Е.М.ЧЕТЫРКИН

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

РЕКОМЕНДОВАНО В КАЧЕСТВЕ УЧЕБНИКА
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИМ ОБЪЕДИНЕНИЕМ ВУЗОВ
ПО СПЕЦИАЛЬНОСТЯМ
"ФИНАНСЫ И КРЕДИТ", "БУХГАЛТЕРСКИЙ УЧЕТ,
АНАЛИЗ И АУДИТ" И "МИРОВАЯ ЭКОНОМИКА"

АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА
ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ИЗДАТЕЛЬСТВО "ДЕЛО"
МОСКВА 2000

УДК 336.6(075.8)
ББК 65.26я73
Ч54

Четыркин Е.М.
Ч54 Финансовая математика: Учеб. — М.: Дело, 2000. — 400 с.
ISBN 5-7749-0193-9

Учебник содержит последовательное и систематизированное изложение проверенных практикой методов количественного анализа финансовых и кредитных операций. Охвачены как традиционные методы разнообразных расчетов, так и методы, вошедшие в практику в последнее десятилетие. Подробно обсуждаются различные методы начисления процентов, обобщающие характеристики потоков платежей, методики определения эффективности краткосрочных инструментов и долгосрочных финансовых операций, включая производственные инвестиции и облигации.

Книга предназначена студентам экономических вузов и лицам, применяющим финансовые вычисления в своей работе, — сотрудникам банков, инвестиционных организаций, пенсионных фондов и страховых компаний.

УДК 336.6(075.8)
ББК 65.26я73

ISBN 5-7749-0193-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Высшие финансовые вычисления — так называлась дисциплина, в рамках которой в высших коммерческих учебных заведениях дореволюционной России[1] изучались методы финансовых расчетов, применяемых в финансовых операциях. Вряд ли есть необходимость в сохранении данного названия в современных условиях. Общепринято именовать эту дисциплину *финансовая математика.* Оно и принято для настоящего учебника.

Потребность в овладении методикой финансовых расчетов осознанна и в современной России. В связи с этим во многих экономических вузах страны в рамках различных дисциплин изучаются отдельные темы и проблемы, которые можно отнести к высшим финансовым вычислениям. В частности, некоторые расчетные методы рассматриваются в курсах "Кредит", "Финансовый менеджмент", "Операции с ценными бумагами" и т. п. Однако полного, систематизированного курса финансовых вычислений, базирующегося на общей методологии, еще нет. Настоящий учебник нацелен на восполнение отмеченного пробела. Он содержит последовательную характеристику современных методов финансовых вычислений. Автор ограничился основными методами и той степенью детальности, которая представлялась целесообразной в рамках учебника. Вместе с тем, учебник позволяет ознакомиться с основными направлениями количественного финансового анализа, с применяемым при этом математическим аппаратом, понять важность и необ-

[1] В Московском коммерческом училище (ныне Российская экономическая академия им. Г.В. Плеханова) функционировала соответствующая кафедра. Руководитель этой кафедры Н.С. Лунский опубликовал фундаментальный для своего времени учебник "Высшие финансовые вычисления". М., 1916. Нельзя не упомянуть и о замечательной книге Б.Ф.Малешевского "Теория и практика пенсионных касс". СПб., 1890, первый том которой "Теория долгосрочных финансовых вычислений" посвящен основам высших финансовых вычислений.

ходимость строгого аналитического решения соответствующих проблем. Основой здесь является, так сказать, "техническая" сторона — методы расчетов, измерение влияния отдельных факторов на финансовые параметры, взаимозависимости этих параметров. Поведенческая сторона участников финансовых операций, которая безусловно играет важную роль, не затрагивается.

Учебник можно условно разделить на четыре раздела, различающиеся по своему назначению. В первом (гл. 1—4) рассматриваются основные понятия, которые применяются в финансовых вычислениях, — проценты, система процентных ставок, наращение процентов, дисконтирование платежей и т.д. в случаях, когда предусматриваются разовые выплаты. Обсуждаются здесь и важные в практическом отношении "сопутствующие" проблемы, в частности, — учет инфляции, конверсия валюты и наращение процентов, сбалансированные изменения условий контрактов и т.д.

Во втором разделе (гл. 5—6) обсуждаются проблемы, относящиеся к количественному анализу разнообразных потоков (последовательностей) платежей и, в частности, финансовых рент. С потоками платежей в практике встречаются каждый раз, когда по условиям операции платежи распределены во времени. Без знания количественных соотношений между показателями, характеризующими потоки платежей, нельзя понять механизм любой долгосрочной финансовой операции.

Материал первых двух разделов учебника представляет собой основу, которая за редкими исключениями используется в анализе любых конкретных финансово-кредитных операций.

В практических расчетах часто сталкиваются с ситуациями, когда некоторые параметры операций нельзя заранее однозначно определить и возникает необходимость в расчете некоторых крайних значений результирующих показателей. В связи с этим в третий раздел учебника включены гл. 7 и 8, имеющие в основном общий методологический характер. В первой из них рассматриваются способы определения барьерных или критических значений экономических, в том числе финансовых, параметров. Во второй — в теоретическом плане обсуждается проблема измерения риска в финансовых расчетах и влияния диверсификации на его величину.

Характеристика методов количественного анализа, применяемых при решении конкретных практических задач, сосредоточена в четвертом разделе учебника (гл. 9—17). Объектами анализа здесь являются проблемы из самых различных областей финансово-кредитной деятельности. Так, гл. 9 посвящена разработке планов погашения долгосрочных займов, реструктурированию задолженности и ипотекам. Методология измерения доходности различных кратко- и долгосрочных финансовых инструментов обсуждается в гл. 10. Много внимания уделено производственным инвестициям — методам расчета параметров их экономической эффективности, факторам, влияющим на эти параметры (гл. 12). Особое место в этом разделе занимают последние две главы, в которых потоки платежей используются в страховых (актуарных) расчетах, главным образом в расчетах по личному страхованию.

В учебнике рассматриваются как теория, так и практика расчетов. Приводятся доказательства ряда соотношений финансовых параметров, часть из которых вынесены в Математические приложения к соответствующим главам. Уместно в связи с этим отметить, что в ряде опубликованных учебных пособий по финансовым вычислениям указывается, что для экономиста важны готовые формулы и нет необходимости знать, как они получены. Это заблуждение. Доказательства важны как для осознанного применения формул, так и для самостоятельного вывода необходимых соотношений, не охваченных учебником. Большое количество примеров, как надеется автор, позволит читателю овладеть соответствующими навыками. В ряде случаев примеры содержат дополнительные методические сведения и имеют самостоятельную познавательную ценность.

Как известно, для наиболее распространенных видов финансовых расчетов имеются стандартные программы, в частности, раздел "финансовые функции" в известном программном продукте *Excel*. В учебнике, там, где это представляется полезным, приводятся комментарии и рекомендации по применению соответствующих программ данного пакета. Необходимость в этом вызвана главным образом тем, что перевод инструкций для данного продукта на русский язык выполнен крайне неаккуратно. Зачастую трудно даже понять, о каком финансовом показателе идет речь. В ряде случаев программы *Excel* предусматривают лишь частные постановки задач.

Для овладения большинством тем высших финансовых вычислений достаточно знания школьного курса алгебры, и в особенности, прогрессий. Там, где речь идет о непрерывных процессах, необходимы начальные знания анализа (производные и интегралы некоторых несложных функций). Разделы, связанные с измерением риска и страховыми расчетами, требуют знакомства с основными понятиями теории вероятностей, параметрами стандартных распределений случайных величин и некоторыми свойствами дисперсий в пределах обычного курса статистики экономического вуза.

При написании двух первых разделов учебника по возможности полно использована принятая в дореволюционной России финансовая терминология. Правда, не все термины той поры были сохранены. Например, вместо бытовавшего словосочетания "настоящая цена" (имелась в виду сумма дисконтированных членов ренты) в учебнике используются термины "современная стоимость" или "современная величина".

В ходе написания остальных разделов автор неоднократно сталкивался с отсутствием в русском языке адекватных и устоявшихся современных экономических и финансовых терминов. В этих случаях он старался избегать буквальных "калек" с английского, если только они не укоренились в отечественной литературе, как, например, лизинг или опцион, и подбирал наиболее близкие по смыслу русские слова и словосочетания. Следует заметить, что в финансовой литературе, вероятно для придания "научности", такие кальки стали появляться сравнительно часто. Добро бы они содержались только в переводной литературе. Увы, с большой скоростью англицизмы распространяются и в публикациях российских авторов. Примерами такого, прямо скажем, неприличного заимствования могут служить появившиеся в финансовой литературе термины "компаундинг" (калька с *compounding*) вместо — наращение процентов, или расчет наращенной суммы, волатильность (*volatility*) вместо изменчивость, или колеблемость. И уж совсем непристойно применять термин "перпетуитет" (*perpetuity*) вместо давно принятого — вечная рента. Без таких заимствований вполне можно обойтись. Что касается сравнительно недавно появившегося в переводной и оригинальной литературе по инвестициям термина "дюрация" (*duration*), то он режет слух. Вполне можно подобрать русский эквивалент для обозначения данного финансового параметра. Уместно упомянуть о том, что во Франции, где бережно относятся к родному языку, принят закон, согласно которому применение англицизмов в тех случаях, когда существуют адекватные французские термины, является наказуемым.

Учебник написан на основе курса лекций, которые автор в свое время прочитал в Московском финансовом институте (ныне Финансовая академия при Правительстве РФ) и в Международном университете в Москве. При подготовке рукописи использованы методические материалы, разработанные им для ряда страховых организаций, пенсионных фондов, в том числе пенсионного фонда ООН, членом Комитета актуариев которого автор был в течение 25 лет, и некоторых финансово-кредитных институтов, а также выпущенные им монографии[1].

---

[1] См.: "Методы финансовых и коммерческих расчетов". 2-е изд. М.: Дело, 1995; "Финансовый анализ производственных инвестиций". М.: Дело, 1998; "Актуарные расчеты в негосударственном медицинском страховании". 2-е изд. М.: Дело, 2000.

Глава 1

ПРЕДМЕТ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

§1.1. Финансовая математика — основа количественного анализа финансовых операций

Любая финансово-кредитная операция, инвестиционный проект или коммерческое соглашение предполагают наличие ряда условий их выполнения, с которыми согласны участвующие стороны. К таким условиям относятся следующие количественные данные: денежные суммы, временные параметры, процентные ставки и некоторе другие дополнительные величины. Каждая из перечисленных характеристик может быть представлена самым различным образом. Например, платежи могут быть единовременными (разовыми) или в рассрочку, постоянными или переменными во времени. Существует более десятка видов процентных ставок и методов начисления процентов. Время устанавливается в виде фиксированных сроков платежей, интервалов поступлений доходов, моментов погашения задолженности и т.д. В рамках одной финансовой операции перечисленные показатели образуют некоторую *взаимоувязанную систему*, подчиненную соответствующей логике. В связи со множественностью параметров такой системы конечные конкретные результаты (кроме элементарных ситуаций) часто неочевидны. Более того, изменение значения даже одной величины в системе в большей или меньшей мере, но обязательно, скажется на результатах соответствующей операции. Отсюда с очевидностью следует, что такие системы могут и должны являться объектом приложения количественного финансового анализа. *Проверенные практикой методы этого анализа и составляют предмет финансовой математики* (ФМ).

Количественный финансовый анализ предназначен для решения разнообразных задач. Эти задачи можно разделить на две большие группы: традиционные или "классические", и новые, нетрадиционные, постановка и интенсивная разработка которых наблюдается в последние два—три десятилетия. Разумеется, такое деление условно. То, что было новым словом, скажем, еще десять лет назад, часто оказывается рутинным сегодня и должно рассматриваться в ФМ.

Количественный финансовый анализ применяется как в условиях определенности, так и неопределенности. В первом случае предполагается, что данные для анализа заранее известны и фиксированы. Например, при выпуске обычных облигаций однозначно оговариваются все параметры — срок, купонная доходность, порядок выкупа. Анализ заметно усложняется, когда приходится учитывать неопределенность — динамику денежного рынка (уровень процентной ставки, колебания валютного курса и т.д.), поведение контрагента.

Для того чтобы в первом приближении представить себе предмет ФМ, приведем постановку одной простейшей задачи. Пусть от одновременной инвестиции в размере D млн руб. ожидается следующая отдача: через 3 мес. A млн руб., через 8 мес. B млн руб. и далее в течение двух лет ежемесячно по C млн руб. Какова доходность инвестиции, выраженная в виде годовой сложной процентной ставки?

Рамки ФМ достаточно широки — от элементарных начислений процентов до относительно сложных расчетов, например оценки влияния различных факторов на эффективность выпуска облигаций или методов сокращения риска путем диверсификации портфеля финансовых инвестиций и т.д. К основным задачам ФМ относятся:

— измерение конечных финансовых результатов операции (сделки, контракта) для каждой из участвующих сторон;
— разработка планов выполнения финансовых операций, в том числе планов погашения задолженности;
— измерение зависимости конечных результатов операции от основных ее параметров;
— определение допустимых критических значений этих параметров и расчет параметров эквивалентного (безубыточного) изменения первоначальных условий операции.

Разумеется, данный перечень не является исчерпывающим. Современная практика ставит новые задачи. К числу последних, например, относится оптимизация портфеля активов и, что более интересно, оптимизация по какому-либо критерию портфеля задолженности.

Свидетельством важности дальнейшего развития количественного финансового анализа служит тот факт, что несколько последних Нобелевских премий по экономике присуждены за работы именно в этой области знания.

Знание методов, применяемых в ФМ, необходимо при непосредственной работе в любой сфере финансов и кредита, в том числе и на этапе разработки условий контрактов. Нельзя обойтись без них при финансовом проектировании, а также при сравнении и выборе долгосрочных инвестиционных проектов. Финансовые вычисления являются необходимой составляющей расчетов в долгосрочном личном страховании, например проектировании и анализе состояния пенсионных фондов (расчет тарифов, оценка способности фондов выполнить свои обязательства перед пенсионерами и т.д.), долгосрочном медицинском страховании.

Область приложения методов количественного анализа финансовых операций последовательно расширяется. Кратко проследим этапы развития. Есть свидетельства того, что на заре цивилизации (Мессопотамия) уже применялось начисление процентов в простых ссудных операциях. В прошлом веке и первой половине нынешнего столетия анализ в основном был нацелен на операции, предполагающие выплаты регулярных последовательностей платежей — финансовых рент. В наше время преобладающим объектом являются потоки платежей. В последнее десятилетие большое внимание уделяется портфелям финансовых инвестиций и задолженности. Очевидно, что во всех случаях переход к новым объектам анализа связан с созданием адекватных методик.

Научно-технический прогресс не мог не затронуть такой важной области экономики, как финансово-кредитные отношения. Многие новшества здесь прямо или косвенно связаны с компьютеризацией финансово-банковской деятельности. Возможности компъютеризации и достижения в ряде областей знания (системный анализ, информатика, экспертные системы, статистическое моделирование, линейное и нелинейное программирование и прочее) позволили заметно осовременить как технологию финансово-банковского дела, так и применяемый в количественном финансовом анализе, в том числе ФМ, аналитический аппарат. В связи со сказанным можно указать на заметное усовершенствование методик применительно к традиционным объектам финансового анализа. Примером может служить разработка системы показателей эффективности производственных инвестиций, внедряемых в практику в последнее десятилетие, создание аналитических характеристик для традиционных финансовых инструментов и их портфелей и др. Возникла возможность по-новому взглянуть на содержание финансово-кредитных операций и предложить клиентам новые виды услуг, выходящие за рамки традиционных. К таким новшествам, в частности, относятся новые инструменты денежно-кредитного рынка — опционы, свопы, соглашения о будущей процентной ставке и т.п. Лизинг в его современном виде также начал применяться не так уж давно. Внедрение указанных новшеств в практику сопровождалось развитием соответствующих методов количественного анализа.

Отметим, что в последнее время созданы новые технологии, совершенствующие саму финансово-кредитную деятельность. Такие технологии, как правило, содержат в качестве одной из важных составляющих тот или иной метод ФМ. В качестве примера такого новшества нельзя не указать на экспертные системы. Экспертная система кратко может быть определена как автоматизированная система, способная имитировать мышление специалиста и принимать решение в определенной узкой деятельности человека. Основное отличие экспертной системы от обычной автоматизированной системы обработки информации состоит в наличии развитого логического аппарата в виде набора правил "если ..., то ...". Правила формулируются и вводятся в систему непосредственно высококласными экспертами или с помощью самообучения системы путем множественных прогонов на ЭВМ реальных ситуаций.

Для иллюстрации укажем на экспертную систему, разработанную в Окобанке (Финляндия). Эта система предназначена для принятия решений о предоставлении частными банками субсидированных государством сельскохозяйственных кредитов. При наличии множества видов кредитования фермеров и более 3 тыс. правил и условий их выдачи (пример простейшего правила: кредит открывают лицам не моложе 18 и не старше 60 лет) решение о кредитовании, включая правомерность его предоставления, размер, срок, продолжительность льготного периода, оказывалось весьма трудоемким. Применение экспертной системы позволило многократно сократить время принятия решений.

§1.2. Время как фактор в финансовых расчетах

В практических финансовых операциях суммы денег вне зависимости от их назначения или происхождения так или иначе, но обязательно, связываются с конкретными моментами или периодами времени. Для этого в контрактах фиксируются соответствующие сроки, даты, периодичность выплат. Вне времени нет денег. Фактор времени, особенно в долгосрочных операциях, играет не меньшую, а иногда даже и большую роль, чем размеры денежных сумм. Необходимость учета временного фактора вытекает из сущности финансирования, кредитования и инвестирования и выражается в принципе *неравноценности денег, относящихся к разным моментам времени (time-value of money),* или в другой формулировке — принципе *изменения ценности денег во времени.* Интуитивно понятно, что 1000 рублей, полученные через 5 лет, не равноценны этой же сумме, поступившей сегодня, даже, если не принимать во внимание инфляцию и риск их неполучения. Здесь, вероятно, вполне уместен известный афоризм “Время — Деньги”.

Отмеченная неравноценность двух одинаковых по абсолютной величине разновременных сумм связана прежде всего с тем, что имеющиеся сегодня деньги могут быть инвестированы и принести доход в будущем. Полученный доход в свою очередь реинвестируется и т.д. Если сегодняшние деньги, в силу сказанного, ценнее будущих, то, соответственно, будущие поступления менее ценны, чем более близкие при равных их суммах.

Приведем иллюстрацию. В свое время газеты сообщали, что американская компания “Юнион Карбайд”, на химическом заводе которой в Индии произошла крупная авария, предложила в качестве компенсации выплатить пострадавшим в течение 35 лет 200 млн долл. (индийская сторона отклонила это предложение). Воспользуемся этими данными для демонстрации влияния фактора времени. Определим сумму денег, которую необходимо положить в банк, скажем, под 10% годовых для того, чтобы полностью обеспечить последовательную выплату 200 млн долл. Оказывается, для этого достаточно выделить всего 57,5 млн долл. Иначе говоря, 57,5 млн долл., выплаченных сегодня, равнозначны (эквивалентны) 200 млн долл., погашаемых ежемесячно в равных долях на протяжении 35 лет.

Влияние фактора времени многократно усиливается, как мы знаем из собственного житейского опыта, в период инфляции. Этот фактор часто лежит в основе явного или скрытого мошенничества и недобросовестности. Достаточно в связи с этим упомянуть о случаях, когда "продавец" получал деньги в качестве предоплаты за товар, который он и не собирался поставить. Обесцененные деньги через некоторый срок возвращались покупателю.

Очевидным следствием принципа изменения ценности денег во времени является неправомерность суммирования денежных величин, относящихся к разным моментам времени, особенно при принятии решений финансового порядка. Однако такое суммирование вполне допустимо там, где фактор времени не имеет принципиального значения. Например, в бухгалтерском учете для получения итогов по периодам и в финансовом контроле, но, повторяем, не при принятии финансовых решений долгосрочного характера. Неправомерно также и непосредственное сравнение разновременных денежных величин. Их сравнение допустимо только при "приведении" таких сумм к одному моменту времени. Способы приведения обсуждаются ниже для разных вариантов производства платежей.

Не менее важным в финансовом анализе является принцип *финансовой эквивалентности*. Под последним понимается равенство (эквивалентность) финансовых обязательств сторон, участвующих в операции. Ограничимся двумя иллюстрациями. Покупатель облигации оплачивает ее рыночную цену, а эмитент обязуется периодически выплачивать ему купонный доход и вернуть в конце срока сумму, равную номиналу облигации. Страхователь оплачивает стоимость страхования, а страховщик обязуется выплатить ему страховую сумму, но только при наступлении страхового события. В отличие от первого примера, где платежи обеих сторон безусловны, здесь платеж страховщика имеет вероятностный характер.

Принцип эквивалентности позволяет изменять условия контрактов без нарушения принятых обязательств (поэтому в старой финансовой литературе этот принцип назывался *условием безобидности*). Согласно ему можно изменять уровень процентных ставок, их вид, сроки исполнения обязательств, распределение платежей во времени и т.д. (разумеется, с согласия контрагента) в рамках одной операции, не нарушая взаимной ответственности. На этом принципе, как будет показано ниже, основаны решения многих проблем, с которыми мы познакомимся ниже.

Оба указанных выше принципа не могут быть реализованы без того или иного способа наращения процентов или дисконтирования с применением какого-либо вида процентной ставки.

§1.3. Проценты, виды процентных ставок

Проценты. Под *процентными деньгами* или, кратко, *процентами (interest)*, понимают абсолютную величину дохода от предоставления денег в долг в любой его форме: выдача ссуды, продажа товара в кредит, помещение денег на депозитный счет, учет векселя, покупка сберегательного сертификата или облигации и т.д. Какой бы вид или происхождение ни имели проценты, это всегда конкретное проявление такой экономической категории, как ссудный процент. Практика получения процентов за выданные в долг деньги существовала задолго до нашей эры. Например, в Древней Греции взимали от 10 до 36 % суммы долга в год. В "Русской Правде" годовой рост на занятый капитал определялся в 40%.

При заключении финансового или кредитного соглашения стороны (кредитор и заемщик) договариваются о размере процентной ставки. Под *процентной ставкой (rate of interest)* понимается относительная величина дохода за фиксированный отрезок времени — отношение дохода (процентных денег) к сумме долга. Процентная ставка — один из важнейших элементов коммерческих, кредитных или инвестиционных контрактов. Она измеряется в виде десятичной или обыкновенной дроби (в последнем случае она фиксируется в контрактах с точностью до 1/16 или 1/32) или в процентах. При выполнении расчетов процентные ставки обычно измеряются в десятичных дробях.

Временной интервал, к которому приурочена процентная ставка, называют *периодом начисления (running period)*, его не следует путать со сроком начисления. В качестве такого периода принимают год, полугодие, квартал, месяц или даже день. Чаще всего на практике имеют дело с годовыми ставками.

Проценты согласно договоренности между кредитором и заемщиком выплачиваются по мере их начисления или присоединяются к основной сумме долга (капитализация процентов). Процесс увеличения суммы денег во времени в связи с присоединением процентов называют *наращением*, или *ростом*, этой суммы. Возможно определение процентов и при движении во времени в обратном направлении — от будущего к настоящему. В этом случае сумма денег, относящаяся к будущему, уменьшается на величину соответствующего *дисконта* (скидки). Такой способ называют *дисконтированием* (сокращением).

Размер процентной ставки зависит от ряда как объективных, так и субъективных факторов, а именно: общего состояния экономики, в том числе денежно-кредитного рынка; кратковременных и долгосрочных ожиданияй его динамики; вида сделки, ее валюты; срока кредита; особенностей заемщика (его надежности) и кредитора, истории их предыдущих отношений и т. д.

В финансовом анализе процентная ставка применяется не только как инструмент наращения суммы долга, но и в более широком смысле — как *измеритель степени доходности* (*эффективности*) любой финансовой, кредитной, инвестиционной или коммерческо-хозяйственной деятельности вне зависимости от того, имел место или нет факт непосредственного инвестирования денежных средств и процесс их наращения. В старой русской финансовой литературе такую ставку называли *ставка помещения*.

Виды процентных ставок и способы начисления процентов. Существуют различные способы начисления процентов, зависящие от условий контрактов. Соответственно применяют разные виды процентных ставок. Можно выделить ряд признаков, по которым различаются процентные ставки.

Для начисления процентов применяют постоянную базу начисления и последовательно изменяющуюся (за базу принимается сумма, полученная на предыдущем этапе наращения или дисконтирования). В первом случае используют *простые*, во втором — *сложные* процентные ставки, при применении которых проценты начисляются на проценты.

Важным является выбор принципа расчетов процентных денег. Существует два таких принципа: от настоящего к будущему и, наоборот, от будущего к настоящему. Соответственно применяют *ставки наращения (interest base rate)* и *дисконтные, или учетные, ставки (discount base rate)*. В финансовой литературе проценты, полученные по ставке наращения, принято называть *декурсивными*, по учетной ставке — *антисипативными*. (В России этим понятиям соответствовали проценты “на 100” и “со 100”). Далее декурсивные проценты в большинстве случаев будем называть просто процентами. Пока ограничимся этими сведениями. Подробную характеристику упомянутых ставок отложим до параграфов, в которых обсуждаются конкретные методики их применения в финансовых расчетах.

Процентные ставки могут быть *фиксированными* (в контракте указываются их размеры) или *плавающими (floating)*. В последнем случае указывается не сама ставка, а изменяющаяся во времени *база* (базовая ставка) и размер надбавки к ней — *мар-*

жи. Классическим примером базовой ставки может служить лондонская межбанковская ставка ЛИБОР (LIBOR: *London interbank offered rate).* В России применяются базовые ставки по рублевым кредитам МИБОР. Размер маржи определяется рядом условий, в частности финансовым положением заемщика, сроком кредита и т.д. Он может быть постоянным на протяжении срока ссудной операции или переменным.

Важное место в системе процентных ставок занимает ставка рефинансирования Центрального Банка России — ставка, по которой ЦБ выдает кредит коммерческим банкам.

Добавим, что при последовательном погашении задолженности возможны два способа начисления процентов. Согласно первому процентная ставка (простая или сложная) применяется *к фактической сумме долга.* По второму способу простые проценты начисляются *сразу* на всю сумму долга без учета последовательного его погашения. Последний способ применяется в потребительском кредите и в некоторых других (правда, редких) случаях.

В практических расчетах применяют так называемые *дискретные* проценты, т.е. проценты, начисляемые за фиксированные интервалы времени (год, полугодие и т.д.). Иначе говоря, время рассматривается как дискретная переменная. В некоторых случаях — в доказательствах и аналитических финансовых расчетах, связанных с процессами, которые можно рассматривать как непрерывные, в общих теоретических разработках и значительно реже на практике — возникает необходимость в применении *непрерывных* процентов (*continuous interest),* когда наращение или дисконтирование производится непрерывно, за бесконечно малые промежутки времени. В подобных ситуациях применяют специальные непрерывные процентные ставки.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Ковалев В.В, Уланов В.А.* Курс финансовых вычислений. М.: Финансы и статистика, 1999. Гл 5.
2. *Четыркин Е.М., Васильева Н. Е.* Финансово-экономические расчеты. М.: Финансы и статистика, 1990. Гл 1.
3. *Cartledge P.* Financial arithmetic. A practitioners guide. Euromoney Books, 1993.

Глава 2

НАРАЩЕНИЕ И ДИСКОНТИРОВАНИЕ ПО ПРОСТЫМ ПРОЦЕНТНЫМ СТАВКАМ

§2.1. Формула наращения

Под *наращенной суммой* ссуды (долга, депозита, других видов выданных в долг или инвестированных денег) понимают первоначальную ее сумму с начисленными процентами к концу срока начисления *(date of maturity, due date)*. Наращенная сумма определяется умножением первоначальной суммы долга *(principal)* на *множитель наращения*, который показывает, во сколько раз наращенная сумма больше первоначальной. Расчетная формула зависит от вида применяемой процентной ставки и условий наращения.

К наращению по простым процентам обычно прибегают при выдаче краткосрочных ссуд (на срок до 1 года) или в случаях, когда проценты не присоединяются к сумме долга, а периодически выплачиваются. Для записи формулы наращения простых процентов *(simple interest)* примем обозначения:

I — проценты за весь срок ссуды;
P — первоначальная сумма долга;
S — наращенная сумма, т. е. сумма в конце срока;
i — ставка наращения процентов (десятичная дробь);
n — срок ссуды.

Если срок измеряется в годах (как это обычно и бывает), то i означает годовую процентную ставку. Соответственно каждый год приносит проценты в сумме Pi. Начисленные за весь срок проценты составят

$$I = Pni.$$

Наращенная сумма, таким образом, находится как

$$S = P + I = P + Pni = P(1 + ni). \qquad (2.1)$$

Выражение (2.1) называют формулой наращения по простым процентам или кратко — *формулой простых процентов*, а множитель $(1 + ni)$ — *множителем наращения простых процентов.* График роста по простым процентам представлен на рис. 2.1.

Заметим, что увеличение процентной ставки или срока в k раз одинаковым образом влияет на множитель наращения. Последний увеличится в $(1 + kni) / (1 + ni)$ раз.

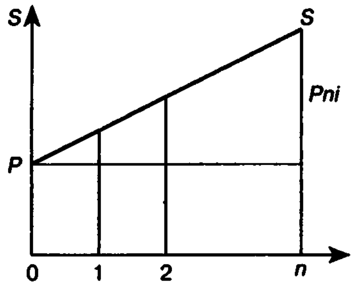

Рис. 2.1

ПРИМЕР 2.1. Определим проценты и сумму накопленного долга, если ссуда равна 700 тыс.руб., срок 4 года, проценты простые по ставке 20% годовых ($i = 0{,}2$):

$$I = 700 \times 4 \times 0{,}2 = 560 \text{ тыс. руб.};$$

$$S = 700 + 560 = 1260 \text{ тыс. руб.}$$

Увеличим теперь ставку в два раза. Сумма процентов при этом, естественно, удвоится. Однако наращенная сумма увеличится в

$$(1 + 2 \times 4 \times 0{,}2) / (1 + 4 \times 0{,}2) = 1{,}444 \text{ раза.}$$

Практика расчета процентов для краткосрочных ссуд. Поскольку процентная ставка, как правило, устанавливается в расчете за год, то при сроке ссуды менее года необходимо определить, какая часть годового процента уплачивается кредитору. Аналогичная проблема возникает и в случаях, когда срок ссуды меньше периода начисления.

Рассмотрим наиболее распространенный в практике случай — с годовыми периодами начисления. Очевидно, что срок ссуды необязательно равен целому числу лет. Выразим срок n в виде дроби

$$n = \frac{t}{K}, \qquad (2.2)$$

где t — число дней ссуды, K — число дней в году, или *временная база начисления процентов (time basis).*

При расчете процентов применяют две временные базы: $K = 360$ дней (12 месяцев по 30 дней) или $K = 365$, 366 дней. Если $K = 360$, то получают *обыкновенные* или *коммерческие* проценты *(ordinary interest)*, а при использовании действительной продолжительности года (365, 366 дней) рассчитывают *точные* проценты (*exact interest)* .

Число дней ссуды также можно измерить приближенно и точно. В первом случае продолжительность ссуды определяется из условия, согласно которому любой месяц принимается равным 30 дням. В свою очередь точное число дней ссуды определяется путем подсчета числа дней между датой выдачи ссуды и датой ее погашения. День выдачи и день погашения считаются за один день. Точное число дней между двумя датами можно определить по табл. 1 Приложения.

Итак, возможны и применяются на практике три варианта расчета простых процентов.

1. *Точные проценты с точным числом дней ссуды.* Этот вариант, естественно, дает самые точные результаты. Данный способ применяется центральными банками многих стран и крупными коммерческими банками, например, в Великобритании, США. В коммерческих документах он обозначается как 365/365 или ACT/ACT.

2. *Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды.* Этот метод, иногда называемый *банковским (Banker's Rule)*, распространен в межстрановых ссудных операциях коммерческих банков, во внутристрановых — во Франции, Бельгии, Швейцарии. Он обозначается, как 365/360 или ACT/360. Этот вариант дает несколько больший результат, чем применение точных процентов. Заметим, что при числе дней ссуды, превышающем 360, данный способ приводит к тому, что сумма начисленных процентов будет больше, чем предусматривается годовой ставкой. Например, если $t = 364$, то $n = 364/360 = 1{,}01111$. Множитель наращения за год при условии, что $i = 20\%$, составит 1,20222.

3. *Обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды.* Такой метод применяется тогда, когда не требуется большой точности, например при промежуточных расчетах. Он принят в

практике коммерческих банков Германии, Швеции, Дании. Метод условно обозначается как 360/360.

Очевидно, что вариант расчета с точными процентами и приближенным числом дней ссуды лишен смысла и не применяется.

Поскольку точное число дней ссуды в большинстве случаев, но разумеется, не всегда, больше приближенного (в чем легко убедиться, определив среднее за год число дней в месяце, которое равно 30,58), то метод начисления процентов с точным числом дней ссуды обычно дает больший рост, чем с приближенным.

ПРИМЕР 2.2. Ссуда в размере 1 млн руб. выдана 20.01 до 05.10 включительно под 18% годовых. Какую сумму должен заплатить должник в конце срока при начислении простых процентов? При решении применим все три метода. Предварительно определим число дней ссуды: точное — 258, приближенное — 255.

1. Точные проценты с точным числом дней ссуды (365/365):

$$S = 1\,000\,000(1 + \frac{258}{365}0,18) = 1\,127\,233 \text{ руб.}$$

2. Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды (360/365):

$$S = 1\,000\,000(1 + \frac{258}{360}0,18) = 1\,129\,000 \text{ руб.}$$

3. Обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды (360/360):

$$S = 1\,000\,000(1 + \frac{255}{360}0,18) = 1\,127\,500 \text{ руб.}$$

Если общий срок ссуды захватывает два смежных календарных года и есть необходимость в делении суммы процентов между ними (например, при определении годовых сумм дохода и т.д.), то общая сумма начисленных простых процентов составит сумму процентов, полученных в каждом году:

$$I = I_1 + I_2 = Pn_1i + Pn_2i,$$

здесь n_1 и n_2 — части срока ссуды, приходящиеся на каждый календарный год.

Переменные ставки. В кредитных соглашениях иногда предусматриваются изменяющиеся во времени процентные ставки. Если это простые ставки, то наращенная на конец срока сумма определяется следующим образом:

$$S = P\left(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + \ldots + n_m i_m\right) = P\left(1 + \sum_t n_t i_t\right), \qquad (2.3)$$

где i_t — ставка простых процентов в периоде t, n_t — продолжительность периода с постоянной ставкой, $n = \sum_t n_t$.

> **ПРИМЕР 2.3.** Контракт предусматривает следующий порядок начисления процентов: первый год — 16%, в каждом последующем полугодии ставка повышается на 1%. Необходимо определить множитель наращения за 2,5 года. Находим
>
> $$1 + \sum n_t i_t = 1 + 1 \times 0,16 + 0,5 \times 0,17 + 0,5 \times 0,18 +$$
>
> $$+ 0,5 \times 0,19 = 1,43.$$

Начисление процентов при изменении сумм депозита во времени. Принципиально ничего не меняется, если сумма, на которую начисляются проценты, изменяет свою величину во времени (размер вклада на сберегательном счете, текущий счет при периодическом его пополнении или снятии денег и т.п.). В этом случае

$$I = \sum_j R_j n_j i, \qquad (2.4)$$

где R_j — остаток средств на счете в момент j после очередного поступления или списания средств, n_j — срок хранения денег (в годах) до нового изменения остатка средств на счете.

В банковско-сберегательном деле обычно применяют следующий способ, основанный на преобразовании (2.4). Для этого измерим интервалы между моментами изменений величины остатка на счете в днях, а процентную ставку выразим в процентах (а не в десятичных дробях как выше). После чего получим

$$I = \sum_j R_j n_j i = \frac{\sum R_j t_j}{100} : \frac{K}{i}. \qquad (2.5)$$

Как и прежде K означает число дней в году, а t_j — срок в днях между последовательными изменениями остатков на счете.

Величину $\sum R_j t_j / 100$ называют *процентным числом* (*interest number*), а делитель — *процентным* (или *постоянным*) *делителем* (*interest divisor*).

ПРИМЕР 2.4. Движение средств на счете характеризуется следующими данными: 05.02 поступило 12 млн руб., 10.07 снято 4 млн руб. и 20.10 поступило 8 млн руб. Найти сумму на счете на конец года. Процентная ставка 18% годовых.

Процентный делитель составит 365 : 18 = 20,27778. Расчет суммы процентных чисел приведен в следующей таблице.

Дата	Движение средств	Остаток (R_j)	Срок (t_j)	Процентное число
05.02	12	12	155	18,6
10.07	−4	8	102	8,16
20.10	8	16	72	11,52
31.12	—	16	—	—
Итого				38,28

Сумма процентов за весь срок равна $\frac{38,28}{20,27778} = 1,888$ млн руб.

Реинвестирование по простым ставкам. В практике при инвестировании средств в краткосрочные депозиты иногда прибегают к неоднократному последовательному повторению наращения по простым процентам в пределах заданного общего срока. Фактически это означает *реинвестирование* средств, полученных на каждом этапе наращения, с помощью постоянной или переменной ставок. Наращенная сумма для всего срока составит в этом случае

$$S = (1 + n_1 i_1)(1 + n_2 i_2)...(1 + n_t i_t)..., \qquad (2.6)$$

где i_t — размер ставок, по которым производится реинвестирование.

Если промежуточные сроки начисления и ставки не изменяются во времени, то вместо (2.6) имеем

$$S = P(1 + n_i)^m, \qquad (2.7)$$

где m — количество повторений реинвестирования.

ПРИМЕР 2.5. 100 млн руб. положены 1-го марта на месячный депозит под 20% годовых. Какова наращенная сумма, если операция повторяется 3 раза?

Если начислять точные проценты (365/365), то

$$S = 100(1 + \frac{31}{365}0{,}2)(1 + \frac{28}{365}0{,}2)(1+\frac{31}{365}0{,}2) =$$

$$= 105{,}013 \text{ млн руб.}$$

Начисление обыкновенных процентов (360/360) при реинвестированиии дает

$$S = 100(1 + \frac{30}{360}0{,}2)^3 = 105{,}084 \text{ млн руб.}$$

§ 2.2. Погашение задолженности частями

Контур финансовой операции. Необходимым условием финансовой или кредитной операции в любой ее форме является сбалансированность вложений и отдачи. Понятие сбалансированности удобно пояснить на графике (см. рис. 2.2). Выдана ссуда на срок T в размере P. На протяжении этого срока в счет погашения задолженности производятся, допустим, два платежа R_1 и R_2, а в конце срока выплачивается остаток задолженности в сумме R_3 (для нас здесь не имеет значения, какая часть этой суммы идет на выплату процентов, а какая — на погашение долга). Очевидно, что на интервале t_1 задолженность возрастает (в силу начисления процентов) до величины P_1. В конце этого периода выплачивается в счет погашения задолженности сумма R_1. Долг уменьшается до K_1 и т.д. Заканчивается операция получением кредитором в окончательный расчет суммы R_3. В этот момент задолженность должна быть равна нулю. Назовем такой график *контуром операции* (рис. 2.2, *б*).

Сбалансированная операция обязательно имеет замкнутый контур. Иначе говоря, последняя выплата полностью покрывает остаток задолженности. В этом случае совокупность платежей точно соответствует условиям сделки. Контур операции будет применяться ниже в методических целях при анализе ряда финансовых операций.

Частичные платежи. Краткосрочные обязательства иногда погашаются с помощью ряда промежуточных платежей. В этом

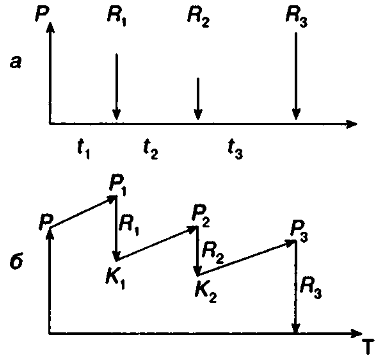

Рис. 2.2

случае надо решить вопрос о том, какую сумму надо брать за базу для расчета процентов и каким путем определять остаток задолженности. Существуют два метода решения этой задачи. Первый, который применяется в основном в операциях со сроком более года, называют *актуарным методом* (*Actuarial method*). Второй метод назван *правилом торговца* (*Merchant's Rule*). Он используется коммерческими фирмами в сделках со сроком не более года. Если иное не оговорено, то при начислении процентов в обоих методах используются обыкновенные проценты с приближенным числом дней (360/360).

Актуарный метод предполагает последовательное начисление процентов *на фактические суммы долга.* Частичный платеж идет в первую очередь на погашение процентов, начисленных на дату платежа. Если величина платежа превышает сумму начисленных процентов, то разница (остаток) идет на погашение основной суммы долга. Непогашенный остаток долга служит базой для начисления процентов за следующий период и т.д. Если же частичный платеж меньше начисленных процентов, то никакие зачеты в сумме долга не делаются. Поступление приплюсовывается к следующему платежу. Для случая, показанного на рис. 2.2, получим следующие расчетные формулы для определения остатка задолженности (K_j)

$$K_1 = P(1 + t_1 i) - R_1; \; K_2 = K_1(1 + t_2 i) - R_2. \qquad (2.8)$$

Задолженность на конец срока должна быть полностью погашена. Таким образом,

$$K_2(1 + t_3 i) - R_3 = 0.$$

ПРИМЕР 2.6. Имеется обязательство погасить за 1,5 года (с 12.03.1999 по 12.09.2000 г.) долг в сумме 15 млн руб. Кредитор согласен получать частичные платежи. Проценты начисляются по ставке 20% годовых. Частичные поступления характеризуются следующими данными (в тыс. руб.):

12.06.1999 г. — 500;
12.06.2000 г. — 5000;
30.06.2000 г. — 8000;
12.09.2000 г. — ?

Решение представим в следующей последовательной записи:

12.03.1999	долг	15 000
12.06.1999	долг с процентами	15 750
	поступление	−500

(Поскольку поступившая сумма меньше начисленных процентов(750), то она присоединяется к следующему поступлению.)

12.06.2000	долг с процентами	18 750
	поступления 500+5000	−5 500
Остаток долга		13 250
30.06.2000	долг с процентами	13 382,5
	поступление 8000	−8 000
Остаток долга		5 382,5
12.09.2000	долг с процентами	5 597,8

Контур данной операции представлен на рис. 2.3.

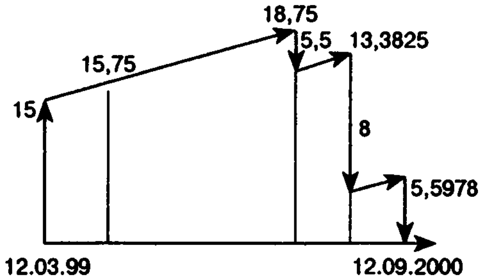

Рис. 2.3

Иной подход предусматривается правилом торговца. Здесь возможны два варианта. Если срок ссуды не превышает год, то сумма долга с процентами остается неизменной до полного погашения. В свою очередь накапливаются частичные платежи с начисленными на них до конца срока процентами. Последний взнос должен быть равен разности этих сумм. В случае, когда срок превышает год, указанные выше расчеты делаются для годового периода задолженности. В конце года из суммы задолженности вычитается наращенная сумма накопленных частичных платежей. Остаток погашается в следующем году.

Алгоритм можно записать следующим образом:

$$Q = S - K = P(1 + ni) - \Sigma R_j(1 + t_j i_j), \qquad (2.9)$$

где Q — остаток долга на конец срока или года, S — наращенная сумма долга, K — наращенная сумма платежей, R_j — сумма частичного платежа, n — общий срок ссуды, t_j — интервал времени от момента платежа до конца срока ссуды или года.

Графическое изображение такой операции при выплате двух промежуточных платежей охватывает два параллельных контура (см. рис. 2.4). Первый характеризует наращение задолженности, второй — наращение на суммы поступлений.

Заметим, что для одних и тех же данных актуарный метод и правило торговца в общем случае дают *разные* результаты. Остаток задолженности по первому методу немного выше, чем по второму.

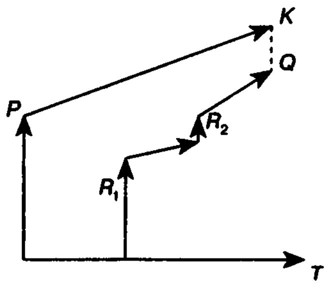

Рис. 2.4

ПРИМЕР 2.7. Обязательство (1,5 млн руб.), датированное 10.08.1999 г., должно быть погашено 10.06.2000 г. Ссуда выдана под 20% годовых. В счет погашения долга 10.12.1999 г. поступило 800 тыс. руб. Остаток долга на конец срока согласно (2.9) составит

$$Q = 1{,}5(1 + \frac{10}{12}0{,}2) - 0{,}8(1 + \frac{6}{12}0{,}2) = 0{,}87 \text{ млн руб.}$$

В свою очередь, при применении актуарного метода получим

$$Q = [(1{,}5 + \frac{4}{12}0{,}2) - 0{,}8](1 + \frac{6}{12}0{,}2) = 0{,}88 \text{ млн руб.}$$

§2.3. Наращение процентов в потребительском кредите

В потребительском кредите проценты, как правило, начисляются на всю сумму кредита и присоединяются к основному долгу уже в момент открытия кредита *(flat rate of interest, add-on interest)*. Условие, прямо скажем, весьма жесткое для должника.

Погашение долга с процентами производится частями, обычно равными суммами на протяжении всего срока кредита. Из сказанного следует, что наращенная сумма долга равна

$$S = P(1 + ni),$$

а величина разового погасительного платежа составит

$$R = \frac{S}{nm}, \tag{2.10}$$

где n — срок кредита в годах, m — число платежей в году.

В связи с тем что проценты здесь начисляются на первоначальную сумму долга, а его фактическая величина систематически уменьшается во времени, действительная стоимость кредита заметно превышает договорную процентную ставку. Подробнее об этом см. гл. 9, в которой, кроме того, обсуждается проблема разбиения платежей на проценты и суммы погашения основного долга. Необходимость в таком разбиении возникает при досрочном погашении задолженности.

ПРИМЕР 2.8. Кредит для покупки товара на сумму 1млн руб. открыт на три года, процентная ставка — 15% годовых, выплаты в конце каждого месяца. Сумма долга с процентами

$$S = 1(1 + 3 \times 0,15) = 1,45 \text{ млн руб.}$$

Ежемесячные платежи:

$$R = \frac{1450}{3 \times 12} = 40,278 \text{ тыс. руб.}$$

§2.4. Дисконтирование по простым процентным ставкам. Наращение по учетной ставке

В финансовой практике часто сталкиваются с задачей, обратной наращению процентов: по заданной сумме S, которую следует уплатить через некоторое время n, необходимо определить сумму полученной ссуды P. Такая ситуация может возникнуть, например, при разработке условий контракта. Расчет P по S необходим и тогда, когда проценты с суммы S удерживаются вперед, т.е. непосредственно при выдаче кредита, ссуды. В этих случаях говорят, что сумма S *дисконтируется* или *учитывается*, сам процесс начисления процентов и их удержание называют *учетом*, а удержанные проценты — *дисконтом* (*discount*) или *скидкой*. Необходимость дисконтирования возникает, например, при покупке краткосрочных обязательств, оплата которых должником произойдет в будущем.

Термин "дисконтирование" употребляется и в более широком смысле — как средство определения любой стоимостной величины, относящейся к будущему, на более ранний момент времени. Такой прием часто называют *приведением* стоимостного показателя к некоторому, обычно начальному, моменту времени. (Приведение может быть осуществлено на любой, в том числе промежуточный, момент времени.)

Величину P, найденную с помощью дисконтирования, называют *современной стоимостью*, или *современной величиной* (*present value*), будущего платежа S, а иногда — *текущей*, или *капитализированной, стоимостью*. Современная величина суммы денег является одним из важнейших понятий в количественном анализе финансовых операций. В большинстве случаев именно с помощью дисконтирования, а не наращения, удобно учитывать такой фактор, как время. Как будет показано далее, большинство аналитических методов основывается на определении современной величины платежей.

В зависимости от вида процентной ставки применяют два метода дисконтирования — *математическое дисконтирование* и *банковский (коммерческий) учет*. В первом случае применяется ставка наращения, во втором — учетная ставка.

Математическое дисконтирование. Математическое дисконтирование представляет собой решение задачи, обратной наращению первоначальной суммы ссуды. Задача в этом случае формулируется так: какую первоначальную сумму ссуды надо выдать в долг, чтобы получить в конце срока сумму S, при условии, что на долг начисляются проценты по ставке i? Решив (2.1) относительно P, находим

$$P = \frac{S}{1 + ni}. \qquad (2.11)$$

Напомним, что $n = t/K$ — срок ссуды в годах.

Установленная таким путем величина P является современной величиной суммы S, которая будет выплачена спустя n лет. Дробь $1/(1 + ni)$ называют *дисконтным*, или *дисконтирующим, множителем*. Этот множитель показывает, какую долю составляет первоначальная величина долга в окончательной его сумме.

ПРИМЕР 2.9. Через 180 дней после подписания договора должник уплатит 310 тыс. руб. Кредит выдан под 16% годовых. Какова первоначальная сумма долга при условии, что временная база равна 365 дням? Согласно (2.11) находим

$$P = \frac{310\,000}{1 + \frac{180}{365}0{,}16} = 287328{,}59 \text{ руб.}$$

Разность $S - P$ можно рассматривать не только как проценты, начисленные на P, но и как дисконт с суммы S.

Банковский учет (учет векселей). Суть операции заключается в следующем. Банк или другое финансовое учреждение до наступления срока платежа (*date of maturity*) по векселю или иному платежному обязательству приобретает его у владельца по цене, которая меньше суммы, указанной на векселе, т.е. покупает (учитывает) его с дисконтом. Получив при наступлении срока векселя деньги, банк реализует процентный доход в виде дисконта. В свою очередь владелец векселя с помощью его учета имеет возможность получить деньги хотя и не в полном объеме, однако ранее указанного на нем срока.

При учете векселя применяется *банковский*, или *коммерческий*, учет. Согласно этому методу проценты за пользование ссудой в виде дисконта начисляются на сумму, подлежащую уплате в конце срока (*maturity value*). При этом применяется *учетная ставка d*.

Размер дисконта, или суммы учета, очевидно равен Snd; если d — годовая учетная ставка, то n измеряется в годах. Таким образом,

$$P = S - Snd = S(1 - nd), \qquad (2,12)$$

где n — срок от момента учета до даты погашения векселя.

Дисконтный множитель здесь равен $(1 - nd)$. Из формулы (2.12) вытекает, что при $n > 1/d$ величина дисконтного множителя и, следовательно, суммы P станет отрицательной. Иначе говоря, при относительно большом сроке векселя учет может привести к нулевой или даже отрицательной сумме P, что лишено смысла. Например, при $d = 20\%$ уже пятилетний срок достаточен для того, чтобы владелец векселя ничего не получил при его учете.

Учет посредством учетной ставки чаще всего осуществляется при временной базе $K = 360$ дней, число дней ссуды обычно берется точным, АСТ/360.

ПРИМЕР 2.10. Тратта (переводной вексель) выдан на сумму 1 млн руб. с уплатой 17.11.2000. Владелец векселя учел его в банке 23.09.2000 по учетной ставке 20% (АСТ/360). Оставшийся до конца срока период равен 55 дням. Полученная при учете сумма (без уплаты комиссионных) равна

$$P = 1000000(1 - \frac{55}{360}\,0{,}2) = 969444{,}4 \text{ руб.}$$

Дисконт составит 30555,6 руб.

Дополним условия примера. Пусть на всю сумму долга теперь начисляются проценты по ставке простых процентов $i = 20{,}5\%$ годовых. В этом случае, очевидно, надо решить две задачи: определить наращенную сумму долга и сумму, получаемую при учете. Оба последовательных действия можно представить в одной формуле

$$P'' = P(1 + ni)(1 - n'd),$$

где n — общий срок обязательства, n' — срок от момента учета до погашения.

Пусть в данном примере $n = 120/360$, тогда

$$P'' = 1\,000\,000(1 + \frac{120}{360}\,0{,}205)(1 - \frac{55}{360}\,0{,}2) = 1\,035\,690 \text{ руб.}$$

Разумеется, дисконт, как скидка с конечной суммы долга, необязательно определяется через ту или иную процентную ставку, он может быть установлен по соглашению сторон и в виде фиксированной величины для всего срока. Однако, размер ставки неявно всегда имеется ввиду.

Наращение по учетной ставке. Простая учетная ставка иногда применяется и при расчете наращенной суммы. В частности, в этом возникает необходимость при определении суммы, которую надо проставить в векселе, если задана текущая сумма долга. Наращенная сумма в этом случае

$$S = P\frac{1}{1 - nd}. \qquad (2.13)$$

Множитель наращения здесь равен $1/(1 - nd)$. Наращение не пропорционально ни сроку, ни ставке. Заметим, что при $n > 1/d$ расчет лишен смысла, так как наращенная сумма становится бесконечно большим числом. Такая ситуация не возникает при математическом дисконтировании: при любом сроке современная величина платежа больше нуля.

ПРИМЕР 2.11. По данным примера 2.2 определим наращенную сумму при условии, что проценты начисляются по простой учетной ставке d = 18%:

$$S = 1\,000\,000\frac{1}{1 - \frac{258}{360}0{,}18} = 1148105{,}62 \text{ руб.}$$

§2.5. Прямые и обратные задачи при начислении процентов и дисконтировании по простым ставкам

Как было показано выше, оба вида ставок (наращения и дисконтирования) применяются для решения сходных задач. Однако для ставки наращения прямой задачей является определение наращенной суммы, обратной — дисконтирование. Для учетной ставки, наоборот, прямая задача заключается в дисконтировании, обратная — в наращении.

Очевидно, что *рассмотренные два метода наращения и дисконтирования* — по ставке наращения i и учетной ставке d — приводят к *разным результатам* даже тогда, когда $i = d$.

Ставки	Прямая задача	Обратная задача	Формулы
i	$S = P(1 + ni)$	$P = S / (1 + ni)$	см. (2.1), (2.11)
d	$P = S(1 - nd)$	$S = P / (1 - nd)$	см. (2.12), (2.13)

Заметим, что учетная ставка отражает фактор времени более жестко. Влияние этого фактора усиливается при увеличении величины ставки. Для иллюстрации сказанного на рис.2.5 и в табл. 2.1 приведены дисконтные множители (ДМ) для случая, когда $i = d = 20\%$.

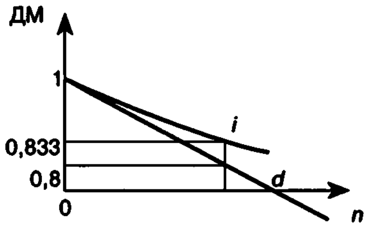

Рис. 2.5

Таблица 2.1

Дисконтные множители, $i = d = 20\%$

Вид ставки	Срок в годах					
	1/12	1/4	1/2	1	2	10
i	0,9836	0,9524	0,9091	0,8333	0,7143	0,3333
d	0,9833	0,9500	0,9000	0,8000	0,6000	—

Сравнивая формулы (2.1) и (2. 13), легко понять, что учетная ставка дает более быстрый рост суммы задолженности, чем такой же величины ставка наращения. Множители наращения (МН) для двух видов ставок при условии, что $i = d = 20\%$, показаны на рис. 2.6 и в табл. 2.2.

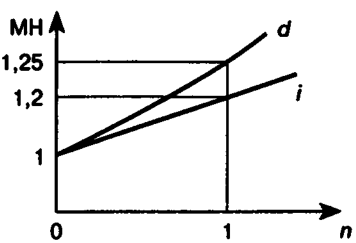

Рис. 2.6

Таблица 2.2

Множители наращения, $i = d = 20\%$

Вид ставки	Срок в годах					
	1/12	1/4	1/2	1	2	10
i	1,0167	1,0500	1,1000	1,2000	1,4000	3
d	1,0169	1,0526	1,1111	1,2500	1,6667	∞

Из сказанного выше следует, что выбор конкретного вида процентной ставки заметно влияет на финансовые итоги операции. Однако возможен такой подбор величин ставок, при котором результаты наращения или дисконтирования будут одинаковыми. Такие ставки называются *эквивалентными*. Проблема эквивалентности процентных ставок рассматривается в гл. 3.

§2.6. Определение срока ссуды и величины процентной ставки

При разработке условий контрактов или их анализе и сравнении возникает необходимость в решении ряда, если так можно назвать, вторичных задач — определении срока ссуды и размера процентной ставки в том или ином ее виде при всех прочих заданных условиях.

Срок ссуды. Необходимые для расчета продолжительности ссуды в годах и днях формулы получим, решив (2.1) и (2.12) относительно n.

Срок в годах:

$$n = \frac{S - P}{Pi} = \frac{S / P - 1}{i}, \tag{2.14}$$

$$n = \frac{S - P}{Sd} = \frac{1 - P / S}{d}. \tag{2.15}$$

Срок в днях (напомним, что $n = t/K$, где K — временная база):

$$t = \frac{S - P}{Pi} K, \tag{2.16}$$

$$t = \frac{S - P}{Sd} K. \tag{2.17}$$

ПРИМЕР 2.12. Какова должна быть продолжительность ссуды в днях для того, чтобы долг, равный 100 тыс. руб., вырос до 120 тыс. руб. при условии, что начисляются простые проценты по ставке 25% годовых (ACT/ACT)? По формуле (2.16) находим

$$t = \frac{120 - 100}{100 \times 0{,}25} 365 = 292 \text{ дня.}$$

Величина процентной ставки. Необходимость в расчете процентной ставки возникает при определении финансовой эффективности операции и при сравнении контрактов по их доходности в случаях, когда процентные ставки в явном виде не указаны. Решив выражения (2.1) и (2.12) относительно i или d, получим искомые формулы для сроков, измеренных в годах и днях:

$$i = \frac{S - P}{Pn} = \frac{S - P}{Pt} K, \tag{2.18}$$

$$d = \frac{S - P}{Sn} = \frac{S - P}{St} K. \tag{2.19}$$

ПРИМЕР 2.13. В контракте предусматривается погашение обязательства в сумме 110 тыс. руб. через 120 дней. Первоначальная сумма долга 90 тыс. руб. (ACT/360). Как видим, здесь не оговорен уровень процентной ставки. Необходимо определить доходность ссудной операции для кредитора в виде ставки процента и учетной ставки. По формулам (2.18) и (2.19) находим

$$i = \frac{110 - 90}{90 \times 120} 360 = 0{,}666(6), \text{ или } 66{,}67\%,$$

$$d = \frac{110 - 90}{110 \times 120} 360 = 0{,}5454, \text{ или } 54{,}54\%.$$

Иногда размер дисконта фиксируется в договоре в виде процента скидки (общей учетной ставки) d' за весь срок ссуды. В этом случае

$$P = S(1 - d').$$

Имея в виду, что $P = S / (1 + ni)$, находим

$$i = \frac{d'}{n(1 - d')}.$$

Годовая учетная ставка находится элементарно:

$$d = d' / n.$$

ПРИМЕР 2.14. Стороны договорились о том, что из суммы ссуды, выданной на 210 дней, удерживается дисконт в размере 12%. Необходимо определить цену кредита в виде годовой ставки простых процентов и учетной ставки ($K = 360$):

$$i = \frac{0,12}{\frac{210}{360}(1 - 0,12)} = 0,23376, \text{ или } 23,38\%,$$

$$d = \frac{0,12}{210/360} = 0,20571, \text{ или } 20,57\%.$$

§ 2.7. Конверсия валюты и наращение процентов

Расссмотренные выше методы наращения процентов позволяют перейти к обсуждению более сложных и важных в практическом отношении задач. Остановимся на одной из них. Речь пойдет о совмещении операций конверсии (обмена) валюты и наращения процентов.

При возможности обмена рублевых средств на СКВ и обратной конверсии целесообразно сравнить доходы от непосредственного размещения имеющихся денежных средств в депозиты и опосредованно через другую валюту. Сказанное относится и к получению дохода от СКВ при ее обмене на рубли, депонировании и обратной конверсии.

Возможны четыре варианта для наращения процентов с конверсией денежных ресурсов и без нее:

без конверсии: СКВ → СКВ;
с конверсией: СКВ → Руб → Руб → СКВ;
без конверсии: Руб → Руб;
с конверсией: Руб → СКВ → СКВ → Руб.

Варианты с конверсией показаны на рис.2.7.

$$
\begin{tikzcd}
P(\text{СКВ}) \arrow[r, dash, dotted, "j"] \arrow[d] & S(\text{СКВ}) \\
P(\text{руб.}) \arrow[r, "i"] & S(\text{руб.}) \arrow[u]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
P(\text{руб.}) \arrow[r, dash, dotted, "i"] \arrow[d] & S(\text{руб.}) \\
P(\text{СКВ}) \arrow[r, "j"] & S(\text{СКВ}) \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

а *б*

Рис. 2.7

В операции наращения с конверсией валют существует два источника дохода — изменение курса и наращение процентов, причем, если второй из них безусловный (так как ставка процента фиксирована), то этого нельзя сказать о первом источнике. Более того, двойное конвертирование валюты (в начале и конце операции) может быть при неблагоприятных условиях убыточным. Решим в связи с этим две задачи. Определим сумму в конце операции и ее доходность для двух вариантов операции с конверсией.

Вариант СКВ → Руб → Руб → СКВ. Проанализируем сначала вариант *а*, показанный на рис. 2.7. Примем обозначения:

P_v — сумма депозита в СКВ,
P_r — сумма депозита в рублях,
S_v — наращенная сумма в СКВ,
S_r — наращенная сумма в рублях,
K_0 — курс обмена в начале операции (курс СКВ в рублях),
K_1 — курс обмена в конце операции,
n — срок депозита,
i — ставка наращения для рублевых сумм,
j — ставка наращения для конкретного вида СКВ.

Операция предполагает три шага: обмен валюты на рубли, наращение процентов на эту сумму и, наконец, конвертирование в исходную валюту. Конечная (наращенная) сумма в валюте определяется как

$$S_v = P_v K_0 (1 + ni) \frac{1}{K_1}. \tag{2.20}$$

Три сомножителя этой формулы соответствуют трем перечисленным выше шагам. Множитель наращения m с учетом двойного конвертирования здесь имеет вид

$$m = \frac{K_0}{K_1}(1 + ni) = \frac{1 + ni}{K_1/K_0}. \tag{2.21}$$

Взаимодействие двух факторов роста исходной суммы в этой формуле представлено наиболее наглядно. С ростом ставки множитель наращения линейно увеличивается, в свою очередь, рост конечного курса обмена уменьшает его.

ПРИМЕР 2.15. Предполагается поместить 1000 долл. на рублевом депозите. Курс продажи на начало срока депозита 26,08 руб. за $1, курс покупки доллара в конце операции 26,45 руб. Процентные ставки: i = 22%; j = 15% (360/360). Срок депозита — 3 месяца.

$$S_v = 1000 \times \frac{26{,}08}{26{,}45}(1 + \frac{3}{12} \times \frac{22}{100}) = 1040{,}2 \text{ долл.}$$

В свою очередь прямое наращение исходной долларовой суммы по долларовой ставке процента дает

$$S_v = 1000(1 + 0{,}25 \times 0{,}15) = 1037{,}5 \text{ долл.}$$

Продолжим анализ и поставим перед собой вторую задачу — измерим доходность операции в целом. В качестве измерителя доходности за срок операции примем простую годовую ставку процента $i_э$. Эта ставка характеризует рост суммы P_v до величины S_v:

$$i_э = \frac{S_v - P_v}{P_v n}.$$

Подставим в эту формулу значение S_v, полученное из (2.20). После несложных преобразований имеем

$$i_э = \left[\frac{K_0}{K_1}(1 + ni) - 1\right]/n = \frac{m - 1}{n}.$$

Данное выражение позволяет сделать ряд заключений, которые удобно получить, обратившись к графику (см. рис. 2.8). Введем величину, характеризующую отношение последнего и первого курсов валюты:

$$k = \frac{K_1}{K_0}.$$

С увеличением k эффективность операции падает. При $k = 1$ параметр $i_э = i$, при $k > 1$ параметр $i_э < i$ (точка a на оси k), наконец, при самой благоприятной для владельца денег ситуации ($k < 1$) имеем $i_э > i$.

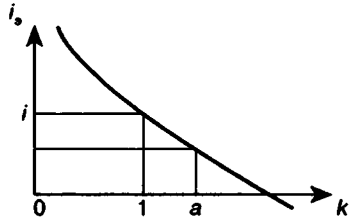

Рис. 2.8

Вариант Руб → СКВ → СКВ → Руб. В этом варианте (см. рис. 2.7, *б*) трем шагам операции соответствуют три сомножителя формулы

$$S_r = \frac{P_r}{K_0}(1 + nj)K_1 = P_r(1 + nj)\frac{K_1}{K_0}. \qquad (2.22)$$

Как и в предыдущем варианте, множитель наращения линейно зависит от ставки, но теперь ставки процента для СКВ. Очевидно, что зависимости этого множителя от конечного курса или его темпа роста также линейные.

ПРИМЕР 2.16. Допустим, необходимо поместить на валютном депозите сумму в рублях (1 млн). Остальные условия — из примера 2.15. Наращенная сумма в рублях к концу срока составит:

$$S_r = 1000 \times (1 + 0{,}25 \times 0{,}15)\frac{26{,}45}{26{,}08} = 1052{,}2 \text{ тыс. руб.}$$

Прямое инвестирование в рублевый депозит дает больше:

$$S_r = 1000 \times (1 + 0{,}25 \times 0{,}22) = 1055 \text{ тыс. руб.}$$

Перейдем теперь к анализу эффективности операции. Доходность операции определяется как

$$i_э = \frac{S_r - P_r}{P_r n},$$

откуда

$$i_э = \left(\frac{K_1}{K_0}(1 + nj) - 1\right)/n = (k(1 + nj) - 1)/n. \qquad (2.23)$$

Зависимость показателя эффективности от k, как видим, линейная. При $k = 1$ $i_э = j$ (см. рис. 2.9), при $k > 1$ $i_э > j$, наконец, при $k < 1$ $i_э < j$, в частности, если $k = k' = 1/(1 + nj)$, операция не принесет никакого дохода: $i_э < 0$.

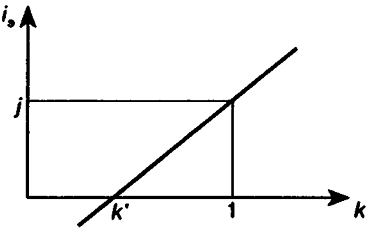

Рис. 2.9

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Башарин Г.П.* Начала финансовой математики. М.: ИНФРА-М, 1997.
2. *Четыркин Е.М., Васильева Н. Е.* Финансово-экономические расчеты. М.: Финансы и статистика, 1990. Гл. 1.
3. *Ковалев В.В., Уланов В.А.* Курс финансовых вычислений. М.: Финансы и статистика, 1994. Гл. 5.
4. *Cartledge P.* Financial arithmetic. A practitioners guide. Euromoney Books, 1993.

Глава 3
СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ

§3.1. Начисление сложных годовых процентов

Формула наращения. В средне- и долгосрочных финансово-кредитных операциях, если проценты не выплачиваются сразу после их начисления, а присоединяются к сумме долга, применяют *сложные проценты (compound interest)*. База для начисления сложных процентов в отличие от простых не остается постоянной — она увеличивается с каждым шагом во времени. Абсолютная сумма начисляемых процентов возрастает, и процесс увеличения суммы долга происходит с ускорением. Наращение по сложным процентам можно представить как последовательное реинвестирование средств, вложенных под простые проценты на один период начисления (*running period*). Присоединение начисленных процентов к сумме, которая послужила базой для их начисления, часто называют ***капитализацией процентов.***

Найдем формулу для расчета наращенной суммы при условии, что проценты начисляются и капитализируются один раз в году (годовые проценты). Для этого применяется *сложная ставка* наращения. Для записи формулы наращения применим те же обозначения, что и в формуле наращения по простым процентам:

P — первоначальный размер долга (ссуды, кредита, капитала и т.д.),

S — наращенная сумма на конец срока ссуды,

n — срок, число лет наращения,

i — уровень годовой ставки процентов, представленный десятичной дробью.

Очевидно, что в конце первого года проценты равны величине Pi, а наращенная сумма составит $P + Pi = P(1 + i)$. К концу второго года она достигнет величины $P(1 + i) + P(1 + i)i = P(1 + i)^2$ и т.д. В конце n-го года наращенная сумма будет равна

$$S = P(1 + i)^n. \tag{3.1}$$

Проценты за этот же срок в целом таковы:

$$I = S - P = P[(1 + i)^n - 1]. \tag{3.2}$$

Часть из них получена за счет начисления процентов на проценты. Она составляет

$$I_p = P[(1 + i)^n - (1 + ni)]. \tag{3.3}$$

Как показано выше, рост по сложным процентам представляет собой процесс, соответствующий геометрической прогрессии, первый член которой равен P, а знаменатель — $(1 + i)$. Последний член прогресии равен наращенной сумме в конце срока ссуды. Графическая иллюстрация наращения по сложным процентам представлена на рис. 3.1.

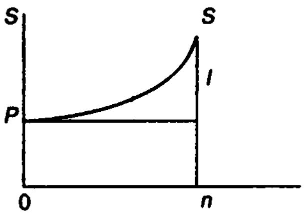

Рис. 3.1

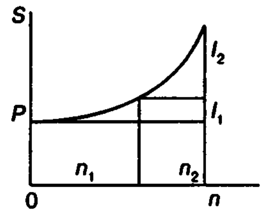

Рис. 3.2

Величину $(1 + i)^n$ называют ***множителем наращения (compound interest factor)*** по сложным процентам. Значения этого множителя для целых чисел n приводятся в ***таблицах сложных процентов***. Фрагмент такой таблицы приведен в табл. 2 Приложения. Точность расчета множителя в практических расчетах определяется допустимой степенью округления наращенной суммы (до последней копейки, рубля и т.д.).

Время при наращении по сложной ставке обычно измеряется как ACT/ ACT.

ПРИМЕР 3.1. Какой величины достигнет долг, равный 1 млн руб., через 5 лет при росте по сложной ставке 15,5% годовых?

По формуле (3.1) находим

$$S = 1\,000\,000(1 + 0{,}155)^5 = 2055464{,}22 \text{ руб.}$$

Как видим, величина множителя наращения зависит от двух параметров — i и n. Следует отметить, что при большом сроке наращения даже небольшое изменение ставки заметно влияет на величину множителя. В свою очередь очень большой срок приводит к устрашающим результатам даже при небольшой процентной ставке. Здесь уместна следующая иллюстрация. Остров Манхэттен, на котором расположена центральная часть Нью-Йорка, был куплен (а точнее выменен) за 24 долл.[1] Стоимость земли этого острова 350 лет спустя оценивалась примерно в 40 млрд долл., т.е. первоначальная сумма увеличилась в $1{,}667 \times 10^9$ раз! Такой рост достигается при сложной ставке, равной всего 6,3 % годовых.

Очевидно, что очень высокая (инфляционная) процентная ставка может быть применена только для короткого срока. В противном случае результат наращения окажется бессмысленным. Например, уже при $i = 120\%$ (а такая инфляционная ставка не столь уж давно наблюдалась в России, правда для краткосрочных ссуд) и $n = 10$ имеем чудовищный по размеру множитель наращения $(1 + 1{,}2)^{10} = 2656$.

Формула наращения по сложным процентам (3.1) получена для годовой процентной ставки и срока, измеряемого в годах. Однако ее можно применять и при других периодах начисления. В этих случаях i означает ставку за один период начисления (месяц, квартал и т.д.), а n — число таких периодов. Например, если i — ставка за полугодие, то n — число полугодий и т.д.

Формулы (3.1)—(3.3) предполагают, что проценты на проценты начисляются по той же ставке, что и при начислении на основную сумму долга. Усложним условия начислений процентов. Пусть проценты на основной долг начисляются по ставке i, а проценты на проценты — по ставке $r \neq i$ В этом случае

$$S = P + Pi[1 + (1 + r) + (1 + r)^2 + ... + (1 + r)^{n-1}].$$

Ряд в квадратных скобках представляет собой геометрическую прогрессию с первым членом, равным 1, и знаменателем $(1 + r)$. В итоге имеем

$$S = P\left(1 + i\frac{(1 + r)^n - 1}{r}\right). \tag{3.4}$$

[1] См.: Томас Д. Воротилы финансового мира. М.: Прогресс, 1976.

Начисление процентов в смежных календарных периодах. Выше при начислении процентов не принималось во внимание расположение срока начисления процентов относительно календарных периодов. Вместе с тем, часто даты начала и окончания ссуды находятся в двух периодах. Ясно, что начисленные за весь срок проценты не могут быть отнесены только к последнему периоду. В бухгалтерском учете, при налогообложении, наконец, в анализе финансовой деятельности предприятия возникает задача распределения начисленных процентов по периодам.

Алгоритм деления общей массы процентов легко сформулировать на основе графика, построенного для двух смежных календарных периодов (см. рис. 3.2). Общий срок ссуды делится на два периода n_1 и n_2. Соответственно,

$$I = I_1 + I_2,$$

где $I_1 = P[(1 + i)^{n_1} - 1)]$; $I_2 = P(1 + i)^{n_1}[(1 + i)^{n_2} - 1] =$

$$= P[(1 + i)^{n} - (1 + i)^{n_1}].$$

ПРИМЕР 3.2. Ссуда была выдана на два года — с 1 мая 1998 г. по 1 мая 2000 г. Размер ссуды 10 млн руб. Необходимо распределить начисленные проценты (ставка 14% ACT/ACT) по календарным годам. Получим следующие суммы процентов (в тыс. руб.):

за период с 1 мая до конца года (244 дня): $10\,000(1{,}14^{\frac{244}{365}} - 1) = 915{,}4$;

за 1999 г.: $10\,000 \times 1{,}14^{\frac{244}{365}} \times 0{,}14 = 1528{,}2$;

наконец, с 1 января до 1 мая 2000 г. (121 день): $10\,000 \times 1{,}14^{1\frac{244}{365}} \times (1{,}14^{\frac{121}{365}} - 1) = 552{,}4$. Итого за весь срок — 2996 тыс. руб. Такой же результат получим для всего срока в целом:

$$10\,000 \times (1{,}14^2 - 1) = 2996.$$

Переменные ставки. Формула (3.1) предполагает постоянную ставку на протяжении всего срока начисления процентов. Неустойчивость кредитно-денежного рынка заставляет модернизировать "классическую" схему, например, с помощью применения *плавающих ставок (floating rate)*. Естественно, что расчет на перспективу по таким ставкам весьма условен. Иное дело — расчет постфактум. В этом случае, а также тогда, когда изменения размеров ставок фиксируются в контракте, общий множитель наращения определяется как произведение частных, т.е.

$$S = P\left(1 + i_1\right)^{n_1}\left(1 + i_2\right)^{n_2}...\left(1 + i_k\right)^{n_k}, \qquad (3.5)$$

где $i_1, i_2,..., i_k$ — последовательные значения ставок; $n_1, n_2,..., n_k$ — периоды, в течение которых "работают" соответствующие ставки.

ПРИМЕР 3.3. Срок ссуды — 5 лет, договорная базовая процентная ставка — 12% годовых плюс маржа 0,5% в первые два года и 0,75% в оставшиеся годы. Множитель наращения в этом случае составит

$$q = (1 + 0{,}125)^2 (1 + 0{,}1275)^3 = 1{,}81407.$$

Начисление процентов при дробном числе лет. Часто срок в годах для начисления процентов не является целым числом. В правилах ряда коммерческих банков для некоторых операций проценты начисляются только за целое число лет или других периодов начисления. Дробная часть периода отбрасывается. В большинстве же случаев учитывается полный срок. При этом применяют два метода. Согласно первому, назовем его *общим*, расчет ведется непосредственно по формуле (3.1). Второй, *смешанный*, метод предполагает начисление процентов за целое число лет по формуле сложных процентов и за дробную часть срока по формуле простых процентов:

$$S = P(1 + i)^a (1 + bi), \qquad (3.6)$$

где $n = a + b$ — срок ссуды, a — целое число лет, b — дробная часть года.

Аналогичный метод применяется и в случаях, когда периодом начисления является полугодие, квартал или месяц.

При выборе метода расчета следует иметь в виду, что множитель наращения по смешанному методу оказывается несколько больше, чем по общему, так как для $n < 1$ справедливо соотношение $1 + ni > (1 + i)^n$. Наибольшая разница наблюдается при $b = 1/2$.

ПРИМЕР 3.4. Кредит в размере 3 млн руб. выдан на 2 года и 160 дней ($n = 3\frac{160}{365} = 3{,}43836$ года) под 16,5% сложных годовых. Сумму долга на конец срока определим по формуле (3.1):

$$S = 3\,000\,000 \times 1{,}165^{3{,}43836} = 5071935{,}98 \text{ руб.},$$

в свою очередь, смешанный метод дает

$$S = 3\,000\,000 \times 1{,}165^3 \times (1 + 0{,}43836 \times 0{,}165) = 5086595{,}98 \text{ руб.}$$

§3.2. Сравнение роста по сложным и простым процентам

Для того чтобы сопоставить результаты наращения по разным процентным ставкам, достаточно сравнить соответствующие множители наращения. Нетрудно убедиться в том, что при одинаковых уровнях процентных ставок соотношения этих множителей существенно зависят от срока. В самом деле, при условии, что временная база для начисления процентов одна и та же, находим следующие соотношения (в приведенных ниже формулах подписной индекс s проставлен у ставки простых процентов):

— для срока меньше года простые проценты больше сложных:

$$(1 + ni_s) > (1 + i)^n,$$

— для срока больше года сложные проценты больше простых:

$$(1 + ni_s) < (1 + i)^n,$$

— для срока, равного году, множители наращения равны друг другу.

Заметим также, что при $n > 1$ с увеличением срока различие в последствиях применения простых и сложных процентов усиливается. Графическую иллюстрацию соотношения множителей наращения см. на рис. 3.3. В табл. 3.1 приведены значения множителей наращения для $i_s = i = 12\%$, $K = 365$ дней.

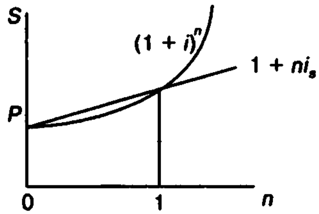

Рис. 3.3

Таблица 3.1

Сравнение множителей наращения, $i_s = i = 12\%$

Множители наращения	Срок ссуды					
	30 дн.	180 дн.	1 год	5 лет	10 лет	100 лет
$1 + ni$	1,01644	1,05918	1,12	1,6	2,2	13
$(1 + i)^n$	1,00936	1,05748	1,12	1,76234	3,10584	83522,3

Формулы удвоения. Наиболее наглядно влияние вида ставки можно охарактеризовать, сопоставляя числа лет, необходимые для удвоения первоначальной суммы. На основе (2.1) и (3.1) получим следующие *формулы удвоения:*

— удвоение по простым процентам:

$$n = \frac{1}{i_s},$$

— удвоение по сложным процентам:

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1+i)} = \frac{0{,}69315}{\ln(1+i)}.$$

> **ПРИМЕР 3.5.** Найдем сроки удвоения для $i_s = i = 22{,}5\%$:
>
> $$n = \frac{1}{0{,}225} = 4{,}44; \quad n = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}225} = 3{,}04.$$

§3.3. Наращение процентов *m* раз в году. Номинальная и эффективная ставки

Номинальная ставка. В современных условиях проценты капитализируются, как правило, не один, а несколько раз в году — по полугодиям, кварталам и т.д. Некоторые зарубежные коммерческие банки практикуют даже ежедневное начисление процентов. При начислении процентов несколько раз в году можно воспользоваться формулой (3.1). Параметр n в этих условиях будет означать число периодов начисления, а под ставкой i следует понимать ставку за соответствующий период. Например, при поквартальном начислении процентов за 5 лет общее число периодов начисления составит $5 \times 4 = 20$. Множитель наращения по квартальной (сложной) ставке 8% равен в этом случае $1{,}08^{20} = 4{,}6609$. На практике, как правило, в контрактах обычно фиксируется не ставка за период начисления, а годовая ставка, одновременно указывается период начисления процентов. Например, "18% годовых с поквартальным начислением" процентов.

