

и мы получаем:

$$v = \frac{\beta}{1+\frac{5}{4}(a-b)^2} + \frac{1-\beta}{1+\frac{5}{4}(a-c)^2} = \frac{\beta}{1+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{4}} + \frac{1-\beta}{1+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{4}} = \frac{16}{21}. \tag{41}$$

Положив

$$H(x) = \int_0^1 M(x, y)\, dG_0(y) = \frac{\beta}{1+\frac{5}{4}x^2} + \frac{1-\beta}{1+\frac{5}{4}(x-1)^2},$$

мы видим (на основании теоремы 10.10), что

$$H\left(\frac{1}{2}\right) = \max_x H(x). \tag{42}$$

Поскольку H дифференцируема в открытом интервале $(0, 1)$ и поскольку $\frac{1}{2}$ находится в этом интервале, мы заключаем из равенства (42), что производная

$$\frac{d}{dx} H(x)$$

при $x = \frac{1}{2}$ должна быть равна нулю. Так как

$$\frac{d}{dx} H(x) = \frac{-\frac{5}{2}\beta x}{\left[1+\frac{5}{4}x^2\right]^2} + \frac{-\frac{5}{2}(1-\beta)(x-1)}{\left[1+\frac{5}{4}(x-1)^2\right]^2},$$

мы получаем отсюда:

$$\frac{-\frac{5}{2}\beta\left(\frac{1}{2}\right)}{\left[1+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{4}\right]^2} + \frac{-\frac{5}{2}(1-\beta)\left(\frac{1}{2}-1\right)}{\left[1+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{4}\right]^2} = 0,$$

и, следовательно,

$$\beta = \frac{1}{2}. \tag{43}$$

Итак, из (39), (40) и (43) мы заключаем, что если для нашей игры существуют оптимальные стратегии, имеющие форму (34), то мы должны иметь:

$$\left.\begin{aligned} F_0(x) &= I_1(x), \\ G_0(y) &= \frac{1}{2} I_0(y) + \frac{1}{2} I_1(y), \\ v &= \frac{16}{21}. \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Как в примере 10.8, мы убеждаемся, что (44) действительно есть решение.

Следующий пример показывает, как можно проверить, что данные непрерывные функции распределения представляют оптимальные стратегии для данной игры.

Пример 10.12. Платежная функция непрерывной игры есть

$$M(x, y) = \frac{(1+x)(1+y)}{(1+xy)^2}.$$

Мы хотим показать, что решение игры будет:

$$v = \frac{1}{\lg 2},$$

$$F_0(x) = \frac{\lg(1+x)}{\lg 2},$$

$$G_0(y) = \frac{\lg(1+y)}{\lg 2}.$$

Поскольку F_0 дифференцируема в интервале $[0, 1]$, мы видим на основании теоремы 9.19, что для всех y из $[0, 1]$

$$\int_0^1 M(x, y)\, dF_0(x) = \int_0^1 M(x, y) \frac{d}{dx} F_0(x)\, dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{(1+x)(1+y)}{(1+xy)^2} \left[\frac{1}{(x+1)\lg 2}\right] dx = \frac{1}{\lg 2}. \tag{45}$$

Аналогично, для всех x в $[0, 1]$

$$\int_0^1 M(x, y)\, dG_0(y) = \frac{1}{\lg 2}. \tag{46}$$

Из равенств (45) и (46) на основании теоремы 10.7 мы заключаем, что данные стратегии действительно оптимальны и

$$v = \frac{1}{\lg 2}.$$

Следующая теорема позволяет нам в некоторых случаях сразу находить цену непрерывной игры.

Теорема 10.13. *Пусть M — платежная функция непрерывной игры, имеющей решение, и положим, что для всех x и y из интервала* $[0, 1]$

$$M(x, y) = -M(y, x).$$

Тогда цена игры равна нулю, и любая оптимальная стратегия одного игрока будет также оптимальной стратегией второго игрока.

Доказательство. Пусть v — цена игры, и пусть F_0 оптимальная стратегия первого игрока, а G_0 — оптимальная стратегия второго. Тогда на основании теоремы 10.5 мы видим, что для всех функций распределения F и G

$$\int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dF(x)\, dG_0(y) \leqslant \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dF_0(x)\, dG_0(y) \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dF_0(x)\, dG(y). \tag{47}$$

Применив к неравенству (47) условие

$$M(x, y) \equiv -M(y, x),$$

мы получим:

$$\int_0^1 \int_0^1 -M(y, x)\, dF(x)\, dG_0(y) \leqslant \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dF_0(x)\, dG_0(y) \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^1 \int_0^1 -M(y, x)\, dF_0(x)\, dG(y);$$

отсюда

$$\int_0^1 \int_0^1 M(y, x)\, dF_0(x)\, dG(y) \leqslant -\int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dF_0(x)\, dG_0(y) \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^1 \int_0^1 M(y, x)\, dF(x)\, dG_0(y). \qquad (48)$$

Изменив обозначения переменных интегрирования в (48), мы получаем:

$$\int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dG(x)\, dF_0(y) \leqslant -\int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dF_0(x)\, dG_0(y) \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dG_0(x)\, dF(y). \qquad (49)$$

Из (49) на основании теоремы 10.7 заключаем, что

$$v = -\int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dF_0(x)\, dG_0(y) = -v,$$

откуда $v = 0$. Далее, из (49) и теоремы 10.7 вытекает, что F_0 и G_0 — оптимальные стратегии как для первого, так и для второго игрока.

В следующем примере, как и в примере 10.11, стоит задача отыскания оптимальных стратегий данной формы, но в этом случае мы будем искать не ступенчатые функции, а непрерывные функции распределения данного вида.

Пример 10.14. Платежная функция непрерывной игры есть

$$M(x, y) = \sin 2\pi (x - y).$$

Надо найти оптимальные стратегии для обоих игроков в виде:

$$\left.\begin{aligned} &F_0(0) = 0, \; F_0(x) = a_1 + a_2 x \quad \text{для} \quad x \neq 0, \\ &G_0(0) = 0, \; G_0(y) = b_1 + b_2 y \quad \text{для} \quad y \neq 0. \end{aligned}\right\} \qquad (50)$$

Поскольку F_0 есть функция распределения, мы должны иметь:

$$1 = F_0(1) = a_1 + a_2,$$

и, следовательно, $a_2 = 1 - a_1$. Итак, опуская индекс, мы можем написать:

$$F_0(x) = a + (1 - a)\,x \quad \text{для} \quad x \neq 0$$

и аналогично

$$G_0(y) = b + (1 - b)\,y \quad \text{для} \quad y \neq 0.$$

Мы замечаем, что

$$M(y,\ x) = \sin 2\pi (y - x) = -\sin 2\pi (x - y) = -M(x,\ y),$$

так что на основании теоремы 10.13

$$v = 0,$$

и любая оптимальная стратегия для первого игрока есть также оптимальная стратегия для второго игрока, то есть мы можем положить:

$$\left.\begin{aligned} F_0(x) &= a + (1 - a)\,x \quad \text{для} \quad x \neq 0, \\ G_0(y) &= a + (1 - a)\,y \quad \text{для} \quad y \neq 0. \end{aligned}\right\} \qquad (51)$$

Поскольку точка $\|0 \quad 0\|$ не есть седловая точка функции M, в (51) не может быть $a = 1$. Следовательно, поскольку функция F_0 имеет положительную производную (в частности, положительную производную слева) во всякой точке x из открытого интервала $(0,\ 1)$, мы заключаем (на основании теоремы 10.10), что для всякого x из $(0,\ 1)$

$$\int_0^1 M(x,\ j)\, dG_0(y) = 0,$$

то есть

$$\int_0^1 \sin 2\pi (x - y)\, dG_0(y) = 0.$$

Поскольку G_0 при $y = 0$ имеет скачок величины a и непрерывна всюду, кроме этой точки, мы легко находим:

$$\int_0^1 \sin 2\pi (x-y)\, dG_0(y) =$$

$$= a \sin 2\pi (x-0) + (1-a) \int_0^1 \sin 2\pi (x-y)\, dy =$$

$$= a \sin 2\pi x + (1-a) \frac{1}{2\pi} \{\cos(-2\pi x) - \cos[2\pi(1-x)]\} =$$

$$= a \sin 2\pi x + (1-a)\left(\frac{1}{2\pi}\right)\cdot 0 = a \sin 2\pi x.$$

Итак, мы имеем:

$$a \sin 2\pi x = 0$$

для всех x из открытого интервала (0, 1), а отсюда мы заключаем, что

$$a = 0.$$

Таким образом, мы получаем:

$$\left.\begin{aligned} v &= 0, \\ F_0(x) &= x, \\ G_0(y) &= y. \end{aligned}\right\} \qquad (52)$$

Теперь легко проверить, как в примере 10.12, что (52) действительно есть решение данной игры.

В качестве последнего примера рассмотрим задачу отыскания решения некоторой игры с разрывной платежной функцией. При решении этой игры мы воспользуемся некоторыми теоремами (как, например, теорема 10.10), хотя неизвестна возможность их применения к разрывным платежным функциям; никакой ошибки от этого, конечно, не произойдет, так как мы проверим полученный ответ. В этом примере нам удастся свести задачу к решению дифференциального уравнения; к сожалению, этот способ, хотя и весьма остроумный, оказывается применимым только к очень специальным играм.

Пример 10.15. Платежная функция непрерывной игры M такова:

$$\begin{aligned} M(x, y) &= x - y + xy \quad \text{для} \quad x < y, \\ M(x, y) &= 0 \quad \text{для} \quad x = y, \\ M(x, y) &= x - y - xy \quad \text{для} \quad x > y. \end{aligned}$$

Мы хотим найти непрерывную оптимальную стратегию F_0 для первого игрока, удовлетворяющую следующим условиям:

$$F_0(x) = 0 \quad \text{для} \quad 0 \leqslant x \leqslant \alpha, \tag{53}$$

$$F_0(x) \text{ дважды дифференцируема при } x \neq \alpha, \tag{54}$$

$$\frac{d}{dx} F_0(x) \neq 0 \quad \text{для} \quad x > \alpha; \tag{55}$$

здесь α — фиксированное число.

Поскольку $M(x, y) = -M(y, x)$, то на основании теоремы 10.13 мы видим, что

$$v = 0$$

и что F_0 — оптимальная стратегия также для второго игрока.

Из (55) и теоремы 10.10 мы заключаем, что для $x > \alpha$

$$\int_0^1 M(x, y)\, dF_0(y) = v = 0$$

и, следовательно,

$$\int_0^x [x - y - xy]\, dF_0(y) + \int_x^1 [x - y + xy]\, dF_0(y) = 0. \tag{56}$$

Поскольку по условию F_0 дифференцируема, мы полагаем:

$$P_0(y) = \frac{d}{dy} F_0(y);$$

далее, используя теорему 9.19, мы получаем из равенства (56) для любого $x > \alpha$ равенство

$$\int_0^x [x - y - xy]\, P_0(y)\, dy + \int_x^1 [x - y + xy]\, P_0(y)\, dy = 0,$$

которое легко приводится к виду

$$x - \int_0^1 yP_0(y)\,dy - x\int_0^x yP_0(y)\,dy + x\int_x^1 yP_0(y)\,dy = 0. \tag{57}$$

Дифференцируя (57) по x и применяя правило дифференцирования под знаком интеграла, получаем:

$$1 - \int_0^x yP_0(y)\,dy - x\cdot 1\cdot xP_0(x) + \int_x^1 yP_0(y)\,dy - x\cdot 1\cdot xP_0(x) = 0,$$

или

$$-1 + 2x^2P_0(x) + \int_0^x yP_0(y)\,dy - \int_x^1 yP_0(y)\,dy = 0. \tag{58}$$

Дифференцируя (58) опять по x, получаем:

$$4xP_0(x) + 2x^2\frac{d}{dx}P_0(x) + xP_0(x) + xP_0(x) = 0,$$

и отсюда

$$x^2\frac{d}{dx}P_0(x) + 3xP_0(x) = 0.$$

Следовательно, для $x > \alpha$ мы должны иметь:

$$x\frac{d}{dx}P_0(x) = -3P_0(x).$$

Решая это дифференциальное уравнение, мы получаем:

$$P_0(x) = \frac{k}{x^3}, \tag{59}$$

где k — некоторая константа, и отсюда

$$F_0(x) = \frac{-k}{2x^2} + h, \tag{60}$$

где h — также константа.

Итак, мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} &F_0(x) = 0 && (x \leqslant \alpha),\\ &F_0(x) = \frac{-k}{2x^2} + h && (x \geqslant \alpha). \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

Поскольку равенство (56) справедливо для всех $x > \alpha$, то ввиду непрерывности функции мы заключаем, что оно справедливо также для $x=\alpha$. Итак,

$$\int_0^\alpha [\alpha - y - \alpha y]\, dF_0(y) + \int_\alpha^1 [\alpha - y + \alpha y]\, dF_0(y) = 0. \quad (62)$$

Но из первого равенства (61) мы имеем:

$$\int_0^\alpha [\alpha - y - \alpha y]\, dF_0(y) = 0,$$

и, следовательно, из (62) получаем:

$$\int_\alpha^1 [\alpha - y + \alpha y]\, dF_0(y) = 0,$$

или, ввиду второго равенства (61),

$$\int_\alpha^1 [\alpha - y + \alpha y]\, d\left[\frac{-k}{2y^2} + h\right] = 0,$$

или

$$\int_\alpha^1 [\alpha - y + \alpha y]\left[\frac{k}{y^3}\right] dy = 0.$$

Но поскольку функция M не имеет седловой точки, мы видим, что $k \neq 0$ и, следовательно,

$$\int_\alpha^1 \left(\frac{\alpha}{y^3} - \frac{1}{y^2} + \frac{\alpha}{y^2}\right) dy = 0.$$

Проводя интегрирование, находим:

$$\left[-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{1} - \frac{\alpha}{1}\right] - \left[-\frac{\alpha}{2\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{\alpha}\right] = 0,$$

и, следовательно, либо $\alpha = \frac{1}{3}$, либо $\alpha = 1$. Но поскольку при $\alpha = 1$ функция M имела бы седловую точку, мы заключаем, что

$$\alpha = \frac{1}{3}. \quad (63)$$

Поскольку F_0 непрерывна, то на основании равенств (61) мы должны иметь:

$$0 = F_0(\alpha) = F_0\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{9k}{2} + h,$$

так что

$$h = \frac{9k}{2}. \tag{64}$$

Поскольку F_0 есть функция распределения, мы должны иметь:

$$1 = F_0(1) = -\frac{k}{2} + h,$$

так что

$$h = \frac{k}{2} + 1. \tag{65}$$

Решая совместно уравнения (64) и (65), мы находим:

$$\left.\begin{aligned} h &= \frac{9}{8}, \\ k &= \frac{1}{4}. \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Итак, если имеется какая-либо оптимальная стратегия, удовлетворяющая условиям (53), (54) и (55), то решение игры определяется следующими равенствами:

$$\left.\begin{aligned} &v = 0, \\ &F_0(x) = 0 && \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}\right), \\ &F_0(x) = \frac{9}{8} - \frac{1}{8x^2} && \left(\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 1\right), \\ &G_0(y) = 0 && \left(0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{3}\right), \\ &G_0(y) = \frac{9}{8} - \frac{1}{8y^2} && \left(\frac{1}{3} \leqslant y \leqslant 1\right). \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Проверим теперь, что равенства (67) действительно дают решение, то есть покажем, что если F и G суть любые функции распределения, то

$$E(F, G_0) \leqslant E(F_0, G_0) \leqslant E(F_0, G) \tag{68}$$

и

$$E(F_0, G_0) = 0. \tag{69}$$

Легко убедиться, что (69) справедливо; легко также показать, что (68) справедливо для всех функций распределения, непрерывных в интервале (0, 1]. Но из того, что $M(x, y)$ разрывна при $x = y \neq 0$, мы видим, что величины $E(F, G_0)$ и $E(F_0, G)$ не существуют, если F и G имеют разрывы в полуоткрытом интервале (0, 1].

Следовательно, в силу определения интеграла Стилтьеса неравенства (68) не имеют смысла, если F и G имеют разрывы в (0, 1], поэтому мы можем лишь сказать, что неравенству (68) удовлетворяют все функции распределения F и G, непрерывные в (0, 1]. Однако мы можем устранить это затруднение, обобщив наше определение интеграла Стилтьеса, а именно, введя понятие интеграла Лебега — Стилтьеса, который связан с интегралом Стилтьеса (иногда называемым интегралом Римана — Стилтьеса) примерно так же, как интеграл Лебега связан с интегралом Римана. Если мы положим:

$$E(F, G) = \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dF(x)\, dG(y),$$

где интегралы понимаются в смысле Лебега — Стилтьеса, то неравенство (68) имеет смысл и справедливо для всех функций F и G, даже для разрывных.

В этой книге мы не будем вводить интегралы Лебега — Стилтьеса, потому что для изложения надлежащей теории этих интегралов необходимо основательное знакомство с другими разделами математики. Но и не вводя это понятие, мы можем сказать, что данные функции распределения представляют оптимальные стратегии для обоих игроков в том смысле, что для всякого x и y из [0, 1] мы имеем:

$$E(x, G_0) \leqslant E(F_0, G_0) \leqslant E(F_0, y).$$

Замечание 10.16. В примере 10.15 нам удалось найти решение непрерывной игры с разрывной платежной функцией. Таким образом, оказывается, что теорему 10.4 можно обобщить так, чтобы охватить некоторые разрывные функции. В математической литературе можно найти подобные примеры, но мы не собираемся их приводить. Следует лишь отметить, что можно интуитивно прийти к обобщению теоремы 10.4. Пусть имеется игра Г, платежная функция M которой не непрерывна; существуют функции Θ и Φ, взаимно однозначно отображающие интервал $[0, 1]$ на себя, и функция

$$M'(x, y) = M(\Theta(x), \Phi(y))$$

непрерывна. Поскольку M' непрерывна, то игра Г$'$, имеющая платежную функцию M', имеет решение. Но так как Г получается из Г$'$ путем переименования x и y, мы видим, что игра Г также имеет решение.

Итак, пусть имеется игра, у которой разрывная платежная функция M определена следующим образом:

$$M(x, y) = \begin{cases} (x-y)^2 & \text{для } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \text{ и } 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}, \\ \left(x+y-\frac{1}{2}\right)^2 & \text{для } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \text{ и } \frac{1}{2} < y, \\ \left(x+y-\frac{1}{2}\right)^2 & \text{для } \frac{1}{2} < x \text{ и } 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}, \\ (x-y)^2 & \text{для } \frac{1}{2} < x \text{ и } \frac{1}{2} < y. \end{cases}$$

Определив Θ условиями

$$\Theta(u) = \frac{1}{2} - u \quad \text{для} \quad 0 \leqslant u \leqslant \frac{1}{2},$$

$$\Theta(u) = u \quad \text{для} \quad \frac{1}{2} < u,$$

мы видим, что Θ отображает взаимно однозначно интервал $[0, 1]$ на себя и что для всех x и y

$$M'(x, y) = M(\Theta(x), \Theta(y)) = (x-y)^2.$$

Поскольку M' непрерывна, мы заключаем, что игра, у которой платежная функция есть M, также имеет решение.

Однако нужно заметить, что игра с разрывной платежной функцией может вообще не иметь никакой цены. Пример игры, которая по интуитивным соображениям действительно не должна иметь цены, был приведен в главе VII (пример 7.3).

Следующие теоремы будут полезны в дальнейших главах при решении некоторых игр.

Теорема 10.17. *Пусть M — непрерывная платежная функция непрерывной игры, и предположим, что для первого игрока существует оптимальная стратегия вида I_a. Тогда цена игры v определяется формулой*

$$v = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} \min_{0 \leqslant y \leqslant 1} M(x, y),$$

а в качестве константы a может быть принято любое решение уравнения

$$\min_{0 \leqslant y \leqslant 1} M(a, y) = v.$$

Аналогично, если для второго игрока существует оптимальная стратегия вида I_b, то

$$v = \min_{0 \leqslant y \leqslant 1} \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} M(x, y),$$

а в качестве константы b может быть принято любое решение уравнения

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} M(x, b) = v.$$

Доказательство. Чтобы доказать первую часть теоремы, мы замечаем, что по условию существует оптимальная стратегия для первого игрока, принадлежащая множеству $\mathbf{D}_1$ (множеству всех одноступенчатых функций). Отсюда, используя теорему 9.22, получаем:

$$v = \max_{F \in \mathbf{D}} \min_{G \in \mathbf{D}} \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dF(x)\, dG(y) =$$

$$= \max_{I_a \in \mathbf{D}_1} \min_{G \in \mathbf{D}} \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dI_a(x)\, dG(y) =$$

$$= \max_{0 \leqslant a \leqslant 1} \min_{G \in \mathbf{D}} \int_0^1 M(a, y)\, dG(y) =$$

$$= \max_{0 \leqslant a \leqslant 1} \min_{0 \leqslant y \leqslant 1} M(a, y) = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} \min_{0 \leqslant y \leqslant 1} M(x, y),$$

что и требовалось доказать.

Далее, если I_a — оптимальная стратегия первого игрока, то по теореме 10.9

$$v = \min_{0 \leqslant y \leqslant 1} \int_0^1 M(x, y)\, dI_a(x),$$

или

$$v = \min_{0 \leqslant y \leqslant 1} M(a, y). \tag{70}$$

Итак, если I_a есть оптимальная стратегия первого игрока, то a должно удовлетворять равенству (70). С другой стороны, если мы предположим, что a — какое-либо число, удовлетворяющее равенству (70), то для всех y

$$v \leqslant M(a, y) = \int_0^1 M(x, y)\, dI_a(x),$$

так что на основании теоремы 10.6 I_a есть оптимальная стратегия. Доказательство второй части теоремы аналогично.

Замечание 10.13. Из теоремы 10.17 вытекает очевидное следствие, что если M — непрерывная платежная функция непрерывной игры и если существует оптимальная стратегия I_a для первого игрока и оптимальная стратегия I_b для второго игрока, то M имеет седловую точку.

Теорему 10.17 легко обобщить для игр, в которых существуют оптимальные стратегии, являющиеся ступенчатыми функциями любого данного конечного порядка. Мы сформулируем это обобщение, оставив доказательство (весьма похожее на доказательство теоремы 10.17) в качестве упражнения.

Теорема 10.19. *Пусть M — непрерывная платежная функция непрерывной игры, и пусть существует оптимальная стратегия для первого игрока в виде*

$$\alpha_1 I_{a_1} + \ldots + \alpha_m I_{a_m}(x).$$

Тогда цена игры v определяется формулой

$$v = \max_{0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_m \leqslant 1} \ \max_{\| \alpha_1 \ldots \alpha_m \| \in S_m} \ \min_{0 \leqslant y \leqslant 1} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i M(a_i, y),$$

где в качестве констант $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ *и* $a_1, \ldots, a_m$ *можно взять любые решения уравнения*

$$\min_{0 \leqslant y \leqslant 1} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i M(a_i, y) = v.$$

Аналогично, если существует оптимальная стратегия для второго игрока в виде

$$\beta_1 I_{b_1}(y) + \ldots + \beta_n I_{b_n}(y),$$

то

$$v = \min_{0 \leqslant b_1 \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant 1} \; \min_{\| \beta_1 \ldots \beta_n \| \in S_n} \; \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} \sum_{i=1}^{n} \beta_i M(x, b_i),$$

а в качестве констант $\beta_1, \ldots, \beta_n$ *и* $b_1, \ldots, b_n$ *можно взять любые решения уравнения*

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} \sum_{i=1}^{n} \beta_i M(x, b_i) = v.$$

Для последующих ссылок мы включим две теоремы, которые будут использованы в главе XI. Доказательства этих теорем мы оставляем в качестве упражнений.

Теорема 10.20. *Любая выпуклая линейная комбинация оптимальных стратегий есть оптимальная стратегия.*

Теорема 10.21. *Если*

$$F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$$

последовательность оптимальных стратегий, которая сходится к функции распределения F *во всякой точке непрерывности функции* F, *то* F *есть оптимальная стратегия.*

Библиографические замечания

Впервые доказательство теоремы 10.4 было дано в работе Виля [109]. Доказательства обобщений этой теоремы даны в работах Вальда [115] и Карлина [56].

Упражнения

1. Докажите лемму 10.2.

2. Проверьте непосредственными алгебраическими выкладками, что если

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

две однородные линейные формы, такие, что для всякого $\| x_1 x_2 \|$ в S_2 либо

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leqslant 0,$$

либо

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leqslant 0,$$

то существует элемент $\| \overline{y}_1 \overline{y}_2 \|$ множества S_2 такой, что для всех $\| x_1 x_2 \|$ из S_2

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2)\overline{y}_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)\overline{y}_2 \leqslant 0.$$

3. Пусть Γ — непрерывная игра, у которой платежная функция есть

$$M(x, y) = \frac{1}{1 + \lambda (x - y)^2},$$

где $0 < \lambda \leqslant \frac{4}{3}$. Покажите, что следующие равенства составляют решение игры Γ:

$$F_0(x) = I_{\frac{1}{2}}(x),$$

$$G_0(y) = \frac{1}{2} I_0(y) + \frac{1}{2} I_1(y),$$

$$v = \frac{4}{4 + \lambda}.$$

4. Покажите, что игра примера 10.11 не имеет такого решения, чтобы оптимальная стратегия второго игрока была элементом множества D_1, то есть чтобы мы имели для некоторого a

$$G_0(y) = I_a(y).$$

5. Покажите, что если f есть непрерывная функция, такая, что для всех u

$$f(u + 1) = f(u),$$

и если мы положим

$$M(x, y) = f(x - y),$$

то непрерывная игра, у которой платежная функция есть M, имеет следующее решение:

$$F_0(x) = x,$$
$$G_0(y) = y,$$
$$v = \int_0^1 f(u)\,du.$$

6. Платежная функция непрерывной игры есть

$$M(x, y) = \frac{1}{1 + 2(x - y)^2}.$$

Покажите, что не существует оптимальных стратегий, имеющих следующий вид:

$$F_0(x) = I_a(x),$$
$$G_0(y) = \beta_1 I_{b_1}(y) + \beta_2 I_{b_2}(y).$$

7. Найдите оптимальные стратегии для игры упражнения 6, имеющие следующий вид:

$$F_0(x) = \alpha_1 I_{a_1}(x) + \alpha_2 I_{a_2}(x),$$
$$G_0(y) = \beta_1 I_{b_1}(y) + \beta_2 I_{b_2}(y).$$

8. Покажите, что если

$$F_0(x) = x,$$
$$G_0(y) = y$$

суть оптимальные стратегии в игре, имеющей непрерывную платежную функцию M, то

$$F^*(x) = x^2,$$
$$G^*(y) = y^2$$

суть оптимальные стратегии в игре, у которой платежная функция M^* определяется уравнением

$$M^*(x, y) = M(x^2, y^2).$$

9. Обобщите предложение, установленное в упражнении 8.

10. Пусть a — фиксированное положительное число, и пусть

$$\begin{aligned} M(x, y) &= a(x-y) + xy \quad &\text{для} \quad x < y,\\ M(x, y) &= 0 \quad &\text{для} \quad x = y,\\ M(x, y) &= a(x-y) - xy \quad &\text{для} \quad x > y. \end{aligned}$$

Найдите решение игры, для которой платежная функция есть M.

11. Докажите теорему 10.20.

12. Покажите, что существует решение игры, платежная функция которой определена следующим образом:

$$M(0, y) = 1 - y,$$
$$M(x, y) = |x - y| \quad \text{для} \quad 0 < x < 1,$$
$$M(1, y) = y.$$

Указание. Примените функцию Θ, определенную следующим образом:

$$\Theta(0) = 1,$$
$$\Theta(x) = x \quad \text{для} \quad 0 < x < 1,$$
$$\Theta(1) = 0.$$

13. Платежная функция непрерывной игры есть

$$M(x, y) = e^{y-x} \quad \text{для} \quad y < x,$$
$$M(x, y) = e^{x-y} \quad \text{для} \quad y \geqslant x.$$

Найдите для этой игры оптимальные стратегии, имеющие следующий вид:

$$F_0(x) = \alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 [I_0(x) + I_1(x)],$$
$$G_0(y) = \beta_1 G_1(y) + \beta_2 [I_0(y) + I_1(y)],$$

где F_1 и G_1 суть дважды дифференцируемые функции распределения при

$$\frac{dF_1(x)}{dx} \neq 0, \qquad \frac{dG_1(y)}{dy} \neq 0 \quad \text{и} \quad \alpha_1 > 0, \; \beta_1 > 0.$$

14. Для игры примера 10.14 найдите оптимальные стратегии, имеющие вид:

$$F_0(x) = \alpha_1 I_{a_1}(x) + \alpha_2 I_{a_2}(x),$$
$$G_0(y) = \beta_1 I_{b_1}(y) + \beta_2 I_{b_2}(y).$$

15. Докажите теорему 10.20.
16. Докажите теорему 10.21.

ГЛАВА XI

РАЗДЕЛИМЫЕ ИГРЫ

1. Метод отображения

В этой главе мы рассмотрим довольно широкий класс игр и опишем метод их решения. Функция $M(x, y)$ двух переменных называется *разделимой* (или *полиномиальной*), если существуют $m+n$ непрерывных функций $r_1, \ldots, r_m$; $s_1, \ldots, s_n$ и mn констант $a_{11}, \ldots, a_{mn}$ таких, что тождественно по x и y выполняется

$$M(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} r_i(x) s_j(y). \tag{1}$$

Так, функция M, определенная уравнением

$$M(x, y) = x \sin y + x \cos y + 2x^2$$

разделима; здесь мы можем взять:

$$\begin{aligned} r_1(x) &= x, & s_1(y) &= \sin y, \\ r_2(x) &= x^2, & s_2(y) &= \cos y, \\ & & s_3(y) &= 1. \end{aligned}$$

Очевидно, данная разделимая функция может быть представлена в форме (1) многими способами. Например, для указанной выше функции мы можем также взять:

$$r_1(x) = x, \quad s_1(y) = \sin y + \cos y,$$

$$r_2(x) = 2x^2, \quad s_2(y) = \frac{1}{2}.$$

Если функция M разделима, то по определению мы имеем тождественно по x и y

$$M(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} r_i(x) s_j(y) = \sum_{j=1}^{n} \Big[\sum_{i=1}^{m} a_{ij} r_i(x) \Big] s_j(y);$$

следовательно, положив:

$$t_j(x) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} r_i(x) \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

мы можем написать:

$$M(x, y) = \sum_{j=1}^{n} t_j(x) s_j(y), \tag{2}$$

где функции t_j и s_j непрерывны.

Многочлен от двух переменных есть, очевидно, частный случай разделимой функции. Так, многочлен

$$xy + x^2 + xy^2 + 2x^2y + x^3y^3$$

может быть представлен в форме (2), если взять:

$$\begin{aligned} r_1(x) &= x, & t_1(y) &= y + y^2, \\ r_2(x) &= x^2, & t_2(y) &= 1 + 2y, \\ r_3(x) &= x^3, & t_3(y) &= y^3. \end{aligned}$$

Разделимой (или *полиномиальной*) *игрой* мы называем непрерывную игру, у которой платежная функция разделима. Таким образом, в разделимой игре платежная функция удовлетворяет уравнению (1), где r_j и s_j $(1 \leqslant i \leqslant m$ и $1 \leqslant j \leqslant n)$ суть непрерывные функции на замкнутом единичном интервале.

Если M — платежная функция разделимой игры и если P_1 применяет смешанную стратегию F, а P_2 применяет смешанную стратегию G, то математическое ожидание $E(F, G)$ выигрыша для P_1 (на основании уравнения (1) и некоторых простых свойств интеграла Стилтьеса) определяется так:

$$E(F, G) = \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dF(x)\, dG(y) =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \Big[\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} r_i(x) s_j(y) \Big] dF(x)\, dG(y) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \int_0^1 r_i(x)\, dF(x) \int_0^1 s_j(y)\, dG(y). \tag{3}$$

Таким образом, $E(F, G)$ зависит от F и G лишь постольку, поскольку F и G влияют на значение компонент двух векторов

$$\left\| \int_0^1 r_1(x)\,dF(x) \;\ldots\; \int_0^1 r_m(x)\,dF(x) \right\|$$

и

$$\left\| \int_0^1 s_1(y)\,dG(y) \;\ldots\; \int_0^1 s_n(y)\,dG(y) \right\|.$$

Легко видеть, что

$$\left\| \int_0^1 r_1(x)\,dF^{(1)}(x) \;\ldots\; \int_0^1 r_m(x)\,dF^{(1)}(x) \right\|$$

и

$$\left\| \int_0^1 r_1(x)\,dF^{(2)}(x) \;\ldots\; \int_0^1 r_m(x)\,dF^{(2)}(x) \right\|$$

могут представлять один и тот же вектор, если даже $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ не тождественны; но если два вектора тождественны, то независимо от того, тождественны $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ или нет, выполняется

$$E(F^{(1)}, G) = E(F^{(2)}, G)$$

для всякой функции распределения G, и не имеет значения, применяет ли P_1 стратегию $F^{(1)}$ или стратегию $F^{(2)}$. Поэтому, когда два данных вектора одинаковы, мы будем называть стратегии $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ *эквивалентными* (конечно, относительно данной игры). Таким образом, если имеется непрерывная игра, платежная функция которой удовлетворяет уравнению (1), то, как мы видим, для P_1 выбор смешанной стратегии $F^{(1)}$ сводится к выбору точки $\| u_1^{(1)}, \ldots, u_m^{(1)} \|$ из некоторого подмножества U m-мерного евклидова пространства. Это множество U, которое мы будем иногда называть пространством U, состоит из всех точек $\| u_1, \ldots, u_m \|$ таких, что для некоторой функции распределения F

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \int_0^1 r_1(x)\,dF(x), \\ &\dots\dots\dots\dots \\ u_m &= \int_0^1 r_m(x)\,dF(x). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Когда $u = \| u_1 \ldots u_m \|$ и F удовлетворяет равенствам (4), мы говорим, что u и F *соответствуют друг другу* (данная точка в пространстве $\mathbf{U}$ будет, вообще говоря, соответствовать различным функциям распределения).

Аналогично, для P_2 выбор смешанной стратегии $G^{(1)}$ сводится к выбору точки $\| w_1^{(1)} \ldots w_n^{(1)} \|$ из множества, которое мы назовем *пространством* $\mathbf{W}$, то есть из множества всех точек $\| w_1 \ldots w_n \|$ n-мерного евклидова пространства таких, что для некоторой функции распределения

$$\begin{aligned} w_1 &= \int_0^1 s_1(y)\,dG(y), \\ &\dots\dots\dots\dots \\ w_n &= \int_0^1 s_n(y)\,dG(y). \end{aligned}$$

Следует заметить, что множества $\mathbf{U}$ и $\mathbf{W}$ относятся к данному частному представлению платежной функции M. Как мы видели раньше, одна и та же функция M может удовлетворять как равенству

$$M(x, y) = \sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{3} a_{ij} r_i(x) s_j(y),$$

так и равенству

$$M(x, y) = \sum_{i=1}^{2} r_i(x) t_i(y).$$

При первом представлении функции M пространство $\mathbf{U}$ есть подмножество трехмерного евклидова пространства, а при втором — двумерного. Но мы часто будем опускать ссылку на эту зависимость множеств $\mathbf{U}$ и $\mathbf{W}$ от способа представления функции M, так как при разборе данной игры мы обычно полагаем, что представление задано раз и навсегда.

До сих пор мы считали функцию математического ожидания выигрыша E определенной только для функций распределения (в качестве аргументов). Однако для некоторых дальнейших рассуждений уместно говорить также о математическом ожидании выигрыша игрока P_1, когда P_1 выбирает точку u из пространства $\mathbf{U}$, а P_2 выбирает точку w из пространства $\mathbf{W}$. Поэтому мы расширяем область определения функции E следующим образом: если u — любая точка пространства $\mathbf{U}$, а w — любая точка пространства $\mathbf{W}$ и если F — любая функция распределения, соответствующая точке u, а G — любая функция распределения, соответствующая точке w, то мы полагаем:

$$E(u, w) = E(F, G).$$

Из этой формулировки ясно, что $E(u, w)$ при этом определена корректно, то есть, если u соответствует и F, и F', а w соответствует и G, и G', то

$$E(F', G') = E(F, G),$$

и мы можем также написать:

$$E(u, w) = E(F', G').$$

Из (3) мы видим, что если $u = \| u_1, \ldots, u_m \|$ — любая точка пространства $\mathbf{U}$, а $w = \| w_1, \ldots, w_n \|$ — любая точка пространства $\mathbf{W}$, то

$$E(u, w) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i w_j.$$

Итак, E есть билинейная форма от координат u и w.

Для наших целей желательно теперь установить некоторые геометрические свойства пространств $\mathbf{U}$ и $\mathbf{W}$ и описать соотношение между каждым из этих пространств и множеством всех функций распределения. Эти положения будут сформулированы в нескольких дальнейших теоремах.

В главе II мы определили понятие выпуклой линейной комбинации конечного числа точек евклидова n-мерного пространства. По аналогии с этим понятием мы говорим, что функция F есть *выпуклая линейная комбинация* функций $F^{(1)}, \ldots, F^{(r)}$ с весами $a_1, \ldots, a_r$, если $\| a_1, \ldots, a_r \| \in S_r$ и если для всякого x из $[0, 1]$

$$F(x) = a_1 F^{(1)}(x) + a_2 F^{(2)}(x) + \ldots + a_r F^{(r)}(x).$$

Когда F есть такая выпуклая линейная комбинация функций $F^{(1)}, \ldots, F^{(r)}$, мы будем писать просто так:

$$F = a_1 F^{(1)} + a_2 F^{(2)} + \ldots + a_r F^{(r)}.$$

Теорема 11.1. *Пусть $F^{(1)}, \ldots, F^{(p)}$ — функции распределения, $u^{(1)}, \ldots, u^{(p)}$ — соответствующие точки пространства* U *разделимой игры и $\| a_1 \ldots a_p \|$ — любой элемент множества S_p. Тогда точка*

$$u = a_1 u^{(1)} + \ldots + a_p u^{(p)}$$

есть точка пространства U *и соответствует функции распределения*

$$F = a_1 F^{(1)} + \ldots + a_p F^{(p)}.$$

Аналогичное предложение справедливо для пространства **W**.

Доказательство. Пусть платежная функция разделимой игры удовлетворяет равенству

$$M(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} r_i(x) s_j(y).$$

Пусть $u^{(i)} = \| u_1^{(i)} \ldots u_m^{(i)} \|$ $(i = 1, \ldots, p)$. Поскольку $u^{(i)}$ соответствует $F^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, p)$, мы имеем:

$$u_j^{(i)} = \int_0^1 r_j(x)\, dF^{(i)}(x) \text{ для } i = 1, \ldots, p \text{ и для } j = 1, \ldots, m. \quad (5)$$

Пусть $u = \| u_1 \ldots u_m \|$. Поскольку

$$u = a_1 u^{(1)} + \ldots + a_p u^{(p)},$$

мы видим, что

$$u_j = a_1 u_j^{(1)} + \ldots + a_p u_j^{(p)} \quad \text{для} \quad j = 1, \ldots, m. \quad (6)$$

Из (5) и (6) мы заключаем, что для $j=1, \ldots, m$

$$u_j = a_1 \int_0^1 r_j(x)\, dF^{(1)}(x) + \ldots + a_p \int_0^1 r_j(x)\, dF^{(p)}(x),$$

и, следовательно, на основании соответствующих теорем об интегралах Стилтьеса, для $j=1, \ldots, m$

$$u_j = \int_0^1 r_j(x)\, d\,[a_1F^{(1)}(x) + \ldots + a_pF^{(p)}(x)] = \int_0^1 r_j(x)\, dF(x). \tag{7}$$

Поскольку по теореме 8.3 F есть функция распределения, мы заключаем, что $u = \| u_1, \ldots, u_m \|$ соответствует функции распределения F, и, следовательно, по определению, u принадлежит пространству $\mathbf{U}$.

Доказательство для пространства $\mathbf{W}$ аналогично.

Мы можем классифицировать точки пространства $\mathbf{U}$ по типам соответствующих им функций распределения. Особенно важное подмножество пространства $\mathbf{U}$ — это подмножество, содержащее те точки, которые соответствуют одноступенчатым функциям. Мы обозначим это подмножество через $\mathbf{U}^*$, а аналогичное подмножество пространства $\mathbf{W}$ через $\mathbf{W}^*$. Весьма полезна следующая, легко доказываемая

Теорема 11.2. *Пусть платежная функция M разделимой игры представлена равенством*

$$M(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} r_i(x)\, s_j(y),$$

где r_i и s_j — непрерывные функции соответственно от x и y. Тогда множество $\mathbf{U}^*$ (по отношению к данному представлению) состоит из всех точек $\| u_1, \ldots, u_m \|$, таких, что для некоторого t из $[0, 1]$

$$u_1 = r_1(t),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$u_m = r_m(t).$$

Аналогично, множество $\mathbf{W}^*$ состоит из всех точек

$\|w_1, \ldots, w_n\|$, таких, что для некоторого t из $[0, 1]$

$$w_1 = s_1(t),$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$w_n = s_n(t).$$

Доказательство. По определению множества $\mathbf{U}^*$ точка $\|u_1, \ldots, u_m\|$ принадлежит пространству $\mathbf{U}$ тогда и только тогда, когда имеется соответствующая ей одноступенчатая функция I_t, то есть, когда для некоторого $t \in [0, 1]$ мы имеем:

$$u_1 = \int_0^1 r_1(x)\,dI_t(x) = r_1(t),$$
$$u_2 = \int_0^1 r_2(x)\,dI_t(x) = r_2(t),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_m = \int_0^1 r_m(x)\,dI_t(x) = r_m(t).$$

Доказательство второй части теоремы аналогично.

Следствие 11.3. Множества $\mathbf{U}^*$ и $\mathbf{W}^*$ для любой разделимой игры суть ограниченные, замкнутые, связные множества.

Доказательство вытекает из того, что функции r_i и s_j суть непрерывные функции, определенные на замкнутом интервале.

Теорема 11.4. *Пространство* $\mathbf{U}$ *для любой разделимой игры есть выпуклая оболочка множества* $\mathbf{U}^*$, *а пространство* $\mathbf{W}$ — *выпуклая оболочка множества* $\mathbf{W}^*$ (следовательно, пространство $\mathbf{U}$ — и аналогично пространство $\mathbf{W}$ — есть замкнутое ограниченное выпуклое множество).

Доказательство. Пусть $\mathbf{U}'$ — выпуклая оболочка множества $\mathbf{U}^*$. Мы хотим показать, что $\mathbf{U}'$ совпадает с пространством $\mathbf{U}$, то есть $\mathbf{U}' = \mathbf{U}$. Поскольку $\mathbf{U}^* \subseteq \mathbf{U}$, мы видим непосредственно из теоремы 11.1, что $\mathbf{U}' \subseteq \mathbf{U}$. Поэтому остается лишь показать, что $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{U}'$.

Допустим, что имеется точка $z = \|z_1 \ldots z_m\|$, принадлежащая $\mathbf{U}$, но не принадлежащая $\mathbf{U}'$. Поскольку, согласно следствию 11.3, $\mathbf{U}^*$ ограничено и замкнуто, мы видим, что $\mathbf{U}'$ также замкнуто и ограничено; кроме того, $\mathbf{U}'$ — выпуклое. Поскольку $z = \| z_1 \dots z_m \|$ не находится в $\mathbf{U}'$, то из теоремы 2.3 мы заключаем, что существуют постоянные $a_1, \dots, a_m$, b и δ, где $\delta > 0$, такие, что

$$a_1 z_1 + \dots + a_m z_m + b > 0, \tag{8}$$

и для любой точки $\| u_1 \dots u_m \|$ множества $\mathbf{U}'$

$$a_1 u_1 + \dots + a_m u_m + b < -\delta < 0. \tag{9}$$

Из (8) и (9) мы видим, что для всякой точки $\| u_1 \dots u_m \|$ множества $\mathbf{U}'$

$$(a_1 z_1 + \dots + a_m z_m + b) - (a_1 u_1 + \dots + a_m u_m + b) > \delta,$$

и, следовательно, что

$$(a_1 z_1 + \dots + a_m z_m) - (a_1 u_1 + \dots + a_m u_m) > \delta. \tag{10}$$

Поскольку (10) справедливо для всякой точки $\| u_1 \dots u_m \|$ из $\mathbf{U}'$, оно справедливо, в частности, для всякой точки из $\mathbf{U}^*$. Отсюда на основании теоремы 11.2 мы заключаем, что для всех $t \in [0, 1]$

$$[a_1 z_1 + \dots + a_m z_m] - [a_1 r_1(t) + \dots + a_m r_m(t)] > \delta. \tag{11}$$

Пусть теперь F — функция распределения, которой соответствует точка $\| z_1 \dots z_m \|$ пространства $\mathbf{U}$, то есть такая, что

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \int_0^1 r_1(x)\, dF(x) = \int_0^1 r_1(t)\, dF(t), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_m &= \int_0^1 r_m(x)\, dF(x) = \int_0^1 r_m(t)\, dF(t). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Из (11) мы заключаем, что

$$\int_0^1 \{[a_1 z_1 + \dots + a_m z_m] - \\ - [a_1 r_1(t) + \dots + a_m r_m(t)]\}\, dF(t) > \int_0^1 \delta\, dF(t),$$

и, следовательно, поскольку все величины δ; $a_1, \ldots, a_m$; $z_1, \ldots, z_m$ постоянны,

$$[a_1z_1 + \ldots + a_mz_m] \int_0^1 dF(t) - a_1 \int_0^1 r_1(t)\,dF(t) - \ldots$$
$$\ldots - a_m \int_0^1 r_m(t)\,dF(t) > \delta \int_0^1 dF(t),$$

или

$$[a_1z_1 + \ldots + a_mz_m] - a_1 \int_0^1 r_1(t)\,dF(t) - \ldots$$
$$\ldots - a_m \int_0^1 r_m(t)\,dF(t) > \delta,$$

или, наконец, на основании (12)

$$[a_1z_1 + \ldots + a_mz_m] - [a_1z_1 + \ldots + a_mz_m] > \delta,$$

или

$$0 > \delta.$$

Но это противоречит условию положительности δ. Отсюда мы заключаем, что $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{U}'$, что и требовалось доказать.

Поскольку $\mathbf{U}' = \mathbf{U}$, и поскольку мы видели, что множество $\mathbf{U}'$ ограниченное, замкнутое и выпуклое, мы заключаем, что множество $\mathbf{U}$ также ограниченное, замкнутое и выпуклое. Это завершает доказательство. Доказательство для пространства $\mathbf{W}$ аналогично.

Теорема 11.5. *Пусть M — платежная функция разделимой игры, и пусть*

$$M(x, y) = \sum_{i=1}^{n} r_i(x)\, t_i(y).$$

Тогда всякая смешанная стратегия (обоих игроков) эквивалентна ступенчатой функции с числом ступеней не больше n; в частности, каждый игрок имеет оптимальную стратегию, которая является ступенчатой функцией с числом ступеней не больше n.

Доказательство. Пусть F — любая функция распределения, и пусть $u = \| u_1 \ldots u_n \|$ — точка пространства $\mathbf{U}$, соответствующая функции F (доказательство будет аналогичным, если мы берем функцию распределения G для P_2 и рассматриваем точку пространства **W**, которая соответствует функции G). Поскольку пространство **U** по теореме 11.4 есть выпуклая оболочка связного множества **U*** и поскольку пространство **U** есть подмножество евклидова n-мерного пространства, мы видим на основании теоремы 2.1, что имеются точки $u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}$ из **U*** и элемент $\|a_1 \ldots a_n\|$ из $\mathbf{S}_n$ такие, что

$$u = a_1 u^{(1)} + \ldots + a_n u^{(n)}.$$

Поскольку $u^{(1)}, \ldots, u^{(n)} \in \mathbf{U}^*$, то имеются ступенчатые функции $I_{t_1}, \ldots, I_{t_n}$, такие, что $u^{(i)}$ (для $i = 1, \ldots, n$) соответствует функции I_{t_i}. Тогда по теореме 11.1 мы видим, что функция I, определенная равенством

$$I = a_1 I_{t_1} + \ldots + a_n I_{t_n},$$

соответствует точке u. Очевидно, I есть ступенчатая функция, имеющая самое большее n ступеней, и I и F эквивалентны, поскольку обе функции соответствуют одной и той же точке пространства **U**.

В частности, любая оптимальная стратегия F (по теореме 10.4 такая существует) эквивалентна ступенчатой функции I, имеющей самое большее n ступеней, и такая функция I, конечно, сама оптимальна.

Охарактеризуем теперь те точки пространств **U** и **W**, которые соответствуют оптимальным стратегиям. Для этого уместно определить отображение точек пространства **U** в множество точек пространства **W** и отображение точек пространства **W** в множество точек пространства **U**. Если u — любая точка пространства **U**, то *образом точки* u мы будем называть множество точек w пространства **W** таких, что

$$E(u, w) = \min_{y \in \mathbf{W}} E(u, y).$$

Будем обозначать образ точки u через $\mathbf{W}(u)$. Аналогично, если w — любая точка пространства **W**, то *образом точки* w мы будем называть множество всех точек u пространства $\mathbf{U}$ таких, что

$$E(u,\ w)=\max_{x\in\mathbf{U}} E(x,\ w).$$

Образ точки w обозначим через $\mathbf{U}(w)$.

Если точка u пространства $\mathbf{U}$ и точка w пространства $\mathbf{W}$ таковы, что $w\in\mathbf{W}(u)$ и $u\in\mathbf{U}(w)$, то мы называем точку *и фиксированной точкой* пространства $\mathbf{U}$, а точку *w — фиксированной точкой* пространства $\mathbf{W}$.

Теорема 11.6. *Если F — любая функция распределения и если u — соответствующая ей точка пространства $\mathbf{U}$, то F есть оптимальная стратегия для P_1 тогда и только тогда, когда точка u фиксированная.* (Аналогично, функция распределения G есть оптимальная стратегия для P_2 тогда и только тогда, когда соответствующая точка w пространства $\mathbf{W}$ есть фиксированная точка.)

Доказательство. Пусть F_1 — функция распределения, и пусть u — соответствующая ей точка пространства $\mathbf{U}$. Если говорится, что u есть фиксированная точка пространства $\mathbf{U}$, то это значит, что для некоторой точки w пространства $\mathbf{W}$ мы имеем $w\in\mathbf{W}(u)$ и $u\in\mathbf{U}(w)$, то есть

$$\left.\begin{aligned} E(u,\ w)&=\min_{y\in\mathbf{W}} E(u,\ y),\\ E(u,\ w)&=\max_{x\in\mathbf{U}} E(x,\ w).\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

Если обозначить через G_1 функцию распределения, которой соответствует точка w, то из определения функции $E(u,\ w)$ следует, что равенства (13) равносильны равенствам

$$E(F_1,\ G_1)=\min_{F\in\mathbf{D}} E(F,\ G_1)=\max_{G\in\mathbf{D}} E(F_1,\ G),$$

которые, согласно теореме 10.5, означают, что F_1 есть оптимальная стратегия для P_1.

Теорема 11.7. *Если u — любая фиксированная точка пространства $\mathbf{U}$ и w — любая фиксированная точка пространства $\mathbf{W}$, то $u\in\mathbf{U}(w)$ и $w\in\mathbf{W}(u)$.*

Доказательство. Поскольку u есть фиксированная точка пространства $\mathbf{U}$, то существует точка w' пространства $\mathbf{W}$ такая, что $u\in\mathbf{U}(w')$ и $w'\in\mathbf{W}(u)$, то есть такая, что

$$E(u, w') = \max_{x \in \mathbf{U}} E(x, w') \tag{14}$$

и

$$E(u, w') = \min_{y \in \mathbf{W}} E(u, y). \tag{15}$$

Аналогично, поскольку w есть фиксированная точка пространства $\mathbf{W}$, то имеется точка u' пространства $\mathbf{U}$ такая, что

$$E(u', w) = \max_{x \in \mathbf{U}} E(x, w) \tag{16}$$

и

$$E(u', w) = \min_{y \in \mathbf{W}} E(u', y). \tag{17}$$

Тогда мы имеем:

$$\begin{aligned}
E(u, w) &\leqslant \max_{x \in \mathbf{U}} E(x, w) && \text{из определения максимума,}\\
&= E(u', w) && \text{на основании (16),}\\
&= \min_{y \in \mathbf{W}} E(u', y) && \text{на основании (17),}\\
&\leqslant E(u', w') && \text{из определения минимума,}\\
&\leqslant \max_{x \in \mathbf{U}} E(x, w') && \text{из определения максимума,}\\
&= E(u, w') && \text{на основании (14),}\\
&= \min_{y \in \mathbf{W}} E(u, y) && \text{на основании (15),}\\
&\leqslant E(u, w) && \text{из определения минимума.}
\end{aligned}$$

Поскольку первый и последний члены этой цепи равенств и неравенств одинаковы, мы заключаем, что все входящие сюда величины равны, в частности

$$\begin{aligned}
E(u, w) &= \max_{x \in \mathbf{U}} E(x, w),\\
&= \min_{y \in \mathbf{W}} E(u, y),
\end{aligned}$$

а это значит, что $u \in \mathbf{U}(w)$ и $w \in \mathbf{W}(u)$, что и требовалось доказать.

2. Пояснительный пример

Доказанные нами теоремы достаточны для того, чтобы дать общий метод подхода к задаче отыскания решений для разделимых игр: а) мы чертим кривые $\mathbf{U}^*$ и $\mathbf{W}^*$ (соответственно в m-мерном и n-мерном пространствах) и определяем их выпуклые оболочки, каковыми по теореме 11.4 являются соответственно $\mathbf{U}$ и $\mathbf{W}$; б) мы находим $\mathbf{W}(u)$ для любой точки $u \in \mathbf{U}$ и $\mathbf{U}(w)$ для любой точки $w \in \mathbf{W}$ (это равнозначно отысканию точек в некоторых замкнутых выпуклых множествах, где данные линейные формы принимают свои минимальные и максимальные значения); в) используя результаты пункта б), мы находим фиксированные точки пространств $\mathbf{U}$ и $\mathbf{W}$; г) мы представляем фиксированные точки как выпуклые линейные комбинации точек множеств $\mathbf{U}^*$ и $\mathbf{W}^*$ соответственно и с помощью теоремы 11.1 находим функции распределения, которым соответствуют фиксированные точки. Эти функции распределения будут оптимальными стратегиями. Поясним этот метод на примере.

Пример 11.8. Платежная функция M разделимой игры определяется следующим равенством (для любой точки $\|xy\|$ замкнутого единичного квадрата):

$$M(x, y) = \cos 2\pi x \cos 2\pi y + x + y.$$

Здесь мы примем:

$$\begin{aligned} r_1(x) &= x, & s_1(y) &= y,\\ r_2(x) &= \cos 2\pi x, & s_2(y) &= \cos 2\pi y,\\ r_3(x) &= 1, & s_3(y) &= 1, \end{aligned}$$

так что M представлена следующим образом:

$$M(x, y) = r_2(x)\, s_2(y) + r_1(x)\, s_3(y) + r_3(x)\, s_1(y).$$

Очевидно, пространство $\mathbf{U}$ лежит в плоскости $u_3 = 1$, а пространство $\mathbf{W}$ — в плоскости $w_3 = 1$. Начертим для простоты двумерное изображение этих пространств.

Кривая $\mathbf{U}^*$ выражается следующими параметрическими уравнениями:

$$\begin{aligned} u_1 &= t,\\ u_2 &= \cos 2\pi t,\\ u_3 &= 1. \end{aligned}$$

Пространство $\mathbf{U}$ есть выпуклая оболочка кривой $\mathbf{U}^*$, представляющая часть плоскости $u_3 = 1$, ограниченную прямолинейными отрезками AB, AC и BD и дугой косинусоиды CQD, как изображено на рис. 42 (на том же рисунке показано пространство $\mathbf{W}$, которое тождественно пространству $\mathbf{U}$).

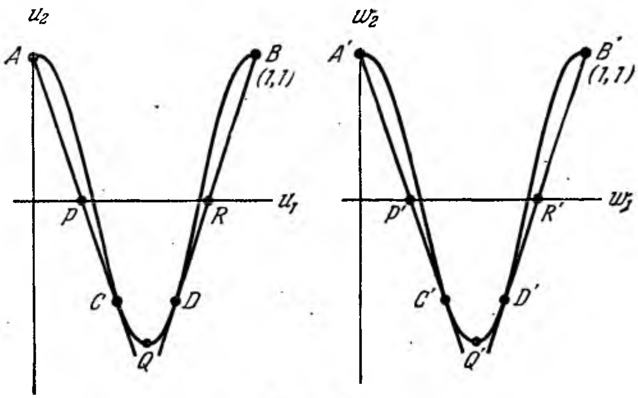

Рис. 42.

Найдем координаты точки C', которые понадобятся нам впоследствии. Обозначим точку C' через $\| y_1 \cos 2\pi y_1 \; 1 \|$. Наклон m прямой $A'C'$ такой же, как наклон кривой

$$w_2 = \cos 2\pi w_1$$

в точке $w_1 = y_1$. Следовательно,

$$m = \frac{\cos 2\pi y_1 - 1}{y_1} = -2\pi \sin 2\pi y_1; \tag{18}$$

отсюда мы получаем:

$$2\pi y_1 = \frac{1 - \cos 2\pi y_1}{\sin 2\pi y_1} = \operatorname{tg} \pi y_1, \tag{19}$$

где $2\pi y_1$ — угол во втором квадранте. Решая это уравнение, мы находим с точностью до двух десятичных знаков:

$$y_1 = 0{,}37,$$
$$m = -4{,}55.$$

Таким образом, координаты точки C' суть $\| 0{,}37 \quad -0{,}68 \quad 1 \|$. Если F — любая стратегия игрока P_1 и G — любая стратегия P_2, то математическое ожидание $E(F, G)$ равно

$$E(F, G) = \int_0^1 \cos 2\pi x \; dF(x) \int_0^1 \cos 2\pi y \; dG(y) + \\ + \int_0^1 x \; dF(x) + \int_0^1 y \; dG(y).$$

Вспомним, что точка $\| u_1 u_2 \|$ принадлежит пространству $\mathbf{U}$ тогда и только тогда, когда для некоторой функции F

$$u_1 = \int_0^1 x \; dF(x),$$

$$u_2 = \int_0^1 \cos 2\pi x \; dF(x),$$

и точка $\| w_1 \; w_2 \; 1 \|$ принадлежит пространству $\mathbf{W}$ тогда и только тогда, когда для некоторой функции G

$$w_1 = \int_0^1 y \; dG(y),$$

$$w_2 = \int_0^1 \cos 2\pi y \; dG(y).$$

Мы видим, что если P_1 выбирает точку $u = \| u_1 \; u_2 \; 1 \|$ из $\mathbf{U}$, а P_2 выбирает точку $w = \| w_1 \; w_2 \; 1 \|$ из $\mathbf{W}$, то математическое ожидание $E(u, w)$ для P_1 определяется формулой

$$E(u, w) = u_2 w_2 + u_1 + w_1. \tag{20}$$

Наша задача состоит в том, чтобы найти две точки $\bar{u}$ и $\bar{w}$, принадлежащие соответственно пространствам $\mathbf{U}$ и $\mathbf{W}$ и обладающие тем свойством, что

$$\bar{u} \in \mathbf{U}(\bar{w}) \quad \text{и} \quad \bar{w} \in \mathbf{W}(\bar{u}),$$

то есть такие, что

$$\max_{u \in \mathbf{U}} E(u, \overline{w}) = \min_{w \in \mathbf{W}} E(\overline{u}, w) = E(\overline{u}, \overline{w}).$$

Множество $\mathbf{U}(w)$ для всякой точки $w \in \mathbf{W}$ есть подмножество правой границы BDQ пространства $\mathbf{U}$. В самом деле, допустим, что $\mathbf{U}(w)$ содержит точку $a = \| a_1\ a_2\ 1 \|$, не находящуюся на BDQ. Пусть $a' = \| a_1 + d\ a_2\ 1 \|$ — горизонтальная проекция точки a на BDQ, где d есть расстояние (положительное) от a до a'. Тогда из (20) мы видим, что

$$E(a', w) = E(a, w) + d,$$

а это показывает, что $\max\limits_{u \in \mathbf{U}} E(u, w)$ не имеет места при $u = a$, то есть a не принадлежит к $\mathbf{U}(w)$. Аналогично, для всякой точки $u \in \mathbf{U}$ образ множества $\mathbf{W}(u)$ есть подмножество левой границы $A'C'Q'$ пространства $\mathbf{W}$.

Теперь мы найдем $\mathbf{W}(a)$ для произвольной точки $a = \| a_1 \cos 2\pi a_1\ \ 1 \|$ дуги QD косинусоиды, образующей часть границы пространства $\mathbf{U}$. Точка b пространства $\mathbf{W}$ принадлежит к $\mathbf{U}(a)$ тогда и только тогда, когда

$$\min_{w \in \mathbf{W}} E(a, w) = E(a, b).$$

В силу (20) это означает, что нам нужно найти точку $\| w_1\ w_2\ 1 \|$ на левой границе пространства $\mathbf{W}$, для которой выражение

$$w_1 + w_2 \cos 2\pi a_1 + a_1$$

минимально. Эта задача, очевидно, равнозначна следующей: дано семейство прямых линий

$$w_1 + w_2 \cos 2\pi a_1 = k,$$

нужно найти прямые этого семейства, пересекающие пространство $\mathbf{W}$, для которых k имеет минимальное значение, и затем найти точки, в которых эти прямые пересекают пространство $\mathbf{W}$. Наклон каждой прямой этого семейства равен

$$\frac{-1}{\cos 2\pi a_1}.$$

Поскольку $\|a_1 \ \cos 2\pi a_1 \ 1\|$ есть точка на дуге косинусоиды QD, то $\cos 2\pi a_1$ отрицателен и, следовательно, наклон положителен. Отсюда следует, что минимальное значение k можно получить, если провести прямую

$$w_1 + w_2 \cos 2\pi a_1 = k$$

как можно левее, но так, чтобы она пересекала пространство $\mathbf{W}$. Это значит, что прямая должна проходить через точку A', а поскольку ее наклон положителен, A' будет единственной точкой в пространстве $\mathbf{W}$, лежащей на этой прямой. Итак, если a лежит на дуге QD, $\mathbf{W}(a) = \|0 \ 1 \ 1\|$.

Аналогично, если $a = \|a_1 \ a_2 \ 1\|$ — любая точка на прямолинейном отрезке DR, то $\mathbf{W}(a)$ состоит из точек пространства $\mathbf{W}$, для которых имеет место минимум выражения

$$E(a, \ w) = w_1 + a_1 + w_2 a_2.$$

Следовательно, и в этом случае задача сводится к отысканию прямых семейства

$$w_1 + a_2 w_2 = k, \tag{21}$$

пересекающих пространство $\mathbf{W}$, для которых значение k минимально. А поскольку a_2 отрицательно и наклон этих прямых равен $-\frac{1}{a_2}$, мы находим, рассуждая так же, как и раньше, что $\mathbf{W}(a) = \|0 \ 1 \ 1\|$.

Теперь мы берем $a = \|a_1 \ a_2 \ 1\|$ на прямолинейном отрезке RB и находим $\mathbf{W}(a)$. Вспомнив, что m есть наклон прямой $A'C'$, мы рассмотрим три случая:

Случай 1

$$\left|\frac{1}{a_2}\right| > |m|;$$

Случай 2

$$\left|\frac{1}{a_2}\right| = |m|;$$

Случай 3

$$\left|\frac{1}{a_2}\right| < |m|.$$

Случай 1. В этом случае мы опять находим, что $\mathbf{W}(a) = \|0 \ 1 \ 1\|$, используя по существу метод, применявшийся выше. Единственное различие состоит в том, что теперь прямые (21) имеют отрицательный наклон; но поскольку абсолютная величина этого наклона больше наклона m прямой $A'C'$, то отсюда следует, как и раньше, что если прямая проводится как можно левее, но так, чтобы она пересекала пространство $\mathbf{W}$, то у нее будет лишь одна общая точка с пространством $\mathbf{W}$ — точка A'.

Случай 2. В этом случае прямые (21) имеют все такой же наклон, как прямая $A'C'$. Следовательно, k минимально, когда (21) совпадает с $A'C'$. Очевидно, в этом случае $\mathbf{W}(a)$ состоит из всех точек прямолинейного отрезка $A'C'$.

Случай 3. В этом случае прямые (21) имеют отрицательный наклон, который по абсолютной величине меньше, чем наклон прямой $A'C'$. Поэтому точка $w = \| w_1 \ w_2 \ 1 \|$ в пространстве $\mathbf{W}$, для которой k минимально, должна быть точкой касания кривой $C'Q'$ с самой нижней прямой семейства (21), еще пересекающей пространство $\mathbf{W}$. Эта точка касания единственная, если a_2 выбрано так, что имеет место случай 3. Следовательно, в этом случае $\mathbf{W}(a)$ состоит из одной точки кривой $C'D'$, которая, очевидно, определяется выбором точки a. Итак, мы показали, как находить образ $\mathbf{W}(a)$ всех точек a, лежащих на правой границе QDB пространства $\mathbf{U}$.

Путем точно такого же анализа можно найти образ $\mathbf{U}(b)$ любой точки, лежащей на левой границе $A'C'Q'$ пространства $\mathbf{W}$. Приведем без доказательства следующие результаты этого анализа.

Пусть $b = \| b_1 \ b_2 \ 1 \|$ — точка левой границы $A'C'Q'$ пространства $\mathbf{W}$. Если $b_2 \geqslant 0$, то $\mathbf{U}(b)$ есть точка $\| 1 \ 1 \ 1 \|$ пространства $\mathbf{U}$. Если $b_2 < 0$, то мы имеем следующие условия:

1) Если наклон $-\frac{1}{b_2}$ прямых

$$u_1 + b_2 u_2 = k \tag{22}$$

меньше, чем наклон $-m$ прямой DB, то $\mathbf{U}(b)$ — единственная точка, лежащая на кривой QD границы пространства $\mathbf{U}$.

2) Если наклон прямых (21) больше, чем $-m$, то $\mathbf{U}(b)$ есть точка B пространства $\mathbf{U}$.

3) Если $-\frac{1}{b_2}=-m$, то $\mathbf{U}(b)$ есть весь прямолинейный отрезок DB.

Мы можем теперь использовать эти выводы для того, чтобы определить, какие точки суть фиксированные.

Прежде всего мы замечаем, что A' не есть фиксированная точка, так как $\mathbf{U}(A')=B$, и $\mathbf{W}(B)$ есть точка кривой $C'Q'$. Следовательно, по теореме 11.7 никакая точка a пространства $\mathbf{U}$, для которой $\mathbf{W}(a)=A'$, не может быть фиксированной точкой.

Далее мы замечаем, что ни одна точка кривой $C'Q'$ не есть фиксированная, ибо для любой такой точки b $\mathbf{U}(b)$ состоит из одной точки a на кривой QD, а $\mathbf{W}(a)$ для любой точки a на кривой QD есть точка A'. Следовательно, по теореме 11.7 никакая точка a пространства $\mathbf{U}$, для которой $\mathbf{U}(a)$ есть точка кривой $C'Q'$, не может быть фиксированной точкой. Это значит, что никакая точка $a=\|a_1\ a_2\ 1\|$ отрезка DB, для которой

$$\left|\frac{1}{a_2}\right|<|m|,$$

не может быть фиксированной точкой пространства $\mathbf{U}$.

Из этого мы заключаем, что единственные фиксированные точки пространства $\mathbf{U}$ суть те точки, которые предусматриваются случаем 2, то есть те точки a, для которых

$$\left|\frac{1}{a_2}\right|=|m|. \tag{23}$$

Аналогичным образом мы заключаем, что фиксированные точки пространства $\mathbf{W}$ суть только те точки b, для которых

$$\left|\frac{1}{b_2}\right|=|m|. \tag{24}$$

Мы хотим теперь вычислить координаты точек пространства $\mathbf{U}$ (окажется, что есть лишь одна такая точка), для которых справедливо (23). Очевидно, поскольку наклон прямой $A'C'$ равен m, наклон прямой AC также равен m; поэтому из симметрии пространства $\mathbf{U}$ относительно прямой $u_1 = {}^1/_2$ мы заключаем, что наклон прямой DB равен $-m$. Итак, уравнение прямой DB таково:

$$u_2 - 1 = -m(u_1 - 1).$$

Следовательно,

$$-\frac{1}{a_2} = \frac{-1}{1 - m(a_1 - 1)};$$

таким образом, мы имеем:

$$\frac{-1}{1 - m(a_1 - 1)} = m,$$

откуда

$$a_1 = \frac{1 + m + m^2}{m^2},$$

$$a_2 = -\frac{1}{m}.$$

Следовательно, единственная фиксированная точка пространства $\mathbf{U}$ есть точка

$$\bar{u} = \left\| \frac{1 + m + m^2}{m^2} \quad -\frac{1}{m} \quad 1 \right\|.$$

Аналогично, единственная фиксированная точка пространства $\mathbf{W}$ есть точка

$$w = \left\| \frac{1 - m}{m^2} \quad \frac{1}{m} \quad 1 \right\|.$$

Цена игры (для P_1), как мы видим, равна

$$E(\bar{u}, \bar{w}) = \bar{u}_1 + \bar{w}_1 + \bar{u}_2 \bar{w}_2 = \frac{1 + m^2}{m^2}.$$

В заключение найдем функции распределения F и G, которые соответствуют фиксированным точкам

$$\bar{u} = \left\| \frac{1 + m + m^2}{m^2} \quad -\frac{1}{m} \quad 1 \right\|$$

и

$$\bar{w} = \left\| \frac{1 - m}{m^2} \quad \frac{1}{m} \quad 1 \right\|.$$

Точка

$$\bar{w} = \left\| \frac{1 - m}{m^2} \quad \frac{1}{m} \quad 1 \right\|$$

может быть представлена выпуклой линейной комбинацией точки $A' = \|0 \; 1 \; 1\|$ и точки $C' = \|y_1 \; \cos 2\pi y_1 \; 1\|$, если положить

$$w_1 = \frac{1-m}{m^2} = (1-t)\cdot 0 + ty_1,$$

откуда мы получаем:

$$t = \frac{1-m}{y_1 m^2}. \tag{25}$$

Функция распределения I_0 соответствует точке $A' = \|0 \; 1 \; 1\|$, а функция распределения I_{y_1} соответствует точке $\|y_1 \; \cos 2\pi y_1 \; 1\|$. Следовательно, по теореме 11.1 функция

$$G = (1-t) I_0 + t I_{y_1}, \tag{26}$$

где y_1 и t определяются формулами (18), (19) и (25), соответствует точке $C' = \|y_1 \; \cos 2\pi y_1 \; 1\|$ и поэтому она является оптимальной стратегией для P_2. (Можно даже показать, что функция распределения G (26) *единственная* оптимальная стратегия для P_2, но мы опустим это доказательство.) Подставляя в (25) значения y_1 и m, мы находим с точностью до двух десятичных знаков

$$t = 0{,}73.$$

Следовательно, цена игры равна примерно 1,05, а приближенное значение наилучшей стратегии для P_2 есть

$$0{,}27 I_0 + 0{,}73 I_{0,37}.$$

Аналогичным путем с помощью фиксированной точки $\bar{u}$ мы можем найти оптимальную (единственную) стратегию для P_1.

3. Фиксированные точки

В разборе предыдущего примера мы молчаливо допускали, что пространство U может содержать фиксированную точку на прямой BD и, кроме того, фиксированную точку на дуге QD. Оказалось, что этого не может быть. Мы докажем сейчас теорему, которая показывает, что если бы на BDQ были две фиксированные точки, из коих одна не на BD, то отсюда вытекало бы, что имеется фиксированная точка внутри пространства U.

Теорема 11.9. *Для любой разделимой игры множество фиксированных точек пространства* $\mathbf{U}$ *является замкнутым и выпуклым.* (Это справедливо также для множества фиксированных точек пространства $\mathbf{W}$.)

Доказательство. Мы докажем теорему для пространства $\mathbf{U}$; доказательство для пространства $\mathbf{W}$ аналогично.

Пусть $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$ — последовательность фиксированных точек пространства $\mathbf{U}$, сходящаяся к точке y; нам надо доказать, что y также фиксированная.

Пусть точке $x^{(i)}$ соответствует функция распределения H_i ($i=1, 2, \ldots$). Последовательность $H_1, H_2, \ldots$ функций распределения содержит (по теореме 8.2) подпоследовательность $H_{i_1}, H_{i_2}, \ldots$, которая сходится к функции распределения F во всякой точке непрерывности функции F. Для упрощения обозначений положим

$$F_j = H_{i_j} \quad (j=1, 2, \ldots)$$

и

$$y^{(j)} = x^{(i_j)} \quad (j=1, 2, \ldots).$$

Тогда $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots$ есть последовательность фиксированных точек пространства $\mathbf{U}$, которая сходится к точке y; точке $y^{(i)}$ соответствует функция распределения F_i ($i=1, 2, \ldots$), последовательность $F_1, F_2, \ldots$ сходится к F во всякой точке непрерывности функции F. По теореме 9.23 мы заключаем, что точке y соответствует функция распределения F. На основании теоремы 11.6 мы видим, что каждая из функций F_i, поскольку она соответствует фиксированной точке $y^{(i)}$, есть оптимальная стратегия для P_1, а по теореме 10.21 отсюда следует, что F есть оптимальная стратегия для P_1. Поскольку y соответствует функции F, мы заключаем (также по теореме 11.6), что y есть фиксированная точка, что и требовалось доказать.

Чтобы убедиться в том, что множество фиксированных точек пространства $\mathbf{U}$ выпуклое, положим, что $x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}$ — любые фиксированные точки, $F_1, \ldots, F_r$ — соответствующие функции распределения, и $\| a_1 \ldots a_r \|$ — любой элемент множества $\mathbf{S}_r$. Тогда по теореме 11.6 каждая F_i ($i=1, \ldots, r$) есть оптимальная стратегия для P_1.

Следовательно, по теореме 10.21 функция F, определенная равенством

$$F = a_1 F_1 + \ldots + a_r F_r,$$

есть оптимальная стратегия для P_1. Кроме того, по теореме 11.1, точка

$$x = a_1 x^{(1)} + \ldots + a_r x^{(r)}$$

есть точка пространства $\mathbf{U}$, и она соответствует функции F; итак (снова по теореме 11.6), x есть фиксированная точка, что и требовалось доказать.

Методы, которыми мы пользовались до сих пор, применимы к любому представлению разделимой игры. Мы установим сейчас несколько теорем, которые применимы только к разделимым играм, представленным определенным образом, но которые в этом случае часто позволяют найти решение более легким путем, чем применявшиеся раньше методы.

Рассмотрим разделимую игру, у которой платежная функция M представлена в такой форме:

$$M(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} r_i(x) s_j(y) + \sum_{i=1}^{n} b_i r_i(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j s_j(y) + d, \quad (27)$$

причем выполняются следующие условия: 1) функции $r_1, \ldots, r_n$; $s_1, \ldots, s_n$ непрерывны на интервале $[0, 1]$ и 2) определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Всякое представление разделимой функции в форме (27), удовлетворяющее этим двум условиям, мы будем называть *каноническим представлением* (или *канонической формой*) функции M.

Мы замечаем, что форма (27) не более и не менее обща, чем форма (1), пока мы не накладываем условие 2). Преимущество формы (27) перед формой (1) для наших целей состоит в том, что применение формы (27) часто избавляет нас от необходимости приписывать константам функциональные символы r_i и s_j и тем самым позволяет уменьшить размерность пространств, содержащих множества $\mathbf{U}$ и $\mathbf{W}$.

Замечание 11.10. Поскольку, как мы видели в начале главы, всякая разделимая функция может быть представлена в виде

$$\sum_{j=1}^{n} t_j(x) s_j(y),$$

где определитель равен 1, очевидно, всякая разделимая функция имеет каноническую форму.

Пример 11.11. Пусть M определена уравнением

$$M(x, y) = xy - xe^y + 2x\cos y + \\ + 2e^x y + 3e^x e^y + e^x \cos y + 5\cos x e^y - 3\cos x \cos y.$$

Если мы положим здесь:

$$r_1(x) = x, \qquad s_1(y) = y,$$
$$r_2(x) = e^x, \qquad s_2(y) = e^y,$$
$$r_3(x) = \cos x, \qquad s_3(y) = \cos y,$$

то

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Но если мы положим:

$$r_1'(x) = x - 2\cos x, \quad s_1'(y) = y + \frac{7}{5}\cos y,$$

$$r_2'(x) = e^x + \cos x, \quad s_2'(y) = e^y - \frac{3}{5}\cos y,$$

то

$$M(x, y) = r_1'(x) s_1'(y) - r_1'(x) s_2'(y) + \\ + 2r_2'(x) s_1'(y) + 3r_2'(x) s_2'(y)$$

и

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$$

так что это представление каноническое.

Если

$$M(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} r_i(x) s_j(y) + \sum_{i=1}^{n} b_i r_i(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j s_j(y) + d \quad (27)$$

есть каноническое представление платежной функции разделимой игры, то мы можем представить математическое ожидание для P_1 следующим образом:

$$E(u, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_i w_j + \sum_{i=1}^{n} b_i u_i + \sum_{j=1}^{n} c_j w_j + d =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i + c_j\right) w_j + \sum_{i=1}^{n} b_i u_i + d =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j + b_i\right) u_i + \sum_{j=1}^{n} c_j w_j + d.$$

Поскольку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то система уравнений

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} a_{i1} u_i + c_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{in} u_i + c_n = 0 \end{array}\right\} \quad (28)$$

имеет единственное решение, как и система уравнений

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} w_j + b_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} w_j + b_n = 0. \end{array}\right\} \quad (29)$$

Мы назовем решение системы уравнений (28) *первой критической точкой* игры (по отношению к данному представлению), а решение системы (29) *второй критической точкой* игры (по отношению к данному представлению).

Может, конечно, оказаться, что первая критическая точка не лежит в пространстве **U**; мы знаем лишь то, что она лежит где-то в n-мерном пространстве, а **U** не обязательно должно включать все n-мерное пространство. Точно так же вторая критическая точка не обязательно лежит в пространстве **W**.

Теорема 11.12. *Пусть дана платежная функция M разделимой игры в канонической форме* (27); $p = \| p_1 \dots p_n \|$ *и* $q = \| q_1 \dots q_n \|$ — *первая и вторая критические точки,* $p \in \mathbf{U}$ *и* $q \in \mathbf{W}$. *Тогда p и q суть фиксированные точки, и цена игры равна*

$$v = \sum_{i=1}^{n} b_i p_i + d = \sum_{j=1}^{n} c_j q_j + d.$$

Доказательство. По определению критических точек мы имеем:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i + c_j = 0 \quad \text{для} \quad j = 1, \dots, n \tag{30}$$

и

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j + b_i = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \dots, n. \tag{31}$$

Мы имеем также для любой точки $w = \| w_1 \dots w_n \|$ пространства **W**

$$E(p, w) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i + c_j \Big) w_j + \sum_{i=1}^{n} b_i p_i + d,$$

или из (30)

$$E(p, w) = \sum_{i=1}^{n} b_i p_i + d.$$

Поскольку это выражение не зависит от w, отсюда следует, что

$$\mathbf{W}(p) = \mathbf{W}.$$

Аналогично

$$\mathbf{U}(q) = \mathbf{U}.$$

Следовательно, $p \in \mathbf{U}(q)$ и $q \in \mathbf{W}(p)$, так что p и q суть фиксированные точки, и

$$E(p, q) = \sum_{i=1}^{n} b_i p_i + d = \sum_{j=1}^{n} c_j q_j + d$$

есть цена игры.

Замечание 11.13. Нужно искать каноническое представление функции M, которое включало бы возможно меньше функций r_i и s_j, так как если мы применяем больше функций r_i и s_j, чем это необходимо, то следующая теорема становится бессмысленной. Если M выражено в форме (27), то $\mathbf{U}$ и $\mathbf{W}$ суть подмножества n-мерного евклидова пространства; а если, например, функции r_i линейно зависимы, то $\mathbf{U}$ будет лежать в гиперплоскости n-мерного евклидова пространства, и, следовательно, его внутренняя часть $I(\mathbf{U})$ будет пустой, так что предположение второй части теоремы не будет выполняться.

Теорема 11.14. *Пусть платежная функция M разделимой игры задана в канонической форме* (27) *и* $I(\mathbf{W})$ (*внутренность пространства* $\mathbf{W}$) *содержит фиксированную точку; тогда первая критическая точка принадлежит пространству* $\mathbf{U}$, *и это единственная фиксированная точка пространства* $\mathbf{U}$. (Аналогично, если $I(\mathbf{U})$ содержит фиксированную точку, то вторая критическая точка принадлежит пространству $\mathbf{W}$, и это единственная фиксированная точка пространства $\mathbf{W}$.)

Доказательство. Мы докажем лишь первую часть теоремы; доказательство второй части аналогично.

Пусть $t = \| t_1 \ldots t_n \|$ — фиксированная точка пространства $\mathbf{W}$, лежащая в $I(\mathbf{W})$, $z = \| z_1 \ldots z_n \|$ — некоторая фиксированная точка пространства $\mathbf{U}$ и $p = \| p_1 \ldots p_n \|$ — первая критическая точка; мы хотим показать, что $z = p$. Предположим, что $z \neq p$. Поскольку p есть единственное решение уравнения (28), мы имеем для некоторого $k \leqslant n$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} z_i + c_k = g \neq 0. \tag{32}$$

Пусть h — действительное число противоположного знака по сравнению с g и достаточно малое, чтобы точка

$$\bar{t} = \| t_1 \ldots t_{k-1}\, t_k + h\, t_{k+1} \ldots t_n \|$$

лежала в $\mathbf{W}$.

Мы имеем:

$$E(z, t) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} z_i + c_j\right) t_j + \sum_{i=1}^{n} b_i z_i + d$$

и

$$E(z, \bar{t}) = E(z, t) + h\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik} z_i + c_k\right) =$$
$$= E(z, t) + hg < E(z, t). \quad (33)$$

Но это значит, что $\bar{t} \in \mathbf{W}(z)$, а по теореме 11.7 это противоречит нашему допущению, что z и t суть фиксированные точки.

Из теоремы 11.12 и 11.14 непосредственно вытекают такие следствия:

Следствие 11.15. Пусть платежная функция разделимой игры задана в канонической форме и первая критическая точка не принадлежит пространству $\mathbf{U}$; тогда всякая фиксированная точка пространства $\mathbf{W}$ находится в $B(\mathbf{W})$ (границе пространства $\mathbf{W}$). Аналогично, если вторая критическая точка не принадлежит пространству $\mathbf{W}$, то всякая фиксированная точка пространства $\mathbf{U}$ находится в $B(\mathbf{U})$.

Следствие 11.16. Пусть платежная функция разделимой игры задана в канонической форме, p и q — соответственно первая и вторая критические точки, $p \in I(\mathbf{U})$ и $q \in I(\mathbf{W})$; тогда p есть единственная фиксированная точка пространства $\mathbf{U}$, а q — единственная фиксированная точка пространства $\mathbf{W}$.

Замечание 11.17. Мы замечаем, что платежная функция M примера 11.8 может быть представлена в канонической форме, если положить:

$$\begin{aligned} r_1(x) &= \cos 2\pi x, & s_1(y) &= \cos 2\pi y, \\ r_2(x) &= x, & s_2(y) &= y, \\ r_3(x) &= -x, & s_3(y) &= y, \end{aligned}$$

так что мы имеем:

$$M(x, y) = r_1(x)\, s_1(y) + r_2(x)\, s_2(y) + \\ + r_3(x)\, s_3(y) - r_3(x) + s_3(y).$$

Мы находим:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Но при этом выборе значений r_i и s_j мы видим, что первая критическая точка не принадлежит пространству **U**, а вторая не принадлежит пространству **W**; поэтому предложения 11.12, 11.14, 11.15 и 11.16 говорят лишь о том, что фиксированные точки должны принадлежать границам пространств **U** и **W**. Но $B(\mathbf{U}) = \mathbf{U}$, поскольку $r_2(x)$ и $r_3(x)$ линейно зависимы; и аналогично $B(\mathbf{W}) = \mathbf{W}$. Поэтому предложения 11.12, 11.14, 11.15 и 11.16 в действительности ничего нам не говорят.

4. Дальнейшие примеры

Пример 11.18. Платежная функция M разделимой игры удовлетворяет следующему равенству (для любой точки $\|xy\|$ замкнутого единичного квадрата):

$$M(x, y) = 3\cos 7x \cos 8y + 5\cos 7x \sin 8y + \\ + 2\sin 7x \cos 8y + \sin 7x \sin 8y.$$

Возьмем

$$r_1(x) = \cos 7x, \quad s_1(y) = \cos 8y,$$
$$r_2(x) = \sin 7x, \quad s_2(y) = \sin 8y,$$

так что M представится следующим образом:

$$M(x, y) = 3r_1(x)\, s_1(y) + 5r_1(x)\, s_2(y) + \\ + 2r_2(x)\, s_1(y) + r_2(x)\, s_2(y).$$

Итак, пространства **U** и **W** имеют два измерения. Для нахождения **U*** мы чертим кривую, соответствующую параметрическим уравнениям

$$u_1 = \cos 7t,$$
$$u_2 = \sin 7t.$$

Эта кривая, очевидно, есть окружность радиуса 1 с центром в начале координат (поскольку мы чертим кривую для $0 \leqslant t \leqslant 1$ и поскольку $7 > 2\pi$, то часть окружности чертится дважды, но сейчас это для нас безразлично). Следовательно, **U** (выпуклая оболочка множества **U***) есть эта окружность вместе с ее внутренней частью. Аналогично, поскольку $8 > 2\pi$, кривая **W*** тождественна с **U***, а **W** тождественно с **U**.

Очевидно, данное представление является каноническим, так как

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0.$$

Для этого примера уравнения (28) записываются так:

$$3u_1 + 2u_2 = 0,$$
$$5u_1 + u_2 = 0,$$

а уравнения (29) так:

$$3w_1 + 5w_2 = 0,$$
$$2w_1 + w_2 = 0.$$

Решения этой системы, очевидно, такие: $p = \|0 \quad 0\|$ и $q = \|0 \quad 0\|$. Итак, первая критическая точка принадлежит множеству I (**U**), а вторая – множеству I (**W**). Следовательно, по теореме 11.16, p – единственная фиксированная точка пространства **U**, а q — единственная фиксированная точка пространства **W**.

Таким образом, задача отыскания решений данной игры сводится к задаче отыскания функций распределения, которым соответствует точка $\|0 \quad 0\|$. Чтобы найти конкретную оптимальную стратегию для P_1, мы замечаем, что точка $\|0 \quad 0\|$ есть выпуклая линейная комбинация двух точек $\|1 \quad 0\|$ и $\|-1 \quad 0\|$. Действительно,

$$\|0 \quad 0\| = \frac{1}{2} \|1 \quad 0\| + \frac{1}{2} \|-1 \quad 0\|. \tag{34}$$

Поскольку $\|1 \quad 0\|$ есть точка множества **U***, этой точке соответствует одноступенчатая функция I_t; итак, мы имеем:

$$1=\int_0^1 r_1(x)\,dI_t(x)=r_1(t)=\cos 7t,$$

$$0=\int_0^1 r_2(x)\,dI_t(x)=r_2(t)=\sin 7t.$$

Эти уравнения наряду с неравенством

$$0\leqslant t\leqslant 1$$

указывают, что либо $t=0$, либо $t=\frac{2\pi}{7}$; итак, точка $\|1\quad 0\|$ соответствует одной из двух ступенчатых функций: I_0 или $I_{2\pi/7}$. Аналогично замечаем, что точка $\|-1\quad 0\|$ соответствует ступенчатой функции $I_{\pi/7}$. Из этих соотношений и из равенства (34) мы теперь заключаем на основании теоремы 11.1, что функция распределения

$$\frac{1}{2}I_0+\frac{1}{2}I_{\pi/7}$$

есть оптимальная стратегия для P_1, и, очевидно, то же относится к функции распределения

$$\frac{1}{2}I_{2\pi/7}+\frac{1}{2}I_{\pi/7}.$$

Обобщая это рассуждение, мы находим, что наиболее общий вид функции распределения с двумя ступенями, соответствующей точке $\|0\quad 0\|$ пространства U, такой:

$$\frac{1}{2}I_{t_1}+\frac{1}{2}I_{t_2},$$

где $0\leqslant t_1<t_2\leqslant 1$ и $t_2-t_1=\frac{\pi}{7}$. Итак, мы нашли бесконечное семейство оптимальных стратегий для P_1.

Аналогично можно написать общее выражение для оптимальной стратегии игрока P_2, содержащей лишь две ступени:

$$\frac{1}{2}I_{t_1}+\frac{1}{2}I_{t_2},$$

где $0\leqslant t_1<t_2\leqslant 1$ и $t_2-t_1=\frac{\pi}{8}$.