Итак, пусть годовая ставка равна j, число периодов начисления в году — m. Каждый раз проценты начисляются по ставке j/m. Ставку j называют *номинальной (nominal rate)*. Формулу наращения теперь можно представить следующим образом:

$$S = P\left(1 + \frac{j}{m}\right)^N, \tag{3.7}$$

где N — общее количество периодов начисления.

Если N целое число ($N = nm$), то в большинстве случаев для определения величины множителя наращения можно воспользоваться таблицей сложных процентов (табл. 2 Приложения). Например, при $j = 20\%$ и поквартальном начислении процентов ($m = 4$) в течение 5 лет отыскиваем табличное значение множителя для $i = 20/4 = 5\%$ и $n = 5 \times 4 = 20$; находим $q = 2{,}653298$.

ПРИМЕР 3.6. Изменим одно условие в примере 3.1. Пусть теперь проценты начисляются не раз в году, а поквартально. В этом случае $N = 20$ и

$$S = 1\ 000\ 000\left(1 + \frac{0{,}155}{4}\right)^{20} = 2139049{,}01 \text{ руб.}$$

Напомним, что при ежегодном начислении процентов мы получили $S = 2055464{,}22$.

Нетрудно догадаться, что *чем чаще начисляются проценты, тем быстрее идет процесс наращения* (цепной процесс). Для иллюстрации сказанного приведем значения множителей для $j = 20\%$ и $n = 10$ лет и разной частоте наращения в пределах года:

m	1	2	4	12	365
q	6,1917	6,7275	7,04	7,2682	7,385

Как следует из приведенных данных, наибольшую "прибавку" в наращении дает переход от ежегодного начисления процентов к полугодовому, наименьший эффект — переход от ежемесячного к ежедневному.

ПРИМЕР 3.7. Какова сумма долга через 25 месяцев, если его первоначальная величина 500 тыс.руб., проценты сложные, ставка 20% годовых, начисление поквартальное?

По условиям задачи число периодов начисления $N = 25 : 3 = 8\ 1/3$. Применим два метода наращения — общий и смешанный (см. (3.6)). Получим

$$S = 500\,000\left(1+\frac{0{,}2}{4}\right)^{8\frac{1}{3}} = 750840{,}04 \text{ руб.},$$

$$S = 500\,000\left(1+\frac{0{,}2}{4}\right)^{8} \times \left(1+\frac{1}{3}\times\frac{0{,}2}{4}\right) = 751039{,}85 \text{ руб.}$$

Эффективная ставка. Введем теперь новое понятие — *действительная*, или *эффективная ставка процента (effective rate)*. Эта ставка измеряет тот реальный относительный доход, который получают в целом за год. Иначе говоря, эффективная ставка — это годовая ставка сложных процентов, которая дает тот же результат, что и m-разовое начисление процентов по ставке j/m.

Обозначим эффективную ставку через i. По определению множители наращения по двум ставкам (эффективной и номинальной при m-разовом начислении) должны быть равны друг другу:

$$(1+i)^n = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}.$$

Из равенства множителей наращения следует

$$i = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{m} - 1. \qquad (3.8)$$

Эффективная ставка при $m > 1$ больше номинальной.

Замена в договоре номинальной ставки j при m-разовом начислении процентов на эффективную ставку i не изменяет финансовых обязательств участвующих сторон. *Обе ставки эквива-*

лентны в финансовом отношении. Отсюда, кстати, следует, что разные по величине номинальные ставки оказываются эквивалентными, если соответствующие им эффективные ставки имеют одну величину.

ПРИМЕР 3.8. Каков размер эффективной ставки, если номинальная ставка равна 25% при помесячном начислении процентов? Имеем

$$i = \left(1 + \frac{0{,}25}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}280732.$$

Для участвующих в сделке сторон безразлично применить ставку 25% при помесячном начислении процентов или годовую (эффективную) ставку 28,0732%.

Для сокращения дальнейшей записи используем символ $j^{(m)}$, означающий размер номинальной ставки и количество начислений за год. Эквивалентная замена номинальной ставки имеет место только в том случае, когда удовлетворяется равенство

$$\left(1 + \frac{j_1^{(m_1)}}{m_1}\right)^{m_1} = \left(1 + \frac{j_2^{(m_2)}}{m_2}\right)^{m_2}.$$

Поскольку m может иметь только целые значения, то удобнее определять значение новой ставки, задаваясь величиной m_2:

$$j_2^{(m_2)} = m_2\left[\left(1 + \frac{j_1^{(m_1)}}{m_1}\right)^{\frac{m_1}{m_2}} - 1\right].$$

ПРИМЕР 3.9. Определим номинальную ставку $j^{(4)}$, которая безубыточно заменит ставку $j^{(12)}$ = 25% в примере 3.8. Получим

$$j^{(4)} = 4\left[\left(1 + \frac{0{,}25}{12}\right)^{\frac{12}{4}} - 1\right] = 0{,}25524.$$

Таким образом, сокращение количества начислений потребует увеличения ставки с 25 до 25, 524 %.

При подготовке контрактов может возникнуть необходимость в определении j по заданным значениям i и m. Находим

$$j = m\left(\sqrt[m]{1+i} - 1\right). \tag{3.9}$$

§3.4. Дисконтирование по сложной ставке

При изучении простых процентов мы рассматривали математическое дисконтирование и банковский (коммерческий) учет. Первое заключалось в определении P по значению S при заданной ставке процента, второе — при заданной учетной ставке. Применим первый метод и дисконтируем теперь сумму S по сложной ставке процентов. На основе (3.1) получим

$$P = \frac{S}{(1+i)^n} = Sv^n, \tag{3.10}$$

$$v^n = (1+i)^{-n} = \frac{1}{q^n}. \tag{3.11}$$

Величину v называют *дисконтным, учетным,* или *дисконтирующим, множителем* (*compound discount factor*). Значения этого множителя легко табулировать. В Приложении приведен фрагмент такой таблицы (см. табл. 3).

Для случаев, когда проценты начисляются m раз в году, получим

$$P = \frac{S}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}} = Sv^{mn}, \tag{3.12}$$

$$v^{mn} = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}. \tag{3.13}$$

Напомним, что величину P, полученную дисконтированием S, называют *современной, текущей, стоимостью,* или *современной величиной* S. Современная стоимость может быть рассчитана на любой момент до выплаты суммы S.

Разность $S - P$, в случае, когда P определено дисконтированием, называют *дисконтом*. Обозначим последний через D:

$$D = S - P = S(1 - v^n).$$

ПРИМЕР 3.10. Сумма в 5 млн руб. выплачивается через 5 лет. Необходимо определить ее современную величину при условии, что применяется ставка сложных процентов, равная 12% годовых.

Дисконтный множитель для данных условий составит

$$v^5 = 1{,}12^{-5} = 0{,}56574,$$

т.е. первоначальная сумма сократилась почти на 44%. Современная величина равна

$$P = 5000 \times 1{,}12^{-5} = 2837{,}1 \text{ тыс. руб.}$$

Как уже отмечалось в гл. 2, современная величина платежа — одна из важнейших характеристик, применяемых в финансовом анализе. Кратко остановимся на некоторых ее формальных свойствах. Прежде всего отметим очевидное свойство — чем выше ставка процента, тем сильнее дисконтирование при всех прочих равных условиях (см. рис. 3.4). Например, если в примере 3.10 увеличить ставку вдвое, то дисконтный множитель снизится с 0,56574 до 0,34111.

Значение дисконтного множителя уменьшается и с ростом величины m.

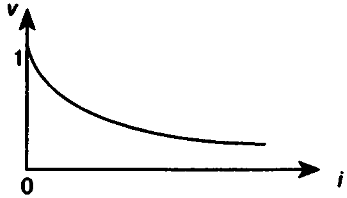

Рис. 3.4

Влияние срока платежа также очевидно — с увеличением срока величина современной стоимости убывает. Отсюда следует, что при очень больших сроках она крайне незначительна. Например, если взять ставку $i = 12\%$, то для $n = 10$, 50 и 100 находим следующие значения дисконтных множителей: 0,32197; 0,00346 и 0,000012.

Высокие, и особенно инфляционные, ставки, примененные для дисконтирования, приводят к бессмысленным результатам даже при сравнительно небольших сроках: например, для ставки 200% и сроке 5 лет дисконтный множитель равен 0,004116, т.е. близок к нулю.

§3.5. Операции со сложной учетной ставкой

Учет по сложной учетной ставке. В практике учетных операций иногда применяют *сложную учетную ставку* (*compound discound rate*). В этих случаях процесс дисконтирования происходит с замедлением, так как каждый раз учетная ставка применяется не к первоначальной сумме (как при простой учетной ставке), а к сумме, дисконтированной на предыдущем шаге во времени. Дисконтирование по сложной учетной ставке осуществляется по формуле

$$P = S(1 - d)^n, \qquad (3.14)$$

где d — сложная годовая учетная ставка.

ПРИМЕР 3.11. Долговое обязательство на сумму 5 млн руб., срок оплаты которого наступает через 5 лет, продано с дисконтом по сложной учетной ставке 15% годовых. Каков размер полученной за долг суммы и величина дисконта (в тыс. руб.)? Имеем

$$P = 5000(1 - 0{,}15)^5 = 2218{,}5; \quad D = 5000 - 2218{,}5 = 2781{,}5.$$

Если применить простую учетную ставку того же размера, то

$$P = 5000(1 - 5 \times 0{,}15) = 1250; \quad D = 5000 - 1250 = 3750.$$

Как следует из приведенного примера, дисконтирование по сложной учетной ставке выгоднее для должника, чем по простой учетной ставке. Сказанное становится понятным при сравнении формул для дисконтных множителей:

$$w_s = (1 - nd_s) \text{ и } w = (1 - d)^n,$$

где d_s, d — простая и сложная учетные ставки соответственно.

Согласно первой из приведенных формул значение дисконтного множителя равномерно уменьшается по мере роста n и достигает нуля при $n = 1/d$. Согласно второй — множитель экспоненциально уменьшается и достигает нуля лишь в пределе, при $n = \infty$. Величины дисконтных множителей при применении простой и сложной учетных ставок показаны на рис. 3.5

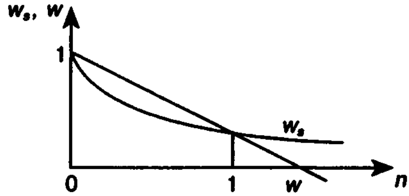

Рис. 3.5

Номинальная и эффективная учетные ставки. Дисконтирование может производиться не один, а m раз в году, т.е. каждый раз учет производится по ставке f/m . В этом случае

$$P = S\left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mn}, \tag{3.15}$$

где f — номинальная годовая учетная ставка.

Эффективная учетная ставка (d) характеризует степень дисконтирования за год. Определим ее на основе равенства дисконтных множителей:

$$(1 - d)^n = \left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mn},$$

откуда

$$d = 1 - \left(1 - \frac{f}{m}\right)^m.$$

В свою очередь

$$f = m\left(1 - \sqrt[m]{1 - d}\right).$$

Эффективная учетная ставка во всех случаях, когда $m > 1$, меньше номинальной.

ПРИМЕР 3.12. По данным примера 3.11 определим сумму, полученную при поквартальном учете по номинальной учетной ставке 15%, и эффективную учетную ставку. Имеем $f = 0{,}15$; $m = 4$; $mn = 20$;

$$P = 5000\left(1 - \frac{0{,}15}{4}\right)^{20} = 2328{,}0 \text{ тыс. руб.}$$

Эффективная учетная ставка составит

$$d = 1 - \left(1 - \frac{0{,}15}{4}\right)^{4} = 0{,}14177, \text{ или } 14{,}177\%.$$

Наращение по сложной учетной ставке. Иногда наращенную сумму получают и с помощью сложной учетной ставки. Из формул (3.14) и (3.15) следует:

$$S = \frac{P}{(1 - d)^n}, \tag{3.16}$$

$$S = \frac{P}{\left(1 - \dfrac{f}{m}\right)^{mn}}. \tag{3.17}$$

Множитель наращения при использовании сложной ставки d равен $(1 - d)^{-n}$.

§3.6. Сравнение интенсивности процессов наращения и дисконтирования по разным видам процентных ставок

Выше для наращения и дисконтирования использовались ставки i_s, i, j, d_s, d, f. Заметим, что даже в одинаковых исходных условиях применение этих ставок приводит к различным результатам. В связи с этим представляет практический интерес сравнение результатов наращения и дисконтирования по различным ставкам. Для этого достаточно сопоставить соответствующие множители наращения. Аналогичное можно проделать и с дисконтными множителями. Проблема сопоставления скорости роста при наращении по простой и сложной ставкам была затронута в § 3.2.

Опустив формальные доказательства, запишем сразу необходимые соотношения при условии, что размеры ставок одинаковые. Варианты со ставками j и f рассматривать не будем, так как результат зависит и от значения m.

Множители наращения соотносятся между собой следующим образом:

$$(1 + i)^n < 1 + ni_s < \frac{1}{1 - nd} < \frac{1}{(1 - d)^n} \quad \text{при } 0 < n < 1,$$

$$1 + i = 1 + i_s < \frac{1}{1 - d_s} = \frac{1}{1 - d} \quad \text{при } n = 1,$$

$$1 + ni_s < (1 + i)^n < \frac{1}{(1 - d)^n} < \frac{1}{1 - nd} \quad \text{при } n > 1.$$

Как видим, соотношения множителей зависят от сроков наращения процентов. Так, для срока, превышающего год, наибольший рост дает простая учетная ставка, наименьший — ставка простых процентов. В табл. 3.2 приведены значения множителей наращения для разных видов ставок при условии, что их размеры одинаковы — 20%.

Таблица 3.2

Множители наращения для разных видов ставок (20%)

Срок (в годах)	i_s	i	d_s	d
0,5	1,10	1,0954	1,1111	1,1180
0,8	1,16	1,1570	1,1905	1,1954
1,0	1,20	1,2000	1,2500	1,2500
1,5	1,30	1,3145	1,4286	1,3975
2,0	1,40	1,4400	1,6667	1,5625
3,0	1,60	1,7280	2,5000	1,9531
5,0	2,00	2,4883	∞	3,0517
10,0	11,00	6,1917	∞	9,3132

Аналогичным образом получим соотношения для дисконтных множителей:

$$(1 - d)^n < 1 - nd_s < \frac{1}{1 + ni} < \frac{1}{(1 + i)^n} \quad \text{при } 0 < n < 1,$$

$$1 - d = 1 - d_s < \frac{1}{1 + i_s} = \frac{1}{1 + i} \quad \text{при } n = 1,$$

$$1 - nd_s < (1 - d)^n < \frac{1}{(1 + i)^n} < \frac{1}{1 + ni_s} \quad \text{при } n > 1.$$

Для срока более года наиболее сильно дисконтирование проявляется при применении простой ставки процента и в наименьшей степени — при использовании простой учетной ставки.

§3.7. Определение срока ссуды и размера процентной ставки

При разработке условий финансовых операций часто сталкиваются с необходимостью решения обратных задач — расчетом продолжительности ссуды или уровня процентной ставки. Для простых процентов эти задачи рассмотрены в гл. 2. Обратимся к операциям со сложными ставками и решим уравнения, связывающие P и S, относительно интересующих нас величин. Полученные формулы приводятся без доказательств, поскольку вывод их элементарен.

Срок ссуды. Приведем формулы расчета n для различных условий наращения процентов и дисконтирования.

При наращении по сложной годовой ставке i и по номинальной ставке j на основе формул (3.1) и (3.7) имеем

$$n = \frac{\log(S / P)}{\log(1 + i)}, \tag{3.18}$$

$$n = \frac{\log(S / P)}{m \times \log\left(1 + \dfrac{j}{m}\right)}. \tag{3.19}$$

При дисконтировании по сложной годовой учетной ставке d и по номинальной учетной ставке f получим

$$n = \frac{\log(P / S)}{\log(1 - d)}, \tag{3.20}$$

$$n = \frac{\log(P / S)}{m \times \log\left(1 - \dfrac{f}{m}\right)}. \tag{3.21}$$

ПРИМЕР 3.13. За какой срок в годах сумма, равная 75 млн руб., достигнет 200 млн руб. при начислении процентов по сложной ставке 15% раз в году и поквартально? По формулам (3.18) и (3.19) получим следующие сроки:

$$n = \frac{\log(200 / 75)}{\log 1{,}15} = 7{,}0178 \text{ года},$$

$$n = \frac{\log(200 / 75)}{4 \times \log\left(1 + \frac{0{,}15}{4}\right)} = 6{,}6607 \text{ года.}$$

Величина процентной ставки. Приведем формулы для расчета ставок *i, j, d, f* для различных условий наращения процентов и дисконтирования. Они получены при решении уравнений, связывающих *S* и *P*.

При наращении по сложной годовой ставке процентов *i* и по номинальной ставке *j* получим

$$i = \sqrt[n]{S / P} - 1, \tag{3.22}$$

$$j = m\left(\sqrt[mn]{S / P} - 1\right). \tag{3.23}$$

При дисконтировании по сложным учетным ставкам *d* и *f*

$$d = 1 - \sqrt[n]{P / S}, \tag{3.24}$$

$$f = m\left(1 - \sqrt[mn]{P / S}\right). \tag{3.25}$$

ПРИМЕР 3.14. Сберегательный сертификат куплен за 100 тыс. руб., выкупная его сумма 160 тыс. руб., срок 2,5 года. Каков уровень доходности инвестиций в виде годовой ставки сложных процентов? По формуле (3.23) находим

$$i = \sqrt[2{,}5]{1{,}6} - 1 = 0{,}20684.$$

ПРИМЕР 3.15. Срок до погашения векселя равен 2 годам. Дисконт при его учете составил 30%. Какой сложной годовой учетной ставке соответствует этот дисконт?

Применим формулу (3.24). По данным задачи P/S=0,7, откуда

$$d = 1 - \sqrt{0{,}7} = 0{,}16334.$$

§3.8. Непрерывное наращение и дисконтирование. Непрерывные проценты

В практических финансово-кредитных операциях непрерывное наращение, т.е. наращение за бесконечно малые отрезки времени, применяется крайне редко. Существенно большее значение непрерывное наращение имеет в анализе сложных финансовых проблем, например при обосновании и выборе инвестиционных решений, в финансовом проектировании. С помощью непрерывных процентов удается учесть сложные закономерности процесса наращения, например использовать изменяющиеся по определенному закону процентные ставки.

При непрерывном наращении процентов применяют особый вид процентной ставки — *силу роста (force of interest)*. Сила роста характеризует относительный прирост наращенной суммы за бесконечно малый промежуток времени. Она может быть постоянной или изменяться во времени.

Постоянная сила роста. Как было показано выше, при дискретном начислении процентов m раз в году по номинальной ставке j наращенная сумма находится как

$$S = P\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn}.$$

Чем больше m, тем меньше промежуток между моментами начисления процентов. В пределе при $m \to \infty$ имеем

$$S = P\lim_{m \to \infty}\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} = Pe^{jn},$$

где e — основание натуральных логарифмов.

Для того чтобы отличить непрерывную ставку от дискретной, обозначим силу роста как δ. Теперь можно записать

$$S = Pe^{\delta n}. \tag{3.26}$$

Итак, при непрерывном наращении процентов наращенная сумма равна конечной величине, зависящей от первоначальной суммы, срока наращения и силы роста. Последняя представляет собой номинальную ставку сложных процентов при $m \to \infty$.

Легко показать, что дискретные и непрерывные ставки наращения находятся в функциональной зависимости. Из равенства множителей наращения

$$(1 + i)^n = e^{\delta n}$$

следует:

$$\delta = \ln(1 + i), \tag{3.27}$$

$$i = e^{\delta} - 1. \tag{3.28}$$

ПРИМЕР 3.16. Сумма, на которую начисляются непрерывные проценты, равна 2 млн руб., сила роста 10%, срок 5 лет. Наращенная сумма составит

$$S = 2\,000\,000 \times e^{0,1\times5} = 3297744{,}25 \text{ руб.}$$

Непрерывное наращение по ставке = 10% равнозначно наращению за тот же срок дискретных сложных процентов по годовой ставке. Находим

$$i = e^{0,1} - 1 = 0{,}10517.$$

В итоге получим

$$S = 2\,000\,000(1 + 0{,}10517)^5 = 3297744{,}25 \text{ руб.}$$

Дисконтный можитель на основе силы роста (математическое дисконтирование) находится элементарно, для этого решим (3.26) относительно P:

$$P = Se^{-\delta n}. \tag{3.29}$$

Дисконтный множитель, как видим, равен $e^{-\delta n}$.

ПРИМЕР 3.17. Определим современную стоимость платежа из примера 3.11 при условии, что дисконтирование производится по силе роста 12% и по дискретной сложной учетной ставке такого же размера. Получим в тыс. руб.:

$$P = 5000e^{-0,12\times5} = 2744,$$

$$P = 5000(1 - 0{,}12)^5 = 2639.$$

Переменная сила роста. Пусть сила роста изменяется во времени, следуя некоторому закону, представленному в виде непрерывной функции времени: $\delta_t = f(t)$. Тогда наращенная сумма и современная величина определяются как

$$S = Pe^{\int_0^n \delta_t}; \quad P = Se^{-\int_0^n \delta_t}.$$

Функция времени может быть самого различного вида. Рассмотрим только два ее варианта — линейную и экспоненциальную. Начнем с линейной функции:

$$\delta_t = \delta + at,$$

где δ — начальное значение силы роста, a — прирост силы роста в единицу времени.

Нетрудно доказать, что

$$\int_0^n \delta_t dt = \int_0^n \left(\delta + at\right)dt = \delta n + \frac{an^2}{2}.$$

Таким образом, множитель наращения находится как

$$q = e^{\delta n + \frac{an^2}{2}}. \tag{3.30}$$

ПРИМЕР 3.18. Пусть начальное значение силы роста равно 8%, процентная ставка непрерывно и линейно изменяется, прирост за год составляет 2% (a = 0,02). Срок наращения 5 лет. Для расчета множителя наращения (3.30) найдем его степень:

$$0{,}08 \times 5 + \frac{0{,}02 \times 5^2}{2} = 0{,}65.$$

Искомый множитель составит $q = e^{0{,}65} = 1{,}91554$.

Продолжим пример. Предположим, что сила роста линейно уменьшается (пусть $a = -0{,}02$). В этом случае степень множителя равна 0,15 и соответственно $q = e^{0{,}15} = 1{,}16183$.

Рассмотрим ситуацию, когда сила роста изменяется экспоненциально (по геометрической прогрессии):

$$\delta_t = \delta a^t,$$

где δ — начальное значение силы роста, a — постоянный темп роста.

В этом случае степень множителя равна

$$\int_0^n \delta_t dt = \frac{\delta}{\ln a}\left(a^n - 1\right),$$

а сам множитель находится как[1]

$$q = e^{\frac{\delta}{\ln a}\left(a^n - 1\right)}. \quad (3.31)$$

ПРИМЕР 3.19. Начальный уровень силы роста 8%, процентная ставка непрерывно и экспоненциально увеличивается (годовой прирост 20%, a = 1,2), срок наращения 5 лет. Необходимо определить множитель наращения. Степень этого множителя за весь срок равна

$\frac{0,8}{\ln 1,2}(1,2^5 - 1) = 0,65305$, соответственно $q = e^{0,65305} = 1,92139$.

Срок ссуды и размер силы роста. Срок ссуды при постоянной силе роста найдем на основе (3.26):

$$n = \frac{\ln \frac{S}{P}}{\delta}.$$

При наращении с изменяющейся силой роста (с постоянным темпом роста a) на основе (3.31) получим

$$n = \frac{\ln\left[1 + \frac{\ln a \times \ln(S / P)}{\delta}\right]}{\ln a}.$$

В свою очередь при наращении с постоянной силой роста

$$\delta = \frac{\ln(S / P)}{n}.$$

При наращении с изменяющейся с постоянным темпом силой роста

$$\delta = \frac{\ln a \times \ln(S / P)}{a^n - 1}.$$

[1] См. Математическое приложение к главе.

Математическое приложение к главе

Доказательство формулы (3.31)

Определим степень множителя наращения $q = e^{\int_0^n \delta a^t dt}$:

$$\int_0^n \delta a^t dt = \delta \frac{a^t}{\ln a}\bigg|_0^n = \delta\left(\frac{a^n}{\ln a} - \frac{1}{\ln a}\right) = \frac{\delta}{\ln a}\left(a^n - 1\right).$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Башарин Г.П.* Начала финансовой математики. М.: ИНФРА-М, 1997.
2. *Четыркин Е.М., Васильева Н. Е.* Финансово-экономические расчеты. М.: Финансы и статистика, 1990. Гл. 2.
3. *Бирман Г., Шмидт С.* Экономический анализ производственных инвестиций. М.: ЮНИТИ, 1997. Гл. 2.
4. *Cartledge P.* Financial arithmetic. A practitioners guide. Euromoney Books, 1993.

Глава 4

ПРОИЗВОДНЫЕ ПРОЦЕНТНЫЕ РАСЧЕТЫ. КРИВЫЕ ДОХОДНОСТИ

§4.1. Средние процентные ставки

Если в финансовой операции размер процентной ставки изменяется во времени, то все значения ставки можно обобщить с помощью средней. *Замена всех усредняемых значений ставок на среднюю процентную ставку* по определению *не изменяет результатов наращения или дисконтирования.*

Начнем с простых ставок. Пусть за последовательные периоды $n_1, n_2, \ldots, n_k$ начисляются простые проценты по ставкам $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Искомые средние получим посредством приравнивания соответствующих множителей наращения друг к другу:

$$1 + N\bar{i} = 1 + \sum_t n_t i_t.$$

Откуда

$$\bar{i} = \frac{\sum n_t i_t}{N}, \tag{4.1}$$

где $N = \sum n_t$ — общий срок наращения процентов.

Найденный показатель представляет собой среднюю арифметическую взвешенную с весами, равными продолжительности отдельных периодов.

Аналогичным способом определим среднюю учетную ставку:

$$\bar{d} = \frac{\sum n_t d_t}{N}. \tag{4.2}$$

ПРИМЕР 4.1. Контракт предусматривает переменную по периодам ставку простых процентов: 20, 22 и 25 %. Продолжительность последовательных периодов начисления процентов: два, три и пять месяцев. Какой размер ставки приведет к аналогичному наращению исходной суммы? Находим среднюю ставку:

$$\bar{i} = \frac{0{,}2 \times 2 + 0{,}22 \times 3 + 0{,}25 \times 5}{10} = 0{,}231, \text{ или } 23{,}1\%.$$

Если усредняются сложные переменные во времени ставки сложных процентов, то из равенства множителей наращения

$$\left(1 + \bar{i}\right)^N = \left(1 + i_1\right)^{n_1}\left(1 + i_2\right)^{n_2}...$$

следует

$$\bar{i} = \sqrt[N]{\left(1 + i_1\right)^{n_1}\left(1 + i_2\right)^{n_2}...} - 1. \tag{4.3}$$

Средняя в этом случае вычисляется как взвешенная средняя геометрическая.

ПРИМЕР 4.2. Допустим, для первых двух лет ссуды применяется ставка, равная 15%, для следующих трех лет она составляет 20%. Средняя ставка за весь срок ссуды равна

$$\bar{i} = \sqrt[5]{1{,}15^2 \times 1{,}2^3} - 1 = 0{,}17974, \text{ или } 17{,}974\%.$$

Рассмотрим теперь усреднение ставок, применяемых в нескольких однородных операциях, которые различаются суммами ссуд и процентными ставками. Искомые средние ставки находим из условия равенства соответствующих сумм после наращения процентов. Так, если применяются простые ставки и сроки этих операций одинаковы (n), то из равенства

$$\sum P_t(1 + n\bar{i}) = \sum P_t(1 + ni_t)$$

следует

$$\bar{i} = \frac{\sum P_t i_t}{\sum P_t}. \tag{4.4}$$

Как видим, весами здесь являются суммы ссуд.

Перейдем к усреднению сложных ставок для однородных ссудных операций. Пусть сроки операций одинаковы (n). Из равенства соответствующих множителей наращения следует

$$\bar{i} = \sqrt[n]{\frac{\sum P_t(1+i_t)^n}{\sum P_t}} - 1. \qquad (4.5)$$

Формулы (4.4) и (4.5) получены для частных случаев, когда сроки ссуд одинаковы. В общих случаях они, разумеется, не работают. Однако решение соответствующих задач возможно, но более сложным путем.

§4.2. Эквивалентность процентных ставок

Как было показано ранее, для процедур наращения и дисконтирования могут применяться различные виды процентных ставок. Определим теперь те их значения, которые в конкретных условиях приводят к одинаковым финансовым результатам. Иначе говоря, замена одного вида ставки на другой при соблюдении принципа эквивалентности не изменяет финансовых отношений сторон в рамках одной операции. Для участвующих в сделке сторон в общем безразлично, какой вид ставки фигурирует в контракте. Такие ставки назовем *эквивалентными*.

Проблема эквивалентности ставок уже затрагивалась в гл. 3 при определении эффективной ставки процента: сложная годовая ставка i эквивалентна ставке j при начислении процентов m раз в году. Рассмотрим теперь проблему эквивалентности ставок более полно и систематизированно. В принципе соотношение эквивалентности можно найти для любой пары различного вида ставок — простых и сложных, дискретных и непрерывных.

Формулы эквивалентности ставок во всех случаях получим исходя из равенства взятых попарно множителей наращения. Приведем простой пример. Определим соотношение эквивалентности между простой и сложной ставками. Для этого приравняем друг к другу соответствующие множители наращения:

$$(1 + ni_s) = (1 + i)^n,$$

где i_s и i — ставки простых и сложных процентов.

Приведенное равенство предполагает, что начальные и наращенные суммы при применении двух видов ставок идентичны (см. рис. 4.1).

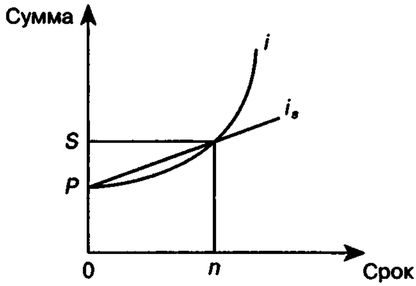

Рис. 4.1

Решение приведенного выше равенства дает следующие соотношения эквивалентности:

$$i_s = \frac{(1 + i)^n}{n} - 1, \tag{4.6}$$

$$i = \sqrt[n]{1 + ni} - 1. \tag{4.7}$$

Аналогичным образом определим и другие, приведенные ниже, соотношения эквивалентности ставок.

Эквивалентность простых процентных ставок. При выводе искомых соотношений между ставкой процента и учетной ставкой следует иметь в виду, что при применении этих ставок используется временная база $K = 360$ или $K = 365$ дней. Если временные базы одинаковы, то из равенства соответствующих множителей наращения следует:

$$i_s = \frac{d_s}{1 - nd_s}, \tag{4.8}$$

$$d_s = \frac{i_s}{1 + ni_s}, \tag{4.9}$$

где n — срок в годах, i_s — ставка простых процентов, d_s — простая учетная ставка.

ПРИМЕР 4.3. Вексель учтен за год до даты его погашения по учетной ставке 15%. Какова доходность учетной операции в виде процентной ставки? По (4.8) находим

$$i_s = \frac{0{,}15}{1 - 0{,}15} = 0{,}17647, \text{ или } 17{,}647\%.$$

Иначе говоря, операция учета по учетной ставке 15% за год дает тот же доход, что и наращение по ставке 17,647%.

Следует обратить внимание на то, что отношения эквивалентности между простыми ставками i_s и d_s существенно зависят от срока операции. Например, для $d = 10$ % находим следующие размеры эквивалентных ставок:

n (в годах)	0,1	0,5	1	2	5	10
i_s (%)	10,1	10,5	11,1	12,5	20	∞

Пусть срок ссуды измеряется в днях, тогда, подставив в (4.8) и (4.9) $n = t/K$ (напомним, что t — срок наращения процентов в днях, K — временная база), получим варианты соотношений эквивалентности:

а) временные базы одинаковы и равны 360 дням:

$$i_s = \frac{360}{360 - td_s}, \tag{4.10}$$

$$d_s = \frac{360i_s}{360 + ti_s}; \tag{4.11}$$

б) если при начислении процентов принята база $K = 365$, а для учетной ставки $K = 360$, то

$$i_s = \frac{365d_s}{360 - td_s}, \tag{4.12}$$

$$d_s = \frac{360i_s}{365 + ti_s}. \tag{4.13}$$

ПРИМЕР 4.4. Необходимо найти величину учетной ставки, эквивалентной годовой процентной ставке 40% ($K = 365$) при условии, что срок учета равен 255 дням. Находим по формуле (4.13)

$$d = \frac{360 \times 0,4}{365 + 255 \times 0,4} = 0,30835, \text{ или } 30,835\%.$$

Эквивалентность простых и сложных ставок. Рассмотрим соотношения эквивалентности простых ставок i_s и d_s, с одной стороны, и сложных ставок i и j, с другой. Сложную учетную ставку здесь не будем принимать во внимание. Попарно приравняв друг к другу соответствующие множители наращения, получим набор искомых соотношений.

Эквивалентность i_s и i . Формулы были получены выше (см. (4.6) и (4.7)).

Эквивалентность i_s и j:

$$i_s = \frac{(1 + j / m)^{mn} - 1}{n}, \tag{4.14}$$

$$j = m(\sqrt[mn]{1 + ni_s} - 1). \tag{4.15}$$

Эквивалентность d_s и i:

$$d_s = \frac{1 - (1 + i)^n}{n}, \tag{4.16}$$

$$i = \sqrt[n]{1 - nd_s} - 1. \tag{4.17}$$

Эквивалентность d_s и j:

$$d_s = \frac{1 - (1 + j / m)^{mn}}{n}, \tag{4.18}$$

$$j = m(\sqrt[mn]{1 - nd_s} - 1). \tag{4.19}$$

ПРИМЕР 4.5. Какой сложной годовой ставкой можно заменить в контракте простую ставку 18% (K = 365), не изменяя финансовых последствий? Срок операции 580 дней.

По формуле (4.7) находим эквивалентную сложную ставку:

$$i = \sqrt[580/365]{1 + \frac{580}{365}0{,}18} - 1 = 0{,}17153, \text{ или } 17{,}153\%.$$

Эквивалентность сложных ставок. Остановимся только на соотношениях эквивалентности для ставок i, j и d. Имеем

$$i = (1 + j / m)^m - 1, \tag{4.20}$$

$$j = m(\sqrt[m]{1+i} - 1). \tag{4.21}$$

Эквивалентность i и d:

$$i = \frac{d}{1-d}, \tag{4.22}$$

$$d = \frac{i}{1+i}. \tag{4.23}$$

Приведем еще несколько полезных соотношений, которые нетрудно получить на основе приведенных выше формул с учетом того, что $v = (1 + i)^{-1}$:

$$d = iv, \tag{4.24}$$

$$v = 1 - d, \tag{4.25}$$

$$i - d = id. \tag{4.26}$$

Заметим, что в зависимостях (4.22)—(4.26) срок не играет никакой роли.

> **ПРИМЕР 4.6.** При разработке условий контракта стороны договорились о том, что доходность кредита должна составлять 24% годовых. Каков должен быть размер номинальной ставки при начислении процентов ежемесячно, поквартально?
>
> $$j = 12(\sqrt[12]{1{,}24} - 1) = 0{,}21705; \quad j = 4(\sqrt[4]{1{,}24} - 1) = 0{,}22100.$$

Эквивалентность сложных дискретных и непрерывных ставок. Теоретически можно найти соотношение эквивалентности между силой роста и любой дискретной процентной ставкой. Однако в этом, вероятно, нет необходимости. Ограничимся несколькими такими соотношениями, необходимость в которых может возникнуть в практических расчетах.

Эквивалентность δ и i: см. формулы (3.27) и (3.28).

Эквивалентность δ и j: из равенства $\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m = e^{\delta}$ следует

$$j = m(e^{\delta/m} - 1), \tag{4.27}$$

$$\delta = m \times \ln(1 + j / m). \tag{4.28}$$

Эквивалентность δ и d: из равенства $(1-d)^{-1}=e^{\delta}$ следует

$$\delta = -\ln(1-d), \tag{4.29}$$

$$d = 1 - e^{-\delta}. \tag{4.30}$$

ПРИМЕР 4.7. Какая непрерывная ставка заменит поквартальное начисление процентов по номинальной ставке 20%? Находим

$$\delta = 4 \times \ln(1 + 0{,}2) = 0{,}19516, \text{ или } 19{,}516\%$$

Формулы эквивалентности дискретных и непрерывных ставок позволяют расширить применение непрерывных процентов. Как уже говорилось выше, непрерывные проценты во многих сложных расчетах позволяют существенно упростить выкладки. Вместе с тем такие ставки непривычны для практика, поэтому используя формулы эквивалентности, нетрудно представить полученные результаты в виде общепринятых характеристик.

§4.3. Финансовая эквивалентность обязательств и конверсия платежей

Финансовая эквивалентность обязательств. На практике нередко возникают случаи, когда необходимо заменить одно денежное обязательство другим, например с более отдаленным сроком платежа, объединить несколько платежей в один (консолидировать платежи) и т.п. Ясно, что такие изменения не могут быть произвольными. Неизбежно возникает вопрос о принципе, на котором должны базироваться изменения условий контрактов. Таким общепринятым принципом является *финансовая эквивалентность обязательств*. Эквивалентными считаются такие платежи, которые, будучи "приведенными" к одному моменту времени (*focal date*), оказываются равными. Приведение осуществляется путем дисконтирования (приведение к более ранней дате) или, наоборот, наращения суммы платежа (если эта дата относится к будущему). Если при изменении условий контракта принцип финансовой эквивалентности не соблюдается, то одна из участвующих сторон терпит ущерб, размер которого можно заранее определить.

Применение принципа финансовой эквивалентности не ограничено рамками задач изменения контрактов. Он лежит в основе преобладающего числа методов количественного финансового анализа.

По существу, принцип эквивалентности в наиболее простом проявлении следует из формул наращения и дисконтирования, связывающих величины P и S. Сумма P эквивалентна S при принятой процентной ставке и методе ее начисления. Две суммы денег S_1 и S_2, выплачиваемые в разные моменты времени, считаются эквивалентными, если их современные (или наращенные) величины, рассчитанные по одной и той же процентной ставке и на один момент времени, одинаковы. Замена S_1 на S_2 в этих условиях формально не изменяет отношения сторон.

ПРИМЕР 4.8. На принципе эквивалентности основывается сравнение разновременных платежей. Покажем это на примере. Имеются два обязательства. Условия первого: выплатить 400 тыс. руб. через 4 месяца; условия второго: выплатить 450 тыс. руб. через 8 месяцев. Можно ли считать их равноценными? Так как платежи краткосрочные, то при дисконтировании на начало срока применим простую ставку, равную, допустим, 20 %. Получим

$$P_1 = \frac{400}{1 + \frac{4}{12}0{,}2} = 375{,}00;$$

$$P_2 = \frac{450}{1 + \frac{8}{12}0{,}2} = 397{,}06 \text{ тыс. руб.}$$

Как видим, сравниваемые обязательства не являются эквивалентными при заданной ставке и в силу этого не могут адекватно заменять друг друга.

Сравнение платежей предполагает использование некоторой процентной ставки и, следовательно, его результат зависит от выбора ее размера. Однако, что практически весьма важно, такая зависимость не столь жестка, как это может показаться на первый взгляд. Допустим, сравниваются два платежа S_1 и S_2 со сроками n_1 и n_2, причем $S_1 < S_2$ и $n_1 < n_2$. Соотношение их современных стоимостей зависит от размера процентной ставки (см. рис. 4.2).

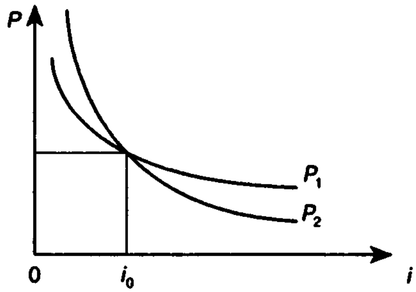

Рис. 4.2

С ростом i размеры современных стоимостей уменьшаются, причем при $i = i_0$ наблюдается равенство $P_1 = P_2$. Для любой ставки $i < i_0$ имеем $P_1 < P_2$. Таким образом, результат сравнения зависит от размера ставки, равного i_0. Назовем эту ставку *критической* или *барьерной*. Подробнее о барьерных экономических параметрах будет сказано в гл. 7. Здесь же ограничимся расчетом барьерной ставки. На основе равенства

$$\frac{S_1}{1 + n_1 i_0} = \frac{S_2}{1 + n_2 i_0}$$

находим

$$i_0 = \frac{1 - \dfrac{S_1}{S_2}}{\dfrac{S_1}{S_2} n_2 - n_1}. \tag{4.31}$$

ПРИМЕР 4.9. Для данных примера 4.8 получим

$$i_0 = \frac{1 - \dfrac{400}{450}}{\dfrac{400}{450} \times \dfrac{8}{12} - \dfrac{4}{12}} = 0{,}428, \text{ или } 42{,}8\ \%.$$

Таким образом, соотношение $P_2 > P_1$ справедливо при любом уровне процентной ставки, который меньше 42,8 %.

Если дисконтирование производится по сложной ставке, то критическую ставку найдем из равенства

$$S_1\left(1+i_0\right)^{-n_1}=S_2\left(1+i_0\right)^{-n_2}.$$

В итоге

$$i_0=\sqrt[n_2-n_1]{\frac{S_2}{S_1}}-1. \qquad (4.32)$$

Консолидирование (объединение) задолженности. Как уже было сказано выше, принцип финансовой эквивалентности платежей применяется при различных изменениях условий выплат денежных сумм: их объединении, изменении сроков (досрочном погашении задолженности или, наоборот, пролонгировании срока) и т.п. Общий метод решения подобного рода задач заключается в разработке так называемого *уравнения эквивалентности* (*equation of value*), в котором сумма заменяемых платежей, приведенных к какому-либо моменту времени, приравнивается к сумме платежей по новому обязательству, приведенных к той же дате. Для краткосрочных обязательств приведение осуществляется обычно на основе простых ставок, для средне- и долгосрочных — с помощью сложных процентных ставок. Заметим, что в простых случаях часто можно обойтись без разработки и решения уравнения эквивалентности.

Одним из распространенных случаев изменения условий контрактов является *консолидация* (объединение) платежей. Пусть платежи S_1, S_2,..., S_m со сроками n_1, n_2,..., n_m заменяются одним в сумме S_0 и сроком n_0. В этом случае возможны две постановки задачи: если задается срок n_0, то находится сумма S_0, и наоборот, если задана сумма консолидированного платежа S_0, то определяется срок n_0. Рассмотрим обе постановки задачи.

Определение размера консолидированного платежа. При решении этой задачи уравнение эквивалентности имеет простой вид. В общем случае, когда $n_1<n_2<...<n_m$, искомую величину находим как сумму наращенных и дисконтированных платежей. Так, при применении простых процентных ставок получим

$$S_0=\sum_j S_j(1+t_j i)+\sum_k S_k(1+t_k i)^{-1}, \qquad (4.33)$$

где S_j — размеры объединяемых платежей со сроками $n_j<n_0$, S_k — размеры платежей со сроками $n_k>n_0$,

$$t_j=n_0-n_j, \quad t_k=n_k-n_0.$$

ПРИМЕР 4.10. Два платежа 1 и 0,5 млн руб. со сроками уплаты соответственно 150 и 180 дней объединяются в один со сроком 200 дней. Пусть стороны согласились на применении при конверсии простой ставки, равной 20%. Консолидированная сумма долга составит

$$S_0 = 1000\left(1 + \frac{200 - 150}{365}\,0{,}2\right) + 500\left(1 + \frac{200 - 180}{365}\,0{,}2\right) =$$

$$= 1532{,}87 \text{ тыс. руб.}$$

Консолидацию платежей можно осуществить и на основе сложных процентных ставок. Вместо (4.33) для общего случая ($n_1 < n_0 < n_m$) получим

$$S_0 = \sum S_j \left(1 + i\right)^{t_j} + \sum S_k \left(1 + i\right)^{-t_k}. \qquad (4.34)$$

ПРИМЕР 4.11. Платежи в 1 и 2 млн руб. и сроками уплаты через 2 и 3 года объединяются в один со сроком 2,5 года. При консолидации используется сложная ставка 20%. Искомая сумма составит

$$S_0 = 1000 \times 1{,}2^{0{,}5} + 2000 \times 1{,}2^{-0{,}5} = 2921{,}187 \text{ тыс. руб.}$$

Определение срока консолидированного платежа. Если при объединении платежей задана величина консолидированного платежа S_0, то возникает проблема определения его срока n_0. В этом случае уравнение эквивалентности удобно представить в виде равенства современных стоимостей соответствующих платежей.

При применении простой ставки это равенство имеет вид

$$S_0 (1 + n_0 i)^{-1} = \sum_j S_j (1 + n_j i)^{-1},$$

откуда

$$n_0 = \frac{1}{i}\left(\frac{S_0}{\sum S_j (1 + n_j i)^{-1}} - 1\right). \qquad (4.35)$$

Очевидно, что решение может быть получено при условии, что $S_0 > \sum S_j (1 + n_j i)^{-1}$, иначе говоря, размер заменяющего платежа не может быть меньше суммы современных стоимостей заменяемых платежей. Заметим также, что искомый срок пропорционален величине консолидированного платежа.

ПРИМЕР 4.12. Суммы в размере 10, 20 и 15 млн руб. должны быть выплачены через 50, 80 и 150 дней соответственно. Стороны согласились заменить их одним платежом.

Современная стоимость заменяемых платежей (обозначим эту величину через P) при условии, что i = 10% и K = 365, составит

$$P = 10\left(1 + \frac{50}{365}\,0{,}1\right)^{-1} + 20\left(1 + \frac{80}{365}\,0{,}1\right)^{-1} + 15\left(1 + \frac{150}{365}\,0{,}1\right)^{-1} =$$

43,844 млн руб.

Согласно (4.35) находим

$$n_0 = \frac{1}{0{,}1}\left(\frac{50}{43{,}844} - 1\right) = 1{,}404 \text{ года, или 512 дней.}$$

Продолжим пример. Пусть теперь размер заменяющего платежа задан в сумме 45 млн руб. Тогда срок заметно сократится и станет равным 0,264 года, или 96 дням.

Перейдем к определению срока консолидированного платежа на основе сложных процентных ставок. Уравнение эквивалентности запишем следующим образом

$$S_0\left(1 + i\right)^{-n_0} = \sum_j S_j\left(1 + i\right)^{-n_j}.$$

Для упрощения дальнейшей записи примем

$$Q = \sum S_j\left(1 + i\right)^{-n_j}.$$

После чего находим

$$n_0 = \frac{\ln\left(\dfrac{S_0}{Q}\right)}{\ln(1 + i)}. \qquad (4.36)$$

Как видим, решение существует, если $S_0 > Q$. Для частного случая, когда $S_0 = \sum S_j$, при определении срока консолидирующего платежа иногда вместо (4.36) применяют средний взвешенный срок:

$$n_0 = \frac{\sum S_j n_j}{S_0}. \qquad (4.37)$$

Привлекательность этой формулы, помимо ее простоты, состоит в том, что она не требует задания уровня процентной ставки. Однако надо помнить, что она дает приближенный результат, который больше точного. Чем выше ставка i, тем больше погрешность решения по формуле (4.37).

ПРИМЕР 4.13. Воспользуемся данными примера 4.11 и определим срок консолидированного платежа в сумме 3 млн руб. Точное значение срока находим по (4.36). Для этого сначала рассчитаем

$$Q = 1 \times 1{,}2^{-2} + 2 \times 1{,}2^{-3} = 1{,}8518.$$

После чего находим

$$n_0 = \frac{\ln(3/1{,}8518)}{\ln 1{,}2} = 1{,}646 \text{ года.}$$

Приближенное решение дает 2,667 года.

§4.4. Общая постановка задачи изменения условий контракта

Обсудим теперь общие случаи изменения условий выплат, предусматриваемых в контрактах, для которых решение нельзя получить простым суммированием приведенных на некоторую дату платежей. Разумеется, и в таких случаях решение основывается на принципе эквивалентности платежей до и после изменения условий. Метод решения заключается в разработке соответствующего уравнения эквивалентности. Если приведение платежей осуществляется на некоторую начальную дату, то получим следующие уравнения эквивалентности в общем виде:

$\sum\limits_j S_j(1 + n_j i) = \sum\limits_k S_k (1 + n_k i)$ — при использовании простых процентов,

$\sum\limits_j S_j v^{n_j} = \sum\limits_k S_k v^{n_k}$ — при использовании сложных процентов.

Здесь S_j и n_j — параметры заменяемых платежей, S_k и n_k — параметры заменяющих платежей.

Конкретный вид равенства определяется содержанием контрактов, поэтому методику разработки уравнений эквивалентности удобнее показать на примерах. Для этого рассмотрим три примера. В двух первых для дисконтирования применяются простые ставки, в последнем — сложные.

ПРИМЕР 4.14. Две суммы 10 и 5 млн руб. должны быть выплачены 1 ноября и 1 января следующего года. Стороны согласились пересмотреть порядок выплат: должник 1 декабря выплачивает 6 млн руб. Остаток долга гасится 1 марта. Необходимо найти сумму остатка при условии, что пересчет осуществляется по ставке простых процентов, равной 20% ($K = 365$). Графическое изображение условий задачи приведено на рис. 4.3.

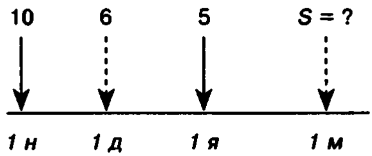

Рис. 4.3

Возьмем за базовую дату, допустим, момент выплаты 5 млн руб. Уравнение эквивалентности в этом случае выглядит следующим образом:

$$10\left(1+\frac{61}{365}0{,}2\right)+5=6\left(1+\frac{31}{365}0{,}2\right)+S\left(1+\frac{59}{365}0{,}2\right)^{-1}.$$

Находим $S = 9{,}531$ млн руб.

Заметим, что изменение базовых дат приводит к некоторым, впрочем незначительным, смещениям результатов. Например, при приведении платежей к 1 марта получим следующее уравнение эквивалентности:

$$10\left(1+\frac{120}{365}0{,}2\right)+5\left(1+\frac{59}{365}0{,}2\right)=6\left(1+\frac{90}{365}0{,}2\right)+S.$$

Теперь $S = 9{,}523$ млн руб.

ПРИМЕР 4.15. Имеется обязательство уплатить 10 млн руб. через 4 месяца и 7 млн руб. через 8 месяцев после некоторой даты. По новому обязательству необходимо выплату произвести равными суммами через 3 и 9 месяцев. Изменение условий осуществляется с использованием простой ставки, равной 10% ($K = 360$). Примем в качестве базовой даты начало отсчета времени. Уравнение эквивалентности в этом случае записывается следующим образом:

$$10(1 + 4/12 \times 0{,}1)^{-1} + 7(1 + 8/12 \times 0{,}1)^{-1} =$$

$$= S(1 + 3/12 \times 0{,}1)^{-1} + S(1 + 9/12 \times 0{,}1)^{-1}.$$

Следовательно, $S = 8{,}521$ млн руб.

Перейдем к примеру с применением сложной процентной ставки.

ПРИМЕР 4.16. Существует обязательство уплатить 100 тыс. руб. через 5 лет. Стороны согласились изменить условия погашения долга следующим образом: через два года выплачивается 30 тыс., а оставшийся долг — спустя 4 года после первой выплаты (см. рис .4.4). Необходимо определить сумму последнего платежа.

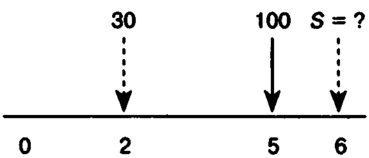

Рис. 4.4

Уравнение эквивалентности составим на начало отсчета времени:

$$100v^5 = 30v^2 + Sv^6,$$

где v — дисконтный множитель.

Аналогичное по смыслу равенство можно составить на любую дату, например на конец шестого года. В этом случае

$$100(1 + i) = 30(1 + i)^4 + S.$$

Данное уравнение легко получить из предыдущего, умножив его на $(1 + i)^6$.

При решении любого из приведенных уравнений относительно S находим (при условии, что ставка равна 10% годовых) $S = 133{,}233$ тыс.руб. Выбор базовой даты при применении сложных процентов не влияет на результаты расчетов по замене платежей.

§4.5. Налоги и инфляция

В рассмотренных выше методах определения наращенной суммы не учитывались такие важные моменты, как налоги и инфляция. Затронем эту проблему.

Налог на полученные проценты. В ряде стран полученные (юридическими, а иногда и физическими лицами) проценты облагаются налогом, что, естественно, уменьшает реальную наращенную сумму и доходность депозитной операции.

Обозначим, как и выше, наращенную сумму до выплаты налогов, через S, а с учетом их выплат как S''. Пусть ставка налога на проценты равна g, а общая сумма налога G.

При начислении налога на проценты возможны два варианта: налог начисляется за весь срок сразу, т.е. на всю сумму процентов, или последовательно по периодам, например в конце каждого года.

При начислении простых процентов за весь срок находим[1]:

$$G = Pnig,$$

$$S'' = S - (S - P)g = P[(1 + n(1 - g)i]. \qquad (4.38)$$

Таким образом, учет налога при определении наращенной суммы сводится к соответствующему сокращению процентной ставки — вместо ставки i фактически применяется ставка $(1 - g)i$. Размер налога пропорционален сроку.

Перейдем к долгосрочным операциям со сложными процентами. Начнем с варианта определения налога за весь срок. Его сумма равна

$$G = (S - P)g = P[(1 + i)^n - 1]g. \qquad (4.39)$$

Наращенная сумма после выплаты налога составит

$$S'' = S - G = P[(1 - g)(1 + i)^n + g]. \qquad (4.40)$$

По второму варианту сумма налога определяется за каждый истекший год. Эта величина переменная — с ростом наращенной суммы растет и сумма налога. Рассчитаем налог на проценты за t-й год:

---

[1] Доказательство (4.38) см. в Математическом приложении к главе.

$$G_t = (S_t - S_{t-1})g = P[(1+i)^t - (1+i)^{t-1}]g = P(1+i)^{t-1}\, i \times g.$$

За весь срок сумма налогов равна полученной выше величине[1]:

$$\sum_t G_t = \sum P(1+i)^{t-1} i \times g = P[(1+i)^n - 1]g = G. \quad (4.41)$$

Иначе говоря, метод взыскания налога не влияет на общую его сумму. Однако, для плательщика налога далеко небезразлично, *когда* он его выплачивает.

ПРИМЕР 4.17. Пусть ставка налога на проценты равна 10%. Процентная ставка — 30% годовых, срок начисления процентов — 3 года. Первоначальная сумма ссуды 1 млн руб. Определим размеры налога на проценты при начислении простых и сложных процентов.

При начислении простых процентов за весь срок получим следующие размеры наращенной суммы:

1900 тыс. руб. без уплаты налога,

$S'' = 1000[1 + 3(1 - 0,1)0,3] = 1810$ тыс. руб. с учетом выплаты налога.

Начислим теперь сложные проценты:

2197 тыс. руб. без уплаты налога,

$S'' = 1000[(1 - 0,1)(1 + 0,3)^3 + 0,1] = 2077,3$ тыс. руб. с учетом его выплаты за весь срок сразу.

Сумма налога равна 119,7 тыс. руб.

При последовательной выплате налога:

за первый год выплачивается $1000 \times 0,1 \times 0,3 = 30$ тыс. руб., налог за второй год $1000 \times 1,3 \times 0,3 \times 0,1 = 39$. Наконец, за третий год $1000 \times 1,3^2 \times 0,3 \times 0,1 = 50,7$. Общая сумма налога равна 119,7 тыс. руб.

Инфляция. В рассмотренных выше методах наращения все денежные величины измерялись по номиналу. Иначе говоря, не принималось во внимание снижение реальной покупательной способности денег за период, охватываемый операцией. Однако в современных условиях инфляция в денежных отношениях играет заметную роль, и без ее учета конечные результаты часто представляют собой условную величину.

Инфляцию необходимо учитывать по крайней мере в двух случаях: при расчете наращенной суммы денег и при измерении

[1] См. Математическое приложение к главе.

реальной эффективности (доходности) финансовой операции. Остановимся на этих проблемах.

Введем обозначения:

S — наращенная сумма денег, измеренная по номиналу,

C — наращенная сумма с учетом ее обесценения,

J_p — индекс цен,

J_c — индекс, характеризующий изменение покупательной способности денег за период.

Очевидно, что

$$C = S \times J_c.$$

Индекс покупательной способности денег, как известно, равен обратной величине индекса цен — чем выше цены, тем ниже покупательная способность:

$$J_c = \frac{1}{J_p}.$$

Указанные индексы, естественно, должны относиться к одинаковым интервалам времени. Пусть, например, сегодня получено 150 тыс. руб. Известно, что за два предшествующих года цены увеличились в 1,5 раза (или повышение на 50%), $J_p = 1{,}5$, индекс покупательной способности денег равен 1/1,5. Следовательно, реальная покупательная способность 150 тыс. руб. составит 150/1,5 = 100 тыс. руб. в деньгах с покупательной способностью двухлетней давности.

Нетрудно связать индекс цен и темп инфляции. Под *темпом инфляции* h понимается *относительный прирост цен за период;* обычно он измеряется в процентах и определяется как

$$h = 100(J_p - 1).$$

В свою очередь

$$J_p = \left(1 + \frac{h}{100}\right).$$

Например, если темп инфляции за период равен 30%, то это означает, что цены выросли в 1,3 раза.

Инфляция является цепным процессом. Следовательно, индекс цен за несколько периодов равен *произведению* цепных индексов цен:

$$J_p = \prod_{1}^{n}\left(1 + \frac{h_t}{100}\right), \qquad (4.42)$$

где h_t — темп инфляции в периоде t.

Пусть теперь речь пойдет о будущем. Если h — постоянный ожидаемый (или прогнозируемый) темп инфляции за один период, то за n таких периодов получим

$$J_p = \left(1 + \frac{h}{100}\right)^n. \qquad (4.43)$$

Грубейшей ошибкой, которая, к сожалению, встречается в российской практике, является суммирование (!) темпов инфляции отдельных периодов для получения обобщающего показателя инфляции за весь срок. Что, заметим, существенно занижает величину получаемого показателя.

ПРИМЕР 4.18. Постоянный темп инфляции на уровне 5% в месяц приводит к росту цен за год в размере

$$J_p = 1{,}05^{12} = 1{,}796.$$

Таким образом, действительный годовой темп инфляции равен 79,6%, а не 60% как при суммировании.

Продолжим пример. Пусть приросты цен по месяцам составили: 1,5; 1,2 и 0,5%. Индекс цен за три месяца согласно (4.42) равен

$$J_p = 1{,}015 \times 1{,}012 \times 1{,}005 = 1{,}0323.$$

Темп инфляции за три месяца 3,23%.

Вернемся к проблеме обесценения денег при их наращении. Если наращение производится по простой ставке, то наращенная сумма с учетом покупательной способности равна

$$C = \frac{S}{J_p} = P\frac{1 + ni}{J_p} = \frac{1 + ni}{\left(1 + \frac{h}{100}\right)^n}. \qquad (4.44)$$

Как видим, увеличение наращенной суммы с учетом ее инфляционного обесценения имеет место только тогда, когда $1 + ni > J_p$.

ПРИМЕР 4.19. На сумму 1,5 млн руб. в течение трех месяцев начисляются простые проценты по ставке 28% годовых, наращенная сумма, следовательно, равна 1,605 млн руб. Ежемесячная инфляция характеризуется темпами 2,5; 2,0 и 1,8%. Индекс цен равен $1{,}025 \times 1{,}02 \times 1{,}018 = 1{,}06432$. С учетом обесценивания наращенная сумма составит

$$\frac{1{,}605}{1{,}06432} = 1{,}508 \text{ млн руб.}$$

Обратимся теперь к наращению по сложным процентам. Наращенная сумма с учетом инфляционного обесценивания находится как

$$C = \frac{S}{J_p} = P\frac{(1+i)^n}{J_p} = P\left(\frac{1+i}{1+\dfrac{h}{100}}\right)^n. \tag{4.45}$$

Величины, на которые умножаются P в формулах (4.44) и (4.45), представляют собой множители наращения, учитывающие ожидаемый уровень инфляции. Посмотрим теперь, как совместно влияют сложная ставка i и темп инфляции h на значение этого множителя. Очевидно, что если среднегодовой темп инфляции равен процентной ставке, то роста реальной суммы не произойдет — наращение будет поглощаться инфляцией, и следовательно, $C = P$. Если же $h/100 > i$, то наблюдается "эрозия" капитала — его реальная сумма будет меньше первоначальной. Только в ситуации, когда $h/100 < i$, происходит реальный рост, реальное накопление (см. рис. 4.5). Очевидно, что при начислении простых процентов ставка, компенсирующая влияние инфляции, соответствует величине

$$i' = \frac{J_p - 1}{n}.$$

Ставку, превышающую критическое значение i' (при начислении сложных процентов $i' = h$), называют *положительной ставкой процента*.

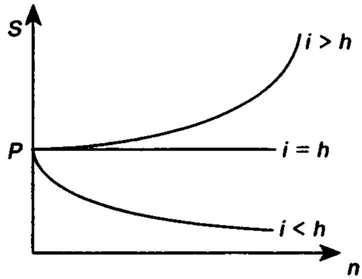

Рис. 4.5

Владельцы денег, разумеется, не могут смириться с их инфляционным обесценением и предпринимают различные попытки компенсации потерь. Наиболее распространенной является корректировка ставки процента, по которой производится наращение, т.е. увеличение ставки на величину так называемой ***инфляционной премии.*** Итоговую величину можно назвать ***брутто-ставкой.*** (В западной финансовой литературе такую ставку иногда называют номинальной. Однако этот термин уже "занят" (см. номинальная и эффективная ставки в § 3.3.).

Определим брутто-ставку (обозначим ее как r) при условии полной компенсации инфляции. При наращении по сложной процентной ставке находим брутто-ставку из равенства

$$1 + r = (1 + i)\left(1 + \frac{h}{100}\right).$$

Откуда

$$r = i + \frac{h}{100} + i\frac{h}{100}. \qquad (4.46)$$

На практике скорректированную по темпу инфляции ставку часто рассчитывают проще, а именно:

$$r = i + \frac{h}{100}. \qquad (4.47)$$

Формула (4.46) по сравнению с (4.47) содержит один дополнительный член, которым при незначительных величинах i и h можно пренебречь. Если же они значительны, то ошибка (не в пользу владельца денег) станет весьма ощутимой. Например, даже при $i = 5\%$ и $h = 1\%$ "вклад" этого произведения в брутто-ставку составит 0,005, или 0,5%. Брутто-ставка в этом случае равна 15,5% (вместо 15% по формуле (4.47). Однако при годовой инфляции в 100% и той же исходной ставке наращения брутто-ставка увеличивается уже до 0,05 + 1 + 0,05 × 1 = 1,1, т.е. до 110%.

При наращении по простым процентам имеем

$$1 + nr = (1 + ni)J_p,$$

где J_p — индекс цен за учитываемый период.

Очевидно, что при больших темпах инфляции корректировка ставки имеет смысл только для кратко- или в крайнем случае среднесрочных операций.

Перейдем теперь к измерению реальной доходности финансовой операции, т.е. доходности с учетом инфляции. Если r объявленная норма доходности (или брутто-ставка), то реальный показатель доходности в виде годовой процентной ставки i можно определить при наращении сложных процентов на основе (4.47):

$$i = \frac{1 + r}{1 + \dfrac{h}{100}} - 1. \tag{4.48}$$

Если брутто-ставка определяется по упрощенной формуле (4.47), то

$$i = r - \frac{h}{100}.$$

Аналогичный по содержанию показатель, но при начислении простых процентов, находим как

$$i = \frac{1}{n}\left(\frac{1 + nr}{J_p} - 1\right). \tag{4.49}$$

Как видим, реальная доходность здесь зависит от срока операции. Положительной простая ставка i может быть только при условии, что $1 + nr > J_p$.

ПРИМЕР 4.20. Рассчитаем реальную годовую ставку для следующих условий: годовой темп инфляции — 20%, брутто-ставка —

25% годовых, n = 0,5 года. Индекс цен за половину года: $1{,}2^{0{,}5} = 1{,}0954$.

Для простых процентов получим

$$i = \frac{1}{0{,}5}\left(\frac{1 + 0{,}5 \times 0{,}25}{1{,}0954} - 1\right) = 0{,}05404.$$

Изменим условия задачи. Пусть срок теперь равен 5 годам и речь идет о сложной ставке. Индекс цен за этот период 1,7. В этом случае

$$\frac{h}{100} = \sqrt[5]{1{,}7} - 1 = 0{,}11196,$$

$$i = \frac{1 + 0{,}25}{1 + 0{,}11196} - 1 = 0{,}1241.$$

Компенсации инфляции можно достичь и путем индексации исходной суммы задолженности. В этом случае

$$C = P \times J_p \times (1 + i)^n.$$

§4.6. Кривые доходности

Как уже говорилось выше, процентная ставка является измерителем доходности финансовой операции. Ее значение зависит от многих факторов. Для практика важно представить себе закономерность изменения величины доходности (или процентных ставок, используемых в однородных по содержанию операциях), в зависимости от некоторых фундаментальных факторов. Вероятно, наиболее важным из них является *риск невозврата* вложенных средств. Очевидно также, что подобного рода риск существенно зависит от срока ссуды. Так, при всех прочих равных условиях ссуда на 5 лет более рискованна, чем, скажем, на 2 года. Компенсировать риск владельцу денег может повышение ожидаемой доходности, договорной процентной ставки. Таким образом, зависимость "доходность — риск" приближенно можно охарактеризовать с помощью зависимости "доходность — срок", получить которую для практических целей существенно проще. Такую зависимость, представленную в виде графика, называют *кривой доходности* (*yield curve*). На графике по вертикали откладывают доходность (Y), по горизонтали — срок (n) (см. рис. 4.6). Если график охватывает широкий

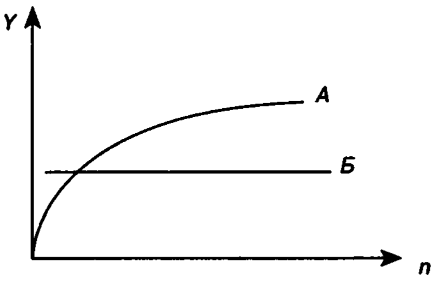

Рис. 4.6

диапазон сроков (как краткосрочные, так и долгосрочные операции), что тоже практикуется, то для измерения срока применяют логарифмическую шкалу.

Кривые доходности обычно строятся раздельно для кратко-, средне- и долгосрочных операций и однородных кредитно-ссудных операций и финансовых инструментов. Наблюдаемые значения доходности обычно находятся около кривой или непосредственно на ней. Конкретная кривая доходности отвечает реальной ситуации, сложившейся на денежно-кредитном рынке, и характерна для короткого временного периода. Изменение ситуации меняет форму кривой и ее положение на графике. В ряде западных периодических финансовых изданий регулярно приводятся такие кривые.

Для нормальных экономических условий кривая доходности имеет форму кривой *А*: доходность (*Y*) здесь растет по мере увеличения срока. Причем каждая следующая единица прироста срока дает все меньшее увеличение доходности. Такую кривую называют ***положительной***, или ***нормальной***, кривой доходности (*pozitive, normal yield curve*). Нормальная форма кривой (не следует путать с кривой нормального распределения, используемой в статистике) наблюдается в условиях, когда инвесторы в своей массе учитывают такие факторы, как рост неопределенности финансовых результатов (риска) при увеличении срока.

Кривая доходности, близкая к горизонтальной прямой (линия *Б*), указывает на то, что инвесторы не принимают во внимание или в малой степени учитывают риск, связанный со сроком.

Иногда встречаются "отрицательные" и "сгорбленные" кривые (*humped yield curve*) доходности. Первая из названных кривых соответствует уменьшению доходности финансового инструмента по мере роста срока (высокая нестабильность рынка, ожидание повышения процентных ставок), вторая — падению доходности после некоторого ее роста.

Существуют несколько конкурирующих или, скорее, дополняющих теорий, объясняющих закономерности "поведения" кривых доходности. Остановимся на двух из них: теории ликвидности (*liquidity preference theory*) и теории ожиданий (*expectations theory*). Согласно первой изменения доходности связываются с увеличением риска ликвидности инструмента в относительно короткие сроки. Вторая из упомянутых теорий утверждает, что форма кривой может рассматриваться как обобщенная характеристика ожиданий инвесторов, вернее, их поведения в текущий момент в связи с ожиданиями изменений процентных ставок в будущем. Однако интерпретация формы кривой в этом плане неоднозначна, да и не может быть иной, поскольку приходится принимать во внимание по крайней мере действие двух факторов: риск и ожидание изменений ставок. Например, положительная кривая может интерпретироваться как указание на то, что инвесторы ожидают рост ставок в будущем. Иногда эта же форма кривой считается симптомом относительной стабильности денежно-кредитного рынка.

Кривые доходности получили широкое распространение как инструмент анализа, помогающий при решении ряда инвестиционных проблем, в частности, при сравнении доходности нескольких финансовых инструментов, корректировке портфеля активов и т.д.[1]

ПРИМЕР 4.21. Рассмотрим на условном примере один из простых способов применения кривой доходности применительно к расчету процентной ставки. Допустим, инвестор должен инвестировать некоторую сумму денег на 4 года. Причем в силу ряда причин у него есть только два варианта для этого: разместить эту сумму на депозитах сразу на весь срок или сначала на 3 года, а затем на 1 год. Пусть уровни ставок следуют нормальной кривой доходности: по трехлетним депозитам — 10%, по четырехлетним — 10,5% сложных годовых. Размер ставки для депозита на последний год в момент принятия решения, разумеется, неизвестен. Какой вариант размещения средств должен выбрать инвестор? Очевидно, что для того чтобы остановиться на втором варианте, он должен ожидать результат не хуже, чем при первом варианте. Задача, следовательно, сводится к определению того значения ставки для 4-го года, при котором оба варианта будут равноценными в финансовом отношении.

[1] В гл. 7 приводится пример выбора поведения инвестора в зависимости от ожиданий размера процентной ставки.

Обозначим через i_3 и i_4 уровни процентных ставок для депозитов на 3 и 4 года, а через i_0 — неизвестную ставку для годового депозита. В силу финансовой эквивалентности результатов помещения средств множители наращения для обоих вариантов должны быть равными друг другу. Отсюда

$$(1 + i_4)^4 = (1 + i_3)^3(1 + i_0).$$

По данным примера находим ставку

$$i_0 = \frac{(1 + i_4)^4}{(1 + i_3)^3} - 1 = \frac{1{,}105^4}{1{,}1^3} - 1 = 0{,}12014, \text{ или } 12{,}014\%.$$

Таким образом, для того чтобы инвестор остановился на втором варианте, он должен ожидать, что через 3 года ставка по одногодичным депозитам будет не менее 12,014 %, т.е. уровень ставок повысится. Соответственно, если он ожидает, что ставка не достигнет этого уровня, следует выбрать первый вариант.

Математическое приложение к главе

1. Приведем доказательство формулы (4.38).

По определению

$$S'' = S - (S - P)g,$$

откуда

$$S'' = (1 - g)S + Pg = P(1 - g)(1 + ni) + Pg = P[1 + n(1 - g)i].$$

2. Докажем формулу (4.41):

$$G_t = (S_t - S_{t-1})g = P[(1 + i)^t - (1 + i)^{t-1}]g = P(1 + \mathrm{i})^{t-1} \times i \times g,$$

$$\sum_t G_t = Pig\sum (1 + i)^{t-1}.$$

Суммируются $n - 1$ членов геометрической прогрессии:

$$\sum_t (1 + i)^{t-1} = \frac{(1 + i)^n - 1}{i}.$$

Окончательно имеем

$$G = P[(1 + i)^n - 1]g.$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Четыркин Е.М.* Методы финансовых и коммерческих расчетов. М.: Дело, 1995. Гл. 3.
2. *Четыркин Е.М., Васильева Н.Е.* Финансово-экономические расчеты. М.: Финансы и статистика, 1990. Гл. 2.
3. *Шарп Х.Ф., Александер Г.Дж., Бейли Дж.В.* Инвестиции. М.: Инфра-М, 1997. Гл. 5, 13.
4. *Cartledge P.* Financial arithmetic. A practitioners guide. Euromoney Books, 1993.

Глава 5

ПОСТОЯННЫЕ ФИНАНСОВЫЕ РЕНТЫ

§5.1. Виды потоков платежей и их основные параметры

Современные финансово-банковские операции часто предполагают не отдельные или разовые платежи, а некоторую их последовательность во времени, например, погашение задолженности в рассрочку, периодическое поступление доходов от инвестиций, выплаты пенсии и т. д. Такого рода последовательность, или ряд платежей, называют *потоком платежей.* (В западной финансовой литературе в аналогичном смысле применяется термин *cash flows stream* — буквально, потоки наличности, хотя речь идет о потоке денег в любом виде.) Отдельный элемент такого ряда платежей назовем *членом потока (cash flow)*[1]. Введение понятия поток платежей в финансовый количественный анализ, что произошло сравнительно недавно, заметно расширило рамки и возможности последнего.

Классификация потоков. В практике встречаются разнообразные потоки платежей. Причем один и тот же вид потока может быть использован в анализе различных финансово-кредитных операций. Поэтому в этой и следующей главах основное внимание уделяется формальным соотношениям, а не конкретным экономическим показателям, связанным с этими операциями.

Потоки платежей могут быть *регулярными* (размеры платежей постоянные или следуют установленному правилу, предусматривающему равные интервалы между платежами) и *нерегулярными.* Члены потоков могут быть как положительными (поступления), так и отрицательными величинами (выплаты).

Поток платежей, все члены которого — положительные величины, а временные интервалы между платежами одинаковы,

---

[1] В переводной литературе обычно не различают термины: поток платежей и член потока.

называют *финансовой рентой*, или просто *рентой (rent)*. Например, рентой является последовательность получения процентов по облигации, платежи по потребительскому кредиту, выплаты в рассрочку страховых премий и т.д. Иногда подобного рода поток платежей называют *аннуитетом* (*annuity*), что, строго говоря, применимо только к ежегодным выплатам.

Использование в финансово-банковской операции условий, предполагающих выплаты в виде финансовой ренты, существенно упрощает количественный их анализ, дает возможность применять стандартные формулы и таблицы значений многих, необходимых для финансовых расчетов коэффициентов.

Рента описывается следующими параметрами: *член ренты* (*rent*) — размер отдельного платежа, *период ренты* (*rent period, payment period*) — временной интервал между двумя последовательными платежами, *срок ренты (term)* — время от начала первого периода ренты до конца последнего, *процентная ставка*. Размер ставки не всегда прямо оговаривается в условиях финансовой операции. Однако, как будет показано далее, этот параметр крайне необходим для ее анализа. При характеристике некоторых видов рент необходимо указать дополнительные условия и параметры. Например, число платежей в году, способ и частота начислений процентов, параметры, характеризующие закономерность изменения размеров члена ренты во времени.

В практике применяют разные по своим условиям ренты. В основу их классификации может быть положен ряд признаков. Рассмотрим некоторые из таких классификаций.

По количеству выплат членов ренты на протяжении года ренты делятся на *годовые* (выплата раз в году) и *р-срочные* (*р* — количество выплат в году). В анализе производственных инвестиций иногда применяют ренты с периодами, превышающими год. Перечисленные виды рент называют *дискретными*. В финансовой практике встречаются и с такими последовательностями платежей, которые производятся так часто, что их практически можно рассматривать как *непрерывные*.

По числу раз начислений процентов на протяжении года различают: ренты с ежегодным начислением, с начислением *m* раз в году, с непрерывным начислением. Моменты начисления процентов необязательно совпадают с моментами выплат членов ренты. Однако, как будет показано, расчеты заметно упрощаются, если два указанных момента совпадают.

По величине своих членов ренты делятся на *постоянные* (с одинаковыми размерами члена ренты) и *переменные*. Члены переменных рент изменяют свои размеры во времени, следуя какому-либо закону, например арифметической или геометрической прогрессии, или несистематично (задаются таблицей). Постоянные ренты — наиболее распространенный вид ренты.

По вероятности выплат ренты делятся на *верные* (*annuity certain*) и *условные* (*contingent annuity*). Верные ренты подлежат безусловной уплате, например, при погашении кредита. Число членов такой ренты заранее известно. В свою очередь выплата условной ренты ставится в зависимость от наступления некоторого случайного события, число ее членов заранее неизвестно. К такого рода рентам относятся *страховые аннуитеты* — последовательные платежи в имущественном и личном страховании. Типичным примером страхового аннуитета является пожизненная выплата пенсии.

По количеству членов различают ренты с конечным числом членов, или *ограниченные* ренты (их срок заранее оговорен), и *бесконечные,* или *вечные* ренты (*perpetuity*). С вечной рентой встречаются на практике в ряде долгосрочных операций, когда предполагается, что период функционирования анализируемой системы или срок операции весьма продолжителен и не оговаривается конкретными датами. В качестве вечной ренты логично рассматривать и выплаты процентов по бессрочным облигационным займам.

По соотношению начала срока ренты и какого-либо момента времени, упреждающего начало ренты (например, начало действия контракта или даты его заключения), ренты делятся на *немедленные* и *отложенные,* или *отсроченные* (*deffered annuity*). Пример отсроченной ренты: погашение долга в рассрочку после льготного периода.

Очень важным является различие по моменту выплат платежей в пределах периода ренты. Если платежи осуществляются в конце этих периодов, то соответствующие ренты называют *обыкновенными,* или *постнумерандо* (*ordinary annuity*), если же платежи производятся в начале периодов, то их называют *пренумерандо* (*annuity due*). Иногда контракты предусматривают платежи или поступления денег в середине периодов.

Приведем пример. Контракт предусматривает периодическое погашение задолженности путем выплаты в конце каждого полугодия одинаковых погасительных платежей на протяжении фиксированного числа лет, Таким образом, предусматривается постоянная, полугодовая, верная, ограниченная рента постнумерандо.

Обобщающие параметры потоков платежей. В подавляющем числе практических случаев анализ потока платежей предполагает расчет одной из двух обобщающих характеристик: наращенной суммы или современной стоимости потока. *Наращенная сумма* (*amount of cash flows*) — сумма всех членов потока платежей с начисленными на них к концу срока процентами. Под *современной стоимостью потока платежей* (*present value of cash flows*) понимают сумму всех его членов, дисконтированных на начало срока ренты или некоторый упреждающий момент времени. (В старой русской финансовой литературе аналогичный по содержанию показатель назывался *настоящей ценой* платежей.) Конкретный смысл этих характеристик определяется содержанием его членов или их происхождением. Наращенная сумма может представлять собой общую сумму накопленной задолженности к концу срока, итоговый объем инвестиций, накопленный денежный резерв и т. д. В свою очередь современная стоимость характеризует приведенные к началу осуществления проекта инвестиционные затраты, суммарный капитализированный доход или чистую приведенную прибыль от реализации проекта и т. п.

Обобщающие поток платежей характеристики, особенно его современная стоимость, широко применяются в различных финансовых расчетах. Так, без них, например, невозможно разработать план последовательного погашения задолженности, измерить финансовую эффективность проекта, осуществить сравнение или безубыточное изменение условий контрактов, решать многие другие практические задачи. В связи со сказанным основное внимание в данной главе уделено методам расчета наращенных сумм и современных стоимостей постоянных финансовых рент. Однако, до этого необходимо обсудить более общие подходы, применяемые при определении упомянутых параметров в анализе любых видов потоков платежей.

Прямой метод расчета наращенной суммы и современной стоимости потока платежей. Рассмотрим общую постановку задачи. Допустим, имеется ряд платежей R_t, выплачиваемых спустя время n_t после некоторого начального момента времени. Общий срок выплат n лет. Необходимо определить наращенную на конец срока потока платежей сумму. Если проценты начисляются раз в году по сложной ставке i, то, обозначив искомую величину через S, получим по определению

$$S = \sum_t R_t \left(1 + i\right)^{n - n_t}. \qquad (5.1)$$

Современную стоимость такого потока также находим прямым счетом как сумму дисконтированных платежей:

$$A = \sum_t R_t v^{n_t}, \qquad (5.2)$$

где A — современная стоимость потока платежей, v^{n_t} — дисконтный множитель по ставке i.