Однако существуют также оптимальные стратегии больше чем с двумя ступенями. Если $u^{(1)}, \ldots, u^{(p)}$ суть точки множества $\mathbf{U}^*$ такие, что $\|0 \quad 0\|$ находится в выпуклой оболочке множества $\{u^{(1)}, \ldots, u^{(p)}\}$, то мы можем выразить точку $\|0 \quad 0\|$ как выпуклую линейную комбинацию точек $u^{(1)}, \ldots, u^{(p)}$ и найти ступенчатую функцию с p ступенями, соответствующую точке $\|0 \quad 0\|$. Так, например, рассмотрим три точки: $\|1 \quad 0\|$, $\|0 \quad 1\|$ и $\left\|-\frac{1}{2} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\|$. Чтобы выразить $\|0 \quad 0\|$ как выпуклую линейную комбинацию этих точек, мы должны найти неотрицательные числа a_1, a_2 и a_3, удовлетворяющие равенствам

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1,$$

$$a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3\left(-\frac{1}{2}\right) = 0,$$

$$a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1 + a_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$$

Решая совместно эти уравнения, получаем:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{3-\sqrt{3}}{6}, \\ a_2 &= \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \\ a_3 &= \frac{3-\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

Поскольку, как легко видеть, I_0 соответствует точке $\|1 \quad 0\|$, $I_{\pi/14}$ соответствует точке $\|0 \quad 1\|$ и $I_{4\pi/21}$ соответствует точке $\left\|-\frac{1}{2} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\|$, мы заключаем отсюда, что функция распределения

$$a_1 I_0 + a_2 I_{\pi/14} + a_3 I_{4\pi/21},$$

где a_1, a_2 и a_3 определяются уравнениями (35), есть оптимальная стратегия для P_1.

Конечно, существуют также оптимальные стратегии, не являющиеся ступенчатыми функциями. Так, функция распределения F такая, что

$$F(x)=\frac{7x}{2\pi} \quad \text{для} \quad 0\leqslant x\leqslant \frac{2\pi}{7},$$

$$F(x)=1 \quad \text{для} \quad \frac{2\pi}{7}<x\leqslant 1$$

есть непрерывная оптимальная стратегия для P_1.

Из теоремы 11.12 следует, что цена этой игры для P_1 равна 0.

Пример 11.19. Платежная функция разделимой игры (для любой точки $\|x \; y\|$ замкнутого единичного квадрата) удовлетворяет следующему равенству:

$$M(x, y)=3\cos 4x\cos 5y+5\cos 4x\sin 5y+ \\ +\sin 4x\cos 5y+\sin 4x\sin 5y+ \\ +4\cos 4x+\sin 4x+\cos 5y+2\sin 5y+3.$$

Мы примем здесь

$$r_1(x)=\cos 4x, \quad s_1(y)=\cos 5y,$$
$$r_2(x)=\sin 4x, \quad s_2(y)=\sin 5y,$$

так что M можно представить следующим образом:

$$M(x, y)=3r_1(x)s_1(y)+5r_1(x)s_2(y)+r_2(x)s_1(y)+ \\ +r_2(x)s_2(y)+4r_1(x)+r_2(x)+s_1(y)+2s_2(y)+3.$$

Мы замечаем, что

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\neq 0,$$

и следовательно, M представлена в канонической форме.

Вспомнив, что x лежит в интервале $[0, 1]$, мы видим, что кривая $\mathbf{U}^*$ есть часть окружности

$$u_1^2+u_2^2=1,$$

представленная на рис. 43 дугой ABC (угол $\angle AOC$ равен 4 радианам), и что пространством $\mathbf{U}$ является заштрихованная область. Пространство $\mathbf{W}$ изображается заштрихованной областью на рис. 44.

Первую критическую точку мы находим, решая уравнения

$$3u_1+u_2+1=0,$$
$$5u_1+u_2+2=0.$$

Отсюда заключаем, что точка $\|u_1\ u_2\| = \left\| -\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2} \right\|$ является внутренней точкой пространства **U**. Вторая критическая точка есть $\|w_1\ w_2\| = \left\| -\frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2} \right\|$. Это внутренняя точка пространства **W**. Из следствия 11.16 вытекает,

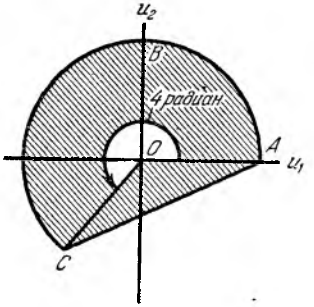

Рис. 43.

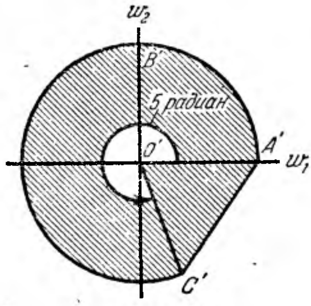

Рис. 44.

что точки $\left\| -\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2} \right\|$ и $\left\| -\frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2} \right\|$ суть единственные фиксированные точки соответственно пространств **U** и **W**. Следовательно, для отыскания решений этой игры нужно лишь найти функции распределения, которые соответствуют точкам $\left\| -\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2} \right\|$ и $\left\| -\frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2} \right\|$, это можно сделать способом, аналогичным применявшемуся в примере 11.18.

П р и м е р 11.20. Платежная функция разделимой игры для любой точки $\|x\ y\|$ замкнутого единичного квадрата удовлетворяет следующему равенству:

$$\begin{aligned} M(x, y) = 3\,&[1+\cos 2\pi x]\,[1+\cos 2\pi y] + \\ &+ 5\,[1+\cos 2\pi x]\,[1+\sin 2\pi y] + \\ &+ 2\,[1+\sin 2\pi x]\,[1+\cos 2\pi y] + \\ &+ [1+\sin 2\pi x]\,[1+\sin 2\pi y]. \end{aligned}$$

Положив

$$r_1(x) = 1+\cos 2\pi x, \quad s_1(y) = 1+\cos 2\pi y,$$
$$r_2(x) = 1+\sin 2\pi x, \quad s_2(y) = 1+\sin 2\pi y,$$

мы имеем:

$$M(x,\ y) = 3r_1(x)\,s_1(y) + 5r_1(x)\,s_2(y) + \\ + 2r_2(x)\,s_1(y) + r_2(x)\,s_2(y).$$

Теперь легко убедиться в том, что пространство $\mathbf{U}$ состоит из точек, лежащих на или внутри окружности

$$(u_1 - 1)^2 + (u_2 - 1)^2 = 1,$$

а пространство $\mathbf{W}$ состоит из точек, лежащих на или внутри окружности

$$(w_1 - 1)^2 + (w_2 - 1)^2 = 1.$$

Первая и вторая критические точки суть $\|0 \quad 0\|$. Поскольку начало координат не лежит ни в пространстве $\mathbf{U}$, ни в пространстве $\mathbf{W}$, мы видим из следствия 11.15, что фиксированные точки пространств $\mathbf{U}$ и $\mathbf{W}$ находятся на границе. Далее, граница пространства $\mathbf{U}$ есть окружность

$$(u_1 - 1)^2 + (u_2 - 1)^2 = 1.$$

Если бы $\mathbf{U}$ содержало две различные фиксированные точки (которые обе должны были бы лежать на этой окружности), то по теореме 11.9 все точки хорды, соединяющей эти фиксированные точки, также были бы фиксированными. Это противоречило бы утверждению, что всякая фиксированная точка пространства $\mathbf{U}$ лежит на границе $\mathbf{U}$. Поэтому пространство $\mathbf{U}$ содержит лишь одну фиксированную точку. Аналогично пространство $\mathbf{W}$ содержит тоже лишь одну фиксированную точку.

Поскольку в этом примере $\mathbf{U}^*$ совпадает с $B(\mathbf{U})$, мы заключаем, что существуют оптимальные чистые стратегии для первого и второго игроков, то есть игра имеет седловую точку.

Следующий пример показывает, что когда $B(\mathbf{U})$ и $B(\mathbf{W})$ содержат прямолинейные отрезки, то может быть бесконечное число фиксированных точек — если даже первая критическая точка не принадлежит пространству $\mathbf{U}$, а вторая — пространству $\mathbf{W}$.

Пример ~~11~~.21. Платежная функция разделимой игры удовлетворяет (для любой точки $\|x \;\; y\|$ замкнутого единичного квадрата) следующему равенству:

$$M(x,\ y) = 5[2+\cos\pi(1+x)][\sin\pi y] + \\ + 2[\sin\pi(1+x)][-2+\cos\pi y] + [\sin\pi(1+x)][\sin\pi y].$$

Положив

$$r_1(x) = 2+\cos\pi(1+x), \quad s_1(y) = -2+\cos\pi y,$$
$$r_2(x) = \sin\pi(1+x), \quad s_2(y) = \sin\pi y,$$

мы имеем:

$$M(x,y) = 5r_1(x)\,s_2(y) + 2r_2(x)\,s_1(y) + r_2(x)\,s_2(y),$$

и отсюда

$$E(u,\ v) = 5u_1v_2 + 2u_2v_1 + u_2v_2.$$

И первая, и вторая критические точки суть $\|0\quad 0\|$. Мы легко можем убедиться в том, что пространства **U** и **W** изображаются заштрихованными областями соответственно на рис. 45 и на рис. 46. Далее, всякая точка отрезка AB есть фиксированная точка пространства **U**, а всякая фиксированная точка отрезка $A'B'$ есть фиксированная точка пространства **W**.

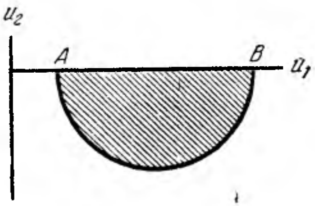

Рис. 45.

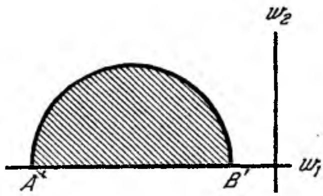

Рис. 46.

В примере 11.20 мы видели, как можно использовать следствие 11 15 для разбора некоторых игр, в которых ни одно из пространств **U** или **W** не содержит в себе своих критических точек. Следующий пример поясняет, как можно использовать это следствие для исследования игр, у которых одна критическая точка лежит в соответствующем ей пространстве, а другая не лежит.

Пример 11.22. Платежная функция M разделимой игры (для любой точки $\|xy\|$ замкнутого единичного квадрата) удовлетворяет следующему равенству:

$$M(x,y) = 3[\cos 2\pi x][2+\cos 2\pi y] + 5[\cos 2\pi x][2+\sin 2\pi y] + \\ + 2[\sin 2\pi x][2+\cos 2\pi y] + [\sin 2\pi x][2+\sin 2\pi y].$$

Положив

$$r_1(x) = \cos 2\pi x, \quad s_1(y) = 2 + \cos 2\pi y,$$
$$r_2(x) = \sin 2\pi x, \quad s_2(y) = 2 + \sin 2\pi y,$$

мы можем легко убедиться, что пространство **U** представляет окружность

$$u_1^2 + u_2^2 = 1$$

вместе с ее внутренней частью, а пространство **W** представляет окружность

$$(w_1 - 2)^2 + (w_2 - 2)^2 = 1$$

вместе с ее внутренней частью. В этом случае критическая точка есть $\|0 \quad 0\|$. Эта точка не находится в **W**, но лежит внутри пространства **U**.

Поскольку вторая критическая точка не принадлежит пространству **W**, то на основании следствия 11.15 мы видим, что фиксированные точки пространства **U** находятся только в $B(\mathbf{U})$. При помощи рассуждения, аналогичного тем, которые мы применяли для этой цели в примере 11.20, мы докажем, что в **U** есть лишь одна фиксированная точка, скажем, u^*. Но если бы в $I(\mathbf{W})$ находилась фиксированная точка пространства **W**, то по теореме 11.14 первая критическая точка $\|0 \quad 0\|$ была бы фиксированной точкой пространства **U**. Это противоречит утверждению, что единственная фиксированная точка пространства **U** лежит в $B(\mathbf{U})$. Следовательно, фиксированные точки пространства **W** должны лежать только в $B(\mathbf{W})$; а поскольку **W** есть круг, мы заключаем (опять при помощи таких же рассуждений, как в примере 11.20), что в **W** имеется лишь одна фиксированная точка. Итак, мы видим, как и в примере 11.20, что игра имеет седловую точку.

5. Решение прямоугольной игры как разделимой игры

В этом параграфе мы покажем на примере, что прямоугольную игру можно решать способами, применимыми для разделимых игр. В примере рассматривается матрица 3×3, но излагаемый метод можно легко обобщить на произвольные платежные матрицы. Рассмотрим следующую платежную матрицу:

$$A=\begin{Vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Смешанная стратегия игрока P_1 есть следующий вектор: $u=\|u_1 \quad u_2 \quad 1-u_1-u_2\|$, где $0\leqslant u_i\leqslant 1$ $(i=1,\ 2)$ и $\sum_{i=1}^{2} u_i\leqslant 1$. Смешанная стратегия игрока P_2 есть вектор $w=\|w_1 \quad w_2 \quad 1-w_1-w_2\|$, где $0\leqslant w_i\leqslant 1$ $(i=1,\ 2)$ и $\sum_{i=1}^{2} w_i\leqslant 1$. Математическое ожидание выигрыша P_1 равно

$$\begin{aligned} E(u,\ w)=(-3u_1-2u_2)\,w_1+(u_1-2u_2+1)\,w_2+ \\ +(-u_1+u_2+1)=(-3w_1+w_2-1)\,u_1+ \\ +(-2w_1-2w_2+1)\,u_2+(w_2+1). \end{aligned}$$

Во-первых, мы замечаем, что математическое ожидание выигрыша есть билинейная форма координат u и w. Из вышеприведенных неравенств мы видим также, что пространство $\mathbf{U}$ есть равнобедренный прямоугольный треугольник с единичными катетами, а пространство $\mathbf{W}$ тождественно с пространством $\mathbf{U}$. Во-вторых, отсюда вытекает, что пространства $\mathbf{U}$ и $\mathbf{W}$ суть замкнутые ограниченные выпуклые множества. Таким образом, мы имеем такую ситуацию, как если бы у нас была следующая разделимая игра: P_1 выбирает точку $u\in\mathbf{U}$, P_2 выбирает точку $w\in\mathbf{W}$, а платеж есть билинейная форма $E(u,\ w)$. Чтобы решить игру, исследуем фиксированные точки пространств $\mathbf{U}$ и $\mathbf{W}$. При отыскании образа $\mathbf{W}(u)$ каждой точки $u\in\mathbf{U}$ уместно положить

$$p_1=-3u_1-2u_2,\quad p_2=u_1-2u_2+1.$$

В таблице 1 представлены отображения на $\mathbf{W}$ каждой точки u пространства $\mathbf{U}$.

Положим теперь $q_1=-3w_1+w_2-1$, $q_2=-2w_1-2w_2+1$; для этого случая в таблице 2 представлены отображения на $\mathbf{U}$ каждой точки w пространства $\mathbf{W}$.

Таблица 1

Образы точек пространства U

Для области,	определенной условиями,	образ $\mathbf{W}(u)$ точки u
$\mathbf{U}_1$	$p_1 > 0, \quad p_2 > 0$	$\|\|0 \quad 0\|\|$
$\mathbf{U}_2$	$p_1 < 0, \quad p_1 < p_2$	$\|\|1 \quad 0\|\|$
$\mathbf{U}_3$	$p_2 < 0, \quad p_2 < p_1$	$\|\|0 \quad 1\|\|$
$\mathbf{U}_4$	$p_1 = p_2 < 0$	$\|\|\alpha \quad 1-\alpha\|\|$, где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$
$\mathbf{U}_5$	$p_1 = 0 < p_2$	$\|\|\alpha \quad 0\|\|$, где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$
$\mathbf{U}_6$	$p_2 = 0 < p_1$	$\|\|0 \quad \alpha\|\|$, где $0 < \alpha < 1$
$\mathbf{U}_7$	$p_1 = p_2 = 0$	$\|\|\alpha \quad \beta\|\|$, где $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1, \alpha + \beta \leqslant 1$

Таблица 2

Образы точек пространства W

Для области,	определенной условиями,	образ $\mathbf{U}(w)$ точки w
$\mathbf{W}_1$	$q_1 < 0, \quad q_2 < 0$	$\|\|0 \quad 0\|\|$
$\mathbf{W}_2$	$q_2 > 0, \quad q_1 < q_2$	$\|\|0 \quad 1\|\|$
$\mathbf{W}_3$	$q_1 > 0, \quad q_2 < q_1$	$\|\|1 \quad 0\|\|$
$\mathbf{W}_4$	$q_1 = q_2 > 0$	$\|\|a \quad 1-a\|\|$, где $0 \leqslant a \leqslant 1$
$\mathbf{W}_5$	$q_1 = 0 > q_2$	$\|\|a \quad 0\|\|$, где $0 \leqslant a \leqslant 1$
$\mathbf{W}_6$	$q_2 = 0 > q_1$	$\|\|0 \quad a\|\|$, где $0 \leqslant a \leqslant 1$
$\mathbf{W}_7$	$q_1 = q_2 = 0$	$\|\|a \quad b\|\|$, где $0 \leqslant a, b \leqslant 1, a + b \leqslant 1$

С помощью этих таблиц мы можем определить, какие точки пространств $\mathbf{U}$ и $\mathbf{W}$ суть фиксированные и, следовательно, какие точки являются оптимальными стратегиями для P_1 и для P_2. Например, мы замечаем, что ни одна точка области $\mathbf{U}_1$ не является фиксированной точкой, ибо $\mathbf{W}(u) = \|0 \quad 0\|$, тогда как $\mathbf{U}(\|0 \quad 0\|) = \|0 \quad 1\|$, и эти точки принадлежат области $\mathbf{U}_2$, а не $\mathbf{U}_1$. Подобно этому мы можем показать, что ни одна точка областей $\mathbf{U}_2$, $\mathbf{U}_3$ и $\mathbf{U}_4$ не является фиксированной. Рассмотрим теперь область $\mathbf{U}_5$. Для нее мы имеем $\mathbf{W}(u) = \|\alpha \quad 0\|$. Полагаем $w = \|\alpha \quad 0\|$, тогда

$$\mathbf{U}(w) = \begin{cases} \|0 \quad 0\| & \text{для} \quad \alpha \geqslant \frac{1}{2}, \\ \|0 \quad a\| & \text{для} \quad \alpha = \frac{1}{2}, \\ \|0 \quad 1\| & \text{для} \quad \alpha < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Поскольку $u = \|0 \quad 0\| \in \mathbf{U}_5$, то отсюда вытекает, что $\|0 \quad 0\|$ — фиксированная точка пространства $\mathbf{U}$, а точка $\|\alpha \quad 0\|$, где $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$, есть фиксированная точка пространства $\mathbf{W}$. Другими словами, мы имеем:

$$\|0 \quad 0\| \in \mathbf{U}(\|\alpha \quad 0\|) \quad \text{и} \quad \|\alpha \quad 0\| \in \mathbf{W}(\|0 \quad 0\|),$$

где $\alpha = \frac{1}{2}$. Легко убедиться, что это единственные фиксированные точки. Следовательно, оптимальные стратегии игры таковы:

$$\|0 \quad 0 \quad 1\| \quad (\text{для } P_1)$$

$$\|w_1 \quad 0 \quad 1 - w_1\|, \quad \text{где} \quad \frac{1}{2} \leqslant w_1 \leqslant 1 \quad (\text{для } P_2).$$

Цена игры равна 1.

6. Решение игры с ограничениями как разделимой игры

Предположим, что смешанные стратегии прямоугольной игры должны удовлетворять некоторым дополнительным линейным неравенствам, помимо тех, которые определяют смешанную стратегию; тогда мы имеем *игру с ограничениями*. Такие игры встречаются часто в математической статистике (см. главу XIII), когда рассматриваются задачи статистического решения как игры между статистиком и природой, ибо статистик обычно имеет в памяти достаточно опытных данных относительно прошлого поведения природы в данной области, чтобы суметь по крайней мере установить верхние и нижние границы для частот ожидаемых явлений.

Дополнительные линейные неравенства в игре с ограничениями приводят к тому, что пространство **U** и пространство **W** изменяются, но они по-прежнему остаются замкнутыми, ограниченными и выпуклыми. Платежная функция, конечно, остается неизменной и, в частности, билинейной. Поэтому можно применять методы, используемые для разделимых игр.

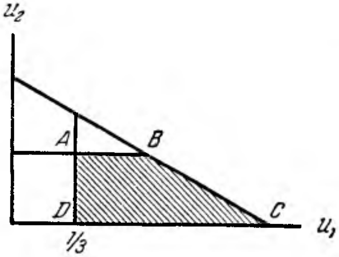

Рис. 47.

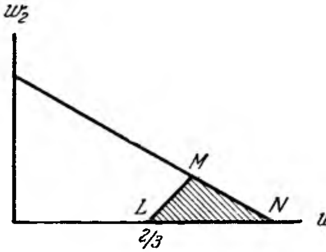

Рис. 48.

Мы можем решать игру путем исследования фиксированных точек. Например, рассмотрим игру, разобранную в предыдущем параграфе. Допустим, что мы налагаем следующие дополнительные линейные ограничения на смешанные стратегии:

$$u_1 \geqslant \frac{1}{3}, \quad u_2 \leqslant \frac{1}{2}, \quad w_2 - w_1 + \frac{2}{3} \leqslant 0.$$

Математическое ожидание выигрыша остается прежним, а именно:

$$E(u, w) = (-3u_1 - 2u_2)\, w_1 + \\ + (u_1 - 2u_2 + 1)\, w_2 + (-u_1 + u_2 + 1).$$

Из дополнительных неравенств вытекает, что пространство **U** представляет собой четырехугольник $ABCD$ (рис. 47, заштрихованная область), а пространство **W** — треугольник LMN (рис. 48, заштрихованная область).

Мы решаем эту игру путем исследования фиксированных точек в пространствах **U** и **W**. Из геометрической структуры пространства **U** следует, что для всего пространства **U** мы имеем:

$$p_1 < 0 < p_2.$$

Следовательно, образ $\mathbf{W}(u)$ всякой точки u пространства $\mathbf{U}$ есть точка $\|1 \quad 0\|$. Но $\mathbf{U}(\|1 \quad 0\|) = \left\|\frac{1}{3} \quad 0\right\|$. Следовательно, $\left\|\frac{1}{3} \quad 0\right\|$ и $\|1 \quad 0\|$ суть фиксированные точки пространств $\mathbf{U}$ и $\mathbf{W}$. Оптимальные стратегии игроков суть

$$\left\|\frac{1}{3} \quad 0 \quad \frac{2}{3}\right\| \quad (\text{для } P_1),$$

$$\|1 \quad 0 \quad 0\| \quad (\text{для } P_2).$$

Цена игры равна $-\frac{1}{3}$.

Библиографические замечания

Эта глава основана в большой степени на выводах, приведенных в работах Дрешера, Карлина и Шепли [35] и Дрешера и Карлина [34], а также на некоторых частных сообщениях Дрешера. См. также работу Дрешера [32].

Упражнения

1. Покажите, что всякая разделимая игра, у которой платежная функция может быть записана в виде

$$M(x, y) = r(x)\,s(y) + ar(x) + bs(y) + c,$$

имеет седловую точку.

2. В примере 11.19 найдите дополнительно какие-либо оптимальные стратегии для обоих игроков.

3. При каких условиях для A, B, C и D разделимая игра с платежной функцией

$$M(x, y) = A\cos 7x\cos 8y + B\cos 7x\sin 8y + C\sin 7x\cos 8y + D\sin 7x\sin 8y$$

будет иметь такие же оптимальные стратегии, как игра примера 11.18?

4. Решите разделимую игру, имеющую платежную функцию

$$M(x, y) = 3\cos\frac{\pi}{2}x\cos\frac{\pi}{2}y + 5\cos\frac{\pi}{2}x\sin\frac{\pi}{2}y + 2\sin\frac{\pi}{2}x\cos\frac{\pi}{2}y + \sin\frac{\pi}{2}x\sin\frac{\pi}{2}y.$$

5. Решите разделимую игру с платежной функцией

$$M(x, y) = (x - y)^2.$$

6. Решите разделимую игру с платежной функцией

$$M(x, y)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)+2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y^3-\frac{1}{4}\right)+$$
$$+5\left(x^3-\frac{1}{4}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)+10\left(x^3-\frac{1}{4}\right)\left(y^3-\frac{1}{4}\right).$$

7. Решите разделимую игру с платежной функцией

$$M(x, y)=(x-2)\left(y-\frac{1}{2}\right)+2(x-2)\left(y^3-\frac{1}{4}\right)+$$
$$+5(x^3-2)\left(y-\frac{1}{2}\right)+10(x^3-2)\left(y^3-\frac{1}{4}\right).$$

8. Решите разделимую игру с платежной функцией

$$M(x, y)=\cos 2\pi x \cos 2\pi y+x+2y.$$

9. Решите разделимую игру с платежной функцией

$$M(x, y)=\cos 4\pi x \cos 4\pi y+x+y.$$

10. Докажите следующую теорему:

Пусть платежная функция разделимой игры имеет каноническое представление

$$M(x, y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}r_i(x)s_j(y)+\sum_{i=1}^{n} b_i r_i(x)+\sum_{j=1}^{n} c_j s_j(y)+d$$

и u — любая точка пространства $\mathbf{U}$, отличная от первой критической точки; тогда

$$\mathbf{U}(w)\subseteq B(\mathbf{U}).$$

Аналогично, если w — любая точка пространства $\mathbf{W}$, отличная от второй критической точки, то

$$\mathbf{W}(u)\subseteq B(\mathbf{W}).$$

11. Докажите следующую теорему:

Если всякая фиксированная точка пространства $\mathbf{U}$ разделимой игры принадлежит множеству $B(\mathbf{U})$ и если $B(\mathbf{U})$ не содержит прямолинейных отрезков, то в пространстве $\mathbf{U}$ имеется одна и только одна фиксированная точка. Аналогичное утверждение справедливо для пространства $\mathbf{W}$.

12. Пусть платежная функция разделимой игры есть

$$M(x, y)=Ae^xe^y+Be^xe^{y^2}+Ce^{x^2}e^y+De^{x^2}e^{y^2}+$$
$$+Ee^x+Fe^{x^2}+Ge^y+He^{y^2}+K,$$

где

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq 0.$$

Найдите решения игры для различных значений A, B, C, D, E, F, G, H и K.

13. Найдите решения игры, имеющей платежную матрицу

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}$$

и смешанные стратегии, подчиненные следующим ограничениям:

$$\frac{1}{5} \leqslant y_1 \leqslant \frac{4}{5}, \quad \frac{1}{3} \leqslant x_1 + x_2 \leqslant \frac{1}{2}.$$

14. Решите игру, имеющую платежную матрицу

$$\begin{Vmatrix} 3 & 39 & 30 \\ 33 & 9 & 0 \\ 28 & 4 & 25 \end{Vmatrix}$$

и смешанные стратегии, подчиненные следующим ограничениям:

$$\frac{1}{10} \leqslant x_1 \leqslant \frac{4}{5}, \quad \frac{1}{20} \leqslant x_2 \leqslant \frac{1}{2}, \quad x_3 \geqslant \frac{6}{5}\left(1 - \frac{20}{9} x_1\right),$$

$$\frac{1}{10} \leqslant y_2 \leqslant 2y_1, \quad y_3 \geqslant \frac{1}{6}.$$

ГЛАВА XII

ИГРЫ С ВЫПУКЛЫМИ ПЛАТЕЖНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

1. Выпуклые функции

Другим классом игр (помимо игр с разделимыми платежными функциями), для которого сравнительно легко находить решения, является класс игр, имеющих платежную функцию, непрерывную и выпуклую относительно одной переменной. В этом параграфе мы приведем некоторые известные положения для этих игр.

Функция f действительной переменной называется *выпуклой* в интервале (a, b), если для всякого элемента $\|\lambda_1 \lambda_2\|$ множества S_2 и для любой пары различных чисел x_1 и x_2 интервала (a, b) мы имеем:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Если для $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ всегда имеет место лишь строгое неравенство, то функция f называется *строго выпуклой.*

Чтобы понять геометрический смысл понятия выпуклости, рассмотрим график на рис. 49.

Поскольку абсцисса точки P_1 равна x_1, ордината кривой в точке P_1 равна $f(x_1)$, то есть

$$P_1 A = f(x_1).$$

Аналогично

$$P_2 C = f(x_2)$$

и

$$QD = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2).$$

Поскольку абсцисса точки Q равна $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, очевидно, Q делит отрезок $P_1 P_2$ в отношении $\lambda_1 : \lambda_2$; кроме того, поскольку числа λ_1 и λ_2 оба положительны, Q лежит между P_1 и P_2. На основании подобия треугольников

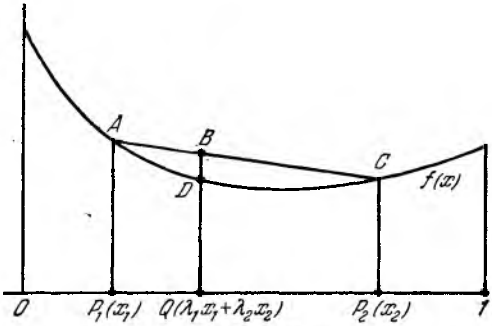

Рис. 49.

мы заключаем, что B делит AC в отношении $\lambda_1 : \lambda_2$ и, следовательно,

$$QB = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Итак, из неравенства, определяющего выпуклую функцию, вытекает, что

$$QD \leqslant QB,$$

то есть график функции не может лежать выше прямолинейного отрезка, соединяющего любые две точки графика. Функция является строго выпуклой, если график функции всегда лежит *ниже* данного прямолинейного отрезка.

Легко видеть, что единственные выпуклые функции, не являющиеся строго выпуклыми, суть функции, графики которых состоят частично или полностью из прямолинейных отрезков. Следующие функции выпуклы в интервале $(-\infty, +\infty)$, то есть во всяком конечном интервале:

$$x^4, \quad 3-7x+x^2, \quad e^x, \quad e^{-x}, \quad |x|.$$

Все эти функции, за исключением последней, строго выпуклые.

Очевидно, могут быть функции, выпуклые лишь в некоторых интервалах. Например, функция $\sin x$

выпукла в интервале $(-\pi, 0)$, но она не является выпуклой в интервале $(0, \pi)$.

Из дифференциального исчисления известно, что функция является строго выпуклой в интервале, если она имеет положительную вторую производную во всякой точке интервала. С другой стороны, функция может быть строго выпуклой в интервале, если даже она имеет вторую производную не во всех точках интервала. Так, например, функция f, определенная условиями:

$$f(x) = 2 + (x+4)^2 \qquad (x \geqslant 0),$$

$$f(x) = 2 + (x-4)^2 \qquad (x < 0),$$

не имеет второй производной (и даже первой при $x = 0$), но легко проверить, что эта функция строго выпуклая в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Если у функции двух переменных одна переменная фиксирована, то мы получаем функцию одной переменной, и эта функция может оказаться выпуклой (или строго выпуклой); так, функция

$$f(x, y) = 5x^2 - 10y^2$$

строго выпуклая по x для любого y, так как

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 10 > 0;$$

но она не выпуклая по y для любого x, так как

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -20 < 0.$$

Функция

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy + 1$$

есть строго выпуклая функция по x для любого y и строго выпуклая функция по y для любого x.

Можно также обобщить понятие выпуклости на функции нескольких переменных. Если f есть функция n переменных, то мы называем функцию f *выпуклой* внутри n-мерной области, если для всякого элемента $\|\lambda_1 \ \lambda_2\|$ множества S_2 и для любой пары различных точек $\|x_1 \ldots x_n\|$ и $\|\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n\|$ области выполняется соотношение

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 \bar{x}_1, \ \ldots, \ \lambda_1 x_n + \lambda_2 \bar{x}_n) \leqslant$$
$$\leqslant \lambda_1 f(x_1, \ \ldots, \ x_n) + \lambda_2 f(\bar{x}_1, \ \ldots, \ \bar{x}_n).$$

Как и в случае функции одной переменной, мы называем функцию f *строго выпуклой*, если при $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ имеет место строгое неравенство.

Это понятие выпуклости не сводится к понятию выпуклости по каждой переменной в отдельности. Так, функция $f(x, y)$ может быть выпуклой по x для любого y и выпуклой по y для любого x, не будучи выпуклой по двум переменным одновременно. Например, функция

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 x_2 + 1$$

есть выпуклая функция по x_1 для любого x_2 и выпуклая функция по x_2 для любого x_1, но она не является выпуклой функцией по x_1 и x_2 одновременно, в чем легко убедиться, если взять $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$, $\| x_1 \ x_2 \| = \| -1 \ \ -1 \|$ и $\| y_1 \ y_2 \| = \| 1 \ \ 1 \|$.

В некотором смысле обратным понятию выпуклости является понятие вогнутости. Функция f называется *вогнутой*, если функция $-f$ выпуклая. Можно также говорить о вогнутости по нескольким переменным, строгой вогнутости и т. д. Свойства вогнутости легко вывести из соответствующих свойств выпуклости.

Лемма 12.1. *Пусть функция f непрерывна и строго выпукла в замкнутом интервале. Тогда f принимает минимальное значение в одной и только в одной точке интервала.*

Доказательство. Поскольку f непрерывна, она принимает минимальное значение по меньшей мере в одной точке интервала. Но если f принимает минимальное значение в двух различных точках a и b, то мы должны иметь в силу строгой выпуклости функции:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b) = \frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(a) = f(a),$$

что противоречит тому условию, что в точке a достигается минимум.

2. Единственная стратегия для одного игрока

Обратимся теперь к рассмотрению непрерывных игр, у которых платежные функции выпуклы для игрока, добивающегося минимума платежа.

Теорема 12.2. *Пусть $M(x, y)$ — платежная функция непрерывной игры, непрерывная по двум переменным и строго выпуклая по y для любого x. Тогда имеется единственная оптимальная стратегия для второго игрока, являющаяся ступенчатой функцией первого порядка, то есть имеется число $c \in [0, 1]$ такое, что единственной оптимальной стратегией для второго игрока является ступенчатая функция I_c. Цена игры определяется формулой*

$$v = \min_{0 \leqslant y \leqslant 1} \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} M(x, y),$$

а константа c есть единственное решение уравнения

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} M(x, c) = v.$$

Доказательство. Поскольку M непрерывна, то из теоремы 10.4 вытекает, что существуют оптимальные смешанные стратегии для обоих игроков. Пусть v — цена игры и F^* — любая фиксированная оптимальная стратегия для первого игрока. Положим

$$\varphi(y) = \int_0^1 M(x, y)\, dF^*(x). \tag{1}$$

Из непрерывности функции M можно легко вывести, что φ есть непрерывная функция от y. В самом деле, если M непрерывна, то для всякого ε имеется такое δ, что для $|y_1 - y_2| < \delta$ мы имеем:

$$|M(x, y_1) - M(x, y_2)| < \varepsilon.$$

Тогда

$$|\varphi(y_1)-\varphi(y_2)| = \left|\int_0^1 [M(x, y_1) - M(x, y_2)]\,dF^*(x)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^1 |M(x, y_1) - M(x, y_2)|\,dF^*(x) \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^1 \varepsilon\,dF^*(x) = \varepsilon \int_0^1 dF^*(x) = \varepsilon.$$

Далее, из того, что $M(x, y)$ строго выпукла по y для любого x, вытекает, что $\varphi(y)$ строго выпукла по y. В самом деле, по теореме 9.15

$$\varphi[\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2] = \int_0^1 M(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)\,dF^*(x) <$$
$$< \int_0^1 [\lambda_1 M(x, y_1) + \lambda_2 M(x, y_2)]\,dF^*(x) =$$
$$= \lambda_1 \int_0^1 M(x, y_1)\,dF^*(x) + \lambda_2 \int_0^1 M(x, y_2)\,dF^*(x) =$$
$$= \lambda_1\varphi(y_1) + \lambda_2\varphi(y_2).$$

Следовательно, φ удовлетворяет условиям леммы 12.1, откуда мы заключаем, что φ принимает минимальное значение в одной и только одной точке c интервала [0, 1]. Итак,

$$\varphi(c) = \min_{0 \leqslant y \leqslant 1} \varphi(y)$$

и

$$\varphi(c) < \varphi(y) \quad \text{для } y \neq c.$$

Покажем, что единственной оптимальной стратегией для второго игрока является функция распределения I_c. Поскольку мы знаем, что у этого игрока имеется по меньшей мере одна оптимальная стратегия, достаточно показать, что всякая оптимальная стратегия этого игрока тождественна с I_c.

Пусть G^* — любая оптимальная стратегия для второго игрока. Покажем, что $G^* = I_c$, то есть $G^*(y) = 0$ для $y < c$ и $G^*(c) = 1$. Для этого, очевидно, достаточно показать, что для всякого положительного числа ε мы имеем:

$$G^*(c+\varepsilon) - G^*(c-\varepsilon) = 1.$$

Но поскольку φ непрерывна и принимает свое минимальное значение только при c, имеется положительное δ, такое, что для $0 \leqslant y \leqslant c-\varepsilon$ и для $c+\varepsilon \leqslant y \leqslant 1$ мы имеем $\varphi(y) \geqslant \varphi(c) + \delta$, и такое, что для $c-\varepsilon \leqslant y \leqslant c+\varepsilon$ мы имеем $\varphi(y) \geqslant \varphi(c)$. Отсюда мы заключаем, что

$$\int_0^1 \varphi(y)\,dG^*(y) = \int_0^{c-\varepsilon} \varphi(y)\,dG^*(y) + \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} \varphi(y)\,dG^*(y) +$$
$$+ \int_{c+\varepsilon}^1 \varphi(y)\,dG^*(y) \geqslant \int_0^{c-\varepsilon} [\varphi(c)+\delta]\,dG^*(y) +$$
$$+ \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} \varphi(c)\,dG^*(y) + \int_{c+\varepsilon}^1 [\varphi(c)+\delta]\,dG^*(y) =$$
$$= \int_0^1 \varphi(c)\,dG^*(y) + \int_0^{c-\varepsilon} \delta\,dG^*(y) + \int_{c+\varepsilon}^1 \delta\,dG^*(y) =$$
$$= \varphi(c) + \delta[G^*(c-\varepsilon) - G^*(0) + G^*(1) - G^*(c+\varepsilon)] =$$
$$= \varphi(c) + \delta[1 + G^*(c-\varepsilon) - G^*(c+\varepsilon)].$$

Далее, на основании теоремы 9.22

$$v = \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\,dF^*(x)\,dG^*(y) = \int_0^1 \varphi(y)\,dG^*(y) =$$
$$= \min_{G \in D} \int_0^1 \varphi(y)\,dG(y) = \min_{0 \leqslant y \leqslant 1} \varphi(y) = \varphi(c),$$

и, следовательно,

$$\varphi(c) \geqslant \varphi(c) + \delta[1 + G^*(c-\varepsilon) - G^*(c+\varepsilon)].$$

Поскольку $\delta > 0$, мы заключаем отсюда, что

$$1 + G^*(c-\varepsilon) - G^*(c+\varepsilon) \leqslant 0,$$

и, следовательно,

$$G^*(c+\varepsilon)-G^*(c-\varepsilon)\geqslant 1.$$

Но, очевидно,

$$G^*(c+\varepsilon)-G^*(c-\varepsilon)\leqslant 1,$$

и, следовательно,

$$G^*(c+\varepsilon)-G^*(c-\varepsilon)=1,$$

что и требовалось доказать.

Справедливость последнего предложения теоремы вытекает непосредственно из теоремы 10.17.

Совершенно такими же рассуждениями доказывается следующая теорема.

Теорема 12.3. *Пусть M — платежная функция непрерывной игры, непрерывная по обоим переменным и строго вогнутая по x для любого y. Тогда у первого игрока имеется единственная оптимальная стратегия, являющаяся ступенчатой функцией первого порядка, то есть имеется число $c\in[0, 1]$ такое, что единственной оптимальной стратегией первого игрока является ступенчатая функция I_c. Цена игры v определяется формулой*

$$v=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\min_{0\leqslant y\leqslant 1} M(x, y),$$

а константа c есть единственное решение уравнения

$$\min_{0\leqslant y\leqslant 1} M(c, y)=v.$$

Пример 12.4. Пусть

$$M(x, y)=\sin\frac{\pi(x+y)}{2}.$$

Поскольку

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}=-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\sin\frac{\pi(x+y)}{2}\leqslant 0 \text{ для } 0\leqslant x\leqslant 1 \text{ и } 0\leqslant y\leqslant 1,$$

то $M(x, y)$ есть вогнутая функция от x для любого y. Следовательно, по теореме 12.3

$$v=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\min_{0\leqslant y\leqslant 1}\sin\frac{\pi(x+y)}{2}.$$

Из рассмотрения графика $\sin\frac{\pi(x+y)}{2}$ для различных фиксированных значений x мы легко получаем, что если $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$, то

$$\min_{0\leqslant y\leqslant 1} \sin\frac{\pi(x+y)}{2} = \sin\frac{\pi x}{2}, \tag{2}$$

а если $\frac{1}{2} < x \leqslant 1$, то

$$\min_{0\leqslant y\leqslant 1} \sin\frac{\pi(x+y)}{2} = \sin\frac{\pi(x+1)}{2}. \tag{3}$$

Итак,

$$v = \max\left[\max_{0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}} \min_{0\leqslant y\leqslant 1} \sin\frac{\pi(x+y)}{2}, \max_{\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1} \min_{0\leqslant y\leqslant 1} \sin\frac{\pi(x+y)}{2}\right] =$$

$$= \max\left[\max_{0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}} \sin\frac{\pi x}{2}, \max_{\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1} \sin\frac{\pi(x+1)}{2}\right] =$$

$$= \max\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Кроме того,

$$\min_{0\leqslant y\leqslant 1} \sin\frac{\pi\left(\frac{1}{2}+y\right)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно, цена игры равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$, и единственной оптимальной стратегией для первого игрока является функция распределения $I_{\frac{1}{2}}$.

3. Стратегии для другого игрока

В приведенном выше примере мы могли определить оптимальную стратегию для первого игрока, но не для второго. Две следующие теоремы позволяют нам определить оптимальные стратегии для обоих игроков.

В этих теоремах символами $M^{(1)}(x, y)$ и $M^{(2)}(x, y)$ мы обозначаем частные производные функции $M(x, y)$

соответственно по x и y. Таким образом,

$$M^{(1)}(x, y) = \lim_{z \to 0} \frac{M(x+z, y) - M(x, y)}{z} \tag{4}$$

и

$$M^{(2)}(x, y) = \lim_{z \to 0} \frac{M(x, y+z) - M(x, y)}{z}. \tag{5}$$

Поскольку мы ограничиваемся функциями, определенными на замкнутом единичном квадрате ($0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$), то производные $M^{(1)}(0, y)$, $M^{(1)}(1, y)$, $M^{(2)}(x, 0)$ и $M^{(2)}(x, 1)$, согласно этим определениям, не имели бы смысла. Поэтому под $M^{(1)}(0, y)$ мы будем подразумевать предел выражения (4), когда z принимает лишь положительные значения, а под $M^{(1)}(1, y)$ мы будем подразумевать предел этого выражения, когда z принимает лишь отрицательные значения. Аналогично определяются $M^2(x, 0)$ и $M^{(2)}(x, 1)$.

Теорема 12.5. *Пусть M — платежная функция непрерывной игры, непрерывная по двум переменным; $M^{(2)}(x, y)$ существует для любых x и y в единичном квадрате и $M(x, y)$ строго выпукла по y для любого x. Пусть I_{y_0} — единственная оптимальная стратегия для второго игрока, и v — цена игры. Если $y_0 = 0$ или $y_0 = 1$, то у первого игрока имеется оптимальная стратегия I_{x_0}, где константой x_0 может быть любое число, удовлетворяющее условиям:*

$$0 \leqslant x_0 \leqslant 1,$$

$$M(x_0, y_0) = v,$$

$$M^{(2)}(x_0, y_0) \begin{cases} \geqslant 0 & \text{для} \quad y_0 = 0, \\ \leqslant 0 & \text{для} \quad y_0 = 1. \end{cases}$$

Если $0 < y_0 < 1$, то у первого игрока имеется оптимальная стратегия следующего вида:

$$\alpha I_{x_1}(x) + (1 - \alpha) I_{x_2}(x);$$

в качестве α, x_1 и x_2 можно взять любые числа, *удовлетворяющие условиям:*

$$0 \leqslant x_1 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1,$$
$$M(x_1, y_0) = v, \quad M(x_2, y_0) = v,$$
$$M^{(2)}(x_1, y_0) \geqslant 0, \quad M^{(2)}(x_2, y_0) \leqslant 0,$$
$$\alpha M^{(2)}(x_1, y_0) + (1-\alpha) M^{(2)}(x_2, y_0) = 0.$$

Доказательство. Допустим сначала, что $y_0 = 0$. Поскольку I_0 есть оптимальная стратегия для второго игрока, мы видим по теореме 10.6, что для всех x

$$\int_0^1 M(x, y)\, dI_0(y) \leqslant v,$$

и, следовательно, для всех x

$$M(x, 0) \leqslant v; \tag{6}$$

далее, поскольку по теореме 12.2

$$v = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} M(x, 0),$$

то существует $x_0 \in [0, 1]$ такое, что

$$M(x_0, 0) = v. \tag{7}$$

Предположим теперь, что всякое число x_0, удовлетворяющее равенству (7), является таким, что

$$M^{(2)}(x_0, 0) < 0.$$

Тогда для всякого $x \in [0, 1]$ существует положительное ε такое, что

$$M(x, y) < v \quad \text{для} \quad 0 < y < \varepsilon. \tag{8}$$

Для каждого x мы определяем $\varepsilon(x)$ как верхнюю грань всех чисел ε, удовлетворяющих неравенству (7). Из непрерывности функции M следует непрерывность функции $\varepsilon(x)$ по x в замкнутом интервале $[0, 1]$; кроме того, $\varepsilon(x)$ всегда положительна и, следовательно, имеет положительный минимум. Пусть $\varepsilon_0 > 0$ — минимальное значение $\varepsilon(x)$. Если мы выберем y_1 так, что $0 < y_1 < \varepsilon_0$, то

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} M(x, y_1) < v,$$

и, следовательно, по теореме 12.2

$$v = \min_{0 \leqslant y \leqslant 1} \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} M(x, y) \leqslant \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} M(x, y_1) < v.$$

Мы пришли к противоречию. Следовательно, существует число x_0, которое удовлетворяет равенству (7), и, кроме того,

$$M^{(2)}(x_0, 0) \geqslant 0. \qquad (9)$$

Пусть теперь x_0 — любое число из интервала [0, 1], удовлетворяющее условиям (7) и (9); покажем, что I_{x_0} есть оптимальная стратегия для первого игрока. Но поскольку $M(x_0, y)$ — выпуклая функция от y, то из (7) и (9) вытекает, что v есть минимум функции $M(x_0, y)$, так что для всякого y

$$v \leqslant M(x_0, y) = \int_0^1 M(x, y)\, dI_{x_0}(x)$$

и, следовательно, по теореме 10.6, I_{x_0} есть оптимальная стратегия для первого игрока, что и требовалось доказать. Этим завершается доказательство для случая $y_0 = 0$.

Доказательство для случая $y_0 = 1$ аналогично.

Допустим теперь, что $0 < y_0 < 1$. Как и в случае $y_0 = 0$, мы видим, что для всех x

$$M(x, y_0) \leqslant v \qquad (10)$$

и для некоторого x

$$M(x, y_0) = v. \qquad (11)$$

Если бы любое x, удовлетворяющее условию (11), было таким, что

$$M^{(2)}(x, y_0) < 0, \qquad (12)$$

то мы пришли бы к противоречию, как и в случае $y_0 = 0$. Итак, имеется число x, которое удовлетворяет условию (11), и, кроме того,

$$M^{(2)}(x, y_0) \geqslant 0,$$

то есть имеется число x_1 такое, что

$$\left.\begin{aligned} &0 \leqslant x_1 \leqslant 1, \\ &M(x_1, y_0) = v, \\ &M^{(2)}(x_1, y_0) \geqslant 0. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Аналогично мы убеждаемся в том, что имеется число x_2 такое, что

$$\left.\begin{aligned} &0 \leqslant x_2 \leqslant 1, \\ &M(x_2, y_0) = v, \\ &M^{(2)}(x_2, y_0) \leqslant 0. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Рассмотрим теперь функцию

$$f(\xi) = \xi M^{(2)}(x_1, y_0) + (1 - \xi) M^{(2)}(x_2, y_0).$$

Мы замечаем, что

$$f(0) = M^{(2)}(x_2, y_0) \leqslant 0$$

и

$$f(1) = M^{(2)}(x_1, y_0) \geqslant 0.$$

Поскольку функция f непрерывна, мы заключаем, что существует α, удовлетворяющее соотношениям

$$\left.\begin{aligned} &0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \\ &f(\alpha) = \alpha M^{(2)}(x_1, y_0) + (1 - \alpha) M^{(2)}(x_2, y_0) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Для завершения доказательства теоремы нам нужно лишь показать, что если x_1, x_2 и α — любые числа, удовлетворяющие условиям (13), (14) и (15), то функция распределения

$$\alpha I_{x_1}(x) + (1 - \alpha) I_{x_2}(x)$$

есть оптимальная стратегия для первого игрока. Из того, что функция $M(x, y)$ непрерывна по y для любого x, мы заключаем, что функция

$$g(y) = \alpha M(x_1, y) + (1 - \alpha) M(x_2, y)$$

выпукла по y. Кроме того, из уравнения (15) мы видим, что производная функции $g(y)$ равна нулю при $y=y_0$. Следовательно, $g(y)$ принимает минимальное значение в точке y_0. Итак, поскольку на основании (13) и (14) мы имеем:

$$g(y_0)=\alpha M(x_1, y_0)+(1-\alpha)M(x_2, y_0)=\alpha v+(1-\alpha)v=v,$$

то мы видим, что v есть минимальное значение функции $g(y)$, то есть для всех y:

$$v\leqslant \alpha M(x_1, y)+(1-\alpha)M(x_2, y),$$

или

$$v\leqslant \int_0^1 M(x, y)\,d\,[\alpha I_{x_1}(x)+(1-\alpha)I_{x_2}(x)].$$

Теперь теорема вытекает из теоремы 10.6.

Так же можно доказать следующую теорему, аналогичную только что доказанной.

Теорема 12.6. *Пусть M — платежная функция непрерывной игры, непрерывная по двум переменным; $M^{(1)}(x, y)$ существует для любого x и любого y в единичном квадрате; $M(x, y)$ строго вогнута по x для любого y; I_{x_0} — единственная оптимальная стратегия для первого игрока, и v — цена игры. Если $x_0=0$ или $x_0=1$, то имеется оптимальная стратегия I_{y_0} для второго игрока, в качестве константы y_0 можно взять любое число, удовлетворяющее условиям:*

$$0\leqslant y_0\leqslant 1,$$

$$M(x_0, y_0)=v,$$

$$M^{(1)}(x_0, y_0)\begin{cases}\leqslant 0 & \text{для } x_0=0,\\ \geqslant 0 & \text{для } x_0=1.\end{cases}$$

Если $0<x_0<1$, то имеется оптимальная стратегия для второго игрока, имеющая следующий вид:

$$\alpha I_{y_1}(y)+(1-\alpha)I_{y_2}(y),$$

причем в качестве констант α, y_1 и y_2 можно взять любые числа, удовлетворяющие условиям

$$0 \leqslant y_1 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y_2 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1,$$

$$M(x_0, y_1) = v, \quad M(x_0, y_2) = v,$$

$$M^{(1)}(x_0, y_1) \geqslant 0, \quad M^{(1)}(x_0, y_2) \leqslant 0,$$

$$\alpha M^{(1)}(x_0, y_1) + (1-\alpha) M^{(1)}(x_0, y_2) = 0.$$

4. Замечания и примеры

Замечание 12.7. Следует заметить, что оптимальные стратегии, существование которых было установлено в двух предыдущих теоремах, не обязательно являются единственными. Так, например, пусть

$$M(x, y) = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Функция M удовлетворяет условию теоремы 12.5, так что у первого игрока существует оптимальная стратегия вида

$$\alpha I_{x_1}(x) + (1-\alpha) I_{x_2}(x);$$

но это не единственная оптимальная стратегия для первого игрока. В самом деле, поскольку $M(x, y)$ не зависит от x, то поведение первого игрока не влияет на платеж; поэтому для первого игрока *любая* стратегия является оптимальной.

Замечание 12.8. С помощью теоремы 12.6 легко найти оптимальную стратегию для второго игрока в игре, описанной в примере 12.4. Поскольку мы нашли, что для этой игры $x_0 = \frac{1}{2}$, то можно заключить, что у второго игрока имеется оптимальная стратегия следующего вида:

$$\alpha I_{y_1}(y) + (1-\alpha) I_{y_2}(y),$$

где α, y_1 и y_2 удовлетворяют условиям:

$$0 \leqslant y_1 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y_2 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1,$$

$$\sin\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+y_1\right)\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+y_2\right)\right]=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\frac{\pi}{2}\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+y_1\right)\right] \geqslant 0, \quad \frac{\pi}{2}\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+y_2\right)\right] \leqslant 0,$$

$$\alpha\frac{\pi}{2}\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+y_1\right)\right]+(1-\alpha)\frac{\pi}{2}\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+y_2\right)\right]=0.$$

Поскольку единственные значения $y \in [0,1]$, удовлетворяющие уравнению

$$\sin\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+y\right)\right]=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

суть 0 и 1 и поскольку

$$\frac{\pi}{2}\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+0\right)\right]=\frac{\pi}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}>0$$

и

$$\frac{\pi}{2}\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\right]=\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)<0,$$

то мы заключаем, что $y_1=0$ и $y_2=1$. Из уравнения

$$\alpha\frac{\pi}{2}\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+0\right)\right]+(1-\alpha)\frac{\pi}{2}\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\right]=0$$

мы заключаем далее, что $\alpha=\frac{1}{2}$. Поэтому оптимальной стратегией для второго игрока является функция распределения

$$\frac{1}{2}I_0(y)+\frac{1}{2}I_1(y).$$

Итак, оптимальный способ для второго игрока — выбирать 0 и 1 одинаково часто.

Пример 12.9. Теперь при помощи способов, изложенных в этой главе, мы найдем решение игры, имеющей платежную функцию

$$M(x, y)=16y^6-3xy+x^2.$$

Поскольку

$$\frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = 16\cdot 6\cdot 5y^4 \geqslant 0,$$

то функция M выпукла по y для любого x. Поэтому на основании теоремы 12.2

$$v = \min_{0\leqslant y\leqslant 1}\ \max_{0\leqslant x\leqslant 1}\ (16y^6 - 3xy + x^2) = \frac{16}{729}.$$

Кроме того, мы имеем:

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\left[16\left(\frac{1}{3}\right)^6 - 3\left(\frac{1}{3}\right)x + x^2\right] = \frac{16}{729},$$

откуда по теореме 12.2 мы заключаем, что единственной оптимальной стратегией для второго игрока является функция распределения

$$I_{\frac{1}{3}}(y).$$

Так как функция M имеет производные всюду, то условия теоремы 12.5 выполняются. Поскольку $y_0 = \frac{1}{3}$ и $v = \frac{16}{729}$, нам требуется найти решение уравнения

$$M\left(x, \frac{1}{3}\right) = \frac{16}{729},$$

то есть уравнения

$$16\left(\frac{1}{3}\right)^6 - 3\left(\frac{1}{3}\right)x + x^2 = \frac{16}{729}.$$

Мы сразу видим, что решение будет такое: $x = 0$ и $x = 1$. Ввиду того, что

$$M^{(2)}(x, y) = \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 96y^5 - 3x,$$

мы имеем:

$$M^{(2)}\left(0, \frac{1}{3}\right) = \frac{32}{81}$$

и

$$M^{(2)}\left(1, \frac{1}{3}\right) = -\frac{211}{81}.$$

Следовательно, применяя обозначения теоремы 12.5, мы можем взять $x_1=0$ и $x_2=1$.

Решая теперь уравнение

$$\alpha M^{(2)}\left(0, \frac{1}{3}\right)+(1-\alpha)M^{(2)}\left(1, \frac{1}{3}\right)=0,$$

мы находим, что $\alpha=\frac{211}{243}$. Следовательно, оптимальной стратегией для первого игрока является функция распределения

$$\frac{211}{243}I_0(x)+\frac{32}{243}I_1(x).$$

Замечание 12.10. Мы сформулировали теоремы о выпуклых функциях в довольно слабой и частной форме из тех лишь соображений, чтобы избежать слишком сложных доказательств. Положения, установленные в этой главе, можно усилить и обобщить в нескольких направлениях.

Во-первых, можно опустить в теоремах 12.5 и 12.6 условие существования производных. Но в этом случае нужно использовать то положение, что выпуклая или вогнутая функция всегда имеет обе односторонние производные в каждой точке интервала определения функции, за исключением, быть может, конечного числа точек. Тогда условия, наложенные в заключительных предложениях этих теорем на $M^{(1)}(x_0, y_1)$, $M^{(1)}(x_0, y_2)$, $M^{(2)}(x_1, y_0)$ и $M^{(2)}(x_2, y_0)$, заменяются соответствующими условиями для односторонних производных в указанных точках.

Во-вторых, условие строгой выпуклости или строгой вогнутости платежной функции можно ослабить, заменив условием, что она соответственно просто выпукла или вогнута. Но в этом случае оптимальная стратегия для второго игрока, указанная в теореме 12.2 (или для первого игрока в теореме 12.3), вообще уже не является единственной.

Наконец, выводы могут быть распространены на случай, когда игроки вместо того, чтобы выбирать просто числа из замкнутого единичного интервала, выбирают точки из n-мерного единичного куба. В этом случае необходимо применять более общее понятие выпуклости (выпуклости по нескольким переменным).

Библиографические замечания

Теоремы, доказанные в этой главе, являются частными случаями более общих теорем, доказательства которых можно найти в работе Боненблуста, Карлина и Шепли [11].

Упражнения

1. Приведите пример функции, строго выпуклой в интервале $(-\infty, +\infty)$, но не имеющей производной в точках $x=0$, $x=1$ и $x=2$.

2. Приведите пример функции f двух переменных такой, что $f(x, y)$ вогнута по x для любого y и вогнута по y для любого x, но не является вогнутой одновременно по совокупности x и y.

3. Покажите, что если функция f непрерывна и строго вогнута в замкнутом интервале, то имеется одна и только одна точка интервала, в которой функция принимает свое максимальное значение.

4. Покажите, что сумма двух выпуклых функций выпукла, а произведение двух выпуклых функций не обязательно выпукло.

5. Платежная функция непрерывной игры есть

$$M(x, y)=\sin(2x+y).$$

Найдите цену игры и оптимальные стратегии для обоих игроков.

6. Решите уравнение 5 главы XI способами, изложенными в настоящей главе.

7. Платежная функция непрерывной игры есть

$$M(x, y)=80y^8-5xy+x^2.$$

Найдите цену игры и оптимальные стратегии для обоих игроков.

8. Платежная функция непрерывной игры есть

$$M(x, y)=Ay^{10}-4xy+x^6,$$

где A — число, удовлетворяющее неравенствам

$$0<A<\frac{2^{19}}{5}.$$

Найдите цену игры и оптимальные стратегии для обоих игроков (конечно, некоторые ответы могут быть выражены через параметр A).

9. Докажите следующую теорему:

Пусть $M(x, y)$, $M_1(x, y)$, $M_2(x, y)$, ... непрерывны на единичном квадрате и

$$|M_n(x, y)-M(x, y)|<\frac{1}{n}$$

для любого n и для всех точек $\|x\ y\|$ из единичного квадрата. Пусть v_n для любого n — цена непрерывной игры, имеющей платежную функцию $M_n(x, y)$; $F_n(x)$ и $G_n(y)$ — оптимальные стратегии соответственно для первого и второго игрока в этой игре; кроме того,

$$\lim_{n\to\infty} v_n = v,$$

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x),$$

$$\lim_{n\to\infty} G_n(y) = G(y),$$

где F и G — функции распределения. Тогда v есть цена непрерывной игры, у которой платежная функция есть $M(x, y)$, а $F(x)$ и $G(y)$ суть оптимальные стратегии соответственно для первого и второго игрока в этой игре.

10. Покажите, что если функция $M(x, y)$ выпукла по y для любого x и если n — любое положительное целое число, то функция

$$M_n(x, y) = M(x, y) + \frac{y^2 - y}{n}$$

строго выпукла по y для любого x.

11. Покажите (используя выводы упражнений 9 и 10), как можно усилить теоремы 12.2 и 12.5, заменив слова «строго выпуклые» словом «выпуклые».

12. Покажите, что функция, выпуклая в открытом интервале, непрерывна, и приведите пример функции, выпуклой в замкнутом интервале, но имеющей разрыв.

13. Покажите, что выпуклая функция имеет обе односторонние производные (не обязательно равные) в любой точке интервала определения, за исключением, быть может, конечного числа точек.

14. Сформулируйте и докажите (используя выводы упражнения 13) обобщение теоремы 12.5, в котором не предполагается существование производной $M^{(2)}(x, y)$.

15. В некоторую игру играют следующим образом: первый игрок выбирает точку $\| x_1 \ x_2 \|$ из замкнутого единичного квадрата, а второй игрок, не зная выбора первого игрока, выбирает точку $\| y_1 \ y_2 \|$ из того же квадрата. При этом выигрыш первого игрока равен

$$M(x_1, x_2, y_1, y_2),$$

где функция $M(x_1, x_2, y_1, y_2)$ строго вогнута по $\| x_1 \ x_2 \|$ для любых $\| y_1 \ y_2 \|$ и строго выпукла по $\| y_1 \ y_2 \|$ для любых $\| x_1 \ x_2 \|$.

Покажите, что у каждого игрока имеется единственная чистая стратегия.

ГЛАВА XIII

ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ИГР К СТАТИСТИКЕ

В главе I мы указали, что когда человек стремится получить как можно больше каких-либо благ, то его положение будет различно, в зависимости от того, должен ли он бороться только против сил природы или он вынужден также принимать во внимание поведение какого-то другого разумного существа, которое, возможно, хочет уменьшить то самое благо, которое первый хочет увеличить. Ситуации первого и второго вида можно рассматривать как игры: первая ситуация представляет игру одного лица, а вторая — игру n лиц при $n>1$. Как известно, природу, по существу, нельзя представить так, будто она пытается перехитрить нас и находится с нами в прямом антагонизме, какой встречается, например, в игре двух лиц с нулевой суммой. Поэтому игру одного лица с ненулевой суммой (игра одного лица с нулевой суммой, очевидно, совершенно тривиальна) можно рассматривать как задачу на отыскание максимума в классическом смысле, когда не нужно противодействовать ходам другого разумного существа.

Но несмотря на большое различие между этими двумя ситуациями, даже в игре с ненулевой суммой против природы может случиться, что игрок захочет определить наихудшее, что может ему сделать природа, то есть вычислить, какой минимум он может себе гарантировать при совершенно неблагоприятном стечении обстоятельств.

Подобные ситуации возникают, в частности, в статистике, ибо статистик часто занимается задачами следующего типа: добиться максимальной точности в определении данной стоимости; свести к минимуму стоимость определения какой-либо величины с данной точностью;

добиться максимальной выгоды для предпринимателя путем разработки соответствующего метода проверки его продукции (это применение статистики называют *контролем качества*).

Связь теории игр со статистикой оказалась столь тесной, что в последние годы математики-статистики уделили этому вопросу много внимания. Мы тем не менее не будем формулировать общие теоремы по этому вопросу, ограничиваясь рассмотрением некоторых специфических примеров применения теории игр к статистическим задачам.

Разбираемые нами примеры могут показаться почти тривиальными, что объясняется стремлением излагать вопрос без предварительного знакомства со статистической теорией и желанием пользоваться столь малыми матрицами, чтобы их можно было решать без помощи вычислительных машин. Тем не менее в этих простых примерах участвуют те же принципы, что и в задачах, более близких к действительности.

Обычно статистик сталкивается с задачей составления некоторой оценки большого класса предметов на основе исследования выборки. (Так, например, политический деятель может попытаться предсказать исход приближающихся выборов на основании интервью с избирателями.) Статистик обычно может увеличить надежность своей оценки, увеличив размер выборки; но проведение большего числа испытаний связано с дополнительными расходами. Поэтому перед статистиком встает вопрос — какой величины выборку ему лучше всего взять. В следующем примере приведена упрощенная идеализированная модель такой задачи.

Пример 13.1. Известно, что в урне находятся два шара, каждый из которых либо черный, либо белый. Статистик S должен определить, сколько там черных шаров. Если его предположение правильно, ему должно быть уплачено α; если его ответ отличается от правильного ответа на 1 (например, он указывает 1, когда в действительности 2 черных шара, или указывает 2, когда в действительности 1 шар, и т. д.), то ему должно быть уплачено β; если его ответ отличается от правильного ответа на 2 (указывает 0, когда в действительности 2 шара, или наоборот), ему должно быть уплачено γ. Мы полагаем, что $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$; но мы не делаем никаких предположений о том, положительны эти величины или отрицательны. Стоимость исследования одного шара для статистика равна δ. В описываемом случае естественно предположить, что δ ничтожно мало, но мы не налагаем такого ограничения. Чтобы задача в этом отношении была более правдоподобной, читатель может считать, что шары не черные и белые, а имеют разные оттенки серого; если эти оттенки почти одинаковые, то могут потребоваться сложные исследования для определения, какого оттенка данный шар.

У S имеется восемь возможных способов составить предположение о количестве черных шаров (то есть у него восемь чистых стратегий):

I. Не делать испытаний и предположить, что оба шара черные.

II. Не делать испытаний и предположить, что один шар черный и один белый.

III. Не делать испытаний и предположить, что оба шара белые.

IV. Проверить один шар и предположить, что другой шар такого же цвета, что и проверенный.

V. Проверить один шар и независимо от того, какого он цвета, предположить, что другой шар черный.

VI. Проверить один шар и независимо от того, какого он цвета, предположить, что другой шар белый.

VII. Проверить один шар и предположить, что другой шар противоположного цвета.

VIII. Проверить оба шара и объявить правильное число черных шаров (которое, конечно, теперь известно).

Мы не перечислили способов, хотя и логически возможных, но нелепых, например, мы не рассматриваем возможность того, что S проверит один шар и затем, если даже проверенный шар — белый, предположит, что оба шара черные.

Далее, у природы имеются три возможности: нет ни одного черного шара, один шар черный и оба шара черные. Мы обозначаем эти стратегии номерами 0, 1 и 2.

Рассмотрим платеж статистику S при различных сочетаниях этих стратегий.

Если S применяет стратегию I, а природа применяет стратегию 0, то это значит, что S предполагает, что два шара черные, а в действительности нет ни одного черного шара. Таким образом, S ошибается на два, и ему уплачивается γ. Аналогичные простые рассуждения позволяют нам учесть все случаи, когда S применяет стратегии I, II, III или VIII, и случаи, когда природа применяет стратегию 0 или стратегию 2.

Чтобы понять, как вычисляется платеж в других случаях, допустим, например, что S применяет стратегию V, а природа — стратегию 1. Тогда, если S делает одно испытание, вероятность того, что испытываемый шар будет черным (как и вероятность того, что он будет белым), равна $^1/_2$. Если он черный, то, поскольку S применяет стратегию V, он предполагает, что оба шара черные, и, следовательно, ошибается на 1; итак, платеж в этом случае, с учетом стоимости проведения испытания, будет равен $\beta-\delta$. Если же испытываемый шар оказывается белым, то S предполагает, что один шар белый, то есть указывает правильно, и, следовательно, он получит $\alpha-\delta$. Итак, математическое ожидание выигрыша для S равно

$$\frac{1}{2}(\beta-\delta)+\frac{1}{2}(\alpha-\delta)=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-\delta.$$

Продолжая рассуждать так же, мы получаем матрицу 1.

Матрица 1

	0	1	2
I	γ	β	α
II	β	α	β
III	α	β	γ
IV	$\alpha-\delta$	$\beta-\delta$	$\alpha-\delta$
V	$\beta-\delta$	$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-\delta$	$\alpha-\delta$
VI	$\alpha-\delta$	$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-\delta$	$\beta-\delta$
VII	$\beta-\delta$	$\alpha-\delta$	$\beta-\delta$
VIII	$\alpha-2\delta$	$\alpha-2\delta$	$\alpha-2\delta$

Конечно, если бы S знал вероятность применения природой ее стратегий, то стоящая перед ним задача достижения максимума была бы проста — ему нужно было бы выбрать строку, которая для данных частот столбцов дала бы ему максимальное математическое ожидание выигрыша. Мы предполагаем, что S не знает, как будет себя вести природа, но и в этом случае он имеет возможность вычислить минимальную величину, которую он может надеяться получить при наиболее неблагоприятном возможном сочетании вероятностей, выбранных природой. Задача решается, если рассматривать матрицу 1 как платежную матрицу игры двух лиц с нулевой суммой. Если у S нет оснований ожидать, что природа поступит так, а не иначе, то он вполне может считать, что всего разумнее для него (и, конечно, всего надежнее) выбрать стратегию так, как если бы он играл не против другого игрока, а против природы.

Цена игры для S и оптимальные стратегии игры зависят от относительных значений α, β, γ и δ.

Так, если мы возьмем $\alpha=100$, $\beta=0$, $\gamma=-100$ и $\delta=1$, то мы получим матрицу 2.

Матрица 2

	0	1	2
I	—100	0	100
II	0	100	0
III	100	0	—100
IV	99	—1	99
V	—1	49	99
VI	99	49	—1
VII	—1	99	—1
VIII	98	98	98

У этой матрицы нет седловой точки. Легко убедиться, что цена игры для S равна 98, оптимальная стратегия для S — вектор $\|0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\|$ и оптимальная стратегия для природы — $\left\|\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\right\|$. Таким образом, в этом случае статистику всего лучше проверить оба шара. Это и неудивительно ввиду того, что стоимость испытания мала по сравнению с другими входящими сюда величинами. Напротив, если стоимость испытаний очень высока, то всего лучше для статистика вовсе не делать испытаний. Так, допустим, что $\alpha=100$, $\beta=0$, $\gamma=-100$ и $\delta=200$. Тогда мы получим матрицу 3.

Матрица 3

	0	1	2
I	−100	0	100
II	0	100	0
III	100	0	−100
IV	−100	−200	−100
V	−200	−150	−100
VI	−100	−150	−200
VII	−200	−100	−200
VIII	−300	−300	−300

Легко убедиться, что цена игры для S равна 0, оптимальная стратегия для S равна $\|0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\|$, а оптимальная стратегия для природы — $\left\|\frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{2}\right\|$. Итак, для статистика всего лучше всегда предполагать (не производя никаких испытаний), что один шар черный и один белый.

Наконец, если δ имеет промежуточную величину, то может оказаться, что для S всего лучше применять смешанную стратегию. Так, например, беря $\alpha=100$, $\beta=0$, $\gamma=-100$ и $\delta=50$, мы получаем матрицу 4.

Матрица 4

	0	1	2
I	−100	0	100
II	0	100	0
III	100	0	−100
IV	50	−50	50
V	−50	0	50
VI	50	0	−50
VII	−50	50	−50
VIII	0	0	0

Легко убедиться, что цена игры для S равна 25, оптимальная стратегия для S — $\left\|0\,\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}\,0\,0\,0\,0\right\|$, а оптимальная стратегия для природы — $\left\|\frac{3}{8}\ \frac{1}{4}\ \frac{3}{8}\right\|$ (поскольку минимум каждой строки меньше 25, то у S нет чистой оптимальной стратегии). Итак, оптимальный способ игры для S следующий: он бросает правильную монету; если монета показывает герб, он предполагает (не делая испытаний), что один шар белый и один черный; если монета показывает решку, он проверяет один шар и предполагает, что оба шара того же цвета, что и проверенный.

З а м е ч а н и е 13.2. Другой способ решения подобных задач (который, однако, представляется мало обоснованным) состоит в том, чтобы применить, так сказать, «довод от незнания». Это значит, что, поскольку мы совершенно не знаем вероятностей распределения шаров, одинаково возможны следующие альтернативы: 1) оба шара черные, 2) первый шар черный, а второй белый, 3) первый белый, а второй черный, 4) оба шара белые. Поскольку случай, когда один шар черный, есть сочетание случая (2) и случая (3), эти альтернативы сводятся к предположению, что природа применяет смешанную стратегию $\left\| \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4} \right\|$. Мы видим из матрицы 1, что если при этом предположении S применяет стратегию I, то математическое ожидание его выигрыша будет равно $\frac{1}{4}\gamma+\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{4}\alpha=\frac{1}{4}(\alpha+2\beta+\gamma)$; математические ожидания выигрыша при других имеющихся у него стратегиях будут:

I. $\quad \frac{1}{4}(\alpha+2\beta+\gamma)$,

II. $\quad \frac{1}{4}(2\alpha+2\beta)$,

III. $\quad \frac{1}{4}(\alpha+2\beta+\gamma)$,

IV. $\quad \frac{1}{4}(2\alpha+2\beta-4\delta)$,

V. $\quad \frac{1}{4}(2\alpha+2\beta-4\delta)$,

VI. $\quad \frac{1}{4}(2\alpha+2\beta-4\delta)$,

VII. $\quad \frac{1}{4}(2\alpha+2\beta-4\delta)$,

VIII. $\quad \frac{1}{4}(4\alpha-8\delta)$.

Как мы видим, при предположениях, что $\alpha>\beta>\gamma$ и $\delta>0$, величина, соответствующая стратегии II, является наибольшей из семи первых величин. Итак,

S должен учитывать лишь стратегии II и VIII, то есть

$$\frac{1}{4}(2\alpha+2\beta) \text{ и } \frac{1}{4}(4\alpha-8\delta).$$

Следовательно, если $2\alpha+2\beta<4\alpha-8\delta$, то есть если $\delta<\frac{1}{4}(\alpha-\beta)$, то S должен проверить оба шара; если $\delta\geqslant\frac{1}{4}(\alpha-\beta)$, ему не следует проводить никаких испытаний, но просто предположить, что один шар черный и один шар белый. Этот способ для матриц 2 и 3 приводит к такому же ответу, как и теоретико-игровой подход, а в случае матрицы 4 — к другому ответу. В последнем случае «довод от незнания» предписывает игроку S всегда применять стратегию II. В этом случае, если природа действительно применяет смешанную стратегию $\left\|\frac{1}{4}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\right\|$, S получит 50, то есть больше 25, которые он может себе гарантировать, применяя смешанную стратегию $\left\|0\ \frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{2}\ 0\ 0\ 0\ 0\right\|$; но следует заметить, что применяя исключительно стратегию II, S не может гарантировать себе даже 25, так как при этом, если природа будет применять стратегию $\|1\ 0\ 0\|$, он может надеяться получить лишь 0. Итак, оказывается, что в этом случае «довод от незнания» не дает для S такой же надежной стратегии, как стратегия, основанная на теории игр.

Замечание 13.3. Хотя мы рассмотрели пример 13.1 как обычную игру двух лиц с нулевой суммой, нужно помнить, что природа на самом деле не является сознательным разумным существом. Когда игрок S применяет свою оптимальную стратегию для этой игры, он просто устанавливает нижнюю грань математического ожидания своего выигрыша; он может сознавать, что для него разумно поступать таким образом, но это не значит, что он считает природу недоброжелательным разумным существом. Его положение несколько походит на положение человека, который хочет поместить свои капиталы так, чтобы не оказаться банкротом ни от инфляции, ни от дефляции. Это не означает, что он непременно думает, что рынок будет всегда меняться наиболее неблагоприятным для него образом; но если он не в состоянии предсказать сколько-нибудь точно движение цен, он, возможно, захочет должным образом подготовиться к любой случайности.

Таким образом, если $\mathbf{A}_1$ — множество смешанных стратегий, имеющихся у S, а $\mathbf{A}_2$ — множество смешанных стратегий, имеющихся у природы, то S может вычислить величину

$$v_1 = \max_{\xi \in \mathbf{A}_1} \min_{\eta \in \mathbf{A}_2} E(\xi, \eta),$$

где E — математическое ожидание выигрыша; и, возможно, если он осторожен, он захочет поступать так, чтобы непременно получить v_1. Его не очень интересует величина

$$v_2 = \min_{\eta \in \mathbf{A}_2} \max_{\xi \in \mathbf{A}_1} E(\xi, \eta),$$

и он не особенно стремится к тому, чтобы $v_2 = v_1$.

Это замечание находит практическое применение в том случае, когда S имеет некоторые сведения относительно возможных смешанных стратегий природы и на основе этих сведений S может ограничиться рассмотрением лишь некоторого подмножества логически возможных смешанных стратегий природы; так, он может знать, что любая применяемая природой смешанная стратегия $\| \eta_1 \; \eta_2 \; \eta_3 \|$ будет такой, что, например, $0 \leqslant \eta_1 \leqslant \frac{1}{10}$ и $\frac{1}{4} \leqslant \eta_2 \leqslant \frac{1}{3}$ или $\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = \frac{3}{4}$. В этом случае перед нами игра с ограничениями, для которой теорема о минимаксе может быть неверной (как было показано, теорема вообще неверна, если множества стратегий, имеющихся у природы, не являются выпуклыми подмножествами евклидова пространства). Все это не будет интересовать статистика, который занимается лишь вопросом существования и значения величины

$$\max_{\xi \in \mathbf{A}_1} \min_{\eta \in \mathbf{A}_2} E(\xi, \eta)$$

(где, конечно, $\mathbf{A}_2$ означает теперь множество стратегий, которыми ограничена природа на основании сведений, имеющихся у S).

Обратимся теперь к примеру, поясняющему применение теории игр к контролю качества.

Пример 13.4. Требуется изготовить некоторый очень дорогой объект, состоящий из соединения трех одинаковых частей, таких, что весь объект будет удовлетворительным только в том случае, если удовлетворительна каждая из этих частей. Для определенности мы будем подразумевать под объектом, например, колесо с тремя спицами. Для того чтобы колесо было удовлетворительным, каждая спица должна, скажем, иметь определенную прочность (дороговизну колеса можно объяснить, например, тем, что оно довольно большое и вырезается из одного куска кварца).

Потребитель этого колеса, A (правительство или, может быть, астрономическая лаборатория), сам не может изготовлять колеса; поэтому A заключает с предпринимателем M следующий договор: A уплачивает M определенную сумму за изготовление колеса согласно техническим условиям (материал, размеры и т. д.); после того как колесо изготовлено в соответствии с этими техническими условиями, M может либо выбросить его (ценность колеса как утильсырья принимается равной нулю), либо передать его A, который испытывает колесо в работе; если оно признано удовлетворительным, A платит M дополнительную сумму α; если оно неудовлетворительно, M уплачивает A штраф β (α и β, конечно, положительны).

Но поскольку A уже уплатил M за изготовление колеса и поскольку A не желает допустить возможности, что M изготовит колесо лишь ради этого первоначального платежа, A ставит дополнительное условие, что M не должен выбрасывать колесо, если определенное испытание не покажет его негодность (хотя при желании M может передать его A, не производя испытания). Это испытание можно производить на каждой из трех спиц, причем стоимость испытания каждой спицы для M равна γ. Испытание состоит в следующем: A признает колесо удовлетворительным тогда и только тогда, когда каждая спица, подвергаемая испытанию, выдержит его.

Теперь перед M встает вопрос о том, испытывать некоторые или все спицы, прежде чем принять колесо (то есть прежде чем передать его A). У него имеются четыре возможные линии поведения (четыре стратегии):

I. Принять колесо без испытания.

II. Выбрать наудачу одну из спиц и испытать ее. Если спица удовлетворительна, принять колесо. Если она неудовлетворительна, забраковать.

III. Испытать выбранную наудачу спицу. Если она негодная, забраковать колесо. Если она удовлетворительна, выбрать наудачу одну из остальных спиц и испытать ее. Если эта спица негодная, забраковать колесо. Если она удовлетворительна, принять.

IV. Испытать выбранную наудачу спицу. Если она негодная, забраковать колесо, если удовлетворительна, выбрать наудачу одну из остальных спиц и испытать ее; если эта спица негодная, забраковать колесо. Если она удовлетворительна, испытать третью спицу и принять или забраковать колесо в зависимости от качества последней спицы.

Далее, у природы имеются четыре возможности: может быть негодной ни одна, одна, две или три спицы. Мы обозначим эти стратегии природы номерами 0, 1, 2 и 3.

Исследуем, какова будет прибыль M при различных сочетаниях этих стратегий.

Если M применяет стратегию I, а природа — стратегию 0, то M не производит испытаний и нет ни одной неисправной спицы. Следовательно, A признает колесо удовлетворительным и заплатит предпринимателю α. Выигрыш предпринимателя в этом случае равен α.

Если M применяет стратегию II, а природа — стратегию 0, то M производит одно испытание и A признает колесо удовлетворительным. Тогда M получит от A сумму α, но ему нужно будет израсходовать на испытание δ. Следовательно, выигрыш предпринимателя равен $\alpha - \delta$.

Если M применяет стратегию III, а природа — стратегию 0, то выигрыш предпринимателя будет $\alpha - 2\delta$, а если M применяет стратегию IV, а природа — стратегию 0, то выигрыш предпринимателя будет $\alpha - 3\delta$.

Если M применяет стратегию I, а природа — стратегию 1, то M передает колесо потребителю A, который признает его негодным. Тогда M должен заплатить потребителю штраф β; следовательно, его выигрыш равен $-\beta$ (в этом случае, поскольку M не производит испытаний, у него нет расходов на испытание).

Очевидно, когда M применяет стратегию I, а природа — стратегию 2 или 3, выигрыш предпринимателя также равен $-\beta$.

Если природа применяет стратегию 3, то все спицы негодные. Тогда, если M производит любое испытание, он обнаружит при первом испытании, что колесо негодное и, следовательно, забракует его. Таким образом, платеж предпринимателю M равен лишь стоимости испытания одной спицы, а именно $-\gamma$. Это относится к тому случаю, когда природа применяет стратегию 3, а M применяет стратегию II, III или IV.

Если M применяет стратегию II, а природа—стратегию 1, то вероятность того, что M обнаружит негодную спицу, равна $\frac{1}{3}$, а вероятность того, что он не обнаружит ее, равна $\frac{2}{3}$. Если он обнаружит негодную спицу, он получит $-\gamma$. Если M не обнаружит ее, он должен уплатить штраф β, помимо расхода на испытание; итак, в этом случае платеж равен $-\beta-\gamma$. Следовательно, математическое ожидание выигрыша для M равно

$$\frac{1}{3}(-\gamma)+\frac{2}{3}(-\beta-\gamma)=-\frac{2}{3}\beta-\gamma.$$

Рассуждая аналогичным образом, мы видим, что если M применяет стратегию II, а природа—стратегию 2, то математическое ожидание выигрыша предпринимателя M равно

$$\frac{2}{3}(-\gamma)+\frac{1}{3}(-\beta-\gamma)=-\frac{1}{3}\beta-\gamma.$$

Если M применяет стратегию III, а природа — стратегию 1, то вероятность того, что M обнаружит негодную спицу при первом испытании, равна $\frac{1}{3}$; вероятность того, что он обнаружит ее при втором испытании, равна, следовательно, $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$; вероятность того, что негодная спица пройдет необнаруженной, равна $1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$. Если негодную спицу обнаруживают при первом испытании, выигрыш M равен $-\gamma$; если ее обнаруживают при втором испытании, то выигрыш равен -2γ; а если она остается необнаруженной, то выигрыш равен $-\beta-2\gamma$. Следовательно, математическое ожидание выигрыша предпринимателя M равно

$$\frac{1}{3}(-\gamma)+\frac{1}{3}(-2\gamma)+\frac{1}{3}(-\beta-2\gamma)=-\frac{1}{3}\beta-\frac{5}{3}\gamma.$$

Продолжая рассуждать таким же образом, мы получаем матрицу 5.

Матрица 5

	0	1	2	3
I	α	$-\beta$	$-\beta$	$-\beta$
II	$\alpha-\gamma$	$-\frac{2}{3}\beta-\gamma$	$-\frac{1}{3}\beta-\gamma$	$-\gamma$
III	$\alpha-2\gamma$	$-\frac{1}{3}\beta-\frac{5}{3}\gamma$	$-\frac{4}{3}\gamma$	$-\gamma$
IV	$\alpha-3\gamma$	-2γ	$-\frac{4}{3}\gamma$	$-\gamma$

Цена игры для M и его оптимальные стратегии в этой игре зависят от соотношения величин α, β и γ.

Так, например, если мы берем $\alpha=100$, $\beta=300$ и $\gamma=3$ (так что штраф за поставку негодного колеса очень велик по сравнению со стоимостью испытания), то мы получим матрицу 6.

Элемент матрицы, отмеченный звездочкой, представляет седловую точку. Итак, самое худшее, что может оказаться для предпринимателя — это одна негодная спица колеса и лучше всего для M применять стратегию IV

Матрица 6

	0	1	2	3
I	100	—300	—300	—300
II	97	—203	—103	—3
III	94	—105	—4	—3
IV	91	—6*	—4	—3

(то есть испытать все спицы колеса). Применяя стратегию IV, M может быть уверен, что его убыток будет не больше 6 (поэтому при составлении договора M может с полным основанием настаивать на том, чтобы предполагаемый платеж потребителя A не меньше чем на 6 единиц превосходил стоимость изготовления).

Если же $\alpha=100$, $\beta=300$ и $\gamma=303$ (так что производить испытание дорого), то мы получим матрицу 7.

Матрица 7

	0	1	2	3
I	100	—300*	—300*	—300*
II	—203	—503	—403	—303
III	—506	—605	—404	—303
IV	—809	—606	—404	—303

Здесь три элемента, отмеченные звездочками, суть седловые точки. Таким образом, худшее, что может сделать природа предпринимателю — это сделать негодными одну или большее число спиц (безразлично, сколько именно). Для M всего лучше применять стратегию I (то есть совсем не производить испытаний). Итак, при увеличенной стоимости испытаний он уже может гарантировать лишь то, что его убыток будет не больше 300.

При соответствующем выборе α, β и γ может даже оказаться, что матрица не имеет седловой точки. Так, если мы возьмем $\alpha=100$, $\beta=900$ и $\gamma=300$, то получим матрицу 8, которая не имеет седловой точки.

Матрица 8

	0	1	2	3
I	100	−900	−900	−900
II	−200	−900	−600	−300
III	−500	−800	−400	−300
IV	−800	−600	−400	−300

Легко убедиться, что оптимальная стратегия для природы будет теперь $\left\| \frac{1}{4} \ \frac{3}{4} \ 0 \ 0 \right\|$, оптимальная стратегия для M — $\left\| \frac{1}{6} \ 0 \ 0 \ \frac{5}{6} \right\|$ и цена игры равна — 650. Итак, самая неприятная для M стратегия природы следующая: вероятность того, что колесо хорошее, равна $\frac{1}{4}$, а вероятность того, что у него неисправна одна спица, равна $\frac{3}{4}$. Для M самое лучшее — бросить игральную кость и затем поступить следующим образом: если кость показывает 6, пропустить колесо без испытания; в остальных случаях испытывать все три спицы. Поскольку цена игры равна — 650, M вправе требовать первоначального платежа по меньшей мере в 650 единиц, помимо стоимости изготовления.

Библиографические замечания

О применении теории игр читатель может прочесть в следующих работах: Вальд [114], [115], [116], [117], Эрроу, Блэкуэлл и Гиршик [3] и Дворецкий, Вальд и Вольфович [36].

Упражнения

1. Найдите цену игры и оптимальную стратегию для S, если в матрице примера 13.1 $\alpha=100$, $\beta=-100$, $\gamma=-200$ и $\delta=110$.

2. Покажите с помощью матрицы 1 примера 13.1, что любая оптимальная стратегия для S в примере 13.1 должна всегда приписывать частоту 0 стратегии VII. Каков интуитивный смысл этого факта?

	0	1	2
0	α	β	γ
1	β	α	β
2	γ	β	α

3. Покажите, что если $\beta \geqslant \frac{\alpha+\gamma}{2}$ и $\beta \geqslant \alpha-\delta$, то в матрице 1 примера 13.1 имеется оптимальная стратегия для природы, приписывающая стратегии 1 частоту 0.

4. Покажите, что если $0<\delta$ и $\gamma<\beta<\alpha$, то матрица 1 не имеет седловой точки.

5. В примере 13.1 мы предположили, что платежи статистику S за правильные или неправильные предположения определяются верхней матрицей, где 0, 1 и 2 в левом столбце указывают число черных шаров, находящихся в урне по предположению S, а числа в верхней строке указывают число черных шаров, действительно находящихся в урне; так, если S предполагает, что один шар черный, а на самом деле два черных, то он получит β; однако может случиться, что платежи (или штрафы) различны, в зависимости от того, является ли предполагаемое число слишком большим или слишком малым. Так, допустим, что платежи определяются нижней матрицей.

	0	1	2
0	α	β	γ
1	β'	α	β
2	γ'	β'	α

Найдите в этом случае платежную матрицу (соответствующую матрице 1). Найдите цену игры и оптимальную стратегию для S, когда $\alpha=100$, $\beta=1$, $\beta'=0$, $\gamma=-100$, $\gamma'=-101$ и $\delta=50$.