Как уже отмечено выше, современная стоимость потока платежей представляет собой обобщающую оценку, приуроченную к некоторому предшествующему моменту времени (у немедленной ренты — к началу срока). Наращенная сумма также является обобщением всех членов потока в виде одного числа, однако эта оценка приурочена к концу срока. Нетрудно обнаружить, что между величинами A и S существует функциональная зависимость. В самом деле, дисконтируем сумму S с помощью дисконтного множителя v^n, получим

$$Sv^n = \sum_t R_t \left(1 + i\right)^{n - n_t} \times v^n = \sum_t R_t v^{n_t} = A.$$

Наращивая сумму A по той же ставке, получим

$$A(1 + i)^n = S. \qquad (5.3)$$

ПРИМЕР 5.1. График предусматривает следующий порядок выдачи ссуды во времени: 1 июля 2000 г. — 5 млн руб., 1 января 2001 г. — 15 млн руб., 1 января 2003 г. — 18 млн руб. Необходимо определить сумму задолженности на начало 2004 г. при условии, что проценты начисляются по ставке 20%. Схематично условия задачи показаны на рис. 5.1.

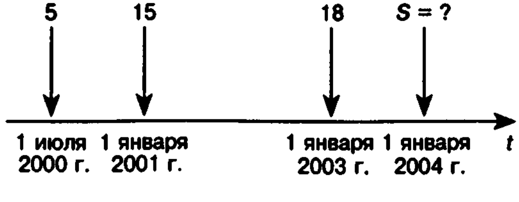

Рис. 5.1

Находим

$$S = 5 \times 1{,}2^{3{,}5} + 15 \times 1{,}2^{3} + 18 \times 1{,}2 = 56{,}985 \text{ млн руб.}$$

По этим же данным определим современную стоимость потока на момент выплаты первой суммы. При прямом счете получим

$$A = 5 + 15 \times 1{,}2^{-0{,}5} + 18 \times 1{,}2^{-2{,}5} = 30{,}104 \text{ млн руб.},$$

а по формуле (5.3)

$$A = 56{,}985 \times 1{,}2^{-3{,}5} = 30{,}104 \text{ млн руб.}$$

В частном, но распространенном случае, когда размеры членов потока произвольны, но выплаты постнумерандо производятся через равные интервалы времени, а их количество больше 5—7, есть смысл для расчета величины A применить программу НПЗ (NPV) пакета *Excel*.

Порядок действий при использовании программы НПЗ

1. Последовательно вызвать: f_x, **"финансовые функции"**, **НПЗ.**
2. В строке **Норма** показать ставку начисляемых процентов за период.
3. В строках **Значения** последовательно показать данные, характеризующие поток платежей, не более 29 членов потока.

После выполнения действий 1—3 в итоговой строке окна автоматически показывается расчетная величина современной стоимости потока платежей. После нажатия **ОК** эта величина показывается в выделенной ячейке таблицы *Excel*.

Примечание. Пользователь может изменять размеры процентной ставки и/или членов потока платежей, не выходя из окошка.

ПРИМЕР 5.2. Определим современную стоимость потока, члены которого 40, 50, 45, 70 выплачиваются постнумерандо по полугодиям. Процентная ставка 12% за полугодие.

Вызвав программу НПЗ, введем данные:

Норма: 12%
Значение 1: 40
Значение 2: 50
Значение 3: 45
Значение 4: 70
Ответ: 152,09

§5.2. Наращенная сумма постоянной ренты постнумерандо

Методом прямого счета, как это было показано в § 5.1, можно найти наращенную сумму и современную стоимость любого потока платежей, в том числе и постоянной ренты. Однако удобнее, особенно в аналитических целях, воспользоваться более компактными формулами. Поскольку обобщающие характеристики постоянных рент играют существенную роль в анализе финансовых операций, получим эти формулы для всех видов постоянных рент, хотя для понимания существа дела, вероятно, достаточно разобраться с расчетом соответствующих характеристик лишь для некоторых из них. В этом и следующем параграфах анализируются ренты постнумерандо.

Годовая рента. Начнем с наиболее простого случая — годовой ренты постнумерандо. Пусть в течение n лет в банк в конце каждого года вносится по R рублей. На взносы начисляются сложные проценты по ставке i % годовых. Таким образом, имеется рента, член которой равен R, а срок — n. Все члены ренты, кроме последнего, приносят проценты — на первый член проценты начисляются $n - 1$ год, на второй $n - 2$ и т.д. На последний взнос проценты не начисляются (напомним, что рента постнумерандо). Наращенная к концу срока каждого взноса сумма составит:

$$R(1 + i)^{n-1},\ R(1 + i)^{n-2},\ ...,\ R(1 + i),\ R.$$

Перепишем этот ряд в обратном порядке. Нетрудно убедиться в том, что он представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $(1 + i)$ и первым членом R. Число членов прогрессии равно n. Искомая величина очевидно равна сумме членов этой прогрессии.

Откуда

$$S = R\frac{(1 + i)^n - 1}{(1 + i) - 1} = R\frac{(1 + i)^n - 1}{i}. \qquad (5.4)$$

Обозначим множитель, на который умножается R, через $s_{n;i}$, нижний индекс $n;i$ указывает на продолжительность ренты и величину процентной ставки (часто в литературе можно встретить обозначение $s_{\overline{n}|i}$). В дальнейшем этот множитель будем называть *коэффициентом наращения ренты.* Данный коэффициент представляет собой наращенную сумму ренты, член которой равен 1:

$$s_{n;i} = \sum_{t=0}^{n-1}(1+i)^t = \frac{(1+i)^n - 1}{i}. \tag{5.5}$$

Таким образом,

$$S = Rs_{n;i}. \tag{5.6}$$

Как видим, коэффициент наращения ренты зависит только от срока (числа членов ренты) и процентной ставки. С увеличением значения каждого из этих параметров его величина растет. При $i = 0$ имеем $S = Rn$. Значения коэффициента легко табулировать (см. табл. 6 Приложения).

> **ПРИМЕР 5.3.** Для обеспечения некоторых будущих расходов создается фонд. Средства в фонд поступают в виде постоянной годовой ренты постнумерандо в течение 5 лет. Размер разового платежа 4 млн руб. На поступившие взносы начисляются проценты по ставке 18,5% годовых. Поскольку в таблице коэффициентов наращения Приложения нет такого значения ставки, то необходимую величину определим по формуле (5.4). Величина фонда на конец срока составит
>
> $$S = 4 \times s_{5;18,5} = 4 \times \frac{(1+0{,}185)^5 - 1}{0{,}185} = 28{,}9 \text{ млн руб.}$$

Для расчета наращенной суммы можно воспользоваться пакетом *Excel* БЗ (FV), который следует применять только в тех случаях, когда $p = m$. Последовательность действий и пример применения этой программы показаны ниже — там, где речь идет о таких рентах.

Полезно проследить взаимосвязь коэффициентов наращения, относящихся к последовательным интервалам времени. Для случая, когда общий срок определяется как $n = n_1 + n_2$, получим

$$s_{n;i} = s_{n_1;i}(1+i)^{n_2} + s_{n_2;i}. \tag{5.7}$$

Годовая рента, начисление процентов *m* раз в году. Пусть как и выше, анализируется годовая рента постнумерандо. Однако проценты теперь начисляются m раз в году. Число членов ренты равно nm. Члены ренты с начисленными к концу срока процентами образуют ряд (перепишем его в обратном порядке):

$$R,\ R(1+j/m)^m,\ R(1+j/m)^{2m},\ \dots,\ R(1+j/m)^{(n-1)m},$$

где j — номинальная ставка процентов (см. § 3.3).

Нетрудно убедиться, что и в этом случае мы имеем дело с возрастающей геометрической прогрессией. Первый член прогрессии равен R, знаменатель — $(1+j/m)^m$. Сумма членов этой прогрессии составляет

$$S = R\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{(1+j/m)^m-1} = Rs_{mn;\,j/m}. \tag{5.8}$$

> **ПРИМЕР 5.4.** Несколько изменим условия примера 5.3. Пусть теперь проценты начисляются поквартально, а не раз в году. Имеем $j/m = 18{,}5/4$, $mn = 20$:
>
> $$S = 4\frac{(1+0{,}185\,/\,4)^{20}-1}{(1+0{,}185\,/\,4)^{4}-1} = 29{,}663 \text{ млн руб.}$$
>
> Как видим, переход от годового начисления процентов к поквартальному несколько увеличил наращенную сумму.

Рассмотрим теперь методы расчета наращенной суммы для вариантов p-срочной ренты постнумерандо при условии, что $m = 1$, $m = p$ и $m \neq p$.

Рента p-срочная ($m = 1$). Пусть рента выплачивается p раз в году равными суммами, процент начисляется раз в конце года. Если годовая сумма платежей равна R, то каждый раз выплачивается R/p. Общее число членов ренты равно np. Последовательность членов ренты с начисленными процентами представляет собой геометрическую прогрессию. Первый член ее равен R/p , знаменатель — $(1+i)^{1/p}$. Сумма членов этой прогрессии

$$S = \frac{R}{p}\times\frac{(1+i)^{(1/p)n}-1}{(1+i)^{1/p}-1} = R\frac{(1+i)^n-1}{p[(1+i)^{1/p}-1]} = Rs^{(p)}_{n;i}. \tag{5.9}$$

ПРИМЕР 5.5. Вернемся к условиям примера 5.3. Допустим, платежи выплачиваются поквартально: R/p=1 млн руб., общее число платежей равно 20. Наращенная сумма составит

$$S = 4\frac{1,185^5 - 1}{4(1,185^{1/4} - 1)} = 30,834 \text{ млн руб.}$$

Рента *p*-срочная ($p = m$). На практике наиболее часто встречаются случаи, когда число выплат в году равно числу начислений процентов: $p = m$. Для получения необходимой формулы воспользуемся (5.4), в которой i заменено на j/m , а вместо числа лет берется число периодов выплат ренты np, член ренты равен R/p. Поскольку $p = m$, то в итоге получим

$$S = \frac{R}{m} \times \frac{(1 + j/m)^{mn} - 1}{j/m} = R\frac{(1 + j/m)^{mn} - 1}{j}. \qquad (5.10)$$

Полученные выше формулы (5.4) и (5.5) могут применяться и для определения наращенной суммы *p*-срочной ренты. В этом случае переменная n означает число периодов, в свою очередь i является ставкой за период. Например, пусть рента постнумерандо выплачивается по полугодиям. Тогда в формуле (5.4) под n следует понимать число полугодий, а под i — сложную ставку за полугодие.

Для расчета наращенной суммы для этого случая можно воспользоваться программой БЗ (FV) пакета *Excel.* Эта программа помимо потока постоянных платежей учитывает единовременный взнос (имеющиеся средства) в начале срока. Расчет производится по формуле

$$S = Rs_{n;i} + \text{НЗ}(1 + i)^n,$$

где R — член ренты, НЗ — единовременный взнос, $s_{n;i}$ — коэффициент наращения постоянной ренты, n — число периодов выплаты ренты и начисления процентов, i — процентная ставка за период.

Порядок действий при использовании программы БЗ

1. Последовательно вызвать: f_x, **"финансовые функции", БЗ.**
2. **В** окошке указать параметры и условия ренты:

Норма — ставка начисляемых процентов за период,

Число периодов,

Выплата — член ренты; показывается с отрицательным знаком,

НЗ — единовременный взнос в начале срока; показывается с отрицательным знаком. Если эта величина не указывается, то результат — наращенная сумма постоянной ренты,

Тип — вид ренты: 0 — для ренты постнумерандо и 1 — для ренты пренумерандо. Если вид ренты не указывается, то расчет ведется для ренты постнумерандо.

После выполнения действий 1—2 в итоговой строке **Значение** автоматически показывается расчетная величина. После нажатия кнопки **ОК** эта величина показывается в выделенной ячейке Таблицы *Excel*.

ПРИМЕР 5.6. Продолжим наш сквозной пример 5.3—5.5. Пусть выплата членов ренты и начисление процентов производится поквартально. По формуле (5.10) получим

$$S = 4 \times \frac{(1 + 0{,}185 / 4)^{4 \times 5} - 1}{0{,}185} = 31{,}785 \text{ млн руб.}$$

или по формуле (5.4)

$$S = 1 \times s_{20;18,5/4} = 1 \times \frac{(1 + 0{,}185 / 4)^{20} - 1}{0{,}185 / 4} = 31{,}785 \text{ млн руб.}$$

Применим программу БЗ. Для этого введем данные:

Норма: 4,625%,
Число периодов: 20,
Выплата: –1,
НЗ и Тип не указываются, так как НЗ = 0 выплаты постнумерандо.

Ответ: 31,785

Рента *p*-срочная ($p \neq m$). Определим теперь наращенную сумму для наиболее общего случая — *p*-срочная рента с начислением процентов *m* раз в году. Общее количество членов ренты равно np, величина члена ренты R/p. Члены ренты с начисленными процентами образуют ряд, соответствующий геометрической прогрессии с первым членом R/p и знаменателем $(1 + j/m)^{m/p}$. Сумма членов такой прогрессии составит

$$S = \frac{R}{p} \times \frac{(1 + j/m)^{m/p \times np} - 1}{(1 + j/m)^{m/p} - 1} = R\frac{(1 + j/m)^{mn} - 1}{p[(1 + j/m)^{m/p} - 1]}. \quad (5.11)$$

ПРИМЕР 5.7. Если в ренте, наращенная сумма которой определялась в предыдущем примере, начисление процентов производится ежемесячно, то

$$S = 4\frac{(1 + 0{,}185/12)^{12 \times 5} - 1}{4[(1 + 0{,}185/12)^{12/4} - 1]} = 32{,}025 \text{ млн руб.}$$

Непрерывное начисление процентов. Обсуждение методов определения наращенных сумм дискретных рент будет неполным, если не охватить ренты с непрерывным начислением процентов. Перепишем в обратном порядке ряд платежей с начисленными непрерывными процентами. Пусть это будут ежегодные платежи постнумерандо. Получим: R, Re^{δ}, $Re^{2\delta}$, ..., $Re^{(n-1)\delta}$. Сумма членов прогрессии равна

$$S = R\frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta} - 1} = Rs_{n;\delta}, \quad (5.12)$$

где e — основание натуральных логарифмов.

Аналогично для p-срочной ренты находим

$$S = R\frac{e^{\delta n} - 1}{p(e^{\delta/p} - 1)} = Rs^{(p)}_{n;\delta}. \quad (5.13)$$

ПРИМЕР 5.8. Если бы в условиях примера 5.2 вместо ежегодного начисления процентов предусматривалось непрерывное их начисление, причем сила роста равна 18,5%, то

$$S = 4 \times \frac{e^{0{,}185 \times 5} - 1}{e^{0{,}185} - 1} = 29{,}955 \text{ млн руб.}$$

При ежеквартальной выплате членов ренты получим

$$S = 4 \times \frac{e^{0{,}185 \times 5} - 1}{4(e^{0{,}185/4} - 1)} = 32{,}150 \text{ млн руб.}$$

Заметим, что непрерывное начисление процентов членов дискретной ренты дает в итоге такую же сумму, что и наращение по дискретной ставке i или j, если сила роста эквивалентна этим ставкам. Продемонстрируем сказанное на примере. Сила роста, эквивалентная годовой ставке 18,5%, согласно (3.27) составит $\delta = \ln(1 + 0{,}185) = 0{,}16974$. Для годовой ренты получим (см. пример 5.3)

$$S = 4 \times \frac{e^{0{,}16974 \times 5} - 1}{e^{0{,}16974} - 1} = 28{,}900 \text{ млн руб.}$$

Сравнение результатов наращения годовых и p-срочных рент постнумерандо с разными условиями выплат и наращения процентов. Как видно из приведенных выше примеров, частота платежей и наращения процентов заметно влияют на размер наращенной суммы. Для практика, очевидно, представляет определенный интерес соотношения этих сумм.

Обозначим сравниваемые суммы как $S(p;m)$: так, $S(1;1)$ означает наращенную сумму годовой ренты с ежегодным начислением процентов, $S(1;m)$ — аналогичную характеристику для ренты с начислением процентов m раз в году, наконец, $S(p;\infty)$ — наращенную сумму p-срочной ренты с непрерывным начислением процентов.

Для одних и тех же сумм годовых выплат, продолжительности рент и размеров процентных ставок ($i = j = \delta$) получим следующие соотношения:

$$S(1;1) < \underset{m>1}{S(1;m)} < S(1;\infty) < \underset{p>1}{S(p;1)} < \underset{p>m>1}{S(p;m)} < \underset{p=m>1}{S(p;m)} < \underset{m>p>1}{S(p;m)} < S(p;\infty)$$

Приведенные неравенства могут быть использованы при выборе условий контрактов, так как позволяют заранее (до расчета) получить представление о результатах, связанных с конкретными условиями. Например, можно заранее сказать, что рента с условиями: $p = 2$ и $m = 4$ дает меньшую наращенную сумму, чем с $p = 4$ и $m = 2$ при равенстве всех прочих условий.

В качестве иллюстрации приведем значения $S(p;m)$ для ренты с параметрами $n = 10$, $R = 10$, $i = j = \delta = 6\%$:

	$m = 1$	$m = 2$	$m = 4$	$m = 12$	$m = \infty$
$p = 1$	131,81	132,37	132,65	132,85	132,95
$p = 4$	134,74	135,35	135,67	135,88	135,99

§5.3. Современная стоимость постоянной ренты постнумерандо

Годовая рента. Напомним, что под современной стоимостью потока платежей понимают сумму дисконтированных членов этого потока на некоторый предшествующий момент времени. Вместо термина "современная стоимость" (современная величина) потока платежей в зависимости от контекста употребляют термины *капитализированная стоимость* или *приведенная величина.* Как было показано выше, современная стоимость потока платежей эквивалентна в финансовом смысле всем платежам, которые охватывает поток. В связи с этим данный показатель находит широкое применение в разнообразных финансовых расчетах (планирование погашения долгосрочных займов, реструктурирование долга, оценка и сравнение эффективности производственных инвестиций и т.д.). В общем виде метод определения современной величины потока платежей (метод прямого счета) рассмотрен в § 5.1. Здесь же объектом анализа является постоянная финансовая рента постнумерандо.

Методы расчета современных стоимостей финансовых рент обсудим в том же порядке, что и методы наращения рент и почти столь же детально. Начнем с самого простого случая — годовой ренты постнумерандо, член которой равен R, срок ренты — n, ежегодное дисконтирование. Рента немедленная. В этих условиях дисконтированная величина первого платежа равна Rv, второго — Rv^2, последнего — Rv^n. Как видим, эти величины образуют ряд, соответствующий геометрической прогрессии с первым членом Rv и знаменателем v. Обозначим сумму членов этой прогрессии через A:

$$A = R\sum_{t=1}^{n} v^t = Rv\frac{v^n - 1}{v - 1} = R\frac{1 - v^n}{i} =$$
$$= R\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} = Ra_{n;i}. \qquad (5.14)$$

Назовем множитель, на который умножается R, *коэффициентом приведения ренты*, он обозначен как $a_{n;i}$ (в литературе встречается обозначение $a_{\overline{n}|i}$). Этот коэффициент характеризует современную стоимость ренты с членом, равным 1. Значения $a_{n;i}$ табулированы (см. табл. 7 Приложения).

Поскольку рассматриваемый параметр часто применяется в финансовых расчетах, полезно обратить внимание на некоторые его свойства. Очевидно, что чем выше значение i, тем меньше величина коэффициента. Нетрудно показать, что при $i = 0$

$$a_{n;i=0} = n.$$

При увеличении срока ренты величина $a_{n;i}$ стремится к некоторому пределу. При $n = \infty$ предельное значение коэффициента составит

$$a_{\infty;i} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i} = \frac{1}{i}. \tag{5.15}$$

Полученное выражение применяется при расчете современной стоимости вечной ренты, о чем пойдет речь в § 5.5.

График зависимости $a_{n;i}$ от n показан на рис. 5.2.

Воспользуемся формулой (5.14) для определения взаимосвязи коэффициентов приведения ограниченной и вечной рент:

$$a_{n;i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1}{i} - (1+i)^{-n} \times \frac{1}{i} = (1-v^n)a_{\infty;i}.$$

В последней записи искомый коэффициент приведения определен как доля коэффициента приведения вечной ренты, зависящая от срока ренты.

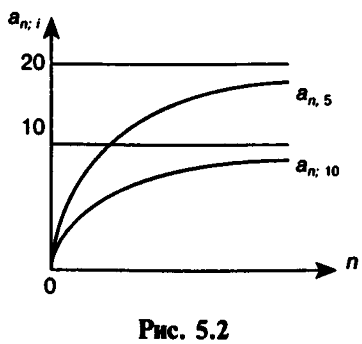

Рис. 5.2

ПРИМЕР 5.9. Годовая рента постнумерандо характеризуется параметрами: R = 4 млн руб, n = 5. При дисконтировании по сложной ставке процента, равной 18,5 % годовых, получим

$$A = 4a_{5;18,5} = 4 \times \frac{1 - 1{,}185^{-5}}{0{,}185} = 4 \times 3{,}092 = 12{,}368 \text{ млн руб.}$$

Таким образом, все будущие платежи оцениваются в настоящий момент в сумме 12,368 млн руб. Иначе говоря, 12,368 млн руб., размещенных под 18,5% годовых, обеспечивают ежегодную выплату по 4 млн руб. в течение 5 лет.

Заметим, что формула (5.14) может быть применена и для определения современной стоимости p-срочной ренты. В этом случае переменная n означает число периодов ренты, а i — ставку за один период (но не годовую).

Коэффициент приведения ренты за срок $n = n_1 + n_2$ определяется следующим образом:

$$a_{n;i} = a_{n_1;i} + a_{n_2;i}v^{n_1}. \tag{5.16}$$

Годовая рента, начисление процентов m раз в году. Не будем выводить формулу для этого случая, а просто заменим в формуле (5.14) дисконтный множитель $(1 + i)^{-n}$ на эквивалентную величину $(1 + j/m)^{-mn}$, соответственно, i заменим на $(1 + j/m)^m -$ $- 1$, после чего имеем:

$$A = R\frac{1 - (1 + j/m)^{-mn}}{(1 + j/m)^m - 1} = Ra_{mn;j/m}. \tag{5.17}$$

Рента p-срочная (m = 1). Если платежи производятся не один, а p раз в году, то коэффициенты приведения находятся так же, как это было сделано для годовой ренты. Только теперь размер платежа равен R/p, а число членов составит np. Сумма дисконтированных платежей в этом случае равна

$$A = \frac{R}{p}\sum_{t=1}^{np} v^{t/p} = R\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{p\left[(1 + i)^{1/p} - 1\right]} = Ra_{n;i}^{(p)}. \tag{5.18}$$

ПРИМЕР 5.10. В первой главе упоминалась авария на химическом заводе в Бхопале (Индия). Корпорация "Юнион Карбайд" предложила в качестве компенсации пострадавшим 200 млн долл., выплачиваемых в течение 35 лет. Предложение было отклонено ("За рубежом". 1985. № 11). Предложенная компенсация эквивалентна 57,5 млн долл., выплаченных единовременно. Покажем, как была рассчитана эта сумма.

Если выплаты производятся помесячно на протяжении 35 лет равными суммами, то данный ряд платежей представляет собой постоянную ренту (p = 12) с годовой суммой выплат 200/35 = = 5,714 млн долл. в год. Допустим, это рента постнумерандо. Тогда согласно (5.18), положив i = 10% , получим

$$A = 5{,}714\,\frac{1 - 1{,}1^{-35}}{12(1{,}1^{1/12} - 1)} = 57{,}59 \text{ млн долл.}$$

Иначе говоря, капитал в сумме всего 57,59 млн долл. при начислении 10% годовых достаточен для выполнения обязательства.

Рента p-срочная ($p = m$). Число членов ренты здесь равно числу начислений процентов; величина члена ренты составляет R/m . В итоге

$$A = \frac{R}{m} \times \frac{1 - (1 + j/m)^{-mn}}{j/m} = R\frac{1 - (1 + j/m)^{-mn}}{j}. \quad (5.19)$$

Этот же результат можно получить и по формуле (5.14) и при этом воспользоваться таблицей коэффициентов приведения постоянных рент. В этом случае вместо числа лет берется количество периодов ренты, процентная ставка и величина члена ренты определяются соответствующим образом.

Для расчета современной стоимости платежей ренты с условием $p = m$ можно воспользоваться программой ПЗ (PV) пакета *Excel*, которая определяет величину A с учетом единовременного взноса в конце срока. Расчет производится по формуле

$$A = R \times a_{n;i} + \text{БС} \times (1 + i)^{-n},$$

где R — член ренты, БС — единовременный взнос, $a_{n;i}$ — коэффициент приведения постоянной ренты, n — число периодов выплаты ренты и начисления процентов, i — процентная ставка за период.

Последовательность действий при использовании программы ПЗ

1. Последовательно вызвать: f_x, **“финансовые функции”, ПЗ.**

2. Показать в строках окошка условия выплаты ренты, размер единовременного платежа и порядок начисления процентов:

Норма — ставка начисляемых процентов за период,

Кпер — число периодов,

Выплата — член ренты; показывается с отрицательным знаком,

БС — единовременный взнос в конце срока, показывается с отрицательным знаком. Если эта величина не указывается, то результат — современная стоимость постоянной ренты,

Тип — вид ренты, указать 0 для ренты постнумерандо и 1 — для ренты пренумерандо. Если вид ренты не указывается, то расчет ведется для ренты постнумерандо.

После выполнения действий 1—2 в итоговой строке **Значение** автоматически показывается расчетная величина. После нажатия кнопки **ОК** эта величина показывается в выделенной ячейке таблицы *Excel*.

ПРИМЕР 5.11. Параметры ренты пренумерандо: $R = 100$ (годовая выплата), $n = 5$, $p = m = 2$. Общее число платежей — 10, ставка за полугодие 6%. Введем параметры в окошко программы ПЗ:

Норма: 6%,
Кпер: 10,
Выплата: -50,
Тип: 1,
Ответ: 390,085.

Рента p-срочная ($p \neq m$). Сумма членов соответствующей прогрессии составит

$$A = R\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{p[(1+j/m)^{m/p}-1]} = Ra^{(p)}_{mn;j/m}. \tag{5.20}$$

Ренты с непрерывным начислением процентов. Пусть, как и выше, ряд состоит из ежегодных платежей, равных R, однако проценты начисляются непрерывно, сила роста равна δ. При дисконтировании по этой ставке всех членов ряда получим геометрическую прогрессию с первым членом R и знаменателем $e^{-\delta}$. Сумма членов прогрессии находится следующим образом:

$$A = R\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta}-1} = Ra_{n;\delta}. \tag{5.21}$$

Если имеет место p-срочная рента с непрерывным начислением процентов, то

$$A = R\frac{1 - e^{-\delta n}}{p(e^{\delta/p} - 1)} = Ra^{(p)}_{n;\delta}. \tag{5.22}$$

ПРИМЕР 5.12. Для условий примера 5.9 при $\delta = 0{,}185$ находим

$$A = 4\frac{1 - e^{-0{,}185 \times 5}}{e^{0{,}185} - 1} = 11{,}878 \text{ млн руб.}$$

Сравнение современных стоимостей рент постнумерандо с разными условиями. Как следует из приведенных примеров, величина современной стоимости заметно зависит от условий наращения процентов (точнее, дисконтирования) и частоты выплат в пределах года. Ниже приводятся соотношения современных стоимостей соответствующих рент. Современные стоимости обозначены как $A(p;m)$, причем запись $A(1;1)$ означает годовую ренту с ежегодным начислением процентов, $A(p;\infty)$ относится к p-срочной ренте с непрерывным начислением процентов.

Для одних и тех же годовых сумм выплат и процентных ставок ($i = j = \delta$) получим следующие неравенства:

$$A(1;\infty) < A(1;m) < A(1;1) < A(p;\infty) < \underset{m>p>1}{A(p;m)} < \underset{p=m>1}{A(p;m)} < \underset{p>m>1}{A(p;m)} < A(p;1).$$

Из приведенных неравенств, в частности, следует, что рента с условиями $p = 4$ и $m = 2$ имеет меньшую современную стоимость, чем рента с $p = 2$ и $m = 4$.

Зависимость между наращенной и современной стоимостью ренты. В § 5.2 была показана зависимость между A и S произвольного потока платежей (см (5.3)). Для годовых и p-срочных постоянных рент постнумерандо с ежегодным начислением процентов находим

$$A(1 + i)^n = R\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}(1 + i)^n = R\frac{(1 + i)^n - 1}{i} = S. \tag{5.23}$$

Аналогичным образом получим

$$Sv^n = A.$$

Для рент с начислением процентов m раз в году имеем

$$A(1 + j/m)^{mn} = S, \tag{5.24}$$

$$S(1 + j/m)^{-mn} = A. \tag{5.25}$$

Нетрудно догадаться, что в аналогичной зависимости находятся и коэффициенты наращения и приведения. В частности,

$$a_{n;i}(1 + i)^n = s_{n;i}, \qquad s_{n;i}v^n = a_{n;i}.$$

ПРИМЕР 5.13. Найдем современную стоимость для варианта ренты $p = m = 4$, взяв за основу $S = 31{,}785$ (см. пример 5.6). По формуле (5.24) получим

$$A = 31{,}785\left(1 + \frac{0{,}185}{4}\right)^{-20} = 12{,}868 \text{ млн руб.}$$

§5.4. Определение параметров постоянных рент постнумерандо

Как было показано выше, постоянная рента описывается набором основных параметров — R, n, i и дополнительными параметрами p, m. Однако при разработке контрактов и условий финансовых операций могут возникнуть случаи, когда задается одна из двух обобщающих характеристик — S или A, и необходимо рассчитать значение недостающего параметра.

Определение размера члена ренты. Исходные условия: задается S или A и набор параметров, кроме R. Например, за обусловленное число лет необходимо создать фонд в сумме S путем систематических постоянных взносов. Если рента годовая, постнумерандо, с ежегодным начислением процентов, то, обратившись к (5.6), получим

$$R = \frac{S}{s_{n;i}}. \tag{5.26}$$

Пусть теперь условиями договора задана современная стоимость ренты. Если рента годовая ($m = 1$), то из (5.14) следует

$$R = \frac{A}{a_{n;i}}. \tag{5.27}$$

Таким образом, если ставится задача накопить за определенный срок некоторую сумму S, то прибегают к формуле (5.26), если же речь идет о погашении задолженности в сумме A, то следует воспользоваться (5.27).

Аналогичным образом можно определить R и для других условий ренты.

ПРИМЕР 5.14. Известно, что принц Чарльз при разводе с Дианой выплатил последней 17 млн ф.ст. Как сообщалось, эта сумма была определена в расчете на то, что принцесса проживет еще 50 лет (увы, это не сбылось). Указанную сумму можно рассматривать как современную стоимость постоянной ренты. Определим размер члена этой ренты при условии, что процентная ставка равна 10%, а выплаты производятся помесячно.

По условиям задачи A = 17 млн ф.ст., $n = 50$, $p = 12$, $i = 10\%$. Для ренты постнумерандо с указанными параметрами можно записать

$$17\,000 = Ra^{(12)}_{50;10} = R\frac{1 - 1{,}1^{-50}}{12(1{,}1^{1/12} - 1)}1{,}1^{1/12}.$$

Ежемесячная выплата составит $R/12 = 135{,}6$ тыс. ф.ст.

Расчет срока ренты. При разработке условий контракта иногда возникает необходимость в определении срока ренты и, соответственно, числа членов ренты. Решая полученные выше выражения, определяющие S или A, относительно n, получим искомые величины. Так, для годовой ренты постнумерандо с ежегодным начислением процентов находим

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}i + 1\right)}{\ln(1 + i)}, \quad n = \frac{\ln\left(1 - \frac{A}{R}i\right)^{-1}}{\ln(1 + i)}.$$

Аналогичным образом определим сроки и для других видов рент. Сводка формул, полученных для различных рент постнумерандо с дискретным начислением процентов, приведена в табл. 5.1.

Все приведенные выше формулы для определения n, разумеется, пригодны и в случаях, когда заданными являются коэффициенты приведения или наращения рент, поскольку $a_{n;i} = A/R$, $s_{n;i} = S/R$ и т.д.

При расчете срока ренты необходимо принять во внимание следующие моменты.

Таблица 5.1

Формулы для расчета срока постоянных рент постнумерандо

Количество платежей	Количество начислений	Исходные параметры: S	Исходные параметры: A
$p = 1$	$m = 1$	$n = \dfrac{\ln(\frac{S}{R}i + 1)}{\ln(1 + i)}$ (5.28)	$n = \dfrac{\ln(1 - \frac{A}{R}i)^{-1}}{\ln(1 + i)}$ (5.29)
	$m > 1$	$n = \dfrac{\ln\{\frac{S}{R}[(1 + j/m)^m - 1] + 1\}}{m\ln(1 + j/m)}$ (5.30)	$n = \dfrac{\ln\{1 - \frac{A}{R}[(1 + j/m)^m - 1]\}^{-1}}{m\ln(1 + j/m)}$ (5.31)
$p > 1$	$m = 1$	$n = \dfrac{\ln\{\frac{S}{R}p[(1 + i)^{1/p} - 1] + 1\}}{\ln(1 + i)}$ (5.32)	$n = \dfrac{\ln\{1 - \frac{A}{R}p[(1 + i)^{1/p} - 1]\}^{-1}}{\ln(1 + i)}$ (5.33)
	$m = p$	$n = \dfrac{\ln(\frac{S}{R}j + 1)}{m\ln(1 + j/m)}$ (5.34)	$n = \dfrac{\ln(1 - \frac{A}{R}j)^{-1}}{m\ln(1 + j/m)}$ (5.35)
	$m \neq p$	$n = \dfrac{\ln\{\frac{S}{R}p[(1 + j/m)^{m/p} - 1] + 1\}}{m\ln(1 + j/m)}$ (5.36)	$n = \dfrac{\ln\{1 - \frac{A}{R}p[(1 + j/m)^{m/p} - 1]\}^{-1}}{m\ln(1 + j/m)}$ (5.37)

1. Расчетные значения срока будут, как правило, дробные. В этих случаях для годовой ренты в качестве n часто удобно принять ближайшее целое число лет. У p-срочной ренты результат округляется до ближайшего целого число периодов np. Например, пусть для квартальной ренты получено $n = 6{,}28$ лет, откуда $np = 25{,}12$ кварталов. Округляем до 25, в этом случае $n = 6{,}25$ лет.

2. Если округление расчетного срока производится до меньшего целого числа, то наращенная сумма или современная стоимость ренты с таким сроком оказывается меньше заданных размеров. Возникает необходимость в соответствующей компенсации. Например, если речь идет о погашении задолженности путем выплаты постоянной ренты, то компенсация может быть осуществлена соответствующим платежом в начале или конце срока, или с помощью повышения суммы члена ренты.

Обсудим еще одну проблему, связанную со сроком ренты. Пусть A — текущее значение долга. Если он погашается с помощью постоянной ренты, то из (5.14) следует, что долг может быть погашен за конечное число лет только при условии, что $R > Ai$. Аналогичные неравенства можно найти и для других видов рент. Если условия ренты таковы, что имеет место равенство, например, $R = Ai$, то $n = \infty$, т.е. рента окажется вечной и долг практически не может быть погашен.

ПРИМЕР 5.15. Какой необходим срок для накопления 100 млн руб. при условии, что ежемесячно вносится по 1 млн руб, а на накопления начисляются проценты по ставке 25% годовых?

Имеем $R = 12$, $i = 25\%$. По формуле (5.32) находим

$$n = \frac{\ln\left[\frac{100}{12}12(1{,}25^{1/12} - 1) + 1\right]}{\ln 1{,}25} = 4{,}7356 \text{ года.}$$

Если срок округляется до 5 лет, то необходимо несколько уменьшить размер члена ренты, т.е. найти член ренты для $n = 5$. В этом случае ежемесячный взнос должен составить 914,79 тыс. руб. (см. (5.26)).

Определение размера процентной ставки. Необходимость в определении величины процентной ставки возникает всякий раз, когда речь идет о выяснении эффективности (доходности) соответствующей финансово-банковской или коммерческой операции. Заметим, что расчет процентной ставки по остальным параметрам ренты не так прост, как это может показаться на первый взгляд. В простейшем случае задача ставится следующим образом: решить уравнения (5.4) или (5.14) относительно i. Нетрудно убедиться в том, что алгебраического решения нет. Для получения искомой величины раньше прибегали к линейной интерполяции или какому-либо итерационному методу. В современных условиях для определения ставки по заданным параметрам постоянной ренты удобно воспользоваться пакетом *Excel* — программа НОРМА (Rate). Однако эта программа не позволяет определить ставку для переменных и непрерывных рент, в связи с чем для решения задачи следует прибегнуть к методу Ньютона—Рафсона или методу секущей (см. Математическое приложение к гл. 6). Что касается общего потока платежей, то в пакете *Excel* имеется программа расчета ставки для произвольного потока с равными интервалами между платежами постнумерандо. Эту программу мы применим в гл. 12 при расчете внутренней нормы доходности ВНДОХ (IRR).

В методических целях, вероятно, целесообразно начать с линейной интерполяции. По заданным R и S, или R и A, находят значения коэффициентов наращения или приведения ренты:

$$s_{n;i} = S / R; \quad a_{n;i} = A / R.$$

Для оценки i применяется следующая интерполяционная формула:

$$i = i_l + \frac{a - a_l}{a_d - a_l}(i_d - i_l), \tag{5.38}$$

где a_d и a_l — табличные значения коэффициентов наращения или приведения рент для верхнего и нижнего уровня ставок (i_d, i_l), a — значение коэффициента наращения или приведения, для которого определяется размер ставки.

На рис. 5.3 и 5.4 изображены зависимости соответствующих коэффициентов от размера процентной ставки, а также интерполяционные оценки и точные ее значения. Первые обозначены как i, вторые как i''.

Как видно из рисунков, оценки размера процентной ставки несколько отличаются от точных значений этой величины, причем, если за основу взят коэффициент приведения, то оценка оказывается завышенной. В свою очередь оценка i по коэффи-

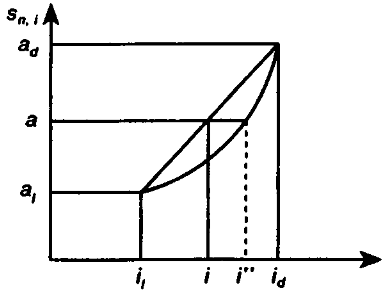

Рис. 5.3

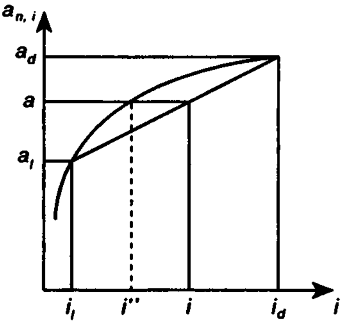

Рис. 5.4

циенту наращения меньше точного значения. Чем меньше диапазон $i_l \div i_d$, тем точнее оценка процентной ставки.

Применим теперь для расчета ставки программу НОРМА (Rate) пакета *Excel*.

Последовательность действий при использовании программы НОРМА

1. Вызвать: f_x, **"финансовые функции"**, НОРМА.
2. Ввести данные, характеризующие ренту:
   в строке **Кпер** — число периодов,
   в строке **Выплата** — размер члена ренты с отрицательным знаком,
   в строке **НЗ** — современную стоимость ренты ($A<Rn$) или в строке **БС** показать наращенную сумму ренты в конце ее срока ($S>Rn$),
   в строке **Тип** указать вид ренты: 0 — для ренты постнумерандо и 1 — для ренты пренумерандо. Если вид ренты не указывается, то расчет ведется для ренты постнумерандо.

После выполнения действий 1—2 в итоговой строке **Значение** автоматически показывается расчетная величина ставки за период в виде десятичной дроби. После нажатия кнопки **ОК** эта величина показывается в процентах в выделенной ячейке таблицы *Excel*.

ПРИМЕР 5.16. Допустим, предполагается путем ежегодных взносов постнумерандо по 100 млн руб. в течение 7 лет создать фонд в размере 1 млрд руб. Какова должна быть годовая процентная ставка?

Определим исходный коэффициент наращения: $s_{7;i} = 1000/100 = 10$. Для начала предположим, что искомая процентная ставка находится в интервале 11—12%. Для этих значений ставки находим коэффициенты наращения: $a_d = s_{7;12} = 10{,}08901$; $a_l = s_{7;11} = 9{,}78327$. Откуда

$$i = 0{,}11 + \frac{10 - 9{,}78327}{10{,}08901 - 9{,}78327}(0{,}12 - 0{,}11) = 0{,}11709,$$

или 11,709 %.

Проверка: по формуле (5.5) находим: $s_{7;11,709} = 9{,}999$. Таким образом, найденное значение ставки обеспечивает выполнение поставленных условий почти точно. Если точность ответа не устраивает, то следует сузить интервал между ставками i_l и i_d.

Решим теперь эту же задачу, но с помощью *Excel*.

После вызова программы НОРМА вводим в окошко значения:

Кпер: 7,
Выплата: −100,
БС: 1000,
Тип: 0,
Ответ: 0,117121443.

§5.5. Наращенные суммы и современные стоимости других видов постоянных рент

Кратко рассмотрим методики расчета наращенных сумм и современных стоимостей для некоторых разновидностей дискретных постоянных рент. Постоянные ренты с непрерывным поступлением платежей рассматриваются в гл. 6.

Ренты пренумерандо и ренты с выплатами в середине периодов. Напомним, что под рентой пренумерандо понимается рента с платежами в начале периодов. Легко понять, что каждый член такой ренты "работает" на один период больше, чем в ренте постнумерандо. Отсюда наращенная сумма ренты пренумерандо, обозначим ее здесь как $\ddot{S}$, больше в $(1 + i)$ раз аналогичной ренты постнумерандо:

$$\ddot{S} = S(1 + i).$$

Коэффициент наращения годовой ренты пренумерандо

$$\ddot{s}_{n;i} = s_{n;i}(1 + i). \qquad (5.39)$$

Аналогичным путем получим для годовой ренты с начислением процентов m раз в году

$$\ddot{S} = S(1 + j/m)^m.$$

Для p-срочных рент, у которых $m = 1$ и $m \neq p$, получим:

$$\ddot{S} = S(1 + i)^{1/p},$$

$$\ddot{S} = S(1 + j/m)^{m/p}.$$

Точно такая же зависимость наблюдается и между современными стоимостями и коэффициентами приведения рент постнумерандо и пренумерандо:

$$\ddot{A} = A(1 + i); \quad \ddot{a}_{n;i} = a_{n;i}(1 + i) \text{ и т.д.}$$

Важной для практики является рента с платежами в середине периодов. Например, в случаях, когда поступления от производственных инвестиций распределяются более или менее равномерно, применение рент пренумерандо или постнумерандо для описания таких потоков может привести к некоторым смещениям в значении получаемых показателей. В таких ситуациях для уменьшения погрешности рекомендуется суммы поступлений за период относить к середине периодов. Наращенные суммы и современные стоимости таких рент находим умножением соответствующих обобщающих характеристик рент постнумерандо на множитель наращения за половину периода. Так, для современных стоимостей находим следующие соотношения:

$$A_{1/2} = A(1 + i)^{1/2} \quad \text{при } p = 1,\ m = 1,$$

$$A_{1/2} = A(1 + i)^{1/2p} \quad \text{при } p > 1,\ m = 1,$$

$$A_{1/2} = A(1 + j/m)^{m/2} \quad \text{при } p = 1,\ m > 1,$$

$$A_{1/2} = A(1 + j/m)^{m/2p} \quad \text{при } p > 1,\ m > 1.$$

ПРИМЕР 5.17. Определим поправочный множитель, необходимый для расчета современной стоимости ренты с платежами в середине периодов. Условия ренты постнумерандо: $p = 12$, $m = 1$, $i = 10\%$. Искомый множитель $1{,}1^{1/2\times12} = 1{,}00398$.

Отложенные ренты. Начало выплат у отложенной (отсроченной) ренты сдвинуто вперед относительно некоторого момента времени. Например, погашение задолженности планируется начать спустя обусловленный срок (льготный период). Очевидно, что сдвиг во времени никак не отражается на величине наращенной суммы. Иное дело современная стоимость ренты.

Пусть рента выплачивается спустя t лет после некоторого начального момента времени. Современная стоимость ренты на начало выплат (современная стоимость немедленной ренты) равна A. Современная стоимость на начало периода отсрочки в t лет очевидно равна дисконтированной на этот срок величине современной стоимости немедленной ренты. Для годовой ренты находим

$$ {}_tA = Av^t = Ra_{n;i}v^t, \tag{5.40} $$

где ${}_tA$ — современная стоимость отложенной на t лет ренты.

ПРИМЕР 5.18. Пусть в примере 5.9 рента выплачивается не сразу, а спустя 1,5 года после момента оценки. Современная стоимость отложенной ренты составит

$$ 12{,}368 \times 1{,}185^{-1{,}5} = 9{,}588 \text{ млн руб.} $$

Современная стоимость отложенной ренты используется при решении целого ряда задач, чаще всего в расчетах, связанных с выплатами различного рода накоплений. Для иллюстрации обсудим одну из подобных задач. Пусть годовая ограниченная рента постнумерандо делится во времени между двумя участниками (например, речь идет о передаче собственности). Рента имеет параметры: R, n. Условия деления: а) каждый участник получает 50% капитализированной стоимости ренты; б) рента выплачивается последовательно — сначала первому участнику, затем второму.

Решение задачи сводится к расчету срока получения ренты первым участником, обозначим его как n_1. В оставшийся срок деньги получает второй участник. Таким образом, первый участник получает немедленную ренту, второй — отложенную. Из принятых условий деления ренты следует:

$$ A_1 = {}_{n_1}A_2; \quad Ra_{n_1;i} = Ra_{n_2;i}v^{n_1}. $$

Учитывая, что $n_2 = n - n_1$, находим:

$$\frac{1-(1+i)^{-n_1}}{i} = \frac{1-(1+i)^{-(n-n_1)}}{i} v^{n_1}.$$

После ряда преобразований получим

$$n_1 = \frac{-\ln\{[1 + (1+i)^{-n}]/2\}}{\ln(1+i)}.$$

Результат зависит только от общего срока ренты и процентной ставки, которая учитывается в расчете.

ПРИМЕР 5.19. Срок годовой ренты постнумерандо 10 лет, $i = 20\%$. Пусть рента делится между двумя участниками на тех условиях, которые были выше приняты при выводе формулы. Тогда

$$n_1 = \frac{-\ln[(1 + 1{,}2^{10}) / 2]}{\ln 1{,}2} = 2{,}981 \approx 3 \text{ года}.$$

Доля второго участника — следующие 7 лет.

Вечная рента. Напомним, что под вечной рентой (*perpetuity*) понимается ряд платежей, количество которых не ограничено — теоретически она выплачивается в течение бесконечного числа лет. В практике иногда сталкиваются со случаями, когда есть смысл прибегнуть к такой абстракции, например, когда предполагается, что срок потока платежей очень большой и конкретно не оговаривается. Примером могут служить некоторые виды облигаций (см. гл. 11).

Очевидно, что наращенная сумма вечной ренты равна бесконечно большой величине. На первый взгляд представляется бессодержательным и определение современной стоимости такой ренты. Однако это далеко не так. Современная величина вечной ренты есть конечная величина, которая определяется весьма просто. Выше было показано (см. (5.15)), что при $n \to \infty$ пределом для коэффициента приведения является $a_{\infty;i} = 1/i$. Откуда для вечной ренты находим

$$A_\infty = \frac{R}{i}. \qquad (5.41)$$

Таким образом, современная стоимость вечной ренты зависит только от размера члена ренты и процентной ставки. Из (5.41) следует

$$R = A_{\infty} i, \tag{5.42}$$

т.е. член вечной ренты равен проценту от ее капитализированной стоимости.

Нетрудно убедиться в том, что отдаленные платежи оказывают весьма малое влияние на величину коэффициента приведения. С ростом n прирост этого показателя уменьшается (см. рис. 5.2). В силу сказанного при больших сроках ренты и высоком уровне ставки для определения современной стоимости можно воспользоваться формулой (5.41) без заметной потери точности. Например, для ограниченной ренты при $i = 20\%$, $n = 100$ и $R = 1$ получим точное значение: $A = 4{,}999999$, а по формуле (5.41) находим $A_{\infty} = 5$.

Для других видов рент получим:

$$A_{\infty} = \frac{R}{p[(1+i)^{1/p} - 1]} \quad \text{при } p > 1,\ m = 1;$$

$$A_{\infty} = \frac{R}{j} \quad \text{при } p = m > 1.$$

ПРИМЕР 5.20. Требуется выкупить вечную ренту, член которой равен 5 млн руб., выплачиваемых в конце каждого полугодия. Капитализированная стоимость такой ренты при условии, что для ее определения применена годовая ставка 25%, составит:

$$A_{\infty} = \frac{10}{2(1{,}25^{1/2} - 1)} = 42{,}361 \text{ млн руб.}$$

Рента с периодом платежей, превышающим год. В анализе производственных инвестиционных проектов иногда встречаются с рентами, члены которых выплачиваются с интервалами, превышающими год. Определим наращенную сумму и современную стоимость таких рент.

Пусть r — временной интервал между двумя членами ренты, проценты начисляются раз в году. В этом случае современная стоимость первого платежа составит на начало ренты величину Tv^r, второго — Tv^{2r}, последнего члена — Tv^n, где T — величина члена ренты, n — срок ренты, кратный r. Последовательность дисконтированных платежей представляет собой геометрическую прогрессию с первым членом Tv^r, знаменателем v^r и числом членов n/r. Сумма членов такой прогрессии при условии, что $T = 1$, равна:

$$a_{r;i} = v^r \frac{v^{r(n/r)} - 1}{v^r - 1} = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{(1 + i)^r - 1} = \frac{a_{n;i}}{s_{r;i}}. \tag{5.43}$$

Разумеется, указанное в формуле соотношение коэффициентов приведения и наращения можно использовать в случаях, когда r — целое число лет.

ПРИМЕР 5.21. Сравниваются два варианта строительства некоторого объекта. Первый требует разовых вложений в сумме 6 млн руб. и капитального ремонта стоимостью 0,8 млн руб. каждые 5 лет. Для второго затраты на создание равны 7 млн руб., на капитальный ремонт — 0,4 млн руб. каждые 10 лет. Временной горизонт, учитываемый в расчете, — 50 лет.

Капитализированная сумма затрат при условии, что $i = 10$ %, оценивается для каждого варианта в следующих размерах:

$$A_1 = 6 + \frac{a_{50;10}}{s_{5;10}} = 7{,}3 \text{ млн руб.},$$

$$A_2 = 7 + \frac{a_{50;10}}{s_{10;10}} = 7{,}25 \text{ млн руб.}$$

Таким образом, в финансовом отношении варианты оказываются равноценными при принятом уровне процентной ставки. Чем ставка выше, тем меньше влияют на результат затраты на ремонт. Так, если сравнение производится при ставке 20%, то получим $A_1 = 6{,}39$, $A_2 = 7{,}05$.

Переменная процентная ставка. На практике иногда сталкиваются с потоками платежей, предполагающих применение переменных во времени процентных ставок, например, при реструктурировании задолженности. Так, в последнем случае для облегчения положения должника применяются низкие ставки в первые годы выплат процентных платежей и более высокие в последующие (см. § 9.5).

Изменения размеров ставок могут быть какими угодно. Если же эти изменения “ступенчатые”, то при определении наращенной суммы и современной стоимости постоянной ренты резонно применить стандартные формулы. Пусть для постоянной ренты постнумерандо со сроком 10 лет предусматриваются два уровня процентной ставки, применяемые по пятилетиям. В этом случае

$$S = Rs_{5;i_1}\left(1 + i_2\right)^5 + Rs_{5;i_2},$$

$$A = Ra_{5;i_1} + Ra_{5;i_2}\left(1 + i_1\right)^5.$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Четыркин Е.М.* Методы финансовых и коммерческих расчетов. М.: Дело, 1995. Гл. 4, 5.
2. *Четыркин Е.М., Васильева Н.Е.* Финансово-экономические расчеты. М.: Финансы и статистика, 1990. Гл. 3, 4.
3. *Cartledge P.* Financial arithmetic. A practitioners guide. Euromoney Books, 1993.

Глава 6

ПЕРЕМЕННЫЕ И НЕПРЕРЫВНЫЕ РЕНТЫ. КОНВЕРСИЯ РЕНТ

§6.1. Ренты с постоянным абсолютным приростом платежей

В практике встречаются случаи, когда размеры членов потока платежей изменяются во времени. Такие изменения могут быть связаны с какими-либо обстоятельствами объективного порядка (например, условиями производства и сбыта продукции), а иногда и случайными факторами. Частным случаем такого потока является *переменная рента*. Члены переменной ренты изменяются по каким-то установленным (принятым, оговоренным и т.д.) законам или условиям развития.

Ниже рассматриваются несколько видов переменных рент, причем с меньшей детальностью, чем были обсуждены постоянные ренты. Основное внимание уделено принципиальным зависимостям, знание которых позволяет разработать расчетные формулы для любых конкретных видов переменных рент.

Ренты с постоянным абсолютным изменением членов во времени. Изменения размеров членов ренты происходят здесь согласно арифметической прогрессии с первым членом R и разностью a, иначе говоря, они образуют последовательность

$$R,\ R + a,\ R + 2a, ...,\ R + (n - 1)a.$$

Величина t-го члена ренты равна $R + (t - 1)a$.

Определим наращенную сумму такой ренты. Для ренты годовой постнумерандо получим[1]:

$$A = \left(R + \frac{a}{i}\right)a_{n;i} - \frac{nav^n}{i}, \tag{6.1}$$

где v — дисконтный множитель по ставке i.

[1] Доказательство приведено в Математическом приложении к главе.

Напомним, что $a_{n;i}$ — современная стоимость постоянной ренты постнумерандо с членом, равным 1. Нетрудно видеть, что в приведенной записи результат представляет собой современную стоимость постоянной ренты с членом $(R + a/i)$ за вычетом поправочной величины nav^n / i.

Наращенную сумму ренты легко получить, умножив формулу (6.1) на $(1 + i)^n$. После чего

$$S = \left(R + \frac{a}{i}\right)s_{n;i} - \frac{na}{i}. \qquad (6.2)$$

Определим теперь влияние на современную стоимость ренты абсолютного прироста платежей. Для этого преобразуем (6.1):

$$A = Ra_{n;i} + \frac{a_{n;i} - nv^n}{i}a. \qquad (6.3)$$

Данная формула показывает, что A линейно зависит от a. Аналогичным образом на основе (6.2) получим линейную зависимость для S:

$$S = Rs_{n;i} + \frac{(s_{n;i} - n)}{i}a. \qquad (6.4)$$

Формулы (6.1) и (6.2) и их преобразования (6.3) и (6.4) получены для рент постнумерандо. В свою очередь для рент пренумерандо находим

$$\begin{aligned} A &= \left[\left(R + \frac{a}{i}\right)\ddot{a}_{n;i} - \frac{nav^n}{i}\right](1 + i) = \\ &= \left(R + \frac{a}{i}\right)\ddot{a}_{n;i} - \frac{nav^{n-1}}{i}, \end{aligned} \qquad (6.5)$$

$$S = \left(R + \frac{a}{i}\right)\ddot{s}_{n;i} - \frac{na}{i}(1 + i). \qquad (6.6)$$

Напомним, что $\ddot{a}_{n;i}$, $\ddot{s}_{n;i}$ — коэффициенты приведения и наращения дискретной постоянной ренты пренумерандо (см. § 5.5).

ПРИМЕР 6.1. Платежи постнумерандо образуют регулярный во времени поток, первый член которого равен 15 млн руб. Последующие платежи увеличиваются каждый раз на 2 млн руб. Начисление процентов производится по 20% годовых. Срок выплат — 10 лет.

По условиям задачи $R = 15$, $a = 2$, $i = 20\%$, $n = 10$. Табличные значения коэффициентов $a_{10;20} = 4,192472$, $v^{10} = 0,161505$.

Применив (6.1), получим

$$A = (15 + \frac{2}{0,2})4,192472 - \frac{10 \times 2 \times 0,161505}{0,2} = 88,661 \text{ млн руб.}$$

Используя взаимозависимость A и S, находим

$$S = 88,661 \times 1,2^{10} = 548,965 \text{ млн руб.}$$

Или применяя (6.3) и (6.4):

$$A = 15a_{10;20} + \frac{a_{10;20} - 10 \times 1,2^{-10}}{0,2}2 = 62,887 + 25,774 =$$

$$= 88,661 \text{ млн руб.},$$

$$S = 15s_{10;20} + \frac{s_{10;20} - 10}{0,2}2 = 389,380 + 159,585 =$$

$$= 548,965 \text{ млн руб.}$$

Влияние динамики платежей здесь очевидно. Например, постоянная рента с $R = 15$ дает накопление в сумме около 390 млн руб., "вклад" прироста платежей в наращенную сумму составил почти 160 млн руб., или примерно 20%.

Продолжим пример . Пусть теперь рента предполагает сокращение платежей по 1 млн в год. Тогда

$$A = 15a_{10;20} + \frac{a_{10;20} - 10 \times 1,2^{-10}}{0,2}(-1) = 62,887 - 12,887 =$$

$$= 50 \text{ млн руб.}$$

$$S = 15s_{10;20} + \frac{s_{10;20} - 10}{0,2}(-1) = 389,380 - 79,793 =$$

$$= 309,557 \text{ млн руб.}$$

Иногда при анализе переменных рент может возникнуть обратная задача: определение первого члена ренты R или ее прироста a по всем остальным заданным параметрам ренты. Например, когда известна сумма, которую нужно аккумулировать за n лет, и необходимо разработать конкретный план реализации этой задачи. Получив R из (6.1) и (6.2), находим для годовых рент постнумерандо:

$$R = \frac{A + \frac{nav^n}{i}}{a_{n;i}} - \frac{a}{i}, \tag{6.7}$$

$$R = \frac{S + \frac{na}{i}}{s_{n;i}} - \frac{a}{i}. \tag{6.8}$$

В свою очередь, если определяется размер прироста при заданном R, то

$$a = \frac{(A - Ra_{n;i})i}{a_{n;i} - nv^n}, \tag{6.9}$$

$$a = \frac{(S - Rs_{n;i})i}{s_{n;i} - n}. \tag{6.10}$$

Переменная p-срочная рента с постоянным абсолютным приростом. Пусть R — базовая величина разовой выплаты, a — годовой прирост выплат. В этом случае последовательные выплаты равны

$$R,\ R + \frac{a}{p},\ R + 2\frac{a}{p}, \ldots,\ R + (pn - 1)\frac{a}{p}.$$

Отдельный член этого ряда находится как

$$R_t = R + (t - 1)\frac{a}{p}, \quad t = 1, \ldots, pn.$$

По определению для ренты постнумерандо при начислении процентов p раз в году получим

$$A = \sum_{t=1}^{pn}\left(R + \frac{at}{p}\right)v^{t/p}, \tag{6.11}$$

$$S = \sum_{t=1}^{pn}\left[R + \frac{a}{p}\left(t - 1\right)\right]\left(1 + i\right)^{n-t/p}. \tag{6.12}$$

ПРИМЕР 6.2. Ожидается, что сбыт продукции будет увеличиваться в течение двух лет — каждый квартал на 25 млн руб. Первоначальный объем сбыта за квартал 500 млн руб. Определим наращенную сумму к концу срока при условии, что деньги за продукцию поступают постнумерандо.

По условиям задачи $R = 500$, $a/p = 25$, $i = 20\%$, $n = 2$, $pn = 8$. Наращенная сумма к концу двух лет составит

$$S = \sum_{t=1}^{8}\left[500 + 25(t-1)\right] \times 1{,}2^{2-t/4} = 4865 \text{ млн руб.}$$

§6.2. Ренты с постоянным относительным приростом платежей

Рассмотрим ситуацию, когда платежи изменяют свои размеры во времени с постоянным относительным ростом, т.е. следуют геометрической прогрессии. Поток таких платежей состоит из членов R, Rq, Rq^2,..., Rq^{n-1} (q — знаменатель прогрессии или темп роста). Пусть этот ряд представляет собой ренту постнумерандо. Тогда ряд дисконтированных платежей состоит из величин Rv, Rqv^2, ..., $Rq^{n-1}v^n$. Получена геометрическая прогрессия с первым членом Rv и знаменателем qv. Сумма членов этой прогрессии равна

$$A = Rv\frac{q^n v^n - 1}{qv - 1} = R\frac{(qv)^n - 1}{q - (1 + i)}. \qquad (6.13)$$

Пусть теперь $q = 1 + k$, где k — темп прироста платежей. После простых преобразований получим

$$A = R\frac{1 - \left(\dfrac{1 + k}{1 + i}\right)^n}{i - k}. \qquad (6.14)$$

Заметим, что прирост может быть как положительным ($k > 0$), так и отрицательным ($k < 0$).

Наращенная сумма ренты находится как

$$S = A(1 + i)^n = R\frac{q^n - (1 + i)^n}{q - (1 + i)} =$$

$$= R\frac{(1+k)^n - (1+i)^n}{k-i}. \qquad (6.15)$$

ПРИМЕР 6.3. Несколько изменим условия примера 6.1. Пусть теперь члены ренты увеличиваются каждый год на 12% ($k = 0{,}12$). В этом случае

$$A = 15 \times \frac{1 - \left(\frac{0{,}9}{1{,}2}\right)^{10}}{0{,}2 - 0{,}12} = 93{,}448 \text{ млн руб.},$$

$$S = 15 \times \frac{1{,}12^{10} - 1{,}2^{10}}{1{,}12 - 1{,}2} = 578{,}604 \text{ млн руб.}$$

Допустим теперь, что платежи уменьшаются во времени с темпом прироста минус 10% в год ($k = -0{,}1$), тогда

$$A = 15 \times \frac{1 - \left(\frac{0{,}9}{1{,}2}\right)^{10}}{0{,}2 - (-0{,}1)} = 47{,}184 \text{ млн руб.},$$

$$S = 47{,}184 \times 1{,}2^{10} = 292{,}151 \text{ млн руб.}$$

Для годовых рент пренумерандо получим

$$\ddot{A} = R\frac{(qv)^n - 1}{qv - 1}(1+i) = R\frac{1 - \left(\frac{1+k}{1+i}\right)^n}{k-i}(1+i), \qquad (6.16)$$

$$\ddot{S} = R\frac{(qv)^n - 1}{qv - 1}(1+i)^n = R\frac{1 - \left(\frac{1+k}{1+i}\right)^n}{k-i}(1+i)^{n+1}. \qquad (6.17)$$

Рента p-срочная с постоянными относительными изменениями членов. Пусть платежи производятся не один, а p раз в году постнумерандо, проценты начисляются раз в году по ставке i. В этом случае последовательность платежей представляет собой геометрическую прогрессию R, Rq, ..., Rq^{np-1}, где q — темп роста за период. Начислим проценты и суммируем результат, получим

$$S = R\frac{q^{np} - (1+i)^n}{q - (1+i)^{1/p}}. \qquad (6.18)$$

Для современной величины такой ренты находим

$$A = R\frac{q^{np}v^n - 1}{q - (1 + i)^{1/p}}. \tag{6.19}$$

ПРИМЕР 6.4. Пусть R = 15 млн руб., n = 10, i = 20%. Положим, что платежи увеличиваются с каждым полугодием на 6%. Тогда наращенная сумма и современная стоимость ренты постнумерандо составят:

$$S = 15 \times \frac{1{,}06^{20} - 1{,}2^{10}}{1{,}06 - 1{,}2^{0,5}} = 1263{,}052 \text{ млн руб.},$$

$$A = 15 \times \frac{1{,}06^{20} \times 1{,}2^{-10} - 1}{1{,}06 - 1{,}2^{0,5}} = 203{,}990 \text{ млн руб.}$$

§6.3. Постоянная непрерывная рента

Во всех рассмотренных выше рентах предполагалось, что члены потока платежей поступают дискретно — через фиксированные интервалы времени (периоды ренты). Вместе с тем иногда более адекватное описание потока платежей достигается, когда он воспринимается как *непрерывный процесс.* Например, когда отдача от инвестиций происходит так часто, что в целом этот поток можно рассматривать как непрерывный. Предположение о непрерывности в определенных условиях увеличивает возможности количественного анализа, особенно при анализе сложных производственных долгосрочных инвестиций.

Обсудим методы расчета наращенной суммы и современной стоимости, а также некоторых параметров, характеризующих постоянную непрерывную ренту, при условии, что применяется годовая дискретная процентная ставка. По определению у непрерывной ренты $p \to \infty$. Найдем коэффициент приведения такой ренты, обозначим его как $\bar{a}_{n;i}$. Для этого необходимо найти предел коэффициента приведения p-срочной ренты при $p \to \infty$:

$$\bar{a}_{n;i} = \lim_{p \to \infty} a^{(p)}_{n;i} = \lim \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{p[(1 + i)^{1/p} - 1]}.$$

Непосредственная подстановка $p = \infty$ в знаменатель приводит к неопределенности:

$$\frac{1}{\infty\,[(1+i)^{1/\infty}-1]}.$$

Раскроем неопределенность, применив правило Лопиталя. Получим

$$\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p[(1+i)^{1/p}-1]}=\frac{1}{\ln(1+i)}.$$

Таким образом,

$$\tilde{a}_{n;i}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{\ln(1+i)}. \tag{6.20}$$

Аналогичным путем получим коэффициент наращения непрерывной ренты

$$\tilde{s}_{n;i}=\frac{(1+i)^{n}-1}{\ln(1+i)}. \tag{6.21}$$

Очевидно, что переход от дискретных платежей постнумерандо к непрерывным увеличивает коэффициенты приведения и наращения в $i\ /\ \ln(1+i)$ раз. Таким образом,

$$\tilde{a}_{n;i}=\frac{i}{\ln(1+i)}a_{n;i}\,;\qquad \tilde{s}_{n;i}=\frac{i}{\ln(1+i)}s_{n;i}\,.$$

ПРИМЕР 6.5. Ожидается, что доходы от эксплуатации месторождения полезных ископаемых составят 1 млрд руб. в год, продолжительность разработки 10 лет, отгрузка и реализация продукции непрерывны и равномерны. Капитализированная стоимость дохода при дисконтировании по ставке 10% составит:

$$A=1000\frac{1-1{,}1^{-10}}{\ln 1{,}1}=6446{,}91\text{ млн руб.}$$

Заметим, что формулы (6.20), (6.21) предполагают непрерывное поступление платежей и дискретное начисление процентов. Вероятно, более "естественным" является положение, когда оба процесса (поступление денег и наращение процентов) непрерывны. Для получения формул соответствующих коэффициентов воспользуемся формулами эквивалентности между непрерывными и дискретными ставками: $\delta=\ln(1+i)$; $i=e^{\delta}-1$, где, напомним, δ — сила роста. Перепишем формулы (6.20) и (6.21), использовав эти соотношения. Получим:

$$\bar{a}_{n;\delta} = \frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta}, \tag{6.22}$$

$$\tilde{s}_{n;\delta} = \frac{e^{\delta n} - 1}{\delta}. \tag{6.23}$$

Заметим, что формулы (6.20), (6.21) и (6.22), (6.23) дают одинаковые результаты только в том случае, когда непрерывные и дискретные ставки являются эквивалентными (см. § 4.2).

В табл. 5 и 8 Приложения содержатся значения коэффициентов наращения и приведения непрерывной ренты.

> **ПРИМЕР 6.6.** Пусть в примере 6.5 дисконтирование осуществляется по силе роста 10%, тогда
>
> $$A = R\bar{a}_{n;\delta} = 1000\frac{1 - e^{-0,1 \times 10}}{0,1} = 6321,21 \text{ млн руб.}$$
>
> Эквивалентная дискретной ставке 10% (которая была применена в примере 6.5) сила роста составит $\delta = \ln 1,1 = 0,09531$, или 9,531%. Откуда
>
> $$A = 1000\frac{1 - e^{-0,09531 \times 10}}{0,09531} = 6446,91 \text{ млн руб.}$$

Формулы (6.22) и (6.23) можно получить и с помощью интегрирования. Например, коэффициент приведения находим следующим образом:

$$\bar{a}_{n;\delta} = \int_0^n e^{-\delta \times t} dt = -\frac{1}{\delta} e^{-\delta \times t}\Big|_0^n = \frac{1 - e^{-\delta \times n}}{\delta}.$$

Остановимся теперь на одном частном, но практически важном вопросе. Определим величину коэффициента наращения непрерывной ренты для одного годового интервала времени. Обозначим коэффициент наращения p-срочной ренты для этого интервала как $\tilde{s}_1$. Его предел при $p \to \infty$ составит

$$\tilde{s}_1 = \frac{i}{\ln(1 + i)}.$$

Разложим эту функцию в степенной ряд, ограничившись первыми тремя членами:

$$\tilde{s}_1 \approx 1 + \frac{1}{2}i - \frac{1}{12}i^2.$$

Близкий к этому результат дают и первые три члена разложения бинома:

$$(1 + i)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}i - \frac{1}{8}i^2.$$

В итоге имеем

$$\tilde{s}_1 \approx (1 + i)^{1/2}.$$

Аналогично находим коэффициент приведения непрерывной ренты за годовой период:

$$\bar{a}_1 \approx (1 + i)^{-1/2}.$$

Иначе говоря, *равномерная и непрерывная выплата годовой суммы P примерно равнозначна разовой выплате этой суммы в середине года.*

Определение срока и размера ставки для постоянных непрерывных рент. Начнем с определения срока для случая, когда исходной является современная стоимость данного потока платежей. Решим (6.20) относительно n, принимая во внимание, что $A = R\bar{a}_{n;i}$:

$$n = -\frac{\ln\left(1 - \frac{A}{R}\delta\right)}{\delta}. \tag{6.24}$$

Аналогично для случая, когда исходной является наращенная сумма ренты, получим:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}\delta + 1\right)}{\delta}. \tag{6.25}$$

ПРИМЕР 6.7. За какой срок наращенная сумма ренты вырастет в 5 раз по сравнению с годовой суммой взносов, если последние осуществляются непрерывно и равномерно в пределах года? На взносы начисляются проценты, сила роста 8%.

Здесь $S/R = 5$, $\delta = 0{,}08$, отсюда согласно (6.25)

$$n = \frac{\ln(5 \times 0{,}08 + 1)}{0{,}08} = 4{,}21 \text{ года.}$$

Что касается определения силы роста по всем остальным заданным параметрам ренты, то здесь возникают те же затруднения, с которыми мы встретились при решении аналогичной задачи для дискретной ренты. Наиболее простым выходом является интерполяция и метод Ньютона—Рафсона. С помощью метода Ньютона—Рафсона получим следующую рекуррентную[1] формулу:

$$\delta_{k+1} = \delta_k - \frac{1 - e^{-\delta_k \times n} - \dfrac{A}{R}\delta_k}{ne^{-\delta_k \times n} - \dfrac{A}{R}}. \tag{6.26}$$

ПРИМЕР 6.8. Какова доходность инвестиций, измеренная в виде силы роста, если затрачено 1000 млн руб., годовая отдача ожидается в размере 200 млн руб., посупающих равномерно в пределах года, срок отдачи — 8 лет.

Применим формулу (6.26). Пусть начальное значение $\delta_0 = 0{,}12$, тогда

$$\delta_1 = 0{,}12 - \frac{1 - e^{-0{,}12 \times 8} - 5 \times 0{,}12}{8e^{-0{,}12 \times 8} - 5} = 0{,}1288.$$

Проверка: $\bar{a}_{8;12{,}88} = 4{,}992$. Очевидно, нет необходимости в следующей итерации.

§6.4. Непрерывные переменные потоки платежей

В предыдущей главе были обсуждены непрерывные постоянные потоки платежей. Там предполагалось, что годовая сумма R непрерывно и равномерно распределена в пределах года. Такой поток денежных поступлений или выплат не является единственно возможным. На практике, особенно при анализе производст-

[1] Доказательство см. в Математическом приложении к главе.

венных инвестиций, поток платежей может существенно изменяться во времени, в том числе следуя какому-либо закону.

Если поток платежей непрерывен и описывается некоторой функцией $R_t = f(t)$, то общая сумма поступлений за время n равна $\int_0^n f(t)dt$. В этом случае наращенная сумма (при начислении процентов используется процентная ставка в виде силы роста δ) находится как

$$S = \int_0^n f(t)e^{\delta(n-t)}dt.$$

Современная стоимость такого потока определяется как

$$A = \int_0^n f(t)e^{-\delta \times t}dt.$$

Для того чтобы рассчитать величины A и S, необходимо определить конкретный вид функции изменения платежей и значения ее параметров. Ниже рассматриваются методы расчета современных стоимостей для двух видов функций — линейной и экспоненциальной. Наращенные суммы таких потоков легко определить, исходя из соотношения

$$S = Ae^{\delta \times n}. \tag{6.27}$$

Линейно изменяющийся непрерывный поток платежей. Функция потока:

$$R_t = R_0 + at, \tag{6.28}$$

где R_0 — начальный размер платежа, выплачиваемого в единицу времени, в котором измеряется срок ренты.

Современная стоимость получена с помощью интегрирования функции потока платежей:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^n (R_0 + at)e^{-\delta \times t}dt = R_0\int_0^n e^{-\delta \times t}dt + a\int_0^n te^{-\delta \times t} = \\ &= R_0\bar{a}_{n;\delta} + \frac{1}{\delta}(\bar{a}_{n;\delta} - ne^{-\delta \times n})a = \left(R_0 + \frac{a}{\delta}\right)\bar{a}_{n;\delta} - \frac{a}{\delta}ne^{-\delta \times n} \end{aligned} \tag{6.29}$$

где $\tilde{a}_{n;\delta}$ — коэффициент приведения постоянной непрерывной ренты.

В последней записи наглядно представлено влияние начального размера платежа и приростов.

ПРИМЕР 6.9. Намечается в течение трех лет увеличивать выпуск продукции на 1 млн руб. ежегодно. Базовый уровень выпуска — 10 млн руб. Необходимо определить суммарный объем выпуска с начисленными процентами. Сила роста 8%.

Определим коэффициент приведения

$$\tilde{a}_{3;8} = \frac{1 - e^{-0,08 \times 3}}{0,08} = 2,66715.$$

Современная стоимость ренты

$$A = \left(10 + \frac{1}{0,08}\right)2,66715 - \frac{1}{0,08}3e^{0,08 \times 3} = 30,5 \text{ млн руб.}$$

Искомая наращенная сумма $S = 30,5 \times 1,08^3 = 38,4$ млн руб.

Экспоненциальный рост платежей. Функция потока платежей

$$R_t = Re^{qt}, \tag{6.30}$$

где q — непрерывный темп прироста платежей.

Современная величина такой ренты определяется следующим образом:

$$A = R\int_0^n e^{qt}e^{-\delta t}dt = R\int_0^n e^{(q-\delta)t}dt = R\left.\frac{e^{(q-\delta)t}}{q-\delta}\right|_0^n = R\frac{e^{(q-\delta)n}-1}{q-\delta}. \tag{6.31}$$

Разность $q - \delta$ определим следующим образом:

$$q - \delta = \ln\frac{1+k}{1+i},$$

где k — дискретный темп прироста.

ПРИМЕР 6.10. Ожидается, что прирост доходов составит 5% в год. Какова современная стоимость и наращенная сумма потока доходов, если $R = 100$, $i = 7\%$, $n = 3$ года. Из условий задачи следует:

$$q - \delta = \ln\frac{1 + 0{,}05}{1 + 0{,}07} = -0{,}01887.$$

Таким образом,

$$A = 100\frac{e^{-0{,}01887 \times 3} - 1}{-0{,}01887} = 291{,}5,$$

$$S = A(1 + i)^3 = 291{,}5 \times 1{,}07^3 = 357{,}1.$$

§6.5. Конверсии рент

Виды конверсий. В практике иногда сталкиваются со случаями, когда на этапе разработки условий контракта или даже в ходе его выполнения необходимо в силу каких-либо причин изменить условия выплаты ренты. Иначе говоря, речь идет о *конвертировании условий, предусматриваемых при выплате финансовой ренты.* Простейшими случаями конверсии являются: замена ренты разовым платежом (*выкуп ренты)*, или наоборот, замена разового платежа рентой (*рассрочка* платежа). К более сложному случаю относится объединение нескольких рент с разными характеристиками в одну — *консолидация рент.* Общий случай конверсии — замена ренты с одними условиями на ренту с другими условиями, например, немедленной ренты на отложенную, годовой — на ежеквартальную и т.д. Ясно, что все перечисленные изменения не могут быть произвольными. Если предполагается, что конверсия не должна приводить к изменению финансовых последствий для каждой из участвующих сторон, то конверсия должна основываться на принципе финансовой эквивалентности (см. гл. 4).

Конверсия рент широко применяется при *реструктурировании задолженности.* Как известно, при этом нередко условия погашения долга смягчаются, однако принцип эквивалентности соблюдается и в этих случаях, обычно, правда, в урезанном, если так можно сказать, виде. Подробнее о реструктурировании долга будет сказано в гл. 9. Здесь же обсудим несколько основных случаев конверсии рент.

Выкуп ренты. Этот вид конверсии сводится к замене ренты единовременным платежом. Решение проблемы здесь очень простое. Искомый размер выкупа должен быть равен современной стоимости выкупаемой ренты. Для решения задачи в зависимости от условий погашения задолженности выбирается та или иная формула расчета современной стоимости потока платежей. Естественно, что применяемая при расчете современной стоимости процентная ставка должна удовлетворять обе участвующие стороны.

Рассрочка платежей. Обсудим теперь задачу, обратную выкупу ренты. Если есть обязательство уплатить некоторую крупную сумму и стороны согласились, что задолженность будет погашена частями — в рассрочку, то последнюю удобно осуществить в виде выплаты постоянной ренты. (В.М. Третьяков, например, предлагал В.В. Верещагину оплатить несколько его картин путем выплаты соответствующего аннуитета.)

Для решения задачи приравниваем современную стоимость ренты, с помощью которой производится рассрочка, сумме долга. Задача обычно заключается в определении одного из параметров этой ренты — члена ренты или ее срока — при условии, что остальные параметры заданы. Подобного рода задачи подробно обсуждались в § 5.4, поэтому здесь нет смысла останавливаться на них.

Объединение (консолидация) рент. Объединение рент, очевидно, заключается в замене нескольких рент одной, параметры которой необходимо определить. В этом случае из принципа финансовой эквивалентности следует равенство современных стоимостей заменяющей и заменяемых (консолидированных) рент, что соответствует равенству

$$A = \sum_{q} A_q, \tag{6.32}$$

где A — современная стоимость заменяющей ренты, A_q — современная стоимость q-й заменяемой ренты.

Объединяемые ренты могут быть любыми: немедленными и отсроченными, годовыми и p-срочными и т.д. Что касается заменяющей ренты, то следует четко определить ее вид и все параметры, кроме одного. Далее, для получения строгого баланса условий, необходимо рассчитать размер неизвестного параметра исходя из равенства (6.32). Обычно в качестве неизвестного параметра принимается член ренты или ее срок. Так, если заменяющая рента постнумерандо является немедленной и задан ее срок n, то из (6.32) следует

$$R = \frac{\sum A_q}{a_{n;i}}. \tag{6.33}$$

В свою очередь, если задается сумма платежа (размер члена заменяющей ренты) и его периодичность, то отыскивается срок новой ренты. Обычно задача сводится к расчету n по заданному значению $a_{n;i}$ (см. § 5.4 и табл. 5.1). Необходимая для расчета величина коэффициента приведения определяется условиями задачи. Для немедленной ренты постнумерандо имеем:

$$a_{n;i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{\sum\limits_q A_q}{R}. \tag{6.34}$$

Если $\sum\limits_q A_q$ известно, то, определив на основе (6.34) величину n, получим

$$n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{\sum A_q}{R}i\right)}{\ln(1+i)}. \tag{6.35}$$

Как видим, для того чтобы задача имела решение, необходимо соблюдать условие:

$$\frac{i\sum A_q}{R} < 1.$$

ПРИМЕР 6.11. Три ренты постнумерандо — немедленные, годовые — заменяются одной отложенной на три года рентой постнумерандо. Согласно договоренности заменяющая рента имеет срок 10 лет, включая отсрочку. Характеристики заменяемых рент: R_q = 100; 120; 300 тыс. руб., сроки этих рент: 6; 11 и 8 лет. Если в расчете принять ставку сложных процентов, равную 20%, то сумма современных стоимостей этих рент составит немного более 2002,9 тыс. руб. (см. табл. 6.1).