6. Во многих случаях оказывается, что стоимость двукратного испытания возрастает по сравнению со стоимостью однократного испытания меньше чем в два раза. Как изменится матрица 1, если испытать один шар стоит δ, а испытать два шара стоит $\delta+\delta'$ (где $0<\delta'<\delta$)?

7. Сформулируйте задачу, аналогичную примеру 13.1, для случая, когда урна содержит три шара, и напишите матрицу, соответствующую матрице 1 (она будет иметь 19 строк и 4 столбца). Найдите оптимальные стратегии для S при некоторых типичных значениях параметров.

8. Сформулируйте задачу, аналогичную примеру 13.1, для случая, когда урна содержит два шара, каждый из которых может быть черным, белым или красным, и напишите матрицу 1 (она будет иметь 34 строки и 6 столбцов). Найдите оптимальные стратегии для S при некоторых типичных значениях параметров.

9. Найдите оптимальную стратегию для M в примере 13.4, если $\alpha=100$, $\beta=210$ и $\gamma=102$.

10. Покажите, что при $\beta>0$ и $\gamma>0$ у природы имеется оптимальная стратегия, приписывающая столбцам 2 и 3 частоту 0.

11. При каких значениях параметров матрица 5 будет иметь седловую точку?

12. Предприниматель M должен произвести некоторое изделие для потребителя A. Потребитель согласен заплатить предпринимателю M некоторую сумму за изделие, произведенное соответственно некоторым общим техническим условиям. После того как изделие передано A, если A признает его удовлетворительным, он должен уплатить M дополнительную сумму α; если оно неудовлетворительно, M должен уплатить A штраф β. M может подвергнуть изделие двум независимым испытаниям таким, что если изделие проходит оба испытания, A признает его удовлетворительным. Стоимость одного испытания для M составляет γ, а стоимость другого испытания составляет γ'. Мы полагаем, что $0<\alpha$, $0<\beta$ и $0<\gamma<\gamma'$. Перечислите возможные стратегии для M и напишите матрицу, аналогичную матрице 5 примера **13.4**. Найдите оптимальные стратегии для M при некоторых типичных значениях параметров.

13. Предположим, что в ситуации, соответствующей матрице 2, статистик знает из прошлого опыта, что вероятность того, что нет ни одного черного шара, не больше $^1/_{20}$. Найдите цену игры и оптимальную стратегию для S.

ГЛАВА XIV

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

В этой главе мы разберем особые типы задач на отыскание минимума или максимума, а именно так называемые задачи *линейного программирования*, которые часто встречаются в экономике и тесно связаны с теорией игр. Мы начнем с примера. Пусть некий человек Смит обнаружил, что для того, чтобы быть здоровым, ему необходимо принимать по меньшей мере b_1 единиц составного химического вещества B_1 (витамина или некоторой соли) и по меньшей мере b_2 единиц составного химического вещества B_2. Допустим, далее, что он не может покупать B_1 или B_2 в чистом виде, но может покупать лекарство C_1 по p_1 центов за унцию, причем каждая унция содержит a_{11} единиц вещества B_1 и a_{12} единиц вещества B_2, и может также покупать лекарство C_2 по p_2 центов за унцию, причем каждая унция содержит a_{21} единиц вещества B_1 и a_{22} единиц вещества B_2. Смиту надо решить, какие относительные количества лекарств C_1 и C_2 ему нужно покупать ежедневно, чтобы получить требуемое количество веществ B_1 и B_2 по минимальной стоимости. Если Смит покупает x_1 унций лекарства C_1 и x_2 унций лекарства C_2, то это будет ему стоить

$$p_1x_1 + p_2x_2,$$

и он получит количества веществ B_1 и B_2 соответственно

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2$$

и

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2.$$

Следовательно, он хочет выбрать такие неотрицательные x_1 и x_2, чтобы они удовлетворяли неравенствам

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \geqslant b_1,$$
$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \geqslant b_2$$

и чтобы одновременно величина

$$p_1x_1 + p_2x_2$$

была возможно меньше.

При данных числовых значениях параметров эту задачу можно решить простыми методами аналитической геометрии. Так, например, допустим, что

$$a_{11} = a_{22} = 1, \ a_{12} = a_{21} = 5, \ b_1 = b_2 = 15,$$
$$p_1 = 1, \quad p_2 = 3.$$

Тогда нам нужно выбрать из пар чисел $\| x_1 \ x_2 \|$, удовлетворяющих условиям:

$$x_1 \geqslant 0,$$
$$x_2 \geqslant 0,$$
$$x_1 + 5x_2 \geqslant 15,$$
$$5x_1 + x_2 \geqslant 15,$$

пару $\| x_1 \ x_2 \|$, для которой линейная форма

$$x_1 + 3x_2$$

имеет минимум. Мы проводим прямые

$$x_1 + 5x_2 = 15$$

и

$$5x_1 + x_2 = 15,$$

как показано на рис. 50, и заключаем, что пары $\| x_1 \ x_2 \|$, удовлетворяющие данным неравенствам, суть координаты точек заштрихованной области рисунка. Мы проводим также семейство параллельных прямых

$$x_1 + 3x_2 = p$$

для разных значений p, как показано на рисунке. Из рисунка 50 следует, что наименьшее значение p мы получим, выбрав $\|x_1\ \ x_2\|$ так, чтобы прямая

$$x_1+3x_2=p$$

проходила через A — точку пересечения прямых

$$x_1+5x_2=15,$$
$$5x_1+x_2=15.$$

Решая совместно эти два уравнения, мы находим:

$$x_1=x_2=\frac{5}{2}.$$

Итак, самый дешевый курс лечения получается в том случае, если брать по $^5/_2$ унции лекарств C_1 и C_2; при

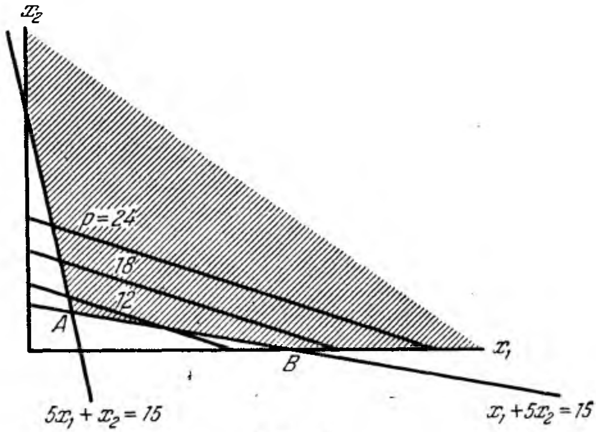

Рис. 50.

этом необходимое количество веществ B_1 и B_2 будет получено за

$$\frac{5}{2}+3\cdot\frac{5}{2}=10 \text{ центов.}$$

Нужно заметить, что при некоторых значениях p_1 и p_2 решение этой задачи не обеспечит Смиту получение точно b_1 и b_2 единиц веществ B_1 и B_2. Так, предположим, что значения a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1 и b_2 такие, как указано выше, но $p_1=1$ и $p_2=20$. В этом случае оказывается, что самая дешевая комбинация лекарств получается, если взять в качестве пар $\| x_1 \ x_2 \|$ координаты точки B на рис. 50, то есть если взять $x_1 = 15$ и $x_2 = 0$. Тогда Смит получит самое дешевое требуемое лечение, покупая лишь C_1, но совсем не покупая C_2; при этом он за

$$15 + 20 \cdot 0 = 15 \text{ центов}$$

получает единиц вещества B_1

$$15 + 5 \cdot 0 = 15$$

и единиц вещества B_2

$$5 \cdot 15 + 0 = 75 > 15.$$

Заметим, что обычные способы отыскания максимумов и минимумов с помощью дифференциального исчисления мало помогают при решении задач, подобных описанной выше. Это объясняется тем, что минимальные или максимальные значения функций достигаются в точках границы заштрихованной области, а не в тех точках, где производные равны нулю.

Наконец, следует заметить, что примененный нами геометрический способ решения задачи был бы чрезвычайно громоздким при решении задач с большим числом переменных. Так, например, если бы нужно было сделать выбор из шести лекарств, а не из двух, то при этом способе нужно было бы рассматривать области шестимерного пространства. Поскольку задачи такого рода очень важны (они возникают, например, при составлении графика движения товарных поездов, перевозящих данное количество товаров при минимальных затратах или в минимальное время), необходимо иметь общие методы их решения.

Так возник особый раздел математики, который называется *линейным программированием*. Под задачей линейного программирования понимается задача отыскания минимального или максимального значения линейной функции, когда переменные подчиняются линейным неравенствам. Общую задачу линейного программирования можно сформулировать следующим образом: выбрать среди n-мерных векторов $\| y_1 \ldots y_n \|$, удовлетворяющих неравенствам

$$a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n \geqslant b_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}y_1 + \ldots + a_{mn}y_n \geqslant b_m,$$

n-мерный вектор $\| y_1 \ldots y_n \|$, для которого достигается минимум или максимум линейной функции

$$p_1y_1 + \ldots + p_ny_n.$$

Мы не дадим какой-либо общей теории линейного программирования, так как это находится вне рамок настоящей книги, а ограничимся указанием некоторых связей между этим вопросом и теорией игр. Мы увидим, что задачу решения произвольной прямоугольной игры можно рассматривать как особую задачу линейного программирования, и обратно, многие задачи линейного программирования можно привести к задачам теории игр.

Но прежде чем приступить к рассмотрению связи между линейным программированием и теорией игр, сделаем несколько очевидных замечаний о существовании решений задач линейного программирования.

Прежде всего очевидно, что задача линейного программирования не обязательно должна иметь решение. Может оказаться, например, что данные неравенства несовместимы. Так, не имеет решения задача отыскания минимума функции

$$y_1 + 2y_2$$

при соблюдении неравенств

$$y_1 + y_2 \geqslant 3,$$
$$-y_1 - y_2 \geqslant 4.$$

Но даже в случае совместности неравенств задача может не иметь решения вследствие неограниченности множества точек, координаты которых удовлетворяют данным неравенствам. Так, не имеет решения задача отыскания минимума функции

$$1 - y_1 - y_2$$

при соблюдении неравенств

$$y_1 \geqslant 1,$$
$$y_2 \geqslant 2.$$

С другой стороны, задача линейного программирования может иметь больше одного решения. Так, любая пара $\| y_1 y_2 \|$ является решением задачи отыскания минимума функции

$$0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2,$$

при соблюдении неравенств

$$0 \cdot y_1 \geqslant 0,$$
$$0 \cdot y_2 \geqslant 0.$$

Легко показать, что любая выпуклая линейная комбинация решений задачи линейного программирования также есть решение; поэтому, если задача линейного программирования имеет больше одного решения, то она имеет бесконечное число решений.

Наконец, следует указать, что многие задачи, с первого взгляда не являющиеся задачами линейного программирования, можно легко преобразовать в задачи этого типа. Так, задача отыскания минимума функции

$$p_1 y_1 + p_2 y_2 + p_3 y_3$$

при соблюдении равенств

$$a_{11} y_1 + a_{12} y_2 = b_1,$$
$$a_{21} y_1 + a_{22} y_2 = b_2,$$

очевидно, равнозначна задаче отыскания минимума функции

$$p_1 y_1 + p_2 y_2 + p_3 y_3$$

при соблюдении неравенств

$$a_{11} y_1 + a_{12} y_2 \geqslant b_1,$$
$$-a_{11} y_1 - a_{12} y_2 \geqslant -b_1,$$
$$a_{21} y_1 + a_{22} y_2 \geqslant b_2,$$
$$-a_{21} y_1 - a_{22} y_2 \geqslant -b_2;$$

эта задача уже является задачей линейного программирования.

Мы покажем теперь, что решение произвольной прямоугольной игры можно свести к решению задачи линейного программирования. Разберем эту задачу для игры с матрицей 3×2 (это ограничение мы налагаем лишь для упрощения обозначений; в случае игры $m \times n$ исследование аналогично).

Пусть матрица игры такая:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{Vmatrix},$$

и v — цена игры.

Цена v есть наименьшее число z такое, что для некоторого элемента $\| y_1\, y_2 \|$ множества S_2

$$\left.\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \leqslant z, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \leqslant z, \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 \leqslant z, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

а по теореме 2.10 стратегия $\| y_1\, y_2 \|$ оптимальна для P_1 тогда и только тогда, когда y_1 и y_2 удовлетворяют неравенствам (1), с заменой z на v. Но, очевидно, три числа y_1, y_2 и z удовлетворяют неравенствам (1) тогда и только тогда, когда имеются такие неотрицательные числа z_1, z_2 и z_3, что

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + z_1 = z,$$

$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + z_2 = z,$$

$$a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + z_3 = z,$$

то есть такие, что

$$z = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + z_1,$$

$$(a_{21} - a_{11})\, y_1 + (a_{22} - a_{12})\, y_2 + z_2 - z_1 = 0,$$

$$(a_{31} - a_{11})\, y_1 + (a_{32} - a_{12})\, y_2 + z_3 - z_1 = 0.$$

Итак, рассматривая систему

$$\left.\begin{aligned} z &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + z_1, \\ (a_{21}-a_{11})\,y_1 + (a_{22}-a_{12})\,y_2 + z_2 - z_1 &= 0, \\ (a_{31}-a_{11})\,y_1 + (a_{32}-a_{12})y_2 + z_3 - z_1 &= 0, \\ y_1 + y_2 = 1, \quad y_1 \geqslant 0, &\quad y_2 \geqslant 0, \\ z_1 \geqslant 0, \qquad z_2 \geqslant 0, &\quad z_3 \geqslant 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

мы видим, что v есть наименьшее значение z, которое определяется некоторыми числами y_1, y_2, z_1, z_2 и z_3, удовлетворяющими системе (2). Далее, стратегия $\| y_1\, y_2 \|$ оптимальна для P_2 тогда и только тогда, когда y_1, y_2, z_1, z_2 и z_3 (для некоторых z_1, z_2 и z_3) удовлетворяют системе (2) при замене z на v. Итак, задача отыскания цены игры и оптимальных стратегий для игрока P_2 сводится к решению системы (2) как задачи линейного программирования. Подобным же образом мы можем решить задачу отыскания оптимальных стратегий для игрока P_1; в этом случае задача линейного программирования представляет задачу отыскания максимума некоторой величины.

Таким образом, мы нашли, что задача решения произвольной прямоугольной игры может быть приведена к линейному программированию особой формы:

$$\left.\begin{aligned} z = p_1u_1 + \ldots &+ p_nu_n, \\ a_{11}u_1 + \ldots + a_{1n}u_n &\geqslant b_1, \\ \ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots \\ a_{m1}u_1 + \ldots + a_{mn}u_n &\geqslant b_m, \\ u_1 &\geqslant 0, \\ \ldots & \\ u_n &\geqslant 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

(В только что рассмотренной игре мы имели $n=5$ и $u_1 = y_1$, $u_2 = y_2$, $u_3 = z_1$, $u_4 = z_2$, $u_5 = z_3$. *Особый* характер этой задачи линейного программирования появляется вследствие включения n последних неравенств $u_1 \geqslant 0, \ldots$ $\ldots, u_n \geqslant 0$.) Обратно, всякая задача линейного программирования этого специального вида равнозначна задаче прямоугольной игры. Мы не будем проводить доказательство справедливости этого утверждения, а ограничимся написанием матрицы соответствующей игры. Для задачи линейного программирования, заданной системой (3), матрица игры, при условии, что мы хотим свести к минимуму величину z, будет такова:

$$B=\left\|\begin{matrix} 0 & \ldots & 0 & a_{11} & \ldots & a_{m1} & -p_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & a_{1n} & \ldots & a_{mn} & -p_n \\ -a_{11} & \ldots & -a_{1n} & 0 & \ldots & 0 & b_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{m1} & \ldots & -a_{mn} & 0 & \ldots & 0 & b_m \\ p_1 & \ldots & p_n & -b_1 & \ldots & -b_m & 0 \end{matrix}\right\|.$$

Можно теперь показать, что справедливо следующее предложение: задача линейного программирования, заданная системой (3), имеет решение тогда и только тогда, когда в игре с матрицей B есть оптимальная стратегия $\|x_1 \ldots x_{m+n+1}\|$ такая, что $x_{m+n+1} \neq 0$; далее, если $\|x_1 \ldots x_{m+n+1}\|$ — оптимальная стратегия игры такая, что $x_{m+n+1} \neq 0$, и если мы положим

$$u_1 = \frac{x_1}{x_{m+n+1}},$$
$$\cdots\cdots$$
$$u_n = \frac{x_n}{x_{m+n+1}}$$

и

$$z = p_1u_1 + \ldots + p_nu_n,$$

то $u_1, \ldots, u_n$ и z представляют решение задачи линейного программирования.

Библиографические замечания

Доказательство равнозначности задачи решения игры с задачей линейного программирования смотрите в работах Данцига [24] или Гейля, Куна и Таккера [41]. Другие выводы, связанные с теорией линейного программирования, смотрите в работах Данцига [23], [25] и [26] и Данцига и Вуда [27] *).

*) Принципиальные основы линейного программирования изложены в работах Л. В. Канторовича [197]—[200] и Г. Ш. Рубинштейна [204], [205]. (*Прим. ред.*)

Упражнения

1. Найдите максимальное значение линейной функции

$$x+y$$

для x и y, удовлетворяющих неравенствам

$$\begin{aligned} y-x &\leqslant 10, \\ 2y+x &\leqslant 36, \\ y+2x &\leqslant 45. \end{aligned}$$

2. Найдите максимальное значение линейной функции

$$2y-x$$

для x и y, удовлетворяющих неравенствам упражнения 1.

3. Найдите максимальное значение линейной функции

$$y+2x$$

для x и y, удовлетворяющих неравенствам упражнения 1. Найдите все пары $\| x \; y \|$, дающие этот максимум.

4. Пусть p, q, a, b и c — такие числа, что

$$\begin{vmatrix} p & q \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0.$$

Покажите, что следующая задача линейного программирования не имеет решения: найти максимальное значение функции

$$px+qy$$

для x и y, удовлетворяющих неравенству

$$ax+by \geqslant c.$$

5. Пусть числа p, q, b_1, b_2, a_{11}, a_{12}, a_{21} и a_{22} такие, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0.$$

Покажите, что при этом следующие задачи линейного программирования равнозначны:

Задача *А*. Найти максимум функции

$$px+qy,$$

где x и y подчинены неравенствам

$$\begin{aligned} a_{11}x+a_{12}y &\geqslant b_1, \\ a_{21}x+a_{22}y &\geqslant b_2. \end{aligned}$$

Задача *Б*. Найти максимум функции

$$(a_{22}p-a_{21}q)\,u_1+(a_{11}q-a_{12}\,p)\,u_2,$$

где u_1 и u_2 подчинены неравенствам

$$u_1 \geqslant b_1, \quad u_2 \geqslant b_2.$$

Задача B. Найти максимум функции

$$(a_{22}p - a_{21}q)\, w_1 + (a_{11}q - a_{12}p)\, w_2 + (a_{22}p - a_{21}q)\, b_1 + (a_{11}q - a_{12}p)\, b_2,$$

где w_1 и w_2 подчинены неравенствам

$$w_1 \geqslant 0, \quad w_2 \geqslant 0.$$

6. Сформулируйте и решите упражнение, аналогичное упражнению 5, при условии, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} < 0.$$

7. Разберите задачу A упражнения 5 при допущении, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

8. Пусть $u = \| u_1 \ \ldots \ u_n \|$ и $u' = \| u_1' \ \ldots \ u_n' \|$ — два вектора, которые удовлетворяют неравенствам (3) и дают z максимальное значение. Покажите, что любая линейная комбинация u и u' также удовлетворяет этим неравенствам и дает z максимальное значение.

9. Пусть $\| x_1 \ \ldots \ x_{m+n+1} \|$ — оптимальная стратегия в игре, имеющей матрицу

$$B = \left\| \begin{array}{cccccccc} 0 & \ldots & 0 & a_{11} & \ldots & a_{m1} & -p_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & a_{1n} & \ldots & a_{mn} & -p_n \\ -a_{11} & \ldots & -a_{1n} & 0 & \ldots & 0 & b_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{m1} & \ldots & -a_{mn} & 0 & \ldots & 0 & b_m \\ p_1 & \ldots & p_n & -b_1 & \ldots & -b_m & 0 \end{array} \right\|,$$

и пусть $x_{m+n+1} \neq 0$. Положим

$$u_1 = \frac{x_1}{x_{m+n+1}},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$u_{m+n} = \frac{x_{m+n}}{x_{m+n+1}}.$$

Покажите, что $\| u_1 \ \ldots \ u_n \|$ есть решение следующей задачи линейного программирования: найти числа $u_1, \ldots, u_n$, дающие минимальное значение функции

$$p_1 u_1 + \quad + p_n u_n,$$

при соблюдении неравенств

$$
\begin{aligned}
a_{11}u_1 + \ldots + a_{1n}u_n &\geqslant b_1,\\
\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\\
a_{m1}u_1 + \ldots + a_{mn}u_n &\geqslant b_n,\\
u_1 &\geqslant 0,\\
\ldots&\\
u_n &\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Указание: обратите внимание на то, что матрица B кососимметрическая, и, следовательно, цена игры равна нулю.

ГЛАВА XV

ИГРЫ n ЛИЦ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

1. Характеристические функции

До сих пор мы ограничивались рассмотрением игр двух лиц, и в этой области сумели дать интуитивно приемлемые определения цены игры (для каждого игрока) и оптимальных стратегий. Теперь мы обратимся к конечным играм с числом игроков больше двух.

К сожалению, для этого, более широкого класса игр нет теории, которая была бы интуитивно столь же приемлема, как теория игр двух лиц. Хотя бо́льшая часть книги фон Неймана и Моргенштерна [92] (примерно 400 страниц из 600) посвящена играм с числом игроков больше двух, математики в основном, по-видимому, не удовлетворены теорией, изложенной в этой книге. За последние несколько лет по этому разделу теории игр было проведено сравнительно мало исследований.

Несмотря на то, что теория игр n лиц при $n>2$ находится в не совсем удовлетворительном состоянии, учащемуся необходимо ознакомиться с этой теорией в ее современном виде, ибо, бесспорно, в ней имеются некоторые разумные элементы, хотя и требующие дальнейшего усовершенствования. Посему этот параграф будет посвящен изложению элементов теории игр n лиц в том виде, как ее разработали фон Нейман и Моргенштерн. Мы будем, конечно, по мере возможности приводить интуитивные обоснования вводимых определений, но основные определения будут даны в том виде, как они имеются у фон Неймана и Моргенштерна, если даже вводимые понятия покажутся странными и не относящимися к делу.

Прежде всего мы заметим, что когда конечная игра n лиц включает частичную информацию, наличие больше чем одного хода у какого-нибудь игрока, случайные ходы и тому подобное, то все же возможно, введя понятие стратегии, описать эквивалентную «прямоугольную» игру, то есть игру, в которой каждый игрок делает один и только один выбор из конечного множества; причем не знает выборов других игроков. Это было пояснено в примере 5.10.

Таким образом, мы можем ограничиться рассмотрением *прямоугольных игр n лиц* с нулевой суммой. Такая игра имеет n ходов; на i-м ходу ($i=1, 2, \ldots, n$) игрок P_i, не зная исхода ни одного из предыдущих ходов, выбирает число x_i из конечного множества C_i. После того как сделаны n ходов, игрок P_i ($i=1, \ldots, n$) получает сумму

$$M_i(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Поскольку игра имеет нулевую сумму, функции $M_1, M_2, \ldots, M_n$ удовлетворяют (тождественно по $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$) равенству

$$\sum_{i=1}^{n} M_i(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Сделаем теперь несколько необходимых замечаний о значениях, принимаемых платежными функциями. Очевидно, для игроков эти значения должны быть хорошими или плохими, причем, например, они должны считать $+2$ лучше, чем $+1$, 0 или -1. Но чтобы дать надлежащий разбор игр с числом игроков больше двух, представляется необходимым принять дополнительное допущение о том, что значения платежных функций являются *объективными* и *переносимыми*. Так, $+2$ нужно понимать как нечто вроде «получения двух долларов» или «получения двух фунтов спагетти»*), а не что-нибудь типа «получения двух единиц вкусового удовольствия», ибо спагетти суть нечто внешнее по отношению к нам, и его можно передавать от одного человека к другому, а вкусовое удовольствие существует только для каждого индивидуума, и его нельзя переносить от одного к другому (в самом деле, далеко не очевидно, что можно при-

*) Тонкие макароны.

писать какой-нибудь практический смысл такому утверждению, как «Тони получает столько же вкусового удовольствия от тарелки спагетти, как Чанг от чашки риса»).

Поскольку, таким образом, платеж считается объективным и переносимым, ничто не препятствует игрокам производить между собой такие платежи («побочные»), как возмещение за какие-нибудь виды сотрудничества. Так, например, может случиться, что игрок P_1 выиграет гораздо больше, если он убедит игрока P_2 выбрать некоторое число (например, $M_1(2, 2, z)$ может быть больше, чем $M_1(x, y, z)$ при $y \neq 2$), если даже этот выбор не даст P_2 непосредственной выгоды (например, может быть, что $M_2(x, y, z)$ не зависит от x, y и z и всегда имеет постоянное значение v). В таком случае, очевидно, игроку P_1 следует уплатить игроку P_2 дополнительную сумму, чтобы убедить его сделать выбор, выгодный для P_1. Теория игр n лиц в основном рассматривает вопросы о том, какие сочетания («коалиции») игроков будут образованы и какие вознаграждения будут уплачивать игроки друг другу в виде приманок для вступления в коалиции.

Для обозначения игроков мы до сих пор применяли символы $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Однако впредь будет несколько удобнее обозначать их просто цифрами $1, 2, \ldots, n$. Мы будем обозначать множество игроков через $\mathbf{N}$, так что

$$\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Допустим теперь, что игроки множества $\mathbf{N}$ группируются в две коалиции: $\mathbf{T}$ и $\mathbf{N} - \mathbf{T} = -\mathbf{T}$, так что члены коалиции $\mathbf{T}$ сотрудничают между собой в выборе стратегий, и тоже сотрудничают между собой члены коалиции $-\mathbf{T}$. Тогда мы можем рассматривать $\mathbf{T}$ и $-\mathbf{T}$ как двух игроков в игре двух лиц. Итак, предположим, что в первоначальной игре игрок i $(i = 1, \ldots, n)$ выбирает число из конечного множества $\mathbf{C}_i$ и пусть $\mathbf{T} = \{i_1, \ldots, i_r\}$ и $-\mathbf{T} = \{j_1, \ldots, j_s\}$. Тогда в образованной нами искусственной игре двух лиц с игроками $\mathbf{T}$ и $-\mathbf{T}$ коллективный игрок $\mathbf{T}$ выбирает элемент из декартова произведения $\mathbf{C}$ множеств $\mathbf{C}_{i_1}, \ldots, \mathbf{C}_{i_r}$, и аналогично коллективный игрок $-\mathbf{T}$ выбирает элемент из декартова произведения $\mathbf{C}'$ множеств $\mathbf{C}_{j_1}, \ldots, \mathbf{C}_{j_s}$.

Пусть $\mathbf{C} = \{A_1, \ldots, A_u\}$ и $\mathbf{C}' = \{B_1, \ldots, B_v\}$. Тогда, очевидно, имеются функции $M_1, M_2, \ldots, M_n$ такие, что

$$M_i(A_j, B_k)$$

есть платеж игроку i, когда $\mathbf{T}$ применяет стратегию A_j и $-\mathbf{T}$ применяет стратегию B_k; действительно, если

$$A_j = \| x_{j_1} \ \ldots \ x_{j_r} \| \text{ и } B_k = \| x_{k_1} \ \ldots \ x_{k_s} \|,$$

то

$$M_i(A_j, B_k) = M_i(x_1, \ldots, x_n),$$

где M_i есть i-я платежная функция первоначальной игры. Если $\mathbf{T}$ применяет стратегию A_j, а $-\mathbf{T}$ применяет стратегию B_k, то общий платеж игроку $\mathbf{T}$ будет

$$M_T(A_j, B_k) = \sum_{i \in \mathbf{T}} M_i(A_j, B_k),$$

а общий платеж игроку $-\mathbf{T}$ будет

$$M_{-T}(A_j, B_k) = \sum_{i \in -\mathbf{T}} M_i(A_j, B_k).$$

Поскольку первоначальная игра имела нулевую сумму, то

$$M_{-\mathrm{T}}(A_j, B_k) = -M_{\mathrm{T}}(A_j, B_k).$$

Поскольку множество $\mathbf{C}$ содержит u элементов, смешанная стратегия игрока $\mathbf{T}$ есть элемент множества $\mathbf{S}_u$. Аналогично, смешанная стратегия игрока $-T$ есть элемент множества S_v.

Но если T применяет смешанную стратегию $\| \alpha_1 \ \ldots \ \alpha_u \|$ и $-\mathbf{T}$ применяет смешанную стратегию $\| \beta_1 \ \ldots \ \beta_v \|$, то общее математическое ожидание выигрыша для $\mathbf{T}$ равно

$$\sum_{k=1}^{v} \sum_{j=1}^{u} M_T(A_j, B_k)\, \alpha_j \beta_k,$$

а общее математическое ожидание выигрыша для $-\mathbf{T}$ равно

$$\sum_{k=1}^{v} \sum_{j=1}^{u} M_{-T}(A_j, B_k)\, \alpha_j \beta_k.$$

Положив $\alpha = \| \alpha_1 \ \ldots \ \alpha_v \|$ и $\beta = \| \beta_1 \ \ldots \ \beta_v \|$, мы можем представить эти математические ожидания соответственно как

$$E_T(\alpha,\ \beta) \text{ и } E_{-T}(\alpha,\ \beta).$$

Поскольку $M_{-\mathbf{T}}(A_j,\ A_k) = -M_{\mathbf{T}}(A_j,\ A_k)$ для всех j и k, то очевидно, что

$$E_{-T}(\alpha,\ \beta) = -E_T(\alpha,\ \beta). \tag{1}$$

На основании теории прямоугольных игр двух лиц мы заключаем:

$$\max_{\alpha \in \mathbf{S}_u} \min_{\beta \in \mathbf{S}_v} E_T(\alpha,\ \beta) = \min_{\beta \in \mathbf{S}_v} \max_{\alpha \in \mathbf{S}_u} E_T(\alpha,\ \beta).$$

Полагаем

$$v(\mathbf{T}) = \max_{\alpha \in \mathbf{S}_u} \min_{\beta \in \mathbf{S}_v} E_T(\alpha,\ \beta).$$

Итак, мы имеем функцию v, определенную для всякого подмножества $\mathbf{T}$ множества $\mathbf{N}$ и значение которой представляет для любого $\mathbf{T}$ общую сумму, которую могут надеяться получить члены множества $\mathbf{T}$, если они составят коалицию; мы называем v *характеристической функцией* игры. Ввиду того, что платеж переносим, мы вправе предполагать, что все вопросы относительно коалиции и побочных платежей можно решить на основании одной лишь характеристической функции; например, если плата игроку за присоединение к некоторой коалиции в данной игре равна π, то она будет точно так же равна π в любой другой игре с такой же характеристической функцией. Этот вопрос, очевидно, мог быть разрешен определенно, если бы мы могли дать надлежащую теорию игр n лиц только на основе характеристических функций. Фон Нейман и Моргенштерн полагают, что им это удалось сделать.

Мы установим теперь некоторые математические свойства характеристических функций.

Теорема 15.1. *Пусть v — характеристическая функция игры n лиц с нулевой суммой, где $\mathbf{N}$ — множество игроков. Тогда*

(1) $v(\mathbf{N}) = 0$;

(2) *для любого подмножества $\mathbf{T}$ множества $\mathbf{N}$ мы имеем* $v(-\mathbf{T}) = -v(\mathbf{T})$;

(3) *если $\mathbf{R}$ и $\mathbf{T}$ — непересекающиеся подмножества множества $\mathbf{N}$, то*

$$v(\mathbf{R} \cup \mathbf{T}) \geqslant v(\mathbf{R}) + v(\mathbf{T}).$$

Доказательство. Для доказательства (1) разделим игроков множества $\mathbf{N}$ на две коалиции $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}-\mathbf{N}=\Lambda$, тогда не существует стратегий для второй коалиции (пустого множества игроков), а стратегия (чистая) первой коалиции есть упорядоченный n-мерный вектор $\| x_1 \ldots x_n \|$, где $x_i \in \mathrm{C}_i$ $(i=1, \ldots, n)$. Следовательно, каждая из функций M_i есть функция одного лишь элемента A_j множества C. Итак, для любой стратегии A_j, выбранной коалицией $\mathbf{N}$, общий платеж коалиции $\mathbf{N}$ (ввиду того, что первоначальная игра имела нулевую сумму) равен

$$M_{\mathbf{N}}(A_j)=\sum_{i \in \mathbf{N}} M_i(A_j)=0.$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$v(\mathbf{N})=\max_{\alpha \in \mathbf{S}_u} E_{\mathbf{N}}(\alpha)=\max_{\alpha \in \mathbf{S}_u}\left[\sum_{j=1}^{u} M_{\mathbf{N}}(A_j)\,\alpha_j\right]=\max_{\alpha \in \mathbf{S}_u}\left[\sum_{j=1}^{u} 0\cdot\alpha_j\right]=0,$$

что и требовалось доказать.

Для доказательства (2) пишем:

$$v(-\mathbf{T})=\max_{\alpha \in \mathbf{S}_u}\min_{\beta \in \mathbf{S}_v} E_{-\mathbf{T}}(\alpha, \beta)=\max_{\alpha \in \mathbf{S}_n}\min_{\beta \in \mathbf{S}_v}(-E_{\mathbf{T}}(\alpha, \beta))=$$

$$=-\min_{\alpha \in \mathbf{S}_u}\max_{\beta \in \mathbf{S}_v} E_{\mathbf{T}}(\alpha, \beta)=-\max_{\beta \in \mathbf{S}_v}\min_{\alpha \in \mathbf{S}_u} E_{\mathbf{T}}(\alpha,\beta)=-v(\mathbf{T}).$$

Мы докажем (3) только для игры трех лиц; доказательство для общего случая по существу такое же, но требует более сложных понятий. Пусть $\mathbf{N}=\{1, 2, 3\}$; мы покажем, что

$$v(\{1, 2\}) \geqslant v(\{1\})+v(\{2\}).$$

Пусть стратегии (чистые) игроков 1, 2 и 3 суть соответственно

$$\mathrm{C}_1=\{1, 2, \ldots, n_1\},$$

$$\mathrm{C}_2=\{1, 2, \ldots, n_2\},$$

$$\mathrm{C}_3=\{1, 2, \ldots, n_3\}.$$

Тогда чистые стратегии коалиции двух лиц $\{i, j\}$, где $i < j$, образуют множество C_{ij} упорядоченных пар $\|xy\|$, где $x \in C_i$ и $y \in C_j$. Итак, C_i содержит n_i чистых стратегий, а C_{ij} содержит $n_i n_j$ чистых стратегий.

Смешанная стратегия игрока 1 есть вектор $\|\alpha_1 \ldots \alpha_{n1}\|$ множества S_{n_1}, который приписывает частоту α_i ($i = 1, \ldots$ $\ldots, n_1$) чистой стратегии i; аналогичные стратегии имеются у игроков 2 и 3. Смешанная стратегия коалиции $\{1, 2\}$ есть вектор

$$\|\alpha_{1,1}\ \alpha_{1,2}\ \ldots\ \alpha_{1,n_2}\ \alpha_{2,1}\ \ldots\ \alpha_{n_1,n2}\|$$

множества $S_{n_1 n_2}$, который приписывает частоту $\alpha_{i,j}$ чистой стратегии $\|ij\|$; аналогичные стратегии имеются у коалиций $\{1, 3\}$ и $\{2, 3\}$.

Пусть $\alpha^* = \|\alpha_1\ \ldots\ \alpha^*_{n_1}\|$ — элемент множества S_{n_1} такой, что

$$v(\{1\}) = \max_{\eta \in S_{n_1}} \min_{\xi \in S_{n_2 n_3}} E_{\{1\}}(\eta, \xi) = \min_{\xi \in S_{n_2 n_3}} E_{\{1\}}(\alpha^*, \xi). \quad (2)$$

Пусть $\beta^* = \|\beta_1^*\ \ldots\ \beta^*_{n_2}\|$ — элемент множества S_{n_2} такой, что

$$v(\{2\}) = \max_{\eta \in S_{n_2}} \min_{\xi \in S_{n_1 n_2}} E_{\{2\}}(\eta, \xi) = \min_{\xi \in S_{n_1 n_2}} E_{\{2\}}(\beta^*, \xi). \quad (3)$$

Легко убедиться, что вектор

$$\|\alpha_1^*\beta_1^*\ \alpha_1^*\beta_2^*\ \ldots\ \alpha^*_{n_1}\beta^*_{n_2}\|$$

принадлежит множеству $S_{n_1 n_2}$. Поэтому имеем:

$$v(\{1, 2\}) = \max_{\eta \in S_{n_1 n_2}} \min_{\xi \in S_{n_3}} E_{\{1,2\}}(\eta, \xi) =$$

$$= \max_{\eta \in S_{n_1 n_2}} \min_{\xi \in S_{n_3}} \sum_{i,j,k} M_{\{1,2\}}(i, j, k)\,\eta_{i,j}\xi_k \geqslant$$

$$\geqslant \min_{\xi \in S_{n_3}} \sum_{i,j,k} M_{\{1,2\}}(i, j, k)\,\alpha_i^*\beta_j^*\xi_k =$$

$$= \min_{\varepsilon \in S_{n_3}} \sum_{i,j,k} [M_1(i, j, k) + M_2(i, j, k)]\,\alpha_i^*\beta_j^*\xi_k =$$

$$= \min_{\xi \in S_{n_3}} \Big[\sum_{i,j,k} M_1(i, j, k)\alpha_i^*\beta_j^*\xi_k + \sum_{i,j,k} M_2(i, j, k)\alpha_i^*\beta_j^*\xi_k\Big]. \quad (4)$$

Поскольку минимальное значение суммы двух функций не меньше суммы их минимальных значений, мы заключаем из (4), что

$$v(\{1,\ 2\}) \geqslant \min_{\xi \in S_{n_3}} \left[\sum_{i,\,j,\,k} M_1(i,\ j,\ k)\, \alpha_i^* \beta_j^* \xi_k \right] + \\ + \min_{\xi \in S_{n_3}} \left[M_2(i,\ j,\ k)\, \alpha_i^* \beta_j^* \xi_k \right]. \quad (5)$$

Пусть теперь $\| \gamma_1^* \ldots \gamma_{n_3}^* \|$ — элемент множества S_{n_3} такой, что

$$\sum_{i,\,j,\,k} M_1(i,\ j,\ k)\, \alpha_i^* \beta_j^* \gamma_k^* = \min_{\xi \in S_{n_3}} \sum_{i,\,j,\,k} M_1(i,\ j,\ k)\, \alpha_i^* \beta_j^* \xi_k; \quad (6)$$

и пусть $\| \delta_1^* \ldots \delta_{n_3}^* \|$ — элемент множества S_{n_3} такой, что

$$\sum_{i,\,j,\,k} M_2(i,\ j,\ k)\, \alpha_i^* \beta_j^* \delta_k^* = \min_{\xi \in S_{n_3}} \sum_{i,\,j,\,k} M_2(i,\ j,\ k)\, \alpha_i^* \beta_j^* \xi_k. \quad (7)$$

Из (5), (6) и (7) мы получаем:

$$v(\{1,\ 2\}) \geqslant \sum_{i,\,j,\,k} M_1(i,\ j,\ k)\, \alpha_i^* \beta_j^* \gamma_k^* + \sum_{i,\,j,\,k} M_2(i,\ j,\ k)\, \alpha_i^* \beta_j^* \delta_k^*. \quad (8)$$

Поскольку $\| \beta_1^* \ldots \beta_{n_2}^* \| \in S_{n_2}$ и $\| \gamma_1^* \ldots \gamma_{n_3}^* \| \in S_{n_3}$, мы заключаем, что вектор

$$\| \beta_1^* \gamma_1^*\ \beta_1^* \gamma_2^* \ldots \beta_{n_2}^* \gamma_{n_3}^* \|$$

принадлежит множеству $S_{n_2 n_3}$. Следовательно,

$$\sum_{i,\,j,\,k} M_1(i,\ j,\ k)\, \alpha_i^* \beta_j^* \gamma_k^* \geqslant \min_{\xi \in S_{n_2 n_3}} \sum_{i,\,j,\,k} M_1(i,\ j,\ k)\, \alpha_i^* \xi_{j,\,k} = \\ = \min_{\xi \in S_{n_2 n_3}} E_{\{1\}}(\alpha^*,\ \xi). \quad (9)$$

Из (2) и (9) мы заключаем, что

$$\sum_{i,\,j,\,k} M_1(i,\ j,\ k)\, \alpha_i^* \beta_j^* \gamma_k^* \geqslant v(\{1\}). \quad (10)$$

Так же заключаем, что

$$\sum_{i, j, k} M_2(i, j, k)\, \alpha_i^* \beta_j^* \delta_k^* \geqslant v(\{2\}). \qquad (11)$$

Наконец, из (8), (9) и (11) мы видим, что

$$v(\{1, 2\}) \geqslant v(\{1\}) + v(\{2\}),$$

что и требовалось доказать.

Мы вскоре докажем теорему, обратную теореме 15.1, а именно, что всякая функция v, удовлетворяющая трем условиям теоремы 15.1, есть характеристическая функция некоторой игры с нулевой суммой. Для этого уместно предварительно вывести некоторые простые следствия из трех условий теоремы 15.1.

Лемма 15.2. *Пусть* $\mathbf{N}$ — *некоторое множество и* v — *действительная функция, определенная для всякого подмножества* $\mathbf{T}$ *множества* $\mathbf{N}$ *и удовлетворяющая условиям теоремы* 15.1. *Тогда*

(1) $v(\Lambda) = 0$;

(2) *если* $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_r$ — *непересекающиеся подмножества множества* $\mathbf{N}$, *то*

$$v(\mathbf{T}_1 \cup \ldots \cup \mathbf{T}_r) \geqslant v(\mathbf{T}_1) + \ldots + v(\mathbf{T}_r);$$

(3) *если* $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_r$ — *непересекающиеся подмножества множества* $\mathbf{N}$, *сумма которых есть* $\mathbf{N}$, *то*

$$v(\mathbf{T}_1) + \ldots + v(\mathbf{T}_r) \leqslant 0.$$

Доказательство. Утверждение (1) вытекает непосредственно из условий (1) и (2) теоремы 15.1, ибо

$$v(\Lambda) = v(-\mathbf{N}) = -v(\mathbf{N}) = -0 = 0.$$

Утверждение (2) выводится из условия (3) теоремы 15.1 индукцией по r. Утверждение (3) вытекает из утверждения (2) и условия (1) теоремы 15.1, ибо

$$v(\mathbf{T}_1) + \ldots + v(\mathbf{T}_r) \leqslant v(\mathbf{T}_1 \cup \ldots \cup \mathbf{T}_r) = v(\mathbf{N}) = 0.$$

Теперь мы можем доказать упомянутую выше теорему, обратную теореме 15.1.

Теорема 15.3. *Пусть* $\mathbf{N}$ — *конечное множество, состоящее из* n *игроков и* v — *действительная функция, определенная для всякого подмножества* $\mathbf{T}$ *множества* $\mathbf{N}$ *и удовлетворяющая трем условиям теоремы* 15.1. *Тогда существует игра* n *лиц с нулевой суммой, для которой* v *является характеристической функцией.*

Доказательство. Мы определяем игру, в которой игроки суть члены множества $\mathbf{N}$, следующим образом: каждый член x множества $\mathbf{N}$ делает один ход, состоящий в выборе подмножества $\mathbf{T}_x$ множества $\mathbf{N}$ такого, что $x \in \mathbf{T}_x$; при совершении каждого из этих ходов игроку неизвестны ходы других игроков.

Чтобы определить платежные функции, мы введем сначала вспомогательное понятие характерного подмножества множества $\mathbf{N}$.

Подмножество $\mathbf{T}$ множества $\mathbf{N}$ называется *характерным* (по отношению к данной партии игры), если либо

(а) $\mathbf{T}_x = \mathbf{T}$ для всякого x в $\mathbf{T}$, либо

(б) $\mathbf{T}$ есть множество, содержащее только один элемент x, который не принадлежит никакому множеству, удовлетворяющему условию (а).

Легко видеть, что для данной партии игры характерные подмножества множества $\mathbf{N}$ не пересекаются и их сумма есть $\mathbf{N}$.

Предположим теперь, что для данной партии игры характерные подмножества множества $\mathbf{N}$ суть $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_p$ и что $\mathbf{T}_j$ $(j = 1, \ldots, p)$ содержит n_j элементов. Тогда, если игрок i $(i = 1, \ldots, n)$ принадлежит множеству T_j, то выигрыш его определяется так:

$$\frac{1}{n_j} v(\mathbf{T}_j) - \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{p} v(\mathbf{T}_r),$$

где v — данная функция.

Мы покажем сначала, что игра, определенная таким образом, есть игра с нулевой суммой. Предположим, как и раньше, что для данной партии характерные подмножества суть $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_p$, где $\mathbf{T}_j$ содержит n_j элементов. Мы замечаем, что выигрыши любых двух членов одного и того же множества $\mathbf{T}_j$ одинаковы. Следовательно, сумма выигрышей членов множества $\mathbf{T}_j$ для любого j равна просто произведению n_j на выигрыш каждого члена множества $\mathbf{T}_j$, то есть

$$n_j\left[\frac{1}{n_j}v(\mathbf{T}_j)-\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{p}v(\mathbf{T}_r)\right].$$

Сумма выигрышей всех членов множества $\mathbf{N}$ равна, следовательно,

$$\sum_{j=1}^{p}n_j\left[\frac{1}{n_j}v(\mathbf{T}_j)-\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{p}v(\mathbf{T}_r)\right]=$$
$$=\sum_{j=1}^{p}v(\mathbf{T}_j)-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{p}n_j\sum_{r=1}^{p}v(\mathbf{T}_r)=$$
$$=\sum_{j=1}^{p}v(\mathbf{T}_j)-\frac{1}{n}n\sum_{r=1}^{p}v(T_r)=0.$$

Для завершения доказательства теоремы остается теперь показать, что v есть характеристическая функция игры, определенной выше. Предположим, что $\bar{v}$ — характеристическая функция этой игры; нам нужно показать, что для всякого подмножества $\mathbf{T}$ множества $\mathbf{N}$ мы имеем $\bar{v}(\mathbf{T})=v(\mathbf{T})$.

По условию теоремы, v удовлетворяет трем условиям теоремы 15.1, а $\bar{v}$ удовлетворяет этим условиям потому, что она есть характеристическая функция игры с нулевой суммой. Отсюда вытекает, что v и $\bar{v}$ удовлетворяют также трем условиям леммы 15.2.

Мы покажем сначала, что для всякого подмножества $\mathbf{T}$ множества $\mathbf{N}$

$$\bar{v}(\mathbf{T})\geqslant v(\mathbf{T}).$$

Для $\mathbf{T}=\Lambda$ это вытекает из условия (1) леммы 15.2. В случае $T\neq\Lambda$ игроки множества $\mathbf{T}$ могут образовать коалицию и условиться, что каждый член x множества $\mathbf{T}$ будет выбирать $\mathbf{T}_x=\mathbf{T}$. При этом $\mathbf{T}$ станет характерным множеством относительно рассматриваемой партии. Предположим, что характерные множества партии суть $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_p$, где $\mathbf{T}_1=\mathbf{T}$. Тогда каждый игрок множества $\mathbf{T}$

получает

$$\frac{1}{n_1} v(\mathbf{T}) - \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{p} v(\mathbf{T}_r),$$

и, следовательно, общий выигрыш членов множества $\mathbf{T}$ равен

$$n_1 \left[\frac{1}{n_1} v(\mathbf{T}) - \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{p} v(\mathbf{T}_r) \right] = v(\mathbf{T}) - \frac{n_1}{n} \sum_{r=1}^{p} v(\mathbf{T}_r).$$

Поскольку члены множества $\mathbf{T}$ могут гарантировать себе, что они получат по меньшей мере

$$v(\mathbf{T}) - \frac{n_1}{n} \sum_{r=1}^{p} v(\mathbf{T}_r),$$

мы заключаем, что

$$\bar{v}(\mathbf{T}) \geqslant v(\mathbf{T}) - \frac{n_1}{n} \sum_{r=1}^{p} v(\mathbf{T}_r). \tag{12}$$

Из условия (3) леммы 15.2 мы видим, что

$$\sum_{r=1}^{p} v(\mathbf{T}_r) \leqslant 0. \tag{13}$$

Из (12) и (13) с учетом положительности n_1 и n мы заключаем, что

$$\bar{v}(\mathbf{T}) \geqslant v(\mathbf{T}). \tag{14}$$

Поскольку (14) справедливо для всех подмножеств $\mathbf{T}$ множества $\mathbf{N}$, то оно остается справедливым после замены $\mathbf{T}$ на $-\mathbf{T}$. Итак,

$$\bar{v}(-\mathbf{T}) \geqslant v(-\mathbf{T}).$$

На основании условия (2) теоремы 15.1 из этого вытекает

$$-\bar{v}(\mathbf{T}) \geqslant -v(\mathbf{T}),$$

и, следовательно,

$$v(\mathbf{T}) \geqslant \bar{v}(\mathbf{T}). \tag{15}$$

Из (14) и (15) мы заключаем, что

$$\bar{v}(\mathbf{T}) = v(\mathbf{T}).$$

Это завершает доказательство теоремы.

З а м е ч а н и е 15.4. Теорема 15.3. показывает, что три условия теоремы 15.1 достаточны для полного определения характеристических функций. Поэтому, когда мы будем говорить впредь о характеристических функциях, нам не нужно упоминать об игре, которая их порождает; нам нужно лишь предположить, что они удовлетворяют трем условиям теоремы 15.1.

2. Приведенная форма

Основные вопросы, которые мы разбирали в теории игр n лиц,— это, как было сказано выше, вопросы о том, насколько сильны будут стремления игроков образовывать коалиции и какие взносы игроки должны уплачивать друг другу при вступлении в данную коалицию. Если две игры не различаются в этом отношении (хотя бы их платежные функции и характеристические функции и были различны), то с нашей точки зрения они будут по существу одинаковы. Уместно дать какое-нибудь название такому соотношению между двумя играми; мы назовем это соотношение *стратегической эквивалентностью*.

Конечно, понятие стратегической эквивалентности есть лишь интуитивное понятие без какого-либо математического содержания, ибо оно основано на таких понятиях, как «стремление к образованию коалиции», которые сами не были определены математически. Но, очевидно, это понятие чрезвычайно важно для нашей цели, и одна из основных задач теории игр — найти для него точное математическое определение. Можно привести приемлемые интуитивные доводы, которые покажут, что некоторые условия достаточны для стратегической эквивалентности; мы сделаем это в следующих абзацах.

Допустим, что нам даны две прямоугольные игры n лиц с нулевой суммой Γ и Γ', и в обеих играх игрок i ($i = 1, \ldots, n$) делает выбор из множества C_i; пусть платежные функции в Γ и Γ' суть соответственно $M_1, \ldots, M_n$ и $M'_1, \ldots, M'_n$. Допустим, далее, что существует положительное число k, такое, что для $i=1, \ldots, n$ и для любого элемента $\|x_1 \ldots x_n\|$ из декартового произведения множеств $C_1, \ldots, C_n$

$$M'_i(x_1, \ldots, x_n) = kM_i(x_1, \ldots, x_n). \tag{16}$$

Тогда интуитивно очевидно, что игры Г и Г′ стратегически эквивалентны, так как мы можем рассматривать k просто как константу, изменяющую денежную единицу (например, из центов или шиллингов в доллары), а поведение разумного человека в игре не зависит от единиц, в которых выражается платеж. Итак, мы нашли достаточное условие для стратегической эквивалентности.

Другое достаточное условие мы получим, заменив условие (16) нижеследующим: существует n чисел $a_1, \ldots, a_n$ таких, что

$$a_1 + \ldots + a_n = 0,$$

и для $i=1, \ldots, n$ и для любого элемента $\|x_1 \ldots x_n\|$ из декартового произведения множеств $C_1, \ldots, C_n$

$$M'_i(x_1, \ldots, x_n) = M_i(x_1, \ldots, x_n) + a_i. \tag{17}$$

Чтобы в этом случае убедиться в стратегической эквивалентности Г и Г′, заметим, что платежи игроку i в Г′ такие же, как в Г, с той разницей, что он получает дополнительную сумму a_i (которая, конечно, может быть отрицательной) и эту сумму a_i игрок i получает независимо от течения игры. Таким образом, очевидно, что стратегии игры Г′ не изменились бы, если бы платежи $a_1, \ldots, a_n$ производились в начале игры, а не в конце, и если бы их совсем не было, как это имеет место в игре Г.

Далее мы видим, что для того, чтобы Г и Г′ были стратегически эквивалентны, в действительности не обязательно предполагать, как мы делали раньше, что классы, из которых игроки делают выборы, действительно тождественны, достаточно просто предположить, что они могут быть поставлены соответствующим способом во взаимно однозначное соответствие.

Эти соображения подсказывают нам ввести следующее понятие S-эквивалентности, которое, как вытекает из наших интуитивных доводов, представляет собой достаточное условие для стратегической эквивалентности.

Определение 15.5. Пусть Γ и Γ' — две игры n лиц с нулевой суммой, в которых выборы производятся соответственно из множеств $\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_n$ и $\mathbf{C}'_1, \ldots, \mathbf{C}'_n$, и платежные функции суть соответственно $M_1, \ldots, M_n$ и $M'_1, \ldots, M'_n$. Игры Γ и Γ' называются *S-эквивалентными*, если существуют функции $f_1, \ldots, f_n$, действительные числа $a_1, \ldots, a_n$ и действительное положительное число k, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 0$;

2) f_i $(i=1, \ldots, n)$ отображает $\mathbf{C}_i$ взаимно однозначным образом на $\mathbf{C}'_i$.

3) Для $i=1, \ldots, n$ и для любого элемента $\|x_1 \ldots x_n\|$ декартова произведения множеств $\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_n$

$$M_i(x_1, \ldots, x_n) = kM'_i[f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)] + a_i.$$

Доказательства следующих двух теорем мы оставляем в качестве упражнений.

Теорема 15.6. *Соотношение S-эквивалентности рефлексивно, симметрично и транзитивно.*

Теорема 15.7. *Если Γ и Γ' — две игры n лиц с нулевой суммой, которые S-эквивалентны относительно констант $a_1, \ldots, a_n$ и k и если v и v' — характеристические функции игр Γ и Γ' соответственно, то для любого подмножества $\mathbf{T}$ множества $\mathbf{N}$*

$$v(\mathbf{T}) = kv'(\mathbf{T}) + \sum_{i \in \mathbf{T}} a_i.$$

В силу теоремы 15.7 две характеристические функции v и v' называются *S-эквивалентными*, если они удовлетворяют уравнению этой теоремы, то есть если имеется положительная константа k и константы $a_1, \ldots, a_n$ (при $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 0$) такие, что для всякого подмножества $\mathbf{T}$ множества $\mathbf{N}$

$$v(\mathbf{T}) = kv'(\mathbf{T}) + \sum_{i \in \mathbf{T}} a_i.$$

Согласно теореме 15.6 соотношение S-эквивалентности разбивает класс всех игр n лиц с нулевой суммой на непересекающиеся классы такие, что любые два элемента одного класса S-эквивалентны, а элементы разных классов не S-эквивалентны. Для некоторых целей желательно иметь возможность выбирать из этих классов особенно простой элемент; для этого мы сформулируем следующее определение.

Определение 15.8. Игра n лиц с характеристической функцией v называется игрой *в приведенной форме*, если

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = \ldots = v(\{n\}) = \gamma,$$

где либо $\gamma = 0$, либо $\gamma = -1$. Когда эти уравнения справедливы, мы говорим также, что характеристическая функция есть характеристическая функция *в приведенной форме с модулем* γ.

Теорема 15.9. *Если v — характеристическая функция в приведенной форме с модулем γ и если* $\mathbf{T}$ *— подмножество множества* $\mathbf{N}$, *содержащее p элементов, то*

$$p\gamma \leqslant v(\mathbf{T}) \leqslant (p-n)\gamma.$$

Доказательство. Из условия (2) леммы 15.2 мы видим, что

$$\sum_{i \in \mathbf{T}} v(\{i\}) \leqslant v(\mathbf{T}),$$

и, следовательно,

$$p\gamma \leqslant v(\mathbf{T}). \tag{18}$$

Так как неравенство (18) справедливо для любого $\mathbf{T}$, то мы можем заменить в нем $\mathbf{T}$ на $-\mathbf{T}$; поскольку $-\mathbf{T}$ содержит $n-p$ элементов, мы получаем отсюда, что

$$(n-p)\gamma \leqslant v(-\mathbf{T}). \tag{19}$$

Из (19) мы заключаем, на основании условия (2) теоремы 15.1, что

$$(n-p)\gamma \leqslant -v(\mathbf{T}),$$

и, следовательно,

$$v(\mathbf{T}) \leqslant (p-n)\gamma. \tag{20}$$

Уравнения (18) и (20) совместно и выражают указанную теорему.

Следствие 15.10. Если v есть характеристическая функция в приведенной форме с модулем 0, то для всякого подмножества **T** множества **N**

$$v(\mathbf{T}) = 0.$$

В самом деле, на основании теоремы 15.9 мы имеем:

$$p \cdot 0 \leqslant v(\mathbf{T}) \leqslant (p-n) \cdot 0,$$

откуда

$$v(\mathbf{T}) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 15.11 *Если v и v' суть S-эквивалентные характеристические функции в приведенной форме, то для всякого подмножества* **T** *множества* **N**

$$v'(\mathbf{T}) = v(\mathbf{T}).$$

Доказательство. Пусть модули функций v и v' равны соответственно γ и γ'. Поскольку v и v' S-эквивалентны, то существует положительное число k и числа $a_1, \ldots, a_n$, сумма которых равна 0, такие, что для всякого подмножества **T** множества **N**

$$v'(\mathbf{T}) = kv(\mathbf{T}) + \sum_{i \in \mathbf{T}} a_i. \tag{21}$$

В частности,

$$v'(\{i\}) = kv(\{i\}) + a_i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{22}$$

Складывая все уравнения системы (22), мы получаем:

$$\sum_{i=1}^{n} v'(\{i\}) = k \sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) + \sum_{i=1}^{n} a_i = k \sum_{i=1}^{n} v(\{i\});$$

и, следовательно, поскольку обе функции в приведенной форме,

$$n\gamma' = kn\gamma.$$

Итак,

$$\gamma' = k\gamma,$$

и, кроме того, γ и γ' либо оба равны нулю, либо оба равны -1. Если оба равны нулю, то на основании следствия 15.10 мы имеем для всякого **T**

$$v'(\mathbf{T}) = 0 = v(\mathbf{T}).$$

Если оба модуля равны -1, то $k=1$, и, следовательно, из (22) мы имеем:

$$(-1)=(1)(-1)+a_i,$$

так что $a_i=0$ (для $i=1, \ldots, n$); таким образом, из (21) мы имеем для любого $\mathbf{T}$

$$v'(\mathbf{T})=kv(\mathbf{T})+\sum_{i\in\mathbf{T}} a_i=1\cdot v(\mathbf{T})+0=v(\mathbf{T}),$$

что завершает доказательство.

Теорема 15.12. *Всякая характеристическая функция S-эквивалентна одной и только одной характеристической функции в приведенной форме.*

Доказательство. Пусть v—характеристическая функция. Чтобы показать, что v S-эквивалентна характеристической функции в приведенной форме, мы будем различать два случая, соответственно для $\sum_{i=1}^{n} v(\{i\})=0$ или $\sum_{i=1}^{n} v(\{i\})\neq 0$.

В первом случае мы берем $k=1$ и $a_i=-v(\{i\})$ $(i=1, \ldots, n)$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} a_i=-\sum_{i=1}^{n} v(\{i\})=0.$$

Далее, по теореме 15.7 характеристическая функция v', S-эквивалентная функции v относительно этих констант, удовлетворяет для $i=1, \ldots, n$ условию

$$v'(\{i\})=kv(\{i\})+a_i=1v(\{i\})-v(\{i\})=0.$$

Если $\sum_{i=1}^{n} v(\{i\})\neq 0$, мы берем:

$$k=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} v(\{i\})},$$

и для $i=1, \ldots, n$

$$a_i=-1+\frac{nv(\{i\})}{\sum_{i=1}^{n} v(\{i\})}.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = -n + \frac{n \sum_{i=1}^{n} v(\{i\})}{\sum_{i=1}^{n} v(\{i_j\})} = 0$$

и

$$v'(\{i\}) = kv(\{i\}) + a_i =$$
$$= -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} v(\{i_j\})} v(\{i\}) - 1 + \frac{nv(\{i\})}{\sum_{i=1}^{n} v(\{i\})} = -1.$$

Тот факт, что характеристическая функция не S-эквивалентна двум различным характеристическим функциям в приведенной форме, вытекает из теоремы 15.11 и из того, что соотношение S-эквивалентности транзитивно.

Замечание 15.13. Из теорем 15.12 и 15.7 следует, что для того чтобы дать надлежащую теорию всех игр n лиц с нулевой суммой, достаточно рассмотреть лишь игры в приведенной форме.

Следствие 15.10 показывает, что игры в приведенной форме с модулем 0 резко отличаются от игр с модулем -1. Действительно, из 15.10 мы видим, что когда модуль равен 0, любое множество игроков получает 0; итак, в такой игре нет смысла образовывать коалиции, и не может быть речи о побочных платежах для того, чтобы побудить игрока вступить в коалицию; следовательно, для таких игр не нужно никакой особой теории. Поэтому мы можем впредь ограничиться играми в приведенной форме с модулем -1. Мы будем называть такие игры *существенными*, в отличие от игр с модулем 0, которые будут называться *несущественными*.

Игры не в приведенной форме мы называем существенными или несущественными в зависимости от того, являются ли они S-эквивалентными существенным или несущественным играм в приведенной форме.

Следующие две теоремы дают условия того, чтобы игры (не обязательно в приведенной форме) были несущественными; доказательства мы оставим в качестве упражнений.

Теорема 15.14. *Игра несущественна тогда и только тогда, когда ее характеристическая функция v удовлетворяет условию*

$$\sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) = 0.$$

Теорема 15.15. *Игра несущественна тогда и только тогда, когда ее характеристическая функция v такая, что если $P \cap T = \Lambda$, мы имеем:*

$$v(\mathbf{R} \cup \mathbf{T}) = v(\mathbf{R}) + v(\mathbf{T}).$$

Итак, в существенной игре имеет место положительная тенденция к образованию коалиции.

Из следствия 15.10 мы видим, что для любого n в пределах S-эквивалентности имеется лишь одна несущественная игра n лиц. Интересно отметить, что для $n = 3$ имеется также лишь одна существенная игра n лиц в приведенной форме. В самом деле, если v — характеристическая функция такой игры, то мы имеем:

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = -1,$$

и, следовательно, на основании условия (2) теоремы 15.1

$$v(\{2,\ 3\}) = v(\{1,\ 3\}) = v(\{1,\ 2\}) = +1;$$

поскольку мы имеем также

$$v(\Lambda) = v(\{1,\ 2,\ 3\}) = 0,$$

то мы заключаем отсюда, что значение функции $v(\mathbf{T})$ определено для любого $\mathbf{T}$. Итак, можно говорить об *определенной* существенной игре трех лиц в приведенной форме.

Напротив, для $n > 3$ имеется бесконечное число существенных игр n лиц в приведенной форме. Мы исследуем этот вопрос несколько подробнее для $n = 4$.

Если v — характеристическая функция существенной игры 4 лиц в приведенной форме, то мы сразу видим, что

$$v(\mathbf{T}) = \begin{cases} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{cases}, \text{ когда } \mathbf{T} \text{ состоит из } \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{cases} \text{ элементов.} \qquad (23)$$

Итак, значение функции $v(\mathbf{T})$ определено, за исключением случая, когда $\mathbf{T}$ содержит два элемента. Но в силу того, что

$$v(\{2,\ 3\}) = -v(\{1,\ 4\}),$$
$$v(\{1,\ 3\}) = -v(\{2,\ 4\}),$$
$$v(\{1,\ 2\}) = -v(\{3,\ 4\}),$$

значения v будут полностью определены, если мы зададим значения функций $v(\{1,\ 4\})$, $v(\{2,\ 4\})$ и $v(\{3,\ 4\})$.

Далее, по теореме 15.9 мы видим, что если $\mathbf{T}$ есть любое множество с двумя элементами, то

$$-2 \leqslant v(\mathbf{T}) \leqslant 2.$$

Итак, если мы положим

$$\left.\begin{aligned} v(\{1,\ 4\}) &= 2x_1, \\ v(\{2,\ 4\}) &= 2x_2, \\ v(\{3,\ 4\}) &= 2x_3, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

то мы будем иметь

$$\left.\begin{aligned} v(\{2,\ 3\}) &= -2x_1, \\ v(\{1,\ 3\}) &= -2x_2, \\ v(\{1,\ 2\}) &= -2x_3 \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

и

$$-1 \leqslant x_i \leqslant 1 \text{ для } i = 1,\ 2,\ 3. \tag{26}$$

Далее, легко убедиться, что если x_1, x_2 и x_3 — любые числа, удовлетворяющие соотношению (26), и если мы определяем $v(\mathbf{T})$ соотношениями (23), (24) и (25), то v есть характеристическая функция существенной игры четырех лиц в приведенной форме. Для этого необходимо лишь показать, что функция v, определенная таким образом, удовлетворяет условиям теоремы 15.1.

Итак, если числа x_1, x_2 и x_3 мы рассматриваем как декартовы координаты точки в трехмерном евклидовом пространстве, то совокупность существенных игр четырех лиц в приведенной форме, очевидно, соответствует взаимно однозначно точкам $\|x_1\ x_2\ x_2\|$, координаты которых удовлетворяют условию (26) (это точки некоторого куба).

Применяя геометрическую терминологию, мы можем сказать, что в то время как есть лишь одна существенная игра трех лиц в приведенной форме, существенных игр четырех лиц в приведенной форме имеется бесконечность в кубе.

Пример 15.16. Игра, называемая «один лишний», проводится следующим образом: каждый из игроков (их всего три) пишет на листке бумаги «герб» или «решка». После того, как каждый игрок выбрал слово, судья сравнивает три написанных слова; если все игроки написали одно слово, нет никаких платежей; в противном случае оказавшийся в одиночестве платит остальным по доллару.

Таким образом, если M_1, M_2 и M_3—платежные функции для трех игроков и если обозначим «герб» как «1», а «решку» как «2», то

$$M_1(1,\ 1,\ 1) = M_1(2,\ 2,\ 2) = 0,$$

$$M_1(1,\ 1,\ 2) = M_1(2,\ 2,\ 1) = M_1(1,\ 2,\ 1) = M_1(2,\ 1,\ 2) = 1,$$

$$M_1(1,\ 2,\ 2) = M_1(2,\ 1,\ 1) = -2.$$

и аналогично для M_2 и M_3.

Предположим теперь, что игроки 2 и 3 составляют коалицию против игрока 1. Игрок 1 имеет, очевидно, лишь две стратегии: он может выбрать 1 или 2. Коалиция $\{2, 3\}$ имеет четыре стратегии: оба игрока могут выбрать 1; оба игрока могут выбрать 2; игрок 2 выбирает 1, а игрок 3 выбирает 2; игрок 2 выбирает 2, а игрок 3 выбирает 1. Из определения функции M_1 мы легко можем вычислить платежную матрицу игрока 1 для различных выбранных стратегий. Так, если, например, игрок 1 выбирает 1, а коалиция $\{2, 3\}$ выбирает $\|1\ 2\|$, то поскольку $M_1(1,\ 1,\ 2) = 1$, выигрыш игрока 1 будет равен 1. Полной матрицей будет матрица 1.

Матрица 1

	$\|1\ 1\|$	$\|1\ 2\|$	$\|2\ 1\|$	$\|2\ 2\|$
1	0	1	1	—2
2	—2	1	1	0

Поскольку второй и третий столбцы матрицы 1 превосходят первый, мы видим, что если коалиция $\{2, 3\}$ хочет применять оптимальную стратегию, то игроки не будут никогда применять стратегии $\|1\ 2\|$ и $\|2\ 1\|$. Решая матрицу, мы находим, что цена игры (для игрока 1) равна -1. Итак,

$$v(\{1\}) = -1,$$

и, следовательно,

$$v(\{2, 3\}) = 1.$$

Из симметрии мы заключаем, что

$$v(\{2\}) = v(\{3\}) = -1$$

и

$$v(\{1, 3\}) = v(\{1, 2\}) = 1.$$

Далее (как и для любой игры трех лиц с нулевой суммой)

$$v(\Lambda) = v(\{1, 2, 3\}) = 0.$$

Итак, мы полностью определили характеристическую функцию этой игры. Платежная функция в этом случае оказывается такой, что характеристическая функция уже имеет приведенную форму.

Библиографические замечания

Материал этой главы можно найти главным образом у фон Неймана и Моргенштерна [92]. Полный разбор S-эквивалентности есть у Мак-Кинси [74].

Упражнения

1. В прямоугольной игре трех лиц с нулевой суммой каждый игрок совершает выбор из множества $\{1, 2\}$. Платежные функции определены следующим образом:

$$\begin{aligned}
&M_1(1, 1, 1) = +1, && M_2(1, 1, 1) = +1, && M_3(1, 1, 1) = -2,\\
&M_1(1, 1, 2) = -1, && M_2(1, 1, 2) = -1, && M_3(1, 1, 2) = +2,\\
&M_1(1, 2, 1) = +1, && M_2(1, 2, 1) = +1, && M_3(1, 2, 1) = -2,\\
&M_1(1, 2, 2) = -1, && M_2(1, 2, 2) = -1, && M_3(1, 2, 2) = +2,\\
&M_1(2, 1, 1) = -1, && M_2(2, 1, 1) = -1, && M_3(2, 1, 1) = +2,\\
&M_1(2, 1, 2) = +1, && M_2(2, 1, 2) = +1, && M_3(2, 1, 2) = -2,\\
&M_1(2, 2, 1) = -1, && M_2(2, 2, 1) = -1, && M_3(2, 2, 1) = +2,\\
&M_1(2, 2, 2) = +1, && M_2(2, 2, 2) = +1, && M_3(2, 2, 2) = -2.
\end{aligned}$$

Найдите характеристическую функцию игры.

2. Найдите характеристическую функцию в приведенной форме, которая S-эквивалентна следующей характеристической функции v для игры четырех лиц:

$$\begin{aligned}
&v(\Lambda)=0, && v(\{2,\ 3\})=0,\\
&v(\{1\})=-1, && v(\{2,\ 4\})=0,\\
&v(\{2\})=-2, && v(\{3,\ 4\})=0,\\
&v(\{3\})=-2, && v(\{1,\ 2,\ 3\})=0,\\
&v(\{4\})=0, && v(\{1,\ 2,\ 4\})=2,\\
&v(\{1,\ 2\})=0, && v(\{1,\ 3,\ 4\})=2,\\
&v(\{1,\ 3\})=0, && v(\{2,\ 3,\ 4\})=1,\\
&v(\{1,\ 4\})=0, && v(\{1,\ 2,\ 3,\ 4\})=0.
\end{aligned}$$

3. Определите игру «один лишний» для четырех игроков (по аналогии с вариантом для трех игроков, описанным в примере 15.16) и найдите ее характеристическую функцию.

4. Докажите теорему 15.6.

5. Докажите теорему 15.7.

6. Докажите теорему 15.14.

7. Докажите теорему 15.15.

8. Игра n лиц называется *симметричной*, если во всех случаях, когда $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$ — два подмножества множества $\mathbf{N}$ с одинаковым числом элементов, $v(\mathbf{T}_1)=v(\mathbf{T}_2)$. Покажите, что имеется лишь одна симметричная существенная игра четырех лиц в приведенной форме, и найдите ее характеристическую функцию.

9. Покажите, что имеется бесконечное число симметричных существенных игр пяти лиц в приведенной форме.

10. Покажите, что для игры, определенной в доказательстве теоремы 15.3, характерные подмножества множества $\mathbf{N}$ не пересекаются, и их сумма есть $\mathbf{N}$.

ГЛАВА XVI

РЕШЕНИЯ ИГР n ЛИЦ

1. Исход

Как было указано, в играх n лиц мы интересуемся вопросами о том, какие коалиции могут быть образованы и что будет уплачено каждому игроку (после производства побочных платежей) в случае образования данной коалиции. Выигрыши нескольких игроков данной коалиции и побочные платежи можно представить как вектор $\| x_1 \; x_2 \ldots x_n \|$, где x_i $(i = 1, \ldots, n)$ есть сумма, которую получает i-й игрок.

Но поскольку игра имеет нулевую сумму, так что деньги не создаются и не уничтожаются, очевидно, выигрыши игроков должны в сумме давать нуль, то есть

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0.$$

Мы замечаем далее, что такой вектор $\| x_1 \ldots x_n \|$ может быть реализован только в том случае, если для каждого i мы имеем:

$$x_i \geqslant v(\{i\}),$$

так как игрок i может позаботиться о том, чтобы получить $v(\{i\})$ самостоятельно (то есть если даже он не может убедить какого-либо другого игрока сотрудничать с ним), и поэтому он наверное отвергнет любую систему распределения, которая даст ему меньше, чем $v(\{i\})$.

Поскольку мы часто будем говорить о векторах, удовлетворяющих указанным двум условиям, уместно дать им название.

Определение 16.1. Под *исходом* для игры n лиц с характеристической функцией v мы будем понимать вектор

$$\| x_1 \ldots x_n \|$$

такой, что

1) $$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

и

2) $$x_i \geqslant v(\{i\}) \qquad \text{для } i = 1, \ldots, n.$$

Замечание 16.2. Можно подумать, что второе условие нашего определения может быть усилено так, чтобы в нем говорилось, что если $\mathbf{T}$ есть любое подмножество множества $\mathbf{N}$, то

$$\sum_{i \in \mathbf{T}} x_i \geqslant v(\mathbf{T}).$$

Но интуитивные основания этого более сильного условия не столь очевидны, как основания более слабого условия. В самом деле, хотя игроки множества $\mathbf{T}$, составив коалицию, могут быть уверены, что коллективно они получат $v(\mathbf{T})$, совсем не очевидно, что они захотят объединиться таким образом. Далее, с формальной точки зрения можно легко показать, что при таком условии класс исходов вообще будет пустым. Так, например, если бы этому условию удовлетворял исход $\| x_1 \; x_2 \; x_3 \|$ для существенной игры трех лиц в приведенной форме, то мы имели бы

$$x_1 + x_2 \geqslant v(\{1, 2\}) = 1,$$

и, следовательно, поскольку $x_1 + x_2 + x_3 = 0$,

$$-x_3 \geqslant 1,$$

или

$$x_3 \leqslant -1;$$

поскольку

$$x_3 \geqslant v(\{3\}) = -1,$$

мы имели бы отсюда

$$x_3 = -1.$$

Аналогичным образом мы могли бы получить

$$x_2 = -1$$

и

$$x_1 = -1,$$

а это противоречит допущению, что $x_1 + x_2 + x_3 = 0$; итак, для этой игры не существовало бы исхода.

Замечание 16.3. Легко убедиться, что множество всех исходов для игры n лиц есть выпуклое подмножество n-мерного евклидова пространства. Поэтому если имеются два различные исхода для данной игры, то имеется бесконечное число исходов. Мы замечаем, что несущественная игра имеет лишь один исход, а именно $\| v(\{1\}) \ \ldots \ v(\{n\}) \|$. Напротив, существенная игра имеет бесконечное число исходов.

Исход $\| y_1 \ \ldots \ y_n \|$ игрок i, очевидно, предпочтет исходу $\| x_1 \ \ldots \ x_n \|$, если он даст ему больше, то есть если

$$y_i > x_i.$$

Аналогично, подмножество $\mathbf{T}$ множества $\mathbf{N}$ всех игроков предпочтет исход $\| y_1 \ \ldots \ y_n \|$, если

$$y_i > x_i \text{ для всех } i \text{ из } \mathbf{T}.$$

Однако, если не будет иметь место соотношение

$$v(\mathbf{T}) \geqslant \sum_{i \in \mathbf{T}} y_i,$$

то предпочтение исхода $\| y_1 \ \ldots \ y_n \|$ со стороны $\mathbf{T}$ будет необоснованным, так как игроки окажутся не в состоянии (без посторонней помощи) гарантировать себе, что они получат сумму, которую им позволяет получить этот исход.

Эти соображения приводят нас к понятию предпочтения. Мы имеем в виду обоснованное предпочтение со стороны непустого множества игроков, которое определяется следующим образом.

Определение 16.4. Пусть $\| y_1 \ \ldots \ y_n \|$ и $\| x_1 \ \ldots$ $\ldots \ x_n \|$ — исходы в игре, имеющей характеристическую функцию v, и $\mathbf{T}$ — некоторое подмножество игроков. Тогда мы говорим, что $\| y_1 \ \ldots \ y_n \|$ *предпочтительней*

$\|x_1 \ldots x_n\|$ *по отношению к* **T**, если выполняются следующие условия:

1) $T \neq \Lambda$.

2) $v(\mathbf{T}) \geqslant \sum_{i \in \mathbf{T}} y_i$.

3) $y_i > x_i$ для всех i в **T**.

Когда $\|y_1 \ldots y_n\|$ предпочтительней $\|x_1 \ldots x_n\|$ по отношению к **T**, мы пишем:

$$\|y_1 \ldots y_n\| \underset{\mathbf{T}}{\succ} \|x_1 \ldots x_n\|.$$

Если $\|y_1 \ldots y_n\|$ предпочтительней $\|x_1 \ldots x_n\|$ по отношению к любому множеству **T**, то мы говорим, что $\|y_1 \ldots \ldots y_n\|$ *предпочтительней* $\|x_1 \ldots x_n\|$ и пишем:

$$\|y_1 \ldots y_n\| \succ \|x_1 \ldots x_n\|.$$

Замечание 16.5. Интересно исследовать некоторые общие свойства соотношения предпочтения.

Из условия (1) определения 16.4 следует, что один исход не может быть предпочтительней другого по отношению к пустому множеству. Далее, из условия (2) определения 16.1 и из 16.4 мы видим, что один исход не может быть предпочтительней другого по отношению к множеству, состоящему из одного элемента, ибо если бы мы имели

$$\|y_1 \ldots y_n\| \underset{\{i\}}{\succ} \|x_1 \ldots x_n\|,$$

то мы могли бы заключить из условия (2) определения 16.1 и условия (2) определения 16.4, что

$$y_i = v(\{i\}),$$

и, следовательно, из условия (3) определения 16.4, что

$$v(\{i\}) > x_i.$$

Это противоречило бы условию (2) определения 16.1. Аналогично, мы видим на основании условия (1) определения 16.1, что один исход не может быть предпочтительней другого по отношению к множеству **N** всех игроков. Итак, если один исход предпочтительней другого по отношению к множеству **T**, то **T** должно содержать не менее 2 и не более $(n-1)$ членов.

Из условия (3) определения 16.4 очевидно, что исход не может быть предпочтительней самого себя (по отношению к любому множеству **T**). Далее, для любого фиксированного множества **T** соотношение предпочтения по отношению к **T** транзитивно, то есть, если

$$\| z_1 \ \dots \ z_n \| \underset{\mathbf{T}}{\succ} \| y_1 \ \dots \ y_n \|$$

и

$$\| y_1 \ \dots \ y_n \| \underset{\mathbf{T}}{\succ} \| x_1 \ \dots \ x_n \|,$$

то также

$$\| z_1 \ \dots \ z_n \| \underset{\mathbf{T}}{\succ} \| x_1 \ \dots \ x_n \|.$$

Итак, соотношение предпочтения по отношению к фиксированному множеству **T** есть так называемое «частичное упорядочение». Это не есть «полное упорядочение», так как обычно будут существовать исходы, из которых ни один не предпочтительней другого; так, например, в существенной игре трех лиц в приведенной форме ни один из исходов

$$\| \ 0{,}1 \ \ -0{,}1 \ \ 0 \|,$$
$$\| -0{,}1 \ \ 0{,}1 \ \ 0 \|$$

не предпочтительней другого по отношению к множеству $\{1,\ 2\}$.

Однако, рассматривая соотношение предпочтения вообще (то есть когда предпочтение рассматривается не по отношению к фиксированному множеству **T**), мы имеем более сложную ситуацию. В этом случае также справедливо, что никакой исход не предпочтительней самого себя, но соотношение предпочтения уже не транзитивно. Так, например, рассмотрим следующие три исхода:

$$\| \ 0{,}1 \ \ 0{,}1 \ \ -0{,}2 \|,$$
$$\| \ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ \|,$$
$$\| -0{,}1 \ \ 0{,}2 \ \ -0{,}1 \ \|$$

для существенной игры трех лиц в приведенной форме. Мы видим, что

$$\| 0{,}1 \ 0{,}1 \ -0{,}2 \| \underset{\{1,2\}}{\succ} \| 0 \ 0 \ 0 \|$$

и

$$\|0\ 0\ 0\| \underset{\{1,3\}}{\succ} \|-0{,}1\ \ 0{,}2\ \ -0{,}1\|,$$

так что

$$\|0{,}1\ \ 0{,}1\ \ -0{,}2\| \succ \|0\ 0\ 0\|$$

и

$$\|0\ 0\ 0\| \succ \|-0{,}1\ \ 0{,}2\ \ -0{,}1\|;$$

но с другой стороны, мы видим, что соотношение

$$\|0{,}1\ \ 0{,}1\ \ -0{,}2\| \succ \|-0{,}1\ \ 0{,}2\ \ -0{,}1\|$$

неверно. В самом деле, можно даже привести пример игры пяти лиц с двумя исходами, из которых каждый предпочтительней другого.

2. Определение решения

Мы хотим теперь рассмотреть вопрос о том, какие исходы могут возникнуть в действительных партиях игры. Сначала нам представляется следующий ответ: исход $\alpha = \|\alpha_1\ \ldots\ \alpha_n\|$ может быть реализован в партии игры, если не существует исхода β, который предпочтительней α, так как ни одно множество игроков не имело бы никакого повода к тому, чтобы сменить α на какой-нибудь другой исход; поэтому, если при заключении сделок был бы предложен исход α, то каждый понял бы, что он не может получить больше, чем ему обещает дать исход α; так было бы достигнуто соглашение.

Но, к сожалению, вообще не существует такого исхода. Действительно, мы можем показать (за исключением случая несущественной игры, в которой имеется лишь один исход), что всякому исходу может быть предпочтен какой-нибудь другой исход. Пусть $\|x_1\ \ldots\ x_n\|$ — какой-нибудь исход в существенной игре n лиц. Тогда существует целое число k, такое, что

$$x_k > v(\{k\}),$$

ибо иначе мы имели бы по теореме 15.14

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) < 0,$$

что противоречит условию (1) определения 16.1. Если мы положим

$$y_k = v(\{k\})$$

и

$$y_i = x_i + \frac{x_k - v(\{k\})}{n-1} \quad \text{для } i \neq k,$$

то легко убедиться, что $\| y_1 \ \ldots \ y_n \|$ есть исход, который может быть предпочтен исходу $\| x_1 \ \ldots \ x_n \|$ по отношению к множеству $\{1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n\}$.

Поскольку мы таким образом зашли, по-видимому, в тупик, вернемся назад и рассмотрим существенную игру трех лиц в приведенной форме. Здесь, по-видимому, имеются лишь три возможности – три способа образования коалиции. Если игроки 1 и 2 образуют коалицию, то можно вполне обоснованно предположить, что они возьмут совместно столько, сколько смогут (а именно, $+1$), а выигрыш игрока 3 составит, следовательно, -1. Далее, ввиду того, что игра полностью симметрична (так что ни один из игроков не находится в более выгодном положении по сравнению с другим), мы могли бы интуитивно ожидать, что они разделят свои выигрыши поровну; следовательно, если игроки 1 и 2 объединяются, мы должны получить исход $\left\| \frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \ -1 \right\|$. Подобно этому, если объединяются игроки 1 и 3, мы должны ожидать исход $\left\| \frac{1}{2} \ -1 \ \frac{1}{2} \right\|$, а если объединяются игроки 2 и 3, – исход $\left\| \ 1 \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \right\|$. Таким образом, мы получаем следующее множество трех исходов:

$$A = \left\{ \left\| \frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \ -1 \right\|, \left\| \frac{1}{2} \ -1 \ \frac{1}{2} \right\|, \left\| -1 \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \right\| \right\}.$$

Это множество характеризуется тем, что ни один из исходов не предпочтительней другого. Кроме того, всякому другому исходу можно предпочесть по меньшей мере один член множества A. Действительно, допустим, что $\| x_1 \ x_2 \ x_3 \|$ есть исход, который не содержится в A и которому нельзя предпочесть ни один элемент множества A. Поскольку исходу $\| x_1 \ x_2 \ x_3 \|$ не предпочитается исход

$\left\| \frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \ -1 \right\|$ и поскольку $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, мы заключаем, что мы должны иметь либо

$$x_1 \geqslant \frac{1}{2},$$

либо

$$x_2 \geqslant \frac{1}{2}.$$

Предположим, что справедливо первое из этих неравенств (если справедливо второе, доказательство аналогично), то есть

$$x_1 \geqslant \frac{1}{2}.$$

Далее, поскольку исходу $\| x_1 \ x_2 \ x_3 \|$ не предпочитается $\left\| -1 \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \right\|$, то мы видим, что либо

$$x_2 \geqslant \frac{1}{2},$$

либо

$$x_3 \geqslant \frac{1}{2}.$$

Допустим опять, что справедливо первое из этих неравенств. Для другого случая доказательство аналогично. Тогда мы имеем

$$x_1 \geqslant \frac{1}{2}$$

и

$$x_2 \geqslant \frac{1}{2}.$$

Поскольку

$$x_1 + x_2 = -x_3 \leqslant 1,$$

мы заключаем, что

$$x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$$

и что

$$x_3 = -1,$$

так что $\|x_1\ x_2\ x_3\| \in \mathbf{A}$, а это противоречит принятому условию.

Только что установленные свойства множества **A** настолько важны, что уместно дать наименование множествам исходов, обладающих этими свойствами.

Определение 16.6. Множество **A** исходов данной игры n лиц называется *решением* игры, если

1) ни одному элементу множества **A** нельзя отдать предпочтение по отношению к другому элементу множества **A**;

2) всякому элементу, не входящему в **A**, можно предпочесть некоторый элемент множества **A**.

Замечание 16.7. В развитой фон Нейманом теории игр n лиц понятие «решений» в только что определенном смысле занимает центральное место. Теория состоит по существу в отыскании решений и рассмотрении их свойств.

Интуитивное обоснование употребления слова «решение», конечно, сильно отличается от того, которое было дано для игр двух лиц.

В первом случае под решением подразумевалось множество вероятностей, с которыми игроку нужно выбирать свои чистые стратегии, чтобы получить максимальный ожидаемый выигрыш. Но в случае игр n лиц (для $n > 2$) решение имеет целью просто указать множество возможных способов распределения выигрышей в конце партии.

Некоторых математиков не удовлетворяла интуитивная основа этого понятия, и был поднят вопрос о том, даст ли игроку знание решения данной игры n лиц возможность играть в нее с бо́льшим математическим ожиданием выигрыша, чем если бы он совершенно не знал этой теории. Если бы можно было привести пример игры, не обладающей решением в смысле фон Неймана, то, очевидно, те, кто утверждает, что это понятие решения не представляет надлежащей основы для теории игр n лиц, были бы вполне правы в своей критике. Поэтому очень важно показать, что всякая игра n лиц имеет решение (в данном смысле), но, к сожалению, этого не удалось пока сделать; мы знаем лишь то, что некоторые частные виды игр имеют решения (например, известно, что все игры трех лиц и все игры четырех лиц имеют решения, но этого не было показано для игр пяти лиц). Мы увидим, что эта общая задача может быть приведена к соответствующей задаче для игр в приведенной форме.

3. Изоморфные игры

Определение 16.8. Две игры n лиц v и v' называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное соответствие $\longleftrightarrow$ между исходами игр v и v' такое, что если α и β — исходы для v и α' и β' — исходы для v' и $\alpha \longleftrightarrow \alpha'$ и $\beta \longleftrightarrow \beta'$, то для всякого подмножества игроков $\mathbf{T}$

$$\alpha \underset{\mathbf{T}}{\succ} \beta \qquad \text{в игре } v$$

тогда и только тогда, когда

$$\alpha' \underset{\mathbf{T}}{\succ} \beta' \qquad \text{в игре } v'.$$

Легко показать, что соотношение изоморфизма рефлексивно, симметрично и транзитивно. Кроме того, мы имеем следующую очевидную теорему.