Размер члена заменяющей ренты равен

$$R = \frac{2002,946}{a_{7;20}v^3} = \frac{2002,946}{3,60459 \times 1,2^{-3}} = 960,189 \text{ тыс. руб.}$$

Если бы заменяющая рента была немедленной, то

$$R = \frac{2002,946}{3,60459} = 555,665 \text{ тыс. руб.}$$

Таблица 6.1

Определение члена заменяющей ренты

Рента (q)	R_q	n_q	i	$a_{n_q;20}$	$Ra_{n_q;20}$
1	100	6	20	3,32551	332,551
2	120	11	20	4,32706	519,472
3	300	8	20	3,83716	1151,148
Итого	520				2002,946

Продолжим пример. Пусть теперь заданным является не срок, а сумма годового платежа, скажем 1500 тыс., и необходимо найти срок заменяющей ренты. Ход решения: определяется современная стоимость немедленной ренты, затем рассчитывается ее срок.

$$A = 2002,946 \times 1,2^3 = 3461,091 \text{ тыс. руб.}$$

По формуле (6.35) получим

$$n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{3461,091}{1500}0,2\right)}{\ln 1,2} = 3,395 \text{ года.}$$

Округляем ответ до 3 или 4 лет и компенсируем нехватку покрытия долга или излишки (см. пояснения в § 5.4.) при определении срока ренты.

Рассмотрим один частный случай. Пусть член заменяющей ренты равен сумме членов заменяемых рент: $R = \sum_q R_q$. Все ренты годовые, постнумерандо. Если процентная ставка у всех рент одинаковая, то в силу (6.32) получим

$$R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{\sum R_q\left[1-(1+i)^{-n_q}\right]}{i},$$

где n — срок заменяющей ренты.

После преобразований находим

$$n = \frac{\ln R - \ln \sum R_q \left(1 + i\right)^{-n_q}}{\ln\left(1 + i\right)}. \qquad (6.36)$$

ПРИМЕР 6.12. Консолидируются ренты, предусматривающие годовые платежи в суммах 0,5; 1,5 и 3 тыс. руб.; сроки этих рент 10, 15 и 12 лет, процентная ставка у заменяющей ренты 5% годовых. Если выплаты определены в размере R = 5 тыс. руб., то

$$n = \frac{\ln 5 - \ln(0{,}5 \times 1{,}05^{-10} + 1{,}5 \times 1{,}05^{-15} + 3 \times 1{,}05^{-12})}{\ln 1{,}05} =$$

$$= 12{,}64 \text{ года.}$$

Рассмотренные варианты объединения рент, естественно, не охватывают все возможные случаи, с которыми можно столкнуться на практике. Да в этом и нет необходимости. Отправляясь от равенства современных стоимостей консолидируемых и заменяющей рент, легко вывести соответствующую формулу для решения конкретной задачи.

§6.6. Изменение параметров рент

Изменение хотя бы одного условия ренты по существу означает замену одной ренты другой. Как уже отмечалось выше, такая замена должна базироваться на принципе финансовой эквивалентности. Из этого следует равенство современных стоимостей обеих рент. Что касается процентной ставки, то она может быть сохранена или изменена. Например, кредитор в обмен на увеличение срока может потребовать некоторого ее увеличения. Отправляясь от указанного равенства, нетрудно определить параметры заменяющей ренты. Рассмотрим несколько случаев такой замены.

Замена немедленной ренты на отсроченную. Пусть имеется немедленная рента постнумерандо с параметрами R_1, n_1, процентная ставка равна i. Необходимо отсрочить выплаты на t лет. Иначе говоря, немедленная рента заменяется на отсроченную с параметрами R_2, n_2, t (t не входит в срок ренты). Здесь возможны разные постановки задачи в зависимости от того, что задано для новой ренты. Если задан срок, то определяется R_2, и наоборот. Рассмотрим первую задачу при условии, что $n_2 = n_1 = n$. Для этого случая справедливо следующее равенство:

$$R_1 a_{n;i} = R_2 a_{n;i} v^t.$$

Откуда

$$R_2 = R_1 (1 + i)^t. \tag{6.37}$$

Иначе говоря, член новой ренты равен наращенному за время t члену заменяемой ренты.

В общем случае, когда $n_2 \neq n_1$, из равенства $A_1 = A_2$ следует

$$R_2 = R_1 \frac{a_{n_1;i}}{a_{n_2;i}} (1 + i)^t, \tag{6.38}$$

где t — продолжительность отсрочки.

ПРИМЕР 6.13. Пусть немедленная рента постнумерандо с условиями $R_1 = 2$ млн руб. и сроком 8 лет откладывается на 2 года без изменения срока самой ренты. Процентная ставка, принятая для пролонгирования, — 20% годовых. Согласно (6.37) получим

$$R_2 = 2 \times 1{,}2^2 = 2{,}88 \text{ млн руб.}$$

Таким образом, отказ от выплаты немедленной ренты увеличивает ежегодные выплаты на 0,88 млн руб. Если же одновременно со сдвигом начала выплат срок ренты увеличивается, скажем, до 11 лет вместо 8 ($n = 11$), то по формуле (6.38) находим

$$R_2 = R_1 \frac{a_{8;20}}{a_{11;20}} \times 1{,}2^2 = 2 \times \frac{3{,}83716}{4{,}32706} \times 1{,}2^2 = 2{,}55393 \text{ млн руб.}$$

Определим теперь срок новой ренты при условии, что размер члена ренты остается без изменений. Пусть выплата ренты откладывается на t лет. Тогда из равенства

$$R a_{n_1;i} = R a_{n_2;i} v^t$$

находим

$$n_2 = \frac{-\ln\{1 - [1 - (1 + i)^{-n}](1 + i)^t\}}{\ln(1 + i)}. \qquad (6.39)$$

ПРИМЕР 6.14. Рента с условиями R = 2 млн руб., n = 5 лет, i = 8% откладывается на три года без изменения сумм выплат. Необходимо найти новый срок и сбалансировать результат. По формуле (6.39) получим

$$n_2 = \frac{-\ln[1 - (1 - 1{,}08^{-5})1{,}08^3]}{\ln 1{,}08} = 6{,}689 \text{ года.}$$

Таким образом, отказ от немедленной выплаты ренты обойдется в 1,7 года увеличения срока ренты. Пусть продолжительность новой ренты (без учета отсрочки) равна 6 годам. Современная стоимость такой ренты с учетом отсрочки равна

$$A_2 = Ra_{6;8}v^3 = 2000 \times 4{,}6288 \times 1{,}08^{-3} = 7339{,}58 \text{ тыс. руб.}$$

Однако у заменяемой ренты современная стоимость равна 7985,42 тыс. руб. Разность в сумме 645,84 тыс. руб. следует уплатить в начале действия контракта или с соответствующим наращением в любой иной момент.

Замена годовой ренты на p-срочную. Пусть годовая немедленная рента с параметрами R_1, n_1 заменяется на p-срочную с параметрами R_2, n_2, p. Если заданы срок заменяющей ренты, ее периодичность и ставка, то

$$R_2 = R_1 \frac{a_{n_1;i}}{a^{(p)}_{n_2}}. \qquad (6.40)$$

Причем, если $n_2 = n_1 = n$, то

$$\frac{a_{n;i}}{a^{(p)}_{n;i}} = \frac{p[(1 + i)^{1/p} - 1]}{i}.$$

Откуда

$$R_2 = R_1 \frac{p[(1 + i)^{1/p} - 1]}{i}. \qquad (6.41)$$

ПРИМЕР 6.15. Пусть R_1 = 2, n_1 = n_2 = n. Если годовая рента постнумерандо заменяется, скажем, на квартальную, то при неизменности срока ренты эквивалентность замены достигается только за счет корректировки размера выплат. При условии, что i = = 20%, находим

$$R_2 = 2 \times \frac{4(1{,}2^{1/4} - 1)}{0{,}2} = 1{,}86541.$$

Продолжим пример. Пусть теперь $n_1 = 3$, а $n_2 = 4$ года. Согласно (6.40) получим

$$R_2 = 2\frac{a_{3;20}}{a^{(4)}_{4;20}} = 2 \times \frac{2{,}10648}{2{,}77552} = 1{,}51791.$$

Замена годовой ренты на p-срочную может быть осуществлена и при условии, что заданным является размер члена ренты. Определяется ее срок. В общем случае для этого сначала находим

$$a^{(p)}_{n_2;i} = \frac{A}{R_2} = \frac{R_1}{R_2} a_{n_1;i}. \qquad (6.42)$$

Далее по формуле (5.31) определим n_2.

Общий случай конверсии. Выше методы эквивалентной замены рент рассматривались применительно к постоянным дискретным рентам. Однако переход от одного вида к другому возможен для любых потоков платежей. В каждом случае в основу замены должно быть положено равенство соответствующих современных стоимостей потоков платежей. Ограничимся одним простым примером. Заменим, например, нерегулярный поток денег постоянной годовой рентой постнумерандо. Пусть поток состоит из платежей R_t, выплачиваемых спустя n_t лет после начала действия контракта. Параметры заменяющей немедленной ренты постнумерандо: R, n . Исходное уравнение эквивалентности имеет вид

$$Ra_{n;i} = \sum R_t v^{-n_t}.$$

Данное равенство дает возможность определить один из параметров ренты: R или n. Решение обратной задачи — определение членов нерегулярного потока платежей — достигается только подбором величин платежей, удовлетворяющих этому равенству.

Математическое приложение к главе

1. Доказательство формулы (6.1)

Имеется ряд платежей: R, $R + a$, $R + 2a$, ..., $R + (n - 1)a$. Определим современную стоимость данного потока платежей.

$$A = Rv + (R + a)v^2 + ... + [R + (n - 1)a]v^n. \qquad (1)$$

Умножим это равенство на $(1 + i)$ и вычтем из обеих частей выражения соответствующие части равенства (1), получим

$$iA = R + av + av^2 + ... + av^{n-1} - [R + (n - 1)]av^n =$$

$$= R(1 - v^n) + a \sum_1^{n-1} v^t - nav^n + av^n.$$

После чего имеем

$$A = R\left(\frac{1 - v^n}{i}\right) + \frac{aa_{n;i} - nav^n}{i}.$$

Напомним, что

$$\frac{1 - v^n}{i} = a_{n;i}.$$

В итоге

$$A = \left(R + \frac{a}{i}\right)a_{n;i} - \frac{nav^n}{i}.$$

2. Метод Ньютона—Рафсона

С помощью этого метода последовательным приближением определяется нелинейная функция $f(x) = 0$. Общий вид рекуррентного соотношения:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad (1)$$

где k — номер итерации, x_k — значение x после k-й итерации, $f'(x_k)$ — значение производной функции $f(x_k)$.

Основная задача заключается в разработке функции $f(x)$, удобной для дальнейших преобразований. Применим метод для вывода формулы (6.26).

В качестве заданной принимается величина A. Исходная функция $A = R\ddot{a}_{n;\delta}$. Таким образом,

$$f(\delta) = R\frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta} - A = 0. \tag{2}$$

Разделим это выражение на R и умножим на δ:

$$f(\delta) = 1 - e^{-\delta n} - \frac{A}{R}\delta = 0. \tag{3}$$

Отношение A/R определяется условиями задачи. Преобразуем полученную функцию и найдем ее производную:

$$f'(\delta) = ne^{-\delta_k \times n} - \frac{A}{R}. \tag{4}$$

Подставим в общую запись рекуррентного соотношения (1) полученные значения функции и ее производной. Можно написать искомую итерационную формулу (6.26):

$$\delta_{k+1} = \delta_k - \frac{1 - e^{-\delta_k \times n} - \frac{A}{R}\delta_k}{ne^{-\delta \times n} - \frac{A}{R}}.$$

Очевидно, что, чем ближе начальное значение ставки (δ_0) к истинному, тем меньше потребуется итераций.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Башарин Г.П.* Начала финансовой математики. М.: ИНФРА-М, 1997. Гл. 3.
2. *Четыркин Е.М.* Методы финансовых и коммерческих расчетов. М.: Дело, 1995. §5.5.
3. *Четыркин Е.М., Васильева Н. Е.* Финансово-экономические расчеты. М.: Финансы и статистика, 1990. Гл. 4.
4. *Cartledge P.* Financial arithmetic. A practitioners guide. Euromoney Books, 1993.

Глава 7

ОПРЕДЕЛЕНИЕ БАРЬЕРНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

§7.1. Общая постановка задачи. Линейная модель

В практике финансово-экономического анализа довольно часто возникает необходимость определить *барьерное* (пороговое, критическое, предельно допустимое) значение некоторого параметра. Под барьерным значением параметра понимается такая его величина, превышение которой приводит к положительному или, наоборот, отрицательному конечному экономическому результату в рамках некоторой производственной или финансовой системы. Например, если речь идет об определении объема производства какого-то продукта, то пороговым его значением является такой объем выпуска, при котором полученная прибыль равна нулю. Превышение этого объема дает прибыль, производство в меньшем объеме оказывается убыточным. Подобная и многие другие, сходные по общей постановке, задачи решаются с помощью *метода барьерной или критической точки (break-even point).* Метод барьерной точки широко используется в финансовом проектировании, при разработке бизнес-планов и при решении разнообразных проблем: при определении порогового значения процентной ставки, цены товара, срока выполнения финансовой операции и т.д.

Наиболее простая постановка задачи осуществляется с помощью линейной модели, которая и рассматривается в данном параграфе. Разумеется, такая постановка не является единственно возможной. Некоторые пути для дальнейшего развития метода предлагаются в следующих параграфах главы. Причем часть из рассмотренных здесь проблем, например барьерные точки для налоговых ставок и барьерные точки в условиях неопределенности, до сих пор не обсуждались в финансовой литературе.

Заметим, что до недавнего времени метод барьерной точки применялся, так сказать, в статике. Экономические показатели рассматривались в рамках одного, сравнительно короткого периода. В последнее время этот метод распространяется и на потоки платежей, охватывающих ряд последовательных временных интервалов. В этих случаях с помощью дисконтирования стал учитываться важнейший фактор — время (а именно, сроки инвестирования и сроки отдачи от инвестиций).

Для начала рассмотрим наиболее простой и весьма условный вариант статической постановки задачи, к которому обычно прибегают при объяснении сути метода. Пусть необходимо найти пороговый объем производства одного вида продукта при условии, что все необходимые для анализа количественные зависимости описываются линейными выражениями, иначе говоря, применяется линейная модель.

Для записи такой модели примем обозначения:

Q — объем производства (в натуральном или условно-натуральном измерении);

F — постоянные производственные затраты, затраты, не зависящие от объема выпуска;

c — переменные, или пропорциональные затраты (в расчете на единицу продукции);

p — цена единицы продукции;

S — общая сумма затрат;

V — стоимость выпущенной продукции;

P — размер прибыли до уплаты налогов.

Переменные Q, F, S, V, P определяются в расчете на одинаковый интервал времени, обычно на один год.

Для начала найдем стоимость выпущенной продукции и соответствующую сумму затрат:

$$V = pQ, \tag{7.1}$$

$$S = F + cQ. \tag{7.2}$$

Искомый критический объем производства или барьерную точку получим на основе равенства стоимости выпущенной продукции и суммы затрат: $V = S$. Именно равенство двух разнородных экономических показателей, каждый из которых является функцией одной *управляющей переменной* (в рассматриваемом случае — объема производства), лежит в основе метода барьерной точки.

Обозначим барьерный объем производства как Q_k, тогда, используя (7.1) и (7.2), получим

$$pQ_k = cQ_k + F.$$

Таким образом,

$$Q_k = \frac{F}{p - c}. \qquad (7.3)$$

Как видим, чем выше размер постоянных и переменных затрат, тем больше критический объем производства.

Прибыль (до выплаты налогов) по определению составит

$$P = V - S = (p - c)Q - F. \qquad (7.4)$$

Графическая иллюстрация постановки задачи и ее решения приведена на рис. 7.1. Решение находится в точке пересечения двух линий, одна из которых характеризует динамику затрат (S), другая — изменение дохода (V) по мере увеличения выпуска. Объемы производства, которые меньше критического Q_k, приведут к убыткам. Превышение этого объема дает прибыль. Чем выше размер постоянных и переменных затрат, тем больше критический объем производства. Чистая прибыль после уплаты налогов (пропорциональных прибыли) характеризуется на рис. 7.1 линией M.

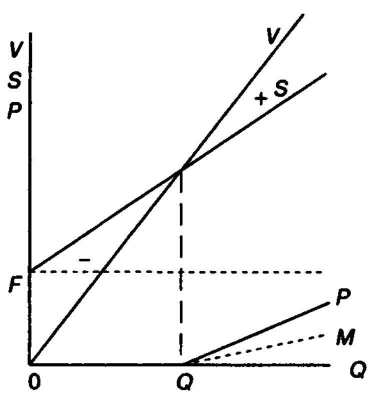

Рис. 7.1

ПРИМЕР 7.1. Ожидается, что $p = 50$, $c = 30$, $F = 100$. Находим

$$Q_k = \frac{100}{50 - 30} = 5, \quad P = (50 - 30)Q - 100.$$

Графическое изображение условий задачи и ее решение представлено на рис. 7.2

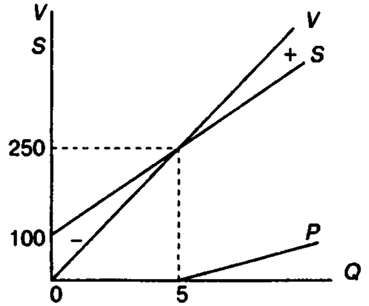

Рис. 7.2

Рассмотренный метод базируется на реальных данных бухгалтерского учета или ожидаемых их величинах. Капиталовложения учитываются посредством включения в затраты амортизационных отчислений.

Заметим, что все участвующие в расчете параметры рассматриваются как константы. Между тем, с течением времени они безусловно изменяются и найденная для одного момента времени критическая точка не окажется таковой для другого момента. Важно также подчеркнуть, что время, как важнейший финансовый фактор, не принимается здесь во внимание. Такой подход вполне оправдан, если капиталовложения уже осуществлены и встает вопрос только о выборе видов производимой продукции и их объемов.

Сказаное выше позволяет сформулировать общее определение для обсуждаемого метода, как *способа расчета барьерного значения управляющей переменной исходя из равенства двух “конкурирующих” функций этой переменной.* Содержание управляющего параметра и функций, как видим, определяется конкретными условиями решаемой задачи. В рассмотренном выше примере управляющей переменной является объем производства, “конкурирующими” функциями — доход (выручка) и затраты.

§7.2. Нелинейные модели

Линейная модель во многих случаях дает практически приемлемое описание ситуации. Однако могут иметь место ситуации, когда процесс формирования затрат и/или стоимости продукции более адекватно описывается нелинейными функциями и имеются достаточно надежные данные для получения соответствующих кривых. Вид и параметры таких кривых могут быть установлены, например, в ходе статистического анализа или их можно задать экспертно.

Барьерный выпуск продукции. Вернемся к задаче по определению критического объема продукции, но в условиях, когда одна или обе "конкурирующих" функции являются нелинейными. Ограничимся двумя из возможных постановок задачи. Пусть для начала стоимость продукции — линейная функция выпуска, а затраты на производство описываются нелинейной, монотонно растущей функцией. Иначе говоря, предполагается, что удельные затраты сокращаются по мере роста масштабов производства, а цена единицы продукции не изменяется. Такое сочетание затрат и стоимости продукции представлено на рис. 7.3.

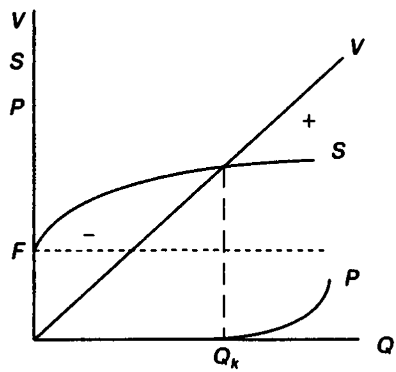

Рис. 7.3

Задача, как и выше, заключается в определении барьерного уровня выпуска продукции. Стоимость продукции находится по формуле (7.1), а сумма переменных затрат описывается, допустим, степенной функцией cQ^h, причем $0 < h < 1$. В этом случае общая сумма затрат составит

$$S = F + cQ^h.$$

Разность "конкурирующих" функций в барьерной точке равна нулю:

$$pQ_k - cQ_k^h - F = 0.$$

Решение, как видим, сводится к нахождению корня этого уравнения.

ПРИМЕР 7.2. Исходные данные: $F = 100$, $p = 50$, $c = 40$, $h = 0{,}5$. Соответственно имеем

$$50Q_k - 40Q_k^{0,5} - 100 = 0.$$

Найдем корни этого уравнения. Для этого преобразуем его в квадратное, положив $Q = z^2$. После чего получим

$$50z^2 - 40z - 100 = 0,$$

$$z_{1,2} = \frac{-(-40) \pm \sqrt{(-40)^2 - 4 \times 50 \times (-100)}}{2 \times 50}.$$

Положительный корень равен 1,86. Таким образом, $Q_k = 1{,}86^2 = 3{,}46$.

Перейдем к сочетанию двух нелинейных зависимостей. Например, пусть обе функции являются параболами второй степени (см. рис. 7.4). Тогда

$$V = aQ^2 + bQ, \qquad S = cQ^2 + dQ + F,$$

где a, b, c, d — параметры парабол.

Прибыль в зависимости от уровня выпуска составит

$$P = (a - c)Q^2 + (b - d)Q - F. \qquad (7.5)$$

Барьерный объем выпуска находится как корень квадратного уравнения

$$(a - c)Q_k^2 + (b - d)Q_k - F = 0.$$

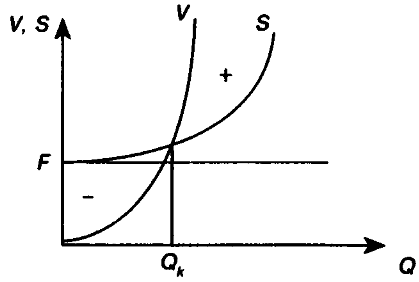

Рис. 7.4

Добавим, что при некоторых условиях можно рассчитать объем выпуска, *максимизирующего размер прибыли* (обозначим его как Q_m). Для этого, как известно, достаточно найти производную функции прибыли и приравнять ее нулю. В случае, когда прибыль описывается выражением (7.5), находим

$$Q_m = \frac{d - b}{2(a - c)}. \tag{7.6}$$

Как видим, положение точки максимума полностью определяется параметрами соответствующих парабол. Причем необходимым условием существования максимума являются следующие соотношения: $d>b$, $a>c$. Если же $b>d$ и $a>c$, то прибыль монотонно растет вместе с увеличением выпуска.

Нелинейную модель можно представить и в неформализованном виде — как таблицу данных, характеризующих затраты и стоимость продукции в зависимости от размера выпуска (см. пример 7.3).

ПРИМЕР 7.3. В приведенной ниже таблице и на диаграмме содержатся данные о затратах, стоимости продукции и ожидаемой прибыли.

Q	F	c	p	S	V	P
0	100	—	—	100	—	—
5	100	30	50	250	250	0
10	100	27	50	370	500	130
15	100	22	45	430	675	145
20	100	20	40	500	800	300
25	100	20	30	600	750	150

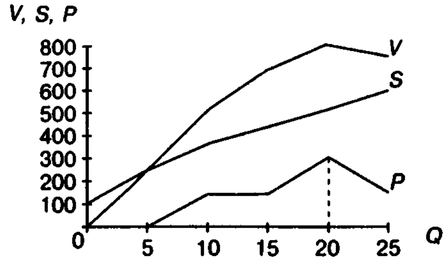

Рис. 7.5

Наибольшая прибыль, как видим, приходится на выпуск, равный 20.

§7.3. Барьерные показатели в финансовом анализе

Сравнение денежных сумм. Начнем с решения простой задачи, иллюстрирующей возможности метода при решении некоторых проблем финансов и кредита. Допустим, необходимо выбрать один из двух вариантов поступлений денежных средств, различающихся суммами и сроками: S_1, S_2 со сроками n_1, n_2, причем $S_2 > S_1$, $n_2 > n_1$ (иначе задача не имеет экономического смысла). Логически оправданно выбор обосновать на сравнении современных стоимостей поступлений. Таким образом, результат выбора зависит от ожидаемого рыночного уровня процентной ставки. Барьерной в рассматриваемой задачей является ставка, при которой оба варианта оказываются эквивалентными.

Рассмотрим метод решения для двух вариантов расчета современных стоимостей: по простой и сложной процентным ставкам. Для простой ставки имеем следующее равенство современных стоимостей:

$$\frac{S_1}{1 + n_1 i_k} = \frac{S_2}{1 + n_2 i_k}, \tag{7.7}$$

а для сложной ставки:

$$S_1\left(1 + i_k\right)^{-n_1} = S_2\left(1 + i_k\right)^{-n_2}. \tag{7.8}$$

В обоих равенствах i_k означает величину барьерной ставки. Решив уравнение (7.7) относительно искомой ставки, получим

$$i_k = \frac{S_2 - S_1}{S_1 n_2 - S_2 n_1}. \tag{7.9}$$

Из последнего выражения следует необходимое условие для существования барьерной ставки

$$S_1 n_2 > S_2 n_1 \text{ или } S_1 > S_2 \frac{n_1}{n_2}.$$

Графическая иллюстрация решения представлена на рис. 7.6.

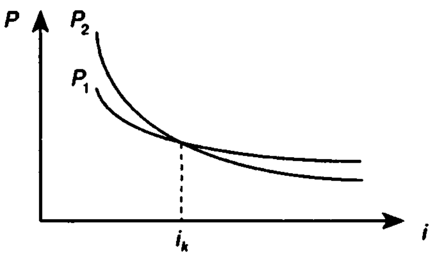

Рис. 7.6

Как видно из рисунка, если ожидаемый уровень ставки меньше барьерного, то для получателя денег предпочтителен вариант S_2, если же рыночная ставка больше барьерной, то следует остановиться на альтернативном варианте.

ПРИМЕР 7.4. Сравним два варианта платежей с параметрами: $S_1 = 1$; $S_2 = 1{,}15$; $n_1 = 7$; $n_2 = 12$ (сроки платежей указаны в месяцах). Сначала проверим: если

$S_1 > 1{,}15 \times \frac{7}{12}$, следовательно, решение существует. Далее получим

$$i_k = \frac{1{,}15 - 1}{1 \times \frac{12}{12} - 1{,}15 \times \frac{7}{12}} = 0{,}4557, \text{ или } 45{,}6\%.$$

Таким образом, при рыночной ставке, которая меньше чем 45,6%, для получателя денег предпочтительней более отдаленная выплата при всех прочих равных условиях.

Перейдем к определению барьерного значения сложной ставки. На основе (7.8) находим

$$\left(1+i_k\right)^{n_2-n_1}=\frac{S_2}{S_1},$$

Откуда

$$\ln(1+i_k)=\frac{\ln(S_2/S_1)}{n_2-n_1}.$$

В итоге

$$i_k = ant\ln(1+i_k)-1. \qquad (7.10)$$

ПРИМЕР 7.5. Возможны два варианта оплаты товара при его поставке. Стоимость и сроки поставки: $S_1 = 1$; $S_2 = 1{,}4$; $n_1 = 1$; $n_2 = 2{,}5$ (сроки измерены в годах). Покупателю необходимо выбрать вариант покупки при условии, что срок не имеет решающего значения, иными словами, он должен ориентироваться только на величину выплат.

Находим величину барьерной ставки, при которой дисконтированные размеры затрат окажутся одинаковыми:

$$\ln(1+i_k)=\frac{\ln 1{,}4}{1{,}5}=1{,}22431;$$

$$i_k = ant\ln 0{,}22431-1=0{,}251.$$

Итак, если рыночная ставка будет меньше 25,1%, то для покупателя окажется предпочтительней второй вариант.

Выбор варианта депозита. Метод определения барьерной точки с использованием кривой доходности при выборе варианта депозита с наибольшей доходностью рассмотрен в гл. 4, пример 4.21. Поэтому на этой проблеме больше останавливаться не будем. Дополнительные примеры применения метода барьерной точки в финансовом анализе будут рассмотрены в других главах.

§7.4. Влияние неопределенности в исходных данных на положение барьерной точки

Барьерное значение выпуска продукции определялось выше для линейной и нелинейной моделей при условии, что все исходные данные установлены однозначно. В этой ситуации получают только одно расчетное значение выпуска. В действительности все не так просто. Так, цену продукции, вероятно, можно с большей надежностью определить для будущего производства в виде некоторого интервала $p' \div p''$. Обратившись к линейной модели, получим для этой ситуации интервал значений барьерного выпуска продукции Q'_k — Q''_k (см. рис. 7.7). Аналогичное можно сказать и об остальных параметрах в формуле (7.3). Таким образом, при условии, что неоднозначными являются постоянные или переменные затраты, получим диапазоны барьерных показателей выпуска для линейной модели (см. рис. 7.8, 7.9).

На рис. 7.10 иллюстрируется совместное влияние неопределенности в цене продукции и переменных затрат на положение барьерного выпуска продукции.

В свою очередь неоднозначность ожидаемой цены продукта и постоянных затрат приводит к результату, который показан на рис. 7.11.

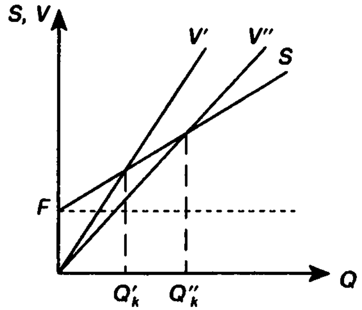

Рис. 7.7

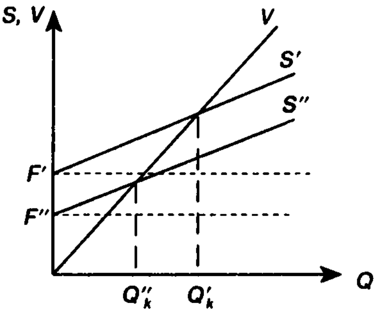

Рис. 7.8

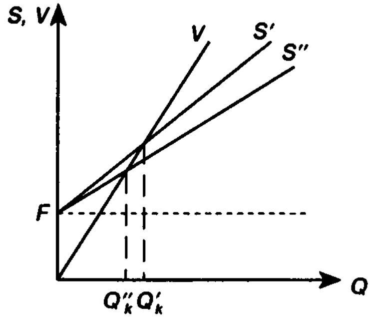

Рис. 7.9

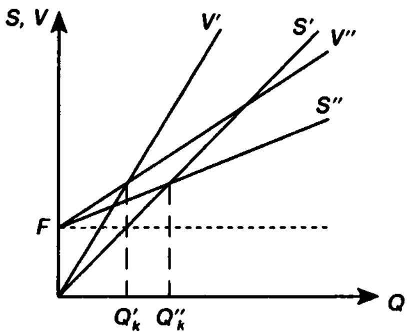

Рис. 7.10

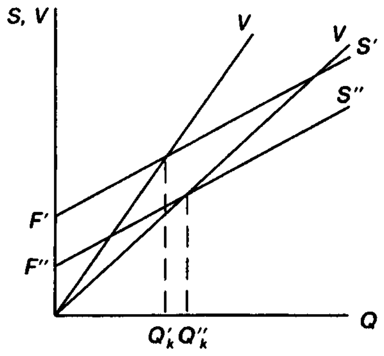

Рис. 7.11

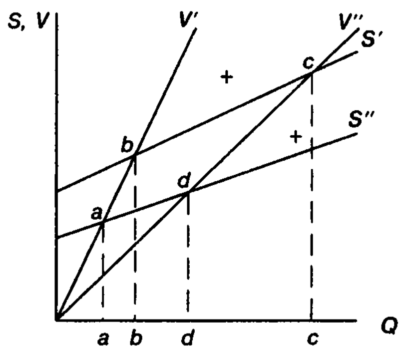

Рис. 7.12

На рис. 7.12 иллюстрируется ситуация, при которой интервалами заданы все три параметра. На рисунке показаны четыре критических точки: *a, b, c, d*, причем точка *a* соответствует минимальным затратам и максимальной цене, точка *b* — максимальным затратам и цене, точка *c* — максимальным затратам и минимальной цене, наконец, точка *d* — минимальным затратам и цене. В зависимости от выдвинутых предположений можно получить ряд диапазонов для барьерной точки: *a* ÷ *b*, *a* ÷ *c* и т.д.

Что касается методов определения интервалов для значений параметров, то в большинстве случаев вполне оправданно экспертное их оценивание.

Интервалы можно установить и в рамках *сценарного подхода*. В этом случае определяется набор параметров для некоторой совокупности условий (сценария). Обычно разрабатывают оптимистический, пессимистический и наиболее вероятный сценарии. Оптимистический и пессимистический сценарии позволяют определить крайние значения искомой величины. Наиболее вероятный сценарий дает промежуточную оценку этой величины. Задание параметров, характеризующих некоторую производственную систему, в виде интервалов дает более полное представление о реально ожидаемых результатах.

§7.5. Барьерные точки выпуска — финансовый подход к их определению

Постановку задачи по определению барьерного объема выпуска продукции можно расширить, учитывая дополнительные условия. Представим себе, что разрабатывается проект создания предприятия по производству некоторого нового вида продукции. Выпуск продукции намечен в течение n лет в равных объемах по годам. Что касается затрат, то сохраняется их деление на постоянные (не связанные с объемами производства) и переменные, пропорциональные выпуску продукции. Текущие затраты и поступления от реализации продукции можно представить в виде потоков платежей. Здесь возможны два конкурирующих подхода к определению барьерного выпуска. В первом, который условно назовем *бухгалтерским*, инвестиции не принимаются во внимание непосредственно — они учитываются через амортизационные отчисления. Последние включают в текущие затраты. Во втором, *финансовом*, подходе инвестиции играют ключевую роль — выступают в качестве самостоятельного фактора — в то время как амортизация не учитывается в текущих расходах. Как видим, оба способа избегают двойного счета по отношению к инвестиционным затратам.

Оба способа применяются на практике, однако они дают разные результаты. Начнем с бухгалтерского подхода, согласно которому необходимо определить тот минимальный объем выпуска, при котором затраты окупятся. Иначе говоря, сохраняется ориентация на прибыль. Найдем размер прибыли для отдельного года:

$$P = pQ - (cQ + f + d), \tag{7.11}$$

где p и c имеют тот же смысл, что и выше (см. § 7.1), f — постоянные расходы за год, d — сумма амортизационных списаний за тот же период (d = const).

Барьерный объем выпуска продукции составит:

$$Q_k = \frac{f + d}{p - c}, \tag{7.12}$$

что, по существу, совпадает с формулой (7.3). Отличие от последней только в выделении в числителе в качестве самостоятельного слагаемого суммы амортизационных расходов.

Если принять во внимание тот факт, что выпуск продукции (поступления дохода) и затраты представляют собой потоки платежей, то "конкурирующие" функции определяются как современные стоимости потоков, а именно:

$$PV(pQ) \text{ и } PV(f + d + cQ),$$

где PV — оператор определения современной стоимости.

На основе этих функций получим равенство

$$PV(pQ_k) = PV(f + d + cQ_k).$$

Решение данного уравнения[1] относительно критического объема выпуска приводит к формуле, аналогичной (7. 12).

Графическая иллюстрация положения барьерной точки выпуска представлена на рис. 7.13.

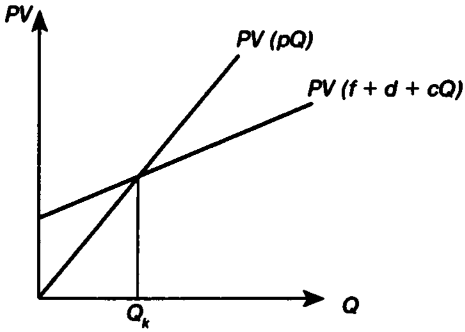

Рис. 7.13

ПРИМЕР 7.6. Исходные данные: $n = 5$, $d = 50$, $f = 20$, $p = 50$, $c = 30$. Находим

$$Q_k = \frac{20 + 50}{50 - 30} = 35.$$

Проверим этот результат, для чего определим современные стоимости денежных поступлений и затрат для барьерного выпуска. Для дисконтирования примем i =15%, Находим $a_{5;15}$ = = 3,35216. После чего получим

$$pQ_k a_{5;15}(1 + i)^{0,5} = 50 \times 35 \times 3,35216 \times 1,15^{0,5} = 629,$$

$$(f + d + cQ_k)a_{5;15}(1 + i)^{0,5} = (20 + 50 + 30 \times 35)3,35216 \times 1,15^{0,5} =$$

$$= 629.$$

Предположим теперь, что все участвующие в расчете удельные характеристики изменяются во времени, т.е. вместо p, c, f, d имеем p_t, c_t, f_t, d_t. Переменные параметры, вероятно, более адек-

[1] См. Математическое приложение к главе.

ватны реальности. Например, затраты на производство могут расти в связи с увеличением расходов на ремонт по мере износа оборудования, в то же время постоянные затраты могут уменьшаться и т. д. Исходное равенство в этом случае имеет вид:

$$\sum_t \left(f_t + d_t\right)v^{n_t} + Q_k \sum_t c_t v^{n_t} = Q_k \sum_t p_t v^{n_t}.$$

Отсюда

$$Q_k = \frac{\sum \left(f_t + d_t\right)v^{n_t}}{\sum p_t v^{n_t} - \sum c_t v^{n_t}}. \qquad (7.13)$$

ПРИМЕР 7.7. В таблице приведены исходные данные для расчета барьерного выпуска. Все параметры кроме сумм амортизации здесь переменные величины.

t	*p*	*c*	*f*	*d*
1	50	28	20	30
2	50	28	20	30
3	46	30	16	30
4	46	30	16	30
5	42	31	12	30

Для дисконтирования применим процентную ставку 15%. Необходимые для расчета по формуле (7.13) данные приведены в следующей таблице.

t	v^n	$f + d$	$(f + d)v^n$	pv^n	cv^n
1	0,93250	50	46,62500	46,625000	26,11000
2	0,81087	50	40,54350	40,54350	22,70436
3	0,70511	48	32,43506	33,84528	21,15330
4	0,61314	45	28,20444	27,59130	18,39420
5	0,53316	42	22,39284	22,39283	16,52804
	Итого	—	170,20008	170,99791	104,8899

На основе табличных данных получим

$$Q_k = \frac{170{,}2}{171 - 104{,}89} = 2{,}57.$$

Перейдем к финансовому методу, который, повторяем, в отличие от бухгалтерского учитывает размер капитальных вложений, осуществленных для реализации проекта, и поток чистых поступлений (доходов) без учета амортизационных отчислений. Поток платежей в случае, когда удельные характеристики постоянны, отражается следующим рядом:

$$-K,\ (p-c)Q-f,\ (p-c)Q-f,\ \dots,$$

где K — размер инвестиций.

Современная стоимость такого потока представляет собой *чистый приведенный доход* (NPV) — важный показатель, с которым имеют дело в анализе производственных инвестиций (см. гл. 12). В принятых здесь обозначениях и с привязкой чистых поступлений к середине соответствующих периодов можно записать:

$$NPV = -K + [(p-c)Q - f]a_{n;i}(1+i)^{0,5}.$$

По определению в барьерной точке $NPV = 0$. Отсюда

$$Q_k = \frac{1}{p-c}\left(\frac{K}{a_{n;i}(1+i)^{0,5}} + f\right). \tag{7.14}$$

Первое слагаемое в скобках равно члену финансовой ренты, современная стоимость которой равна сумме инвестиций.

Поток чистых поступлений можно расчленить без потери в точности для последующих расчетов на два потока: поступлений (положительные величины) и расходов (отрицательные величины). Графическая иллюстрация динамики современных стоимостей указанных потоков в зависимости от объема выпуска представлена на рис. 7.14.

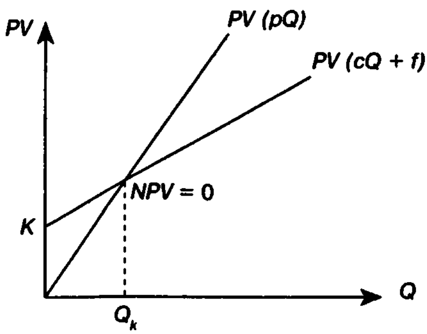

Рис. 7.14

ПРИМЕР 7.8. Применим оба метода анализа, бухгалтерский и финансовый, для анализа инвестиционного проекта, который характеризуется следующими данными: $K = 1100$, $p = 50$, $c = 30$, $f = 5$, $d = 100$, $n = 10$ лет. Дисконтирование осуществляется по ставке 12% годовых.

По формуле (7.12) находим

$$Q_k = \frac{105}{50 - 30} = 5{,}25.$$

В свою очередь финансовый метод дает

$$Q_k = \frac{1}{50 - 30}\left(\frac{1100}{a_{10;12} \times 1{,}12^{0{,}5}} + 5\right) = 9{,}45.$$

Как видим, последний ответ существенно отличается от предыдущего.

При сравнении формул (7.12) и (7.14) становится очевидным, что расхождение в результатах оценки барьерной точки выпуска связано с тем, что

$$\frac{K}{a_{n;i}(1 + i)^{0{,}5}} > d.$$

Иначе говоря, член ренты, погашающей капиталовложения, должен быть больше амортизационных отчислений. Равенство в приведенном соотношении будет наблюдаться только в случае, когда $i = 0$. В этом случае $a_{n;0} = n$.

При бухгалтерском подходе из поля зрения аналитика пропадает выгода от возможного иного использования ресурсов. В связи с этим введем важное в современной экономике понятие *условной (вмененной) потери (opportunity costs)*, связанной с альтернативными издержками в результате неиспользования возможного альтернативного курса действий. Для иллюстрации приведем следующий пример. Пусть этим ресурсом для конкретности является производственное здание. У владельца имеются две альтернативы его использования:

— осуществить некоторый производственный проект, предусматривающий использование этого здания,

— продать здание (или сдать его в аренду).

Если владелец реализует проект, то он теряет вторую возможность получения дохода. Таким образом, хотя при реализации проекта здание не приобретается, его стоимость должна включаться в инвестиционные издержки. Здесь уместно привести следующую иллюстрацию. Компания Локхид обратилась в 1971 г. в Конгресс США по поводу убыточности производства военных самолетов TriStar L—1011. Обращение аргументировалось тем, что коммерческая привлекательность производства была определена с учетом барьерной точки выпуска в размере около 200 самолетов. Однако эта величина не учитывала ранее сделанных капиталовложений в сумме 1 млрд долл. С учетом указанных вмененных затрат барьерная точка повышается до 500 самолетов.

Математическое приложение к главе

Доказательство формулы (7.12)

Найдем барьерную точку выпуска для условия, согласно которому современная стоимость доходов равна современной стоимости затрат. При расчете современных стоимостей полагаем, что выпуск и реализация продукции равномерно распределены в пределах года. В связи с этим без заметной потери точности в расчетах отнесем эти величины к серединам соответствующих лет. В терминах финансовой математики соответствующие потоки представляют собой постоянные годовые ренты с платежами в середине периодов (см. § 6.3). Пусть PV — оператор определения современной стоимости соответствующего потока платежей. Современная стоимость потока переменных и постоянных затрат, в которые включены и амортизационные начисления, в этом случае составит:

$$PV(f + d + cQ) = (f + d + cQ)v^{0,5} + \ldots + \\ + (f + d + cQ)v^{t-0,5} = (f + d + cQ)a_{n;i}(1 + i)^{0,5}, \tag{1}$$

где $a_{n;i}$ — коэффициент приведения постоянной ренты, v — дисконтный множитель.

В свою очередь современная стоимость поступлений находится как

$$PV(pQ) = pQv^{0,5} + pQv^{1,5} + \ldots + pQv^{n-0,5} = \\ = pQa_{n;i}(1 + i)^{0,5}. \tag{2}$$

Из равенства

$$(f + d + cQ_k)a_{n;i}(1 + i)^{0,5} = pQ_k a_{n;i}(1 + i)^{0,5}$$

следует искомая формула

$$Q_k = \frac{f + d}{p - c}.$$

Глава 8

РИСК И ДИВЕРСИФИКАЦИЯ

§8.1 Риск

В финансовом анализе производственных инвестиций мы неизбежно сталкиваемся с неопределенностью, неоднозначностью показателей затрат и отдачи. В связи с этим возникает проблема измерения риска и его влияния на результаты инвестиций. Поскольку вопросы, связанные с измерением риска в экономической деятельности, рассмотрены в отечественной литературе явно недостаточно, остановимся на них более подробно, чем, возможно, это необходимо для раскрытия основной темы данной работы.

Широко распространенный термин "риск", как известно, понимается неоднозначно. Его содержание определяется той конкретной задачей, где этот термин используется. Достаточно просто перечислить такие понятия как кредитный, валютный, инвестиционный, политический, технологический риски, риск ликвидности активов и т.д. Отметим, что даже самое общее определение этого понятия не оставалось неизменным во времени. Говоря о первом в экономике научном определении риска, обычно ссылаются на Ф. Найта (1921), который предложил различать риск и неопределенность. Риск имеет место тогда, когда некоторое действие может привести к нескольким взаимоисключающим исходам с известным распределением их вероятностей. Если же такое распределение неизвестно, то соответствующая ситуация рассматривается как неопределенность. Как нам представляется, здесь речь идет, скорее, не об определении риска, а лишь о наличии информации, характеризующей риск.

В экономической практике, особенно финансовой, обычно не делают различия между риском и неопределенностью. Чаще всего под *риском понимают некоторую возможную потерю, вызванную наступлением случайных неблагоприятных событий.* В некоторых областях экономической деятельности сложились устойчивые традиции понимания и измерения риска. Наибольшее внимание к измерению риска проявлено в страховании. Объяснять причину такого внимания нет необходимости. Измеритель риска, как возможная потеря страховщика, был использован еще в конце XVIII в. В других направлениях финансовой деятельности под риском также понимается некоторая потеря. Она может быть объективной, т.е. определяться внешними воздействиями на ход и результаты деятельности хозяйствующего субъекта. Так, например, потеря покупательной способности денег (инфляционный риск) не зависит от воли и действий их владельца. Однако, часто риск, как возможная потеря, может быть связан с выбором того или иного решения, той или иной линии поведения. Заметим также, что в некоторых областях деятельности риск понимается как *вероятность* наступления некоторого неблагоприятного события. Чем выше эта вероятность, тем больше риск. Такое понимание риска оправданно в тех случаях, когда событие может наступить или не наступить (банкротство, крушение и т.д.).

Когда невозможны непосредственные измерения размеров потерь или их вероятностей, риск можно квантифицировать с помощью *ранжирования* соответствующих объектов, процессов или явлений в отношении возможного ущерба, потерь и т.д. Ранжирование обычно основывается на экспертных суждениях.

Естественной реакцией на наличие риска в финансовой деятельности является стремление компенсировать его с помощью так называемых *рисковых премий* (*risk premium*), которые представляют собой различного рода надбавки (к цене, уровню процентной ставки, тарифу и т.д.), выступающие в виде "платы за риск". Второй путь ослабления влияния риска заключается в *управлении риском*. Последнее осуществляется на основе различных приемов, например, с помощью заключения форвардных контрактов, покупки валютных или процентных опционов и т.д.

Одним из приемов сокращения риска, применяемым в инвестиционных решениях, является *диверсификация*, под которой понимается распределение общей инвестиционной суммы между несколькими объектами. Диверсификация — общепринятое средство сокращения любого вида риска. С увеличением числа элементов набора (портфеля) уменьшается общий размер риска. Однако только в случае, когда риск может быть измерен и представлен в виде статистического показателя, управление риском получает надежное основание, а последствия диверсификации поддаются анализу с привлечением методов математической статистики.

В инвестиционном анализе и страховом деле риск часто измеряется с помощью таких стандартных статистических характеристик, как *дисперсия* и *среднее квадратическое (стандартное) отклонение*. Обе характеристики измеряют колебания, в данном случае — колебания дохода. Чем они больше, тем выше рассеяние показателей дохода вокруг средней и, следовательно, степень риска.

Напомним, что между дисперсией (D) и средним квадратическим отклонением (σ) существует следующее соотношение:

$$\sigma = \sqrt{D}.$$

В свою очередь дисперсия относительно выборочной средней ($\bar{x}$) находится как

$$D = \sum \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n - 1},$$

где n — количество наблюдений, $\bar{x}$ — средняя случайной переменной x.

Как известно, среднее квадратическое отклонение имеет то неоспоримое достоинство, что при близости наблюдаемого распределения (например, распределении дохода от инвестиций) к нормальному, что, строго говоря, должно быть статистически проверено, этот параметр может быть использован для определения границ, в которых с заданной вероятностью следует ожидать значение случайной переменной. Так, например, с вероятностью 68% можно утверждать, что значение случайной переменной x (в нашем случае доход) находится в границах $\bar{x} \pm \sigma$, а с вероятностью 95% — в пределах $\bar{x} \pm 2\sigma$ и т.д. Сказанное иллюстрируется на рис. 8.1

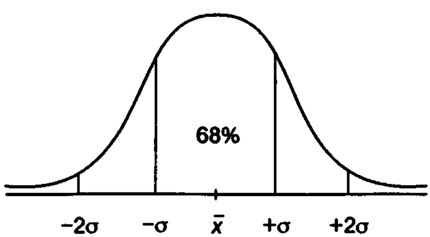

Рис. 8.1

§8.2. Диверсификация инвестиций и дисперсия дохода

Определим теперь что дает диверсификация для уменьшения риска и выявим условия, когда эта цель достигается. В качестве объекта анализа примем некоторый абстрактный портфель ценных бумаг (далее для краткости — портфель). Такой выбор объясняется методологическими преимуществами — в этом случае проще выявить зависимости между основными переменными. Однако многие из полученных результатов без большой натяжки можно распространить и на производственные инвестиции.

В предыдущем параграфе отмечалось, что в качестве измерителя риска в долгосрочных финансовых операциях широко распространена такая мера, как дисперсия дохода во времени. Диверсификация портфеля при правильном ее применении приводит к уменьшению этой дисперсии при всех прочих равных условиях. Диверсификация базируется на простой гипотезе. Если каждая компонента портфеля (в рассматриваемой задаче — вид ценной бумаги) характеризуется некоторой дисперсией дохода, то доход от портфеля имеет дисперсию, определяемую его составом. Таким образом, ***изменяя состав портфеля, можно менять суммарную дисперсию дохода, а в некоторых случаях свести ее к минимуму.***

Итак, пусть имеется портфель из n видов ценных бумаг. Доход от одной бумаги вида i составляет величину d_i. Суммарный доход (A), очевидно, равен

$$A = \sum_i a_i d_i, \tag{8.1}$$

где a_i — количество бумаг вида i.

Если d_i представляет собой средний доход от бумаги вида i, то величина A характеризует средний доход от портфеля бумаг в целом.

Для начала положим, что показатели доходов различных видов бумаг являются статистически независимыми величинами (иначе говоря, не коррелируют между собой). Дисперсия дохода портфеля (обозначим ее как D) в этом случае находится как

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D_i, \tag{8.2}$$

где D_i — дисперсия дохода от бумаги вида i, n — количество видов ценных бумаг.

Для упрощения, которое нисколько не повлияет на результаты дальнейших рассуждений, перейдем от абсолютного измерения количества ценных бумаг к относительному. Пусть теперь a_i характеризует долю в портфеле бумаги вида i, т.е. $0 \leqslant a_i \leqslant 1$, $\sum a_i = 1$.

Для зависимых в статистическом смысле показателей дохода отдельных бумаг дисперсию суммарного дохода находим следующим образом:

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D_i + 2\sum_{i \neq j} a_i a_j r_{ij} \sigma_i \sigma_j, \tag{8.3}$$

где D_i — дисперсия дохода от бумаги вида i, r_{ij} — коэффициент корреляции дохода от бумаг вида i и j, σ_i и σ_j — среднее квадратическое отклонение дохода у бумаг вида i и j.

Коэффициент корреляции двух случайных переменных x и y, как известно, определяется по формуле[1]

$$r_{xy} = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{n\sigma_x\sigma_y}, \tag{8.4}$$

где $\bar{x}$, $\bar{y}$ — средние (в нашем случае средние доходы двух видов бумаг).

Для расчетов часто применяется следующая рабочая формула:

$$r_{xy} = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{\left[\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2\right]\left[n\sum y^2 - \left(\sum y\right)^2\right]}}.$$

Поскольку коэффициент корреляции может быть как положительной, так и отрицательной величиной, то, как это вытекает из (8.3), ***при положительной корреляции дисперсия суммарно-***

[1] Напомним следующие свойства коэффициента корреляции:

— коэффициент не имеет размерности, следовательно, он сопоставим для разных рядов данных;

— величина r_{xy} лежит в пределах от -1 до $+1$. Значение $r_{xy} = +1$ говорит о том, что между переменными существует полная положительная корреляция, т. е. наблюдается функциональная линейная зависимость — с увеличением x линейно растет y. При $r_{xy} = -1$ наблюдается отрицательная линейная зависимость.

го дохода увеличивается, при отрицательной она сокращается. В самом деле, при заметной отрицательной корреляции положительные отклонения от среднего дохода одних бумаг погашаются отрицательными отклонениями у других. И наоборот, при положительной корреляции отклонения суммируются, что увеличивает общую дисперсию и риск.

Проследим теперь, каково влияние *масштаба диверсификации* на размер риска. Под масштабом диверсификации здесь будем понимать количество объектов, выбранных для инвестиции (количество видов ценных бумаг). Обратимся к условному примеру, который позволяет наиболее отчетливо выделить влияние указанного фактора. Итак, пусть портфель состоит из бумаг различного вида, но имеющих одинаковую дисперсию дохода (σ_0^2). Удельные веса в портфеле каждого вида бумаг также одинаковы, а общая сумма вложений равна 1. Положим, что показатели доходности у отдельных видов бумаг статистически независимы, т.е. применима формула (8.2). В этих условиях для оценки величины среднего квадратического отклонения дохода портфеля получим

$$D = \frac{1}{n}\sigma_0^2,$$

где n — количество видов ценных бумаг.

Воспользуемся приведенной формулой и определим дисперсию дохода для портфеля, состоящего из двух и трех видов бумаг. Так, для двух бумаг имеем

$$D = \frac{1}{2}\sigma_0^2 \text{ и } \sigma = \sqrt{\frac{1}{2}}\,\sigma_0 = 0,71\sigma_0.$$

Для трех видов бумаг квадратическое отклонение портфеля составит $0,58\sigma_0$. Таким образом, *с увеличением числа составляющих портфеля риск уменьшается* даже при одинаковой дисперсии составляющих элементов. Однако прирост действенности диверсификации уменьшается. Соответствующая зависимость изображена на рис. 8.2.

Как видим, наибольшее влияние увеличение масштабов диверсификации оказывает на начальных стадиях, т.е. при малых значениях n. Например, в рамках рассмотренного примера переход от одного вида бумаг к четырем сокращает квадратическое отклонение на 50%, а от одного к восьми — на 65%.

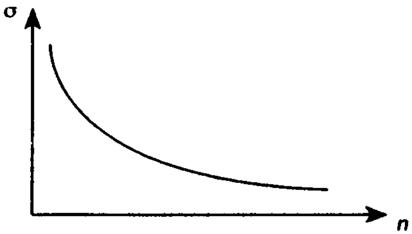

Рис. 8.2

Полученные выше выводы в отношении тенденции изменения среднего квадратического отклонения в зависимости от числа составляющих при условии, когда дисперсии составляющих одинаковы, очевидно, справедливы и для более общих случаев. Однако, зависимость этих параметров от степени диверсификации проявляется здесь не столь четко.

Посмотрим теперь, как изменяются доход и величина риска при изменении структуры портфеля. Для этого вернемся к формулам (8.2) и (8.3) и запишем их только для двух видов бумаг (X и Y). Такой анализ вряд ли имеет практическое значение. Однако с его помощью наглядно демонстрируются последствия "смешения" ценных бумаг с различными доходностью и дисперсией. Для независимых доходов получим

$$D = a_x^2 D_x + a_y^2 D_y, \tag{8.5}$$

и для зависимых доходов

$$D = a_x^2 \sigma_x^2 + a_y^2 \sigma_y^2 + 2a_x a_y r_{xy} \sigma_x \sigma_y. \tag{8.6}$$

Причем $a_y = 1 - a_x$.

В этом случае среднее значение суммарного дохода определяется как

$$A = a_x d_x + (1 - a_x) d_y. \tag{8.7}$$

Пусть $d_y > d_x$ и $\sigma_y > \sigma_x$. Очевидно, что в силу этих условий рост доли бумаг второго вида увеличивает доходность портфеля. Так, на основе (8.7) получим

$$A = d_y + (d_y - d_x) a_y. \tag{8.8}$$

Что касается дисперсии дохода портфеля, то, как это следует из (8.6), положение не столь однозначно и зависит от знака и степени корреляции. В связи с этим подробно рассмотрим три ситуации: полная положительная корреляция доходов ($r_{xy} = +1$), полная отрицательная корреляция ($r_{xy} = -1$), независимость доходов или нулевая корреляция ($r_{xy} = 0$).

В первом случае увеличение дохода за счет включения в портфель бумаги вида Y помимо X сопровождается ростом как дохода, так и дисперсии. Для портфеля, содержащего оба вида бумаг, квадратическое отклонение находится в пределах $\sigma_x < \sigma < \sigma_y$ (см. рис. 8.3, где точка X означает портфель, состоящий только из бумаг вида X, а Y — портфель из бумаг вида Y).

Для частного случая, когда $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, получим по формуле (8.6) $D = \sigma^2$. Иначе говоря, при полной положительной корреляции "смешение" инвестиций не окажет никакого влияния на величину дисперсии.

При полной отрицательной корреляции доходов динамика квадратического отклонения доходов от портфеля более сложная. По мере движения от точки X к точке Y эта величина сначала сокращается и доходит до нуля в точке B, затем растет (см. рис. 8.4). Следует обратить внимание на то, что при движении от X до B рост дохода сопровождается уменьшением риска (квадратического отклонения).

В последней из рассматриваемых ситуаций квадратическое отклонение при увеличении доли бумаги Y проходит точку минимума, равного σ_m, далее оно растет до σ_y (см. рис. 8.5). (Проблема определения состава портфеля, при котором достигается минимум дисперсии, обсуждается в следующем параграфе.)

Совместим теперь все три графика на одном (см. рис. 8.6.) Как видим, все возможные варианты зависимости "доход—СКО" находятся в треугольнике XBY

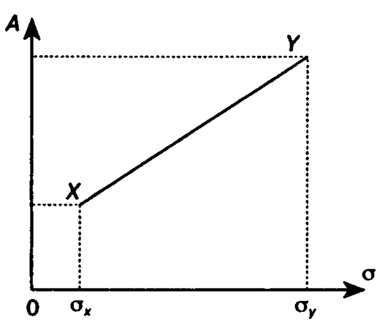

Рис. 8.3

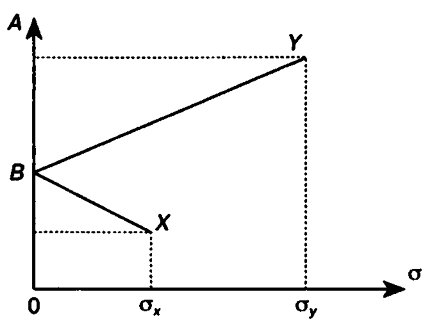

Рис. 8.4

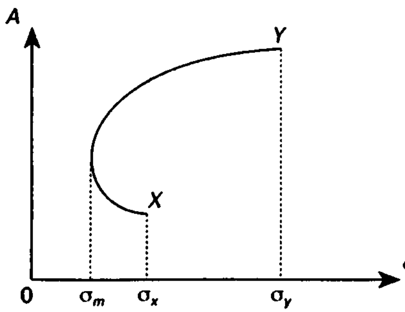

Рис. 8.5

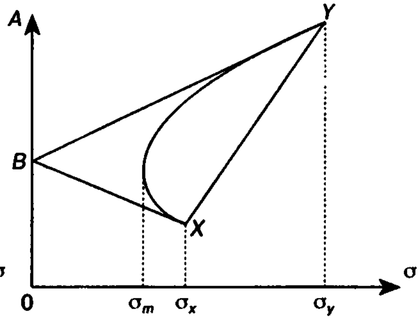

Рис. 8.6

Из сказанного непосредственно следует, что эффективность диверсификации (в отношении сокращения риска) наблюдается только при отрицательной или, в крайнем случае, нулевой корреляции.

ПРИМЕР 8.1. Портфель должен состоять из двух видов бумаг, параметры которых: $d_x = 2$; $\sigma_x = 0{,}8$; $d_y = 3$; $\sigma_y = 1{,}1$.

Доход от портфеля: $A = 2a_x + 3a_y$. Таким образом, доход в зависимости от величины долей находится в пределах $2 < A < 3$.

Дисперсия суммы дохода составит:

$$D = a_x^2 0{,}8^2 + a_y^2 1{,}1^2 + a_x a_y r_{xy} 0{,}8 \times 1{,}1.$$

Определим доход и дисперсию для портфеля с долями, равными, допустим, 0,3 и 0,7. Получим по формулам (8.6) и (8.7): $D = 0{,}651 + 0{,}37r_{xy}$ и $A = 2{,}7$. Таким образом, при полной положительной корреляции $D = 1{,}021$, при полной отрицательной корреляции $D = 0{,}281$. В итоге с вероятностью 95% можно утверждать, что суммарный доход находится в первом случае в пределах $2{,}7 \pm 2 \times \sqrt{1{,}021} = 2{,}7 \pm 2{,}02$; во втором — он определяется пределами $2{,}7 \pm 2 \times \sqrt{0{,}281} = 2{,}7 \pm 1{,}06$. При нулевой корреляции доходов искомые пределы составят $2{,}7 \pm 2\sqrt{0{,}651} = 2{,}7 \pm 1{,}64$.

Продолжим анализ с двумя бумагами и проследим, как влияет включение в портфель безрисковой (*risk free*) инвестиции[1].

[1] В странах со стабильной экономикой безрисковой обычно считается ценная бумага, выпущенная государственным казначейством.

Для этого заменим в портфеле бумагу Y с параметрами d_y, σ_y на бумагу с такой же доходностью, но с нулевой дисперсией. Доходность портфеля от такой замены, разумеется, не изменится. Что же касается дисперсии, то она теперь составит:

$$D = a_x^2 \sigma_x^2.$$

Дисперсия дохода портфеля теперь зависит от удельного веса безрисковой составляющей, так как

$$\sigma = a_x \sigma_x = (1 - a_y)\sigma_x. \tag{8.9}$$

Таким образом, "разбавление" портфеля безрисковой бумагой снижает риск портфеля в целом, а квадратическое отклонение дохода портфеля определяется убывающей линейной функцией доли безрисковой бумаги. Если $d_x > d_y$ (в противном случае проблема выбора портфеля отпадает — он должен состоять только из безрисковых бумаг), то доход от портфеля по мере увеличения доли безрисковой бумаги уменьшается от d_x до d_y, а величина квадратического отклонения сокращается от σ_x до 0 (см. рис. 8.7). И наоборот, рост доли рисковой бумаги увеличивает как риск, так и доход.

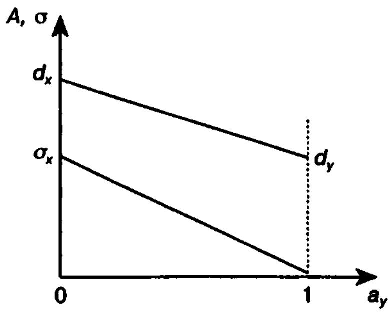

Рис. 8.7

Последнее утверждение для портфеля, состоящего из двух видов бумаг, иллюстрируется уравнением (8.10), которое получено преобразованием (8.7):

$$A = d_y + (d_x - d_y)a_x. \tag{8.10}$$

В свою очередь на основе (8.9) находим

$$a_x = \frac{\sigma}{\sigma_x}.$$

В итоге получим интересное соотношение

$$A = d_y + \frac{d_x - d_y}{\sigma_x}\sigma. \tag{8.11}$$

Дробь в приведенном выражении иногда называют ***рыночной ценой риска***. Если эта величина равна, скажем, 0,5, то при росте квадратического отклонения на 1% доход увеличится на 0,5%.

§8.3. Минимизация дисперсии дохода

Приведенные выше выражения для дисперсии суммарного дохода позволяют рассмотреть проблему диверсификации инвестиций и риска еще в одном аспекте, а именно, — определить структуру портфеля, которая минимизирует дисперсию и, следовательно, риск. Для нахождения минимума дисперсии вернемся к определяющим ее формулам. Если предположить, что нет статистической зависимости между доходами от отдельных видов инвестиций, то найти оптимальную в указанном смысле структуру портфеля не так уж и сложно. Положим, что портфель, как и выше, состоит из двух видов бумаг X и Y. Их доли в портфеле составляют a_x и $1-a_x$, а дисперсии D_x и D_y. Общая дисперсия определяется по формуле (8.5). Поскольку эта функция является непрерывной, то применим стандартный метод определения экстремума. Находим, что минимальное значение дисперсии суммы имеет место тогда, когда

$$a_x = \frac{D_y}{D_x + D_y}. \tag{8.12}$$

Формулу (8.12) обычно приводят в аналитической финансовой литературе. Однако, для того, чтобы ею можно было воспользоваться, необходимо иметь значения дисперсий. По-видимому, при расчетах на перспективу удобнее оценить или задать экспертным путем отношение дисперсий:

$$D_{x/y} = D_x / D_y. \tag{8.13}$$

Разделим теперь числитель и знаменатель (8.12) на D_y, получим

$$a_x = \frac{1}{D_{x/y} + 1}. \tag{8.14}$$

При наличии корреляции между показателями доходов обратимся к (8.6). Минимум этой функции имеет место в случае, когда

$$a_x = \frac{D_y - r_{xy}\sigma_x\sigma_y}{D_x + D_y - 2r_{xy}\sigma_x\sigma_y}, \tag{8.15}$$

или, использовав отношение дисперсий (8.13), получим

$$a_x = \frac{1 - r_{xy}\sqrt{D_{x/y}}}{D_{x/y} + 1 - 2r_{xy}\sqrt{D_{x/y}}}. \tag{8.16}$$

Как видно из приведенных формул, расчетная величина доли одной из бумаг может при некоторых условиях оказаться отрицательной. Отсюда следует, что этот вид бумаги просто не должен включаться в портфель.

ПРИМЕР 8.2. Вернемся к данным примера 8.1 и определим структуру портфеля с минимальной дисперсией. Напомним, что $\sigma_x = 0{,}8$; $\sigma_y = 1{,}1$.

При полной положительной корреляции расчетные значения доли первой бумаги составят по формуле (8.15)

$$a_x = \frac{1{,}1^2 - 1 \times 0{,}8 \times 1{,}1}{0{,}8^2 + 1{,}1^2 - 2 \times 1 \times 0{,}8 \times 1{,}1} > 1.$$

Соответственно, $a_y < 0$. Следовательно, минимальная дисперсия имеет место в случае, когда портфель состоит из одной бумаги вида X. Средний доход от портфеля равен 2.

При полной отрицательной корреляции находим

$$a_x = \frac{1{,}1^2 - (-1)0{,}8 \times 1{,}1}{0{,}8^2 - 1{,}1^2 - 2(-1)0{,}8 \times 1{,}1} = 0{,}579,$$

$$a_y = 1 - 0{,}579 = 0{,}421.$$

Дисперсия в этом случае равна нулю (см. рис. 8.4), а средний доход составит 2,421.

Наконец, при отсутствии корреляции получим по формуле (8.12) $a_x = 0{,}654$; $a_y = 1 - 0{,}654 = 0{,}346$. Дисперсия дохода при такой структуре портфеля равна 0,418, а средний доход равен 2,346.

Пусть теперь портфель состоит из трех видов бумаг X, Y, Z. Их доли a_x, a_y и $a_z = 1 - (a_x + a_y)$. Дисперсия дохода от портфеля при условии независимости доходов от отдельных видов бумаг составит

$$D = a_x^2 D_x + a_y^2 D_y + [1 - (a_x + a_y)]^2 D_z.$$

Минимум дисперсии достигается, если структура портфеля определяется следующим образом:

$$a_x = \frac{D_{y/z}}{D_{x/z} D_{y/z} + D_{x/z} + D_{y/z}},$$

$$a_y = \frac{D_{x/z}}{D_{x/z} D_{y/z} + D_{x/z} + D_{y/z}}.$$

Не будем останавливаться на ситуации, когда доходы трех видов бумаг статистически зависимы. Перейдем к общей постановке задачи и определим структуру портфеля с n составляющими. Допустим, что доходы статистически независимы. Опустим доказательства[1] и приведем результат в матричном виде:

$$\bar{A} = D^{-1} e, \tag{8.17}$$

где e — единичный вектор, характеризующий структуру портфеля,

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \frac{D_1}{D_n} + 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \frac{D_2}{D_n} + 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & \frac{D_{n-1}}{D_n} \end{bmatrix},$$

[1] Доказательства приведены в Математическом приложении к главе.

$\bar{A}$ — вектор, характеризующий $n - 1$ элементов структуры портфеля.

Матрица D имеет размерность $(n - 1) \times (n - 1)$.

ПРИМЕР 8.3. Эксперты оценили следующие отношения дисперсий для портфеля, состоящего из четырех видов бумаг: $D_{1/4} = 1,5$; $D_{2/4} = 2$; $D_{3/4} = 1$. По формуле (8.17) получим

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 2,5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \times e = \begin{bmatrix} 0,210 \\ 0,158 \\ 0,316 \end{bmatrix}, \text{ откуда}$$

$$a_4 = 1 - \sum_{1}^{3} a_i = 1 - 0,684 = 0,316.$$

Заметим, что структуру портфеля, минимизирующую дисперсию дохода, с n составляющими при наличии корреляции определить так же просто, как это было сделано выше, нельзя. Однако решение существует, хотя его получение достаточно хлопотное дело, да и вряд ли оно необходимо для практики.

Анализ диверсификации представляет собой первый этап в исследовании портфеля инвестиций. Следующим является *максимизация дохода.* Эта проблема также связана с измерением риска и требует обстоятельного специального обсуждения, выходящего за рамки настоящего учебника. Поэтому ограничимся лишь замечанием о том, что метод Г. Марковица, который заключается в разработке и решении специальной модели нелинейного программирования с использованием показателей доходов и дисперсий, в теоретическом плане не вызывает возражений. Что касается его практического применения, то здесь, на наш взгляд, скрыты серьезные подводные камни. Затронем лишь одну проблему — какой срок для расчета дисперсий следует принять во внимание? Если ограничиться небольшим сроком, то получим наиболее приближенные к современности данные. Однако они могут оказаться неустойчивыми, содержать много “шума”, с другой стороны, стремление охватить максимальный срок неизбежно приведет к устареванию данных.

Математическое приложение к главе

Минимум дисперсии дохода при отсутствии корреляции.

Дисперсия в этом случае определяется выражением (8.2), которое для n долей запишем как

$$D = \sum_{1}^{n-1} a_i^2 D_i + \left(1 - \sum_{1}^{n-1} a_i\right)^2 D_n. \tag{1}$$

В свою очередь

$$\left(1 - \sum_{1}^{n-1} a_i\right)^2 = 1 - 2\sum a_i + \left(\sum a_i\right)^2,$$

где

$$\left(\sum_{1}^{n-1} a_i\right)^2 = \sum_{1}^{n-1} a_i^2 + 2\sum_{1}^{n-1} a_i \sum_{2}^{n-1} a_i.$$

Окончательно имеем

$$\left(1 - \sum_{1}^{n-1} a_i\right)^2 = 1 - 2\sum_{1}^{n-1} a_i + 2a_1 \sum_{2}^{n-1} a_i + 2a_2 \sum_{3}^{n-1} a_i + \ldots + \\ +2a_{n-2}a_{n-1} + \sum_{1}^{n-1} a_i^2. \tag{2}$$

Преобразуем (1) с использованием (2) и определим $n - 1$ частных производных:

$$f'(a_1) = a_1 D_1 + \left(\sum_{1}^{n-1} a_i - 1\right) D_n,$$

$$f'\left(a_2\right) = a_2 D_2 + \left(\sum_{1}^{n-1} a_i - 1\right) D_n, \tag{3}$$

...

$$f'(a_{n-1}) = a_{n-1}D_{n-1} + \left(\sum_{1}^{n-1} a_i - 1\right)D_n.$$

Разделим каждое уравнение системы (3) на D_n и приравняем его нулю. После некоторых преобразований получим

$$a_1\left(\frac{D_1}{D_n} + 1\right) + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} = 1,$$

$$a_1 + a_2\left(\frac{D_2}{D_n} + 1\right) + a_3 + \ldots + a_{n-1} = 1, \qquad (4)$$

$$\ldots$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}\left(\frac{D_{n-1}}{D_n} + 1\right) = 1.$$

Представим систему уравнений (4) в матричном виде:

$$AD = e.$$

После чего получим искомое уравнение (8.17):

$$A = D^{-1}e.$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Первозванский А.А., Первозванская Т.Н.* Финансовый рынок: Расчет и Риск. М.: Инфра-М, 1994. § 6.4.
2. *Венецкий И.Г., Венецкая В.И.* Основные математико-статистические понятия и формулы в экономическом анализе. М.: Финансы и статистика, 1979. С. 56—57.
3. *Касимов Ю.Ф.* Основы теории оптимального портфеля ценных бумаг. М.: Филинъ, 1998. Гл. 6, 7.

Глава 9

ПЛАНИРОВАНИЕ ПОГАШЕНИЯ ДОЛГОСРОЧНОЙ ЗАДОЛЖЕННОСТИ

§9.1. Расходы по обслуживанию долга

Можно выделить, по крайней мере, три цели для количественного анализа долгосрочной задолженности (далее для краткости любой вид долгосрочного долга будем называть займом или долгом):

— разработка плана погашения займа, адекватного условиям финансового соглашения;
— оценка стоимости долга с учетом всех поступлений для его погашения и состояния денежного рынка на момент оценивания;
— анализ эффективности (доходности) финансовой операции для кредитора.

Основное внимание в данной главе уделяется первой из поставленных задач. Остальные проблемы, в том числе связанные с облигационными займами, обсуждаются в следующих главах.

Разработка плана погашения займа заключается в составлении графика (расписания) периодических платежей должника. Такие расходы должника обычно называют *расходами по обслуживанию долга (debt service)* или, более кратко, *срочными уплатами, расходами по займу.* Расходы по обслуживанию долга включают как текущие процентные платежи, так и средства, предназначенные для погашения основного долга.

Методы определения размера срочных уплат существенно зависят от условий погашения долга, которые предусматривают: срок займа, продолжительность *льготного периода (grace period)*, уровень и вид процентной ставки, методы уплаты процентов и способы погашения основной суммы долга. В льготном периоде основной долг не погашается, обычно выплачиваются проценты. Впрочем, не исключается возможность присоединения процентов к сумме основного долга.

В долгосрочных займах проценты обычно выплачиваются на протяжении всего срока займа. Значительно реже они начисляются и присоединяются к основной сумме долга. Основная сумма долга иногда погашается одним платежом, чаще она выплачивается частями — в рассрочку.

Каждый из рассмотренных ниже методов планирования погашения долга в той или иной степени, но обязательно использует результаты, полученные выше при анализе финансовых рент.

При определении срочных уплат используем следующие основные обозначения:

D — сумма задолженности;
Y — срочная уплата;
I — проценты по займу;
R — расходы по погашению основного долга;
g — ставка процента по займу;
n — общий срок займа;
L — продолжительность льготного периода.

По определению расходы по обслуживанию долга (срочная уплата) находятся как $Y = I + R$. Если в льготном периоде выплачиваются проценты, то расходы по долгу в этом периоде сокращаются до $Y = I$.

§9.2. Создание погасительного фонда

Если по условиям займа должник обязуется вернуть сумму долга в конце срока в виде разового платежа, то он должен предпринять меры для обеспечения этого. При значительной сумме долга обычная мера заключается в создании *погасительного фонда (sinking fund)*. Необходимость формирования такого фонда иногда оговаривается в договоре выдачи займа в качестве гарантии его погашения. Разумеется, создание фонда необязательно надо связывать с погашением долга. На практике возникает необходимость накопления средств и по другим причинам, например, для накопления амортизационных отчислений на закупку изношенного оборудования и т.п.

Погасительный фонд создается из последовательных взносов должника (например, на специальный счет в банке), на которые начисляются проценты. Таким образом, должник имеет возможность последовательно инвестировать средства для погашения долга. Сумма взносов в фонд вместе с начисленными процентами, накопленная в погасительном фонде к концу срока, должна быть равна его сумме. Взносы могут быть как постоянными, так и переменными во времени.

Постоянные взносы в фонд. Как было сказано выше, задача разработки способа погашения долга, в том числе и в виде плана создания погасительного фонда, заключается в определении размеров срочных уплат и составляющих их элементов в зависимости от конкретных условий займа.

Итак, пусть накопление производится путем регулярных ежегодных взносов R, на которые начисляются сложные проценты по ставке i. Одновременно происходит выплата процентов за долг по ставке g. В этом случае срочная уплата составит

$$Y = Dg + R. \tag{9.1}$$

Обе составляющие срочной уплаты постоянны во времени. Как видим, первая определяется величиной долга и процентной ставкой по займу. Найдем вторую составляющую. Пусть фонд должен быть накоплен за N лет. Тогда соответствующие взносы образуют постоянную ренту с параметрами: R, N, i. Допустим, что речь идет о ренте постнумерандо, тогда

$$R = \frac{D}{s_{N;i}},$$

где $s_{N;i}$ — коэффициент наращения постоянной ренты со сроком N.

В целом срочная уплата находится как:

$$Y = Dg + \frac{D}{s_{N;i}}. \tag{9.2}$$

Если условия контракта предусматривают присоединение процентов к сумме основного долга, то срочная уплата определяется следующим образом:

$$Y = D\frac{(1 + g)^N}{s_{N;i}}. \tag{9.3}$$

ПРИМЕР 9.1. Долг в сумме 100 млн руб. выдан на 5 лет под 20% годовых. Для его погашения создается погасительный фонд. На инвестируемые в нем средства начисляются проценты по ставке

22%. Необходимо найти размеры срочных уплат. Пусть фонд формируется 5 лет, взносы производятся в конце каждого года равными суммами.

Таким образом, имеем $D = 100$, $n = N = 5$, $g = 20\%$, $i = 22\%$. Находим $s_{5;22} = 7{,}7395826$ и, следовательно,

$$Y = 100 \times 0{,}2 + \frac{100}{7{,}7395826} = 20 + 12{,}92059 = 32{,}92687 \text{ млн руб.}$$

Пусть теперь условия контракта предусматривают присоединение процентов к основной сумме долга, тогда согласно (9.3)

$$Y = \frac{100 \times 1{,}2^5}{7{,}735826} = 32{,}16618 \text{ млн руб.}$$

При создании погасительного фонда используются две процентные ставки — i и g. Первая определяет темп роста погасительного фонда, вторая — сумму выплачиваемых за заем процентов. Нетрудно догадаться, что рассматриваемый способ погашения долга — создание фонда — выгодна должнику только тогда, когда $i > g$, так как в этом случае должник на аккумулируемые в погасительном фонде средства получает больше процентов, чем сам выплачивает за заем. Чем больше разность $i - g$, тем, очевидно, больше экономия средств должника, направляемая на покрытие долга. В случае, когда $i = g$, преимущества создания фонда пропадают — финансовые результаты для должника оказываются такими же, как и при погашении долга частями (о чем речь пойдет ниже).

Накопленные за t лет средства фонда определяются по знакомым нам формулам наращенных сумм постоянных рент или рекуррентно:

$$S_{t+1} = S_t(1 + i) + R. \qquad (9.4)$$

ПРИМЕР 9.2. Продолжим пример 9.1 (срочные уплаты включают процентные платежи). Пусть средства в фонд вносятся только последние четыре года, остальные условия сохраняются. Тогда

$$R = \frac{100}{s_{4;22}} = \frac{100}{5{,}52425} = 18{,}102 \text{ млн руб.}$$

План формирования такого фонда (в тыс. руб.) представлен в таблице.

Год	Проценты	Взносы	Расходы по займу	Накопления (на конец срока)[1]
1	10 000	—	10 000	—
2	10 000	18 102	28 102	32 871
3	10 000	18 102	28 102	26 943
4	10 000	18 102	28 102	22 084
5	10 000	18 102	28 102	18 102
				100 000

[1] Сумма взноса с процентами на конец срока.

Формулы (9.2) и (9.3) получены для ежегодных взносов и начислений процентов. Если это не так, то применяются соответствующие методы расчета процентов и сумм взносов в фонд (см. следующий пример).

ПРИМЕР 9.3. Внесем еще одно изменение в условия примера 9.1. Пусть взносы вносятся не ежегодно, а в конце каждого месяца, т.е. $p = 12$. Проценты выплачиваются кредитору ежегодно. Коэффициент наращения в этом случае равен $s^{(12)}_{N;i}$ (см. 5.8). Годовая сумма взносов в фонд составит

$$R = \frac{100}{s^{(12)}_{5;22}} = \frac{100}{8{,}49199} = 11{,}7758 \text{ млн руб.}$$

Изменяющиеся взносы. Равные взносы в фонд — простое, но далеко не единственное решение проблемы накопления необходимой суммы денег. В зависимости от конкретных условий могут оказаться предпочтительными изменяющиеся во времени суммы взносов. В таких случаях следует воспользоваться результатами, полученными для переменных рент (см. гл. 6). Ограничимся примером, когда взносы в фонд следуют арифметической прогрессии. Срочные уплаты в рассматриваемых условиях изменяются во времени:

$$Y_t = Dg + R_t,$$

где $R_t = R + a(t - 1)$, $t = 1,\ldots, N$.

Разность прогрессии равна a, первый член — R. Последняя величина определяется следующим образом:

$$R = \frac{1}{s_{N;i}}\left[D - a\frac{(1 + i)^N - (1 + Ni)}{i^2}\right]. \qquad (9.5)$$

ПРИМЕР 9.4. В фонд погашения долга средства поступают в виде ежегодной ренты постнумерандо в течение 5 лет (срок погашения долга). Платежи каждый раз увеличиваются на 500 тыс. руб. Пусть размер долга на момент его погашения равен 10 млн руб., на взносы начисляются проценты по ставке 10% годовых. Для разработки плана создания фонда определим величину первого взноса. Предварительно находим $s_{5;10} = 6{,}2051$;

$$R = \frac{1}{6{,}1051}\left[10000 - 500\frac{1{,}1^5 - (1 + 5 \times 0{,}1)}{0{,}1^2}\right] = 732{,}91 \text{ тыс. руб.}$$

Откуда

$$R_t = 731{,}91 + 500(t - 1); \quad t = 1, \ldots, 5.$$

Динамика расходов должника при условии, что кредитору выплачивается 9,5%, показана в таблице. В ней, в отличие от таблицы примера 9.2, в последней графе показаны суммарные (кумулятивные) накопления, которые определены по рекуррентной формуле (9.4).

Год	Проценты	Взносы	Расходы по займу	Накопления на конец года
1	950	732,91	1682,91	732,91
2	950	1232,91	2182,91	2039,11
3	950	1732,91	2682,91	3975,93
4	950	2232,91	3182,91	6606,44
5	950	2732,91	3682,91	10000,00

Если взносы в данном примере представляют собой убывающую арифметическую прогрессию, допустим $a = -500$, то первый взнос составит

$$R = \frac{1}{6{,}1051}\left[10000 + 500\frac{1{,}1^5 - (1 + 5 \times 0{,}1)}{0{,}01}\right] = 2543{,}04 \text{ тыс. руб.}$$

§9.3. Погашение долга в рассрочку

В практической финансовой деятельности, особенно при значительных размерах задолженности, долг обычно погашается в рассрочку, частями. Такой метод погашения часто называют *амортизацией долга*. Он осуществляется различными способами:

— погашением *основного долга* равными суммами (равными долями),

— погашением *всей задолженности* равными или переменными суммами по обслуживанию долга.

Погашение основного долга равными суммами. Пусть долг в сумме D погашается в течение n лет. В этом случае сумма, ежегодно идущая на его погашение, составит

$$d = \frac{D}{n}.$$

Размер долга последовательно сокращается: D, $D - d$, $D - 2d$ и т.д. Соответствующим образом уменьшаются и выплачиваемые проценты, так как они начисляются на остаток долга. Пусть для простоты проценты выплачиваются раз в конце года по ставке g. Тогда за первый год и последующие годы они равны Dg, $(D - d)g$, $(D - 2d)g$ и т.д. Процентные платежи, как видим, образуют убывающую арифметическую прогрессию с первым членом Dg и разностью $-dg$.

Срочная уплата в конце первого года находится как

$$Y_1 = Dg + d.$$

Для конца года t находим

$$Y_t = D_{t-1}g + d, \quad t = 1,..., n, \tag{9.6}$$

где D_t — остаток долга на конец года t.

Остаток долга можно определять последовательно:

$$D_t = D_{t-1}\frac{n-1}{n}.$$

Если долг погашается p раз в году постнумерандо и с такой же частотой выплачиваются проценты, каждый раз по ставке g/p, то срочная уплата составит:

$$Y_t = \frac{D_{t-1}g}{p} + \frac{D_0}{pn}, \ t = 1,..., pn. \tag{9.7}$$

Остаток задолженности на конец года t в этом случае составит

$$D_t = D_{t-1}\frac{pn-1}{pn}.$$

ПРИМЕР 9.5. Долг в сумме 1000 тыс. руб. необходимо погасить последовательными равными суммами за 5 лет платежами постнумерандо. За заем выплачиваются проценты по ставке 10% годовых.

Размер погашения основного долга 1000 : 5 = 200 тыс. руб. в год. Ежегодные процентные платежи составят: $1000 \times 0{,}1 = 100$; $(1000 - 200) \times 0{,}1 = 80$ и т.д. План погашения представлен в следующей таблице.

Год	Остаток долга на начало года	Расходы по займу	Погашение долга	Проценты
1	1000	300	200	100
2	800	280	200	80
3	600	260	200	60
4	400	240	200	40
5	200	220	200	20

Как видим, со временем уменьшаются не только суммы расходов по займу, но и соотношения процентов и сумм погашения основного долга.

У рассмотренного метода амортизации задолженности есть одно положительное свойство — простота расчетов. Однако, как мы только что убедились, в начале срока срочные уплаты погашения выше, чем в конце его, что часто является нежелательным для должника.

Погашение долга равными срочными уплатами. В соответствии с этим методом расходы должника по обслуживанию долга постоянны на протяжении всего срока его погашения. Из общей суммы расходов должника часть выделяется на уплату процентов, остаток идет на погашение основного долга. Так же как и при предыдущем методе, величина долга здесь последовательно сокращается, в связи с этим уменьшаются процентные платежи и увеличиваются платежи по погашению основного долга. По определению

$$Y = D_{t-1}g + R_t = \text{const}.$$

План погашения обычно разрабатывается при условии, что задается срок погашения долга. Альтернативным и более редким является установление фиксированной суммы постоянных срочных уплат. Рассмотрим оба случая.

Задан срок погашения. Первый этап разработки плана погашения — определение размера срочной уплаты. Далее полученная величина разбивается на процентные платежи и сумму, идущую на погашение долга. После чего легко найти остаток задолженности.

Периодическая выплата постоянной суммы Y равнозначна ренте с заданными параметрами. Приравняв сумму долга к современной величине этой ренты, находим

$$Y = \frac{D}{a_{n;g}}, \tag{9.8}$$

где $a_{n;g}$ — коэффициент приведения годовой ренты со ставкой g и сроком n.

Все величины, необходимые для разработки плана, можно рассчитать на основе величины Y и данных финансового контракта. Найдем сумму первого погасительного платежа. По определению

$$d_1 = Y - Dg.$$

Суммы, идущие на погашение долга, увеличиваются во времени:

$$d_t = d_{t-1}(1 + g), \tag{9.9}$$

В связи с этим рассматриваемый метод погашения называют *прогрессивным*. Платежи по погашению долга образуют ряд d_1, $d_1(1 + g)$, ..., $d_1(1 + g)^{n-1}$.

По этим данным легко определить сумму погашенной задолженности на конец года t после очередной выплаты:

$$W_t = \sum_{k=0}^{t-1} d_1(1+g)^k = d_1 s_{t;g}, \tag{9.10}$$

где $s_{t;g}$ — коэффициент наращения постоянной ренты постнумерандо.

ПРИМЕР 9.6. Условия погашения займа те же, что и в примере 9.5. Однако погашение производится равными срочными уплатами, т.е. рентой постнумерандо с параметрами: Y (неизвестная величина), $n = 5$, $g = 10\%$.

Находим: $a_{5;10} = 3{,}790787$. После чего

$$Y = \frac{1000}{3{,}79079} = 263{,}797 \text{ тыс. руб.}$$

Далее определим

$$d_1 = 263{,}797 - 1000 \times 0{,}1 = 163{,}797 \text{ тыс. руб.}$$

и остаток долга после первого погашения

$$D_1 = 1000 - 163{,}797 = 836{,}203 \text{ тыс. руб.}$$

План погашения долга представлен в таблице.

Год	Остаток долга на начало года	Расходы по займу	Проценты	Погашение долга
1	1000,000	263,797	100,000	163,797
2	836,203	263,797	83,620	80,177
3	656,026	263,797	65,603	198,195
4	457,831	263,797	45,783	218,014
5	239,816	263,797	23,982	239,816

Процентные платежи уменьшаются во времени, а суммы погашения основного долга систематически увеличиваются.

Продолжим пример. Допустим, необходимо найти сумму погашенного долга на конец третьего года погашения при условии, что план погашения не разработан. Для решения воспользуемся формулой (9.10). Находим $s_{3;10} = 3{,}31$, сумма первого платежа определена выше — $d_1 = 163{,}794$, таким образом,

$$W_3 = 163{,}794 \times 3{,}31 = 542{,}169 \text{ тыс. руб.}$$

Аналогичным образом разрабатываются планы погашения и для случаев, когда выплата процентов и погашение основного долга производятся не один, а несколько раз в году.

Заданы расходы по обслуживанию долга. Такая постановка задачи может возникнуть при разработке условий контракта. Ее решение, очевидно, заключается в определении срока погашения долга и достижении полной сбалансированности платежей.

Срок погашения находится как срок постоянной ренты. Эта проблема подробно обсуждалась в § 5.4 (см. формулы (5.28)—(5.37)), поэтому не будем останавливаться на ней. Ограничимся лишь одной иллюстрацией. Пусть выплаты производятся раз в году постнумерандо, тогда применим (5.29), где символ R заменен на Y, а i — на g:

$$n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{D}{Y} g\right)}{\ln(1 + g)}. \qquad (9.11)$$

Очевидно, что решение существует тогда, когда $Dg/Y < 1$. Расчетное значение n в общем случае оказывается дробным.

ПРИМЕР 9.7. Долг равен 1000 тыс. руб. и выдан под 10% годовых. Для его погашения предполагается выделять сумму порядка 200 тыс. руб. в год. Оценим величину срока, необходимого для погашения задолженности;

$$n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{1000}{200} 0,1\right)}{\ln 1,1} = 7,27 \text{ года.}$$

Округлим расчетный срок до 7 лет. Для того чтобы полностью рассчитаться, необходимо несколько повысить срочные уплаты, а именно:

$$Y = \frac{1000}{a_{7;10}} = \frac{1000}{4,868418} = 205,405 \text{ тыс. руб.}$$

Альтернативой является адекватная компенсация недостающего покрытия долга при выплате ренты с членом 200 тыс. руб. и сроком 7 лет.

Переменные расходы по займу. Далеко не всегда оказывается удобным условие $Y = \text{const}$. Например, погашение долга может быть связано с поступлением средств из каких-либо источников и зависеть от ряда обстоятельств. Срочные уплаты в этом случае образуют ряд, члены которого либо задаются заранее (график погашения), либо следуют какому-либо формальному закону (прогрессии, заданной функции). Остановимся только на одном варианте — изменении расходов по геометрической прогрессии.

Итак, пусть ряд срочных уплат представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем q, тогда этот ряд можно записать в виде членов переменной ренты Y, Yq, Yq^2, ..., Yq^{n-1}. Приравняв современную стоимость этой ренты сумме первоначального долга, находим;

$$Y = D\frac{q - (1 + g)}{\left(\frac{q}{1 + g}\right)^n - 1}, \qquad (9.12)$$

где q — заданный годовой темп роста платежей, g — процентная ставка по займу.

Далее находятся срочные уплаты и разрабатывается детальный план погашения.

ПРИМЕР 9.8. Пусть расходы по займу (сумма долга — 1000 тыс. руб.) уменьшаются каждый год на 10%; общий срок погашения 5 лет, ставка процента по долгу — 6% годовых. По условиям задачи: $D_0 = 1000$, $n = 5$, $g = 0{,}06$, $q = 0{,}9$. Согласно (9.12) первая срочная уплата составит:

$$Y_1 = 1000\frac{0{,}9 - 1{,}06}{\left(\frac{0{,}9}{1{,}06}\right)^5 - 1} = 286{,}353 \text{ тыс. руб.}$$

Процентные платежи в первом периоде $1000 \times 0{,}06 = 60$ тыс. руб., соответственно, сумма погашения долга равна $286{,}353 - 60 = 226{,}353$ тыс. руб., остаток задолженности на начало второго года $1000 - 226{,}353 = 773{,}647$ тыс. руб. Срочные уплаты находятся как $Y_t \times 0{,}9^{t-1}$. План погашения долга представлен в таблице.

Год	Остаток долга на начало года	Расходы по займу	Проценты	Погашение долга
1	1000,000	286,353	60,000	226,353
2	773,647	257,717	46,419	211,298
3	562,349	231,946	33,741	198,205
4	364,144	208,751	21,849	186,902
5	177,241	187,875	10,634	177,241

В ряде случаев размеры срочной уплаты связываются с ожидаемыми поступлениями средств и задаются заранее в виде графика погашения. Размер последней срочной уплаты не задается. Она определяется как сумма остатка долга на начало последнего периода.

ПРИМЕР 9.9. Долг в размере 100 000 руб. решено погасить по специальному графику за четыре года — суммы расходов по погашению долга по годам: 40, 20 и 30 тыс. руб. Остаток выплачивается в конце четвертого года.

План погашения имеет следующий вид при условии, что ставка процента по долгу установлена на уровне 10% (см. таблицу).

Год	Остаток долга на начало года	Расходы по займу	Проценты	Погашение долга
1	100 000	40 000	10 000	30 000
2	70 000	20 000	7000	13 000
3	57 000	30 000	5700	24 300
4	32 700	35 970	3270	32 700

§9.4. Льготные займы и кредиты

Грант-элемент. Предмет обсуждения в данном параграфе также связан с долгосрочными займами. Однако здесь они рассматриваются под другим углом зрения. Дело в том, что в ряде случаев долгосрочные займы и кредиты выдаются по тем или иным причинам (иногда политическим) под льготные для заемщика условия. Низкая (относительно ставки на рынке кредитов) процентная ставка в сочетании с большим его сроком и льготным периодом дают должнику существенную выгоду, которую можно рассматривать как субсидию. Кредитор в этих условиях несет некоторые потери, так как он *мог бы* инвестировать деньги на более выгодных условиях.

Проблема определения размера такого рода помощи обсуждалась в международных организациях и экономической литературе главным образом с позиции межстрановых сопоставлений — для сравнения размеров финансовой помощи, оказываемой ряду развивающихся стран. Однако проблема оценки последствий выдачи льготных займов имеет более общее значение, так как льготные займы предоставляют и внутри страны.

Грант-элемент (grant-element) — это условная потеря заимодавца, которая связана с применением более низкой процентной ставки, чем существующие ставки кредитного рынка. Грант-элемент определяется в двух видах: в виде абсолютной и относительной величин.

Абсолютный грант-элемент рассчитывается как разность номинальной суммы займа и современной величины платежей по погашению займов, рассчитанной по рыночной ставке. Проблема, как видим, сводится к выбору надлежащей ставки процента для расчета современной величины. Рекомендации по выбору конкретного значения этой ставки весьма расплывчаты. Обычно используют превалирующую на рынке долгосрочных кредитов ставку.

Размер абсолютного грант-элемента находим следующим образом:

$$W = D - G, \qquad (9.13)$$

где W — абсолютный грант-элемент, D — сумма займа, G — современная величина платежей, поступающих в счет погашения займа, рассчитанная по реальной ставке кредитного рынка.

Относительный грант-элемент характеризует отношение абсолютного грант-элемента к сумме займа:

$$w = \frac{W}{D} = 1 - \frac{G}{D}, \tag{9.14}$$

w — относительный грант-элемент.

Как видим, все переменные приведенных формул определяются условиями выдачи и погашения займа.

Выведем рабочие формулы для расчета W и w при условии, что долг и проценты выплачиваются в виде постоянных срочных уплат. Для анализа последствий выдачи льготных займов этого достаточно.

Пусть заем выдан на n лет и предусматривает выплату процентов по льготной ставке g. На денежном рынке аналогичные по сроку и величине займы выдаются по ставке i. В этом случае при отсутствии льготного периода срочная уплата составит:

$$Y = \frac{D}{a_{n;g}}, \tag{9.15}$$

а современная величина всех выплат должника очевидно равна $Ya_{n;i}$. В итоге

$$W = D - Ya_{n;i} = D\left(1 - \frac{a_{n;i}}{a_{n;g}}\right), \tag{9.16}$$

$$w = 1 - \frac{a_{n;i}}{a_{n;g}}, \tag{9.17}$$

где $a_{n;i}$, $a_{n;g}$ — коэффициенты приведения постоянных годовых рент постнумерандо, определенные для процентных ставок i и g, $i > g$.

ПРИМЕР 9.10. Льготный заем выдан на 10 лет под 3,8%. Предусматривается погашение долга равными срочными уплатами. Известно, что обычная рыночная ставка для такого срока займа равна 8%. В этом случае

$$w = 1 - \frac{a_{10;8}}{a_{10;3,8}} = 1 - 6{,}71008 \times \frac{0{,}038}{1 - 1{,}038^{-10}} = 0{,}1809.$$

Допустим, исходная сумма займа равна 10 млн руб. Тогда абсолютный грант-элемент или условная сумма потерь для кредитора и, соответственно, выгода для должника, составят

$$W = 10 \times 0{,}1809 = 1{,}809 \text{ млн руб.}$$

Наличие льготного периода увеличивает грант-элемент. Если в льготном периоде должник выплачивает проценты, то современная величина поступлений по долгу определяется как сумма двух элементов — современных величин процентных платежей в льготном периоде и срочных уплат в оставшееся время. Таким образом,

$$G = Dg \times a_{L;i} + Y \times a_{n-L;i} \times v^{L}, \qquad (9.18)$$

где $n - L$ — продолжительность периода погашения задолженности; L — продолжительность льготного периода.

После ряда преобразований (9.14) получим[1]

$$w = 1 - \frac{G}{D} = 1 - \left(\frac{a_{n-L;i}}{a_{n-L;g}} v^{L} + g \times a_{L;i}\right). \qquad (9.19)$$

Здесь $a_{n-L;i}$, $a_{n-L;g}$ — коэффициенты приведения постоянных рент со сроком $n - L$ и ставками i и g; v^{L} — дисконтный множитель по ставке i.

Обсудим еще один возможный вариант. Пусть в льготном периоде проценты начисляются, но не выплачиваются. Они присоединяются к основному долгу, который погашается в течение $n - L$ лет. Условия такого займа более льготны для должника, чем при последовательной выплате процентов.

Срочные уплаты и их современная величина в данном случае равны:

$$Y = \frac{D(1+g)^{L}}{a_{n-L;g}}, \qquad G = Y \times a_{n-L;i}.$$

На основе этих выражений получим

$$w = 1 - \frac{G}{D} = 1 - \frac{a_{n-L;i}}{a_{n-L;g}} \times \left(\frac{1+g}{1+i}\right)^{L}.$$

[1] См. Математическое приложение к главе.

ПРИМЕР 9.11. Пусть заем в примере 9.10 предусматривает трехлетний льготный период, в течение которого выплачиваются проценты. Для расчета относительного грант-элемента находим: $a_{7;8}$ = 5,20637, $a_{7;3,8}$ = 6,04667, $a_{3;8}$ = 2,5771, $v^3 = 1{,}08^{-3} =$ = 0,79383;

$$w = 1 - \left(\frac{5{,}20637}{6{,}04667}0{,}79383 + 0{,}038 \times 2{,}5771\right) = 0{,}2185.$$

Если проценты в льготном периоде не выплачиваются, а присоединяются к основной сумме долга, то

$$w = 1 - \frac{5{,}20637}{6{,}04667}\left(\frac{1{,}038}{1{,}08}\right)^3 = 0{,}2356.$$

Грант-элемент, как было продемонстрировано выше, — условная обобщающая характеристика льготности займа (потерь заимодавца и выигрыша должника). Сумма, которая равна грант-элементу, существенно зависит от принятой при ее определении процентной ставки. График зависимости относительных потерь от соотношения процентных ставок показан на рис. 9.1 для сроков займа 5 и 10 лет без льготного периода, $g = 5\%$.

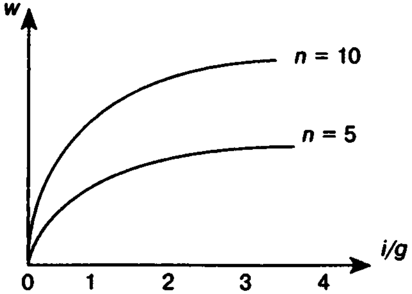

Рис. 9.1

Предельным случаем льготного займа является *беспроцентный заем*. Выдача такого займа связана с потерями, которые определим, полагая, что соответствующие средства *можно было бы* разместить под проценты по рыночной ставке i. Например, уже при пятнадцатилетнем сроке беспроцентного займа и рыночной ставке 10% кредитор теряет почти 50% от суммы долга.

§9.5. Реструктурирование займа

Под *реструктурированием займа* (*restructuring loan*) понимают пересмотр условий действующего обязательства по погашению задолженности в связи с резким ухудшением финансового положения должника — для кредитора, очевидно, лучше потерять кое-что, чем все.

При реструктурировании применяются разные приемы, основными из которых являются:

— прямое сокращение суммы долга,
— уменьшение размера процентной ставки,
— пересмотр сроков и порядка выплат процентов и сумм погашения основного долга.

На практике одновременно применяют несколько из указанных способов. Например, известны случаи, когда к одной части обязательства применяли сокращение суммы основного долга, к другой — снижение процентной ставки, снижение процентной ставки иногда сопровождается увеличением льготного периода и т.п.

В России регламентированы способы реструктурирования задолженности в бюджетную систему и в государственные внебюджетные фонды. В частности, предусматриваются нормативы для срока погашения в зависимости от отношения размера долга к общей стоимости имущества должника. Так, если долг не превышает 10% стоимости, то предусматривается минимальный срок, если долг составляет 45—50%, то производится рассрочка погашения до 10 лет.

Какой бы способ реструктурирования ни был принят, обычным ее следствием является уменьшение современной стоимости выплат и снижение процентной ставки за задолженность. В силу того, что при реструктурировании изменяются многие условия погашения задолженности, точные финансовые последствия этих изменений неочевидны. Поэтому выбор варианта реструктурирования и оценка финансовых последствий заключаются в сравнении соответствующих расчетных параметров. Для получения последних необходимо сформировать варианты потоков платежей от должника. Далее на основе принятой для дисконтирования процентной ставки (превалирующая для данного срока кредита рыночная ставка) рассчитать современную стоимость поступлений.

Что касается фактической доходности для кредитора новых условий займа, то здесь ограничимся лишь очевидным замечанием, что она будет ниже, чем до реструктурирования. Методика расчета размера процентной ставки на основе показателей потока платежей обсуждалась в гл. 5.

ПРИМЕР 9.12. Реструктурируется долг в сумме 1000 ден. ед., срок 5 лет, без льготного периода, погашение задолженности по методу постоянных срочных уплат, выплаты постнумерандо, проценты за кредит по ставке 12% годовых. Обсуждается два варианта:

— увеличение срока до 8 лет, снижение платы за кредит до 11,5%;
— увеличение срока до 10 лет, введение льготного периода 3 года, снижение платы за кредит до 11,75%.

При сравнении вариантов реструктуризации следует учесть, что на денежном рынке кредиты на аналогичные сроки и с близкой степенью надежности открывают по 12%. Предпочтительным для должника, естественно, является вариант с наименьшей современной стоимостью выплат. Для первого варианта находим:

$$Y_1 = \frac{D}{a_{8;12}};\ A_1 = Y_1 \times a_{8;11;5} = \frac{1000}{5{,}055637} \times 4{,}96764 = 982{,}6.$$

Для второго варианта получим (см. (9.15)):

$$Y_2 = \frac{D}{a_{10-3;11,75}};$$

$$A_2 = Dg_2 \times a_{3;12} + Y_2 \times a_{10-3;12} \times v^3 = 1000 \times 0{,}1175 \times 2{,}401831 +$$

$$+ \frac{1000}{4{,}600164} \times 4{,}563756 \times 1{,}12^{-3} = 988{,}4;$$

$$A_1 < A_2 < 1000.$$

§9.6. Ипотечные ссуды

Ссуды под залог недвижимости или *ипотеки* (*mortgage*) получили широкое распространение в странах с развитой рыночной экономикой как один из важных источников долгосрочного финансирования. В такой сделке владелец имущества (*mortgagor*) получает ссуду у залогодержателя (*mortgagee*) и в качестве обеспечения возврата долга передает последнему право на преимущественное удовлетворение своего требования из стоимости заложенного имущества в случае отказа от погашения или неполного погашения задолженности. Сумма ссуды обычно несколько меньше оценочной стоимости закладываемого имущества. Наиболее распространенными объектами залога являются жилые дома, фермы, земля, другие виды недвижимости. Характерной особенностью ипотечных ссуд является длительный срок погашения.

Ипотечные ссуды выдаются коммерческими и специальными ипотечными банками (например, земельными), различными ссудно-сберегательными ассоциациями. Ипотечный кредит для приобретения жилья начали практиковать и в России. Первой в этом отношении стала Москва. В 1999 г. этот вид кредита стали открывать четыре кредитные организации. По условиям Инвестсбербанка и Собинбанка заемщик оплачивает 30% стоимости квартиры, а на остальную сумму получает кредит на 10 лет по ставке 10% в валюте.

Существует несколько видов ипотечных ссуд, различающихся в основном методами погашения задолженности. Большинство видов являются вариантами *стандартной* или *типовой* ипотечной ссуды. Суть ее сводится к следующему. Заемщик получает от залогодержателя (кредитора) некоторую сумму под залог недвижимости (например, при покупке или строительстве дома). Далее он погашает долг вместе с процентами равными, обычно ежемесячными, взносами.

Модификации стандартной схемы ипотеки нацелены на повышении ее гибкости в учете потребностей как должника, так и кредитора. Так, некоторые из них имеет целью снизить расходы должника на начальных этапах погашения долга, перенося основную их тяжесть на более поздние этапы. Такие ипотеки привлекают тех клиентов, которые ожидают рост своих доходов в будущем, например, начинающих предпринимателей и фермеров. Привлекательна такая ипотека и для молодых семей при строительстве или покупке жилья. В других схемах тем или иным путем в большей мере учитывается процентный риск. Кратко охарактеризуем некоторые схемы ипотек.

Ссуды с ростом платежей (*graduated mortgage*, GPM). Данный вид ссуды предусматривает постоянный рост расходов по обслуживанию долга в первые годы. В оставшееся время погашение производится постоянными взносами. Вариантом такой ипотеки является ссуда, погашение которой происходит по согласованному графику: каждые 3—5 лет увеличивается сумма взносов.

Ссуда с льготным периодом. В условиях ипотеки предполагается наличие льготного периода, в течение которого выплачиваются только проценты по долгу. Такая схема в наибольшей мере сдвигает во времени финансовую нагрузку должника.

В последние два десятилетия в практику вошли и более сложные схемы погашения долга по ипотеке, преследующие в конечном счете те же цели — быть более гибкими и удобными для клиентов.

Как уже отмечалось, ипотечные ссуды выдаются на длительные сроки. Даже в стабильной экономике это связано с определенным риском, в частности, риском изменения процентной ставки на рынке кредитов. Некоторую страховку от такого риска обеспечивают условия ссуд, относящиеся к уровню процентной ставки. К таким ипотекам относятся следующие.

Ссуды с периодическим изменением процентной ставки (*rollover mortgage,* RM). Схема этой ссуды предполагает, что стороны каждые 3—5 лет пересматривают уровень процентной ставки. Таким образом, происходит периодически возобновляемое среднесрочное кредитование при долгосрочном погашении всей задолженности. Этим самым создается возможность для некоторой, конечно неполной, адаптации к изменяющимся условиям рынка.

Ипотека с переменной процентной ставкой (*variable-rate mortgage,* VRM). Уровень ставки здесь "привязывается" к какому-либо распространенному финансовому показателю или индексу. Пересмотр ставки обычно осуществляется по полугодиям. Чтобы изменения ставок не были очень резкими, предусматриваются верхняя и нижняя границы разовых коррективов (например, не более 2%).

Основной задачей при анализе ипотек является разработка планов погашения долга. Важно также уметь определить сумму остатка задолженности на любой момент процесса погашения. Ниже обсуждаются методы решения этих проблем для трех ипотечных схем.

§9.7. Расчеты по ипотечным ссудам

Наиболее распространенной является ипотечная ссуда, условия которой предполагают равные взносы должника, взносы ежемесячные постнумерандо или пренумерандо. В договоре обычно устанавливается ежемесячная ставка процента, реже годовая номинальная.

В осуществлении ипотеки при покупке (строительстве) объекта залога участвует три агента: продавец, покупатель (должник), заимодавец (кредитор). Взаимосвязи между ними показаны на блок-схеме (см. рис. 9.2).

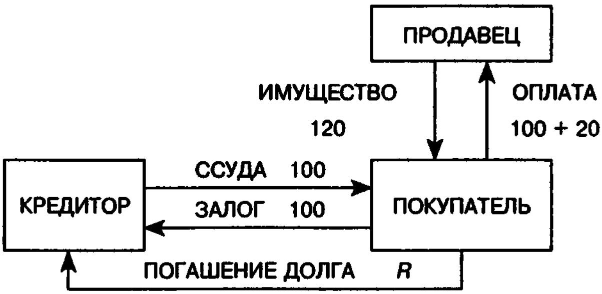

Рис. 9.2

Продавец получает от покупателя за некоторое имущество полную его стоимость (120). Для этого покупатель получает ссуду под залог этого имущества (100) и добавляет собственные средства (20). Задача заключается в определении размера ежемесячных погасительных платежей R и остатка задолженности на момент очередного ее погашения вплоть до полной оплаты долга.

Поскольку погасительные платежи (взносы) представляют собой постоянную ренту, при решении поставленной задачи применим тот же принцип, что и при разработке плана погашения долгосрочного долга равными срочными уплатами. Для этого приравняем современную величину срочных уплат сумме ссуды. Для месячных взносов постнумерандо находим:

$$D = Ra_{N;i},$$

где D — сумма ссуды; N — общее число платежей, $N = 12n$ (n — срок погашения в годах); i — месячная ставка процента; R — месячная сумма взносов; $a_{N;i}$ — коэффициент приведения постоянной ренты.

Искомая величина взноса составит

$$R = \frac{D}{a_{N;i}} = Dc. \tag{9.20}$$

В рамках решаемой проблемы величину $c = 1/a_{N;i}$ можно назвать *коэффициентом рассрочки*. Для рент пренумерандо получим

$$R = \frac{D}{a_{N;i}}(1 + i). \tag{9.21}$$

Найденная по формуле (9.20) или (9.21) величина срочной уплаты является базой для разработки плана погашения долга. Согласно общепринятому правилу из этой суммы прежде всего выплачиваются проценты, а остаток идет на погашение долга.

ПРИМЕР 9.13. Под залог недвижимости выдана на 10 лет ссуда в размере 100 млн руб. Погашение ежемесячное постнумерандо, на долг начисляются проценты по номинальной годовой ставке 12%. Таким образом, $N = 120$, $i = 0{,}01$; находим: $a_{120;1} = 69{,}70052$. Для этих условий ежемесячные расходы должника равны

$$R = \frac{100\,000}{69{,}70052} = 1434{,}709 \text{ тыс. руб.}$$

Проценты за первый месяц равны $100\,000 \times 0{,}01 = 1000$ тыс. руб., на погашение долга остается. $1434{,}71 - 1000 = 434{,}71$ тыс. руб. План погашения долга представлен в таблице.

Месяц	Остаток долга на начало месяца	Взнос	Проценты	Погашение долга
1	100000,00	1434,71	1000,00	434,71
2	99565,29	1434,71	995,65	439,06
3	99126,23	1434,71	991,26	443,45
...				
37	81274,07	1434,71	812,74	621,97
38	80652,10	1434,71	806,52	628,19
39	80017,63	1434,71	800,24	634,47
...				
118	4219,35	1434,71	42,20	1392,5
119	2826,94	1434,71	28,27	1406,44
120	1420,50	1434,71	14,21	1420,50

Как показано в таблице, в первом месяце расходы на выплату процентов и погашение основного долга соотносятся как 1000:434,71; в последнем месяце — уже как 14,21:1420,5.

Перейдем к другой проблеме. При выдаче ссуды под залог для обеих сторон важно знать сумму погашенного долга и его остаток на любой промежуточный момент (необходимость в этом возникает, например, при прекращении договора или его пересмотре). С этой проблемой мы уже встречались выше при обсуждении метода погашения долга равными срочными уплатами. Применительно к условиям стандартной ипотеки находим следующие соотношения:

$$d_t = d_{t-1}(1 + i) = d_1(1 + i)^{t-1},$$

где d_t — сумма погашения долга, t — порядковый номер месяца, i — месячная ставка процента.

Остаток долга на начало месяца

$$D_{t+1} = D_t - d_t,\ t = 1, ..., 12n.$$

Последовательные суммы погашения долга представляют собой геометрическую прогрессию с первым членом d_1 и знаменателем $(1+i)$, причем

$$d_1 = R - Di. \qquad (9.22)$$

Сумму членов этой прогрессии от начала погашения до t включительно найдем следующим образом:

$$W_t = d_1 s_{t;i}, \qquad (9.23)$$

где $s_{t;i}$ — коэффициент наращения постоянной ренты постнумерандо.

Остаток долга на начало месяца находим как разность

$$D_{t+1} = D_1 - W_t. \qquad (9.24)$$

ПРИМЕР 9.14. По условиям ипотечного займа примера 9.13 найдем остаток долга на начало, скажем, 118-го месяца:

$$D_{118} = D_1 - W_{117};\ W_{117} = d_1 s_{117} = 434{,}71 \times 220{,}3329 = 95780{,}65,$$

откуда

$$D_{118} = 100\,000 - 95780{,}65 = 4219{,}35 \text{ тыс. руб.}$$

Стандартная ипотека с неполным погашением задолженности и выплатой в конце срока остатка долга (*balloon mortgage*). Условия такой ипотеки позволяют уменьшить размеры периодических взносов и (или) сократить срок ссуды. Срочные уплаты рассчитываются таким образом, что они не покрывают всей задолженности, остаток (*balloon)*, обозначим его как B, выплачивается в конце срока. Уравнение, балансирующее условия ипотеки, имеет вид

$$D = Ra_{N;i} + Bv^N.$$

Баланс достигается одним из следующих способов:

а) задается размер срочных уплат, определяется величина B:

$$B = (1 + i)^N (D - Ra_{N;i});$$

б) задается B, определяется размер срочных уплат:

$$R = \frac{D_1 - Bv^N}{a_{N;i}}.$$

Далее расчет ведется по уже рассмотренной схеме.

Ссуда с периодическим увеличением взносов. В этом варианте ипотеки задается последовательность размеров взносов. Пусть увеличение взносов происходит через равные интервалы времени m. В пределах каждого интервала взносы постоянны. Очевидно, что для полной сбалансированности схемы размер последнего взноса не задается, он определяется по сумме остатка задолженности.

Пусть $R_1,\dots,\ R_k$ — размеры взносов. Определим размер последнего взноса. Для этого найдем на начало операции сумму современных стоимостей взносов от первого до $k - 1$. Обозначим ее как Q:

$$Q = \sum_{1}^{k-1} R_t a_{m;i} v^{(t-1)m}.$$

Современная стоимость непокрытой взносами задолженности на начало последнего периода

$$W = D - Q,$$

откуда размер взносов в последнем периоде ипотеки

$$R_k = \frac{W}{a_{m;i}\, v^{(k-1)m}}.$$

Математическое приложение к главе

Доказательство формулы (9.19)

Исходное равенство

$$w = 1 - \frac{G}{D}.$$

Современная стоимость поступлений по рыночной ставке i равна

$$G = Dg \times a_{L;i} + Ya_{n-L;i}\, v^L.$$

По определению

$$Y = \frac{D}{a_{n-L;g}},$$

откуда

$$\frac{G}{D} = ga_{L;i} + \frac{1}{a_{n-L;g}} a_{n-L;i}\, v^L.$$

Таким образом,

$$w = 1 - \left(\frac{a_{n-L;i}}{a_{n-L;g}} v^L + g \times a_{L;i} \right).$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Четыркин Е.М. Методы финансовых и коммерческих расчетов. М.: Дело, 1995. Гл. 7,8.

Глава 10
ИЗМЕРЕНИЕ ДОХОДНОСТИ

§10.1. Полная доходность

Доходы от финансово-кредитных операций и различных коммерческих сделок имеют различную форму: проценты от выдачи ссуд, комиссионные, дисконт при учете векселей, доходы от облигаций и других ценных бумаг и т.д. Само понятие "доход" определяется конкретным содержанием операции. Причем в одной операции часто предусматривается два, а то и три источника дохода. Например, ссуда приносит кредитору проценты и комиссионные, владелец облигации помимо процентов (поступлений по купонам) получает разницу между выкупной ценой облигации и ценой ее приобретения. В связи со сказанным возникает проблема измерения доходности операции с учетом всех источников поступлений. Обобщенная характеристика доходности должна быть сопоставимой и применима к любым видам операций и ценных бумаг. Обычно степень финансовой эффективности (доходности) этих операций измеряется в виде годовой ставки процентов — чаще сложных, реже простых. Искомые показатели получают исходя из общего принципа — *все вложения и доходы с учетом конкретного их вида условно приравниваются эквивалентной (равнодоходной) ссудной операции.*

Решение проблемы измерения и сравнения степени доходности финансово-кредитных операций заключается в разработке методик расчета условной годовой ставки для каждого вида операций с учетом особенностей соответствующих контрактов и условий их выполнения. Такие операции различаются между собой во многих отношениях. Эти различия на первый взгляд могут и не представляться существенными, однако практически все условия операции в большей или меньшей мере влияют на конечные результаты — финансовую эффективность.

Расчетная процентная ставка, о которой идет речь, получила различные названия. В простых депозитных и ссудных операциях она называется *эффективной*, в расчетах по оценке облигаций ее часто называют *полной доходностью*, или *доходностью на момент погашения, доходностью к погашению* (*yield to maturity*). В анализе производственных инвестиций для аналогичного по содержанию показателя применяется термин *внутренняя норма доходности*, или *внутренняя норма процента* (*internal rate of return*, IRR). Этот термин в настоящее время широко распространен за рубежом и вне рамок производственных инвестиций — его часто применяют в коммерческой и банковской практике. Свое название данный показатель, по-видимому, получил в связи с тем, что он адекватен всем условиям инвестиционного проекта в совокупности и непосредственно не фигурирует в контрактах. На наш взгляд, этот термин не вписывается в принятую у нас терминологию. Поэтому в дальнейшем во всех случаях, кроме анализа производственных инвестиций, будем называть соответствующую годовую ставку *полной доходностью* (ПД).

Итак, под ПД понимают ту расчетную ставку процента, при которой капитализация всех видов доходов от операции равна сумме инвестиций и, следовательно, капиталовложения окупаются, иначе говоря, начисление процентов на вложения по ставке, равной ПД, обеспечит выплату всех предусмотренных платежей. Применительно к облигации это означает равенство цены приобретения облигации сумме дисконтированных по ПД купонных платежей и выкупной цены; для ссудной операции — равенство действительной суммы кредита (т.е. кредит за вычетом комиссионных) сумме дисконтированных поступлений (процентов и погашений долга). Чем выше ПД, тем больше эффективность операции. При неблагоприятных условиях ПД может быть нулевой или даже отрицательной величиной. Показатель ПД является не только измерителем доходности операции для кредитора, но и характеризует цену кредита для должника. Следует отметить, что при получении кредита должник может нести какие-либо дополнительные разовые расходы, которые увеличат цену кредита, но оставят без изменения доходность кредитной операции для владельца денег.

Основное внимание в главе уделено проблеме оценки ПД для конкретных видов финансовых операций и анализу факторов, влияющих на этот показатель. Кроме того, здесь обсуждаются методы сравнения контрактов, предусматривающих кредитование.

В западной финансовой литературе предполагается множество формул для расчета показателей ПД, причем исходные посылки для их построения обычно даже не обсуждаются. Можно показать, что все подобного рода формулы базируются на равенстве, которое назовем *балансом финансовой операции* или *уравнением эквивалентности*. С уравнением эквивалентности мы уже встречались в гл. 4 (см. § 4.3). Обсуждение методов оценки показателей доходности для разных видов ссудно-кредитных операций начнем с рассмотрения этого уравнения.

§10.2. Уравнение эквивалентности

Необходимым условием финансовой или кредитной операции в любом ее виде (ссуда, депозит, заем, инвестиции в производственный проект и т.д.) является сбалансированность вложений и отдачи. На этом требовании базируются все рассмотренные выше методы планирования погашения задолженности. Посмотрим теперь на проблему сбалансированности с более общей, теоретической точки зрения, не отвлекаясь на технические детали расчета сумм обслуживания долга и ее компонент.

Для этого вернемся к графику, который был назван в гл. 2 контуром операции. Напомним, что контур позволяет составить уравнение эквивалентности, балансирующее вложение средств и отдачу от них. Для случая, показанного на рис. 10.1, получим следующие размеры задолженности после уплаты R_1 и R_2:

$$D_1 = D_0 q^{t_1} - R_1; \quad D_2 = D_1 q^{t_2} - R_2,$$

где D_0 — размер кредита, $q^t = (1 + i)^t$ — множитель наращения, i — ставка процентов по кредиту.

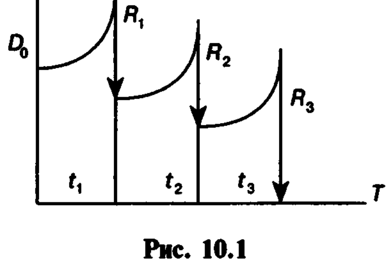

Рис. 10.1

Очевидно, что баланс кредита и погасительных платежей имеет место в том случае, когда последний платеж замыкает контур. В нашем примере полная сбалансированность означает

$$D_2 q^{t_3} - R_3 = 0.$$

Определим D_2 через D_0 и подставим полученный результат в уравнение эквивалентности:

$$\left[\left(D_0 q^{t_1} - R_1\right) q^{t_2} - R_2\right] q^{t_3} - R_3 = 0.$$

Уравнение становится весьма громоздким, если число временных интервалов больше трех. Поэтому преобразуем найденное выражение, после чего

$$D_0 q^T - \left(R_1 q^{t_2+t_3} + R_2 q^{t_3} + R_3\right) = 0, \tag{10.1}$$

где $T = \sum t_j$.

Найденное уравнение для нас ценно прежде всего в методологическом плане. Здесь ясно показано, что кредитная операция при применении сложных процентов может быть расчленена без какой-либо потери точности на два как бы встречных процесса: наращение первоначальной задолженности за весь период и наращение погасительных платежей за срок от момента платежа и до конца срока операции. Назовем такой подход методом "встречных операций". В ряде случаев он существенно упрощает доказательства, и в дальнейшем мы неоднократно будем его применять.

Умножим (10.1) на дисконтный множитель v^T, получим

$$D_0 - \left(R_1 v^{t_1} + R_2 v^{t_1+t_2} + R_3 v^T\right) = 0.$$

Иначе говоря, сумма современных величин погасительных платежей на момент выдачи кредита равна при полной сбалансированности платежей сумме этого кредита. Это положение уже применялось нами, правда, на интуитивном уровне, при планировании погашения задолженности.

Обобщим (10.1) для случая с n погасительными платежами

$$D_0 q^T - \sum R_j q^{T_j} = 0, \; j = 1,2, ..., n,$$

где T_j — время от момента платежа R_j до конца срока.

При написании уравнения эквивалентности предполагалось, что процентная ставка постоянна на всем протяжении операции. Принципиально ничего не меняется, если значение ставки изменяется во времени. Допустим, что изменение происходит на каждом шаге. Тогда можно записать

$$D_0 q_1^{t_1} q_2^{t_2} \ldots q_n^{t_n} - \left(R_1 q_1^{T_1} + R_2 q_2^{T_2} + \ldots + R_n q_2^{T_n}\right) = 0,$$

где $T_1 = \sum_{k=2}^{n} t_k$, $T_2 = \sum_{k=3}^{n} t_k \ldots$

Уравнения эквивалентности, о которых только что шла речь, позволяют решить несколько важных в практическом отношении задач, а именно: измерить доходность от операции и распределить получаемый доход по их источникам и периодам, предусматриваемым условиями контракта, или по календарным отрезкам времени. Для этого, однако, надо разработать уравнения, в которых наращение (или дисконтирование) производится по неизвестной ставке, характеризующей полную доходность. Именно таким путем определяются эти величины в следующих параграфах.

§10.3. Доходность ссудных и учетных операций с удержанием комиссионных

Ссудные операции. Доходность ссудных операций (без учета комиссионных) измеряется с помощью эквивалентной годовой ставки сложных процентов (см. § 4.2). За открытие кредита, учет векселей и другие операции кредитор часто взимает комиссионные, которые заметно повышают доходность операций, так как сумма фактически выданной ссуды сокращается.

Пусть ссуда в размере D выдана на срок n. При ее выдаче удерживаются комиссионные за операцию (G). Фактически выданная ссуда равна $D - G$. Пусть для начала сделка предусматривает начисление простых процентов по ставке i. При определении доходности этой операции в виде годовой ставки сложных процентов $i_э$ исходя из того, что наращение величины $D - G$ по этой ставке должно дать тот же результат, что и наращение D по ставке i. Разумеется, уменьшение фактической суммы кредита связано не только с удержанием комиссионных.

Однако для краткости любое удержание денег, сделанное в пользу кредитора, будем в этой главе называть комиссионными.

По определению уравнение эквивалентности запишем в виде

$$(D - G)(1 + i_э)^n = D(1 + ni).$$

Графическое изображение данной сделки (контур) показано на рис. 10.2.

Пусть $D - G = D(1 - g)$, где g — относительная величина комиссионных в сумме кредита, тогда

$$i_э = \sqrt[n]{\frac{1 + ni}{1 - g}} - 1. \qquad (10.2)$$

При определении степени корня будем полагать, что временная база всегда равна 365 дням. Полученный показатель доходности можно интерпретировать как скорректированную цену кредита.

Ставка $i_э$ не фигурирует в условиях операции, она полностью определяется ставкой процента и относительной величиной комиссионных при заданном сроке сделки. Предположим, что необходимо охарактеризовать доходность в виде ставки простых процентов $i_{эп}$. В этом случае на основе соответствующего уравнения эквивалентности находим

$$i_{эп} = \frac{1 + ni}{(1 - g)n} - 1. \qquad (10.3)$$

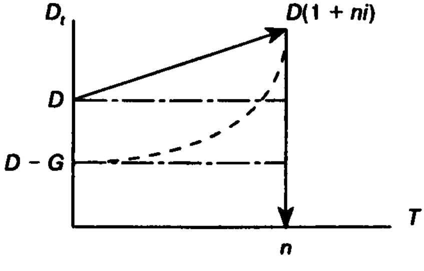

Рис. 10.2

ПРИМЕР 10.1. При выдаче ссуды на 180 дней под 8% годовых кредитором удержаны комиссионные в размере 0,5% суммы кредита. Какова эффективность ссудной операции в виде годовой ставки сложных процентов? По формуле (10.2) находим

$$i_э = {}^{180/365}\sqrt{\frac{1+\frac{180}{365}\times 0{,}08}{1-\frac{0{,}5}{100}}} - 1 = 0{,}0927, \text{ или } 9{,}27\%.$$

Если ссуда выдается под сложные проценты, то исходное уравнение для определения $i_э$ имеет вид

$$(D - G)(1 + i_э)^n = D(1 + i)^n.$$

Следовательно,

$$i_э \frac{1+i}{\sqrt[n]{(1-g)}} - 1. \qquad (10.4)$$

ПРИМЕР 10.2. В какой мере удержание комиссионных из расчета 1% суммы кредита увеличивает эффективность ссуды для кредитора при пяти- и десятилетнем сроке?

Находим

$$\frac{1}{\sqrt[5]{1-0{,}01}} - 1 = 0{,}002, \text{ или } 0{,}2\%; \qquad \frac{1}{\sqrt[10]{1-0{,}01}} - 1 = 0{,}001, \text{ или } 0{,}1\%.$$

Учетные операции. Если доход извлекается из операции учета по простой учетной ставке, то эффективность сделки без удержания комиссионных определяется по формуле эквивалентной ставки (4.22). При удержании комиссионных и дисконта заемщик получает сумму $D - Dd - G$ или $D(1 - nd - g)$. Напомним, что d означает простую учетную ставку, а g — относительную величину комиссионных в сумме кредита. Уравнение эквивалентности в данном случае имеет вид

$$D(1 - nd - g)(1 + i_э)^n = D.$$

Отсюда

$$i_э = \sqrt[n]{\frac{1}{1 - nd - g}} - 1, \qquad (10.5)$$

где n — срок, определяемый при учете долгового обязательства.

Для полного показателя доходности в виде простой ставки $i_{эп}$ находим

$$i_{эп} = \frac{1}{(1 - nd - g)n} - 1. \qquad (10.6)$$

> **ПРИМЕР 10.3.** Вексель учтен по ставке d = 10% за 160 дней до его оплаты. При выполнении операции учета с владельца векселя удержаны комиссионные в размере 0,5%. Доходность операции согласно (10.5) при условии, что временная база учета 360 дней, составит
>
> $$i_э = \sqrt[160/365]{\frac{1}{1 - \frac{160}{360}0{,}1 - 0{,}005}} - 1 = 0{,}123, \text{ т.е. } 12{,}3\%.$$
>
> Эффективность без удержания комиссионных — 10,8%.

Во всех рассмотренных случаях искомая ставка $i_э$ представляет собой частный случай упомянутой выше ПД. Заметим, что влияние комиссионных на $i_э$ уменьшается по мере увеличения срока сделки.

Удержание комиссионных — не единственная возможность изменения фактической суммы инвестиций по сравнению с номиналом. В практике возможны случаи, когда инвестор несет дополнительные расходы, например, приобретая опцион на право купить ценную бумагу. Такие расходы, очевидно, формально можно рассматривать как комиссионные с обратным знаком ($-G$) и для расчета применять полученные выше формулы (10.2)—(10.6).

§10.4. Доходность купли-продажи финансовых инструментов

Краткосрочные финансовые инструменты денежно-кредитного рынка — векселя, тратты, различные депозитные сертификаты и т.д. — могут быть проданы до наступления срока их оплаты. Владелец при этом получает некоторый доход, а в неблагоприятных условиях несет убытки.

Покупка и продажа векселя (простая учетная ставка). Если вексель или другой вид долгового обязательства через некоторое время после его покупки и до наступления срока погашения продан, то эффективность этой операции можно измерить с помощью ставок простых или сложных процентов. Финансовая результативность операции здесь связана с разностью цен купли-продажи, которые в свою очередь определяются сроками этих актов до погашения векселя и уровнем учетных ставок. Покажем это. Пусть номинал векселя равен S руб. Он был куплен (учтен) по учетной ставке d_1 за ∂_1 дней до наступления срока.

Цена в момент покупки составила

$$P_1 = S\left(1 - \frac{\partial_1}{K} d_1\right),$$

где K — временная база учета.

За ∂_2 дней до погашения вексель был продан с дисконтированием по ставке d_2:

$$P_2 = S\left(1 - \frac{\partial_2}{K} d_2\right).$$

Инвестиции в начале операции составили, таким образом, P_1 руб., отдача от них равна P_2 руб. Операция продолжалась $\partial_1 - \partial_2$ дней.

Для простой ставки $i_{эп}$ получим следующее уравнение эквивалентности:

$$P_1\left(1 + \frac{\partial_1 - \partial_2}{K} i_{эп}\right) = P_2. \tag{10.7}$$

Отсюда доходность купли-продажи векселя (в виде ставки простых процентов)

$$i_{эп} = \frac{P_2 - P_1}{P_1} \times \frac{K}{\partial_1 - \partial_2}. \tag{10.8}$$

Выразив P_1 и P_2 через определяющие эти величины параметры, находим

$$i_{эп} = \left(\frac{1 - \partial_2 d_2 / K}{1 - \partial_1 d_1 / K} - 1\right) \frac{K}{\partial_1 - \partial_2}. \tag{10.9}$$

Для того чтобы операция не была убыточной, необходимо, чтобы

$$\partial_2 d_2 < \partial_1 d_1 \text{ или } P_1 < P_2.$$

Аналогично поступают и при использовании в качестве меры эффективности годовой сложной ставки. В этом случае, полагая $K = 365$, на основе уравнения эквивалентности

$$P_1\left(1 + i_э\right)^{\left(\partial_1 - \partial_2\right)/365} = P_2$$

получим

$$i_э = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{365/\left(\partial_1 - \partial_2\right)} - 1. \qquad (10.10)$$

Заметим, что уравнения (10.10) и сходное (10.9) пригодны для оценки $i_э$ или $i_{эп}$ в ситуациях, когда речь идет о купле-продаже финансового инструмента (приносящего доход в любой форме) и известны цены и длительность владения (*holding period*).

Заменив в формуле (10.10) P_2 и P_1 на адекватные выражения, находим

$$i_э = \left(\frac{K - \partial_2 d_2}{K - \partial_1 d_1}\right)^{365/\left(\partial_1 - \partial_2\right)} - 1. \qquad (10.11)$$

ПРИМЕР 10.4. Вексель куплен за 167 дней до его погашения, учетная ставка — 6%. Через 40 дней его реализовали по учетной ставке 5,75%. Эффективность, измеренная в виде простой годовой ставки процентов (временная база учета $K = 360$, база наращения $K = 365$), составит согласно (10.9):

$$i_{эп} = \left(\frac{1 - \frac{127}{360}0{,}0575}{1 - \frac{167}{360}0{,}06} - 1\right)\frac{365}{40} = 0{,}0708.$$

Эффективность операции, измеренная в виде эквивалентной ставки сложных процентов, равна:

$$i_э = \left(1 + \frac{40}{365} \times 0{,}0708\right)^{365/40} - 1 = 0{,}0731.$$

Эту же величину получим и непосредственно по формуле (10.11):

$$i_э = \left(\frac{360 - 127 \times 0{,}0575}{360 - 167 \times 0{,}06}\right)^{365/40} - 1 = 0{,}0731.$$

Продолжим пример. Определим допустимый предел для учетной ставки, применимой при продаже векселя (d_2). Находим, что для того, чтобы операция купли-продажи векселя принесла некоторый доход, учетная ставка d_2 должна быть меньше, чем

$$\frac{167}{127} \times 0{,}06 = 0{,}07889.$$

Покупка и продажа финансовых инструментов, приносящих простые проценты. Если депозитный сертификат или другой подобного рода краткосрочный инструмент через некоторое время после его покупки и до наступления срока погашения вновь продан, то эффективность (доходность) такой операции можно измерить в виде ставки простых или сложных процентов. Финансовая эффективность такой операции зависит от сроков актов купли-продажи до погашения инструмента, цен или процентных ставок, существующих на денежном рынке в моменты покупки и продажи.

Несколько слов о депозитных сертификатах. Они, как известно, выпускаются банками как кратко-, так и среднесрочные финансовые инструменты, продаются эмитентом в момент выпуска по номиналу (*at par*) и предусматривают в качестве дохода выплату процентов, начисляемых по простым или сложным ставкам. Проценты чаще всего выплачиваются один раз в конце срока. В случае досрочной продажи сертификата эмитенту иногда предусматриваются штрафные санкции. Например, удержание процентов за один-три месяца. Сертификаты являются объектом инвестиций и обычно могут быть проданы на рынке ценных бумаг.

Сертификат обеспечивает владельцу доходность на уровне объявленной процентной ставки в том случае, когда сертификат находится у владельца полный срок. Иное дело, если этот финансовый инструмент продается на рынке ценных бумаг по рыночной цене.

Обратимся к наиболее распространенному виду сертификата — с разовой выплатой процентов — и рассмотрим три возможных варианта операции купли-продажи этого инструмента по срокам:

а) покупается по номиналу, продается за ∂_2 дней до погашения;

б) покупается после выпуска и погашается в конце срока;

в) покупается и продается в пределах объявленного срока.

Для варианта *а* получим знакомое равенство (10.7):

$$P_1\left(1 + \frac{\partial_1 - \partial_2}{K} \times i_{эп}\right) = P_2.$$

Однако символы здесь имеют другое содержание, а именно: P_1 — номинал, P_2 — цена при продаже (определяется рыночной ставкой процента), ∂_1, ∂_2 — сроки до погашения.

Доходность владения сертификатом в течение $\partial_1 - \partial_2$ дней определяется формулой (10.8), если расчет исходит из цен сертификата. Если же в качестве исходных параметров берутся процентные ставки i_1 и i_2 (i_1 — объявленная ставка сертификата, i_2 — ставка рынка в момент продажи), то

$$i_{эп} = \left(\frac{1 + \frac{\partial_1}{K} i_1}{1 + \frac{\partial_2}{K} i_2} - 1\right) \times \frac{K}{\partial_1 - \partial_2}. \qquad (10.12)$$

В случае когда измерителем эффективности выступает сложная процентная ставка и заданы цены, получим формулу, аналогичную (10.10). Наконец, если расчет основан на уровнях процентных ставок, то

$$i_э = \left(\frac{K + \partial_1 i_1}{K + \partial_2 i_2}\right)^{365/(\partial_1 - \partial_2)} - 1. \qquad (10.13)$$

Отметим, что доходность операции имеет место только в том случае, когда $\partial_1 i_1 > \partial_2 i_2$. Предельное значение ставки i, при котором инвестор получит доход, равно

$$i_2 < \frac{\partial_1 i}{\partial_2}.$$

Перейдем теперь к варианту *б*. Здесь справедливо равенство

$$P_2\left(1+\frac{\partial_2}{K}i_{эп}\right)=P_1\left(1+\frac{\partial_1}{K}i\right),$$

где P_1 — номинал, P_2 — цена приобретения, i — объявленная процентная ставка.

Контур операции для данного уравнения приведен на рис. 10.3.

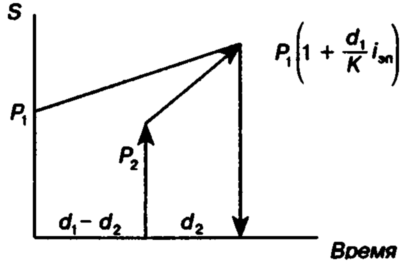

Рис. 10.3

Из приведенного выше равенства получим значение $i_{эп}$ при заданной величине P_2:

$$i_{эп}=\left(P_1\frac{1+\frac{\partial_1}{K}i_1}{P_2}-1\right)\times\frac{K}{\partial_2}. \tag{10.14}$$

Если в качестве измерителя эффективности принята ставка сложных процентов, то

$$i_э=\left(\frac{P_1\left(1+\frac{\partial_1}{K}i\right)}{P_2}\right)^{365/\partial_2}-1. \tag{10.15}$$

Рассмотрим вариант *в*. Здесь покупка производится спустя некоторое время после выпуска сертификата, а его продажа — до момента погашения. В этом случае опять приходим к уравнению (10.7), в котором P_1 означает цену приобретения (а не номинал). Отсюда для расчета $i_{эп}$ и $i_э$ пригодны формулы (10.8)—(10.11).

ПРИМЕР 10.5. Операция заключается в покупке сертификата за 1020 тыс. руб. за 160 дней до его выкупа. Инструмент был продан за 1060 тыс. руб. через 90 дней. Какова доходность операции, измеренная в виде простой и сложной ставок? Исходные данные $P_1 = 1020$, $P_2 = 1060$, $\partial_1 = 160$, $\partial_2 = 70$, $\partial_1 - \partial_2 = 90$.

Пусть временная база простых процентов равна 365 дням, тогда по формуле (10.8) находим

$$i_{эп} = \frac{1060 - 1020}{1020} \times \frac{365}{90} = 0{,}159, \text{ или } 15{,}9\%.$$

Эквивалентная сложная ставка равна

$$i_э = \left(1 + \frac{90}{365} \times 0{,}159\right)^{365/90} - 1 = 0{,}169, \text{ или } 16{,}9\%.$$

Величину $i_э$ можно определить и непосредственно по формуле (10.10):

$$i_э = \left(\frac{1060}{1020}\right)^{365/90} - 1 = 0{,}169.$$

ПРИМЕР 10.6. Финансовый инструмент, приносящий постоянный процент, куплен за 200 дней до срока его погашения и продан через 100 дней. В момент покупки процентная ставка на рынке была равна 10%, в момент продажи — 9,8%. Доходность операции купли-продажи в виде годовой ставки сложных процентов равна согласно (10.13)

$$i_э = \left(\frac{365 + 200 \times 0{,}1}{365 + 100 \times 0{,}098}\right)^{365/100} - 1 = 0{,}103, \text{ или } 10{,}3\%.$$

ПРИМЕР 10.7. Сертификат с номиналом 100 тыс. руб. с объявленной доходностью 12% годовых (простые проценты) сроком 720 дней куплен за 110 тыс. руб. за 240 дней до его оплаты. Какова доходность инвестиций в виде $i_э$?

Если $K = 360$ дней, то по формуле (10.15) получим

$$i_э = \left[100\frac{1 + \frac{720}{360} \times 0{,}12}{110}\right]^{365/240} - 1 = 0{,}19985, \text{ или } 19{,}985\%.$$

§10.5. Долгосрочные ссуды

Очевидно, что способ погашения долгосрочной задолженности оказывает заметное влияние на эффективность соответствующей финансовой операции для кредитора. В данном параграфе кратко рассмотрены методы оценивания ПД долгосрочных ссуд для двух случаев: 1) когда проценты погашаются последовательными платежами, а основная сумма долга выплачивается в конце срока и 2) когда долг и проценты погашаются последовательно на протяжении всего срока ссуды. В обоих случаях предусматривается выплата комиссионных.

Ссуды с периодической выплатой процентов. Если комиссионные не выплачиваются, то доходность равна годовой ставке сложных процентов, эквивалентной любым применяемым в сделке процентным ставкам. Ситуация усложняется, если имеется еще один источник дохода для кредитора — комиссионные. Пусть ссуда D погашается через n лет, проценты по простой процентной ставке i выплачиваются регулярно в конце года: их сумма равна Di. Должнику с учетом комиссионных выдается ссуда в размере $D(1-g)$. Уравнение эквивалентности, полученное дисконтированием всех платежей по неизвестной ставке $i_э$, имеет вид

$$D(1-g)-\left(Di\sum_{j=1}^{n}v^{i_э}+Dv^n\right)=0.$$

Здесь $v=(1+i_э)^{-1}$, $\sum v^{i_э}=a_{n;i_э}$. Теперь это уравнение можно представить в виде функции от $i_э$ следующим образом:

$$f(i_э)=v^n+ia_{n;i_э}-(1-g)=0.$$

Если проценты выплачиваются p раз в году, то

$$f(i_э)=v^n+\frac{i}{p}a^{(p)}_{n;i_э}-(1-g)=0.$$

Задача, следовательно, заключается в нахождении корня данной степенной функции. Решить поставленную задачу можно методом Ньютона—Рафсона или простым подбором.

ПРИМЕР 10.8. На три года выдана ссуда 1 млн руб. под 10% годовых, проценты выплачиваются ежегодно. При выдаче ссуды сделана скидка в пользу владельца денег в размере 5%. В результате должник получил 950 тыс. руб. Для расчета искомой ставки $i_э$ напишем функцию

$$f(i_э) = (1 + i_э)^{-3} - 0{,}1 \times a_{3;i_э} - 0{,}95 = 0.$$

Получим $i_э$ = 1,12088. Таким образом, доходность операции для кредитора и соответственно цена кредита для должника в виде годовой ставки сложных процентов равны 12,088%.

Ссуды с периодическими расходами по долгу. Пусть по ссуде периодически выплачиваются проценты и погашается основной долг, причем сумма расходов по обслуживанию долга постоянна. Тогда уравнение эквивалентности для случая, когда платежи производятся в конце года, можно представить в виде

$$D(1 - g) - Ra_{n;i_э} = 0,$$

где R — ежегодная сумма по обслуживанию долга (срочная уплата). Поскольку $R = \dfrac{D}{a_{n;i}}$ (см.§ 5.4), то

$$f(i_э) = a_{n;i_э} - a_{n;i}(1 - g) = 0. \tag{10.16}$$

Аналогично для случая, когда погасительные платежи осуществляются p раз в году, находим

$$f(i_э) = a^{(p)}_{n;i_э} - a^{(p)}_{n;i}(1 - q) = 0, \tag{10.17}$$

где $a^{(p)}_{n;i_э}$ и $a^{(p)}_{n;i}$ — коэффициенты приведения p-срочной ренты.

ПРИМЕР 10.9. Пусть в примере 10.8 задолженность погашается равными платежами. Все остальные условия не изменяются. В этом случае согласно (10.16)

$$a_{3;i_э} = a_{3;10}(1 - 0{,}05) = 2{,}48685 \times 0{,}95 = 2{,}36251.$$

Расчет $i_э$ по заданному значению $a_{3;i_э}$ = 2,36251 можно легко осуществить с помощью линейной интерполяции. Поскольку $i_э$ > > 10%, то для интерполяции примем: i = 12% и $i_в$ = 13%. Находим следующие табличные значения коэффициентов приведения ренты: $a_{3;12}$ = 2,38134, $a_{3;13}$ = 2,36115. Интерполяционное значение ставки:

$$i_э = 12 + \frac{2{,}38134 - 2{,}36251}{2{,}38134 - 2{,}36115}(13 - 12) = 12{,}933\%.$$

Нерегулярный поток платежей. Задолженность может быть погашена путем выплаты нерегулярного потока платежей: R_1, ..., R_n. Эффективность кредита при таком способе погашения определим на основе следующего уравнения эквивалентности вложений и отдач:

$$f(i_э) = D(1 - g) - \sum_{j=1}^{n} R_j v^{t_j} = 0, \tag{10.18}$$

где t_j — интервал от начала сделки до момента выплаты j-го погасительного платежа. Из условия сбалансированности сделки находим, применяя договорную ставку i, величину последнего взноса:

$$R_n = Dq^T - \sum_{j=1}^{n} R_j q^{T_j}, \tag{10.19}$$

где $q = 1 + i_э$; $T = \sum T_j$, T_j — срок от выплаты j-го платежа до конца сделки.

Продемонстрированный выше метод оценки показателя полной доходности на основе функции $f(i_э)$ применяется, в частности, при анализе облигаций и производственных инвестиций. В следующих главах мы затронем эти проблемы.

§10.6. Упрощенные методы измерения доходности (долгосрочные ссуды)

Расчет доходности для схем, предусматривающих рассрочки платежей, довольно хлопотливое дело. На практике при решении подобных задач иногда прибегают к приближенным методам, которые основаны на замене регулярного потока платежей разовым платежом, отнесенного к середине общего срока погашения. Естественно, что такое упрощение условий скажется на точности результата. Остановимся на двух задачах.

Условия первой задачи. Пусть некоторое долговое обязательство в сумме D покупается по цене P. Долг последовательно погашается в течение n периодов. Разовое погашение в сумме $R = D/n$. Доходность в конечном счете определяется здесь ценой приобретения обязательства

Определим доходность вложения в такое долгосрочное обязательство. Стандартное решение заключается в разработке уравнения эквивалентности вида $P = Ra_{n;i_э}$ и его решения относительно неизвестной ставки $i_э$. (Как было показано в гл. 5, простого алгебраического решения нет.) В свою очередь упрощенный метод сводится к решению элементарного равенства $P = Dv^T$. Отсюда

$$i_э = \sqrt[T]{\frac{D}{P}} - 1, \qquad (10.20)$$

где T —средний срок обязательства.

Следует подчеркнуть, что при определении среднего срока самым простым способом в виде

$$T_0 = n / 2 \qquad (10.21)$$

не учитывается вид ренты, характеризующей поступления. С учетом этого фактора получим следующие средние сроки:

для поступлений постнумерандо

$$T_1 = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}, \qquad (10.22)$$

для ренты пренумерандо

$$T_2 = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}. \qquad (10.23)$$

ПРИМЕР 10.10. Операция характеризуется следующими данными: $D = 100$, $P = 75$, $n = 5$. Оценим доходность для двух вариантов погашения задолженности — постнумерандо и пренумерандо. Средние сроки: $T_0 = 2{,}5$; $T_1 = 3$; $T_2 = 2$ года.

Оценки уровня доходности:

при среднем сроке 2,5 года

$$i_0 = \sqrt[2{,}5]{\frac{100}{75}} - 1 = 0{,}1220,$$

при выплатах постнумерандо ($T_1 = 3$)

$$i_1 = \sqrt[3]{\frac{100}{75}} - 1 = 0{,}1064.$$

Точное значение для ренты постнумерандо получим на основе равенства $75 = \frac{100}{5} a_{5;i_1}$. Находим $i_1 = 0{,}1042$.

В свою очередь для ренты пренумерандо ($T_2 = 2$)

$$i_2 = \sqrt{\frac{100}{75}} - 1 = 0{,}1547.$$

Точное значение $i_2 = 0{,}1688$.

Как видим из приведенного примера, упрощенная оценка доходности с учетом вида ренты заметно уменьшает погрешность. Без учета этого фактора оценки оказываются весьма грубыми и, вероятно, практически бесполезными.

Условия второй задачи. Пусть долговое обязательство предусматривает последовательное погашение и выплату процентов за фиксированный срок без льготного периода. Точное значение доходности находим при решении уравнения эквивалентности

$$P = \sum_{1}^{n} R_t v^t \qquad (10.24)$$

относительно дисконтного множителя v, определенного по искомой ставке j.

Приближенную оценку доходности j можно получить как сумму двух показателей доходности

$$j = i_э + i, \qquad (10.25)$$

где $i_э$ — оценка доходности, полученная на основе среднего срока по формуле (10.20), i — процентная ставка по кредиту.

В табл. 10.1 приводятся приближенные и точные значения показателей доходности (в %) при условии, что процентная ставка по кредиту равна 10%.

Таблица 10.1

P	110	100	75	70	60	50
$i_э$	−3,886	0	12,20	15,33	22,67	31,95
i	10	10	10	10	10	10
j (прибл.)	6,114	10	22,20	25,33	32,27	41,95
j (точн.)	6,175	10	23,11	26,66	35,27	46,85

Как следует из данных таблицы, чем больше разность $D - P$, тем выше погрешность приближенной оценки доходности. Заметим также, что применение среднего срока в виде T_1 или T_2 увеличивает величину погрешности, так как при последовательной выплате процентов на остаток долга средний срок ближе к T_0, чем к T_1 или T_2.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Четыркин Е.М. Методы финансовых и коммерческих расчетов. М.: Дело, 1995. Гл. 9.

Глава 11

ОБЛИГАЦИИ

§11.1. Виды облигаций и их рейтинг

Наиболее распространенным видом ценных бумаг с фиксированным доходом (*fixed income securities*), как известно, являются облигации (*bonds*). Поэтому анализ сосредоточим на этом виде бумаг. Заметим, что преобладающее большинство рассмотренных ниже методов применимо и при анализе других видов ценных бумаг с фиксированным доходом.

При необходимости привлечения значительных денежных ресурсов (для финансирования крупных проектов, покрытия текущих расходов и т.д.) государство, муниципалитеты, банки и другие финансовые институты, а также отдельные компании или их объединения, часто прибегают к выпуску и продаже облигаций. Под облигацией понимается ценная бумага, свидетельствующая о том, что ее держатель предоставил заем эмитенту этой бумаги.

Облигация обеспечивает ее владельцу некоторый доход — в большинстве случаев он регулярно получает проценты по купонам и в конце срока выкупную цену. Доход от облигаций обычно ниже, чем от других видов ценных бумаг, в то же время он более надежен, так как в меньшей степени зависит от конъюнктурных колебаний и фазы экономического цикла, чем, например, доход от акций. В связи со сказанным в облигации инвестируют свободные резервы пенсионные фонды, страховые компании, различного рода инвестиционные фонды и т.д.

Основные параметры облигации: номинальная цена или *номинал* (*face value*), *выкупная цена* (*redemption value*) или правило ее определения, если она отличается от номинала, *дата погашения* (*date of maturity*), норма доходности или *купонная процентная ставка* (*coupon rate*), *даты выплат процентов*. В современной практике выкуп по номиналу является преобладающим.

Выплаты процентов производятся ежегодно, по полугодиям или поквартально, а иногда в конце срока.

Виды облигаций. В практике применяются облигации различных видов. Отсутствие в России достаточного опыта выпуска облигаций не позволяет привести развернутую их классификацию. Что касается зарубежных облигаций, то для них можно предложить классификацию по следующим признакам.

1. По методу обеспечения:

— государственные и муниципальные облигации, выплаты по которым обеспечиваются гарантиями государства или муниципалитета;

— облигации частных корпораций (*corporate bonds*) — обеспечиваются залогом имущества, передачей прав на недвижимость, доходами от различных программ и проектов;

— облигации частных корпораций без специального обеспечения (*corporate debentures*).

2. По сроку:

— облигации с фиксированной датой погашения (*term bonds*);

— без указания даты погашения или бессрочные (*perpetuities*), точнее, эмитент не связывает себя конкретным сроком, соответственно облигации могут быть выкуплены в любой момент. Примерами таких облигаций могут служить консоли в Великобритании (выпущены во время войны с Наполеоном), французская рента.

3. По способу погашения номинала (выкупа облигации):

— разовым платежом (*bullet bonds*);

— распределенными во времени погашениями оговоренных долей номинала;

— последовательным погашением доли общего количества облигаций, соответствующие облигации называются *серийными* (*serial bonds*); часто этот метод погашения осуществляется с помощью лотерей — *лотерейные* или *тиражные займы*.

4. По методу выплаты дохода:

— выплачиваются только проценты, срок выкупа не оговаривается (см. бессрочные облигации);

— выплата процентов не предусматривается; так назваемые *облигации с нулевым купоном* (*zero coupon bonds*);

— проценты выплачиваются вместе с номиналом в конце срока;
— периодически выплачиваются проценты, а в конце срока — номинал или выкупная цена; этот вид облигаций является преобладающим.

Процентная ставка обычно постоянная, правда, иногда выпускают облигации с "плавающей" процентной ставкой, уровень которой ставится в зависимость от каких-либо внешних условий.

Облигации являются важным объектом долгосрочных инвестиций. С момента их эмиссии и до погашения они продаются и покупаются на кредитно- денежном рынке по *рыночным ценам*. Рыночная цена в момент выпуска может быть равна номиналу (*at par*), ниже номинала, или с дисконтом (*discount bond*), и выше номинала, или с премией (*premium bond*). Нетрудно догадаться, что премия — это "переплата" за будущие высокие доходы, а дисконт — скидка с цены, связанная с низкими доходами от облигации.

Различают два вида рыночных цен. Облигации реализуются по так называемой *грязной* или *полной* цене (*dirty, full, gross price*), которая включает не только собственно цену облигации, но и сумму процентов за период после последней их выплаты и до момента продажи (*accrued interest*). Рыночная цена за вычетом суммы начисленных процентов называется *чистой* (*clean, flat price*). Во всех приведенных в главе расчетах фигурирует именно эта цена.

Определенное значение имеет наличие оговорки о запрете досрочного выкупа облигации эмитентом (*call protection*). Наличие права досрочного выкупа, естественно, снижает качество облигации, так как повышает степень неопределенности для инвестора. Более того, в случаях, когда облигация куплена с премией, досрочный ее выкуп заметно сокращает доходность инвестиции.

Поскольку номиналы у разных облигаций существенно различаются между собой (например, в США облигации выпускаются с номиналами от 25 до 100 000 долл.), то часто возникает необходимость в сопоставимом измерителе рыночных цен. Таким показателем является *курс* (*quote, quoted price*). Под курсом понимают цену одной облигации в расчете на 100 денежных единиц номинала:

$$K = \frac{P}{N}100, \qquad (11.1)$$

где K — курс облигации, P — рыночная цена, N — номинал облигации.

Например, если облигация с номиналом 10 000 руб. продается за 9700 руб., то ее курс составит 97.

Доход от облигации состоит из двух основных слагаемых:

— периодически получаемых по купонам процентов;
— разности между номиналом и ценой приобретения облигации (*capital gain*), если последняя меньше номинала; разумеется, если облигация куплена с премией, то эта разность отрицательна (*capital loss*), что, естественно, сокращает общий доход.

Некоторые аналитики предлагают при оценке общей эффективности инвестиций в облигации учитывать и доход от возможной реинвестиции поступлений по купонам. Однако такой доход весьма условен, так как неизвестно, по какой процентной ставке его включать в расчет, и, строго говоря, в общем случае нет большой необходимости его принимать во внимание.

Количественный анализ облигаций нацелен на:

а) расчет доходности облигаций и ряда дополнительных характеристик,
б) определение расчетной цены облигации на любой момент ее "жизни",
в) измерение динамики дисконта или премии по облигации.

Эти вопросы, а также принципы формирования портфеля облигаций, обсуждаются в следующих параграфах главы.

Рейтинг облигаций. Инвестиции в ценные бумаги сопряжены с определенным риском. Выделим два основных вида риска — ***кредитный*** (*credit risk*) и ***рыночный*** (*market risk*). Под первым понимают возможность отказа в выплате процентов и основной суммы долга (выкупной цены). Рыночный риск, который иногда называют ***процентным*** (*interest rate risk*), связан с колебаниями рыночной цены облигации, в значительной мере определяемыми изменениями процентной ставки на денежно-кредитном рынке. Очевидно, что рыночный, да и кредитный риски в значительной мере связаны со сроком облигации — чем больше срок, тем выше риск. Ниже мы затронем проблему измерения срока облигации под этим углом зрения.

Обратимся к кредитному риску. Очевидно, что он характеризует кредитоспособность и надежность самого эмитента. Поэтому за рубежом государственные обязательства принято считать наиболее надежными, с наименьшим кредитным риском. Ценные бумаги коммерческих институтов обычно рассматриваются как менее надежные, так как всегда остается некоторая вероятность их банкротства.

Качество облигаций в отношении кредитного риска оценивается специальными агенствами путем отнесения конкретных облигаций к той или другой категории. Такая операция называется *рейтингом* (*raiting*). В США рейтинг облигаций осуществляют ряд компаний, в том числе "Стэндарт энд Пурс" (Standart and Poor's) и "Мудис" (Moody's). Облигации по степени надежности выплат процентов и номинала относят к одной из девяти категорий; для этого первая из названных компаний применяет обозначения: AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC, CC, C, вторая: Aaa, Aa и т.д. Наивысшими по качеству являются облигации AAA. К этой категории относят бумаги с предельно высокой надежностью как в отношении их выкупа, так и выплат процентов. В других странах для рейтинга облигаций применяют иные обозначения и число категорий качества.

§11.2. Измерение доходности облигаций

Доходность облигаций. Доходность облигаций характеризуется несколькими показателями. Различают *купонную* (*coupon rate*), *текущую* (*current, running yield*) и *полную доходности* (*yield to maturity, redemption yield, yield*).