Теорема 16.9. *Предположим, что игры v и v' изоморфны при соотношении $\longleftrightarrow$, $\mathbf{A}$ — решение игры v и A' — множество всех исходов α' такое, что $\alpha \longleftrightarrow \alpha'$ для некоторого α в $\mathbf{A}$. Тогда $\mathbf{A}'$ есть решение игры v'.*

Следующая теорема гласит, что S-эквивалентность есть достаточное условие для изоморфизма. Можно также показать (доказательство мы опускаем), что это условие необходимо.

Теорема 16.10. *Пусть v и v' — две игры, S-эквивалентные при константах k и $a_1, \ldots, a_n$. Если $\| x_1 \ldots x_n \|$ есть какой-либо исход для v, мы положим*

$$\| x_1 \ldots x_n \| \longleftrightarrow \| kx_1 + a_1 \ldots kx_n + a_n \|.$$

Тогда соотношение $\longleftrightarrow$ устанавливает изоморфизм между v и v'.

Доказательство. Сначала покажем, что если $\| x_1 \ldots x_n \|$ — какой-либо исход для v, то $\| kx_1 + a_1 \ldots kx_n + a_n \|$ — исход для v'. В самом деле, поскольку $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$, мы имеем

$$\sum_{i=1}^{n}(kx_i+a_i)=k\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}a_i=k\cdot 0+0=0.$$

Далее, для каждого i мы имеем (из условия S-эквивалентности):

$$v'(\{i\})=kv(\{i\})+a_i;$$

а поскольку (ввиду того, что $\|x_1\ \dots\ x_n\|$ есть исход для v)

$$x_i\geqslant v(\{i\}),$$

мы заключаем, что

$$kx_i+a_i\geqslant v'(\{i\}),$$

что и требовалось доказать.

Для завершения доказательства достаточно показать, что если **T** — любое подмножество игроков и если $\|x_1\ \dots\ x_n\|$ и $\|y_1\ \dots\ y_n\|$ — такие исходы (для v), что

$$\|x_1\ \dots\ x_n\|\underset{\mathbf{T}}{\succ}\|y_1\ \dots\ y_n\|\quad \text{в игре } v,$$

то

$$\|kx_1+a_1\ \dots\ kx_n+a_n\|\underset{\mathbf{T}}{\succ}\|ky_1+a_1\ \dots\ ky_n+a_n\|\quad \text{в игре } v'.$$

Но для любого члена i множества **T** мы имеем

$$x_i>y_i,$$

и, в силу положительности k,

$$kx_i>ky_i,$$

следовательно,

$$kx_i+a_i>ky_i+a_i.$$

Далее, поскольку

$$\sum_{i\in\mathbf{T}}x_i\leqslant v(\mathbf{T}),$$

мы видим на основании теоремы 15.7, что

$$\sum_{i\in\mathbf{T}}(kx_i+a_i)=k\sum_{i\in\mathbf{T}}x_i+\sum_{i\in\mathbf{T}}a_i\leqslant kv(\mathbf{T})+\sum_{i\in\mathbf{T}}a_i=v'(\mathbf{T}).$$

Теорема доказана.

Следствие 16.11. Пусть v и v' — две игры, S-эквивалентные при константах k и $a_1,\ \dots,\ a_n$, **A** — решение игры v, и $\mathbf{A}'$ — множество всех исходов, имеющих форму

$$\| kx_1 + a_1 \ \dots \ kx_n + a_n \|,$$

где $\| x_1 \dots x_n \| \in \mathbf{A}$. Тогда $\mathbf{A}'$ есть решение игры v'.

Это следует из теорем 16.10 и 16.9.

Следствие 16.12. Если всякая игра в приведенной форме имеет решение, то всякая соответствующая ей произвольная игра имеет решение.

Это следует из теоремы 15.12 и следствия 16.11.

Замечание 16.13. Итак, чтобы показать, что всякая игра имеет решение, достаточно показать, что всякая игра в приведенной форме имеет решение (причем следствие 16.11 позволит нам даже найти решения произвольных игр, если мы сможем найти решения всех игр в приведенной форме). Кроме того, как мы видели, всегда имеется лишь один исход для несущественной игры в приведенной форме, а именно $\| 0 \ 0 \ \dots \ 0 \|$, и множество, состоящее из этого одного исхода, есть тривиальное решение. Поэтому остается лишь показать, что всякая существенная игра в приведенной форме имеет решение; но эта задача оказывается довольно трудной. Следует заметить, что поскольку существенная игра трех лиц в приведенной форме имеет решение, то отсюда вытекает, что всякая игра трех лиц имеет решение.

Замечание 16.14. Можно подумать, что для того, чтобы считать определение решения удовлетворительным, необходимо, чтобы данная игра имела единственное решение. Однако фон Нейман не согласен с этим взглядом и считает, что данное решение представляет просто принятый обществом стандарт поведения, и, следовательно, может и должно быть много решений, соответствующих многим возможным устойчивым состояниям общества. Его позиция в этом отношении станет нам более ясной после того, как мы найдем способ отыскания всех решений игр трех лиц.

4. Игры трех лиц

Для нахождения решения существенной игры трех лиц в приведенной форме уместно ввести новую систему координат для евклидовой плоскости.

В качестве осей возьмем три проходящие через одну точку прямые, составляющие между собой углы 60°, а под координатами произвольной точки будем подразумевать расстояния от этой точки до указанных трех

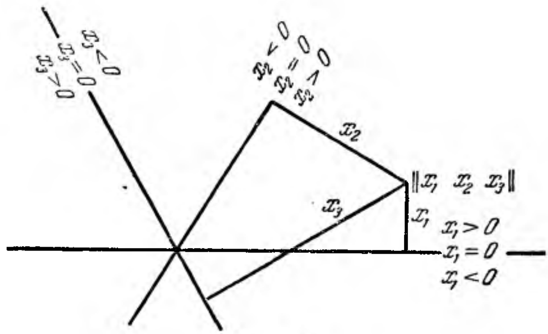

Рис. 51.

прямых, причем расстояния считаются положительными или отрицательными соответственно тому, как показано на рис. 51 (так, например, x_1 положительно для точек, лежащих выше горизонтальной прямой, и отрицательно для точек, лежащих ниже этой прямой).

Поскольку, как известно, точки евклидовой плоскости можно представить с помощью лишь двух координат (как, например, в обычной декартовой системе), мы должны ожидать, что эти три координаты не будут взаимно независимы. И действительно, можно легко показать (с помощью некоторых тригонометрических соотношений), что для всякой точки $\| x_1\ x_2\ x_3 \|$ мы имеем

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Далее, если x_1, x_2 и x_3 — три числа, сумма которых равна нулю, то в плоскости существует точка, координаты которой суть $\| x_1\ x_2\ x_3 \|$. Итак, мы имеем координатную систему, которая автоматически удовлетворяет одному из условий, определяющих исход (для игры трех лиц). Другое условие говорит, что точка, соответствующая исходу, должна лежать в заштрихованном треугольнике, как показано на рис. 52. Таким образом, эта заштрихованная область, которую мы будем называть «фундаментальным треугольником», представляет все исходы для этой игры.

Мы обратимся теперь к геометрическому представлению соотношения предпочтения. Мы видели, что один исход не может быть предпочтен другому по отношению

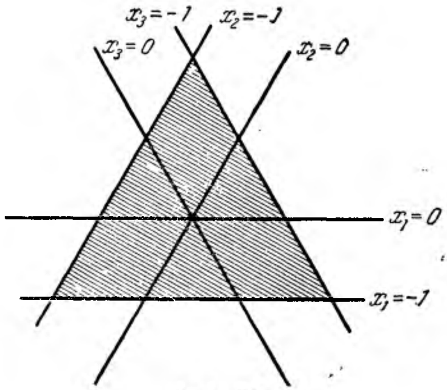

Рис. 52.

к пустому множеству, множеству, состоящему из одного элемента, или множеству всех игроков, поэтому нужно рассмотреть в случае игр трех лиц лишь предпочтение по отношению к двухэлементным множествам.

Далее мы замечаем, что если $\|x_1\ x_2\ x_3\|$ — какой-либо исход, то

$$x_1+x_2 \leqslant v(\{1, 2\}).$$

В самом деле, если бы мы имели

$$x_1+x_2 > v(\{1, 2\}),$$

то мы могли бы заключить, что

$$-x_3 > -v(\{3\}),$$

и, следовательно,

$$x_3 < v(\{3\}).$$

Но это противоречит определению исхода. Аналогично мы заключаем, что

$$x_1+x_3 \leqslant v(\{1, 3\})$$

и

$$x_2+x_3 \leqslant v(\{2, 3\}).$$

Итак, двухэлементное множество **T** в игре трех лиц всегда удовлетворяет условию (2) определения 16.4, и мы заключаем, что исход $\|x_1\ x_2\ x_3\|$ должен быть предпочтен исходу $\|y_1\ y_2\ y_3\|$ тогда и только тогда, когда либо

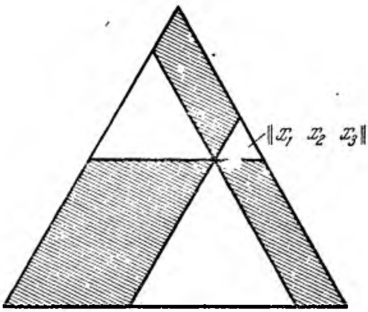

Рис. 53.

$$x_1 > y_1 \quad \text{и} \quad x_2 > y_2,$$

либо

$$x_1 > y_1 \quad \text{и} \quad x_3 > y_3,$$

либо

$$x_2 > y_2 \quad \text{и} \quad x_3 > y_3.$$

Отсюда мы заключаем, что исход $\|x_1\ x_2\ x_3\|$ предпочтительней, чем те исходы, которые лежат в заштрихованных областях рис. 53 (за исключением трех граничных прямых, проходящих через точку $\|x_1\ x_2\ x_3\|$). Мы видим, кроме того, что всякая точка в незаштрихованных областях представляет исход, более предпочтительный, чем исход $\|x_1\ x_2\ x_3\|$. Таким образом, если $\|x_1\ x_2\ x_3\|$ и $\|y_1\ y_2\ y_3\|$ — два исхода, ни один из которых не предпочтительней другого, то соответствующие точки лежат на прямой, параллельной одной из координатных осей.

Мы обратимся теперь к задаче определения всех решений этой игры. Поскольку игра существенная, мы видим из построения в замечании 16.5, что всякое решение **A** должно содержать по меньшей мере два исхода. Кроме того, всякие два элемента множества **A** должны лежать на прямой, параллельной одной из координатных осей (ибо иначе один из них следовало бы предпочесть другому, что противоречит условию (1) определения 16.6).

Мы будем различать два случая, соответственно тому, лежат ли все точки множества **A** на одной прямой или нет. Во втором случае мы приходим к решению

$$\mathbf{A}=\left\{\left\|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ -1\right\|,\quad \left\|\frac{1}{2}\ -1\ \frac{1}{2}\right\|,\quad \left\|-1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\|\right\},$$

которое рассматривалось раньше. В первом случае мы заключаем, что **A** должно содержать все точки внутри фундаментального треугольника, лежащие на данной прямой, и, кроме того, что должно выполняться одно из следующих трех условий:

1) **A** состоит из всех исходов $\|c\ \ x_2\ \ x_3\|$, где c фиксировано и удовлетворяет неравенствам $-1 \leqslant c < \frac{1}{2}$;

2) **A** состоит из всех исходов $\|x_1\ \ c\ \ x_3\|$, где c фиксировано и удовлетворяет неравенствам $-1 \leqslant c < \frac{1}{2}$;

3) **A** состоит из всех исходов $\|x_1\ \ x_2\ \ c\|$, где c фиксировано и удовлетворяет неравенствам $-1 \leqslant c < \frac{1}{2}$.

З а м е ч а н и е 16.15. Таким образом, для существенной игры трех лиц мы имеем затруднительное изобилие решений. Помимо конечного решения (состоящего из трех исходов), с которого мы начали наше исследование, мы нашли бесконечный набор бесконечных решений. Кроме того, всякая точка фундаментального треугольника лежит по меньшей мере в одном из описанных множеств, так что всякий исход принадлежит хотя бы одному решению; итак, ни один из возможных исходов не исключается.

Фон Нейман объясняет эту ситуацию тем, что, как было упомянуто раньше, различные решения представляют разные стандарты общественного поведения. В рассматриваемой игре трех лиц он называет единственное конечное решение «недискриминированным», а другие решения «дискриминированными». Так, например, решение, соответствующее указанному выше условию (3), представляет общественное соглашение, по которому игроки 1 и 2 решают исключить игрока 3 из своих переговоров, но дают ему фиксированную сумму c (чем меньше c, тем, конечно, хуже для игрока 3). Как игроки разделят между собой сумму $-c$, теория не решает; предполагается, что это будет определяться такими посторонними факторами, как сила убеждения и упорство игроков.

Если представить все это в возможно более благоприятном свете, то, по-видимому, эти выводы указывают, что когда три человека играют в существенную игру трех лиц в приведенной форме, то либо (1) двое из них должны решить исключить третьего из всех переговоров и произвольно назначить ему фиксированную сумму c, решив между собой (каким-нибудь способом, который не уточняется), как разделить сумму $-c$; либо (2) никто не исключается из переговоров, но два из них решают дать третьему -1 и разделить между собой поровну $+1$.

Трудно поверить, что эти знания дадут возможность играть увереннее и с большей выгодой, особенно если другие два игрока не знают этого правильного способа игры. Поэтому теория игр n лиц, по-видимому, еще не является вполне удовлетворительной.

Библиографические замечания

Чрезвычайно подробный и тщательный разбор решения игр n лиц дан в работе фон Неймана и Моргенштерна [92].

Другой подход к играм n лиц изложен в работе Нэша [85]. В работах Ботта [14] и Шепли [98], [99] есть другие выводы, слишком новые, чтобы их обсуждать в этой книге.

Упражнения

1. Характеристическая функция v некоторой игры пяти лиц определена следующим образом:

$$
\begin{aligned}
v(\mathrm{T}) &= \ \ 0, && \text{если T содержит 0 элементов,}\\
v(\mathrm{T}) &= -1, && \text{если T содержит 1 элемент,}\\
v(\mathrm{T}) &= \ \ 0, && \text{если T содержит 2 элемента,}\\
v(\mathrm{T}) &= \ \ 0, && \text{если T содержит 3 элемента,}\\
v(\mathrm{T}) &= +1, && \text{если T содержит 4 элемента,}\\
v(\mathrm{T}) &= \ \ 0, && \text{если T содержит 5 элементов.}
\end{aligned}
$$

Покажите, что каждый из двух исходов

$$
\alpha = \| -0{,}1 \quad -0{,}1 \quad -0{,}2 \quad -0{,}2 \quad +0{,}6 \|,
$$
$$
\beta = \| -0{,}2 \quad -0{,}2 \quad -0{,}1 \quad -0{,}1 \quad +0{,}6 \|
$$

предпочтительней другого.

2. Покажите, что если имеются два исхода для игры n лиц, каждый из которых предпочтительней другого, то $n \geqslant 5$.

3. Покажите, что в существенной игре трех лиц в приведенной форме существуют три исхода, которые не предпочтительней каких-либо других исходов. Обобщите этот вывод на случай существенной игры n лиц.

4. Найдите все решения игры трех лиц, у которой характеристическая функция v определена следующим образом:

$$\begin{array}{ll} v(\Lambda)=0, & v(\{1, 2\})=8, \\ v(\{1\})=-4, & v(\{1, 3\})=3, \\ v(\{2\})=-3, & v(\{2, 3\})=4, \\ v(\{3\})=-8, & v(\{1, 2, 3\})=0. \end{array}$$

5. Докажите теорему 16.9.

6. Покажите, что соотношение изоморфизма игр рефлексивно, симметрично и транзитивно.

7. Характеристическая функция v некоторой игры четырех лиц определена следующим образом:

$$\begin{array}{ll} v(T)=\ \ 0, & \text{если } T \text{ содержит } 0 \text{ элементов}, \\ v(T)=-1, & \text{если } T \text{ содержит } 1 \text{ элемент}, \\ v(T)=\ \ 0, & \text{если } T \text{ содержит } 2 \text{ элемента}, \\ v(T)=+1, & \text{если } T \text{ содержит } 3 \text{ элемента}, \\ v(T)=\ \ 0, & \text{если } T \text{ содержит } 4 \text{ элемента}. \end{array}$$

Покажите, что следующее множество из тринадцати исходов есть решение игры:

$$\|0\ 0\ 0\ 0\|, \quad \left\|\tfrac{1}{2}\ \ \tfrac{1}{2}\ \ 0\ \ -1\right\|, \quad \left\|\tfrac{1}{2}\ \ \tfrac{1}{2}\ \ -1\ \ 0\right\|,$$

$$\left\|\tfrac{1}{2}\ \ 0\ \ \tfrac{1}{2}\ \ -1\right\|, \quad \left\|\tfrac{1}{2}\ \ -1\ \ \tfrac{1}{2}\ \ 0\right\|, \quad \left\|\tfrac{1}{2}\ \ 0\ \ -1\ \ \tfrac{1}{2}\right\|,$$

$$\left\|\tfrac{1}{2}\ \ -1\ \ 0\ \ \tfrac{1}{2}\right\|, \quad \left\|0\ \ \tfrac{1}{2}\ \ \tfrac{1}{2}\ \ -1\right\|, \quad \left\|-1\ \ \tfrac{1}{2}\ \ \tfrac{1}{2}\ \ 0\right\|,$$

$$\left\|0\ \ \tfrac{1}{2}\ \ -1\ \ \tfrac{1}{2}\right\|, \quad \left\|-1\ \ \tfrac{1}{2}\ \ 0\ \ \tfrac{1}{2}\right\|, \quad \left\|0\ \ -1\ \ \tfrac{1}{2}\ \ \tfrac{1}{2}\right\|,$$

$$\left\|-1\ \ 0\ \ \tfrac{1}{2}\ \ \tfrac{1}{2}\right\|.$$

8. Найдите другое решение игры, определенной в упражнении 7.

ГЛАВА XVII

ИГРЫ, В КОТОРЫХ СУММА ВЫИГРЫШЕЙ МОЖЕТ БЫТЬ НЕ РАВНА НУЛЮ. ТЕОРИЯ ФОН НЕЙМАНА — МОРГЕНШТЕРНА

1. Характеристические функции

До сих пор мы рассматривали лишь игры с нулевой суммой, то есть игры, в которых сумма математических ожиданий выигрышей игроков равна нулю. Хотя салонные игры часто относятся к этому виду, игры с ненулевой суммой (как было упомянуто в главе I) очень важны с точки зрения применений в экономике. Так, например, если мы рассматриваем взаимодействие профессионального союза и промышленной фирмы как игру двух лиц, то, очевидно, эта игра не есть игра с нулевой суммой, так как некоторые действия (например, соглашение о договоре) выгодны обеим сторонам. Поэтому теория игр с ненулевой суммой занимает чрезвычайно важное место в развитии общественных наук.

Эта глава будет посвящена изучению игр, в которых условие нулевой суммы может не выполняться. Но поскольку нежелательно исключать из рассмотрения игры с нулевой суммой, мы будем применять выражение «игры общего вида» для обозначения игр как с нулевой, так и с ненулевой суммой; мы будем говорить просто «игра» вместо «игра общего вида», когда это не может привести к недоразумениям.

К сожалению, оказывается, что несмотря на большое значение игр общего вида для общественных наук, до сих пор не существует исследования таких игр, которое можно было бы считать достаточно удовлетворительным.

Не будем давать полного изложения теорий, разработанных в этой области, ограничимся лишь кратким очерком теории фон Неймана и Моргенштерна.

При рассмотрении игр общего вида очевидно, прежде всего, что нам нужно рассматривать лишь игры в прямоугольной форме. В самом деле, введя понятие стратегии, мы всегда можем привести всякую игру общего вида к игре в прямоугольной форме.

Таким образом, игра n лиц общего вида с игроками $\{1, \ldots, n\}$ будет полностью задана, если мы опишем n множеств $\{C_1, \ldots, C_n\}$, из которых игроки производят выборы, и n платежных функций $\{M_1, \ldots, M_n\}$. Партия игры состоит в следующем: игрок i $(i = 1, \ldots, n)$ выбирает элемент x_i из множества C_i и сообщает свой выбор судье (но не другим игрокам); после того как выборы сделаны, судья уплачивает игроку x_i сумму

$$M_i(x_1, \ldots, x_n).$$

Если каждое из множеств C_i конечно, мы называем самую игру *конечной*. Игра есть игра с нулевой суммой, если в тех случаях, когда $\|x_1 \ldots x_n\|$ принадлежит декартовому произведению $C_1 \times \ldots \times C_n$ множеств $C_1, \ldots, C_n$, мы имеем:

$$\sum_{i=1}^{n} M_i(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

В дальнейшем мы обычно не будем предполагать, что это равенство выполняется.

С некоторой точки зрения можно рассматривать игру n лиц общего вида как особый вид игры $(n+1)$ лица. Действительно, пусть у нас имеется игра n лиц общего вида с игроками $\{1, \ldots, n\}$, множествами для выбора $\{C_1, \ldots, C_n\}$ и платежными функциями $\{M_1, \ldots, M_n\}$; возьмем произвольное множество C_{n+1} и определим функцию M_{n+1}, положив для любого элемента $\|x_1 \ldots x_n\|$ из произведения $C_1 \times \ldots \times C_n$

$$M_{n+1}(x_1, \ldots, x_n) = -\sum_{i=1}^{n} M_i(x_1, \ldots, x_n).$$

Тогда мы можем рассматривать $\{C_1, \ldots, C_n, C_{n+1}\}$ и $\{M_1, \ldots, M_n, M_{n+1}\}$ как множества для выбора и платежные функции игры $(n+1)$ лица с игроками $\{1, \ldots, n, n+1\}$; кроме того, из способа, которым была определена M_{n+1}, мы сразу видим, что эта новая игра есть игра с нулевой суммой.

Конечно, отсюда не следует, что это построение позволяет нам одним шагом привести теорию игр общего вида к играм с нулевой суммой, ибо построенная выше игра $(n+1)$ лица имеет некоторые особые свойства. Прежде всего, значения, которые принимают платежные функции, не зависят от выбора, производимого игроком $n+1$; и, что более существенно, игрока $n+1$, поскольку он является лишь математической фикцией по отношению к первоначальной игре, нельзя представлять себе как вступающего в коалиции или производящего побочные платежи. Тем не менее это представление игры n лиц общего вида как игры $n+1$ лица с нулевой суммой приносит некоторую формальную пользу.

Пусть Γ — игра n лиц общего вида и Γ' — введенное выше ее представление как игры $(n+1)$ лица с нулевой суммой. Из выводов главы XV мы видим, что Γ' имеет характеристическую функцию, то есть имеется действительная функция v, определенная на всех подмножествах множества $N_{n+1} = \{1, \ldots, n, n+1\}$ игроков игры Γ' и такая, что $v(T)$ для всякого подмножества T множества N_{n+1} изображает сумму, которую могут выиграть игроки подмножества T, если они объединяются в коалицию. Указанная функция v тем более определена на множестве $N_n = \{1, \ldots, n\}$ игроков первоначальной игры, и $v(T)$ для любого подмножества T множества N_n также изображает сумму, которую могут выиграть игроки подмножества T, если они составят коалицию. Мы называем такую функцию v (когда ее независимые переменные ограничены подмножествами множества N_n) *характеристической функцией* первоначальной игры Γ.

Легко показать, что если Γ — игра с нулевой суммой, то характеристическая функция игры Γ, определенная выше, тождественна с характеристической функцией, определенной в главе XV. Итак, наше новое определение совместимо с прежним определением, и мы можем говорить о характеристических функциях игр вообще, независимо от того, с нулевой или ненулевой суммой наши игры.

Мы имеем далее следующую теорему.

Теорема 17.1. *Если v—характеристическая функция игры (общего вида) с игроками* $\mathbf{N}_n = \{1, \ldots, n\}$, *то*

1) $v(\Lambda) = 0$;

2) *если* $\mathbf{R}$ *и* $\mathbf{T}$ — *непересекающиеся подмножества множества* $\mathbf{N}_n$, *то*

$$f(\mathbf{R} \cup \mathbf{T}) \geqslant v(\mathbf{R}) + v(\mathbf{T}).$$

Кроме того, если v — любая действительная функция, определенная на классе всех подмножеств множества $\mathbf{N}_n$ *и удовлетворяющая условиям* (1) *и* (2), *то существует игра (общего вида)* Γ, *имеющая характеристическую функцию* v.

Доказательство. Если v — характеристическая функция игры общего вида Γ с игроками $\mathbf{N}_n$, то по определению существует игра с нулевой суммой Γ' и игроками $\mathbf{N}_{n+1}$, такая, что характеристическая функпия v' игры Γ' удовлетворяет равенству

$$v(\mathbf{T}) = v'(\mathbf{T}) \quad \text{для} \quad \mathbf{T} \subseteq \mathbf{N}_n. \tag{1}$$

По условию (1) леммы 15.2 мы видим, что

$$v'(\Lambda) = 0, \tag{2}$$

а из условия (3) теоремы 15.1, если $\mathbf{R}$ и $\mathbf{T}$ суть непересекающиеся подмножества множества $\mathbf{N}_{n+1}$ (и тем более если они непересекающиеся подмножества множества $\mathbf{N}_n$), мы имеем:

$$v'(\mathbf{R} \cup \mathbf{T}) \geqslant v'(\mathbf{R}) + v'(\mathbf{T}). \tag{3}$$

Первая часть теоремы вытекает из соотношений (2) и (3) при наличии равенства (1).

Чтобы доказать вторую часть теоремы, предположим, что v — любая действительная функция, определенная на классе всех подмножеств множества $\mathbf{N}_n$ и удовлетворяющая условиям (1) и (2). Мы определяем функцию v' на классе всех подмножеств множества $\mathbf{N}_{n+1}$ следующим образом:

$$v'(\mathbf{T}) = v(\mathbf{T}), \text{ если } (n+1) \bar{\in} \mathbf{T}, \tag{4}$$
$$v'(\mathbf{T}) = -v(\mathbf{N}_{n+1} - \mathbf{T}), \text{ если } (n+1) \in \mathbf{T}. \tag{5}$$

Из (4) и из определения характеристической функции игры общего вида мы видим, что остается показать, что v' есть характеристическая функция игры $(n+1)$ лица с нулевой суммой. В самом деле, на основании теоремы 15.3 достаточно показать, что v' удовлетворяет трем условиям теоремы 15.1. Но на основании условия (1) и соотношения (5) сразу следует, что v' удовлетворяет условию (1) теоремы 15.1; а из (5) непосредственно вытекает, что v' удовлетворяет условию (2) теоремы 15.1. Далее, если ни $\mathbf{R}$, ни $\mathbf{T}$ не содержат $(n+1)$, то условие (3) теоремы 15.1 следует прямо из условия (2) и из (4); а если и $\mathbf{R}$, и $\mathbf{T}$ содержат $(n+1)$, то условие (3) теоремы 15.1 тривиально верно. Поэтому достаточно показать, что условие (3) теоремы 15.1 выполняется, если $n+1$ принадлежит одному из множеств $\mathbf{R}$ или $\mathbf{T}$, но не принадлежит другому. Не нарушая общности, мы можем предположить, что

$$(n+1) \in \mathbf{R}, \tag{6}$$

$$(n+1) \notin \mathbf{T}. \tag{7}$$

Множества $\mathbf{T}$ и $\mathbf{N}_{n+1}-(\mathbf{R}\cup\mathbf{T})$ суть непересекающиеся подмножества множества $\mathbf{N}_n$; следовательно, на основании условия (2)

$$v(\mathbf{T}\cup[\mathbf{N}_{n+1}-(\mathbf{R}\cup\mathbf{T})]) \geqslant v(\mathbf{T})+v[\mathbf{N}_{n+1}-(\mathbf{R}\cup\mathbf{T})]. \tag{8}$$

Поскольку $\mathbf{R}$ и $\mathbf{T}$ не пересекаются, $\mathbf{T}\subseteq\mathbf{N}_{n+1}-\mathbf{R}$ и, следовательно,

$$\mathbf{T}\cup[\mathbf{N}_{n+1}-(\mathbf{R}\cup\mathbf{T})]=\mathbf{T}\cup[\mathbf{N}_{n+1}-\mathbf{R}]=\mathbf{N}_{n+1}-\mathbf{R}. \tag{9}$$

Из (8) и (9) имеем:

$$v(\mathbf{N}_{n+1}-\mathbf{R}) \geqslant v(\mathbf{T})+v[\mathbf{N}_{n+1}-(\mathbf{R}\cup\mathbf{T})],$$

и, следовательно, на основании (5) и (4)

$$-v'(\mathbf{R}) \geqslant v'(\mathbf{T})-v'(\mathbf{R}\cup\mathbf{T}). \tag{10}$$

Из (10) путем перестановки членов мы заключаем, что

$$v'(\mathbf{R}\cup\mathbf{T}) \geqslant v'(\mathbf{R})+v'(\mathbf{T}),$$

что и требовалось доказать.

Теперь можно перенести понятие S-эквивалентности и интуитивные доводы, служащие для его обоснования, с игр с нулевой суммой на игры общего вида.

Определение 17.2. Две характеристические функции n лиц (для игр n лиц общего вида) v и v' называются *S-эквивалентными*, если существует положительная константа k и n чисел $a_1, \ldots, a_n$ таких, что для всякого подмножества $\mathbf{T}$ множества $\mathbf{N}_n$

$$v(\mathbf{T}) = kv'(\mathbf{T}) + \sum_{i \in \mathbf{T}} a_i.$$

Замечание 17.3. Поскольку мы уже не ограничиваемся играми с нулевой суммой, нам нет необходимости при определении S-эквивалентности налагать ограничение, что

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 0.$$

Поэтому нужно заметить, что определение 17.2 несколько расширяет класс игр, S-эквивалентных данной игре с нулевой суммой, по сравнению с определением 15.5 (и замечанием, следующим за теоремой 15.7).

В самом деле, игры с нулевой суммой по новому определению могут быть S-эквивалентны играм *с постоянной суммой*, то есть играм, у которых характеристические функции удовлетворяют условию

$$v(\mathbf{T}) + v(\mathbf{N}_n - \mathbf{T}) = v(\mathbf{N}_n)$$

для всякого подмножества $\mathbf{T}$ множества $\mathbf{N}$. Во избежание связанных с этим недоразумений мы будем впредь всегда применять термин «S-эквивалентность» в смысле определения 17.2.

Следующее понятие приведенных форм игр общего вида, очевидно, совпадает с понятием приведенных форм игр с нулевой суммой, определенным в 15.8.

Определение 17.4. Игра n лиц общего вида с характеристической функцией v называется игрой *в приведенной форме*, если

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = \ldots = v(\{n\}) = \gamma,$$

где либо $\gamma=0$, либо $\gamma=-1$, и, кроме того,

$$v(\mathrm{N}_n)=0.$$

Мы называем γ *модулем функции* v.

Доказательство следующей теоремы аналогично доказательству теоремы 15.12.

Теорема 17.5. *Если v—характеристическая функция какой-либо игры общего вида, то v S-эквивалентна одной и только одной характеристической функции в приведенной форме.*

Как и в случае игр с нулевой суммой, мы называем игру общего вида *существенной*, если она S-эквивалентна игре в приведенной форме с модулем —1; в противном случае она называется *несущественной*.

2. Исходы и решения

Как и в случае игр с нулевой суммой, введем понятие упорядоченной системы $\|x_1 \ldots x_n\|$ действительных чисел для обозначения распределения денег между игроками в конце партии. Как и раньше, нам не нужно рассматривать распределения, при которых кто-нибудь из игроков получает меньше, чем он мог получить без посторонней помощи; поэтому мы налагаем условие

$$x_i \geqslant v(\{i\}) \qquad (i=1, \ldots, n).$$

Далее, поскольку мы допускаем соглашения и подобные платежи между игроками, представляется уместным рассматривать лишь такие распределения $\|x_1 \ldots x_n\|$, что

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = v(\{1, \ldots, n\}).$$

В самом деле, игроки, очевидно, могут совместно позаботиться о том, чтобы получить $v(\{1, \ldots, n\})$, составив коалицию, так сказать, «против природы». А если было бы предположено такое распределение, что

$$\sum_{i=1}^{n} x_i < v(\{1, \ldots, n\}),$$

то можно было бы указать способ игры и способ распределения платежей в конце партии, который даст игроку i ($i=1, \ldots, n$) больше, чем x_i, а именно, такой способ игры, что каждый игрок получит

$$x_i+\frac{1}{n}\left[v(\{1, \ldots, n\})-\sum_{i=1}^{n} x_i\right]>x_i.$$

Поэтому мы определяем исход для игры общего вида следующим образом:

Определение 17.6. *Исходом* игры общего вида, имеющей характеристическую функцию v, мы называем вектор

$$\| x_1 \ldots x_n \|$$

такой, что

1) $$\sum_{i=1}^{n} x_i = v(\{1, \ldots, n\})$$

и

2) $$x_i \geqslant v(\{i\}) \quad \text{для } i=1, \ldots, n.$$

Замечание 17.7. В том случае, если игра общего вида оказывается игрой с нулевой суммой, мы получаем такое же понятие исхода из определения 17.6, как и из определения 16.1. В самом деле, условие (2) определения 17.6 тождественно с условием (2) определения 16.1; а если игра является игрой с нулевой суммой, мы имеем:

$$v(\{1, \ldots, n\})=0,$$

так что условие (1) определения 17.6 такое же, как условие (1) определения 16.1.

Мы можем теперь ввести понятия предпочтения и решения точно так же, как и в случае игр с нулевой суммой (см. определения 16.4 и 16.6). Замечания относительно этих понятий, сделанные в главе 16, относятся естественно и к играм общего вида. В частности, остается справедливым, что S-эквивалентные игры изоморфны по отношению к предпочтению; таким образом, нам и здесь нужно рассматривать лишь приведенные формы игр.

Чтобы пояснить понятие решения, мы найдем все решения игр двух лиц в приведенной форме. Если

v — характеристическая функция такой игры, то

$$v(\mathbf{T}) = 0, \quad \text{когда } \mathbf{T} \text{ содержит 0 элементов,}$$
$$v(\mathbf{T}) = \gamma, \quad \text{когда } \mathbf{T} \text{ содержит 1 элемент,}$$
$$v(\mathbf{T}) = 0, \quad \text{когда } \mathbf{T} \text{ содержит 2 элемента.}$$

Таким образом, характеристическая функция вполне определена, если дано γ, и нам нужно различать лишь два случая, когда $\gamma = 0$ или $\gamma = -1$.

Если $\gamma = 0$, то v равна тождественно нулю, и игра является несущественной. В этом случае имеется лишь один исход, а именно $\|0 \ 0\|$, а множество, состоящее из него, есть решение (очевидно, единственное возможное).

Если $\gamma = -1$, то имеется бесконечное число решений, а именно, множество всех пар $\|x_1 \ x_2\|$, таких, что

$$-1 \leqslant x_1, \quad -1 \leqslant x_2$$

и

$$x_1 + x_2 = 0.$$

Итак, исход есть любая упорядоченная пара вида $\|x \ -x\|$, где $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Но мы замечаем, что ни один исход не может быть предпочтен другому; это можно видеть из рассмотрения различных возможных множеств игроков. Так, например, если бы мы имели

$$\|x \ -x\| \underset{\{1\}}{>} \|y \ -y\|,$$

то мы получили бы

$$y < x \leqslant v(\{1\}),$$

и, следовательно,

$$y < v(\{1\}),$$

что противоречит условию, что $\|y \ -y\|$ есть исход. Итак, множество всех исходов также есть решение и, очевидно, единственное.

Отсюда следует, что решение существенной игры двух лиц (общего вида) в неприведенной форме есть множество всех пар $\|x_1 \ x_2\|$, где x_1 и x_2 удовлетворяют условиям

$$v(\{1\}) \leqslant x_1,$$
$$v(\{2\}) \leqslant x_2,$$
$$x_1 + x_2 = v(\{1, 2\}).$$

Истолкование этого результата для игры двух лиц с ненулевой суммой следующее: игроки должны найти способ игры, который обеспечит им максимальную сумму выигрышей, а затем разделить между собой эту сумму таким образом, чтобы каждый получил по меньшей мере то, что он мог бы получить при «самостоятельной» игре, когда другой игрок стремился бы причинить ему возможно больше вреда. Помимо этого последнего условия, теория не указывает способа, как нужно разделить выигрыши.

Пример 17.8. Рассмотрим игру двух лиц, в которой у каждого игрока имеются две стратегии и в которой платежные матрицы следующие:

$$\begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{Vmatrix}$$

(так, например, если игрок 1 выбирает свою первую стратегию, а игрок 2 — свою вторую стратегию, то первый игрок получает -2, а второй игрок получает 3).

Но $v(\{1\})$ есть цена игры с нулевой суммой, имеющей матрицу

$$\begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Итак,

$$v(\{1\}) = -\frac{1}{5}.$$

Игрок 1 может быть уверен, что, применяя смешанную стратегию $\begin{Vmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{Vmatrix}$, он получит по меньшей мере $-\frac{1}{5}$. Подобно этому $v(\{2\})$ есть цена игры с нулевой суммой, имеющей матрицу

$$\begin{Vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Итак,

$$v(\{2\}) = \frac{13}{7}.$$

Игрок 2, применяя смешанную стратегию $\begin{Vmatrix} \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{Vmatrix}$, может с гарантией получить по меньшей мере $\frac{13}{7}$. Для отыскания $v(\{1, 2\})$ мы просто берем максимальное значение сумм соответствующих элементов двух первоначально данных матриц:

$$v(\{1, 2\}) = 3.$$

Наконец,

$$v(\Lambda) = 0.$$

Следовательно, решение этой игры есть множество всех пар $\| x_1 \; x_2 \|$ таких, что

$$x_1 + x_2 = 3,$$

$$x_1 \geqslant -\frac{1}{5},$$

$$x_2 \geqslant \frac{13}{7}.$$

Таким образом, игроки могут рассчитывать на то, что они получат

$$x_1 = -\frac{1}{5} + \frac{47}{35}\theta \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{13}{7} + \frac{47}{35}(1 - \theta),$$

где θ — число, лежащее между 0 и 1, которое определяется переговорами между игроками.

Можно также найти все решения игры трех лиц с ненулевой суммой. Это исследование не слишком трудное, но мы его опустим. Вместо этого обратимся к критике одного из основных допущений теории фон Неймана.

Следует заметить, что вся теория фон Неймана для игр общего вида основана на понятии характеристической функции. Это значит, что если две игры имеют одинаковые характеристические функции, то они имеют одинаковые решения. Но кажется спорным, является ли это интуитивно достаточным. Связанные с этим интуитивные затруднения можно пояснить на следующем примере.

Пример 17.9. Рассмотрим игру двух лиц в прямоугольной форме, в которой у первого игрока имеется лишь одна (чистая) стратегия, а у второго — две стратегии. Платежные матрицы игры таковы:

$$\| 0 \;\; 10 \|, \quad \| -1000 \;\; 0 \|.$$

Таким образом, если второй игрок применяет стратегию 1, то первый игрок получает 0, а второй игрок —1000; если он применяет стратегию 2, то первый игрок получает 10, а второй игрок получает 0 (это, конечно, игра с ненулевой суммой).

Интуитивно представляется обоснованным предположение, что игрок 1 находится в лучшем положении, чем игрок 2. В самом деле, если игрок 2 хочет поступать так, чтобы добиться максимальной величины своего выигрыша, то он выберет стратегию 2 и получит 0 вместо — 1000, и в этом случае игрок 1 получит 10. Можно, конечно, подумать, что игрок 2 сможет получить от игрока 1 некоторую долю от этой суммы 10, угрожая применить стратегию 1, которая приведет к уменьшению выигрыша игрока 1 с 10 до 0; но ввиду того, что игрок 2 сам потеряет слишком много, если он выполнит свою угрозу (действительно, он потеряет гораздо больше, чем игрок 1), маловероятно, чтобы игрок 1 принял угрозу всерьез. Угрожая таким образом, игрок 2 уподобится рабочему, который сказал бы своему хозяину: «Поскольку вы получаете прибыль от моего труда, я требую, чтобы вы разделили эту прибыль со мной; если вы откажетесь, я изувечу себя так, что впредь я буду не в состоянии работать, и вы не получите от меня никакой прибыли», рабочий вряд ли мог бы ожидать чего-нибудь другого, кроме отказа такому требованию.

Однако для нашей цели даже не обязательно говорить, что игрок 1 сможет сохранить всю сумму 10; наше положение будет доказано, если мы признаем, что игроки 1 и 2 находятся не в одинаковых условиях, так что игрок 1 сможет сохранить больше 5. Возможно, правильная постановка этой интуитивной задачи — это спросить себя, будет ли нам безразличным при игре в эту игру взять на себя роль игрока 1 или роль игрока 2.

Большинство предпочтут быть игроком 1, и даже большинство заплатили бы деньги, чтобы быть игроком 1, а не игроком 2.

Если признается, что в этой игре игрок 1 в лучшем положении, чем игрок 2, то ясно, что всякое «решение» игры должно быть определено так, чтобы отразить эту асимметрию. Но для решения в смысле фон Неймана это не выполняется, ибо, как мы видели, решение определяется полностью через характеристическую функцию, а характеристическая функция этой игры симметрична относительно первого и второго игрока; действительно, легко проверить, что характеристическая функция v такова:

$$v(\Lambda) = 0,$$
$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = 0,$$
$$v(\{1, 2\}) = 10.$$

Таким образом, решение этой игры в смысле фон Неймана есть множество всех упорядоченных пар $\| x \ y \|$, где x и y — неотрицательные числа, сумма которых равна 10.

Библиографическое замечание

Материал этой главы взят в основном из работы фон Неймана и Моргенштерна [92], главы 5 и 6.

Упражнения

1. Рассмотрим следующую игру: в одно из гнезд барабана револьвера кладется пуля (другие гнезда оставляются пустыми); каждый из игроков крутит барабан, приставляет револьвер к своей голове и нажимает собачку. Игроки играют по очереди, пока все не пройдут по разу или пока один из них не застрелится. Платеж каждому игроку — либо смерть, либо чувство облегчения, появляющееся при избавлении от смерти.

Является ли эта игра игрой с нулевой суммой?

2. Рассмотрим игру двух лиц, в которой у каждого игрока имеются две стратегии и платежные матрицы для обоих игроков таковы:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 10 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Найдите характеристическую функцию этой игры.

3. Найдите приведенную форму следующей характеристической функции для игры трех лиц:

$$\begin{aligned} &v(\Lambda) = 0, && v(\{1, 2\}) = 3, \\ &v(\{1\}) = 0, && v(\{1, 3\}) = 6, \\ &v(\{2\}) = 1, && v(\{2, 3\}) = 7, \\ &v(\{3\}) = 4, && v(\{1, 2, 3\}) = 8. \end{aligned}$$

4. Найдите решение (в смысле фон Неймана) для игры трех лиц, имеющей следующую характеристическую функцию:

$$v(\Lambda)=0,$$

$$v(\{1\})=v(\{2\})=v(\{3\})=-1,$$

$$v(\{1,\ 2\})=v(\{1,\ 3\})=v(\{2,\ 3\})=v(\{1,\ 2,\ 3\})=0.$$

5. Докажите теорему 17.5.
6. Докажите теорему 15.9 для игр общего вида.
7. Докажите теорему 15.15 для игр общего вида.

ГЛАВА XVIII

НЕКОТОРЫЕ НЕРЕШЕННЫЕ ЗАДАЧИ

1. Два вида задач

Теперь учащийся уже без сомнения понял, что теория игр еще далека от завершения. Конечно, в любом разделе математики, как бы он ни был стар, по-прежнему встречаются трудные задачи; но в установившихся дисциплинах (таких, как, например, теория чисел) нерешенные задачи имеют четкий и определенный характер; все, по-видимому, точно знают, что означает, скажем, Великая теорема Ферма; дело лишь в том, чтобы найти доказательство или опровержение этого ясно сформулированного предложения. В теории игр мы также встречаемся с трудными задачами, так сказать, «принципиального» характера. Под этим подразумеваются задачи, подобные следующей: какие формальные обобщения математической теории могут быть полезны в практических приложениях и какие изменения нужно произвести в существующей теории, чтобы ее можно было применить к данным практическим ситуациям. В наиболее общем смысле эти задачи сводятся к вопросу о том, какой формальный математический аппарат лучше всего пригоден в качестве орудия исследования ситуаций, встречающихся при столкновениях между разумными деятелями; таким образом, принципиальные задачи, в противоположность, так сказать, «техническим», связаны с вопросом о том, какой наукой должна быть теория игр, а не о том, какие теоремы можно установить в разделах теории (об этом уже достигнуто принципиальное соглашение).