Купонная доходность определена при выпуске облигации и, следовательно, нет необходимости ее рассчитывать. Текущая доходность характеризует отношение поступлений по купонам к цене приобретения облигации. Этот параметр не учитывает второй источник дохода — получение номинала или выкупной цены в конце срока. Поэтому он непригоден при сравнении доходности разных видов облигаций. Достаточно отметить, что у облигаций с нулевым купоном текущая доходность равна нулю. В то же время они могут быть весьма доходными, если учитывать весь срок их "жизни".

Наиболее информативным является показатель полной доходности, который учитывает оба источника дохода. Именно этот показатель пригоден для сравнения доходности инвестиций в облигации и в другие ценные бумаги. Итак, полная доходность или, применив старую коммерческую терминологию, *ставка помещения*, измеряет реальную эффективность инвестиций в облигацию для инвестора в виде годовой ставки сложных процентов. Иначе говоря, начисление процентов по ставке помещения на цену приобретения облигации строго эквивалентно выплате купонного дохода и сумме погашения облигации в конце срока.

Рассмотрим методику определения показателей доходности различных видов облигаций в той последовательности, которая принята выше при классификации облигаций по способу выплаты дохода.

Облигации без обязательного погашения с периодической выплатой процентов. Хотя подобного вида облигации встречаются крайне редко, знакомство с ними необходимо для получения полного представления о методике измерения доходности. При анализе данного вида облигаций выплату номинала в необозримом будущем во внимание не принимаем.

Введем обозначения:

g — объявленная норма годового дохода (купонная ставка процента);

i_t — текущая доходность;

i — полная доходность (ставка помещения).

Текущая доходность находится следующим образом:

$$i_t = \frac{gN}{P} = \frac{g}{K}100. \qquad (11.2)$$

Если по купонам выплата производится p раз в году, каждый раз по ставке g/p, то и в этом случае на практике применяется формула (11.2).

Поскольку купонный доход постоянен, то текущая доходность продаваемых облигаций изменяется вместе с изменением их рыночной цены. Для владельца облигации, который уже инвестировал в нее некоторые средства, эта величина постоянна.

Перейдем к полной доходности. Поскольку доход по купонам является единственным источником текущих поступлений от данного вида облигации, то очевидно, что полная доходность у рассматриваемых облигаций равна текущей в случае, когда выплаты по купонам ежегодные, т.е. $i=i_t$. Если же проценты выплачиваются раз в году, каждый раз по норме g/p, то согласно (3.8) получим

$$i = \left(1 + \frac{g}{p}\frac{100}{K}\right)^p - 1 = \left(1 + \frac{i_t}{p}\right)^p - 1. \qquad (11.3)$$

ПРИМЕР 11.1. Вечная рента, приносящая 4,5% дохода, куплена по курсу 90. Какова финансовая эффективность инвестиции при условии, что проценты выплачиваются раз в году, поквартально ($p = 4$)?

$$i = i_t = \frac{0{,}045}{90}100 = 0{,}05; \qquad i = \left(1 + \frac{0{,}05}{4}\right)^4 - 1 = 0{,}0509.$$

Облигации без выплаты процентов. Данный вид облигации обеспечивает ее владельцу в качестве дохода разность между номиналом и ценой приобретения. Курс такой облигации всегда меньше 100. Для определения ставки помещения приравняем современную стоимость номинала цене приобретения:

$$Nv^n = P \text{ или } v^n = \frac{P}{N} = \frac{K}{100},$$

где n — срок до выкупа облигации. После чего получим

$$i = \frac{1}{\sqrt[n]{\dfrac{K}{100}}} - 1. \qquad (11.4)$$

ПРИМЕР 11.2. Корпорация X выпустила облигации с нулевым купоном с погашением через 5 лет. Курс реализации 45. Доходность облигации на дату погашения

$$i = \frac{1}{\sqrt[5]{\dfrac{45}{100}}} - 1 = 0{,}17316,$$

т.е. облигация обеспечивает инвестору 17,316% годового дохода.

Облигации с выплатой процентов и номинала в конце срока. Проценты здесь начисляются за весь срок и выплачиваются одной суммой (*lump sum*) вместе с номиналом. Купонного дохода нет. Поэтому текущую доходность условно можно считать нулевой, поскольку соответствующие проценты получают в конце срока.

Найдем полную доходность, приравняв современную стоимость дохода цене облигации:

$$(1 + g)^n N v^n = P \text{ или } \left(\frac{1 + g}{1 + i}\right)^n = \frac{K}{100}.$$

Из последней формулы следует

$$i = \frac{1 + g}{\sqrt[n]{\frac{K}{100}}} - 1. \tag{11.5}$$

Если курс облигации меньше 100, то $i > g$.

ПРИМЕР 11.3. Облигация, приносящая 10% годовых относительно номинала, куплена по курсу 65, срок до погашения 3 года. Если номинал и проценты выплачиваются в конце срока, то полная доходность для инвестора составит

$$i = \frac{1{,}1}{\sqrt[3]{0{,}65}} - 1 = 0{,}26956, \text{ или } 26{,}956\%.$$

Облигации с периодической выплатой процентов и погашением номинала в конце срока. Этот вид облигаций получил наибольшее распространение в современной практике. Для такой облигации можно получить все три показателя доходности — купонную, текущую и полную. Текущая доходность рассчитывается по полученной выше формуле (11.2). Что касается полной доходности, то для ее определения необходимо современную стоимость всех поступлений приравнять цене облигации. Поскольку поступления по купонам представляют собой постоянную ренту постнумерандо, то член такой ренты равен gN, а современная ее стоимость составит $gNa_{n;i}$, если купоны оплачиваются ежегодно, и $gNa^{(p)}_{n;i}$, если эти выплаты поизводятся p раз в году, каждый раз по ставке g/p. Дисконтированная величина номинала равна Nv^n. В итоге получим следующие равенства. Для облигации с годовыми купонами

$$P = Nv^n + gN\sum_{1}^{n} v^t = Nv^n + gNa_{n;i}, \tag{11.6}$$

откуда

$$\frac{K}{100} = v^n + ga_{n;i}\,. \qquad (11.7)$$

Для облигации с погашением купонов по полугодиям и поквартально часто применяют

$$\frac{K}{100} = v^n + ga^{(p)}_{n;i}, \qquad (11.8)$$

где $a^{(p)}_{n;i}$ — коэффициент приведения p-срочной ренты ($p = 2$, $p = 4$).

Во всех приведенных формулах v^n означает дисконтный множитель по неизвестной годовой ставке помещения i.

В зарубежной практике, однако, для облигаций с полугодовыми и квартальными выплатами текущего дохода для дисконтирования применяется годовая номинальная ставка, причем число раз дисконтирования в году обычно принимается равным числу раз выплат купонного дохода ($p = m$). Таким образом, исходное для расчета ставки помещения равенство имеет вид

$$\frac{K}{100} = \left(1+\frac{j}{p}\right)^{-pn} + \frac{g}{p}\sum_{1}^{pn}\left(1+\frac{j}{p}\right)^{-t} = v^{pn} + \frac{g}{p}a_{pn;j/p}, \qquad (11.9)$$

где j — номинальная годовая ставка, pn — общее количество купонных выплат, g — годовой процент выплат по купонам.

Искомые размеры ставок (i и j) в формулах (11.8) и (11.9) несопоставимы, так как получены для разных условий: $m = 1$ и $m = p$.

При решении приведенных выше равенств относительно неизвестной величины i или j сталкиваются с такими же проблемами, что и при расчете i по заданной величине коэффициента приведения ренты (см. § 5.3). Искомые значения ставки помещения рассчитываются или с помощью интерполяции, или каким-либо итерационным методом. В одной из версий пакета *Excel* содержится программа ДОХОД (Yield) для расчета i.

Оценим i с помощью линейной интерполяции:

$$i = i' + \frac{K' - K}{K' - K''}(i'' - i'), \qquad (11.10)$$

где i' и i'' — нижнее и верхнее значения ставки помещения, ограничивающие интервал, в пределах которого как ожидается находится неизвестное значение ставки, K', K'' — расчетные значения курса соответственно для ставок i', i''. Интервал ставок для интерполяции определяется с учетом того, что $i > g$ при $K < 100$.

В финансовой литературе иногда рекомендуют метод приближенной оценки, согласно которому

$$i \approx \frac{gN + (N - P) / n}{(P + N) / 2} = \frac{g + \left(1 - \frac{K}{100}\right) / n}{\left(1 + \frac{K}{100}\right) / 2}. \qquad (11.11)$$

В этой формуле средний годовой доход от облигации соотносится со средней ее ценой. За простоту расчета, впрочем, приходится платить потерей точности оценки. Чем больше курс отличается от 100, тем больше погрешность.

ПРИМЕР 11.4. Облигация со сроком 5 лет, проценты по которой выплачиваются раз в году по норме 8%, куплена по курсу 65.

Текущая доходность по облигации: 8/65 = 0,12308.

Для расчета полной доходности запишем исходное равенство (см. (11.7)):

$$0{,}65 = (1 + i)^{-5} + 0{,}08 a_{5;i}.$$

Приближенное решение по (11.11) дает

$$i = \frac{8 + (100 - 65) / 5}{(100 + 65) / 2} = 0{,}18182.$$

Проверка: при данной величине доходности рыночный курс составит

$$\frac{K}{100} = 1{,}18182^{-5} + 0{,}08 a_{5;18182} = 0{,}6829.$$

Курс заметно выше 65 — как видим, доходность занижена. Положим, что искомая ставка находится в интервале 12,5 ÷ 20%. Соответственно получим $K' = 0{,}83977$ и $K'' = 0{,}64113$. По интерполяционным формулам находим:

$$i = 12{,}5 + \frac{83{,}977 - 65}{83{,}977 - 64{,}113}(20 - 12{,}5) = 19{,}66\%.$$

Курс при такой ставке составит 64,87. Расчетный курс весьма близок к рыночному, и, следовательно, данная оценка ставки точнее, чем оценка 18,18%. Точная величина i = 19,62%.

Все рассмотренные выше формулы для расчета полной доходности предполагают, что оценка производится на начало срока облигации или на дату выплаты процентов при условии, что проценты на эту дату уже выплачены. Для случая, когда оценка производится на момент между двумя датами выплат процентов, приведенные формулы дадут смещенные оценки, так как не учитывают накопленные проценты. Необходимо принять во внимание, что срок погашения и выплат процентов до момента оценки сокращается. Доходность в этом случае можно определить на основе следующего равенства:

$$\frac{K}{100} = v^k\,[v^d + g a_{d;i}],$$

где k — доля купонного периода, d — количество оставшихся купонов.

§11.3. Дополнительные сведения по измерению доходности облигаций

Облигации с выкупной ценой, отличающейся от номинала. В этом случае проценты начисляются на сумму номинала, а прирост капитала равен $C - P$, где C — выкупная цена. Соответственно, при оценке ставки помещения необходимо внести соответствующие коррективы в приведенные выше формулы. Например, внеся коррективы в (11.6) и (11.7), получим

$$P = Cv^n + gNa_{n;i}, \tag{11.12}$$

$$\frac{K}{100} = \frac{C}{N} v^n + g a_{n;i}, \tag{11.13}$$

а вместо (11.11):

$$i \approx \frac{gN + (C - P) / n}{(C + P) / 2} = \frac{g + \left(\frac{C}{N} - \frac{K}{100}\right) / n}{\left(\frac{C}{N} + \frac{K}{100}\right) / 2}. \qquad (11.14)$$

Ставка помещения для серийных облигаций. Общий принцип определения полной доходности и в этом случае не изменяется: рыночная цена приравнивается к сумме членов потока платежей, дисконтированных по неизвестной ставке помещения. Однако число этих членов меняется от серии к серии. В связи со сказанным в расчет обычно берется то число членов потока, которое находится в интервале от начала до среднего ее срока, метод расчета последнего рассмотрен в § 11.4 (см. (11.19)).

Сравнение показателей доходности облигаций. Нетрудно установить, что соотношения между характеристиками доходности зависят от курса облигации. Так, для облигаций, у которых $K < 100$, находим $g < i_t < i < i'$, и наоборот, если $K > 100$, то $g > i_t > i > i'$. Наконец, если курс равен 100, то все показатели доходности равны купонному доходу при ежегодной его выплате.

Динамика показателей доходности в зависимости от курса показана на рис. 11.1

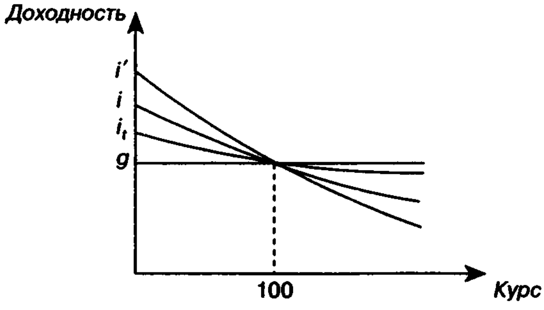

Рис. 11.1

Доходность облигаций с учетом налогов. До сих пор мы не принимали во внимание налоги на доходы, которые приносят облигации. Отсутствие развитого пакета законов о налогообложении доходов от ценных бумаг не позволяет при обсуждении этой проблемы исходить из отечественной практики. Во многих странах ставки налога на доход дифференцированы по видам ценных бумаг и по источнику дохода. Обычно предусматривается наименьший налог на доходы от государственных или муниципальных ценных бумаг. Что касается облигаций, то налогом в большинстве случаев облагается только купонный доход. Если предусматривается налог на прирост капитала, то он часто устанавливается по другой ставке. Уровень налоговых ставок во многих странах зависит и от категории инвестора. Например, в некоторых странах пенсионные фонды, которые обычно являются крупными инвесторами в облигации, облагаются минимальным налогом, если вообще облагаются.

Оценка полной доходности облигаций с учетом выплачиваемого налога осуществляется так же, как и без учета этого фактора. Отличие заключается в том, что поток платежей теперь состоит не из показателей брутто-поступлений, а из сумм чистого дохода.

Если прирост капитала облагается налогом, то инвестор получит в конце срока $N - (N - P)m$, где m — ставка налога на прирост капитала. В свою очередь, размер получаемых процентов сократится до $gN(1 - l)$, где l — ставка налога на проценты. В итоге вместо исходного равенства (11.6) получим

$$P = [N - (N - P)m]v^n + gN(1 - l)a_{n;y}, \qquad (11.15)$$

где v^n дисконтный множитель по ставке y.

Найденное на основе данного равенства значение y характеризует ставку помещения с учетом выплаченных налогов. Разделим обе стороны равенства на N. После чего нетрудно получить

$$K = \frac{100}{1 - mv^n}[(1 - m)v^n + g(1 - l)a_{n;y}]. \qquad (11.16)$$

ПРИМЕР 11.5. Вернемся к примеру 11.4 и рассчитаем ставку помещения при условии, что ставка налога на купонный доход составляет 20%, а на прирост капитала — 28%. Искомую величину найдем, решив равенство

$$65 = \frac{100}{1 - 0{,}28(1 + y)^{-5}}[0{,}72(1 + y)^{-5} + 0{,}08 \times 0{,}8a_{5;y}]$$

относительно y. Получим $y = 15{,}53\%$ (напомним, что без учета налога доходность — 19,62%).

Для иллюстрации влияния налогообложения найдем сумму дисконтированных по ставке 15,53% членов потока доходов (см. табл. 11.1).

Таблица 11.1

Дисконтированный поток платежей

Год	Доход	Налог на доход	Чистый доход	Дисконтир. чист. доход
1	8	1,6	6,4	5,54
2	8	1,6	6,4	4,79
3	8	1,6	6,4	4,15
4	8	1,6	6,4	3,59
5	108	11,4	96,6	46,93
Итого				65,00

Существует метод, который позволяет приближенно оценить полную доходность с учетом налоговых выплат, если известна ставка помещения без учета налогов:

$$y \approx g(1 - l) + (i - g)(1 - m). \qquad (11.17)$$

ПРИМЕР 11.6. Для данных примера 11.5 получим

$$y \approx 8(1 - 0{,}2) + (19{,}62 - 8)(1 - 0{,}28) = 14{,}77\%.$$

Напомним, что точное значение равно 15,53%.

Все приведенные здесь расчеты предполагали, что уплата налогов по времени совпадает с получением доходов по облигации. Отсрочка в выплате налогов, естественно, увеличивает ставку помещения.

§11.4. Характеристики сроков поступлений средств и измерение риска

Для обоснованного выбора облигации недостаточно располагать данными об их доходности. Необходимо как-то оценить и риск. Последний, очевидно, связан со сроком облигации — чем больше срок, тем выше риск. Однако непосредственное сравнение сроков не приведет к правильным выводам, поскольку при этом не учитываются особенности распределения доходов во времени ("профиль" поступлений доходов). Ясно, что облигации с нулевым купоном более рискованны, чем облигации с периодическим выплатами процентов при одном и том же их сроке, так как все поступления происходят в конце срока. Для характеристики облигаций под этим углом зрения применяют два вида средних сроков платежей. Обе средних являются взвешенными арифметическими. Отличие — в методе взвешивания. Назовем первую среднюю *средним арифметическим сроком (average life)*, вторую, для того чтобы отличить от первой, назовем *средним сроком дисконтированных платежей (duration)*. Рассмотрим обе средние.

Средний арифметический срок. Этот показатель обобщает сроки всех видов выплат по облигации в виде средней взвешенной арифметической величины. В качестве весов берутся размеры выплат. Иначе говоря, чем больше сумма выплаты, тем большее влияние на среднюю оказывает соответствующий срок. Для облигаций с ежегодной оплатой купонов и погашением номинала в конце срока получим

$$T = \frac{\sum_j t_j S_j}{\sum_j S_j} = \frac{gN\sum_j t_j + nN}{gNn + N}, \qquad t_j = 1,2, ..., n, \qquad (11.18)$$

где T — средний срок, t_j — сроки платежей по купонам в годах, S_j — сумма платежа, g — купонная норма процента, n — общий срок облигации.

Известно, что для $t_j = 1,2, ..., n$

$$\sum_j t_j = \frac{n(n+1)}{2},$$

поэтому вместо (11.18) можно применить

$$T = \frac{\frac{g(n+1)}{2} + 1}{g + 1/n}. \qquad (11.19)$$

Очевидно, что $T < n$. У облигаций с нулевым купоном $T = n$. Нетрудно понять, что чем больше купонный процент, тем меньше средний срок.

ПРИМЕР 11.7. Найдем средний арифметический срок для двух облигаций с выплатами по купонам 5 и 10% от номинала, срок облигаций 10 лет. По формуле (11.19) получим

$$T_1 = \frac{\frac{0{,}05 \times 11}{2} + 1}{0{,}15} = 8{,}5; \quad T_2 = \frac{\frac{0{,}1 \times 11}{2} + 1}{0{,}2} = 7{,}75 \text{ года.}$$

Пусть теперь купоны оплачиваются p раз в году, например, по полугодиям или ежеквартально, тогда необходимая нам сумма сроков платежей находится как

$$\sum t_j = \frac{np(n + 1 / p)}{2}, \ t_j = 1/p, 2/p, ..., n.$$

Теперь вместо (11.19) имеем

$$T = \frac{\frac{g}{2}(n + 1 / p) + 1}{g + 1 / n}. \tag{11.20}$$

Очевидно, что переход от годовой выплаты процентов к выплатам по полугодиям или по кварталам несколько снижает средний арифметический срок облигации. Чем меньше средний арифметический срок, тем скорее получает отдачу от облигации ее владелец и, следовательно, меньше риск.

Несколько слов о содержании полученной средней. Предварительно вспомним понятие “кредитная услуга”, под которой обычно понимают произведение суммы кредита на срок (“рубле-годы”). В числителе формулы (11.18) показан полный размер кредитной услуги по облигации — все ожидаемые поступления умножены на соответствующие сроки. Средний арифметический срок указывает на момент в сроке облигации, который уравнивает размеры кредитных услуг в том смысле, что сумма кредитной услуги до среднего срока равна кредитной услуге после этого момента:

$$\sum_j r_j S_j = \sum_k r_k S_k, \tag{11.21}$$

где r_j, r_k — временные интервалы от даты платежа до среднего срока (j — платежи, производимые до среднего срока, k — после этого срока).

Для иллюстрации обратимся к облигации из примера 11.4 со сроком 5 лет. Ее средний срок равен 4,43 года. Размер кредитной услуги на эту дату равен примерно 62. Кредитная услуга для оставшегося срока равна такой же величине. Механический аналог среднего срока — точка равновесия платежей во времени.

Средний срок дисконтированных платежей. Обсуждаемый показатель также представляет собой среднюю взвешенную величину срока платежей, однако взвешивание здесь более "тонкое", учитывающее временную ценность денег. В качестве такого показателя, который, кстати, вытесняет в современной практике средний арифметический срок, применяют так называемый *средний срок дисконтированных платежей.* Обозначим эту величину как D.

Пусть проценты выплачиваются ежегодно, тогда имеем

$$D = \frac{\sum_j t_j S_j v^{t_j}}{\sum S_j v^{t_j}}. \qquad (11.22)$$

Знаменатель формулы по определению равен рыночной цене облигации (см. (11.6)). После ряда преобразований получим

$$D = \frac{g\sum t_j v^{t_j} + v^n}{K/100}, \quad t_j = 1,2, ..., n. \qquad (11.23)$$

Дисконтирование здесь производится по ставке помещения.

ПРИМЕР 11.8. Для облигации примера 11.4 ставка помещения (полная доходность) равна 19,62%. Дисконтируем платежи по этой ставке.

t_j	v^{t_j}	S_j	$S_j v^{t_j}$	$t_j S_j v^{t_j}$
1	0,8360	8	6,6880	6,6880
2	0,6989	8	5,5912	11,1824
3	0,5842	8	4,6736	14,0208
4	0,4884	8	3,9072	15,6288
5	0,4083	108	44,0966	220,4828
			64,957	268,0028

Находим

$$D = \frac{268}{65} = 4{,}12 \text{ года.}$$

Напомним, что средний арифметический срок для этой облигации равен 4,43 года.

Очевидно, что для облигации с нулевым купоном $D = T = n$. В остальных случаях $D < T < n$. На рис. 11.2 иллюстрируется зависимость среднего взвешенного срока платежей от общего ее срока (*1* — облигации с нулевым купоном, *2* — купленные по номиналу, *3* — купленные с дисконтом, *4* — купленные с премией; по облигациям вида *2*—*4* предусматривается выплата купонного дохода). Рассматриваемый показатель увеличивается при сокращении купонного дохода, а также с падением средней ставки на рынке и ростом общего срока.

Из определения D и приведенных формул следует, что этот показатель учитывает особенности потока платежей — отдаленные платежи имеют меньший вес, чем более близкие к моменту оценки. Заметим, что эту величину можно трактовать и как срок эквивалентной облигации с нулевым купоном.

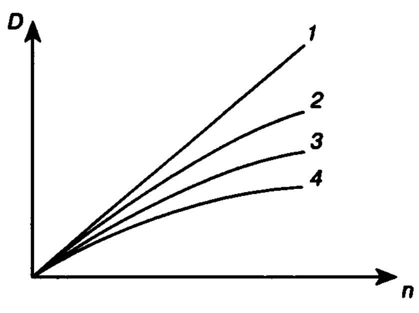

Рис. 11.2

В примере 11.8 средний срок платежей по облигации составил 4,12 года. Это означает, что она эквивалентна займу без текущей выплаты процентов с аналогичной нормой доходности (19,62%) при условии, что его срок равен 4,12 года.

Модифицированный средний срок дисконтированных платежей. Средний срок дисконтированных платежей, о котором только что шла речь, едва бы привлек внимание финансистов-аналитиков, будь он только обобщенным измерителем срока платежей. Ценность этого показателя состоит в том, что его можно использовать как *меру чувствительности цены облигации к незначительной динамике уровня процентной ставки на рынке*. Для решения этой задачи, строго говоря, применяется не величина D, а ее модификация, обозначим ее как MD (*modified duration*), которую для краткости назовем *модифицированная средняя*. Этот показатель часто называют *средней Макколея*:

$$MD = \frac{D}{1 + \frac{i}{p}}, \qquad (11.24)$$

где i — полная доходность облигации, p — количество выплат процентов в году.

Можно доказать, что MD представляет собой показатель *эластичности цены облигации по рыночной процентной ставке*. Иначе говоря,

$$MD = -\frac{1}{K} \times \frac{\Delta K}{\Delta i} 100,$$

где ΔK, Δi — изменения в цене и рыночной процентной ставке в %.

Из приведенного выражения следует

$$\Delta K = -0{,}01 MD \times K \times \Delta i. \qquad (11.25)$$

Формула (11.25) применяется в практике для оценивания колебаний в цене облигаций при незначительных (до 1%) изменениях рыночной процентной ставки.

ПРИМЕР 11.9. Для облигации примера 11.4 было найдено: $D = 4{,}12$ года, $i = 19{,}62\%$. Откуда

$$MD = \frac{4{,}12}{1 + 0{,}1962} = 3{,}44.$$

Используем полученный параметр для оценки влияния на цену облигации ожидаемого повышения рыночного процента с 19,62 до 20%. Находим

$$\Delta K = -0,01 \times 3,44 \times 65 \times 0,38 = -0,85,$$

т.е. при указанном повышении ставки курс облигации составит $65 - 0,85 = 64,15$.

§11.5. Оценивание займов и облигаций

Методы оценивания. Оценивание займов представляет собой один из важнейших видов количественного финансового анализа, имеющего различные практические приложения. Поскольку займы часто реализуются посредством выпуска облигаций, то метод их оценивания обсудим применительно к облигациям, причем оценивание рассмотрим с позиции инвестора.

Оценивание заключается в определении капитализированной суммы доходов от облигации (или другого вида займа), т.е. суммы денег, которая в финансовом отношении эквивалентна этим доходам с учетом сроков их выплат. Эта сумма равна современной стоимости доходов при некоторой заданной величине процентной ставки. В зависимости от постановки задачи — это существующая или ожидаемая ставка денежного рынка, или, наконец, ставка помещения. Нетрудно убедиться в том, что оценивание облигаций является задачей, обратной определению их полной доходности.

Конкретные методы оценивания различных видов облигаций рассмотрим в той последовательности, которая была принята при определении их доходности.

Облигации без обязательного погашения с периодической выплатой процентов. Напомним, что процесс выплаты процентов здесь можно рассматривать как вечную ренту. Современная стоимость такой ренты определена в гл. 5. Согласно этой формуле имеем:

$$P = \frac{gN}{i} \text{ и } K = \frac{g}{i}100.$$

Таким образом, курс такой облигации прямо пропорционален норме купонного дохода и обратно пропорционален рыночной ставке.

Если доход выплачивается p раз в году, то

$$P = \frac{gN}{p[(1+i)^{1/p} - 1]}, \quad K = \frac{g}{p[(1+i)^{1/p} - 1]}100.$$

ПРИМЕР 11.10. Пусть некоторый источник дохода постоянно приносит 8% годовых. Каков расчетный курс данных инвестиций при условии, что доход будет поступать достаточно продолжительное время, а ставка помещения берется на уровне 12%? Получим

$$K = \frac{8}{12}100 = 66{,}67.$$

Для того чтобы обеспечить доходность на заданном уровне, курс должен быть равен расчетной величине.

Облигации без выплаты процентов (с нулевым купоном). Напомним, что здесь один источник дохода — разность между ценой приобретения и номиналом, если облигация погашается по номиналу. По определению

$$P = Nv^n, \qquad K = v^n 100.$$

Очевидно, что курс уменьшается вместе с ростом рыночной ставки и срока облигации.

Облигации с выплатой процентов и номинала в конце срока. Общая сумма, которую получает владелец облигации при ее погашении, равна $N(1 + g)^n$. Соответственно расчетная цена и курс при ставке помещения i составят

$$P = N\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n, \qquad K = \left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n 100.$$

Из последней формулы следует, что курс определяется тремя параметрами, причем влияние срока зависит от соотношения ставок g и i. Если $g > i$, то, как видим, с увеличением срока курс экспоненциально растет.

ПРИМЕР 11.11. Пусть текущий доход от облигации выплачивается вместе с номиналом в конце срока; $n = 5$, $g = 8\%$ (начисление процентов поквартальное), $i = 12\%$. В этом случае

$$K = \left(\frac{(1 + 0{,}08 / 4)^4}{1 + 0{,}12}\right)^5 100 = 84{,}32.$$

Облигации с периодической выплатой процентов и погашением номинала в конце срока. Напомним, что доход от таких облигаций имеет два источника — периодически получаемые проценты и разность между ценой приобретения и выкупной ценой. Необходимые равенства для определения цены и курса таких облигаций были найдены выше (см. (11.6)—(11.10)).

ПРИМЕР 11.12. Для облигации примера 11.11 при условии, что проценты выплачиваются поквартально, находим согласно (11.8)

$$K = [(1 + 0{,}12)^{-5} + 0{,}08a^{(4)}_{5;12}]\,100.$$

Поскольку $a^{(4)}_{5;12} = \dfrac{1 - 1{,}12^{-5}}{4(1{,}12^{1/4} - 1)} = 3{,}76316$, окончательно получим $K = 86{,}85$.

Для определения расчетного курса по формулам (11.7) и (11.9) можно применить программу ПЗ пакета *Excel* (см. с. 110—111).

Влияние факторов. Посмотрим, как влияют различные факторы на курс облигации. Для этого вернемся к равенству (11.7):

$$\frac{K}{100} = v^n + ga_{n;i}.$$

Очевидно, что изменение купонной процентной ставки влияет только на второе слагаемое. Так, рост этой ставки увеличивает данное слагаемое и курс в целом, причем это увеличение линейно: чем больше рыночная ставка, тем это влияние меньше при всех прочих равных условиях.

Что касается влияния рыночной ставки процента или ставки помещения, учитываемой в расчете, то *повышение этой ставки приводит к сокращению обоих слагаемых курса облигации.* Зависимость курса от размера рыночной ставки показана на рис. 11.3, на основе которого можно сделать один важный в практическом отношении вывод: *чем больше срок облигации, тем чувствительней курс к изменению рыночной ставки* (круче кривая).

Сказанное объясняет тактику поведения инвесторов на рынке облигаций. Так, *если ожидается повышение рыночной ставки, то инвесторы стремятся заменить долгосрочные облигации на облигации с меньшим сроком.* При ожидании снижения ставки происходит обратное.

Степень влияния уровня рыночной ставки на курс облигации зависит и от размера купонной нормы дохода — чем она выше, тем меньше влияет изменение ставки. Указанная зависимость лежит в основе следующего правила поведения инвесторов: *при ожидании повышения рыночной ставки для инвестора предпочтительней покупать облигации с высокой купонной доходностью и, наоборот, при понижении ставки для инвестора целесообразно вкладывать деньги в облигации с низкой купонной доходностью.*

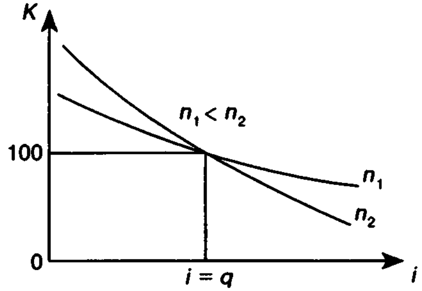

Рис. 11.3

Перейдем к влиянию срока облигации. С увеличением срока величина первого слагаемого курса падает, второго растет при всех прочих равных условиях. Суммарный результат зависит от того, в каком соотношении находятся норма купонного дохода и рыночная ставка процента (см. рис. 11.4). На этом рисунке показано, что при $g > i$ сокращение первого слагаемого перекрывается ростом второго. При равенстве нормы купонного дохода рыночной ставке изменения слагаемых курса полностью компенсируют друг друга.

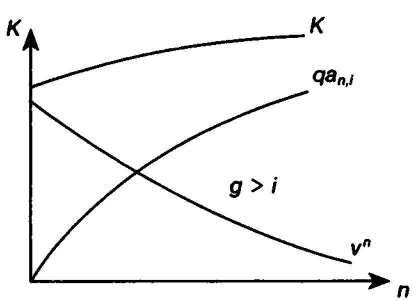

Рис. 11.4

Проблема оценивания облигаций существует не только тогда, когда облигация покупается или продается на рынке, но и когда она находится у владельца. В общем случае ее цена изменяется во времени даже в такой крайне редкой ситуации, когда рыночная процентная ставка остается постоянной и уж тем более, если эта ставка изменяется. С приближением даты погашения увеличивается современная стоимость суммы, получаемой при погашении облигации, одновременно уменьшается современная стоимость будущих поступлений по купонам. Какой бы ни была цена до погашения, в конце срока цена облигации равна номиналу или некоторой заранее фиксированной выкупной цене.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Четыркин Е.М.* Методы финансовых и коммерческих расчетов. М.: Дело, 1995. Гл. 11.
2. *Кристина И.* Рынок облигаций. М.: Дело, 1999. Гл. 5.
3. *Cartledge P.* Financial arithmetic. A practitioners guide. Euromoney Books, 1993. Ch 5, 6.

Глава 12

ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ИНВЕСТИЦИИ. ИЗМЕРИТЕЛИ ФИНАНСОВОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ

§12.1. Характеристики эффективности производственных инвестиций

Основные финансовые критерии. Финансовый анализ производственных инвестиций в основном заключается в *измерении (оценивании) конечных финансовых результатов инвестиций — их доходности для инвестора.* С такой задачей сталкиваются как на этапе первоначального анализа финансовой "привлекательности" проекта, так и при разработке бизнес-плана. Отрицательный вывод обычно дает основание отказаться от дальнейшего, более основательного и углубленного, изучения проекта. Без расчета такого рода измерителей нельзя осуществить и сравнение альтернативных инвестиционных проектов. Разумеется, при принятии решения о выборе объекта для инвестирования принимаются и другие критерии помимо финансовых. Например, экологические последствия осуществления проекта, возможность создания дополнительных рабочих мест, развитие производственной базы в данной местности и т.д. В этой главе обсуждение ограничено только финансовыми критериями.

Интерес к тонким методам измерения эффективности обычно не возникает при очевидной высокой доходности проектов, превышающей существующий уровень ссудного процента. Так, в послевоенные годы в США при 20% доходности инвестированного акционерного капитала и 3—4%-м уровне ссудного процента менеджеры нефтяных и газовых компаний не применяли сложные критерии. И только в конце 50-х годов, когда наступило заметное снижение доходности от бурения новых скважин, возникла необходимость в разработке и применении более надежных и строгих критериев.

Первое, что, вероятно, бросается в глаза при рассмотрении методик измерения эффективности инвестиций, — это их разнообразие. За рубежом каждая корпорация, руководствуясь сложившимся опытом управления финансовыми ресурсами, их наличием, целями, преследуемыми в тот или иной момент, а иногда и амбициями, применяет свою методику. Вместе с тем в последние два десятилетия сформировались и общие подходы к решению данной задачи.

Применяемые в финансовом анализе методики и критерии можно разбить на две большие группы по тому, учитывают они фактор времени или нет. Как было показано в первой главе, учет фактора времени опирается на дисконтирование соответствующих стоимостных величин, в связи с чем методы и измерители первой группы часто называют *дисконтными*. Ко второй относят методы без дисконтирования распределенных во времени денежных сумм (затрат и отдачи от них). Условно назовем последние *бухгалтерскими*. Обычно в финансовом анализе одновременно используются показатели, получаемые дисконтными и бухгалтерскими методами. В данной и следующей главах внимание сконцентрировано на дисконтных методах — в современной зарубежной практике у средних и крупных фирм они являются преобладающими. Мелкие фирмы обычно ограничиваются субъективными оценками и бухгалтерскими методами. Методы первой группы начали применять, и весьма интенсивно, и в отечественной практике.

В анализе в основном используют четыре, основанные на дисконтировании, показателя:

— чистый приведенный доход (*net present value*),
— внутреннюю норму доходности (*internal rate of return*),
— дисконтный срок окупаемости (*discounted payback method*),
— индекс доходности (*profitability index, benefit-cost ratio).*

Перечисленные показатели отражают результат сопоставления обобщенных, суммарных отдач от инвестиций со стоимостью самих инвестиций. Причем эти сопоставления производятся под разным углом зрения. Кратко определим их содержание.

Под *чистым приведенным доходом* понимается разность дисконтированных показателей чистого дохода (положительные величины) и инвестиционных затрат (отрицательные величины). Чистый приведенный доход, как видим, представляет собой обобщенный конечный результат инвестиционной деятельности в абсолютном измерении.

Относительной мерой эффективности реализации инвестиционного проекта является *внутренняя норма доходности.* Этот параметр характеризует такую расчетную процентную ставку, которая при ее начислении на суммы инвестиций обеспечит поступление предусматриваемого (ожидаемого) чистого дохода. Иначе говоря, эта ставка "уравновешивает" инвестиции и доходы, распределенные во времени.

По определению современная стоимость доходов, полученных за *дисконтный срок окупаемости* $n_{ок}$, должна быть равна сумме инвестиций, т.е. окупить инвестиции с учетом разновременности получаемых доходов. Срок окупаемости можно рассматривать как характеристику риска — чем он больше, тем выше вероятность изменения условий для получения ожидаемого дохода. Данная характеристика частично совпадает, но только по названию, с показателем, применяемым в отечественной практике (бухгалтерский метод).

Последний из перечисленных выше измерителей эффективности капиталовложений, *индекс доходности* или *отношение "доход—затраты"*, равен отношению современной стоимости поступлений к стоимости инвестиций. Как видим, он близок по своему содержанию к показателю *рентабельности*.

Для того чтобы сущность перечисленных показателей была более наглядна, обратимся к частному, но достаточно распространенному случаю. Пусть инвестиции совершаются мгновенно (например, приобретение законченного производственного объекта), а доходы поступают регулярно в виде постоянной ограниченной ренты постнумерандо. В этом случае чистый приведенный доход (N) находится как

$$N = Ra_{n;i} - K, \tag{12.1}$$

где K — мгновенные инвестиционные затраты; $a_{n;i}$ — коэффициент приведения постоянной ренты; R — член потока доходов; n — продолжительность периода поступления дохода; i — ставка, принятая для дисконтирования.

Если капиталовложения не мгновенны, а распределены во времени, то под K понимается сумма инвестиций с начисленными процентами к концу срока инвестиций.

Внутренняя норма доходности (J) находится на основе условия $N = 0$. Отсюда

$$Ra_{n;J} - K = 0. \tag{12.2}$$

Дисконтный срок окупаемости ($n_{ок}$) устанавливается из соотношения

$$K = Ra_{n_{ок};i}. \tag{12.3}$$

Наконец, индекс доходности (U) определяем следующим путем:

$$U = \frac{Ra_{n;i}}{K}. \tag{12.4}$$

Как видим, во всех этих формулах используются одни и те же исходные данные, но в разных комбинациях и с разными коэффициентами приведения ренты.

Что касается методов измерения эффективности, которые выше названы бухгалтерскими, то они имеют определенную ценность для анализа и применяются для получения самых общих характеристик при предварительной оценке инвестиционного проекта или тогда, когда нет необходимости в серьезном его анализе. К таким показателям относятся:

— срок окупаемости (*payback*, *payout period*),
— отдача капитальных вложений (*profit-to-investment ratio*),
— удельные капитальные затраты.

Первый из названных показателей широко известен в отечественной практике и нет необходимости детально останавливаться на нем. Эта характеристика заметно отличается от дисконтного срока окупаемости $n_{ок}$.

Под отдачей капиталовложений понимают отношение суммы доходов за весь ожидаемый период отдачи к размеру инвестиций.

Удельные капитальные затраты характеризуют инвестиционные издержки в расчете на единицу выпуска однородной продукции. Например, капиталовложения на одну тонну дневной добычи нефти и тому подобное.

Естественно, что разные показатели совсем не обязательно дадут одинаковые результаты в отношении предпочтительности того или иного инвестиционного проекта. Дело в том, что они имеют разный смысл и измеряют эффект с различных точек зрения. Неоднозначность результатов, получаемых при оценивании эффективности проектов, является причиной того, что многие фирмы для повышения надежности при отборе вариантов инвестирования ориентируются на два и более измерителя.

Как показал опрос крупнейших нефтяных компаний США, 98% из них использовали в качестве основного или дополнительного по крайней мере один из перечисленных выше измерителей первой группы, а многие — несколько. Наиболее часто в качестве основного измерителя использовалась внутренняя норма доходности, на втором месте оказался дисконтный срок окупаемости, наконец, третье место принадлежало чистому приведенному доходу.

В обзоре было отмечено, что результативность формального количественного анализа тем выше, чем крупнее компания. Мелкие компании приняли на основе формальных критериев 25% проектов, крупные — обосновывали на основе рассматриваемых критериев 92% из принятых проектов.

Для окончательного решения о выборе проекта, разумеется, привлекаются и дополнительные критерии, в том числе и неформальные, например, связанные с экологией и безопасностью работы персонала.

Потоки платежей в инвестиционном анализе. Основная задача при разработке модели, с помощью которой намереваются проанализировать долгосрочный инвестиционный проект, в том числе измерить его финансовую эффективность, заключается в формировании ожидаемого *потока платежей*. Первым шагом в этом направлении является разработка структуры потока во времени — разбивка его на этапы, различающиеся своим содержанием и закономерностями в изменении доходов и затрат. При этом должны быть приняты во внимание как ожидаемые внешние условия (например, динамика цен на продукцию), так и производственные параметры (объемы производства, уровень производственных затрат и т.д.).

Пусть для определенности речь идет о предприятии по добыче минерального сырья. Тогда процесс осуществления проекта можно разбить на следующие основные этапы: цикл изыскательских работ, проектирование, строительство, закупка оборудования, его монтаж и наладка. В свою очередь процесс отдачи разбивается на периоды: освоение, нормальная эксплуатация, истощение месторождения. Каждый из выделенных периодов характеризуется своими уровнями доходов и расходов в виде фиксированных величин или статистических распределений, наконец, зависимостей от некоторых внешних условий или производственных параметров. Например, расходы на изыскание и проектирование часто можно рассматривать как постоянные в определенном отрезке времени, а на строительство — как переменные. Закупка оборудования связана с разовыми выплатами и т.д. Что касается доходов, то в каждом из выделенных производственных периодов они могут рассматриваться как непрерывные величины. Причем, в первом они растут, во втором — стабильные, в третьем — сокращаются.

Часто отдельные отрезки потока платежей могут быть представлены в виде постоянных или переменных дискретных, или, наконец, непрерывных рент. Сформированные таким путем показатели затрат и поступлений дают возможность определить члены потока платежей для каждого временного интервала.

В общем виде *член потока платежей* для каждого временного интервала определяется следующим образом при условии, что выплачивается налог на прибыль:

$$R = (G - C) - (G - C - D)T - K + S, \qquad (12.5)$$

R — член потока платежей;
G — ожидаемый общий доход от реализации проекта , сумма выручки за период;
C — текущие расходы;
D — расходы, на которые распространяются налоговые льготы;
T — налоговая ставка;
K — инвестиционные расходы;
S — различные компенсации, сокращающие текущие затраты.

Приведенное уравнение характеризует общий подход к определению члена потока. Оно может быть уточнено и развито с учетом конкретных условий и принятой в фирме методики, методам начисления и выплат налогов и т.д.

Выражение (12.5) разработано без учета источников финансирования. Если в потоке платежей учитывается привлечение заемных средств, их погашение и выплата процентов, то член потока определяется следующим образом:

$$R = (G - C - I) - (G - C - D - I)T - K + B - P + S, \qquad (12.6)$$

где I — сумма выплаченных процентов за заемные средства; B — полученные в текущем году заемные средства; P — погашение основного долга.

В данном выражении предполагается, что суммы выплат процентов за кредит освобождаются от налогов.

Нетрудно видеть, что в первые годы реализации проекта члены потока — отрицательные величины, так как затраты превышают поступления. Нельзя исключить ситуации, когда отрицательными оказываются потоки платежей и в отдельные годы периода эксплуатации, например, в связи с модернизацией технологического процесса.

Инвестиционные затраты включают все виды расходов, необходимых для реализации проекта: проектно-изыскательские работы, закупка лицензий, заказ и оплата оборудования, строительство, монтаж и наладка оборудования и т.д. Что касается поступлений от инвестиций, то в расчет принимаются только чистые доходы. Причем, под чистым доходом понимается не бухгалтерская прибыль, а доход, полученный в каждом временном отрезке, за вычетом всех реальных расходов, связанных с его созданием. Важно подчеркнуть, что *амортизационные списания здесь не учитываются в расходах*, так как соответствующие затраты сделаны раньше — при инвестировании средств. Теоретически такой подход более последователен, так как фактор времени надо учитывать применительно ко всем затратам.

Ставка приведения. Какой бы дисконтный метод оценки эффективности инвестиций ни был выбран, так или иначе он связан с приведением как инвестиционных расходов, так и доходов к одному моменту времени, т.е. с расчетом соответствующих современных стоимостей потоков платежей. Важным моментом здесь является выбор уровня процентной ставки для дисконтирования. Назовем эту величину *ставкой приведения* (при сравнении нескольких вариантов инвестиций логично называть эту величину *ставкой сравнения)*. Какую ставку следует принять в конкретной ситуации — дело экономического суждения. Чем ставка выше, тем в большей мере отражается фактор времени, так как отдаленные платежи оказывают все меньшее влияние на современную стоимость потока. Из сказанного следует, что получаемые обобщенные величины доходов от инвестиций являются в определенной степени условными характеристиками. В зависимости от конкретных сложившихся условий учет фактора времени может меняться, и то, что представлялось предпочтительным в одних условиях, может не оказаться таковым в других. Однако, и это важно подчеркнуть, полученное для одного уровня процентной ставки ранжирование нескольких проектов по их финансовой эффективности сохранится в пределах большого диапазона уровня ставки, т.е. наблюдается известная инвариантность результатов.

Выбор уровня процентной ставки для дисконтирования за редкими исключениями не является однозначным и зависит от ряда факторов. Обычно ориентируются на существующий или ожидаемый уровни ссудного процента. Практически для этого используют конкретные ориентиры — доходность ряда ценных бумаг, банковских операций и т.д. с учетом условий деятельности инвестора.

В западной литературе ставку, принятую для дисконтирования потоков платежей в инвестиционном проекте, рассматривают как *минимально привлекательную ставку доходности* (*minimum attractive rate of return, MARR*). В отечественной практике эту ставку, вероятно, следует рассматривать как *норматив доходности*, приемлемый для инвестора. Если финансовый анализ предполагает расчет внутренней нормы доходности, то этот норматив рассматривается как некоторое пороговое (минимально допустимое) значение данного параметра.

Разумеется, при выборе ставки приведения нельзя не учитывать финансовое положение инвестора, его способность учесть будущие условия и т.п. Важным моментом является учет риска. Риск в инвестиционной деятельности независимо от ее конкретных форм в конечном счете проявляется в виде возможного сокращения отдачи от вложенного капитала по сравнению с ожидаемой ее величиной. В качестве общей рекомендации по учету риска сокращения отдачи, инфляционного обесценения дохода, изменения конъюнктуры и других отрицательных факторов обычно предлагается вводить *рисковую надбавку* к уровню ставки приведения.

Заметим, что одна и та же компания может применять различные ставки приведения для оценки инвестиционных проектов, имеющих разное назначение, сроки реализации и т.д. Например, вполне оправданным является использование более низких ставок при оценивании проекта расширения действующего производства, чем при создании нового предприятия.

§12.2. Чистый приведенный доход

Как уже отмечалось выше, в качестве основного измерителя конечного абсолютного результата инвестирования большее распространение получил *чистый приведенный доход*. Он имеет ясную логическую основу и применим при решении широкого круга финансовых проблем, в том числе при определении различных показателей эффективности, его легко рассчитать.

Методы расчетов. Пусть капиталовложения и доходы представлены в виде потока платежей, тогда искомая величина находится как современная стоимость этого потока, определенная на начало действия проекта. Таким образом,

$$N = \sum_t R_t v^t, \tag{12.7}$$

где R_t — размер члена потока платежей в году t; v — дисконтный множитель по ставке i (ставка приведения, принятая норма доходности).

Напомним, что членами потока платежей являются как положительные (доходы), так и отрицательные (инвестиционные затраты) величины. Соответственно, положительной или отрицательной может быть и величина N. Последнее означает, что доходы не окупают затраты при принятой норме доходности и заданном распределении капитальных вложений и поступлений во времени.

Если ряд платежей продолжителен, то для расчета величины N при условии, что платежи производятся через равные интервалы и в конце каждого периода, можно воспользоваться программой НПЗ (NPV) пакета *Excel*. Порядок действий при использовании этой программы приведен в § 5.1.

Пусть теперь поток платежей представлен раздельно, т.е. как поток инвестиций и поток чистых доходов, тогда чистый приведенный доход определяется как разность

$$N = \sum_{j=1}^{n_2} R_j v^{j+n_1} - \sum_{t=1}^{n_1} K_t v^t, \tag{12.8}$$

где K_t — инвестиционные расходы в году t, $t = 1,2,...,n_1$; R_j — чистый доход в году j, $j = 1,2,...,n_2$; n_1 — продолжительность инвестиционного периода; n_2 — продолжительность периода поступлений дохода.

Обычно, особенно в учебной, да и практической, финансовой литературе, годовые данные о размерах членов потока приурочиваются к окончаниям соответствующих лет. Однако зачастую отдельные компоненты потока можно с достаточным основанием рассматривать как равномерно распределенные затраты (поступления) в пределах года. Более точный результат расчета в таких условиях можно получить, приписывая соответствующие величины к серединам годовых интервалов. В связи с этим современная стоимость потока увеличивается в $(1 + i)^{0,5}$ раз.

ПРИМЕР 12.1. Сравниваются по финансовой эффективности два варианта инвестиций. Потоки платежей характеризуются следующими данными, которые относятся к окончаниям соответствующих лет:

А:	−100	−150	50	150	200	200	—
Б:	−200	−50	50	100	100	200	200

Варианты, как видим, заметно различаются между собой по характеру распределения платежей во времени. Если норматив доходности (ставка сравнения) принят на уровне 10%, то

$$N_A = -214{,}9 + 377{,}1 = 162{,}2; \quad N_Б = -223{,}14 + 383{,}48 = 160{,}3.$$

Таким образом, если исходить из величины чистого приведенного дохода, то при принятой процентной ставке сравниваемые варианты в финансовом отношении оказываются почти равноценными.

Несколько изменим условия задачи и, полагая, что доходы поступают равномерно в пределах года, сдвинем члены потоков платежей к серединам годовых интервалов. Тогда соотношение результатов для двух вариантов изменится, хотя общий вывод о примерной равноценности вариантов сохраняется. Находим

$$N_A = -225{,}4 + 395{,}5 = 170{,}1; \quad N_Б = -234{,}0 + 402{,}2 = 168{,}2.$$

Обобщенные стоимостные характеристики обоих потоков несколько увеличились.

В случаях, когда поток доходов можно описать как постоянную или переменную ренту, расчет N заметно упрощается. Так, если доходы поступают в виде постоянной годовой ренты, причем ожидается, что они равномерно распределены в пределах года, то

$$N = Ra_{n_2;i}v^{n_1-0{,}5} - \sum_{t=1}^{n_1} K_t v^t, \tag{12.9}$$

где R — годовая сумма дохода.

Если капиталовложения мгновенны, а доходы регулярно поступают сразу после инвестирования, то

$$N = Ra_{n;i} - K. \tag{12.10}$$

ПРИМЕР 12.2. Проект предполагается реализовать за три года. Планируются следующие размеры и сроки инвестиций: в начале первого года единовременные затраты — 500, во втором году — только равномерные расходы, общая их сумма — 1000, в конце третьего года единовременные затраты — 300. Отдачу планируют получать 15 лет: в первые три года по 200, далее в течение 10 лет ежегодно по 600, в оставшиеся три года по 300. Доходы поступают равномерно в пределах годовых интервалов.

Пусть ставка приведения равна 10%, тогда современная стоимость капиталовложений составит

$$\sum_{t=1}^{3} K_t v^t = 500 + 1000 \times 1{,}1^{-1{,}5} + 300 \times 1{,}1^{-3} = 1592{,}2.$$

В свою очередь современная стоимость поступлений равна

$$200a_{3;10} \times 1{,}1^{-2{,}5} + 600a_{10;10} \times 1{,}1^{-5{,}5} + 300a_{2;10} \times 1{,}1^{-15{,}5} = 2693{,}4.$$

Отсюда $N = 1101{,}2$, т.е. капиталовложения окупаются.

Несколько изменим условия примера. Допустим, капиталовложения в первом году составляют не 500, а 1700. Тогда $N \approx -100$. Таким образом, капиталовложения при заданной процентной ставке не окупаются, несмотря на то, что их общая сумма (3000) существенно меньше общей суммы поступлений (7500).

Во всех рассмотренных выше случаях предполагалось, что ставка приведения не изменяется во времени. Однако нельзя исключить ситуацию, когда, например, в связи с ожиданием увеличения риска неполучения дохода, можно применить увеличивающуюся во времени процентную ставку. Общая методика расчета при этом не изменится.

§12.3. Свойства чистого приведенного дохода

Остановимся на особенностях чистого приведенного дохода, важных для его понимания и практического применения. Первое, на что надо обратить внимание, — чистый приведенный доход — это абсолютный показатель и, следовательно, зависит от масштабов капитальных вложений. Это обстоятельство необходимо учитывать при сравнении нескольких инвестиционных проектов.

Второе — существенная зависимость чистого приведенного дохода от временных параметров проекта. Выделим два из них: срок начала отдачи от инвестиций и продолжительность периода отдачи. Сдвиг начала отдачи вперед уменьшает величину современной стоимости потока доходов пропорционально дисконтному множителю v^t, где t — период отсрочки.

ПРИМЕР 12.3. Пусть по каким-либо причинам момент начала отдачи в примере 12.1 (вариант *А*) отодвигается, скажем, всего на один год. В этом случае

$$N_A = -214{,}9 + 377{,}1 \times 1{,}1^{-1} = 127{,}9.$$

Теперь этот вариант заметно проигрывает по величине чистого приведенного дохода по сравнению с вариантом *Б*.

Что касается продолжительности периода отдачи, то заметим, — чрезмерное его увеличение создает иллюзию повышения полноты и надежности оценки эффективности. Однако размеры отдаленных во времени доходов вряд ли можно считать вполне надежными и обоснованными. Кроме того, затраты и поступления, ожидаемые в далеком будущем, мало влияют на величину чистого приведенного дохода и ими, как правило, можно пренебречь. В связи со сказанным уместно привести следующую иллюстрацию. Пусть речь идет о доходе, поступающем в виде постоянной ренты. Зависимость N от срока ренты n показана на рис.12.1. В начальный момент $N = -K$. В точке $n = a$ капиталовложения точно окупаются поступившими доходами. По мере увеличения срока поступлений дохода увеличивается величина N. Однако прирост ее замедляется, а само значение N стремится к некоторому пределу A.

Выбор момента, относительно которого дисконтируются члены потока платежей (*focal date*), также влияет на величину N. Обычно для этого выбирается начало реализации проекта.

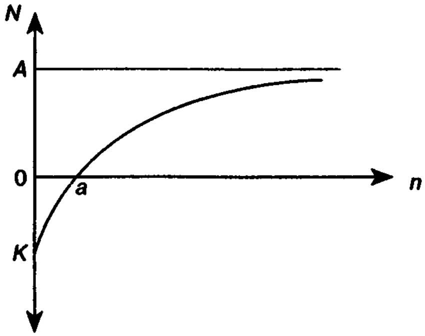

Рис. 12.1

Сдвиг вперед момента времени для оценивания N увеличивает абсолютные значения обеих составляющих чистого приведенного дохода. Знак у величины N не изменяется при сдвиге момента для оценивания. Заметим также, что предпочтительный вариант проекта остается таковым при любом выборе момента. При сравнении нескольких проектов должно соблюдаться естественное требование — этот момент должен быть общим для всех проектов.

Проследим теперь влияние процентной ставки на величину N. Из (12.8) следует, что с ростом ставки приведения размер чистого приведенного дохода сокращается. Зависимость N от ставки i для случая, когда вложения осуществляются в начале инвестиционного процесса, а отдачи примерно равномерные, иллюстрируется на рис.12.2.

Как показано на рисунке, когда ставка приведения достигает некоторой величины J, финансовый эффект от инвестиций оказывается нулевым. Ставка J является важной характеристикой в инвестиционном анализе. Ее содержание и метод расчета обсуждаются в следующем параграфе. Здесь же отметим, что любая ставка, меньшая чем J, приводит к положительной оценке N (точки a и b), и наоборот, дисконтирование по ставке выше J дает отрицательную величину чистого приведенного дохода (точка c) при всех прочих равных условиях. Как видим, изменение ставки приведения оказывает заметное влияние на абсолютную величину N. Например, для условий, согласно которым инвестиции осуществляются равномерно в течение трех лет, ежегодно по 100, а доходы будут поступать 7 лет также по 100 денежных единиц, находим следующие значения N в зависимости от уровня процентной ставки:

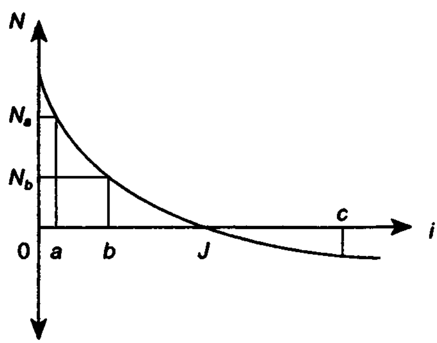

Рис. 12.2

i	5	10	15	20
N	220,8	105,0	28,8	−22,2

Нулевая величина чистого приведенного дохода в этом примере имеет место при условии $i = J = 17{,}5$ %.

Картина рассматриваемой зависимости резко изменяется, если члены потока платежей меняют знаки больше одного раза. Например, в силу того, что через определенное количество лет после начала отдачи предусматривается модернизация производства, требующая значительных затрат. В этом случае кривая зависимости N от i будет заметно отличаться от кривой на рис. 12.2. Так, на рис.12.3 показана ситуация, когда величина N трижды меняет свой знак.

Влияние размеров затрат и доходов на N очевидно. Величина N находится в линейной зависимости от каждого из указанных показателей. Причем, чем отдаленнее срок поступления или затрат, тем меньше это влияние.

Теперь остановимся на сравнении (ранжировании) нескольких вариантов проекта по величине N. На первый взгляд представляется, что такое сравнение весьма условно, так как N зависит от уровня ставки. Однако, итог ранжирования проектов обладает высокой устойчивостью (инвариантностью) по отношению к ставке приведения. Для пояснения обратимся к случаю, когда сравниваются три проекта. Обозначим их как *А*, *Б* и *В*. Капиталовложения во всех случаях мгновенные, а потоки доходов представляют собой постоянные ренты постнумерандо с одинаковыми сроками, но разными размерами отдачи. Потоки платежей и расчетные значения N и J показаны в табл. 12.1. При расчете N применена ставка 12 %.

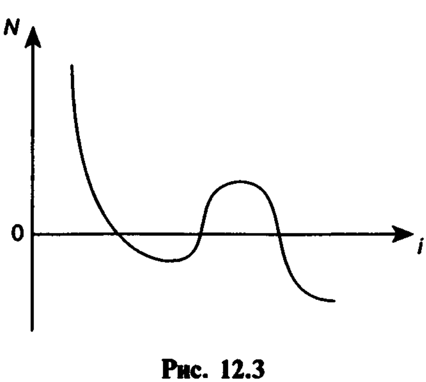

Рис. 12.3

Таблица 12.1

t	*А*	*Б*	*В*
0	−20	−25	−25
1	5	7	6
2	5	7	6
...	...	...	...
10	5	7	6
N	8,25	14,55	8,90
J (%)	21,4	25,0	20,2

Наибольшие значения *N* и *J* у варианта *Б*. Кривые зависимости *N* от *i* для вариантов *А* и *Б* показаны на рис.12.4. Как видим, для любых значений *i* положительные значения *N* варианта *Б* больше, чем у *А*. В свою очередь при сравнении вариантов *А* и *В* (см. рис. 12.5) обнаруживаем, что чистый приведенный доход по варианту *В* больше, чем у *А* при применении любой ставки, вплоть до 15,1 %. Если ставка приведения превышает этот уровень, то места проектов по уровню чистого приведенного дохода меняются.

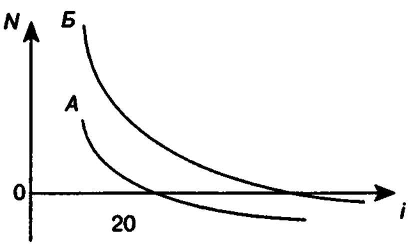

Рис. 12.4

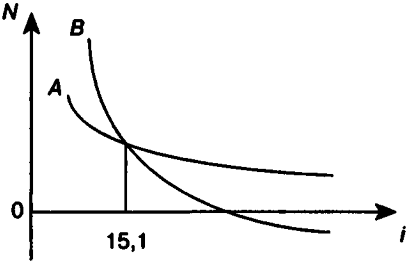

Рис. 12.5

Приведенный пример иллюстрирует тот факт, что выбор процентной ставки иногда совсем не сказывается на ранжировании проектов. Точка пересечения кривых *А* и *В* определяет критическую или барьерную ставку по терминологии седьмой главы.

§12.4. Внутренняя норма доходности

Не менее важным для финансового анализа производственных инвестиций, как и чистый приведенный доход, является ***внутренняя норма доходности***. Под этим критерием понимают такую расчетную ставку приведения, при которой капитализация получаемого дохода дает сумму, равную инвестициям, и, следовательно, капиталовложения только окупаются. Иначе говоря, при начислении на сумму инвестиций процентов по ставке, равной внутренней норме доходности (обозначим ее как J), обеспечивается получение распределенного во времени дохода, эквивалентного инвестициям. Чем выше эта норма, тем, разумеется, больше эффективность инвестиций. Обсуждаемый параметр может быть как положительной, так и отрицательной величиной. Последнее означает, что инвестиции не окупаются. Величина этой ставки полностью определяется "внутренними" условиями, характеризующими инвестиционный проект. Никакие предположения об использовании чистого дохода за пределами проекта не рассматриваются.

Пусть i — приемлемый для инвестора уровень ставки процента, — выше она была названа минимально привлекательной ставкой доходности или нормативом доходности. Очевидно, что разность ставок $J - i$ характеризует эффективность инвестиционной (предпринимательской) деятельности. С чисто финансовых позиций инвестиции имеют смысл только тогда, когда $J \geqslant i$. При $J < i$ нет оснований для осуществления инвестиций, так как доходность ниже принятого норматива, если же под i понимается стоимость заемных средств, то они просто убыточны.

Расчет внутренней нормы доходности часто применяют в качестве первого шага анализа инвестиций. Для дальнейшего анализа отбираются только те проекты, которые обеспечивают некоторый приемлемый для данной компании уровень доходности. Последний зависит от многих объективных и субъективных обстоятельств и охватывает весьма большой диапазон возможных значений даже для однородных видов предприятий.

Методы расчетов. В общем случае, когда инвестиции и доходы задаются в виде потока платежей, искомая ставка J определяется на основе решения уравнения (12.7) относительно v каким-либо методом[1]:

$$\sum_{t}^{n} R_t v^t = 0, \tag{12.11}$$

[1] Напомним, что инвестиции имеют в этом равенстве отрицательный знак, доходы — положительный. Положительное значение J имеем в случае, когда сумма дисконтированных доходов больше размера инвестиций. Если все члены потока имеют один знак, то, естественно, искомую ставку получить нельзя.

где v — дисконтный множитель по искомой ставке J; t — время от начала реализации проекта; R_t — член потока платежей (вложения и чистые доходы).

Затем, зная v, находим искомую ставку J. Расчет искомой ставки осуществляется различными методами, дающими разные по точности ответы. Различаются они и по трудоемкости. В западной учебной литературе часто ограничиваются методом последовательного подбора значения ставки до выполнения условия $N = 0$. Действительно, при наличии опыта и сравнительно коротком потоке платежей такой подход довольно быстро дает удовлетворительные результаты. Более "серьезные" методы определения J основываются на различных итерационных процедурах. К ним, в частности, относятся ***метод Ньютона—Рафсона*** и ***метод секущей*** или какие-либо численные процедуры.

В пакете *Excel* содержится программа ВНДОХ, которая позволяет определить внутреннюю норму доходности[1] на основе потока платежей с одинаковыми интервалами между членами потока. Инвестиции показываются с отрицательным знаком, доходы — с положительным. Члены потока относят к концам периодов.

Порядок действий при использовании программы ВНДОХ

1. Разместить показатели потока платежей в одной строке или столбце таблицы *Excel*. Если платежей в периоде нет, то соответствующую ячейку таблицы не заполнять и перейти к следующему периоду.
2. Последовательно вызвать: f_x, **"финансовые функции"**, **ВНДОХ.**
3. В строке **Значения** показать адрес массива данных в таблице *Excel*.
4. В строке **Предположения** указать ожидаемое (примерное) значение нормы доходности[2]. Если этот параметр не указывается, то он по умолчанию принимается равным 0,1.

[1] В сопровождающем программу тексте этот показатель ошибочно назван "скоростью оборота".

[2] Для определения внутренней нормы доходности применяется итерационный процесс, поэтому желательно указать некоторое ориентировочное начальное значение ставки.

После выполнения действий 1—3 в итоговой строке **Значение** автоматически показывается расчетная величина внутренней нормы доходности. После нажатия кнопки **ОК** эта величина показывается в выделенной ячейке таблицы *Excel*.

Примечание. Пользователь может изменять размеры членов потока платежей, не выходя из таблицы *Excel*.

Чистый приведенный доход при условии, что дисконтирование членов потока производится по ставке J, по определению равен нулю (см. рис. 12.2). На этом рисунке кривая пересекает ось i только один раз в точке J. Это типовой случай. Однако — об этом уже упоминалось выше — при специфическом распределении членов потока во времени последовательные члены потока платежей могут изменять свой знак несколько раз (например, если ожидаются в будущем крупные затраты на модернизацию процесса производства). В этих случаях кривая пересекает эту ось несколько раз (см. рис. 12.3). Соответственно, имеется несколько значений искомой ставки (несколько корней многочлена), удовлетворяющих условию (12.7). Заметим, что условие смены знаков является необходимым, но недостаточным для получения нескольких корней.

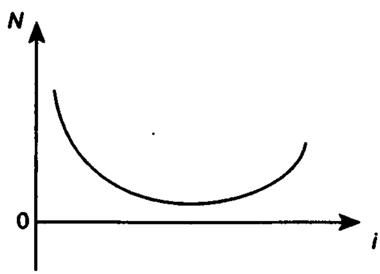

Рис. 12.6

В редких, но теоретически возможных, случаях чистый приведенный доход оказывается положительной величиной при любом значении ставки i (см. рис. 12.6). Величина J здесь просто отсутствует. Если имеется множественность значений J или значение отсутствует, то при сравнении нескольких инвестиционных проектов следует воспользоваться другими измерителями эффективности.

ПРИМЕР 12.4. Определим J для данных примера 12.1 (вариант A). Напишем уравнение, в котором для сокращения записи примем $1 + J = r$.

Исходная функция, определяющая чистый приведенный доход:

$$N(r) = -100r^{-1} - 150r^{-2} + 50r^{-3} + 150r^{-4} + 200r^{-5} + 200r^{-6} = 0.$$

Решение заключается в определении корня шестой степени. Применим в методических целях способ последовательного подбора, который представим в табл. 12.2.

Таблица 12.2

t	R	15%	25%	30%
1	−100	−86,957	−80,000	−76,923
2	−150	−113,422	−96,000	−88,757
3	50	32,876	25,600	22,758
4	150	85,763	61,440	52,519
5	200	99,435	65,536	53,866
6	200	86,466	52,429	41,435
N		104,162	29,005	4,900

Возьмем в качестве исходной ставку, равную, допустим, 15%. Найдем величину чистого приведенного дохода по этой ставке: $N(1,15) = 104,16$, т.е. он заметно отличается от нуля. Принятое значение ставки явно мало. Изменяя величину ставки в нужном направлении, приближаемся к условию $N(r) = 0$. Повысим r до уровня 1,25. Получим $N(1,25) = 29,0$. Ноль в значении функции опять не достигнут. Далее находим $N(1,3) = 4,9$. Можно окончить расчет и удовлетвориться достигнутой точностью или продолжить его и еще раз увеличить ставку, скажем, до 31%. В этом случае $N(1,31) = 0,8$. Увеличивать точность расчета далее, вероятно, не имеет смысла.

Применим теперь программу ВНДОХ. Получим $J = 0,3216$. Соответственно, $N(1,3216) = 0,001$.

В случае, когда инвестиции "мгновенны", а поток доходов может быть представлен в виде постоянной ренты, задача упрощается и сводится к определению ставки J на основе знакомого нам равенства:

$$K = Ra_{n;J}.$$

Из этой формулы следует

$$a_{n;J} = \frac{K}{R} = \frac{1 - (1 + J)^{-n}}{J}. \tag{12.12}$$

Таким образом, задача заключается в расчете искомой ставки по заданному коэффициенту приведения постоянной ренты. Эта проблема обсуждалась в гл. 5.

ПРИМЕР 12.5. Инвестиции к началу срока отдачи составили 4 млрд руб. Доход ожидается на уровне 0,7 млрд руб в год, поступления — в течение 10 лет.

Если полагать, что поступления происходят равномерно в пределах года (их можно приурочить к серединам соответствующих лет), то коэффициент приведения ренты можно записать следующим образом:

$$a_{10;J}(1+J)^{0,5} = \frac{4}{0,7} = 5,7143,$$

что соответствует $J = 13,1$ %.

В свою очередь, если поток доходов непрерывен и постоянен, то внутренняя норма доходности, назовем ее ***непрерывной внутренней нормой*** и обозначим G', находится на основе коэффициента приведения непрерывной ренты:

$$\bar{a}_{n;G'} = \frac{K}{R} = \frac{1-e^{-G'n}}{G'}.$$

На величину внутренней нормы доходности влияют те же факторы, что и на чистый приведенный доход, а именно, размеры инвестиционных расходов и доходов и специфика их распределений во времени. Однако влияние здесь обратное — все, что увеличивает N, сокращает значение J.

При использовании внутренней нормы доходности в качестве ориентира для выбора и принятии инвестиционного решения следует иметь в виду, что:

— данный параметр эффективности не учитывает масштабов проекта,

— существует возможность (правда, редкая) в некоторых ситуациях получить неоднозначные оценки эффективности, а иногда они вовсе отсутствуют,

— при отсутствии опыта расчета или необходимых программ получение соответствующих оценок может быть связано с некоторыми затруднениями.

Здесь уместно привести два дополнительных замечания, затрагивающих как внутреннюю норму доходности, так и чистый приведенный доход. Так, если инвестиционный проект охватывает ряд самостоятельных объектов, каждый из которых характеризуется определенными капитальными затратами и отдачами от них, то для этих составных частей можно определить частные показатели чистого приведенного дохода. Чистый приведенный доход проекта в целом равен сумме частных показателей. Этого нельзя сказать о внутренней норме доходности.

Потребность в применении того или другого показателя связана с различием в их содержании. Если речь идет о максимизации *массы дохода*, то резонно выбор проекта основывать на чистом приведенном доходе (такой выбор, разумеется, не обеспечивает наиболее эффективное использование затраченных средств). При стремлении максимизировать *относительную отдачу* ориентируются на внутреннюю норму доходности.

§12.5. Срок окупаемости

Срок окупаемости, как уже отмечено выше, определяется в двух вариантах — на основе дисконтированных членов потока платежей и без дисконтирования. Обозначим первый как $n_{\text{ок}}$, второй как m. Величина $n_{\text{ок}}$ характеризует число лет, которое необходимо для того, чтобы сумма дисконтированных на момент окончания инвестиций чистых доходов была равна размеру инвестиций (барьерная точка для срока). Иначе говоря, это расчетное время, необходимое для полной компенсации инвестиций поступающими доходами с дисконтированием обоих потоков по ставке приведения. Второй показатель в общем смысле аналогичен первому, но время получения доходов не учитывается и доходы не дисконтируются.

В предельно простом случае срок окупаемости m определяется как отношение суммы инвестиций к средней ожидаемой величине поступаемых доходов:

$$m = \frac{K}{R}.$$

Такой расчет, очевидно, имеет смысл при относительно незначительных колебаниях годовых доходов относительно средней. В финансовом отношении более обоснованным является дисконтный срок окупаемости $n_{\text{ок}}$.

Пусть размеры капитальных вложений к концу срока инвестирования составляют величину K. Доходы поступают в виде нерегулярного потока платежей R_t. Необходимо найти такой срок, при котором будет выполнено равенство

$$\sum_{t=1}^{n_{ок}} R_t v^t = K. \qquad (12.13)$$

ПРИМЕР 12.6. Найдем сроки окупаемости (величины m и $n_{ок}$) для потока платежей примера 12.1 (вариант A). Напомним, что поток состоит из следующих членов: −100; −150; 50; 150; 200; 200. Общая сумма капитальных вложений равна 250. Суммируем доходы за первые два и часть третьего года и приравняем полученную сумму к размеру инвестиций:

$$50 + 150 + 200x = 250,$$

где x — доля годового дохода.

Отсюда $x = 50 : 200 = 0{,}25$ и $m = 2 + 0{,}25 = 2{,}25$. Для варианта $Б$ того же примера получим $m = 3{,}5$ года.

Для определения дисконтного срока окупаемости установим размер ставки приведения: $i = 10\%$. Сумма капиталовложений с наращенными процентами к концу второго года равна 260. Современная стоимость поступлений за первые два года, рассчитанная на момент начала отдачи, составит 169,4 для варианта A, т.е. меньше 260, а за три года поступлений — 319,7, т.е. больше этой суммы. Отсюда срок окупаемости примерно равен

$n_{ок} = 2 + (260 - 169{,}4) : (200 \times 1{,}1^{-3}) = 2{,}6$ года после завершения инвестиций. Для варианта $Б$ находим $n_{ок} = 4$.

Остановимся на ситуации, когда капиталовложения заданы одной суммой, а поток доходов постоянен и дискретен (постоянная ограниченная рента). Тогда из условия полной окупаемости за срок $n_{ок}$ при заданной процентной ставке i и ежегодных поступлений постнумерандо следует:

$$K = R\frac{1 - (1 + i)^{-n_{ок}}}{i}.$$

Отсюда

$$n_{ок} = \frac{-\ln\left(1 - \frac{K}{R}i\right)}{\ln(1 + i)}. \qquad (12.14)$$

ПРИМЕР 12.7. Определим дисконтный срок окупаемости для данных примера 12.5 при условии, что поступления дохода происходят: 1) равномерно в пределах года, 2) раз в конце года. Дисконтирование осуществим по ставке 10%.

1. Припишем суммы годовых доходов к серединам годовых интервалов. После чего применим формулу (12.14) с небольшим уточнением, вызванным тем, что выплаты производятся не в конце каждого года, а в середине:

$$n_{ок} = \frac{-\ln\left(1 - \dfrac{K}{R(1+i)^{0,5}}i\right)}{\ln(1+i)} =$$

$$= \frac{-\ln\left(1 - \dfrac{4}{0,7 \times 1,1^{0,5}}0,1\right)}{\ln 1,1} = 8,26 \text{ года.}$$

2. По (12.14) находим: $n_{ок} = 8,89$ года.

Для сравнения заметим, что без учета времени поступления доходов срок окупаемости составит всего $m = 5,71$ года.

Заметим, что дисконтный срок окупаемости существует, если не нарушаются определенные соотношения между доходами и размером инвестиций, а именно: если постоянные доходы поступают ежегодно, то $R > iK$. Это вытекает из формулы (12.14). Можно получить аналогичные по содержанию соотношения и для других видов регулярных потоков дохода. Так, при поступлении доходов в виде p-срочной ренты соотношение имеет вид $R > p[(1+i)^{1/p} - 1]K$; аналогично при непрерывном поступлении доходов $R > \ln(1+i)K$ или $R > \delta K$.

Приведенные неравенства, вероятно, окажутся полезными для быстрой оценки сложившейся ситуации. Если указанные требования не выполняются, то инвестиции при принятом уровне процентной ставки не окупаются. В то же время срок окупаемости, подсчитанный без учета фактора времени, в любом случае будет иметь некоторое положительное значение.

ПРИМЕР 12.8. Пусть сделаны разовые инвестиции $K = 4$, ожидаемая постоянная годовая отдача равна 0,2. Если $i = 10\%$, то имеем $R = 0,2 < 0,1 \times 4$. Таким образом, при заданном уровне поступлений и принятой ставке приведения условие окупаемости не выполняется. Однако упрощенный способ определения срока окупаемости говорит об обратном: $m = 4/0,2 = 20$ лет.

Влияние факторов и взаимосвязь сроков окупаемости. На величину дисконтного срока окупаемости влияют два фактора — распределение поступлений во времени ("профиль" доходов) и ставка, принятая для дисконтирования (ставка приведения). Влияние первого фактора очевидно — концентрация отдач к концу срока проекта, да и вообще любая отсрочка поступлений доходов увеличивает срок окупаемости. Что касается второго фактора, то его влияние столь же понятно — с увеличением ставки приведения срок окупаемости растет.

Коль скоро оба рассмотренных срока окупаемости характеризуют одно и тоже свойство инвестиционного процесса, то между ними, очевидно, должна существовать некоторая зависимость, которая в значительной мере определяется видом распределения доходов во времени. Аналитически можно проследить эту зависимость для случая с поступлениями дохода в виде постоянной дискретной ренты. Определим оба показателя срока окупаемости через размер инвестиций и постоянные ежегодные поступления:

$$\frac{K}{R} = m, \quad \frac{K}{R} = \frac{1-(1+i)^{-n_{ок}}}{i}.$$

Откуда следует, что

$$n_{ок} = \frac{-\ln(1 - mi)}{\ln(1 + i)}. \tag{12.15}$$

При $mi > 1$ инвестиции не окупаются. Графическая иллюстрация зависимости двух видов сроков окупаемости от отношения K/R представлена на рис. 12.7.

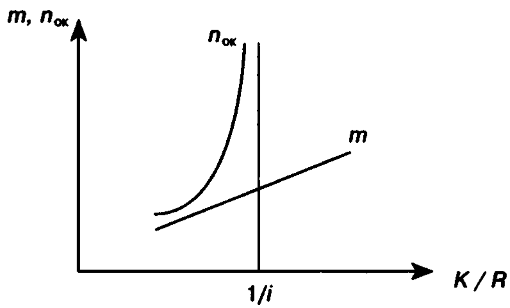

Рис. 12.7

§12.6. Индекс доходности

Рентабельность инвестиций также может быть измерена двумя способами: бухгалтерским и с учетом фактора времени (с дисконтированием членов потока платежей). В обоих случаях доход сопоставляется с размером инвестиций. На основе бухгалтерского метода получим два варианта индекса доходности:

$$u = \frac{\sum_j R_j}{K} \text{ или } u = \frac{\sum_j R_j - K}{K} = \frac{\sum_j R_j}{K} - 1.$$

В последней записи этот индекс совпадает с принятым у нас показателем рентабельности.

Интересно проследить влияние взаимозависимости бухгалтерских срока окупаемости и показателя рентабельности. Для этого обратимся к случаю, когда доходы постоянны во времени. Упомянутые показатели определяются на основе следующих равенств:

$$m = \frac{K}{R} \text{ и } u = \frac{Rn}{K}.$$

Таким образом,

$$u = \frac{n}{m}.$$

Рентабельность и срок окупаемости находятся, как видим, в обратной зависимости.

При дисконтировании членов потока платежей индекс доходности определяется следующим образом: если капиталовложения приведены к одной сумме K, то

$$U = \frac{\sum_j R_j v^j}{K}. \qquad (12.16)$$

Если же капитальные затраты распределены во времени, то имеем

$$U = \frac{\sum_j R_j v^{j+n_1}}{\sum_t K_t v^t}. \qquad (12.17)$$

ПРИМЕР 12.9. По данным примера 12.1 приведенные к началу срока инвестиционного проекта капиталовложения для варианта *А* составили 214,9, доход 377,1, а для варианта *Б* соответственно 223,1 и 386,2. На основе этих данных получим следующие показатели рентабельности:

$$U_A = \frac{377{,}1}{214{,}9} = 1{,}754; \quad U_Б = \frac{386{,}2}{223{,}1} = 1{,}731.$$

Если поток доходов представляет собой постоянную ренту постнумерандо, а капиталовложения мгновенны, то

$$U = \frac{R}{K} a_{n;i}. \qquad (12.18)$$

ПРИМЕР 12.10. Поток доходов и остальные условия инвестирования показаны в примере 12.5. Определим индекс доходности в случае, когда дисконтирование производится по ставке 10%:

$$U = \frac{0{,}7}{4} a_{10;10} = 1{,}183.$$

Аналогичным путем можно определить рентабельность и для иных видов распределения доходов во времени.

§12.7. Соотношения относительных измерителей эффективности

Относительные финансовые показатели эффективности инвестиций, на которых мы останавливались выше, имеют сходную задачу и базируются, в конечном счете, на одной методике — сопоставлении доходов и затрат. Однако каждый из них решает задачу под своим углом зрения. Можно ожидать, что подобные измерители взаимосвязаны, причем в общем динамика одного показателя не пропорциональна изменению другого. Знакомство с некоторыми из таких зависимостей, вероятно, окажется полезным для лучшего понимания существа рассмотренных показателей и их применения в практических ситуациях.

Зависимости между попарно взятыми показателями эффективности легко выявить аналитическим путем для случаев, когда поток доходов может быть представлен в виде дискретной финансовой ренты, а капиталовложения мгновенны. Ограничимся только двумя наиболее интересными соотношениями. Начнем с взаимосвязи чистого приведенного дохода и внутренней нормы доходности. На основе формул (12.1) и (12.2) находим следующую зависимость:

$$N = R(a_{n;i} - a_{n;J}).$$

Здесь i — ставка, которая применяется при определении чистого приведенного дохода N. Как видим, величина N оказывается положительной, если $i < J$. Графическая иллюстрация данной зависимости представлена на рис. 12.8.

Зависимость внутренней нормы доходности и дисконтированного срока окупаемости определяется следующим образом[1]:

$$n_{ок} = \frac{-\ln\left\{1 - \frac{i}{J}\left[1 - \left(1 + J\right)^{-n}\right]\right\}}{\ln\left(1 + i\right)}. \qquad (12.19)$$

График этой зависимости представлен на рис.12.9.

Приведенные выше соотношения, напомним, получены для частного случая, когда капиталовложения мгновенны, а отдача от них представляет собой ограниченную постоянную ренту постнумерандо. В действительности поток доходов далеко не всегда следует указанной закономерности. В силу этого наблюдаются отклонения от найденных соотношений.

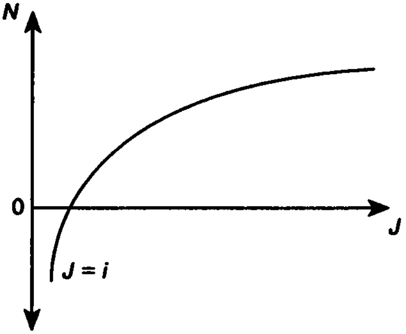

Рис. 12.8

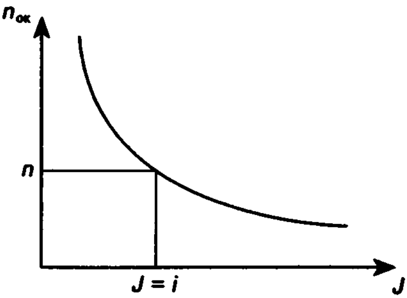

Рис. 12.9

[1] См. Математическое приложение к главе.

§12.8. Сравнение результатов оценки эффективности

Применяемые при сравнении нескольких инвестиционных проектов показатели могут и часто дают разные результаты по их предпочтительности. Нельзя забывать и то, что дисконтные показатели эффективности (кроме *Л*) зависят от принятой в расчетах процентной ставки. Неоднозначность результатов объясняет, почему многие инвесторы для повышения надежности выбора применяют несколько критериев. Для того чтобы сказанное было более наглядным, приведем следующую иллюстрацию. Сравним по шести критериям шесть проектов (см. табл. 12.3). В таблице выделены наиболее привлекательные варианты по каждому из критериев. Два первых проекта одинаковы по общей сумме капиталовложений и отдач, но их распределения во времени имеют существенные различия. Проект *В* отличается от *Б* только тремя дополнительными годами поступления дохода. Аналогичное с вариантом *Б* распределение поступлений и у варианта *Д*. Однако, начало поступлений дохода здесь запаздывает на один год. Наконец, вариант *Г* отличается от *Б* тем, что на восьмом году реализации проекта предусматривается модернизация производства (в связи с этим текущие расходы превышают доходы) с последующим увеличением срока поступлений дохода.

Перейдем к результатам оценивания эффективности данных вариантов. Соответствующие показатели приведены в нижних строках табл. 12.3. Сравним варианты *А* и *Б*. По всем критериям за исключением *и* первый вариант предпочтительней второго. Объясняется это только различием распределений во времени как капиталовложений, так и доходов. При сравнении вариантов *Б* и *В* находим, что продление срока поступлений улучшает все показатели, кроме сроков окупаемости — на них дополнительные годы отдачи не отражаются. В свою очередь вариант *Д* отличается заметным ухудшением всех показателей (кроме *и*), что объясняется запаздыванием поступлений доходов всего лишь на один год. У этого варианта самая низкая внутренняя норма доходности. Вариант *Г*, отличающийся от *В* наибольшим сроком поступлений и их объемом, имеет лучший показатель чистого приведенного дохода, но не внутренней нормы доходности.

Таблица 12.3

t	А	Б	В	Г	Д
1	−100	−200	−200	−200	−200
2	−150	−50	−50	−50	−50
3	50	50	50	50	0
4	150	100	100	100	50
5	200	100	100	100	100
6	200	200	200	200	100
7	50	200	200	200	200
8			100	−150	200
9			100	150	100
10			100	150	100
11				150	100
12				150	
13				100	
14				100	
15				100	
$\sum K$	−250	−250	−250	−400	−250
$\sum R$	650	650	950	1150	950
m	**2,25**	3,0	3,0	4,0	4,0
u	**2,6**	**2,6**	3,8	2,9	3,8
N	187,9	160,3	288,0	**391,4**	241,5
J	**32,9**	25,3	30,5	30,5	24,5
$n_{ок}$	**2,6**	4,0	4,0	5,1	4,0
U	1,87	1,72	2,29	2,09	1,91

§12.9. Моделирование инвестиционного процесса

Параметры эффективности, о которых говорилось выше, можно получить и для сложных инвестиционных схем. В этих случаях уместно прибегнуть к разработке специальных экономико-математических моделей, состоящих из математических выражений, описывающих как процесс формирования потоков платежей, так и соотношений, позволяющих рассчитать искомые характеристики эффективности. Основные преимущества использования модели, как известно, заключаются в одновременном учете в ней всех необходимых требований, условий и предположений. Важным фактором является известная свобода в пересмотре этих установок в ходе работы с моделью, непротиворечивость всех рассчитанных показателей, наконец, возможность получения вариантов поведения исследуемого явления (в нашем случае — инвестиционного процесса) для разнообразных сочетаний исходных условий и принятых предположений, например состояния денежно-кредитного рынка, уровня инфляции, спроса на выпускаемую продукцию и т.д. Особенностью модели, разрабатываемой для инвестиций в производство, является то, что в ней базовым является блок, в котором формируются затраты и отдачи от инвестиций (поток платежей) для каждого временного интервала со специфическим их распределением в его пределах. Во втором, аналитическом, блоке модели определяются искомые показатели эффективности.

Очевидно, нет смысла строить детальную модель, если имеется в виду только получение оценки для одного варианта условий. Преимущества модельного подхода в этом случае не используются. Модель дает возможность осуществить так называемый *анализ отзывчивости* или *чувствительности* (*sensivity analisis*). Заметим, что названный анализ заключается в выявлении наиболее важных (ключевых) входных параметров модели и получении системы оценок эффективности инвестиций для широкого диапазона значений таких параметров. Таким образом, лицу, принимающему решение, предоставляется не единственная, точечная оценка, а развернутая картина (в виде таблиц и графиков) значений эффективности для разнообразных возможных и ожидаемых ситуаций.

Модель разрабатывается на основе трех видов данных: уровней или объемных характеристик (выпуск продукции, затраты на строительство и т.д.), временных параметров (моменты начала или окончания отдельных этапов, сроки), "нормативных" показателей (удельные расходы, процентные и налоговые ставки, ожидаемые цены и пр.). Часть этих данных заложена в техническом проекте, другая получается из разных источников, включая специальные исследования и экспертные оценки.

Приведем иллюстрацию. Пусть для большей определенности речь пойдет о создании предприятия по добыче каких-либо полезных ископаемых. Последовательность основных этапов во времени показана на рис. 12.10. Символом K_j здесь обозначена сумма затрат на этапе j, протяженность этого этапа — n_j, а расстояние от начального момента или между этапами — символом t_k. Периоды отдачи на рисунке не показаны.

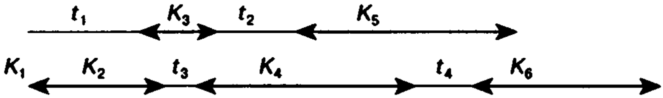

Рис. 12.10

Используются следующие обозначения:

K_1 — приобретение участка земли (разовые затраты);
K_2 — изыскательские работы;
K_3 — проектирование;
K_4 — строительство;
K_5 — закупка и поставка оборудования;
K_6 — монтаж и наладка оборудования.

Для простоты положим, что в пределах каждого этапа затраты распределены равномерно. Общий срок создания предприятия составит в этом случае

$$n = n_2 + t_3 + n_4 + t_4 + n_6.$$

Определим современную стоимость инвестиционных расходов относительно начального момента времени. При расчете этой величины примем следующий подход: если протяженность этапа равна году или менее, то вся сумма расходов относится к середине периода; если этап занимает несколько лет, то поток платежей рассматривается как постоянная рента. Для каждого из перечисленных этапов находим следующие искомые значения современной стоимостей и их сумму:

$$K = K_1 + K_2 v^{n_2/2} + K_3 v^{n_3/2+t_1} + \frac{K_4}{n_4} a_{n_4;i} v^{n_2+t_3} +$$

$$+ K_5 v^{n_5/2+t_1+t_3+n_3} + K_6 v^{n_6/2+(n-n_6)},$$

где v — дисконтный множитель по ставке i.

Что касается периода отдачи, то положим, что он состоит из двух интервалов: в первом, сроком n_7 лет, ожидается годовой доход (за вычетом текущих затрат) в размере R_7, во втором, протяженностью n_8, доход падает (месторождение истощается) примерно на $100h$ % в год. Для простоты положим, что годовую сумму дохода можно без большой потери точности отнести к середине года. Современная стоимость поступлений составит

$$R = R_7 a_{n_7,i} v^{n-0,5} + R_7 \frac{1-\left(\frac{1-h}{1+i}\right)^{n_8}}{1+h} v^{n+n_7-0,5}.$$

Рассмотренная модель может быть детализирована во многих отношениях и прежде всего путем раскрытия механизма формирования переменных K_j и R_j. Например, последняя величина может быть представлена в модели как

$$R_j = \sum_k Q_{kj} p_{kj},$$

где Q_{kj} — объем продукции вида k, выпущенной в периоде j; p_{kj} — чистый доход от реализации единицы этой продукции.

В свою очередь можно ввести в модель расчет показателя чистого дохода и таким образом увязать ее с рядом внешних условий: ценами на продукцию, уровнем заработной платы, стоимостью сырья и т.д. Чем полнее будут охвачены факторы, формирующие затраты и чистый доход, тем больше возможностей для анализа и сокращения риска. Более того, если имеются варианты использования разного сырья и/или технологий, а также какие-либо альтернативы в строительстве, то это также должно быть отражено в модели.

Приведенная выше модель является дискретной. Однако ее можно трансформировать и представить некоторые составляющие в виде непрерывных величин. В этом случае существенно увеличивается гибкость при описании соответствующих сторон инвестиционного процесса. Например, достаточно просто учесть влияние систематического изменения цен и другие, непрерывно действующие факторы.

Пусть ожидается, что цены на продукцию предприятия в первом периоде будут расти со средним годовым непрерывным темпом прироста β. Тогда суммарный доход в первом году этого периода составит:

$$Qp\frac{e^{\beta}-1}{\beta}, \text{ а за все } n_7 \text{ лет } Qp\frac{e^{\beta n_7}-1}{\beta}.$$

Переменные Q и p означают годовой выпуск и цену на начало года. Современная стоимость этого дохода, определенная на начальный момент разработки проекта, равна

$$Qp\,\frac{e^{(\beta-\delta)n_1}-1}{\beta-\delta}\,v^n,$$

где e — основание натуральных логарифмов; δ — непрерывная ставка, принятая для дисконтирования, напомним, что $\delta = \ln(1 + i)$.

§12.10. Анализ отзывчивости

Зависимость потоков затрат и поступлений от множества данных, относящихся к будущему, не позволяет получить однозначные ответы о степени эффективности — цены на продукцию могут понизиться, затраты могут возрасти и т.д. Практически полезно для сокращения риска в условиях неопределенности получить крайние оценки, иначе говоря, применить *сценарный подход.* Согласно этому методу, получают три оценки. Первая — для базового варианта исходных данных и предпосылок, сформулированных для наиболее вероятного сочетания условий создания и функционирования предприятия. Далее находятся аналогичные оценки для *пессимистичного* и *оптимистичного* вариантов условий. Совокупность таких расчетных оценок дает возможность более полно представить финансовые последствия инвестиций.

Более информативным является анализ отзывчивости (или, как его иногда называют, *анализ чувствительности*), о котором упоминалось выше. Речь идет об отзывчивости показателей эффективности проекта на изменения данных в базовом варианте условий, в рамках которых формируются потоки платежей.

Можно выделить четыре этапа при осуществлении анализа отзывчивости.

1. Выбор показателя эффективности, относительно которого проверяется отзывчивость системы на изменение того или иного параметра базового варианта условий.

2. Отбор *ключевых* переменных модели, т.е. данных, отклонения значений которых от базовых заметно отразятся на величине показателя эффективности. Число таких параметров не должно быть слишком большим, иначе результат анализа трудно воспринять и использовать. В итоге показатель эффективности определяем как функцию ограниченного числа ключевых

переменных модели. Остальные переменные рассматриваются в модели как константы.

3. Определение вероятных или ожидаемых диапазонов значений ключевых переменных.

4. Расчет значений показателя эффективности для принятых диапазонов ключевых переменных и представление результатов расчетов в табличной форме и в виде графиков. В качестве показателя эффективности, очевидно, следует принять одно из двух — чистый приведенный доход или внутреннюю норму доходности.

Ниже приводятся графики, характеризующие зависимость чистого приведенного дохода (N) от одного из факторов: изменения годового объема производства (Q), годовых размеров эксплутационных затрат (Z), цены единицы продукции (z), темпа прироста цены (t_z), общего срока создания предприятия (n), уровня ставки приведения (i) при условии, что все остальные переменные модели зафиксированы на базисном уровне C.

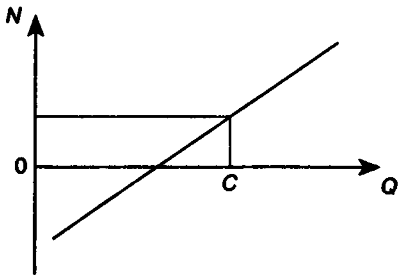

Рис. 12.11

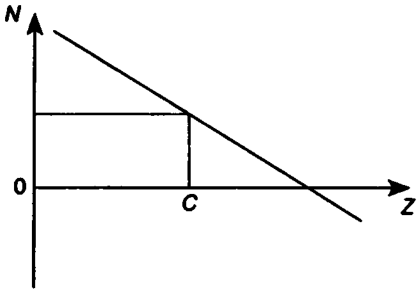

Рис. 12.12

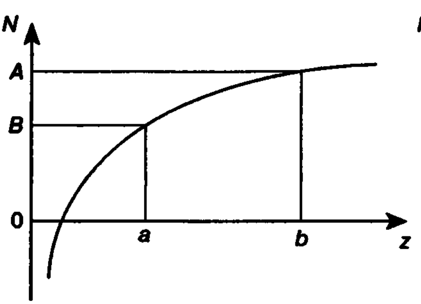

Рис. 12.13

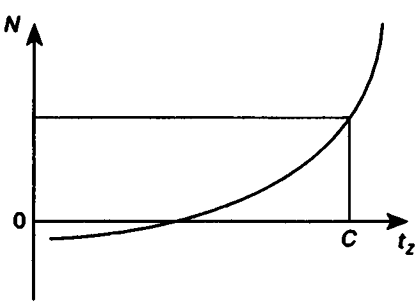

Рис. 12.14

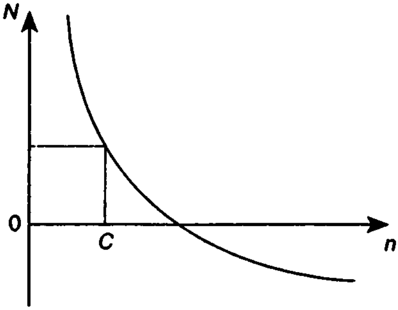

Рис. 12.15

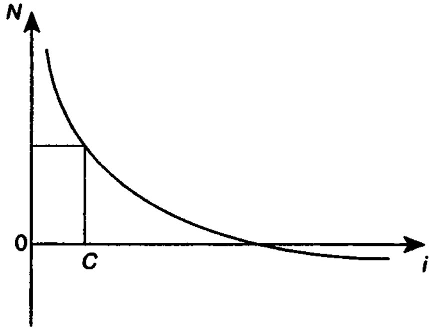

Рис. 12.16

Как видим, при определенных размерах ключевых параметров финансовая эффективность проекта оказывается отрицательной.

Обратимся к рис.12.13. Если ожидается, что цена единицы продукции будет находиться в пределах от a до b, а все остальные переменные имеют базовые значения, то величина чистого приведенного дохода находится в интервале от A до B.

Выбор наиболее "отзывчивой" переменной позволяет там, где это возможно, сконцентрировать усилия на изменении значений переменных в нужном направлении и тем самым повысить эффективность проекта в целом.

Математическое приложение к главе

Взаимозависимость параметров J и $n_{ок}$ (формула (12.19))

По определению

$$K = Ra_{n_{ок};i} \text{ и } K = Ra_{n;J},$$

откуда $a_{n_{ок};i} = a_{n;J}$. Следовательно

$$\frac{1-(1+i)^{-n_{ок}}}{i} = \frac{1-(1+J)^{-n}}{J}.$$

Решим это равенство относительно $n_{ок}$:

$$n_{ок} = \frac{-\ln\left\{1 - \frac{i}{J}\left[1 - \left(1 + J\right)^{-n}\right]\right\}}{\ln\left(1 + i\right)}.$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Бирман Г. Шмидт С.* Экономический анализ инвестиционных проектов. М.: ЮНИТИ, 1997. Гл. 3—6.
2. *Четыркин Е.М.* Финансовый анализ производственных инвестиций. М.: Дело, 1998. Гл. 2, 6.
3 *Шарп У.Ф,. Александер Г.Дж,. Бейли Дж. В.* Инвестиции. М. Инфра-М, 1997. § 18.3
4 *Cartledge P.* Financial arithmetic. A practitioners guide. Euromoney Books, 1993. Ch 9.

Глава 13
ЛИЗИНГ

§13.1. Финансовый и оперативный лизинг

Приобретение имущества производственного назначения (транспортные средства, производственное оборудование, компьютеры и т.д.) часто осуществляется с привлечением коммерческого или банковского кредита, обычно погашаемого в рассрочку. Получение оборудования для расширения и/или модернизации производства возможно и в порядке аренды. Аренда оборудования известна по крайней мере со средневековья (например, аренда судовых якорей, Венеция XI век). В последние годы в промышленно развитых странах стремительно развиваются специальные виды арендных отношений. Именно за этими видами аренды в России закрепился термин *лизинг* (*leasing*, буквально, — сдача в аренду). Он применяется для обозначения *вида предпринимательской деятельности*, заключающегося в инвестировании собственных или привлеченных финансовых средств путем приобретения производственного имущества для последующей сдачи его в аренду и, более широко, как *специального вида аренды имущества* производственного назначения (для краткости любые виды арендуемого имущества будем называть оборудованием).

Практика лизинга и, соответственно, законы, регулирующие эту деятельность, существенно различаются по странам. В связи с тем, что в России еще нет достаточного опыта проведения лизинговых операций, изложение в основном базируется на западной практике. Причем наибольшее внимание в главе обращено на методику расчетов: основополагающим принципам и технике их выполнения.

Соглашение о лизинге (лизинговый контракт) связывает две стороны. *Лизингодатель*, арендодатель (*lessor*), — передает право владения и использования оборудования (но не право собственности) на фиксированный в контракте срок *лизингополуча-*

телю, арендатору (*lessee*), в обмен на оговоренные арендные или лизинговые платежи. (Далее термины лизингополучатель и арендатор используются как синонимы.) Лизингодатель приобретает оборудование (обычно у его изготовителя) в соответствии с требованиями арендатора по согласованной с ним цене за собственные средства (прямой лизинг, *direct lease*) или за счет привлеченных средств (*leveraged lease*). Лизингодатель может являться и изготовителем оборудования.

Лизинг осуществляется специальными компаниями, банками (именно банки стали пионерами в этом виде деятельности), страховыми компаниями, а иногда, при большой стоимости оборудования, и консорциумами банков. Упрощенная схема отношений сторон в прямой лизинговой операции представлена на рис.13.1.

Если для финансирования и/или страхования привлекается банк или страховая компания, то схема, естественно, усложняется.

Различают два основных вида лизинга — финансовый и оперативный.

Финансовый или *капитальный лизинг* (*finance, capital lease*). Этот вид аренды предусматривает полное возмещение всех расходов лизингодателя на приобретение имущества и его передачу для производственного использования лизингополучателю. Не допускается досрочное прекращение договора, в противном случае возмещаются все потери лизингодателя. Обычно не предусматривается обслуживание оборудования (поставка запчастей, наладка и ремонт) со стороны лизингодателя. Арендатор получает оборудование для его производственного использования на срок договора. В конце срока арендатор, в зависимости от условий контракта, может выкупить его по остаточной стоимости.

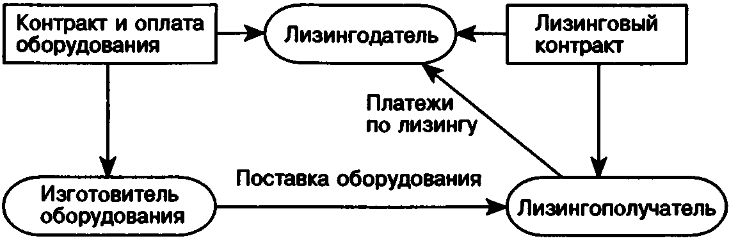

Рис. 13.1

Правила, принятые в ряде стран, предусматривают некоторые требования к условиям лизинговых операций, в том числе:

— правило обязательного минимального собственного участия лизингодателя в финансировании сделки на уровне не ниже 20%;
— правило максимального срока лизинга, согласно которому этот срок должен быть меньше полезного срока жизни оборудования (*economic life*).

Частным случаем финансового лизинга является *возвратный лизинг (sale and leaseback)*. Он предполагает продажу оборудования и получение его обратно у нового владельца в порядке финансового лизинга. Таким образом, вместе с отказом от права собственности бывший владелец оборудования получает средства для финансирования других своих нужд. Кроме того, арендатор имеет возможность сократить налоговые выплаты, связанные со стоимостью арендованного имущества.

Оперативный лизинг (operating lease). Сюда относят все виды аренды, которые не являются финансовым лизингом. Оперативный лизинг характеризуется короткими сроками, что предполагает возможность неоднократной сдачи оборудования в аренду. Право собственности не переходит к арендатору. Обычно аренду можно прекратить в любой момент по желанию арендатора. Часто договор оперативного лизинга предусматривает ремонт и обслуживание оборудования силами арендодателя.

Различие между финансовым и оперативным лизингом на практике не столь очевидно, как это может показаться на первый взгляд, и в значительной мере зависит от принятых в стране законов. Ниже обсуждаются проблемы, связанные в основном с финансовым лизингом.

Основные преимущества лизинга для лизингополучателя:

— дополнительный источник средне- и долгосрочного финансирования производственной деятельности, особенно, если он имеет ограниченные возможности для получения долгосрочного кредита; длительные сроки договора являются средством страхования от инфляции;
— бóльшая гибкость при формулировании условий погашения задолженности, чем при непосредственном получении кредита для приобретения имущества;
— использование различных налоговых льгот; одной из важных льгот является включение лизинговых платежей в себестоимость продукции, тем самым уменьшается база для расчета налогооблагаемой прибыли;

— привлечение профессионалов для выбора и закупки оборудования.

Для лизингодателя лизинг — один из видов предпринимательской деятельности, предполагающий привлечение заемных средств для их инвестирования в оборудование или использование для этого собственных денег. Этот вид деятельности расширяет рамки услуг, предоставляемых клиентам финансовыми институтами. Лизинг приносит предпринимательскую прибыль, а также некоторый доход от налоговых льгот.

В свою очередь производитель оборудования с помощью лизинга расширяет возможности сбыта своей продукции.

§13.2. Схемы погашения задолженности по лизинговому контракту

Количественный анализ лизинговой операции обычно предназначен, по крайней мере теоретически, для решения двух задач. Для арендатора важно определиться — покупать или арендовать производственное имущество (если, разумеется, он по своим финансовым возможностям может ставить этот вопрос). Для лизингодателя необходимо определить размер лизинговых платежей и финансовую эффективность сделки.

Назначение лизинговых платежей — полное покрытие издержек лизингодателя, связанных с выполнением условий арендного контракта, включая расходы по закупке оборудования, кредитованию и страхованию, а также обеспечение лизингодателю некоторой прибыли и комиссионных. Последние покрывают расходы по подготовке контракта и посреднической деятельности.

Погашение задолженности по лизинговым контрактам может осуществляться на основе различных схем (способов оплаты). Лизингополучатель и лизингодатель выбирают и согласовывают наиболее удобный для них по срокам и размерам платежей способ.

Задолженность по лизингу погашается следующими видами платежей:

— авансовый платеж,
— периодические лизинговые платежи,
— выкупная сумма.

Основными здесь являются периодические выплаты. Отметим лишь несколько признаков, по которым они различаются:

— по размеру платежей: постоянные и переменные;
— по применяемой процентной ставке: сложная, а иногда (при очень коротких сроках) простая, постоянная или переменная;
— по моменту производства платежей: в начале или конце периодов (пренумерандо и постнумерандо);
— по периодичности выплат (обычно лизинг предусматривает ежемесячные платежи, редко ежеквартальные или полугодовые).

Приведенная классификация охватывает большинство из возможных способов погашения задолженности, однако на практике могут иметь место и другие, согласованные участвующими сторонами варианты, например, выплаты с удвоенным первым взносом и т.д.

Как правило, финансовый лизинг является средне- или долгосрочной операцией. Однако в российской практике встречаются и краткосрочные, например, на 2 года.

Система основных схем выплат периодических лизинговых платежей представлена на рис. 13.2.

Различие между схемами А и Б платежей заключается в последовательности расчетов:

— по схеме А сначала определяется величина лизинговых платежей в целом, далее она распределяется на процентные платежи и суммы погашения долга;
— по схеме Б сначала рассчитываются размеры процентных платежей и суммы погашения долга (амортизация задолженности), затем определяется общая величина лизинговых платежей.

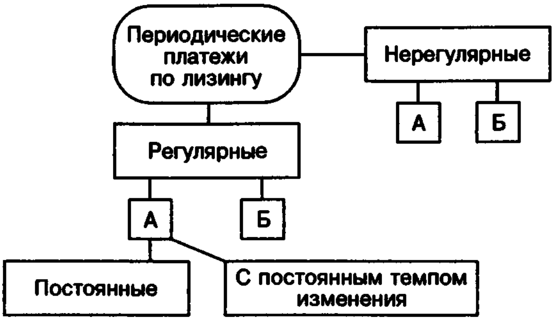

Рис. 13.2

Регулярные платежи — лизинговые платежи, производимые через равные интервалы времени в конце или в начале периодов. Величина лизинговых платежей не обязательно должна быть постоянной, она может изменяться (увеличение или уменьшение платежей) в ходе погашения задолженности, например, с постоянным темпом.

Нерегулярные платежи — лизинговые платежи, производимые по согласованному с лизингодателем графику, содержащему суммы платежей и их сроки

Для того чтобы сущность финансового лизинга и влияния условий контракта на размеры платежей были понятны, приведем простой пример с последовательными усложнениями условий лизинга. Во всех вариантах стоимость оборудования равна 1000, а срок лизинга составляет 36 месяцев, платежи постнумерандо. В вариантах 1—3 предусматривается полное погашение стоимости оборудования, в вариантах 4—5 оборудование выкупается по остаточной стоимости, равной 200. Соответствующие расчеты приведены в примере 13.1.

Вариант 1. Платежи по 39,23 в конце каждого месяца.

Сумма платежей за весь срок аренды составит 1412,38. Таким образом, общая сумма прибыли лизингодателя за три года равна 412,38, или 2% в месяц (24% номинальных процентов в год) от инвестированных средств. Если платежи указанного размера будут вноситься в начале каждого месяца, то это принесет 2,13% в месяц.

Вариант 2. Предусматривается удвоенный взнос в первом периоде и освобождение от взноса в последнем.

При условии, что инвестиции должны принести 2% в месяц, первый взнос должен составить 76,98, остальные — по 38,49.

Вариант 3. Согласно контракту в начале срока лизинга производится авансовый платеж в сумме 100. Аванс 100, остальные платежи по 35,31.

Вариант 4. Арендатор имеет право выкупить имущество в конце срока по цене 200. В этой ситуации — периодические платежи по 35,39 и выкупная цена 200.

Вариант 5. Аванс и право выкупа. Платежи арендатора: аванс 100, платежи по 31,46, выкупная цена 200.

§13.3. Методы расчета лизинговых платежей

Для всех лизинговых схем исходным требованием является *равенство современной стоимости потока лизинговых платежей затратам на приобретение оборудования,* т.е. предусматривается финансовая эквивалентность обязательств обеих сторон контракта. В общем виде требование финансовой эквивалентности обязательств можно записать в виде следующего равенства:

$$K = PV(R_j), \tag{13.1}$$

где K — стоимость имущества для лизингодателя (с учетом таможенных сборов, страховых расходов и т.д.), PV — оператор определения современной стоимости, R_j — платежи по лизингу.

Формула (13.1) конкретизируется с учетом условий лизинга. В обсуждаемых методиках предполагается, что как при формировании потока платежей, так и при определении стоимости оборудования в них учитываются все налоговые выплаты.

Регулярные постоянные платежи, сложные проценты (схема А). В преобладающем числе случаев поток лизинговых платежей представляет собой постоянную ренту. Соответственно методы расчетов периодических лизинговых платежей базируются на теории постоянных финансовых рент.

Для записи формул примем следующие обозначения:

R — размер постоянного платежа;

n — срок лизинга в месяцах, кварталах, годах (общее число платежей); как правило, в лизинговом контракте число платежей равно числу начислений процентов;

i — процентная ставка за период (норма доходности); если указана годовая номинальная ставка j, то в формулах вместо i используется величина j/m, где m — количество начислений процентов в году;

s — доля остаточной стоимости в первоначальной стоимости оборудования;

$a_{n;i}$ — коэффициент приведения постоянной ренты постнумерандо.

Если платежи постоянны во времени и погашают всю стоимость имущества, то, развернув формулу (13.1), получим при выплатах постнумерандо

$$K = Ra_{n;i},$$

откуда

$$R = \frac{K}{a_{n;i}}. \tag{13.2}$$

В некоторых схемах для упрощения расчетов размеров платежей во многих случаях можно применить *коэффициенты рассрочки платежей*, определяющие долю стоимости оборудования, погашаемую при каждой выплате.

Коэффициент рассрочки для постоянных рент постнумерандо при условии, что применяются сложные проценты, равен $a_1 = 1/a_{n;i}$, т.е.

$$a_1 = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}. \tag{13.3}$$

В свою очередь коэффициент рассрочки для выплат пренумерандо составит

$$a_2 = (1/a_{n;i})v, \tag{13.4}$$

где v — дисконтный множитель по ставке i.

Размеры лизинговых платежей определяются элементарно — путем умножения показателя стоимости имущества на коэффициент рассрочки:

$$R = K \times a_{1(2)}. \tag{13.5}$$

Значения коэффициентов рассрочки при равных платежах для некоторых сроков лизинга (измеряемых в месяцах и годах) приведены в табл. 10—11 Приложения.

Несколько усложним схему лизинговых платежей. Пусть теперь первый платеж будет в k раз больше остальных (удвоен или утроен), причем соответственно сокращается число остальных платежей. Тогда условие финансовой эквивалентности обязательств удовлетворяется следующими равенствами:

для выплат постнумерандо

$$K = (k-1)Rv + Ra_{n-k+1;i}$$

и для платежей пренумерандо

$$K = (k - 1)R + Ra_{n-k+1;i}(1 + i).$$

На основе этих равенств легко найти необходимые значения лизинговых платежей, а именно:

$$R = \frac{K}{(k - 1)v + a_{n-k+1;i}}, \qquad (13.6)$$

$$R = \frac{K}{k - 1 + a_{n-k+1;i}(1 + i)}. \qquad (13.7)$$

Теперь примем во внимание выплату аванса (обозначим его как A). Для лизинговых платежей постнумерандо и пренумерандо соответственно получим следующие уравнения эквивалентности:

$$K = A + Ra_{n;i}, \qquad K = A + Ra_{n;i}(1 + i).$$

Для расчета R применим коэффициенты рассрочки. После чего

$$R = (K - A)a_{1(2)}. \qquad (13.8)$$

Если лизинговый контракт предусматривает выкуп имущества по остаточной стоимости, доля которой в стоимости имущества равна s, то уравнение эквивалентности при платежах постнумерандо имеет вид

$$K = Ra_{n;i} + Ksv^n,$$

откуда

$$R = \frac{K(1 - sv^n)}{a_{n;i}} = K(1 - sv^n)a_1. \qquad (13.9)$$

Аналогично для платежей пренумерандо получим

$$R = \frac{K(1 - sv^n)}{a_{n;i}(1 + i)} = K(1 - sv^n)a_2. \qquad (13.10)$$

Закончим обсуждение метода расчета суммы платежа вариантом, в котором одновременно учитывается авансовый платеж и выкуп имущества. В этом случае для последовательностей платежей постнумерандо и пренумерандо имеем

$$K(1 - sv^n) = A + Ra_{n;i}, \quad K(1 - sv^n) = A + Ra_{n;i}(1 + i).$$

Соответственно, получим

$$R = \frac{[K(1 - sv^n) - A]}{a_{n;i}}, \tag{13.11}$$

$$R = \frac{[K(1 - sv^n) - A]}{a_{n;i}(1 + i)}. \tag{13.12}$$

ПРИМЕР 13.1. В §13.2 приведены различные варианты условий лизинга. Рассчитаем для них значения лизинговых платежей, используя приведенные выше формулы.

Общие исходные данные: $K = 1000$, $n = 36$ месяцев, $i = 2\%$ в месяц, выплаты постнумерандо.

Вариант 1. Находим по (13.3) коэффициент рассрочки (платежи в конце периодов) и затем размер ежемесячного платежа

$$a_1 = \frac{0{,}02}{1 - 1{,}02^{-36}} = 0{,}03923; \quad R = 1000 \times 0{,}03923 = 39{,}23.$$

Если платежи вносятся в начале каждого месяца, то согласно (13.4)

$$a_2 = 0{,}039233 \times 1{,}02^{-1} = 0{,}038464 \text{ и } R = 38{,}46.$$

Вариант 2. Удвоенный взнос в первом месяце ($k = 2$). Для взносов в конце периодов получим по (13.6)

$$R = \frac{1000}{(2 - 1) \times 1{,}02^{-1} + a_{35;2}} = 38{,}49 \text{ и первый взнос } 2R = 76{,}98.$$

Вариант 3. $A = 100$. На основе (13.8) находим

$$R = 900 \times 0{,}03923 = 35{,}31.$$

Вариант 4. В этом варианте $s = 0{,}2$. Таким образом, $Ks' = 1000 \times 0{,}2 = 200$ и согласно (13.9) получим

$$R = 1000(1 - 0{,}2 \times 1{,}02^{-36}) \times 0{,}03923 = 35{,}39.$$

Вариант 5. $A = 100$, $s = 0{,}2$. По формуле (13.11) находим

$$R = [1000 \times (1 - 0{,}2 \times 1{,}02^{-36}) - 100] \times 0{,}03923 = 31{,}46.$$

Перейдем ко второй задаче — делению суммы платежа по лизингу (R) на сумму амортизации долга и выплату процентов. Сумма, идущая на погашение основного долга, находится как разность лизингового платежа и процентов на остаток задолженности.

1. Платежи постнумерандо

$$d_t = R - D_{t-1} \times i,\ t = 1,...,n, \qquad (13.13)$$

где d_t — сумма погашения основного долга в периоде t, D_{t-1} — остаток долга на конец периода $t - 1$, $D_0 = K$.

В первом периоде

$$d_1 = R - Ki.$$

Остаток задолженности последовательно определяется как

$$D_t = D_{t-1} - d_t. \qquad (13.14)$$

2. Платежи пренумерандо

$$d_1 = R,$$

$$d_2 = R - Ki,$$

$$d_t = R - D_{t-1}i. \qquad (13.15)$$

ПРИМЕР 13.2. $K = 100$, $n = 5$ лет, $i = 10\%$ годовых, платежи в конце периодов, полное погашение стоимости оборудования ($s = 0$). По формуле (13.2) получим

$$R = 100 \times \frac{0{,}1}{1 - (1 + 0{,}1)^{-5}} = 100 \times 0{,}2638 = 26{,}38.$$

(Табличное значение коэффициента рассрочки равно 0,263797 (см. табл. 11 Приложения).)

Если контракт предусматривает платежи в начале каждого года, то коэффициент рассрочки определим по (13.4):

$$R = 100\frac{0{,}1}{1-(1+0{,}1)^{-5}} \times \frac{1}{(1+0{,}1)} = 100 \times 0{,}23982 = 23{,}982.$$

Проценты за первый год 100 × 0,1 = 10, сумма погашения долга 26,38 − 10 = 16,38. График погашения задолженности при выплатах постнумерандо приведен в табл. 13.1.

Таблица 13.1

t	Остаток долга на конец периода	%	Погашение долга	Лизинговые платежи
1	100,000	10,000	16,380	26,38
2	83,620	8,362	18,018	26,38
3	65,602	6,560	19,820	26,38
4	45,782	4,578	21,802	26,38
5	23,980	2,398	23,980	26,38

Как видно из таблицы, суммы, предназначенные для погашения основного долга, увеличиваются, в то время как процентные платежи сокращаются.

Если в условиях данного примера предусматривается остаточная стоимость в размере 10% от первоначальной стоимости оборудования (s = 0,1), то размер лизингового платежа (выплаты постнумерандо) составит согласно (13.9)

$$R = 100(1 - 0{,}1 \times 1{,}1^{-5}) \times 0{,}2638 = 24{,}742.$$

График выплат представлен в табл. 13.2.

Таблица 13.2

t	Остаток долга на конец периода	%	Погашение долга	Лизинговые платежи
1	100,000	10,000	14,742	24,742
2	85,258	8,526	16,215	24,742
3	69,043	6,904	17,837	24,742
4	51,205	5,121	19,621	24,742
5	31,584	3,158	21,584	24,742

Проверка: остаточная стоимость 31,584 − 21,584 = 10,000.

Размер платежа по лизингу зависит от ряда параметров, часть из которых определяется в ходе разработки лизингового контракта. Такие величины, как срок и процентная ставка, можно рассматривать как *управляющие параметры*, поскольку, изменяя их размер, достигают необходимого компромисса, удовлетворяющего участвующие стороны. В связи со сказанным, проследим влияние указанных параметров на величину коэффициента рассрочки.

Очевидно, что с увеличением срока коэффициент рассрочки уменьшается. В пределе при $n \to \infty$ получим $a_1 = i$ (см. рис. 13.3).

Как видим, увеличение срока лизинга заметно сказывается в начале шкалы сроков и уменьшается при больших сроках. Сказанное иллюстрируется следующими данными, подсчитанными для $i = 5\%$:

n	4	8	16	20	∞
a	0,28201	0,15472	0,09227	0,08024	0,05

Что касается процентной ставки, то очевидно, — чем она выше, тем больше коэффициент рассрочки, причем при $i = 0$ имеем $a_1 = 1/n$ (см. рис. 13.4). Влияние ставки усиливается вместе с ростом размера ставки. Так, для $n = 12$ находим следующие результаты:

i	0	5	10	15
a_1	0,08333	0,11283	0,14676	0,18448

Если имущество куплено за собственные средства лизингодателя, то процентная ставка i характеризует доходность от их инвестиций. Если имущество полностью приобретено за счет привлеченных средств, причем за кредит выплачиваются проценты по ставке r, то доходность от предпринимательской деятельности лизингодателя составит

$$p = i - r.$$

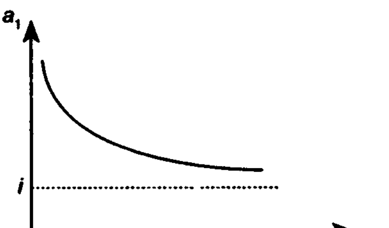

Рис. 13.3

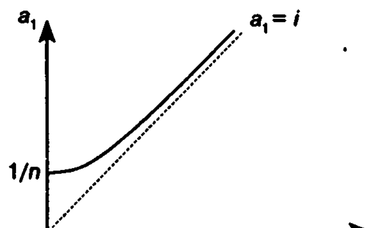

Рис. 13.4

Таким образом, обязательным условием операции является $i > r$.

Два слова о влиянии остаточной стоимости. При заданных размерах процентной ставки и срока лизинга увеличение доли остаточной стоимости линейно уменьшает величину коэффициента рассрочки.

Регулярные постоянные платежи (схема Б). Исходное требование: величина платежа определяется размером сумм погашения основного долга и выплат процентов. Расчет выполняется по схеме *погашение задолженности равными долями (суммами)* (см. § 9.3). Для схемы с полным погашением стоимости

$$d = \frac{K}{n} = \text{const}.$$

Платежи по лизингу в конце периода t находятся как

$$R_t = D_{t-1} \times i + d, \tag{13.16}$$

где R_t — размер лизингового платежа в периоде t.

Остаток долга на конец периода последовательно находится как разность

$$D_t = D_{t-1} - d. \tag{13.17}$$

ПРИМЕР 13.3. Исходные данные: $K = 100$, $n = 5$, $i = 10\%$, платежи постнумерандо. Основной долг погашается полностью равными суммами (см. табл. 13.3).

Таблица 13.3

t	Остаток долга на конец периода	%	Погашение долга	Лизинговые платежи
1	100	10	20	30
2	80	8	20	28
3	60	6	20	26
4	40	4	20	24
5	20	2	20	22

Как видим, этот вариант погашения задолженности отличается более крупными платежами в начале действия контракта.

Нерегулярные платежи (схема А). Задается график лизинговых платежей (сроки и суммы). Сбалансированность выплат и задолженности достигается при определении размера последней выплаты. Исходное равенство

$$K = \sum R_t v^{n_t} + R_k v^{n_k},$$

где R_t, n_t — сумма и срок t-го платежа, R_k, n_k — сумма и срок последнего платежа.

Деление суммы платежа на проценты за кредит и суммы, погашающие основной долг, производится последовательно по формуле

$$d_t = R_t - D_{t-1} \times i.$$

ПРИМЕР 13.4. $K = 100$, $n = 5$, $i = 10\%$, платежи постнумерандо. Задан график четырех последовательных выплат (см табл. 13.4).

Сумма дисконтированных платежей равна $\sum_{t=1}^{4} R_t v^{n_t} = 96{,}242.$

Размер последнего платежа: $R_5 = (100 - 96{,}242) / v^5 = 6{,}054.$

Таблица 13.4

t	Срок	Лизинговые платежи	Остаток долга на конец периода	%	Погашение долга
1	0,5	50	100,000	4,881	45,119
2	1,0	40	54,881	2,019	37,321
3	2,0	10	17,560	1,756	8,224
4	2,5	5	9,316	0,455	4,545
5	5,0	6,054	4,771	1,283	4,771
		111,054			100,0

Нерегулярные платежи (схема Б). Задается график погашения основного долга. Проценты за кредит последовательно начисляются на остаток задолженности.

ПРИМЕР 13.5. $K = 100$, $n = 5$, $i = 10\%$, $s = 0$, платежи в конце года. Расчет лизинговых платежей см в табл. 13.5.

Таблица 13.5

t	Погашение долга	Остаток долга на конец года	%	Лизинговые платежи
1	10	100	10	20
2	30	90	9	39
3	30	60	6	36
4	20	30	3	23
5	10	10	1	11
	100	—	29	129

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Четыркин Е.М.* Финансовый анализ производственных инвестиций. М.: Дело, 1999. § 7.3.
2. *Четыркин Е.М.* Методы финансовых и коммерческих расчетов. М.: Дело, 1995. §12.5.
3. Leasing Finance. 2-ed. Euromoney Books, 1990.

Глава 14

ФОРФЕЙТНАЯ ОПЕРАЦИЯ

§14.1. Сущность операции а форфэ

В конце 50-х годов возник новый тип финансово-кредитных операций — *а форфэ* (от французского *a' forfait*). Эта операция получила распространение во внешней торговле, где она послужила важным стимулирующим фактором развития. Заметим, что нет никаких веских причин, препятствующих ее применению и во внутристрановой торговле.

К *форфетированию* (*forfeiting*) прибегают при продаже какого-либо крупного объекта (комплект оборудования, судно, предприятие, крупная партия товара). Покупатель (импортер) приобретает товар в условиях, когда у него нет соответствующих денежных ресурсов. Вместе с тем продавец (экспортер) также не может отложить получение денег на будущее и продать товар в кредит. Противоречие разрешается следующим образом. Покупатель выписывает комплект векселей на сумму, равную стоимости товара плюс проценты за кредит, который как бы предоставляется покупателю продавцом. Сроки векселей равномерно распределены во времени. Обычно предусматриваются равные интервалы времени (полугодия) между платежами по векселям. Продавец сразу же после получения портфеля векселей учитывает его в банке без права оборота на себя, получая деньги в самом начале сделки. Таким образом, фактически не сам продавец кредитует покупателя — кредит полностью предоставляется банком. Банк, форфетируя сделку, берет весь риск на себя.

Итак, в операции а форфэ увязываются интересы продавца, покупателя и банка. В качестве четвертого агента сделки иногда выступает гарант-банк покупателя, гарантирующий погашение задолженности по векселям. Каждая участвующая в сделке сторона преследует собственные цели и предусматривает возможность их достижения при разработке условий соглашения.

Цель продавца — получить деньги в начале сделки и тем самым устранить риск отказа покупателя от платежей и риск, связанный с колебанием процентных ставок по кредиту.

Цель покупателя — приобрести продукцию в кредит с наименьшими совокупными издержками. Расходы покупателя заключаются в погашении последовательно предъявляемых ему векселей.

Для банка форфейтная операция — обычная операция учета портфеля векселей. Эффективность этой операции определяется размером учетной ставки и рядом других параметров.

Анализ операции а форфэ можно осуществить с позиции каждого из участвующих в ней агентов с учетом указанных выше целей. Следует подчеркнуть, что интересы сторон здесь переплетены в большей мере, чем это может показаться на первый взгляд. В связи с этим, анализируя позицию каждого участника операции, необходимо принимать во внимание интересы остальных ее участников.

§14.2. Анализ позиции продавца

Определение сумм векселей. Продавец должен получить при учете векселей сумму, равную цене товара. Соответственно, анализ для него заключается в определении сумм, которые должны быть указаны на векселях. Если окажется, что учет векселей дает величину, меньшую, чем оговоренная цена, то продавец должен заранее поправить положение. Обычно на практике для этого повышают исходную цену. Альтернативой может служить повышение ставки процентов за кредит. Ясно, что какой бы путь ни был принят, повышение исходной цены или ставки процентов не может быть произвольным.

Сумма, проставленная на векселе V_t (*face value*), состоит из двух элементов: суммы, погашающей основной долг (цену товара), и процентов за кредит. Последние могут быть определены двумя способами:

а) проценты на остаток задолженности; в этом случае срок, за который они начисляются, начинается с момента погашения предыдущего векселя;

б) проценты на ту часть долга, которая покрывается векселем; в этом случае срок исчисляется от начала сделки и до момента погашения векселя.

Рассмотрим оба способа для случая, когда долг погашается *равными суммами*. Введем обозначения:

n — число векселей или периодов;

i — ставка простых процентов за период, под которую производится кредитование;

d — простая учетная ставка, используемая банком при учете векселей;

P — цена товара (если условия операции предусматривают выплату аванса, то последний вычитается из цены и далее не принимается во внимание; иначе говоря, под P будем понимать цену за вычетом аванса).

Вариант а. Погашение основного долга производится равными суммами, соответственно в каждый вексель записывается сумма P/n. Что касается процентов за кредит, то они образуют ряд:

$$Pi,\ Pi\left(1-\frac{1}{n}\right), ...,\ Pi\left(1-\frac{t-1}{n}\right), ...,\ \frac{P}{n}i,\ t = 1,2,...,n.$$

Сумма векселя, погашаемого в момент t:

$$V_t = \frac{P}{n} + Pi\left(1-\frac{t-1}{n}\right) = \frac{P}{n}[1+(n-t+1)i]. \quad (14.1)$$

Общая сумма начисленных процентов равна

$$Pi\sum_{t=1}^{n}\left(1-\frac{t-1}{n}\right) = \frac{n+1}{2}Pi. \quad (14.2)$$

Наконец, общая сумма векселей составит

$$\sum_t V_t = P\left(1+\frac{n+1}{2}i\right). \quad (14.3)$$

Вариант б. В этом случае по определению

$$V_t = \frac{P}{n}(1+ti). \quad (14.4)$$

Сумму процентов за весь срок можно найти как разность:

$$\sum_t V_t - P = \sum \frac{P}{n}(1 + ti) - P = \frac{n+1}{2}Pi. \qquad (14.5)$$

Получен тот же результат, что и по формуле (14.2). Различие между вариантами, как показано в примере 14.1, заключается в распределении процентов по периодам.

ПРИМЕР 14.1. В уплату за товар P = 1 млн руб. выписано четыре векселя с погашением по полугодиям. Ставка процентов за кредит — 10% годовых (простых). Таким образом, i = 5%, n = 4, $P : n$ = 1000: 4 = 250 тыс.руб.

Определим процентные платежи и суммы векселей двумя методами (все показатели в тыс.руб.).

Таблица 14.1

t	$P{:}n$	Вариант *а*		Вариант *б*	
		%	V_t	%	V_t
1	250	50,0	300,0	12,5	262,5
2	250	37,5	287,5	25,0	275,0
3	250	25,0	275,0	37,5	287,5
4	250	12,5	262,5	50,0	300,0
Итого	—	125	1125	125	1125

Как видим, сумма процентов в обоих вариантах расчета одинакова. Однако распределение платежей во времени противоположное: в варианте *а* они уменьшаются, в варианте *б* — растут. Для покупателя вариант *б* на первый взгляд представляется более привлекательным.

Корректировка условий продажи. При учете портфеля векселей в банке продавец получит некоторую сумму A. Если применяется простая учетная ставка, как это обычно и делается, то

$$A = \sum_t V_t(1 - td). \qquad (14.6)$$

Величина A представляет собой современную величину всех платежей по векселям. Поскольку сумма на векселе определяется двумя способами, найдем величину A для каждого из них.

Вариант а. В этом случае

$$A = \sum_1^n \frac{P}{n}\left[1 + \left(n - t + 1\right)i\right]\left(1 - td\right). \qquad (14.7)$$

После ряда преобразований (14.7) (см. Математическое приложение к главе) получим

$$A = P\left[1 + \frac{n+1}{2}\left((i-d) - id\frac{n+2}{3}\right)\right]. \qquad (14.8)$$

Обозначим сумму в квадратных скобках через z. Очевидно, что если величина z меньше 1, то продавец получит сумму, которая меньше договорной цены P. Наиболее простой путь избежать потерь — повысить цену в $1/z$ раз. Такой корректировочный множитель позволяет точно определить необходимую поправку и, кроме того, дает возможность проследить влияние всех воздействующих факторов. В редком случае, когда $z = 1$ и нет необходимости в корректировке, продавец получает при учете векселей оговоренную сумму.

Не надо забывать, что после корректировки цены необходимо вернуться к задаче определения сумм векселей уже для новой цены товара.

ПРИМЕР 14.2. По данным примера 14.1 в случае, когда учетная ставка 9,5% годовых, получим следующее значение коэффициента z:

$$z = 1 + \frac{4+1}{2}\left(0{,}05 - 0{,}0475 - 0{,}05 \times 0{,}0475 \times \frac{4+2}{3}\right) =$$

$$= 0{,}994375.$$

Таким образом, если все условия сделки останутся без изменений, то продавец получит несколько меньшую сумму вместо оговоренного 1 млн руб. Повышение цены на

$$1 / z = 1 / 0{,}994375 = 1{,}005657$$

компенсирует потерю продавца. Суммы векселей после корректировки составят 301,697; 289,126; 276,566; 263,984. Учет этих векселей по ставке 4,75% за полугодие дает в сумме точно 1 млн руб.

Вероятно, представляет практический интерес соотношение процентных ставок, при которых продавец не будет нести потери. Из равенства (14.8) следует, что последнее условие выполнимо в случае, когда

$$i - d = id\frac{n+2}{3}.$$

В силу чего барьерная процентная ставка, при которой отпадает необходимость в корректировке цены, составит

$$i^* = \frac{d}{1 - \frac{n+2}{3}d}.$$

Повышение платы за кредит до уровня i^* полностью балансирует условия сделки. Разумеется, что суммы векселей при этом несколько повысятся.

ПРИМЕР 14.3. Каков должен быть уровень процентной ставки за кредит для того, чтобы покупатель не понес ущерба в операции а форфэ при условии, что d = 4,75% (данные примера 14.1, *вариант а* расчета сумм векселей). В этом случае

$$i^* = \frac{0{,}0475}{1 - \frac{4+2}{3}0{,}0475} = 0{,}052486.$$

Таким образом, повышение годовой ставки кредита до 10,4972% полностью компенсирует потерю продавца. Альтернативой может служить повышение цены товара (см. пример 14.2).

Вариант б. Напомним, что по этому варианту проценты начисляются на ту часть долга, которая погашается векселем. По определению

$$A = \sum_1^n \frac{P}{n}\left(1 + ti\right)\left(1 - td\right).$$

После ряда преобразований этого выражения получим

$$A = Pz = P\left[1 + \frac{n+1}{2}\left((i-d) - id\frac{2n+1}{3}\right)\right]. \qquad (14.9)$$

Корректирующий цену множитель равен $1 / z$.

ПРИМЕР 14.4. Определим корректирующий множитель к цене по данным примера 14.1 *(вариант б)* при условии, что d = 4,75%. В этом случае согласно формуле (14.9)

$$z = 1 + \frac{4+1}{2}\left(0{,}05 - 0{,}0475 - 0{,}05 \times 0{,}0475 \times \frac{2 \times 4 + 2}{3}\right) =$$

$$= 0{,}988437.$$

Корректирующий множитель равен 1/0,988437 = 1,0116977. Как видим, нужна более существенная корректировка цены, чем по варианту *а*.

Перейдем теперь к корректировке условий сделки с помощью изменения ставки процента за кредит. Единственное значение i, при котором продавец не терпит убытки в варианте *б*, нетрудно определить из условия, согласно которому $z = 1$. Для того чтобы удовлетворить это требование, необходимо выполнение условия, которое следует из (14.9):

$$i - d = id\frac{2n+1}{3},$$

откуда

$$i^* = \frac{d}{1 - \frac{2n+1}{3}d}. \tag{14.10}$$

ПРИМЕР 14.5. По данным примера 14.1 *(вариант б)* и при условии, что d = 4,75%, находим

$$i^* = \frac{0{,}0475}{1 - \frac{2 \times 4 + 1}{3}0{,}0475} = 0{,}0553935.$$

Таким образом, у покупателя имеются две возможности для компенсации потерь при учете портфеля векселей — повысить цену товара на 1,0116977 или увеличить ставку за кредит до 11,0787% годовых.

Корректировка цены и ставки по кредиту приводит примерно к одинаковым конечным результатам, однако обычно наблюдается небольшое различие в суммах векселей. Для иллюстрации сказанного обратимся к примеру.

ПРИМЕР 14.6. Первоначальные условия сделки: P = 1200 тыс.руб., ставка по кредиту за полугодие — 3%, учетная ставка за полугодие — 4,5%. Проценты начисляются на сумму векселя (*вариант б*). Выписывается шесть векселей с последовательным погашением по полугодиям. Поскольку $i < d$, то сразу можно сказать, что необходима корректировка исходных условий. Корректирующий множитель, рассчитанный по формуле (14.9), составит 1,07872. Таким образом, сумма векселя с поправкой, но без начисленных процентов равна 200 × 1,07872 = 215,74. Суммы векселей с начисленными процентами по ставке 3% показаны в табл.14.2.

Применив второй метод корректировки, находим

$$i^* = \frac{0{,}0475}{1 - \frac{2 \times 6 + 1}{3} 0{,}45} = 0{,}0559.$$

Значения сумм векселей, полученных наращиванием 200 тыс.руб. по ставке 5,59%, приведены в табл.14.2.

Таблица 14.2

Период	Умножение на $1/z$		Повышение ставки до i^*	
	Сумма платежа	Дисконт	Сумма платежа	Дисконт
1	222,22	10,00	211,18	9,50
2	228,69	20,58	222,36	20,01
3	235,16	31,75	233,54	31,53
4	241,63	43,49	244,72	44,05
5	248,11	55,82	255,90	57,58
6	254,58	68,74	267,08	72,11
Итого	1430,39	230,38	1434,78	234,78

Нетрудно убедиться в том, что при любом методе корректировки продавец получит сумму, равную оговоренной цене (1200), как это и требовалось доказать. Небольшое различие между итоговыми суммами векселей (и дисконта) объясняется тем, что распределение платежей по срокам несколько различается. В первом случае оно более равномерно (минимальная сумма — 222,22, максимальная — 254,58), во втором — первый вексель выписывается на сумму 211,18, последний — на 267,08. Указанный небольшой сдвиг приводит к увеличению общей суммы платежа по векселям, а также суммы дисконта.

§14.3. Анализ позиций покупателя и банка

Совокупные издержки покупателя. Последовательность погашения векселей можно рассматривать как поток платежей. Совокупные издержки покупателя с учетом фактора времени равны современной стоимости этого потока. В § 14.2 было показано, что сумма векселя может быть получена двумя путями. Напомним: вариант *а* — проценты по кредиту начисляются на остаточную сумму долга, вариант *б* — проценты начисляются на сумму погашения основного долга по векселю. Определим совокупные издержки покупателя для этих двух вариантов с учетом того, что условия сделки сбалансированы, т.е. с необходимой корректировкой цены.

Вариант а. Для этого варианта современная величина платежей по векселям (приведенные совокупные издержки покупателя) составит

$$W_a = \frac{1}{z}\sum_t V_t v^t = \frac{P}{z}\sum[1 + (n - t + 1)i]v^t, \qquad (14.11)$$

где v — дисконтный множитель по рыночной процентной ставке q.

ПРИМЕР 14.7. По данным примера 14.1 *(вариант а)* при условии, что сложная ставка, которая характеризует средний уровень ссудного процента на рынке, равна, допустим, 15% годовых, что соответствует ставке за полугодие $q = 1{,}15^{1/2} - 1 = 0{,}07238$, или 7,238%. Величины V_t приведены в табл. 14.1; значение $z =$ $= 0{,}994375$ найдено в примере 14.2. Получим:

$$W_a = \frac{1}{0{,}994375}(300 \times 1{,}07238^{-1} + 287{,}5 \times 1{,}07238^{-2} +$$

$$+ 275 \times 1{,}07238^{-3} + 262{,}5 \times 1{,}07238^{-4}) = 956{,}65.$$

Вариант б. При начислении процентов на остаток задолженности получим следующее значение современной стоимости потока платежей:

$$W_б = \frac{1}{z}\sum_t V_t v^t = \frac{1}{z}\sum\frac{P}{n}\left(1 + ti\right)v^t. \qquad (14.12)$$

ПРИМЕР 14.8. Для варианта *б* начисления процентов (данные примера 14.2) при условии, что $z = 0{,}988437$ (см. пример 14.4) и $q = 7{,}238\%$, находим:

$$W_б = \frac{1}{0{,}988437}(262{,}5 \times 1{,}07238^{-1} + 275 \times 0{,}07238^{-2} +$$

$$+ 287{,}5 \times 1{,}07238^{-3} + 300 \times 1{,}07238^{-4}) = 954{,}92.$$

Как видим, такой способ начисления процентов при условии, что $q > i$, дает сумму совокупных издержек, которая чуть меньше, чем у варианта *а*.

Минимизация издержек. Современная стоимость издержек покупателя зависит от всех параметров операции, причем при $q > i$ всегда наблюдается соотношение $W_б < W_a$. Иначе говоря, совокупные издержки покупателя меньше при начислении процентов по варианту *б*. Причем, чем больше n и q , тем больше разность современных стоимостей потоков платежей, соответствующих двум вариантам начисления процентов.

В табл. 14.3 иллюстрируется влияние роста учетной ставки на приведенные издержки покупателя (вариант 1). Влияние процентной ставки i на величину приведенных издержек неоднозначно. В некоторых случаях ее рост приводит к увеличению W, в других — к уменьшению. Однако в любом случае это влияние мало ощутимо. Оно становится заметным лишь при больших значениях n. В этой же таблице приводятся данные, характеризующие $W_б$ для разных значений i (варианты 2 и 3). При расчете совокупных издержек приняты следующие параметры: $P = 1000$, $q = 0{,}1$. В варианте 1 $n = 10$, $i = 0{,}06$; в варианте 2 $n = 10$, $d = 0{,}07$; в варианте 3 $n = 8$, $d = 0{,}05$.

Наиболее интересной и практически важной является зависимость современной стоимости издержек от количества последовательно погашенных векселей n. Нетрудно обнаружить, что при одних сочетаниях исходных параметров операции (i, d, q) значение W может расти, при других — падать. Более того, ***при некоторых сочетаниях параметров существует такое количество векселей, при котором совокупные издержки покупателя становятся минимальными.*** Строгий аналитический подход для определения оптимального n приводит к громоздким математическим выражениям. Проще рассчитать ряды показателей для заданного набора параметров и выбрать оптимальное значение n.

Таблица 14.3

Суммарные приведенные издержки импортера

Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3	
d	$W_б$	i	$W_б$	i	$W_б$
0,04	775	0,04	1005	0,04	856
0,05	839	0,05	1006	0,05	855
0,06	916	0,06	1007	0,06	854
0,07	1007	0,07	1008	0,07	853
0,08	1118	0,08	1009	0,08	852
0,09	1258	0,09	1010	0,09	852
0,10	1436	0,10	1010	0,10	851
0,11	1675	0,11	1011	0,11	850
0,12	2008	0,12	1012	0,12	850

Таблица 14.4

Суммарные приведенные издержки покупателя

n	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
	d = 5%; i = 4%	d = 6%; i = 4%	d = 7%; i = 6%
4	904	931 (837)	960
5	890	923 (814)	**959**
6	877	917 (793)	961
7	865	913 (776)	966
8	856	**911** (761)	975
9	848	912 (749)	989
10	842	916 (740)	1007
11	837	923 (733)	1031
12	835	933 **(730)**	1062
13	**834**	947 (731)	1102
14	836	965 (734)	1153
15	841	989 (743)	1219
16	848	1019 (756)	1304
17	858	1057 (775)	1417
18	871	1105 (800)	1570
19	888	1165 (835)	1787
20	910	1242 (881)	2112

В табл. 14.4 приводятся характеристики суммарных издержек $W_б$ в зависимости от n для трех вариантов условий. Во всех вариантах $P = 1000$, $q = 0,1$. В варианте 1: $d = 0,05$, $i = 0,04$; в варианте 2: $d = 0,06$, $i = 0,04$; в варианте 3: $d = 0,07$, $i = 0,06$. По данным этой таблицы и из дополнительных расчетов следует, что величина ставки d заметно влияет на значение n, соответствующее минимальной величине издержек. Например, при

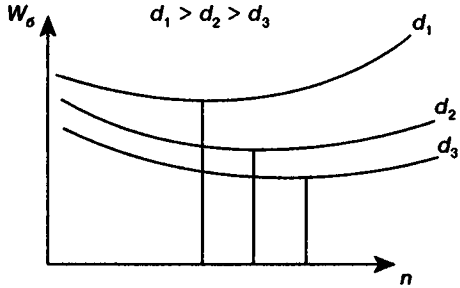

Рис. 14.1

низком значении учетной ставки (d = 0,04) минимум издержек приходится на n = 13. Повышение d до 0,06 сдвигает оптимальное для импортера число n до 8. При d = 0,07 оптимальное n равно 5. Графическая иллюстрация влияния n на точку оптимума приведена на рис. 14.1.

Изменение ставки i практически не отражается на положении точки оптимума. Например, если в варианте 2 эта ставка была бы не 0,04, а 0,06, то оптимальным опять оказалось бы n = 8.

Влияние ставки q однозначно — чем она выше, тем меньше величина совокупных издержек. Ее повышение при всех прочих равных показателях отодвигает точку оптимума. Так, если в варианте 2 принять q = 0,15 вместо 0,1, то точка оптимума сдвинется до n = 12. Соответствующие значения суммарных издержек показаны в табл. 14.4 (в скобках в варианте 2).

Анализ позиции банка. Банк или другое финансовое учреждение, участвующее в форфейтной сделке путем учета векселей, берет на себя весь риск по проведению операции и заинтересован в получении дохода от инвестированных в векселя средств. Доходность операции определяется учетной ставкой. Поскольку общепринятым измерителем эффективности финансовых долгосрочных операций является ставка сложных процентов, то ее анализ с позиции банка заключается в расчете такой ставки. Последняя эквивалентна учетной ставке d, примененной при учете комплекта из n векселей с последовательными сроками погашения.

При условии, что P и V_t сбалансированы, можно написать:

$$P = \sum_{t=1}^{n} V_t v^t, \tag{14.13}$$

где v — дисконтный множитель по неизвестной ставке g, характеризующей доходность учета портфеля векселей.

Теперь задача сводится к определению корня многочлена степени n. Как известно, такая задача решается одним из итеративных вычислительных методов, с которыми мы знакомились в предшествующих главах. Рост учетной ставки, естественно, оказывает положительное влияние на g. С увеличением n величина g также растет.

ПРИМЕР 14.9. По данным примера 14.1 суммы векселей после корректировки составят *(вариант б)*: 265,57; 278,22; 290,86; 303,51. Необходимое для расчета g уравнение имеет вид

$$1000 = 265{,}57v + 278{,}22v^2 + 290{,}86v^3 + 303{,}51v^4.$$

Находим: $v = 0{,}95039$ и $g = 5{,}22\%$. Поскольку процентная ставка рассчитана за полугодие, то для получения годовой ставки сложных процентов находим $1{,}0522^2 = 1{,}1071$, т.е. 10,71%.

Итак, при выработке условий конкретной сделки *а форфэ* необходим ее всесторонний количественный анализ с позиции заинтересованных сторон, так как финансовые результаты сделки не очевидны и существенно зависят от значений принятых параметров.

Из приведенного выше материала следует, что для продавца, который остерегается существенного повышения цены и в то же время стремится компенсировать свои потери, средствами управления являются: снижение учетной ставки, повышение ставки процентов за кредит, уменьшение числа векселей (периода погашения). Средствами управления для покупателя являются в основном параметры d и n. Большая величина параметра i играет отрицательную роль лишь при очень высоких значениях n.

Как было показано, в ряде практических случаев современная величина издержек импортера может быть минимизирована. Таким образом, основная задача покупателя — найти значение n, минимизирующее современную стоимость издержек импортера. Основным инструментом, воздействующим на эффективность сделки, для банка является учетная ставка.

Математическое приложение к главе

Доказательство формулы (14.8)

$$A = \sum_{t=1}^{n} \frac{P}{n}\left[1 + \left(n - t + 1\right)i\right]\left(1 - td\right) =$$
$$= \frac{P}{n}\left[\left(1 + in + i\right)\sum\left(1 - td\right) - i\sum t\left(1 - td\right)\right]. \qquad (1)$$

Для упрощения (1) необходимо определить следующие суммы:

$$\sum_{1}^{n}\left(1 - td\right) = n - d\sum t = n - d\,\frac{n\left(n + 1\right)}{2} = n\left(1 - \frac{n + 1}{2}d\right);$$

$$\sum_{1}^{n} t\left(1 - td\right) = \sum t - d\sum t^2 = \frac{n\left(n + 1\right)}{2} - d\,\frac{n\left(n + 1\right)\left(2n + 1\right)}{6} =$$
$$= n\,\frac{n + 1}{2}\left(1 - d\,\frac{2n + 1}{3}\right).$$

Поставим полученные суммы в формулу (1). После ряда преобразований получим

$$A = P\left[1 + \frac{n + 1}{2}\left((i - d) - id\frac{n + 2}{3}\right)\right].$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Четыркин Е.М.* Методы финансовых и коммерческих расчетов. 2-е изд. М.: Дело, 1995. Гл. 10.
2. *Guild I, Harris R.* Forfeiting. An alternative approach to export trade finance. Euromoney Publications, 1985.

Глава 15

КОРОТКО ОБ ОПЦИОНАХ

§15.1. Сущность опциона, основные понятия

В последнее десятилетие заметно усилилось внимание к так называемым *производным финансовым инструментам* (*derivative securities*). Термин "производный" связан с тем, что стоимость такого инструмента как бы привязывается к стоимости того или иного *базового финансового инструмента* (*underlying securities*) и становится по отношению к нему производной (не в математическом смысле) величиной. Среди производных инструментов наибольший интерес, вероятно, вызывают опционы. В России опционы пока не получили заметного распространения. Однако ознакомиться, хотя бы кратко, с данным инструментом представляется своевременным.

Под *опционом (options)* понимают *право*, но не обязательство, купить/продать некоторые финансовые инструменты, акции или валюту по оговоренной цене при наступлении срока или до него. За получение этого права *покупатель* опциона (*buyer, holder*) при заключении контракта уплачивает *продавцу (seller, writer)* некоторую *премию* (*premium)*. Последняя представляет собой рыночную цену опциона. Таким образом, само право в этой операции становится товаром.

Различают опционы *на право покупки* (*call option*) и *на право продажи* (*put option*). Для сокращения записи, опцион на право покупки часто называют *опцион колл*, опцион на право продажи — *опцион пут*. Опцион, который может быть реализован только в оговоренный в контракте день, *день исполнения* (*expiration day, day of maturity*), называют *европейским*. Если предусматривается возможность исполнения опциона в любой момент до этого дня, то такой опцион называют *американским*. Заметим, что приведенные названия не определяют место сделки. Например, американский опцион может быть куплен и в Европе. Оговоренная в контракте цена объекта опциона называется объявленной, договорной ценой, или *ценой исполнения* (*striking price, exercise price*).

Опционы распространяются на акции, динамику их цен (*stock index option*), различные долговые обязательства, в том числе облигации, казначейские векселя, долговые сертификаты и другие подобного рода бумаги (*option on debt instrument*), курсы валют (*option on currencies exchange rate*), процентные ставки (*interest rates option*) и другие объекты. Существует особый класс так называемых экзотических опционов — на право покупки/продажи некоторых видов товаров (металлы, нефть) и даже на право обмена акций одного вида на акции другого вида. Каждый из перечисленных объектов опциона имеет свои особенности, которые должны учитываться в технике выполнения и методе анализа операции.

Можно сказать, что опцион является особым случаем форвардной операции. Он отличается от форвардной операции прежде всего тем, что владелец опциона может реализовать свое право на сделку или отказаться от ее исполнения. Если сделка не исполняется (отказ от исполнения), то владелец опциона несет потери только в размере выплаченной им премии.

Охарактеризуем опционы колл и пут с позиций как покупателя, так и продавца. Исполнение опциона может быть реализовано в нескольких вариантах. Рассмотрим их применительно к опциону колл при покупке акции. Если есть основание ожидать, что цена акций компании G будет расти (оптимистический прогноз) в течение некоторого периода, то инвестор может купить опцион колл. Пусть условия опциона таковы: цена исполнения 900, премия 50. Допустим в день исполнения рыночная цена акции оказалась равной 1050. Владелец опциона использует свое право и покупает их по цене исполнения, получая прибыль в размере $1050 - (900 + 50) = 100$ на одну акцию. Таким образом, опцион реализуется — приносит доход. Опцион может быть реализован и без непосредственной покупки акции — путем получения владельцем опциона разности между рыночной ценой акции и ценой исполнения. Если рыночная цена акции равна 950, то прибыль инвестора будет нулевая: $950 - (900 + 50) = 0$. В этом случае для владельца опциона безразлично, купить ли акцию на рынке без опциона или использовать опцион. В обоих решениях его издержки одинаковы. Наконец, при цене ниже 950 покупатель отказывается от исполнения опциона и несет убытки. Максимальный убыток равен премии 50, размер прибыли не ограничен.

Приведенный пример иллюстрируется на графике "прибыль — рыночная цена акции" (см. рис. 15.1). Следует обратить внимание на то, что приведенные элементарные расчеты прибыли не учитывают разновременность расходов владельца опциона (премия выплачивается при покупке опциона, а покупка акции — в день исполнения). Однако, для иллюстрации принципиальных схем опционов это не так уж и важно.

Обратимся к положению продавца опциона колл в этой сделке. Очевидно, что прибыль/потери продавца опциона "симметричны" потерям/прибыли покупателя опциона: там, где у покупателя — доход, у продавца — потеря, и наоборот. Максимальная прибыль равна 50, размер убытка не ограничен. Если цена акции компании *G* превышает 950, то продавец несет убытки (см. рис. 15.2).

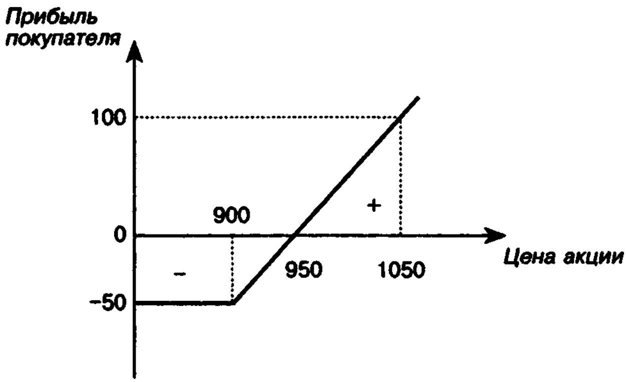

Рис. 15.1

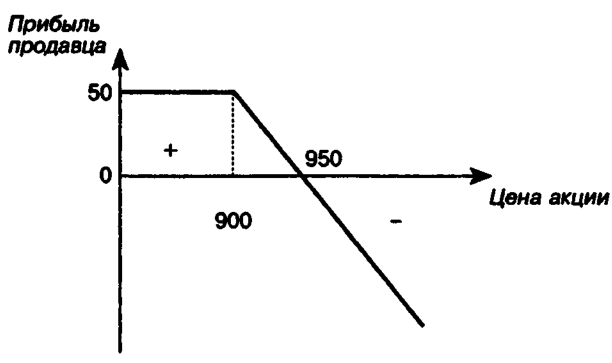

Рис. 15.2

Перейдем к опционам пут (напомним, что это опцион на право продажи). Пусть ожидается падение цены акций компании *G* (пессимистический прогноз). В этой ситуации можно продать опцион колл. Однако, как только что было показано, позиция продавца оказывается довольно рискованной. Вместо этого он предпочитает купить опцион пут. Условия опциона: цена исполнения 870, премия 40.

Картина зависимости "прибыль—цена акции" для покупателя опциона пут в этой ситуации кардинальным образом меняется. Если рыночная цена акции меньше 870 − 40 = 830, то покупатель опциона имеет прибыль. Например, при цене акции 810 прибыль составит 870 − (810 + 40) = 20. При цене 830 прибыль нулевая, так как 870 − (830 + 40) = 0, а при цене, превышающей 830, имеет место убыток, максимальная величина которого составляет 40. Прибыль/потери продавца такого опциона показаны на рис.15.3.

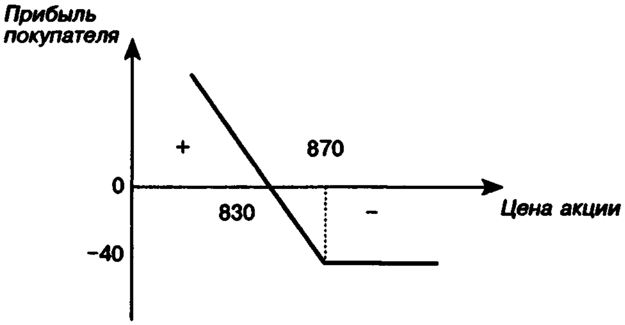

Рис. 15.3

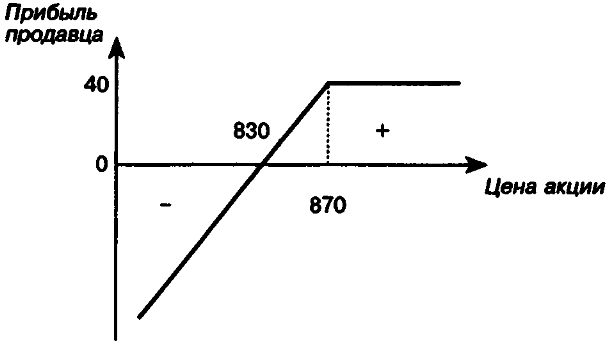

Рис. 15.4

Последствия действий продавца опциона для покупателя в зависимости от рыночной цены акции отражены на рис.15.4.

Как было показано, положения покупателя и продавца опциона в отношении прибыли являются "зеркальными отображениями". Различаются они и по моменту получения ожидаемой прибыли. Продавец получает ее немедленно, покупатель — в момент реализации опциона.

Приведем пример валютного опциона. Ограничимся при этом позицией покупателя опциона колл.

ПРИМЕР 15.1. Импортер, который имеет швейцарские франки и в будущем должен выплатить некоторую сумму в долларах США, приобретает опцион на право покупки долларов по курсу 1 долл. США = 2,00 шв. франка и выплачивает премию 0,03 шв. фр. за 1 долл. При наступлении срока валютирования возможны следующие варианты завершения операции, определяемые движением курса доллара.

1. Курс доллара упал до 1,90 шв.фр. В этом случае покупатель не использует опцион и покупает доллары на рынке. Его результаты:

— разность между курсом опциона и рыночным курсом спот:	2,00 - 1,90 = 0,10;
— премия:	-0,03;
— условная прибыль от опциона в расчете на 1 долл.:	0,07.

2. Курс доллара вырос до 2,15 шв.фр. Покупатель опциона использует свое право на покупку валюты по цене исполнения (оговоренному курсу). Результат: реальная прибыль в размере 2,15 - - (2,00 + 0,03) = 0,12 шв.фр.на 1 долл.

3. Курс равен 2,00. Покупатель опциона может его использовать или отказаться от него и купить валюту на рынке. В обоих случаях его расходы равны 2,03, т.е. потери относительно рыночного курса равны премии (0,03).

4. Курс превышает цену исполнения, но это превышение меньше премии. Если покупатель все же реализует опцион, то потери также меньше премии. Пусть курс равен 2,02, потери равны 2,03 - - 2,02 = 0,01 на 1 долл.

Приобретение права на покупку объекта опциона имеет смысл при ожидании повышения его цены. Право на продажу, очевидно, покупается при ожидании снижения цены.

Как видно из приведенных рисунков, область изменения рыночной цены акции делится на два интервала, доходный (*in the money*) и бездоходный (*out the money*), разделяемые ценой исполнения сделки. Для опциона колл в доходном интервале рыночная цена больше цены исполнения, их разность положительна (на рис. 15.1 интервал цен, превышающих 950). В бездоходном интервале разность рыночной цены и цены исполнения отрицательна. Наконец, при равенстве рыночной цены цене исполнения имеем так называемый нейтральный опцион (*at the money*). Аналогичные по содержанию интервалы можно выделить и при покупке опциона пут.