Конечно, это различие между техническими и принципиальными задачами не очень резкое: многие задачи являются отчасти техническими и отчасти принципиальными. В этой главе мы рассмотрим три из наиболее важных нерешенных задач теории игр; первая из них отчасти техническая, а остальные две в основном принцпиальные.

2. Игры, проводимые на пространстве функций

Разбирая в главе VII бесконечные игры, мы очень быстро перешли к частному случаю непрерывной игры, в которой каждый игрок выбирает число из замкнутого единичного интервала, а все исследование в следующих главах ограничивалось этим случаем и его тривиальными модификациями.

Но поскольку непрерывные (бесконечные) игры аналогичны прямоугольным (конечным) играм, можно подумать, что введением стратегий мы могли бы привести всякую бесконечную игру к непрерывной, как и всякую конечную игру введением стратегий можно привести к прямоугольной игре. Однако, к сожалению, это не всегда так, ибо вполне возможно, что, например, число стратегий окажется так велико, что их даже нельзя поставить во взаимно однозначное соответствие с действительными числами замкнутого единичного интервала.

Так, например, предположим, что игра имеет четыре хода:

Ход I. P_1 выбирает действительное число x_1.

Ход II. P_2, зная значение x_1, выбирает действительное число y_1.

Ход III. P_1, зная y_1, но забыв x_1, выбирает действительное число x_2.

Ход IV. P_2, зная y_1 и x_2, но забыв x_1, выбирает действительное число y_2.

Платеж при этом есть некоторая функция четырех переменных x_1, x_2, y_1 и y_2. Чистая стратегия игрока P_1 есть упорядоченная пара $\| a\ f \|$, где a — действительное число, а f — функция одного действительного переменного y_1; чистая стратегия игрока P_2 есть упорядоченная пара $\| g\ h \|$, где g — функция одного действительного переменного x_1, а h — функция двух действительных переменных y_1 и x_2. Поскольку функций действительного переменного больше, чем действительных чисел (в самом деле, если c — число действительных чисел, то имеется 2^c функций действительного переменного *)), очевидно, ни стратегии игрока P_1, ни стратегии игрока P_2 нельзя поставить во взаимно однозначное соответствие с точками замкнутого единичного интервала, и, следовательно, эту игру нельзя свести к непрерывной.

В действительности легко описать игры, в которых каждый игрок имеет лишь один ход и ни один из игроков не знает о выборе другого, но которые не эквивалентны непрерывным играм. Чтобы облегчить описание простой игры подобного рода, обозначим через $\mathbf{F}$ множество всех функций f, определенных на замкнутом единичном интервале, таких, что $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ (для $0 \leqslant x \leqslant 1$) и интеграл $\int\limits_0^1 f(x)dx$ существует. Игра состоит теперь в следующем: P_1 выбирает элемент f множества $\mathbf{F}$, а P_2, не зная, какой выбор сделал P_1, выбирает элемент g множества $\mathbf{F}$; затем игрок P_1 платит игроку P_2 сумму

$$M(f, g) = \int\limits_0^1 [f(x) - g(x)]^2 \, dx.$$

Поскольку, как известно, $\mathbf{F}$ содержит больше элементов, чем имеется действительных чисел, мы опять видим, что эту игру нельзя привести к непрерывной, изменив обозначения элементов множества $\mathbf{F}$.

Очевидно, платежная функция игры только что описанного вида не обязательно имеет седловую точку, и поэтому естественно предположить, что игроки применят смешанные стратегии. В данном случае смешанная стратегия есть функция распределения на множестве $\mathbf{F}$ или, как иногда говорят, функция распределения *на пространстве функций*. Но теперь возникает вопрос: какому классу $\mathbf{A}$ подмножеств множества $\mathbf{F}$ приписывать

---

*) Эта условная запись означает, что мощность множества действительных функций существенно превышает мощность континуума (c). (*Прим. ред.*)

функции распределения? Легко показать, что мы не можем получить интуитивно приемлемых выводов, если предположим, что **A** есть класс всех подмножеств множества **F**; а, с другой стороны, раз мы начали исключать подмножества из **F**, неясно, где нужно остановиться. Очевидно, этот вопрос связан с вопросом о том, как мы определим математическое ожидание для P_1, если P_1 применяет функцию распределения F на **F**, а P_2 применяет функцию распределения G на **F**.

Для сравнения можно заметить, что наше определение функции распределения на единичном интервале (в главе VIII) сводится к предположению, что вероятность определена на всяком множестве, измеримом по Лебегу. Но не очевидно, имеется ли столь же естественный класс подмножеств пространства функций.

Эта задача в том виде, как она описана, является почти полностью принципиальной. Задача отыскания интуитивно удовлетворительного способа введения функций распределения на пространстве функций оказывается чрезвычайно трудной, и вполне возможно, что ее решение не будет найдено. В этом случае еще останется техническая задача выбора некоторого большого подкласса игр на пространстве функций, которые можно было бы решать, не прибегая к понятию функции распределения; приемлемым кандидатом, допускающим такую трактовку, представляется класс игр на пространстве функций, состоящий из игр, выпуклых для игрока, стремящегося к минимальному платежу (определение выпуклых функций, данное в главе XII, можно легко обобщить на функции, у которых аргументы суть функции).

3. Псевдоигры

Другой важный вопрос — это задача отыскания рационального способа исследования конфликтных ситуаций, формально не являющихся играми с нулевой суммой, но весьма похожих на них. Чтобы дать им название, условимся называть такие ситуации *псевдоиграми*.

Один из случаев, когда конфликтная ситуация не является игрой, — это случай запрещения игрокам применять смешанные стратегии. Ситуации такого рода особенно часто могут возникнуть в связи с военными действиями. Так, предположим, что два члена боевой группы вынуждены разлучиться и не могут общаться между собой или со своей базой ввиду опасности раскрытия своих местоположений противнику. При этом, если даже для них может быть желательно применять совместно смешанную стратегию, они могут быть не в состоянии это сделать. (Можно подумать, что они могли бы избегнуть затруднения просто тем, что каждый из них возьмет с собой соответствующий случайный перечень стратегий, которые нужно применять последовательно; но даже этот способ может быть неосуществим из-за того, что захват такого перечня противником причинил бы слишком большой ущерб.) В таком случае может оказаться, что «игра» не будет иметь «цены», и обычную теорию игр двух лиц с нулевой суммой уже нельзя будет применять. Очевидно, игроки вынуждены ограничить свои стратегии поведения, и может оказаться, что игра не будет иметь оптимальных стратегий поведения.

Сходные обстоятельства могут привести к псевдоиграм, нарушающим допущение 5, г) главы VI, то есть к таким играм, партии которых пересекают одно и то же информационное множество более одного раза.

Задача исследования таких псевдоигр оказывается тесно связанной с задачей определения оптимальных способов проведения игры в нормализованной форме, в которой значения элементов платежной матрицы точно неизвестны, но должны лишь удовлетворять некоторым неравенствам.

В связи с этим мы упомянем здесь ситуации, которые формально не являются играми (ввиду некоторых особенностей платежных функций). Мы всегда предполагали, что значения платежных функций можно переносить от одного игрока к другому и они имеют для всех одинаковую полезность. Но на практике, очевидно, может оказаться, что значения платежной функции представляют, например, денежные суммы, и финансовые положения игроков столь различны, что для одних доллар имеет гораздо большее значение, чем для других; может даже оказаться, что значения платежной функции представляют такие вещи, как удовлетворение, происходящее от выигрыша шахматной партии, или смерть при проигрыше в игре, описанной в упражнении 1 к главе XVII,— вещи, совсем не переносимые. Поэтому нам остается трудная задача — как определить решение игры, в которой наложены ограничения на возможность переноса ценностей.

4. Игры с ненулевой суммой и игры n лиц

В настоящее время в теории игр наиболее остро ощущается необходимость в более удовлетворительной теории игр с ненулевой суммой и игр n лиц (для $n>2$).

Теория фон Неймана в лучшем случае рассматривает лишь довольно частный вид таких игр: игры, в которых допускаются соглашения, переговоры и побочные платежи между игроками. Конечно, в действительности многие ситуации, к которым мы хотели бы применять теорию игр, не относятся к этому виду. Так, если мы хотим рассматривать поведение трех акционерных обществ как игру, мы сталкиваемся с тем, что закон, направленный против трестов, запрещает им составлять коалицию. (Иногда говорят, что такую ситуацию по существу следует рассматривать как игру четырех лиц, в которой правительство представляет четвертого игрока; но подход к этой более широкой ситуации как к игре привел бы, между прочим, к странному допущению, что правительство может вступать в коалицию с частной фирмой.) Кроме того, коалиции и побочные платежи запрещены и в большинстве салонных игр.

В связи с этим следует заметить, что Нэш различает *некооперативные и кооперативные игры.* В первых играх между игроками не допускается никакой связи, в частности им не разрешено составлять соглашения о побочных платежах; в кооперативной игре связь допустима.

Нэш считает некооперативные игры основными и пытается свести кооперативные игры к некооперативным следующим образом: переговоры кооперативной игры включаются как формальные ходы в некооперативную игру (эти ходы состоят, например, из таких действий, как предложение побочного платежа одним игроком другому). В свою очередь он исследует некооперативные игры, вводя понятие точки равновесия (это понятие было объяснено в главе VI настоящей книги).

Нужно заметить, что теория Нэша хотя и представляет значительный шаг вперед, имеет некоторые серьезные недостатки, и, конечно, ее нельзя рассматривать как окончательное решение принципиальных задач этой области.

Во-первых, что касается некооперативной игры, то знание положения точек равновесия может не принести особенной пользы. Так, рассмотрим игру двух лиц (с ненулевой суммой), имеющую следующие матрицы:

$$\begin{Vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -2 \end{Vmatrix}, \qquad \begin{Vmatrix} -20 & -30 \\ 10 & 40 \end{Vmatrix}.$$

Поскольку $4 > 1$ и $-20 > -30$, мы видим, что имеется точка равновесия в верхнем левом углу (так что, если P_1 применяет первую строку, то для P_2 самое лучшее применять первый столбец; и обратно, если P_2 применяет первый столбец, то для P_1 самое лучшее применять первую строку). Подобно этому, поскольку $-2 > -3$ и $40 > 10$, имеется точка равновесия также в нижнем правом углу. В данном случае P_1 предпочтет, конечно, точку равновесия в верхнем левом углу, а P_2 предпочтет точку равновесия в нижнем правом углу. Теория Нэша, по-видимому, не проливает света на вопрос о том, как вести себя в игре, имеющей такую пару платежных матриц.

Во-вторых, если бы даже теория некооперативных игр и была в удовлетворительном состоянии, возникают трудности при приведении кооперативных игр к некооперативным. На практике чрезвычайно трудно ввести в кооперативные игры ходы, соответствующие переговорам, так, чтобы отразить все бесконечное разнообразие, допустимое в кооперативной игре, в то же время не давая одному из игроков искусственного преимущества (скажем, вследствие того, что он имеет возможность сделать предложение первым). Поэтому, несмотря на все остроумие, проявленное при различных подходах к задаче игр n лиц и игр с ненулевой суммой, мы, по-видимому, еще не пришли к удовлетворительному понятию решения такой игры. Это ставит перед математиками настоятельную и очень важную задачу, вызванную необходимостью применения теории игр к очень широкому классу практических ситуаций.

Библиографические замечания

Первая и вторая задачи этой главы были поставлены в работе Хельмера [49]. Относительно других нерешенных задач в теории игр смотрите работу Куна и Таккера [65].

Более новые работы в области игр n лиц и игр с ненулевой суммой: Ботт [14] и Шепли [99] (последняя статья дает решение задачи (10) Куна и Таккера [65]). Смотрите также работы Нэша [84] и Райффа [95].

ЛИТЕРАТУРА

1. Anderson O., Theorie der Glücksspiele und ökonomisches Verhalten, Schweiz. Z. Volkswirtschaft und Statistik 85 (1949), 46—53.
2. Arrow K. J., Barankin E. W., Blackwell D., Admissible Points of Convex Sets, Contribs. to the Theory of Games-II, ed. H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Ann. Math. Study 28, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 87—91.
3. Arrow K. J., Blackwell D., Girshick M. A., Bayes and Minimax Solutions of Sequential Decision Problems, Econometrica 17 (1949), 213—244.
4. Bellman R., Games of Bluffing, Rend. Circolo mat. Palermo.
5. Bellman R., Blackwell D., Some Two-person Games Involving Bluffing, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 35 (1949), 600—605.
6. Bitter R., The Mathematical Formulation of Strategic Problems, Proc. of the Berkeley Symposium, ed. J. Neyman, Univ. Calif. Press, Berkeley (1949), 223—228.
7. Blackwell D., On Randomization in Statistical Games with k Terminal Actions, Contribs. to the Theory of Games-II, ed. H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Ann. Math. Study 28, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1953), 183—187.
8. Bôcher Maxime, Introduction to Higher Algebra, The Macmillan Company, New York, 1907.
9. Bohnenblust H. F., Karlin S., On a Theorem of Ville, Contribs. to the Theory of Games, ed. H. W. Kuhn, A. W. Tucker, Ann. Math. Study 24, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1950), 155—160.
10. Bohnenblust H. F., Karlin S., Shapley L. S., Solutions of Discrete Two-person Games, Contribs. to the Theory of Games, ed. H. W. Kuhn, A. W. Tucker, Ann. Math. Study 24, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1950), 51—72.
11. Bohnenblust H. F., Karlin S., Shapley L. S., Games with Continuous, Convex Pay-off, Contribs. to the Theory of Games, ed. H. W. Kuhn, A. W. Tucker, Ann. Math. Study 24, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1950).
12. Bonnesen T., Fenchel W., Theorie der konvexen Körper, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3, № 1, Verlag Julius Springer, Berlin, 1934.

13. B o r e l E., Applications aux jeux de hasard, Traité du calcul dès probabilités et de ses applications. 4, II, Gauthier-Villars & Cie. Paris, 1938.
14. B o t t R., A Certain Simple Class of Symmetric n-person Games, Contribs. to the Theory of Games-II, Ann. Math. Study 28, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J.
15. B r a y H. E., Elementary Properties of the Stieltjes Integral, Ann. Math. 20 (1919), 177—186.
16. B r e m s H., Some Notes of the Structure of the Duopoly Problem, Nord. tidskr. för Tekn. økonomi 1—4 (1948), 41—74.
17. B r o w n G. W., Iterative Solutions of Games by Fictitious Play, Activity Analysis of Production and Allocation, Cowles Commission for Research in Economics, Monograph 13, John Wiley & Sons, Inc., New York (1951), 374—376.
18. B r o w n G. W., K o o p m a n s T. C., Computational Suggestions for Maximizing a Linear Function Subject to Linear Inequalities, Activity Analysis of Production and Allocation, Cowles Commission for Research in Economics, Monograph 13, John Wiley & Sons, Inc., New York (1951), 377—380.
19. B r o w n G. W., N e u m a n n J. v o n, Solutions of Games by Differential Equations, Contribs. to the Theory of Games, ed. H. W. Kuhn, A. W. Tucker, Ann. Math. Study 24, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1950), 73—79.
20. C h a m p e r n o w n e D. G., A Note on J. von Neumann's Article, Rev. Econ. Studies 13, 1 (1945—1946), 10—18.
21. C r a m é r H a r a l d, Mathematical Methods of Statistics, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1946).
22. D a l k e y N., Equivalence of Information Patterns and Essentially Determinate Games, Contribs. to the Theory of Games-II, ed. H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Ann. Math. Study 28, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J.
23. D a n t z i g G. B., Application of the Simplex Method to a Transportation Problem, Activity Analysis of Production and Allocation, Cowles Commission for Research in Economics, Monograph 13, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1951.
24. D a n t z i g G. B., A Proof of the Equivalence of the Programming Problem and the Game Problem, Activity Analysis of Production and Allocation, Cowles Commission for Research in Economics, Monograph 13, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1951, 330—335.
25. D a n t z i g G. B., Maximization of a Linear Function of Variables Subject to Linear Inequalities, Activity Analysis of Production and Allocation, Cowles Commission for Research in Economics, Monograph 13, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1951, 339—347.
26. D a n t z i g G. B., Programming in a Linear Structure, Econometrica 17 (1949), 73—74.
27. D a n t z i g G. B., W o o d M. K., Programming of Interdependent Activities: I. General Discussion, Econometrica 17 (1949), 193—199.

28. Davies D. W., A Theory of Chess and Noughts-and-Crosses, Sci. News 16 (1950), 40—64.
29. Demaria G., Su una Nuova Logica Economica, Giorn. degli Economisti e Ann. Econ. 6 (n. s.) (1947), 661—671.
30. Dines L. L., On a Theorem of von Neumann, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 33 (1947), 329—331.
31. Dorfman R., Application of the Simplex Method to a Game Theory Problem, Activity Analysis of Production and Allocation, Cowles Commission for Research in Economics, Monograph 13, John Wiley & Sons, Inc., New York (1951), 348—358.
32. Dresher M., Methods of Solution in Game Theory, Econometrica 18 (1950), 179—181.
33. Dresher M., Games of Strategy, Math. Mag. 25 (1951), 93—99.
34. Dresher M., Karlin S., Solutions of Convex Games as Fixed-points, Contribs. to the Theory of Games-II, Ann. Math. Study 28, Princeton Univ. Press, Princeton, № 5, 75—86.
35. Dresher M., Karlin S., Shapley L. S., Polynomial Games, Contribs. to the Theory of Games, ed. H. W. Kuhn, A. W. Tucker, Ann. Math. Study 24, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1950.
36. Dvoretzky A., Wald A., Wolfowitz J., Elimination of Randomization in Gertain Problems of Statistics and of the Theory of Games, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 36 (1950), 256—260.
37. Fisher R. A., Randomization and an Old Enigma of Card Play, Math. Gaz. 18 (1934), 294—297.
38. Friedman M., Savage L. J., The Utility Analysis of Choices Involving Risk, J. Political Economy 56 (1948), 279—304.
39. Gale D., Kuhn H. W., Tucker A. W., On Symmetric Games, Contribs. to the Theory of Games, ed H. W. Kuhn, A. W. Tucker, Ann. Math. Study 24, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. 1950, 81—87.
40. Gale D., Kuhn H. W., Tucker A. W., Reductions of Game Matrices, Contribs. to the Theory of Games, ed. H. W.Kuhn, A. W. Tucker, Ann. Math. Study 24, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1950), 89—96.
41. Gale D., Kuhn H. W., Tucker A. W., Linear Programming and the Theory of Games, Activity Analysis of Production and Allocation, Cowles Commission for Research in Economics, Monograph 13, John Wiley & Sons, Inc., New York (1951), 317—329.
42. Gale D., Sherman S., Solutions of Finite Two-person Games, Contribs. to the Theory of Games, ed H. W. Kuhn, A. W. Tucker, Ann. Math. Study 24, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1950), 37—49.
43. Gale D., Stewart F. M., Infinite Games with Perfect Information, Contribs. to the Theory of Games-II, ed H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Ann. Math. Study 28, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1953), 245—266.
44. Gillies D., Inflated and Bargaining Solutions to the (n, k)-games, Contribs. to the Theory of Games-II, ed H. W. Kuhn and

A. W. Tucker, Ann. Math. Study 28, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J.
45. Gillies D., Mayberry J., Neumann J. von, Two Variants of Poker, Contribs. to the Theory of Games-II, ed. H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Ann. Math. Study 28, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J.
46. Глезерман М. Е., Понтрягин Л. С., Пересечения в многообразиях, УМН 2 : 1 (17), (1947), 58—155.
47. Glicksberg I., Gross O., Notes on Games on the Unit Square, Contribs. to the Theory of Games-II, ed. H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Ann. Math. Study 28, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1953), 173—182.
48. Guilbaud G. T., La théorie des jeux — contributions critiques à la théorie de la valeur, Econ. Appl. 2 (1949), 275—319.
49. Helmer O., Problems in Game Theory, Econometrica 20 (1952), 90.
50. Hitchcock F. L., The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities, J. Math. and Phys. 20 (1941), 224—230.
51. Hurwicz L., The Theory of Economic Behavior, Amer. Econ. Rev. 35 (1945), 909—925.
52. Justman E., La théorie des jeux (Une nouvelle théorie de l'équilibre économique), Rev. d'Economie Politique 5—6 (1949), 616—633.
53. Kakutani S., A Generalization of Brouwer's Fixed-point Theorem, Duke Math. J. 8 (1941), 457—459.
54. Kalmar L., Zur Theorie der abstrakten Spiele, Acta Szeged. 4 (1928—1929), 65—85.
55. Kaplansky I., A Contribution to von Neumann's Theory of Games, Ann. Math. 46 (1945), 474—479.
56. Karlin S., Operator Treatment of Minimax Principle, Contribs. to the Theory of Games, ed. H. W. Kuhn, A. W. Tucker, Ann. Math. Study 24, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1950), 133—154.
57. Karlin S., The Theory of Infinite Games, Ann. Math. 58, № 2 (1953), 371—401.
58. Karlin S., Reduction of Certrin Classes of Games to Integral Equations, Contribs. to the Theory of Games-II, Ann. Math. Study 28, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1953), 125—158.
59. Karlin S., On a Class of Games, Contribs. to the Theory of Games-II, Ann. Math. Study 28, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1953), 159—171.
60. Kaysen C., A Revolution in Economic Theory, Rev. Econ. Studies 14, 1 (1946—1947), 1—15.
61. Krentel W. D., McKinsey J. C. C., Quine W. V., A Simplification of Games in Extensive Form, Duke Math. J. 18 (1951), 885—900.
62. Kuhn H. W., A. Simplified Two-person Poker, Contribs. to the Theory of Games, ed. by H. W. Kuhn, A. W. Tucker, Ann. Math. Study 24, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1950).

63. Kuhn H. W., Extensive Games, Proc. Nat. Acad. Sci., U. S. A. 36 (1950), 570—576.
64. Kuhn H. W., Extensive Games and the Problem of Information, Contribs. to the Theory of Games-II, ed. H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Ann. Math. Study 28, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1953), 193—216.
65. Kuhn H. W., Tucker A. W., Preface, Contribs. to the Theory of Games, ped. H. W. Kuhn, A. W. Tucker, Ann. Math. Study 24, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1950).
66. Leunbach G., Theory of Games and Economic Behaviour, Nord. tidskr. för Tekn. økonomi 1—4 (1948), 175—178.
67. Loomis L. H., On a Theorem of von Neumann, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 32 (1946), 213—215.
68. MacDuffee C. C., The Theory of Matrices, Chelsea Publishing Company, New York, 1946.
69. Marschak J., Neumann's and Morgenstern's New Approach to Static Economics, J. Political Economy 54 (1946), 97—115.
70. Marschak J., Rational Behavior. Uncertain Prospects, and Measurable Utility, Econometrica 18 (1950), 111—141.
71. McDonald J., Poker, An American Game, Fortune 37 (1948), 128—131, 181—187.
72. McDonald J., The Theory of Strategy, Fortune 38 (1949), 100—110.
73. McDonald J., Strategy in Poker, Business, and War. W. W. Norton & Company. New York, 1950.
74. McKinsey J. C. C., Isomorphism of Games and Strategic Equivalence, Contribs. to the Theory of Games, ed. H. W. Kuhn, A. W. Tucker, Ann. Math. Study 24, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1950), 117—130.
75. Mendez J., Progresos en la Teoría Económica de la Conducta Individual, Riv. Trimestial de Cultura Moderna, Univ. Nacional de Colombia 7 (1946), 259—276.
76. Milnor J. W., Sums of Positional Games, Contribs. to the Theory of Games-II, Ann. Math. Study 28, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1953), 291—301.
77. Morgenstern O., Demand Theory Reconsidered, Quart. J. Econ. 62 (1948), 165—201.
78. Morgenstern O., Oligopoly Monopolistic Compretition and the Theory of Games, Proc. Amer. Econ. Rev. 38 (1948), 10—18.
79. Morgenstern O., Theorie des Spiels, Die Amer. Rundschau 5 (1949), 76—87.
80. Morgenstern O., The Theory of Games, Sci. Amer. 180 (1949), 22—25.
81. Morgenstern O., Die Theorie der Spiele und des Wirtschaftlichen Verhaltens, I, Jahrb. Sozialwissenschaft 1 (1950), 113—139.
82. Morgenstern O., Economics and the Theory of Games, Kyklos 3 (1949), 294—308.
83. Motzkin T. S., Raiffa H., Thompson G. L., Thrall R. M., The Double Description Method, Contribs.

to the Theory of Games-II, ed. H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Ann. Math. Study 28, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J.
84. Nash J. F., Equilibrium Points in n-person Games, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 36 (1950), 48—49.
85. Nash J. F., The Bargaining Problem, Econometrica 18 (1950), 155—162.
86. Nash J. F., Non-Cooperative Games, Ann. Math., 54 (1951), 286—295.
87. Nash J. F., Shapley L. S., A Simple Three-person Poker Game, Contribs. to the Theory of Games, ed. H. W. Kuhn, A. W. Tucker, Ann. Math. Study 24, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1950).
88. Neumann J. von, Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, Math. Ann. 100 (1928), 295—320.
89. Neumann J. von, Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Browerschen Fixpunktsatzes, Ergebn. math. Kolloquiums 8 (1937), 73—83.
90. Neumann J. von, A Model of General Economic Equilibrium, Rev. Econ. Studies 13 (1945—1946), 1—9.
91. Neumann J. von, A Certain Zero-sum Two-person Game Equivalent to the Optimal Assignment Problem, Contribs. to the Theory of Games-II, ed. H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Ann. Math. Study 28, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1953), 5—12.
92. Neumann J. von, Morgenstern O., Theory of Games and Economic Behavior 2d ed., Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1947).
93. Paxson E. W., Recent Developments in the Mathematical Theory of Games, Econometrica 17 (1949), 72—73.
94. Possel R. de, Sur la théorie mathematique des jeux de hasard et de reflexion, Actual. scient. et industr. 436, Hermann & Cie, Paris, 1936.
95. Raiffa H., Arbitration Schemes for Generalized Two-person Games, Contribs. to the Theory of Games-II, ed. H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Ann. Math. Study 28, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1953), 361—387.
96. Robinson J., An Iterative Method of Solving a Game, Ann. Math. 54 (1951), 296—301.
97. Ruist E., Spelteori och ekonomiska problem, Econ. tidskr. 2 (1949), 112—117.
98. Shapley L. S., Quota Solutions of n-person Games, Contribs. to the Theory of Games-II, Ann. Math. Study 28, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1953), 343—359.
99. Shapley L. S., A Value for n-person Games, Contribs. to the Theory of Games-II, Ann. Math. Study 28, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1953), 307—317.
100. Shapley L. S., Information and the Formal Solution of Many-Moved Games, Proc. Internat. Congr. Math. 1 (1950), 574—575.
101. Shapley L. S., Snow R. N., Basic Solutions of Discrete Games, Contribs. to the Theory of Games, ed H. W. Kuhn,

A. W. Tucker, Ann. Math. Study 24, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1950), 27—35.
102. Sherman S., Games and Sub-games, Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951), 186—187.
103. Shiffman M., Games of Timing, Contribs. to the Theory of Games-II, Ann. Math. Study 28, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1953), 97—123.
104. Singer K., Robot Economics, Econ. Rec. 25 (1949), 48—73.
105. Stone R., The Theory of Games, Economic Journal, 58 (1948), 185—201.
106. Thompson G. L., Signaling Strategies in n-person Games, Contribs. to the Theory of Games-II, Ann. Math. Study 28, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 267—277.
107. Thompson C. L., Bridge and Signaling, Contribs. to the Theory of Games-II, Ann. Math. Study 28, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J.
108. Tukey J. W., A Problem in Strategy, Econometrica 17 (1949), 73.
109. Ville J., Sur la théorie générale des jeux où intervient l'habilité des joueurs, Traité du calcul des probabilités et de ses applications, par E. Borel 4, 2, Gauthier-Villars & Cie, Paris (1938), 105—113.
110. Wald A., Über die eindeutige positive Lösbarkeit der neuen Produktionsgleichungen, Ergebn. math. Kolloquiums 6 (1935), 12—20 (с добавлением К. Менгера).
111. Wald A., Über die Produktionsgleichungen der ökonomischen Wertlehre: II. Mitteilung, Ergebn. math. Kolloquiums 7 (1936), 1—6.
112. Wald A., Über einige Gleichungssysteme der mathematischen Ökonomie, Z. Nationalökonomie 7 (1936), 637—670.
113. Wald A., Generalization of a Theorem by von Neumann Concerning Zero-sum Two-person Games, Ann. Math. 46 (1945), 281—286.
114. Wald A., Statistical Decision Functions which Minimize the Maximum Risk, Ann. Math. 46 (1945), 265—280.
115. Wald A., Foundation of a General Theory of Sequential Decision Functions, Econometrica 15 (1947), 279—313.
116. Wald A., Statistical Decision Functions, Ann. Math. Statistics 20 (1949), 165—205.
117. Wald A., Statistical Decision Functions, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1950, 179.
118. Wald A., Wolfowitz J., Bayes Solutions of Sequential Decision Problems, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 35 (1949), 99—102.
119. Wald A., Wolfowitz J., Bayes Solutions of Sequential Decision Problems, Ann. Math. Statistics 21 (1950), 82—99.
120. Wald A., Wolfowitz J., Two Methods of Randomization in Statistics and Theory of Games, Ann. Math. 53 (1951), 581—586.
121. Weyl H., Elementare Theorie der konvexen Polyeder, Comment. math. Helv. 7 (1934—1935), 290—306.
122. Weyl H., Elementary Proof of a Minimax Theorem Due to von Neumann, Contribs. to the Theory of Games, ed. H. W. Kuhn,

A. W. Tucker, Ann. Math. Study 24, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1950), 19—25.
123. Widder D. V., The Laplace Transform, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1941.
124. Widder D. V., Advanced Calculus, Prentice-Hall, Inc., New York, 1947.

Дополнительный список литературы

125. Bellman R., On the Theory of Dynamic Programming, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 38 (1952) (a), 716—719.
126. Bellman R., On Games Involving Bluffing. Rend. Circ. Math. Palermo, Series 2, 1 (1952) (b), 139—156.
127. Berge C., Sur une théorie ensembliste des jeux alternatifs, J. Math. pures et Appl. 32 (1953) (a), 129—184.
128. Berge C., Schützenberger M. P., Jeux de Nim et solutions, C. R. Acad. sci. 242, № 13 (1956), 1672—1674.
129. Berge C., Le probleme du gain dans la théorie généralisèe des jeux sans informations, Bull. Soc. Math. France 81, № 1 (1953), 1—8.
130. Bernard J., The Theory of Games of Strategy as a Modern Sociology of Conflict, Amer. J. Sociology 59 (1954), 411—424.
131. Birch B. J., On Games with Almost Complete Information, Proc. Cambridge Philos. Soc. 51 (1955), 275—287.
132. Blackwell D., An Analogue of the Minimax Theorem for Vector Payoffs, Pacif. J. Math. 6 (1956) (a), 1—8.
133. Blackwell D., Girshick M. A., Theory of Games and Statistical Decisions, John Wiley & Sons, New York, 1954.
134. Bott R., Symmetric Solutions to Majority Games, Contribs. to the Theory of Games-II, ed. H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Ann. Math. Study 28, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1953, 319—323.
135. Burger E., Zur Theorie der kooperativen Zweipersonenspiele, Arch. Math. 7, 2 (1956), 143—147.
136. Burger E., Spieltheoretische Behandlung eines Reklamproblems (Variante eines Spielmodells von Gillman), Mitt. Math. Statist. 6 (1954), 39—52.
137. Charnes A., Cooper W. W., Henderson A., An Introduction to Linear Programming, John Wiley & Sons, New York, 1953.
138. Charnes A., Constrained Games and Linear Programming, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 39, № 7 (1953), 639—641.
139. Choquet G., Sur le théorème des points—selle de la théorie des jeux, Bull. sci. math. 79 (1955), mars — avril, 48—53.
140. Churchman C. W., Ackoff R. L., Arnoff E. L., Introduction to Operations Research, John Wiley & Sons, New York, 1957.
141. Danskin J. M., Gillman L., A Game over Functions Space, Riv. mat. Univ. Parme 4, № 1—2 (1953).
142. Dantzig G. B., Constructive Proof of the Minimax Theorem, Pacif. J. Math. 6 (1956), 25—33.

143. Doob J. Z., Stohastic Processes, John Wiley & Sons, New York, 1953.
144. Dulmage L., Halperin I., On a Theorem of Frobenius—König J. von Neumann's Game of Hide and Seek, Frans. Roy. Soc. Canado, Sec. 3, 49 (1955), June, 23—29.
145. Fleming W. H., On a Class of Games over Function Space and Related Variational Problems, Ann. Math. 60, № 3 (1954), 578—594.
146. Gale D., A Theory of n-Person Games with Perfect Information, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 39 (1953), 496—501.
147. Gillies D. B., Discriminatory and Bargaining Solutions to a Class of Symmetric p-Person Games, Contribs. to the Theory of Games-II, ed. H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Ann. Math. Study 28, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1953).
148. Gillies D. B., Rubin H., A Bayes Approach to a Quality Control Model, Ann. Math. Statistics 23 (1952), 114—125.
149. Glicksberg J., Gross O., Notes on Games over the Square, Decision processes, ed. R. M. Thrall, C. H. Combs and R. L. Davis, Wiley, New York (1953), 173—184.
150. Glicksberg J., A Derivative Test for Finite Solutions of Games, Proc. Amer. Math. Soc. 4, 6 (1953), 895—897.
151. Goldman A. J., Tucker A. W., Theory of Linear Programming, Contribs. to the Theory of Games, ed. H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Ann. Math. Study (1956) (b), 53—97.
152. Hannan J. F., Robbins H. E., Asymptotic of the Compound Decision Problem for two Completely Specified Distributions, Ann. Math. Statistics 26 (1955), 37—57.
153. Hausner M., Multidimensional utilities, in Thrall, Coombs, Davis 1954, стр. 167—180.
154. Hodges J. L. Jr., Lehmann E. L., The Uses of Provious Experience in Reaching Statistical Decisions, Ann. Math. Statistics 23 (1952), 396—407.
155. Inada, Ken-ichi, Elementary Proofs of Some Theorems about the Social Welfare Function, Ann. Ins. Statist. Math. 6 (1954), 115—122.
156. Isaacs R., A Card Game with Bluffing, Amer. Math. Monthly 62, № 2 (1955), 99—108.
157. Isbell J. R., A Class of Game Solutions, Proc. Amer. Math. Soc. 6 (1955), 346—348.
158. Keeping E. S., Statistical Decisions, Amer. Math. Monthly 63 (1956), 147—159.
159. Kuhn H. W., On Certain Convax Polyhedra, Bull. Amer. Math. Soc. 61 (1955) (abstract 799), 557.
160. Kuhn H. W., Tucker A. W., editors. Contributions to the Theory of Games-II, Ann. Math. Studies 28, Princeton Univ. Press, Princeton, 1953.
161. Kuhn H. W., Tucker A. W., Linear Inequalities and Related Systems, Ann. Math. Studies 38, Princeton Univ. Press, Princeton (1956) (b).
162. Laderman J., On the Asymptotic Behaviour of Decision Procedures, Ann. Math. Statistics 26 (1955), 551—575.

163. Lehmann E. L., On the Existence of Least Favorable Distributions, Ann. Math. Statistics 23 (1952), 408—416.
164. Luce R. D., A Definition of Stability for n-person Games, Ann. Math. 59 (1954), 357—366.
165. Luce R. D., k-Stability of Symmetric and of Quota Games, Ann. Math. 62 (1955) (b), 517—527.
166. Luce R. D., Tucker A. W., Contributions to the Theory of Games, 4, Ann. Math. Studies, 1958.
167. Luce R. D., Raiffa H., Games and Decision, 1957.
168. May K. O., Intransitivity, Utility and the Aggregation of Preference Patterns, Econometrica 22 (1954), 1—13.
169. McKinsey J. C. C., Some Notions and Problems in Game Theory, Bull. Amer. Math. Soc. 58 (1952) (b), 591—611.
170. Mises R., Über die J. von Neumannsche Theorie der Spiele, Moth. Nachr. 9, № 6 (1953), 363—378.
171. Milnor J. W., Games Against Nature, Contribs. to the Theory of Games-II, ed H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Ann. Math. Study № 28, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1953).
172. Molls W. H., The Four Person Games-Edge of the Cube, Ann. Math. 59 (1954), 367—378.
173. Motzkin G. S., Raiffa H., Thompson G. L., Thrall R. M., The Double Description Method, Decision processes, ed R. M. Thrall, C. H. Combs and R. L. Davis, Wiley, New York, 1953, 51—73.
174. Nash J., Two-person Cooperative Games, Econometrica 21 (1953), 128—140.
175. Norman R. Z., On the Convex Polyhedra of the Symmetric Traveling Salesman Problem, Bull. Amer. Math. Soc. 61 (1955) (abstract 804), 559.
176. Nikaido H., Isoda Kazuo, Note on Noncooperative Convex Games, Pacif. J. Math. 5, Suppl. № 1 (1955), 807—815.
177. Otter R., Dunne J. J., Games with Equilibrium Points, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 39 (1953), 310—314.
178. Richardson M., Extension Theorems for Solutions of Irreflexive Relations, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 39 (1953) (a), 649—655.
179. Richardson, Solutions of Irreflexive Relations, Ann. Math. 58 (1958) (b), 573—590.
180. Richardson, Relativization and Extension of Solutions of Irreflexive Relations, Pacif. J. Math. 5 (1955), 551—584.
181. Richardson, On finite Projective Games, Proc. Amer. Math. Soc. 7 (1956), 458—465.
182. Savage L. J., The Foundations of Statistics, Johns Wiley & Sons, New York, and Chapman & Hall, London, 1954.
183. Shapley L. S., Additive and Non-Additive Set Functions, Ph. D. thesis, Departament of Mathematics, Princeton Univ. (1953) (c).
184. Shapley, Stochastic Games, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 39 (1953) (d), 1095—1100.
185. Thrall R. M., Coombs C. H., Davis R. L., editors, Decision Processes. John Wiley & Sons, New York, 1954.

186. Vajda S., Theory of Games and Linear Programming, John Wiley & Sons, New York, 1956.
187. Weiter C. P., The Theory of a Class of Games on a Sequence of Squares, in Terms of the Advancing Operation in a Special Group, Proc. Koninkl. nederl, Akad. wet. ASF, № 2 (1954), 194—200.
188. Williams J. D., The Complent Strategist Being a Primer on the Games of Strategy, McGrow-Hill Book Co, New York, 1954.

Литература на русском языке

189. Вентцель Е. С., Теория вероятностей, М., 1958.
190. Вентцель Е. С., Элементы теории игр, М., 1959.
191. Воробьев Н. Н., Редуцированные стратегии для игр в обобщенной форме, ДАН 115, № 5 (1957), 855—857.
192. Воробьев Н. Н., Ситуации равновесия в биматричных играх, Теория вероятностей и ее применение III, № 3 (1958).
193. Воробьев Н. Н., Конечные бескоалиционные игры, УМН 14 : 4 (88) (1959).
194. Гливенко В. И., Интеграл Стилтьеса, М.—Л., 1936.
195. Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, М., 1954.
196. Земба, Непрерывные игры с полной информацией, Бюлл. Польской АН, Отд. 3, № 10 (1955), 509—511.
197. Канторович Л. В., Математические методы организации и планирования производства. Изд. Ленингр. ун-та, Ленинград, 1939.
198. Канторович Л. В., Гавурин М. К., Проблема повышения эффективности транспорта, Сборник, Изд. АН СССР, 1949, стр. 110—138.
199. Канторович Л. В., Залгаллер В. А., Расчет рационального раскроя промышленных материалов, Лениздат, 1951.
200. Канторович Л. В., О методах анализа некоторых экстремальных планово-производственных задач, ДАН 115 (№ 3) (1957).
201. Линейные неравенства и смежные вопросы, Сб. перев. под ред. Канторовича и Новожилова, ИЛ, 1959.
202. Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, М., 1948.
203. Мощальский Ян, Земба А., О бесконечных играх, Бюлл. Польской АН, Отд. 3, 3, № 3 (1955), 135—138.
204. Рубинштейн Г. Ш., Задача о крайней точке пересечения оси с ограниченным выпуклым многогранником, ДАН 100 (№ 4) (1955).
205. Рубинштейн Г. Ш., Обобщение задачи о крайней точке пересечения оси с ограниченным выпуклым многогранником, ДАН 113 (№ 5) (1957).
206. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III, М., 1949.
207. Шилов Г. Е., Введение в теорию линейных пространств, М., 1952.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Выбор 15
— оптимальный 28
Выпуклая линейная комбинация точек с весами 41
— — — функций с весами 255
— оболочка множества 42, 257

Гиперплоскость (пространства E_n) 44
Граница множества 40

Дельта-символы Кронекера (δ) 46
Дерево 122
Довод от незнания 321

Евклидово n-мерное пространство E_n 38

Игра 14
— бесконечная 17, 165
— в нормальной форме 117
— — приведенной форме 359, 391
— — развернутой форме 118
— конечная 17, 117, 141, 387
— кооперативная (некооперативная) 405
— непрерывная 166
— несущественная 362, 392
— n лиц 344, 368, 405
— — — с нулевой суммой 344
—, проводимая на пространстве функций 401
— прямоугольная 11, 17, 20, 69, 77, 345
— —, решение 77
— —, —, графический метод 69
— — с седловыми точками 20
— разделимая (полиномиальная) 250
— сетевая 107
— с идеальной памятью 158
— симметричная 367
— с ненулевой суммой 386, 405
Игра с нулевой суммой 16, 148
— — ограничениями 290
— — полной информацией 124, 148
— — постоянной суммой 391
— существенная 362, 392
— — определенная 363
Игры изоморфные 377
—, стратегически эквивалентные 356
— S-эквивалентные 358
Интеграл Стилтьеса 190, 193
Исход игры 369, 392

Каноническое представление (каноническая форма) функции 273
Класс **D** всех ступенчатых функций с n ступенями 187
Контроль качества 316

Латинский квадрат 75
Линейное программирование 332

Максимум множества 30
Математическое ожидание выигрыша 34, 193, 209, 251, 254
Матрица кососимметрическая 74
— обратная 82
— платежная 18
— присоединенная (adj A) 82
—, свойства 80
Метод отображения 250
— приближенного определения цены игры 109
Множество 38—41, 372
— **A** исходов игры n лиц (решение) 376
— информационное 125
— решений прямоугольной игры 77
— $\mathbf{T}_i$ (Г) оптимальных стратегий игрока P_i 77
— экстремальное **K** (**X**) 45
Модуль функции 392

Нижняя граница множества 29
— — — точная (нижняя грань) 29
Нормализация 117

Образ точки 260

Партия 14
— с нулевой суммой 16
Подматрица 83
Подмножество характерное 353
Подразбиение 195
Полупространства, соответствующие данной гиперплоскости 44
Производная функции в точке слева (справа) 205
Пространство **U** 252
— **W** 253
Псевдоигры 403

Расстояние между точками из E_n 38
Расширение элемента x на i-м месте 64
Решение игры 37, 69, 77, 86, 211, 221, 287, 290, 368, 373, 376, 392

Соответствие точки u из пространства **U** и функции распределения F 253
Соотношение превосходства 61, 64
— — для смешанных стратегий 104
— предпочтения исходов ($\succ$) 371
— — — по отношению к некоторому подмножеству игроков **T** ($\underset{\mathbf{T}}{\succ}$) 370
Стратегии эквивалентные 252
Стратегия 118, 142
— наилучшая 104
— оптимальная, свойства 52, 221
— поведения 158
— — оптимальная 160
— смешанная 33, 36
— — оптимальная 37, 211
— чистая 37

Теорема для непрерывных игр основная 209, 213
— о минимаксе 33, 49
— Френкеля 43
Теория фон Неймана и Моргенштерна 386
Точка критическая первая (вторая) 276
— предельная 39
— равновесия 150
— разбиения 195
— седловая 24
— — стратегическая 37
— фиксированная 261, 271

Усечение игры с полной информацией 151
— стратегии 153

Форма приведенная 356
Функции характеристические S-эквивалентные 358, 391
Функция возрастающая 177
— выпуклая 295, 297
— — строго 295, 298
— непрерывная справа (слева) в точке 179
— неубывающая 176
— платежная партии 148
— — стратегии 148
— распределения (интегральная) 174, 176, 180
— — на пространстве функций 402
— —, свойства 180
— ступенчатая с n ступенями 187
— характеристическая 345, 348, 386, 388
— — в приведенной форме с модулем (γ) 359

Ход 14
— случайный 130

Цена игры 28, 37, 170, 210
— непрерывной игры 209

Частота оптимальная 36