Помимо простых схем опциона, которые были только что охарактеризованы, на практике прибегают и к более сложным, *комбинированным* схемам. Такие схемы предполагают одновременную покупку двух, трех опционов с различными характеристиками. Основное назначение комбинированных схем — гарантирование владельца опциона от значительных потерь. Например, одновременно покупается и продается опцион колл по разным ценам исполнения и с различными премиями, одновременно используются опционы пут и колл при одинаковой или различных ценах исполнения, двух опционов колл с различными ценами исполнения и одного опциона пут и т.д. Естественно, что чем больше простых опционов охватывает комбинированная схема, тем сложнее ее осуществить — труднее найти контрагентов по сделке.

Приведем график формирования прибыли для комбинированной схемы, предусматривающей покупку опциона колл с низкой ценой исполнения E_1 и продажу опциона колл с высокой ценой исполнения E_2 (см. рис. 15.5). Прибыль/потери от комбинации опционов показана жирной линией, c_1 и c_2 — стоимости опционов.

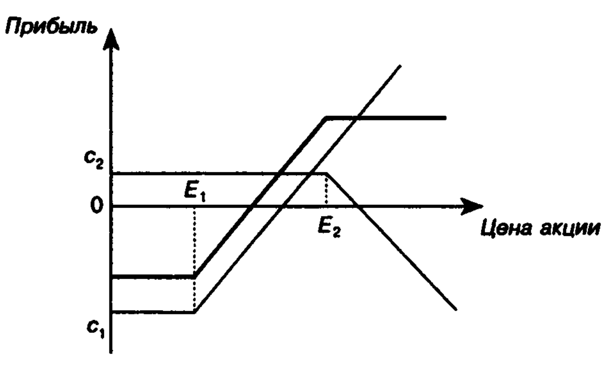

Рис. 15.5

§15.2. Цена опциона

Как было показано выше, реальные прибыль или потери от опциона для обеих участвующих сторон зависят от цены исполнения, рыночной цены актива на момент исполнения опциона, премии. В условиях развитого рынка опционов цена исполнения устанавливается на бирже опционов. Обычно это величина, близкая к текущей рыночной цене актива. Если биржа опционов отсутствует, то единственный путь установления цены исполнения — непосредственная договоренность покупателя и продавца опциона.

Рыночные цены актива, на которые ориентируются стороны в опционной сделке, не реальные, а ожидаемые величины. Можно полагать, что чем больше они отклоняются от цены исполнения, тем меньше их вероятность. Если принять в качестве одной из возможных рабочих гипотез нормальное распределение этих вероятностей, то зависимость "вероятность—прибыль" для опциона колл на графике выглядит таким образом (см. рис. 15.6), что цена исполнения E является центром распределения вероятностей. С увеличением рыночной цены прибыль увеличивается, одновременно уменьшается вероятность этого события.

В разработанных математических моделях для определения цены опциона, одна из которых кратко охарактеризована ниже, вместо нормального распределения обычно используется логарифмически нормальное (логнормальное) распределение, а центр распределения относят к цене исполнения. Иначе говоря, предполагается, что распределение вероятностей для ожидаемых рыночных цен является асимметричным (вершина сдвинута влево). Таким образом, предусматривается, что вероятность получения прибыли выше, чем потерь.

Наиболее интересным среди перечисленных факторов является премия (цена опциона). Выше отмечалось, что цена опци-

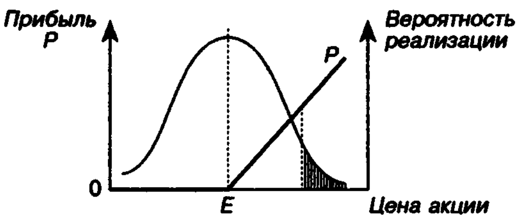

Рис. 15.6

она складывается на рынке. Предлагаемая продавцом цена должна быть конкурентоспособной и в то же время обеспечить ему некоторую прибыль.

К проблеме формирования цены можно подойти аналитически. Прежде всего можно определить "естественные" границы этой цены. Так, в первом приближении для европейского опциона колл минимальная цена равна нулю, максимальная — цене акции, так как право на покупку вряд ли может превышать цену самой акции. Таким образом,

$$0 \leqslant c \leqslant S,$$

где c — цена опциона, S — текущая цена акции.

В то же время цена опциона к моменту истечения срока равна разности ожидаемой рыночной цены и цены исполнения:

$$c = S - E. \tag{15.1}$$

Верхние и нижние границы опциона колл показаны на рис. 15.7.

Для того чтобы уточнить границы значений цены опциона, а также лучше представить себе свойства опциона и фигурирующих в нем показателей, сравним расходы на приобретение акции непосредственно на рынке (стратегия А) и при покупке опциона колл (стратегия Б). Пусть срок опциона и приобретения акции — один год, цена акции равна S, цена исполнения E.

Возможные стратегии покупателя и их финансовые последствия представлены в табл. 15.1. В графе "Расходы" этой таблицы показаны стоимостные показатели на день исполнения опциона, в графе "Инвестиции" — его расходы на день покупки опциона. Опцион при условии $S < E$ не реализуется, акции мо-

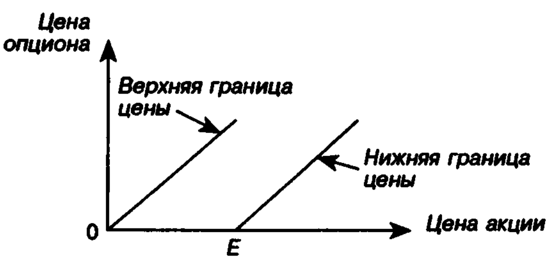

Рис. 15.7

гут быть куплены на рынке (стратегия А). Если $S > E$, то следует применить стратегию Б. Премия для альтернативной ситуации определена в размере $c = S - E$. Величина Ev означает современную стоимость цены исполнения на день покупки опциона, v — дисконтный множитель. Расходы на приобретение акции во всех ситуациях равны S.

Таблица 15.1

Стратегия покупателя	**Расходы**		**Инвестиции**
	$S_1 < E$	$S_1 > E$	
А. Покупка акции	S	—	Sv
Б. Опцион			
Премия	0	$S - E$	c
Цена исполнения	E	E	Ev
Итого для Б	E	S	$(c + Ev)$

Теперь становится очевидным, что вместо (15.1) следует использовать

$$c = S - PV(E) = S - Sv, \tag{15.2}$$

где PV — оператор определения современной стоимости на момент выплаты премии, v — дисконтный множитель по рыночной процентной ставке.

Аналогичным образом получим ограничение для цены опциона пут:

$$c = PV(E) - S.$$

Приведенные выше выражения позволяют получить значения премии для нескольких величин цены акции. Так, если ожидаемая цена акции минимальна, то премия опциона колл, естественно, нулевая. Для ситуации, когда $S = E$, получим максимальную величину премии: $c = E - PV(E)$.

§15.3. Модель Блека—Шоулза

Опционы представляют определенный интерес не только в практическом плане, но и в теоретическом — с позиции количественного анализа, который осуществляется с помощью разработки специальных моделей (*option models*), описывающих взаимосвязи основных параметров опционов. Следует, однако, заметить, что теоретические цены опционов, полученные по моделям, в силу неполноты учета экономических условий и их изменчивости, условности входящих статистических данных, как правило, отличаются от рыночных. Вместе с тем, принято считать, что если рыночная цена опциона сильно занижена относительно теоретической цены, то есть основание для его покупки.

Детальное рассмотрение моделей опционов неосуществимо в рамках учебника. Поэтому ограничимся только краткой характеристикой наиболее известной из них — *модели Блека—Шоулза* (Black—Scholes). Модель Блека—Шоулза разработана в различных модификациях для некоторых видов опционов. Остановимся на одной, самой простой модификации, — опцион колл цен обыкновенной акции, при условии, что дивиденды по акции не выплачиваются до дня исполнения.

Выше уже говорилось о том, что цены опционов определяются на рынке и зависят от ряда известных и неизвестных на момент его покупки параметров. К основным параметрам можно отнести:

— уровень цены исполнения,
— текущая цена базового инструмента,
— распределение вероятностей рыночной цены базового инструмента,
— размер процентной ставки,
— срок исполнения опциона.

Все названные факторы учитываются в формуле Блека—Шоулза. Для ее записи введем обозначения:

c — цена опциона,
S — текущая цена акции,
E — цена исполнения,
$e^{-\delta t}$ — дисконтный множитель на срок t по непрерывной ставке δ,
t — срок до даты исполнения,
δ — непрерывная процентная ставка (сила роста), принятая для дисконтирования,
$N(d_1)$ и $N(d_2)$ — функции нормального распределения,
σ^2 — дисперсия доходности акции (доходность измеряется в виде ставки непрерывных процентов).

Находим

$$c = S \times N(d_1) - E \times e^{-\delta t} \times N(d_2). \tag{15.3}$$

Величина $Ee^{-\delta t}$ представляет собой дисконтированную на момент покупки опциона цену исполнения. Функции нормального распределения (плотности вероятности) определяются для параметров d_1 и d_2. Ряд значений функции $N(d)$ приведен в табл.15.2. Параметры d_i рассчитываются следующим образом:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left(\delta + \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}, \qquad (15.4)$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left(\delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}} = d_1 - \sigma\sqrt{t}. \qquad (15.5)$$

Таблица 15.2

d	N(d)	d	N(d)	d	N(d)
−2,9	0,0019	−0,9	0,1841	0,9	0,8159
−2,8	0,0025	−0,8	0,2119	1,0	0,8413
−2,7	0,0035	−0,7	0,2420	1,1	0,8643
−2,6	0,0047	−0,6	0,2743	1,2	0,8849
−2,5	0,0062	−0,5	0,3085	1,3	0,9032
−2,4	0,0082	−0,4	0,3446	1,4	0,9192
−2,3	0,0170	−0,3	0,3821	1,5	0,9332
−2,2	0,0139	−0,2	0,4207	1,6	0,9452
−2,1	0,0179	−0,1	0,4602	1,7	0,9554
−2,0	0,0228	−0,05	0,4801	1,8	0,9641
−1,9	0,0256	0,00	0,5000	1,9	0,9713
−1,8	0,0359	0,05	0,5199	2,0	0,9773
−1,7	0,0446	0,1	0,5398	2,1	0,9821
−1,6	0,0548	0,2	0,5793	2,2	0,9861
−1,5	0,0668	0,3	0,6179	2,3	0,9893
−1,4	0,0808	0,4	0,6554	2,4	0,9918
−1,3	0,0968	0,5	0,6915	2,5	0,9938
−1,2	0,1151	0,6	0,7257	2,6	0,9953
−1,1	0,1357	0,7	0,7580	2,7	0,9965
−1,0	0,1587	0,8	0,7881	2,8	0,9974

ПРИМЕР 15.2. Положим, что на момент покупки опциона колл известны следующие параметры: $S = 100$, $E = 110$, $t = 9$ месяцев (0,75 года), $\sigma^2 = 0,3^2 = 0,09$, $\delta = 0,1$. На основе этих данных получим:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{100}{110}\right) + \left(0{,}1 + \frac{0{,}09}{2}\right)0{,}75}{0{,}3\sqrt{0{,}75}} = 0{,}0517,$$

$$d_2 = 0{,}0517 - 0{,}3\sqrt{0{,}75} = -0{,}208.$$

По таблице плотности нормального распределения находим:

$$N(0{,}05) = 0{,}5199,$$

$$N(-0{,}2) = 0{,}4207.$$

Таким образом,

$$c = 100 \times 0{,}5199 - 110 \times e^{-0{,}1 \times 0{,}75} \times 0{,}4207 = 9{,}06.$$

При сравнении формул (15.2) и (15.1) легко заметить, что в обеих формулах определяется разность величин S и E. Однако, в (15.2) эти величины подвергаются взвешиванию, в качестве весов выступают вероятности. Причем $N(d_2)$ можно трактовать как вероятность исполнения опциона на момент истечения срока.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Шарп У.Ф., Александер Г.Дж,. Бейли Дж. В.* Инвестиции. Пер. с англ. М.: Инфра-М, 1997. Гл. 20.
2. *Браун С.Дж., Кришмен М.П. и др.* Количественные методы финансового анализа. Пер. с англ. М.: Инфра-М, 1996. Гл. 5.
3. *Хастингс Н., Пикок Дж.* Справочник по статистическим распределениям. Пер. с англ. М.: Статистика, 1980.

Глава 16

СТРАХОВЫЕ АННУИТЕТЫ

§16.1. Финансовая эквивалентность в страховании

В преобладающем числе областей финансовой деятельности объектами приложения методов количественного анализа являются детерминированные процессы, описываемые верными рентами. Однако в страховании и при анализе некоторых инвестиционных проектов возникает необходимость в использовании условных рент (*contingent annuity*), в которых важную роль играют вероятности наступления соответствующих событий (поступлений или выплат денег). Обсудим методы работы с такими рентами, причем для конкретности ограничимся страхованием. Выплата члена ренты в страховании зависит от наступления страхового события. Назовем такие ренты *страховыми аннуитетами*. Заранее число платежей в страховых аннуитетах, а часто и их срок, остаются неизвестными.

Согласно договору страхования страхователь уплачивает вперед страховщику некоторую сумму — *премию* (*premium*). В свою очередь он (или иной выгодоприобретатель) имеет право получить страховую сумму S после наступления страхового события. Если вероятность наступления этого события q заранее известна (на основании прошлого опыта, по аналогии и т.д.), то теоретически, без учета всех прочих факторов (в том числе и фактора времени), премия P определяется как

$$P = Sq.$$

Приведенное равенство лишь иллюстрирует *принцип финансовой эквивалентности обязательств страхователя и страховщика*. Покажем в общем виде, как реализуется этот принцип при расчете страховой *нетто-премии*, под которой понимается теоретическая цена страхования.

На практике премия, которая поступает страховой организации, обычно превышает величину нетто-премии, так как включает помимо нетто-премии и так называемую *нагрузку* (*loading*), последняя охватывает все расходы по ведению дела и некоторую прибыль страховой организации. Определение *брутто-премии* (нетто-премия плюс нагрузка) является чисто арифметической задачей, поэтому далее речь пойдет только о нетто-премии.

Пусть P — размер премии, q_n — вероятность страхового события (например, смерть застрахованного через n лет после начала страхования). Если страховое событие произойдет на первом году страхования, то страховщик получит сумму P (пусть премия выплачивается в начале года), если же это событие наступит во втором году, то сумма премий равна $2P$ и т.д. Математическое ожидание такого ряда премий составит:

$$Pq_1 + 2Pq_2 + ... + nPq_n.$$

Полученная величина хотя и обобщает все взносы застрахованного с учетом вероятностей их выплат, однако при суммировании соответствующих величин не принимается во внимание, что премии выплачиваются в разные моменты времени. С учетом этого фактора (с помощью дисконтирования сумм платежей) находим математическое ожидание современной стоимости (актуарная стоимость) взносов:

$$E(A) = P[q_1 + (1 + v)q_2 + (1 + v + v^2)q_3 + ... +$$
$$+ (1 + v + ... + v^{n-1})q_n],$$

где v — дисконтный множитель по ставке i.

Обратимся теперь к выплате страховой суммы. Положим, что она выплачивается в конце года, в котором имел место страховой случай. Тогда математическое ожидание выплаты в первом году составит Sq_1, во втором году Sq_2 и т.д. Математическое ожидание с учетом фактора времени (актуарная стоимость) выплат, очевидно, можно определить как

$$E(S) = S(vq_1 + v^2q_2 + ... + v^nq_n).$$

Исходя из принципа эквивалентности обязательств страховщика и страхователя, теперь можно написать равенство

$$E(S) = E(A),$$

которое позволяет найти искомое значение нетто-премии P. Таков в общем виде теоретический подход к методу расчета нетто-премии, принятый в личном страховании.

Пусть теперь речь идет об имущественном страховании. Если можно полагать, что вероятности наступления страхового случая постоянны, то актуарная стоимость премий за n лет составит

$$E(A) = P[q + (1 + v)q + ... + (1 + v + ... + v^{n-1})q] = PqK,$$

где $K = n + \sum_{1}^{n-1}(n - t)v^t.$

В свою очередь актуарная стоимость выплат страховых сумм находится как

$$E(S) = Sq\sum_{1}^{n} v^t.$$

Из равенства актуарных стоимостей взносов и выплат находим искомый размер нетто-премии.

В практике страховых, или как их часто называют, *актуарных расчетов* разработаны специальные приемы формирования упомянутых выше потоков платежей (страховых аннуитетов) и расчета их актуарных стоимостей.

До обсуждения проблем формирования страховых аннуитетов, связанных с жизнью людей (*life annuity*) и их использования для расчетов премий и страховых резервов необходимо ознакомиться с методикой определения необходимых вероятностей и ряда вспомогательных величин, с помощью которых существенно упрощается решение соответствующих задач. Речь пойдет о таблицах смертности и коммутационных функциях.

§16.2. Таблицы смертности и страховые вероятности

Таблицы смертности. Для осуществления актуарных расчетов, в том числе расчетов стоимостей страховых аннуитетов, необходимы исходные данные, характеризующие совокупность застрахованных по полу и возрасту, а также система нормативных демографических показателей, отражающих статистические закономерности дожития до того или иного возраста. Последние содержатся в *таблицах смертности* (*mortality tables*).

Таблица смертности представляет собой *числовую модель процесса вымирания по возрастам некоторой абстрактной совокупности людей.* Такая таблица показывает, как последовательно с увеличением возраста уменьшается эта совокупность, достигая нуля сразу после предельного возраста ω. Она является обобщением данных демографической статистики за некоторый период времени.

В России таблицы смертности разрабатываются статистическими органами для страны в целом, а также для крупных экономических районов и областей, как для всего, так и отдельно для городского и сельского населения раздельно для каждого пола[1].

Прежде чем приступить к описанию таблицы смертности и актуарных методов анализа необходимо сказать несколько слов о применяемых в актуарных расчетах обозначениях. Актуарная символика в личном страховании сложна, своеобразна и с этим приходится мириться, так как обозначения унифицированы на международном уровне. Одна из отличительных особенностей этой символики — множество нижних и верхних индексов, которые приписываются как справа, так и слева от основной переменной. Например, ${}_{n|}q_x$, ${}_{n|}\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{t|}}$ и т.д.

Основной показатель таблицы смертности — число людей l_x в возрасте ровно x лет, оставшихся в живых из первоначальной совокупности l_0, обычно равной 100 тыс. человек. Заметим, что и начальный возраст и первоначальное количество людей в таблице могут быть любыми — выбор того или иного начального возраста не влияет на результаты актуарных расчетов. Для актуарных расчетов применяют полные таблицы смертности, в которых возраст показан с интервалом в 1 год.

Величины l_x (кроме l_0) определяются расчетным путем на основе заданных вероятностей смерти (q_x), или, что реже, количества умерших (d_x). В современных таблицах смертности исходным показателем обычно служит вероятность смерти, т.е доля умерших в возрасте от x до $x + 1$ лет из числа доживших до возраста x лет. Указанные вероятности получают на основе данных статистики населения с последующим их усреднением и сглаживанием.

---

[1] Подробные методики разработки таблиц смертности, включая приемы выравнивания данных, рассматриваются в курсах демографии. Некоторые первоначальные сведения по данной проблеме можно получить в "Статистическом словаре". М.: Финансы и статистика, 1989.

Помимо показателей l_x таблица смертности содержит число умерших за год в каждой возрастной группе (d_x). Никакие иные факторы выбытия, кроме повозрастных вероятностей умереть, при разработке таблицы во внимание не принимаются.

В качестве иллюстрации приведем фрагмент таблицы смертности для мужчин, в которой начальный возраст — 18 лет[1].

Таблица 16.1

Фрагмент таблицы смертности

x	l_x*	q_x	d_x*
18	100 000	0,00149	149
19	99 851	0,00173	173
20	99 678	0,00196	195
...			
30	96 991	0,00381	370
...			
35	94 951	0,00487	462
...			
40	92 327	0,00708	654
...			
50	83 640	0,01409	1178
...			
60	68 505	0,02871	1967
...			
70	45 654	0,05691	2598
...			
80	19 760	0,11672	2306
...			

* Округлено до целых чисел.

Показанные в таблице величины l_x и d_x сами по себе не имеют смысла. Они приобретают его лишь при сравнении в рамках таблицы смертности.

Показатели таблицы смертности связаны очевидными соотношениями[2]:

---

[1] Полная таблица содержится в Приложении (см. табл. 12). Показатели таблицы получены на основе вероятностей q_x из таблицы смертности населения СССР за 1984—1985 гг. (журнал “Вестник статистики”. 1987, № 3).

[2] В таблицах, непосредственно применяемых в страховых расчетах, значения l_x и d_x для повышения точности расчетов, особенно в старших возрастах, не округляют до целых чисел.

$$l_{x+1} = l_x - d_x; \quad d_x = l_x \times q_x;$$

$$q_x = 1 - p_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x}.$$

Таблица смертности, фрагмент которой приведен выше, является минимальной по набору показателей. Она достаточна для простых видов личного страхования — страхования на дожитие и страхования жизни. На практике применяют и более полные таблицы. В частности, в групповом пенсионном и медицинском страховании применяют *таблицы выбытия (decrement tables)*, в которых помимо смертности учитываются и другие причины сокращения числа участников страхования.

Страховые вероятности. На основе данных таблицы смертности нетрудно получить систему вероятностей дожития, необходимую для расчета соответствующих страховых показателей. Рассмотрим наиболее важные из таких вероятностей.

Вероятность прожить от возраста x до $x + n$:

$$_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}. \tag{16.1}$$

Вероятность прожить еще один год после возраста x лет:

$$p_x = 1 - q_x = 1 - \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_{x+1}}{l_x}.$$

ПРИМЕР 16.1. Вероятность мужчине в возрасте 30 лет прожить еще 10 лет составит[1]:

$$_{10}p_{30} = \frac{l_{40}}{l_{30}} = \frac{92\,327}{96\,991} = 0{,}95191.$$

По данным таблицы смертности находят и вероятности смерти в определенных возрастах. Например, вероятность умереть в возрасте от x до $x + n$:

[1] Во всех примерах данного параграфа используется таблица смертности населения СССР 1984—1985 гг.

$$ {}_nq_x = 1 - {}_np_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \frac{1}{l_x} \sum_{j=x}^{x+n-1} d_j. \qquad (16.2) $$

ПРИМЕР 16.2. Вероятность для мужчины в возрасте 30 лет умереть в течение 10 следующих лет определяется как

$$ {}_{10}q_{30} = 1 - {}_{10}p_{30} = 1 - 0{,}95191 = 0{,}04809. $$

Вероятность умереть через m лет (на протяжении года $m + 1$) для лица в возрасте x лет составит:

$$ {}_{m|}q_x = {}_mp_x \times q_{x+m} = \frac{l_{x+m}}{l_x} \times \frac{d_{x+m}}{l_{x+m}} = \frac{d_{x+m}}{l_x}. \qquad (16.3) $$

В свою очередь вероятность для лица в возрасте x лет умереть в возрастном интервале от $x + m$ до $x + m + n$ лет определим следующим путем:

$$ {}_{m|n}q_x = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_x} = \frac{l_{x+m}}{l_x} \times \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_{x+m}}. \qquad (16.4) $$

Из последнего выражения вытекает, что

$$ {}_{m|n}q_x = {}_mp_x \times {}_nq_{x+m}. $$

Иначе говоря, искомая вероятность равна произведению вероятности дожить до возраста $x + m$ и вероятности умереть в следующие n лет.

ПРИМЕР 16.3. Найдем для мужчины в возрасте 30 лет вероятность умереть в течение двух лет после достижения им 33 лет. Находим

$$ {}_{3|2}q_{30} = \frac{l_{33} - l_{35}}{l_{30}} = \frac{95\,821 - 94\,951}{96\,991} = 0{,}00897. $$

В некоторых актуарных расчетах (например, в пенсионном страховании) необходимы вероятности дожития супружеских пар. Эти вероятности также рассчитываются по таблицам смертности. Пусть речь идет о супругах в возрасте x и y лет и необходимо оценить вероятности прожить еще n лет для каждого из них. Обозначим эти вероятности как ${}_np_x$; ${}_np_y$. Определим их следующим образом:

$$ {}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}, \qquad {}_np_y = \frac{l_{y+n}}{l_y}, $$

где l_x, l_y — числа доживших до соответствующих возрастов (берутся из таблиц смертности для мужчин и женщин).

В свою очередь вероятности умереть для каждого из супругов составят:

$$ {}_nq_x = 1 - {}_np_x; \qquad {}_nq_y = 1 - {}_np_y. $$

Рассчитаем еще две вероятности. Однако предварительно примем две рабочие гипотезы:

— оба супруга достигают возрастов x и y в один день;
— смерть одного супруга — страховое событие, независимое от смерти другого супруга.

Вероятность прожить супругам вместе еще n лет (вероятность "сохранения" супружеской пары) рассчитывается как произведение вероятностей двух независимых событий:

$$ {}_np_{xy} = {}_np_x \times {}_np_y = \frac{l_{x+n}}{l_x} \times \frac{l_{y+n}}{l_y} = \frac{l_{x+n} \times l_{y+n}}{l_x \times l_y}. \tag{16.5} $$

В актуарной практике фигурирующие в формуле произведения чисел доживших принято обозначать следующим образом:

$$ l_x \times l_y = l_{xy} \text{ и } l_{x+n} \times l_{y+n} = l_{xy+n}. $$

Формулу (16.5) теперь можно записать:

$$ {}_np_{xy} = \frac{l_{xy+n}}{l_{xy}}. \tag{16.6} $$

Найдем теперь вероятность того, что супруг (заключивший договор страхования в возрасте x лет, когда его супруге было y лет) не доживет до $x + n$ лет, а супруга, напротив, доживет до $y + n$ лет. Искомая вероятность (обозначим ее как ${}_np_{x\,|\,y}$) равна произведению вероятностей:

$$
{}_nP_{x|y} = {}_nq_x \times {}_np_y = (1 - {}_np_x)\,{}_np_y = {}_np_y - {}_np_x \times {}_np_y =
$$

$$
= \frac{l_{y+n}}{l_y} - \frac{l_{xy+n}}{l_{xy}}. \tag{16.7}
$$

ПРИМЕР 16.4. Пусть возраст супругов 50 и 45 лет. По таблицам смертности находим:

для мужчины $l_{50} = 83640$, $l_{55} = 77007$,

для женщины $l_{45} = 96261$, $l_{50} = 94348$.

Вероятность того, что оба супруга проживут следующие 5 лет, составит:

$$
{}_5p_{50;45} = {}_5p_{50} \times {}_5p_{45} = \frac{77007}{83640} \times \frac{94348}{96261} = 0{,}92070 \times 0{,}98013 =
$$

$$
= 0{,}9024.
$$

Вероятность того, что супруг не проживет 5 лет, а супруга проживет (см.(16.7)):

$$
{}_5p_{50|45} = (1 - {}_5p_{50})\,{}_5p_{45} = (1 - 0{,}9207) \times 0{,}98013 = 0{,}007772.
$$

§16.3. Коммутационные функции

Для сокращения записи страховых аннуитетов и упрощения расчетов применяют так называемые *коммутационные функции (commutations functions)*, или *коммутационные числа*. Смысл этих чисел трудно, хотя и возможно, содержательно интерпретировать. Их проще воспринимать как чисто технические, вспомогательные средства.

Стандартные коммутационные функции делятся на две группы. В основу первых положены числа доживающих до определенного возраста, вторых — числа умерших. Кратко остановимся на методике получения наиболее важных в практическом отношении функций. Основными в первой группе являются функции D_x и N_x:

$$
D_x = l_x v^x, \tag{16.8}
$$

$$
N_x = \sum_{j=x}^{\omega} D_j, \tag{16.9}
$$

где v — дисконтный множитель по сложной ставке i, ω — предельный возраст, учитываемый в таблице смертности.

По определению

$$N_x = N_{x+1} + D_x,$$

$$N_\omega = D_\omega.$$

В некоторых актуарных расчетах необходимы суммы коммутационных чисел D_x для заданных возрастных интервалов. В этих случаях можно воспользоватся коммутационными числами N_x:

$$\sum_{t=1}^{k} D_{x+t} = N_{x+1} - N_{x+k+1}.$$

На практике применяются еще два варианта функции N_x, к которым обращаются тогда, когда платежи производятся m раз в году. Так, для платежей постнумерандо с достаточной для практических расчетов точностью применим следующее выражение:

$$N_x^{(m)} \approx N_x + \frac{m-1}{2m} D_x. \qquad (16.10)$$

Для платежей пренумерандо

$$\ddot{N}_x^{(m)} \approx N_x - \frac{m-1}{2m} D_x. \qquad (16.11)$$

Наиболее важными коммутационными функциями второй группы являются C_x и M_x:

$$C_x = d_x v^{x+1}, \qquad (16.12)$$

$$M_x = \sum_{j=x}^{\omega} C_j. \qquad (16.13)$$

Между коммутационными числами обеих групп существуют определенные взаимозависимости:

$$C_x = d_x v^{x+1} = (l_x - l_{x+1}) v^{x+1} = l_x v^x v - l_{x+1} v^{x+1} = D_x v - D_{x+1}.$$

Аналогично можно доказать, что

$$M_x = N_x v - N_{x+1}.$$

Страховые организации разрабатывают таблицы коммутационных функций с учетом принятых в них норм доходности.

Таблица 16.2

Фрагмент таблицы коммутационных чисел[1]

x	l_x	D_x	N_x	$N_x^{(12)}$	C_x	M_x
18	100 000	21 199	244 593	254 309	28,98	1003,6
19	99 851	19 420	223 393	232 294	30,82	974,7
20	99 678	17 786	203 973	212 125	31,98	943,8
...						
30	96 991	7310	80 677	84 027	25,55	648,9
...						
35	94 951	4651	49 910	52 042	20,78	530,3
...						
40	92 327	2940	30 376	31 723	19,09	431,4
...						
50	83 640	1125	10 465	10 981	14,54	260,7
...						
60	68 505	389	3082	3261	10,25	134,7
...						
70	45 654	110	684	734	5,72	53,1
...						
80	19 760	20	85	95	2,14	13,0
...						

При страховании супружеских пар возникает необходимость в коммутационной функции:

$$D_{xy} = l_{xy} \times v^{(x+y)/2}. \qquad (16.14)$$

Величина l_{xy} определена при расчете ${}_np_{xy}$ (см (16.6)).

Функцию (16.14) можно получить на основе коммутационных функций D_x, D_y следующим образом:

$$D_{xy} = D_x \times D_y \times v^{-(x+y)/2} = D_x \times D_y \times (1 + i)^{(x+y)/2}. \qquad (16.15)$$

В свою очередь

$$D_{xy+n} = l_{xy+n} \times v^{n+(x+y)/2},$$

$$D_{xy+n} = D_{x+n} \times D_{y+n} \times v^{-[n+(x+y)/2]} = D_{x+n} \times D_{y+n} \times (1 + i)^{n+(x+y)/2}.$$

Поскольку произведения коммутационных чисел имеют большую размерность, то их обычно умножают на 10^{-3}.

[1] Подсчитано по таблице смертности населения СССР (см. § 16.2) при условии, что $i = 9\%$. Полная таблица содержится в Приложении (см. табл. 12).

ПРИМЕР 16.5. Определим коммутационные числа $D_{50;45}$ и $D_{55;50}$ для супружеской пары примера 16.4. Находим:

$$(x + y) / 2 = (50 + 45) / 2 = 47{,}5.$$

Коммутационные числа при условии, что процентная ставка равна 9%, имеют следующие значения (первая строка — для мужчины, вторая — для женщины):

$$D_{50} = 1124{,}8; \quad D_{55} = 673{,}1;$$

$$D_{45} = 1991{,}9; \quad D_{50} = 1268{,}8.$$

Отсюда

$$D_{50;45} = 10^{-3} \times 1124{,}8 \times 1991{,}9 \times 1{,}09^{47{,}5} = 134\ 308;$$

$$D_{55;50} = 10^{-3} \times 673{,}1 \times 1268{,}8 \times 1{,}09^{5+47{,}5} = 78\ 770.$$

По аналогии с функцией N_x найдем:

$$N_{xy} = \sum_{t=0}^{\omega-y} D_{x+t;y+t}. \qquad (16.16)$$

§16.4. Стоимость страхового аннуитета

Отправным моментом актуарного анализа является определение стоимости страхового аннуитета. Для записи формул введем следующие обозначения для стоимостей годовых аннуитетов постнумерандо:

a_x — для немедленного пожизненного аннуитета,
$a_{x:\overline{t|}}$ — для немедленного ограниченного аннуитета,
${}_{n|}a_x$ — для отложенного пожизненного аннуитета,
${}_{n|}a_{x:\overline{t|}}$ — для отложенного ограниченного аннуитета.

Аналогичная символика применяется и для аннуитетов пренумерандо, однако вместо символа a записывается $\ddot{a}$.

Пусть лицу, начиная с возраста x лет, пожизненно в конце каждого года выплачивается по 1 рублю (аннуитет пожизненный, постнумерандо, немедленный). Тогда

$$a_x = p_x \times v + {}_2p_x \times v^2 + \ldots + {}_{\omega-x}p_x \times v^{\omega-x} =$$

$$= \frac{l_{x+1} \times v}{l_x} + \frac{l_{x+2} \times v^2}{l_x} + \ldots + \frac{l_\omega \times v^{\omega-x}}{l_x}.$$

Умножим числитель и знаменатель каждого слагаемого на v^x. После чего можно применить коммутационные функции D_x и N_x для расчета немедленного, пожизненного аннуитета постнумерандо с ежегодными выплатами :

$$a_x = \frac{\sum_{j=1}^{\omega-x} l_{x+j} \times v^{x+j}}{l_x \times v^x} = \frac{N_{x+1}}{D_x}.$$

Аналогичным образом определим стоимости других видов аннуитета. Так, для немедленного пожизненного аннуитета пренумерандо с ежегодной выплатой по 1 руб. имеем:

$$\ddot{a}_x = 1 + p_x \times v + {}_2p_x \times v^2 + \ldots + {}_{\omega-x}p_x \times v^{\omega-x} =$$

$$= \frac{\sum_{j=0}^{\omega-x} l_{x+j} \times v^{x+j}}{l_x \times v^x} = \frac{N_x}{D_x}.$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\ddot{a}_x = a_x + 1 \text{ или } a_{x+1} \times v = a_x.$$

Формулы для расчета различных видов годовых аннуитетов приведены в табл. 16.3.

ПРИМЕР 16.6. Определим стоимость отложенного на 20 лет, ограниченного 5 годами аннуитета пренумерандо для мужчины в возрасте 30 лет. Находим

$$_{20|}\ddot{a}_{30:\overline{5}|} = \frac{N_{50} - N_{55}}{D_{30}} = \frac{10465{,}3 - 5826{,}7}{7310{,}3} = 0{,}63453.$$

В табл. 16.3 приведены формулы для годовых аннуитетов. Если платежи выплачиваются m раз в году, то в формулах вместо N_x следует использовать $N_x^{(m)}$ или $\ddot{N}_x^{(m)}$. Приведем формулы для соответствующих аннуитетов при условии $m = 12$.

Таблица 16.3

Формулы для расчета стоимостей аннуитетов

Вид аннуитета	Постнумерандо	Пренумерандо
Немедленный пожизненный	$a_x = \dfrac{N_{x+1}}{D_x}$ (16.17)	$\ddot{a}_x = \dfrac{N_x}{D_x}$ (16.18)
Отложенный на n лет пожизненный	${}_{n\mid}a_x = \dfrac{N_{x+n+1}}{D_x}$ (16.19)	${}_{n\mid}\ddot{a}_x = \dfrac{N_{x+n}}{D_x}$ (16.20)
Немедленный, ограниченный (выплаты в течение t лет)	$a_{x:\overline{t}\rceil} = \dfrac{N_{x+1} - N_{x+t+1}}{D_x}$ (16.21)	$\ddot{a}_{x:\overline{t}\rceil} = \dfrac{N_x - N_{x+t}}{D_x}$ (16.22)
Отложенный на n лет, ограниченный (выплаты в течение t лет)	${}_{n\mid}a_{x:\overline{t}\rceil} = \dfrac{N_{x+n+1} - N_{x+n+t+1}}{D_x}$ (16.23)	${}_{n\mid}\ddot{a}_{x:\overline{t}\rceil} = \dfrac{N_{x+n} - N_{x+n+t}}{D_x}$ (16.24)

Для ежемесячных платежей постнумерандо имеем следующие выражения.

Немедленный пожизненный аннуитет:

$$\ddot{a}_x = \frac{\ddot{N}_x^{(12)}}{D_x} = \frac{N_x}{D_x} - \frac{11}{24}. \tag{16.25}$$

Немедленный ограниченный аннуитет:

$$\ddot{a}_{x:t}^{(12)} = \frac{\ddot{N}_x^{(12)} - \ddot{N}_{x+t}^{(12)}}{D_x} = \frac{N_x - N_{x+t} - \frac{11}{24}\left(D_x - D_{x+t}\right)}{D_x}. \tag{16.26}$$

Отложенный пожизненный аннуитет:

$$_{n|}\ddot{a}_x^{(12)} = \frac{\ddot{N}_{x+n}^{(12)}}{D_x} = \frac{N_{x+n} - \frac{11}{24} D_{x+n}}{D_x}. \tag{16.27}$$

Отложенный ограниченный аннуитет:

$$\begin{gathered} _{n|}\ddot{a}_{x:t]}^{(12)} = \frac{\ddot{N}_{x+n}^{(12)} - \ddot{N}_{x+n+t}^{(12)}}{D_x} = \\ = \frac{N_{x+n} - N_{x+n+t} - \frac{11}{24}\left(D_{x+n} - D_{x+n+t}\right)}{D_x}. \end{gathered} \tag{16.28}$$

ПРИМЕР 16.7. Для условий примера 16.6, но с ежемесячными выплатами, получим:

$$_{20|}\ddot{a}_{30:5]}^{(12)} = \frac{N_{50} - N_{55} - \frac{11}{24}\left(D_{50} - D_{55}\right)}{D_{30}} =$$

$$= \frac{10465{,}3 - 5826{,}7 - \frac{11}{24}\left(1124{,}8 - 673{,}1\right)}{7310{,}3} = 0{,}60484.$$

Для ежемесячных выплат постнумерандо находим следующие соотношения.

Немедленный пожизненный аннуитет:

$$a_x^{(12)} = \frac{N_{x+1}^{(12)}}{D_x} = \frac{N_{x+1}}{D_x} + \frac{11}{24}. \tag{16.29}$$

Немедленный ограниченный аннуитет:

$$a_{x:t|}^{(12)} = \frac{N_{x+1}^{(12)} - N_{x+t+1}^{(12)}}{D_x} = \frac{N_{x+1} - N_{x+t+1} + \frac{11}{24}\left(D_{x+1} - D_{x+t+1}\right)}{D_x}. \tag{16.30}$$

Отложенный на n лет пожизненный аннуитет:

$$_{n|}a_x^{(12)} = \frac{N_{x+n+1}^{(12)}}{D_x} = \frac{N_{x+n+1} + \frac{11}{24} D_{x+n+1}}{D_x}. \tag{16.31}$$

Отложенный ограниченный (выплаты в течение t лет) аннуитет:

$$_{n|}a_{x:t|}^{(12)} = \frac{N_{x+n+1}^{(12)} - N_{x+n+t+1}^{(12)}}{D_x} = \frac{N_{x+n+1} - N_{x+n+t+1} + \frac{11}{24}\left(D_{x+n+1} - D_{x+n+t+1}\right)}{D_x}. \tag{16.32}$$

Современные стоимости регулярных потоков платежей (обозначим их, как это принято в финансовой математике, через A_x) определяются элементарно. Если размер годового платежа равен R, то для немедленного пожизненного потока годовых платежей пренумерандо имеем $A_x = R \times \ddot{a}_x$, а для аналогичного, но отложенного на n лет аннуитета, $_{n|}A_x = R \times {}_{n|}\ddot{a}_x$ и т.д.

ПРИМЕР 16.8. Рассчитаем актуарные стоимости нескольких вариантов аннуитетов для сорокалетнего мужчины. Платежи ежегодные и ежемесячные, выплаты — пожизненные и ограниченнные (срок — 10 лет), немедленные и отложенные на 5 лет. Сумма годового платежа 1000 руб. Полученные величины приведены в табл. 16.4.

Таблица 16.4

Вид потока		Постнумерандо годовые	Постнумерандо ежемесячн.	Пренумерандо годовые	Пренумерандо ежемесячн.
Немедл.	*Пожизнен.*	9334	9792	10 334	9875
	Огранич.	6156	6415	6773	6490
Отложен.	*Пожизнен.*	5529	5788	6153	5867
	Огранич.	3776	3941	4171	3990

Выделим четыре фактора, определяющих стоимость страхового аннуитета:

— демографический фактор, отражаемый таблицей смертности,
— процентная ставка (установленная норма доходности),
— длительность отсрочки выплат,
— срок аннуитета.

Кратко остановимся на указанных факторах. Ясно, что чем выше показатели смертности, тем ниже актуарная стоимость аннуитета. Отсюда следует, что при сложившейся в России демографической ситуации стоимость аннуитета для женщины будет заметно выше, чем для мужчины при всех прочих равных условиях. В табл. 16.5 приведены стоимости годовых немедленных аннуитетов пренумерандо у мужчин и женщин для двух вариантов процентной ставки — 9 и 5 % .

Таблица 16.5

Стоимости немедленных аннуитетов

Возраст	$i = 9\%$ Мужчины	$i = 9\%$ Женщины	$i = 5\%$ Мужчины	$i = 5\%$ Женщины
18	11,54	11,87	18,20	19,33
30	11,04	11,61	16,65	18,22
40	10,33	11,17	14,86	16,80
50	9,30	10,41	12,65	14,50
60	7,92	9,17	10,11	12,16
70	6,25	7,22	7,44	8,16

Как видим, с увеличением возраста стоимость аннуитета уменьшается (так как сокращается средняя продолжительность предстоящей жизни), причем у всех возрастов стоимость аннуитета для женщин выше, чем для мужчин.

Влияние процентной ставки очевидно — повышение процентной ставки уменьшает стоимость аннуитета (см. рис. 16.1 и табл. 16.5). Отсрочка выплат также сокращает эту величину. В свою очередь увеличение срока аннуитета при всех прочих равных условиях увеличивает стоимость аннуитета. Пределом, естественно, является стоимость пожизненного аннуитета (см. рис. 16.2).

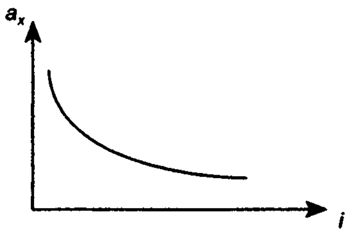

Рис 16.1

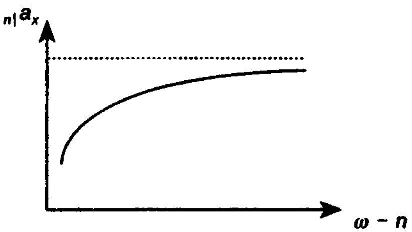

Рис 16.2

В следующей главе показано, как стоимости страховых аннуитетов используются при решении сугубо практических задач — расчетах нетто-премий и страховых резервов в таких видах личного страхования, как страхование на дожитие, страхование жизни и индивидуальное страхование пенсий.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Гербер Х.* Математика страхования жизни. М.: АНКИЛ, 1995.
2. *Касимов Ю. Ф.* Начала актуарной математики (для страхования жизни и пенсионных схем). Зеленоград, 1995.
3. *Четыркин Е. М.* Актуарные методы в негосударственном медицинском страховании. М.: Дело, 1999. Гл. 3.

Глава 17
ЛИЧНОЕ СТРАХОВАНИЕ

§17.1. Нетто-премии в личном страховании

Страхование на дожитие. Для начала рассмотрим самый простой, но очень важный в методическом плане случай личного страхования — *страхование на дожитие* (*pure endowment*). Итак, человек в возрасте x лет договаривается со страховой организацией о том, что при достижении им, допустим, 60 лет он получит S рублей. Для определения размера премии найдем математическое ожидание суммы страховой выплаты, дисконтированной на срок страхования, т.е. на $60 - x$ лет. Размер нетто-премии данного вида страхования обозначим как ${}_nE_x$. Для рассматриваемого примера:

$$ {}_{60-x}E_x = {}_{60-x}p_x \times v^{60-x} \times S, $$

где ${}_{60-x}p_x$ — вероятность лицу в возрасте x лет дожить до 60 лет, v^{60-x} — дисконтный множитель по принятой ставке сложных процентов.

В общем виде с использованием коммутационной функции D_x получим

$$ {}_nE_x = {}_np_x \times v^n \times S = \frac{l_{x+n}}{l_x} v^n \times S = \frac{l_{x+n} v^x}{l_x v^x} v^n \times S = \frac{D_{x+n}}{D_x} S. \quad (17.1) $$

Влияние принятой процентной ставки здесь очевидно. Чем она выше, тем меньше страховая премия.

ПРИМЕР 17.1. Необходимо найти стоимость страхования на дожитие до 60 лет мужчины в возрасте 40 лет. Если расчет основывать на процентной ставке, равной 9%, то согласно (17.1) получим[1]

[1] Значения коммутационных чисел, приведенные в примерах, взяты из табл. 12 Приложения.

$$
{}_{20}E_x = \frac{D_{60}}{D_{40}} S = \frac{389{,}17}{2939{,}5} S = 0{,}13239\ S.
$$

Премия здесь составляет чуть больше 13% страховой суммы. Полученная величина представляет собой нетто-ставку страхования на дожитие, т.е. ставку, определенную из условия эквивалентности обязательств страхователя и страховщика. Напомним, что она не учитывает расходов страховщика на ведение дела.

Для того чтобы лучше понять смысл полученных результатов, предположим, что число застрахованных на дожитие в примере 17.1 равно 1000 человек, а страховая сумма равна 1 тыс. руб. Таким образом:

число застрахованных	1000
премия от одного застрахованного	132,39 руб.
общая сумма премии	132 390 руб.
сумма с процентами за 20 лет	741 968 руб.
количество лиц, доживших до 60 лет	742 (точно 741,968)
общая сумма выплат	742 000 тыс. руб.

Как видим, наблюдается полная сбалансированность между взносами и выплатами, демонстрирующая соблюдение принципа эквивалентности обязательств страхователей и страховщика (небольшая разница объясняется округлением числа доживших).

Приведенный пример иллюстрирует действие принципа *солидарной ответственности страхователей* — важнейшего страхового принципа. Дело в том, что страхователь, доживший до 60 лет, часть денег получил за счет тех лиц, которые не дожили до обусловленного возраста (согласно таблице смертности таких окажется в среднем 258 человек из тысячи застрахованных). Если оговоренную сумму он обеспечивает самостоятельно, без солидарной ответственности всех участников, то ему необходимо было бы внести на сберегательный счет 178,43 руб., а не 132,39 руб.

Страхование супружеской пары. Выше постановка задачи личного страхования обсуждалась применительно к отдельному человеку. Распространим теперь методику страхования на супружескую пару, при этом ограничимся страхованием на дожитие.

Пусть речь идет о супружеской паре, имеющей возраст x и y лет. Страховым событием здесь является дожитие до возрастов $x + n$ и $y + n$ или дожитие одного из супругов до оговоренного возраста. В первом варианте нетто-премия в расчете на один рубль страховой суммы определяется как

$$ {}_nE_{xy} = {}_np_x \times {}_np_y \times v^n = \frac{D_{xy+n}}{D_{xy}}, \tag{17.2} $$

где ${}_np_x$ и ${}_np_y$ — вероятности прожить еще n лет для каждого из супругов, D_{xy} — коммутационная функция (см.(16.14) и (16.15)).

Во втором варианте страховая сумма выплачивается одному из супругов, например вдове, при условии, что она проживет до $y + n$ лет. Получим следующую величину нетто-премии:

$$ {}_nE_{x|y} = {}_np_{x|y} \times v^n = \frac{l_{y+n}}{l_y} v^n - \frac{l_{xy+n}}{l_{xy}} v^n, \tag{17.3} $$

где ${}_np_{x|y}$ — вероятность того, что супруг (заключивший договор в x лет, когда его супруге было y лет) не доживет до возраста $x + n$, а супруга, напротив, доживет до $y + n$ лет (см. (16.7)).

Величину ${}_nE_{x|y}$ можно рассчитать с помощью коммутационных чисел. Обратимся к первой дроби в правой части равенства (17.3). Умножим и разделим ее на v^y. Получим знакомое выражение для нетто-премии на дожитие (17.1). Что касается второй дроби, то для ее определения необходимы другие коммутационные числа (см. (16.14) и (16.15)).

Вернемся к формуле (17.3). Умножим и разделим вторую дробь на $v^{(x+y)/2}$. После чего получим

$$ {}_nE_{x|y} = \frac{D_{y+n}}{D_y} - \frac{D_{xy+n}}{D_{xy}}. \tag{17.4} $$

Искомая величина равна разности нетто-премий страхования на дожитие супруги и страхования на дожитие супружеской пары.

ПРИМЕР 17.2. Определим размер нетто-премии страхования на 5 лет на дожитие супругов. Для супружеской пары (x = 50, y = = 45 лет) находим следующие коммутационные числа при условии, что процентная ставка равна 9% (первая строка — для мужчин, вторая — для женщин):

$$ D_x = D_{50} = 1124{,}8; \quad D_{x+n} = D_{55} = 673{,}1; $$

$$D_y = D_{45} = 1991{,}9; \quad D_{y+n} = D_{50} = 1268{,}8;$$

$$(x + y)/2 = (50 + 45) / 2 = 47{,}5.$$

Отсюда

$$D_{xy} = D_{50;\,45} = 10^{-3} \times 1124{,}8 \times 1991{,}9 \times 1{,}09^{47,5} = 134\,799;$$

$$D_{xy+n} = D_{55;\,50} = 10^{-3} \times 673{,}1 \times 1268{,}8 \times 1{,}09^{5+47,5} = 78\,770.$$

При страховании на дожитие супружеской пары получим

$${}_nE_{xy} = {}_5E_{50;\,45} = \frac{78\,770}{134\,799} = 0{,}58435.$$

При страховании на дожитие вдовы:

$${}_nE_{x|y} = {}_5E_{50|45} = \frac{1268{,}8}{1991{,}9} - \frac{78\,770}{134\,799} = 0{,}63698 - 0{,}58435 = 0{,}05263.$$

§17.2. Страхование жизни

Этот вид страхования (*life insurance*), называемый также страхованием на случай смерти, является наиболее распространенным. Страховая сумма, равная S, выплачивается в случае смерти застрахованного. Допустим, страховой договор заключается в возрасте x лет. Если смерть наступит на первом году страхования, а выплата страховых сумм наследникам производится в конце года наступления страхового события, то с учетом вероятности этого события современная величина выплаты (на момент заключения контракта) составит $q_x(Sv)$; если страховой случай наступит во втором году, то аналогичная по содержанию величина равна ${}_2q_x(Sv^2)$ и т.д.

Единовременную нетто-премию определим исходя из принципа эквивалентности обязательств. Искомая величина равна современной стоимости страхового аннуитета или математическому ожиданию суммы дисконтированных выплат. Поскольку необходимые значения вероятностей находятся на основе таблицы смертности как d_x/l_x (см. § 16.2), то искомая величина премии при условии, что страхование пожизненное, определяется как

$$A_x = \frac{d_x}{l_x} vS + \frac{d_{x+1}}{l_x} v^2 S + \ldots + \frac{d_\omega}{l_x} v^{\omega - x} S.$$

Умножим и разделим каждое слагаемое на v^x и используем коммутационную функцию D_x. После чего получим

$$A_x = S\left(\frac{d_x}{D_x} v^{x+1} + \frac{d_{x+1}}{D_x} v^{x+2} + \ldots + \frac{d_\omega}{D_x} v^\omega\right).$$

Применив коммутационную функцию M_x (см. (16.13)), окончательно имеем

$$A_x = \frac{M_x}{D_x} S. \qquad (17.5)$$

Пожизненное страхование жизни встречается не так уж часто. Обычно практикуют страхование на срок. Пусть этот срок равен n годам. Нетто-премия в этом случае составит

$$_nA_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} S. \qquad (17.6)$$

ПРИМЕР 17.3. Найдем величину премии в виде доли от страховой суммы для сорокалетнего мужчины при пожизненном страховании жизни:

$$A_x = A_{40} = \frac{M_{40}}{D_{40}} S = \frac{431{,}4}{2939{,}5} S = 0{,}14678S.$$

Для варианта с ограничением срока страхования двадцатью годами получим:

$$_nA_x = {}_{20}A_{40} = \frac{M_{40} - M_{60}}{D_{40}} S = \frac{431{,}4 - 134{,}7}{2939{,}5} S = 0{,}10094S.$$

Как видим, ограничение срока заметно снизило стоимость страхования.

На практике часто премии выплачиваются в рассрочку. Последнее равносильно замене разовой выплаты премии постоянной рентой. Пусть рассрочка осуществляется посредством платежей пренумерандо в течение t лет. Условие равенства обязательств сторон в страховании запишем следующим образом:

$$R\ddot{a}_{x:t|} = S\frac{M_x - M_{x+n}}{D_n},$$

где R — член страхового аннуитета (размер ежегодной премии), $\ddot{a}_{x:t|}$ — стоимость немедленного ограниченного страхового аннуитета (см. (16.22)).

После несложных преобразований имеем

$$R = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+t}}S. \qquad (17.7)$$

ПРИМЕР 17.4. Допустим, единовременный взнос в примере 17.3 (пожизненное страхование) заменяется на выплаты в рассрочку в течение 20 лет. В этом случае

$$R = \frac{M_{40}}{N_{40} - N_{60}}S = \frac{431,4}{30376 - 3082}S = 0,01581\ S.$$

Смешанное страхование. Нетрудно объединить страхование на дожитие и на случай смерти. Если страховое возмещение обоих рисков одинаково, то в расчете на один рубль страховой суммы получим следующую сумму единовременной нетто-премии:

$$_nE_x + {}_nA_x = \frac{D_{x+n} + M_x - M_{x+n}}{D_x}S. \qquad (17.8)$$

Для рассрочки платежей в течение t лет получим

$$R = \frac{D_x + M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+t}}S. \qquad (17.9)$$

§17.3. Пенсионное страхование. Виды пенсионных схем

Проблема пенсионного обеспечения затронула в последнее десятилетие все развитые страны, что в значительной мере связано с заметным старением населения. Не избежала этой проблемы и Россия. Свой вклад в ее решение вносят негосударственные пенсионные фонды (НПФ). Пенсионные фонды не новость для России. До 1917 г. подобного рода учреждения функционировали в стране под названием пенсионные и эмеритальные кассы.

С экономической точки зрения обеспечение пенсиями по старости на базе НПФ представляет собой своеобразный долгосрочный инвестиционный процесс, на первом этапе которого осуществляются вложения (взносы в фонд) и последовательное наращение средств за счет доходов от инвестиций свободных денежных средств, на втором — получение отдачи от накоплений в виде периодических пенсий. Особенности данного процесса определяются принятыми правилами, регламентирующими взносы и выплаты пенсий (пенсионные схемы).

В длительно действующих пенсионных фондах скапливаются громадные средства. Например, активы пенсионных фондов стран Европейского союза в 1993 г. составляли более 1,2 трлн долл.

По условиям финансирования пенсионные схемы, практикуемые в России, подразделяются на:

— *нефондируемые* (предусматривается выплата пенсий из текущих поступлений); эти схемы не представляют большого интереса в отношении применения количественного финансового анализа;
— *фондируемые*, или *накопительные*, (для обеспечения выплат пенсий создаются целевые фонды);
— *частично фондируемые* (целевые фонды создаются не для всех участников; например, только для лиц, выходящих на пенсию).

К фондируемым схемам относятся:

— *сберегательные* (отличительные особенности: не учитываются вероятности дожития каждого участника фонда, предусматривается наследование накоплений, отсутствует солидарность участников в обеспечении выплат, оговаривается конкретный срок выплат); данный метод обеспечения старости представляет собой покупку индивидуальной финансовой ренты;
— *страховые* (солидарность участников, нет наследования накоплений, учитываются вероятности дожития застрахованных);

— *смешанные сберегательно-страховые* схемы (предусматривается последовательное использование двух схем, например, на этапе накопления применяется сберегательная схема, на этапе выплат пенсий — страховая).

Страховые схемы различаются *по охвату участников фонда:*

— индивидуальные схемы, в которых пенсии эквивалентны индивидуальным накоплениям для каждого участника,

— групповые схемы, в которых пенсии и накопления эквивалентны для всех участников фонда "в массе".

Сбалансированность взносов и выплат (иначе говоря, эквивалентность обязательств) — необходимое условие для нормального ведения дела и важный элемент гарантии выполнения обязательств НПФ по выплатам пенсий. В страховых схемах баланс обеспечивается на основе применения страховых принципов, которые реализуются с помощью актуарных расчетов. В сберегательных схемах баланс достигается на основе теории верных финансовых рент.

При применении любой из пенсионных схем с фондированием сталкиваются с необходимостью решения двух задач. Первая выступает в двух "сопряженных" вариантах: определение размера пенсии по величине установленных взносов либо расчет величины взносов по заданным размерам пенсии.

Вторая задача заключается в расчете страховых резервов. В следующих параграфах главы обсуждаются обе задачи.

§17.4. Расчет премий и пенсий. Сберегательные схемы

В российских НПФ получили распространение как страховые, так и сберегательные пенсионные схемы. В методических целях анализ удобнее начать с последних. В таких схемах платежи (взносы и пенсии) не увязываются с вероятностями их выплат, поэтому нет необходимости применять таблицы смертности и коммутационные числа, где аргументом является возраст. Строго говоря, здесь, по-видимому, нет оснований и для применения терминов "премия" и "пенсия". Однако для единообразия сохраним эти термины и в сберегательных схемах обеспечения старости.

Для расчета премий, очевидно, следует применять формулы, определяющие современные стоимости рент, если премия выплачивается единовременным взносом, или размеры членов ограниченных, постоянных рент, если премии выплачиваются в рассрочку. Соответствующие методы были подробно обсуждены в гл. 5, поэтому ограничимся примером, в котором пенсия выплачивается в виде годовой, ограниченной ренты пренумерандо. Рассмотрим методы расчета суммы единовременного взноса и размеров последовательных взносов в фонд в течение ряда лет. Для записи формул примем следующие обозначения:

R — годовая сумма пенсии,

E — размер единовременного взноса,

A — сумма, накопленная на индивидуальном счете участника фонда на начало выплат пенсии,

x — возраст застрахованного в момент заключения договора,

L — возраст выхода на пенсию,

w — возраст в момент окончания действия контракта,

n — срок накопления, $n = L - x$,

t — срок выплат пенсии, $t = w - L$.

Как показано на рис. 17.1, общий срок делится на два периода. В первом — в возрасте от x до L лет — взнос в сумме E (здесь и далее речь идет о “чистых” взносах, аналогах нетто-премии в страховых схемах) увеличится до величины A. Эта сумма обеспечивает оговоренные выплаты до возраста w во втором периоде.

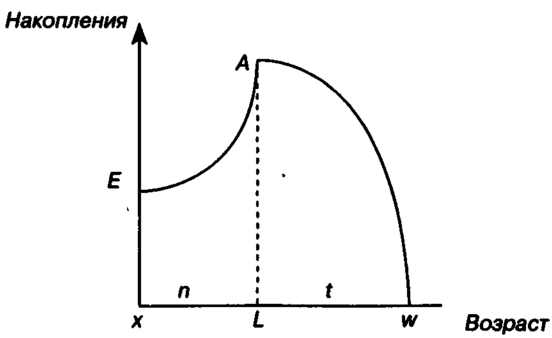

Рис 17.1

ПРИМЕР 17.5. Определим размеры премий, необходимые для обеспечения выплат страховой пенсии. Пенсионные выплаты, отложенные на 20 лет, должны производиться в размере 10 тыс. руб. в год, пренумерандо. Срок выплат t = 15 лет.

Таким образом, выплаты представляют собой отложенную на 20 лет, ограниченную годовую финансовую ренту, член которой равен 10 тыс. руб. Очевидно, что единовременный взнос равен современной стоимости будущих выплат. Положим, что на взнос начисляются проценты по ставке $i = 9\%$. Общая формула для расчета имеет вид

$$E = A \times v^n = R \times a_{t;\,i} \times (1 + i)v^n,$$

где v — дисконтный множитель по ставке i, $a_{n;\,i}(1 + i)$ — коэффициент приведения постоянной ренты пренумерандо (см. § 5.3),

$$A = 10\ 000 a_{15;\,9} \times 1{,}09 = 10\ 000 \times 8{,}060688 \times 1{,}09 = 87\ 861 \text{ руб.},$$

$$E = 87\ 861 \times 1{,}09^{-20} = 15\ 677 \text{ руб.}$$

Динамика пенсионных накоплений схематично показана на рис.17.2.

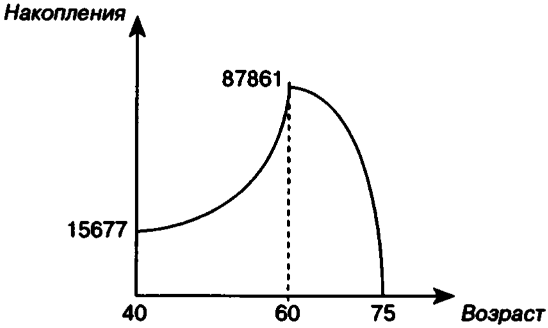

Рис. 17.2

Если страховой договор предусматривает рассрочку взносов (равными платежами) в течение m лет ($n \geq m$), то необходимый размер ежегодного взноса пренумерандо легко получить на основе следующего равенства:

$$R\ddot{a}_{m;\,i} = Av^n.$$

Как показано выше, $Av^n = 15\ 677$,

$$\ddot{a}_{10;\,9} = a_{10;\,9} \times (1 + i) = 6{,}41766 \times 1{,}09 = 6{,}99525.$$

Окончательно имеем

$$R = \frac{15\ 677}{6{,}99525} = 2241{,}1 \text{ руб.}$$

Таким образом, имеется альтернатива — выплатить единовременно 15,7 тыс. руб. или ежегодно на протяжении 10 лет по 2,2 тыс. руб.

Короткое замечание об учете инфляции. Безусловно этот фактор должен быть учтен при определении размера пенсии вне зависимости от выбранной схемы. За рубежом обычно (при низких темпах инфляции) для этого увеличивают применяемую в расчетах процентную ставку на величину ожидаемого долгосрочного темпа инфляции. При большом темпе такой прием невозможен. Единственный разумный путь — периодическая корректировка пенсии с учетом реально полученного дохода от инвестирования накоплений.

§17.5. Страховые пенсионные схемы

Пенсионное страхование по существу представляет собой последовательно повторяемое страхование на дожитие. Пусть пенсия выплачивается с 60 лет. Тогда стоимость страхования разовой выплаты пенсии, равной S, определяется стоимостью страхования на дожитие до 60 лет (см. (17.1)). Аналогично можно последовательно определить стоимость страхования на дожитие и до других возрастов. В итоге стоимость страхования составит:

$$ {}_{1}E_x + {}_{2}E_x + \ldots + {}_{w-x-1}E_x, $$

где w — максимальный возраст, учитываемый в расчете.

Проще, однако, воспользоваться страховыми аннуитетами, о которых речь шла в гл. 16.

Необходимость в расчете нетто-тарифов (нетто-премий в расчете на 1 руб. установленной пенсии) возникает при использовании схемы, в которой за исходную принимается величина пенсии. Тариф может быть определен для единовременного взноса (покупка пенсии разовым платежом) или при условии, что премия выплачивается в рассрочку. Обсудим оба варианта, но только для пенсионных схем индивидуального страхования. Актуарные расчеты в групповом пенсионном страховании требуют более обширной информационной базы, расширенных таблиц смертности (где учитывается выход из состава группы участников в связи с увольнением и выходом на пенсию по инвалидности).

Единовременный взнос. Поскольку речь идет о разовом взносе, то нетто-тариф, очевидно, равен стоимости аннуитета, соответствующего условиям выплат пенсии, а нетто-премия — произведению нетто-тарифа на размер пенсии. Например, для годовых пенсий пренумерандо имеем

$$E_x = R \times \ddot{a}_x = R\frac{N_x}{D_x}, \qquad (17.10)$$

где $\ddot{a}_x$ — стоимость немедленного годового аннуитета пренумерандо (см. (16.18)), R — размер годовой пенсии.

В свою очередь для отложенной на n лет пенсии получим

$$E_x = R \times {}_{n|}\ddot{a}_x = R\frac{N_{x+n+1}}{D_x}, \qquad (17.11)$$

где ${}_{n|}\ddot{a}_x$ — стоимость отложенного годового аннуитета пренумерандо (см. (16.20)).

Таким же способом получим суммы единовременных взносов и для других условий выплаты пенсий. Формулы для расчета стоимости страховых аннуитетов приведены в табл. 16.3.

ПРИМЕР 17.6. Необходимо определить единовременную нетто-премию, выплачиваемую при заключении страхового пенсионного контракта с мужчиной 40 лет. Размер годовой пенсии 1 тыс. руб., выплаты пренумерандо с 60 лет пожизненно. В этом случае имеем отложенный, пожизненный аннуитет пренумерандо. Норматив доходности равен 9%. Для приведенных данных получим

$${}_{20|}\ddot{a}_{40} = \frac{N_{60}}{D_{40}} = \frac{3082{,}2}{2939{,}5} = 1{,}04855, \text{ откуда}$$

$$E_{40} = 1 \times 1{,}04855 = 1{,}04855 \text{ тыс. руб.}$$

Если бы пенсия страховалась не пожизненно, а на срок 15 лет, то ее стоимость в момент выхода на пенсию составила (см. (16.22)):

$$E_{60} = 1 \times \ddot{a}_{60 \cdot 15]} = \frac{N_{60} - N_{75}}{D_{60}} = \frac{3082{,}2 - 684{,}24}{389{,}17} = 6{,}16173 \text{ тыс. руб.}$$

В свою очередь для страхователя 40 лет получим (см. (16.24)):

$$E_{40} = 1 \times {}_{20|}\ddot{a}_{60:15|} = \frac{N_{60} - N_{75}}{D_{40}} = \frac{3082{,}2 - 684{,}24}{2939{,}5} = 0{,}81577 \text{ тыс. руб.}$$

Заметим, что чем выше процентная ставка (норматив доходности), тем ниже тариф страхования и оно более привлекательно для клиента. Однако при этом повышается риск для страховщика — он обязан обеспечить указанный уровень доходности аккумулируемых средств.

Нетрудно найти и стоимость сберегательно-страховой пенсионной схемы. Пусть до пенсионного возраста применяется сберегательная схема, после — страховая. Если пенсия выплачивается с 60 лет, а единовременный взнос в x лет, то стоимость для пожизненной пенсии пренумерандо равна

$$E_x = R \times \ddot{a}_{60} \times v^{60-x} = R\frac{N_{60}}{D_x}v^{60-x}.$$

ПРИМЕР 17.7. Вернемся к примеру 17.6 (вариант с выплатой пенсий в течение 15 лет).

Стоимость смешанной пенсионной схемы в возрасте 40 лет составит

$$E_{40} = 1 \times \ddot{a}_{60:15|} \times v^{20} = 6{,}16173 \times 1{,}09^{-20} \approx 1{,}099 \text{ тыс.руб.}$$

Размеры единовременных взносов (выплаты пенсий в течение 15 лет) для трех вариантов пенсионных схем приведены в следующей таблице.

Таблица 17.1

Стоимости страхования по трем пенсионным схемам

Возраст застрахованного	Пенсионные схемы		
	Сберегательная	Страховая	Смешанная
60 лет	8061	6162	6162
40 лет	1438	816	1099

Страховая схема оказывается более дешевой по сравнению со сберегательной, смешанная схема занимает промежуточное место по размеру единовременного взноса для сорокалетнего застрахованного. Однако, нельзя забывать, что страховые схемы не предусматривают наследования остатков средств на счете участника. Сберегательная схема, наоборот, предполагает это.

Совместим три кривые, характеризующие динамику накопления для трех видов пенсионных схем (см. рис. 17.3).

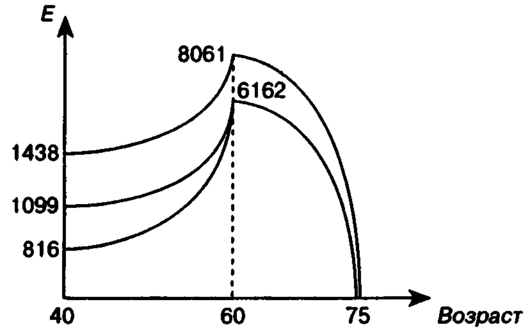

Рис. 17.3

Рассрочка взносов. В практике страхования премии часто выплачиваются в виде ряда последовательных платежей, иными словами, в рассрочку. При расчете нетто-тарифов с рассрочкой для описания взносов можно воспользоваться ограниченными (на период рассрочки) аннуитетами. С другой стороны, пенсии также представляют собой страховые аннуитеты. В силу эквивалентности финансовых обязательств обоих участников стоимости соответствующих аннуитетов должны быть равны друг другу. Например, в случае, когда один аннуитет (взносы) является немедленным, ограниченным, второй (пенсии) — пожизненным, отсроченным, причем оба предусматривают ежегодные платежи постнумерандо, получим следующее равенство:

$$Pa_{x:\overline{t|}} = R\,{}_{n}a_{x}, \tag{17.12}$$

где P — годовая сумма взносов (нетто-премии), R — годовая сумма пенсии.

Откуда

$$P = R\frac{{}_{n}a_{x}}{a_{x:\overline{t|}}} = R\frac{N_{x+n+1}}{D_x} : \frac{N_{x+1} - N_{x+t+1}}{D_x} = R\frac{N_{x+n+1}}{N_{x+1} - N_{x+t+1}}. \tag{17.13}$$

Например, если первая выплата пенсии производится, допустим, в 60 лет ($x + n + 1 = 60$), возраст при заключении страхового контракта 40 лет, а рассрочка равна 10 годам, то

$$P = R\frac{N_{60}}{N_{41} - N_{51}}.$$

Выражения, аналогичные (17.12), могут уравнивать стоимости различных видов аннуитета. Например, если оба аннуитета предусматривают годовые выплаты пренумерандо, то вместо (17.12) получим

$$P \times \ddot{a}_{x:t\rceil} = R \times {}_n\ddot{a}_x$$

и

$$P = R\frac{{}_n\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:t\rceil}} = R\frac{N_L}{N_x - N_{x+t}}. \qquad (17.14)$$

ПРИМЕР 17.8. Определим размер премии для следующих условий. Сорокалетний мужчина вносит премию в течение 5 лет, пенсия годовая, пожизненная, в размере 10 тыс. руб. Оба потока платежей (премии и выплаты) пренумерандо. В этом случае на основе (17.14) получим

$$P = 10\,000 \times \frac{N_{60}}{N_{40} - N_{45}} = 10\,000 \times \frac{3082{,}2}{30375{,}6 - 18086{,}4} =$$

$$= 2508{,}1 \text{ руб.}$$

Чем больше период рассрочки, тем, очевидно, меньше сумма взноса. Так, при рассрочке в 10 лет получим для тех же условий

$$P = 10\,000 \times \frac{N_{60}}{N_{40} - N_{50}} = 10\,000 \times \frac{3082{,}2}{30375{,}6 - 10465{,}3} =$$

$$= 1548{,}0 \text{ руб.}$$

Расчет размера пенсии по сумме взносов. Пусть на счет застрахованного ежегодно поступают взносы. Эти взносы, разумеется, должны быть "очищены" от нагрузки, которая поступает в пользу страховой организации. Очевидно, что каждый взнос обеспечивает некоторую сумму пенсии. Для начала положим, что пенсия обеспечивается единовременным взносом E. Тогда из соотношений типа $E = Ra_x$ находим размеры пенсий R. Так, для немедленной пенсии пренумерандо имеем $R = E/\ddot{a}_x$, для отложенной пенсии $R = E/{}_n\ddot{a}_x$ и т.д.

Пусть теперь постоянная премия выплачивается в рассрочку в течение t лет, причем взносы одинаковы. Размер пенсии без корректировки на инфляцию определяется элементарно — достаточно решить уравнение (17.12) или аналогичные выражения относительно R. Например, для отложенной годовой пенсии пренумерандо с ограниченным периодом взносов получим

$$R = P\frac{\ddot{a}_{x:t\rceil}}{{}_{n|}\ddot{a}_x}.$$

Перейдем теперь к ситуации, когда взносы производятся последовательно в течение некоторого срока и изменяются по времени. Первый взнос P_1 можно рассматривать как единовременную премию, обеспечивающую пенсию в сумме R_1, и т.д. Пусть взносы и пенсии выплачиваются в начале года. Пенсия выплачивается с 60 лет. Тогда для каждого взноса можно написать равенство

$$R_1 = P_1\frac{N_{60}}{D_x},\ R_2 = P_2\frac{N_{60}}{D_{x+1}},\ \dots,\ R_k = P_k\frac{N_{60}}{D_{x+k-1}}.$$

Общая сумма пенсии

$$P = \sum_{j=1}^{k} P_j = \frac{\sum_{j=1}^{k} R_j D_{x+j-1}}{N_{60}}. \qquad (17.15)$$

ПРИМЕР 17.9. Пусть на пенсионный счет участника (мужчины) поступают в течение 5 лет взносы пренумерандо. Первый взнос 150 руб. сделан в возрасте 40 лет, второй взнос — 200 руб. и т.д. Пенсия выплачивается с 60 лет, $N_{60} = 3082{,}2$. В последней графе табл. 17.2 показаны размеры пенсий, обеспеченные каждым очередным взносом и размер пенсии, обеспеченной всеми взносами.

Таблица 17.2

Расчет размера пенсии

x	D_{x+j-1}	R_j	$R_j D_{x+j-1}$	P_j
40	2939,5	150	440 925	143,05
41	2677,7	200	535 540	174,75
42	2437,7	400	975 080	316,36
43	2217,8	300	665 340	215,86
44	2016,6	800	1 613 280	523,42
Итого			4 230 165	1372,45

§17.6. Страховые резервы в личном страховании

Важнейшим фактором, обеспечивающим надежность в работе страховых организаций, является определение размеров резервов как для отдельных застрахованных, так и для их групп и в целом по всем полисам страховой организации.

Под *резервом* понимается современная стоимость "чистых" обязательств страховой организации. Сумму резерва можно определить двумя методами — прямым (или проспективным) и обратным (ретроспективным). Оба метода дают одинаковые результаты. При прямом методе *резерв равен современной стоимости выплат, которые обязан осуществить страховщик, за вычетом современной стоимости ожидаемых взносов страхователя.*

В связи с термином "резерв" необходимо сделать отступление от обсуждения основной проблемы главы. Дело в том, что этот термин, трактуемый как чистые обязательства страховщика, является узко профессиональным. Он уже более века как закреплен в отечественном и западном (*reserve*) страховании.

Главное, на что надо здесь обратить внимание, — это то, что резерв в указанном выше смысле означает *обязательства*, а не реальные накопления (активы). Резерв — важный *аналитический* показатель: для того, чтобы обязательства перед страхователями были выполнены, резерву должны соответствовать некоторые активы, равные или превышающие размеры резерва. Формирование таких активов является обязательной, нормальной функцией страховщика и не связано с покрытием расходов в каких-либо чрезвычайных обстоятельствах

Вместе с тем, в экономической да и других областях деятельности, применяется иное понимание термина резерв — как некоторого запаса или фонда, денежного или вещественного, предназначенного для покрытия расходов или иных потребностей в непредвиденных ситуациях. Например, продовольственный резерв, резерв мощности двигателя, резерв главного командования и т.д. Иначе говоря, такие резервы не являются обязательствами.

Как видим, существует кардинальное различие в понимании обсуждаемого термина. Смешение понятий, которое несомненно мешает практической работе, отразилось на текстах соответствующих российских законов. Во всех законах о страховой деятельности резерв трактуется не в специальном страховом, а в широком понимании, как реальные накопления, активы. Например, в одном из законов читаем: "Страховщик вправе инвестировать или иным способом размещать страховые резервы...". Однако обязательства нельзя инвестировать.

Возникла в некотором роде тупиковая ситуация. Для того чтобы устранить указанное смешение понятий, назовем *математическим резервом*, или кратко *резервом*, величину, получаемую по приведенному выше определению. В свою очередь под *страховым резервом* будем понимать активы, предназначенные для выполнения обязательств страховщика.

Перейдем к методу расчета резерва. Резерв можно определить на любой момент действия страхового контракта. Для начала определим его на начало действия договора до первой выплаты премии. В случае, когда предусматриваются ежегодные пожизненные взносы пренумерандо в размере P_x, получим по определению для прямого метода

$$ {}_0V_x = A_x - P_x \times \ddot{a}_x = 0, \qquad (17.16)$$

где ${}_0V_x$ — размер резерва для застрахованного в возрасте x лет, A_x — современная стоимость каких-либо страховых обязательств.

Если резерв определяется для тех же условий, но на момент t после начала страхования, то

$$ {}_tV_x = A_{x+t} - P_x \times \ddot{a}_{x+t}. \qquad (17.17)$$

Страхование на дожитие. Приведенное выше определение резерва можно конкретизировать применительно к различным условиям и применяемым схемам страхования. Как и при обсуждении других проблем начнем с частного случая личного страхования — определения резерва при страховании на дожитие. В этом виде страхования предусматривается только единовременная премия. Соответствующая сумма зачисляется на счет участника и служит первоначальным резервом, в связи с чем формула (17.17) упрощается до

$$ {}_tV_x = A_{x+t}. \qquad (17.18)$$

Положим, что страховая сумма равна единице, $R = 1$, тогда

$$ {}_tV_x = A_{x+t} = \frac{l_{x+n}}{l_{x+t}} \times v^{n-t} = \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}}. \qquad (17.19).$$

Нетрудно убедиться в том, что современная стоимость обязательств в данном виде страхования увеличивается во времени, так как по мере роста t знаменатель уменьшается.

В некоторых видах личного страхования, например пенсионном, оговаривается необходимость ведения персональных счетов застрахованных. Как будет показано ниже, *средства, накопленные на персональном счете отдельного застрахованного, не идентичны резерву*. В связи с этим необходимо отчетливо представлять разницу между этими понятиями. В чисто иллюстративных целях проследим, как изменяется во времени сумма на воображаемом (в данном виде страхования такие счета не ведутся) персональном счете застрахованного (величина S_t) и резерв (${}_tV_x$) при страховании на дожитие.

На сумму единовременного взноса наращиваются проценты за соответствующий срок. В итоге при $R = 1$ на счете участника в момент t находится сумма S_t:

$$S_t = {}_nE_x \times (1 + i)^t = \frac{D_{x+n}}{D_x}(1 + i)^t = \frac{D_{x+n}}{D_x \times v^t}, \qquad (17.20)$$

где ${}_nE_x$ — размер премии по страхованию на дожитие (см. (17.1)).

Для момента $t > 0$ имеем $S_t < {}_tV_x$. Таким образом, *наращенная сумма на персональном счете застрахованного меньше резерва на один и тот же момент времени*, за исключением начального.

Из соотношения ${}_tV_x$ и S_t также следует, что

$${}_tV_x = S_t \frac{D_x \times v^t}{D_{x+t}} = S_t \times \frac{l_x}{l_{x+t}} = S_t \times \frac{1}{{}_tp_x}, \qquad (17.21)$$

где ${}_tp_x$ — вероятность дожития лица в возрасте x лет до возраста $x + t$.

На рис. 17.4 отражена динамика указанных величин в зависимости от срока t. Чем ближе момент оценки резерва ко времени погашения обязательства, тем больше разность между суммой на счете и резервом.

Важно понять причину расхождения между полученными выше показателями. Дело в том, что резерв увеличивается не только за счет накопленных процентов (на персональном счете), но и в силу *солидарной ответственности застрахованных*, т.е. за счет тех участников, которые не дожили до возраста x +

+ t. Из сказанного следует, что *общий размер резерва для доживших до возраста $x + t$ равен сумме средств на персональных счетах всех участников* — доживших и не доживших до этого возраста.

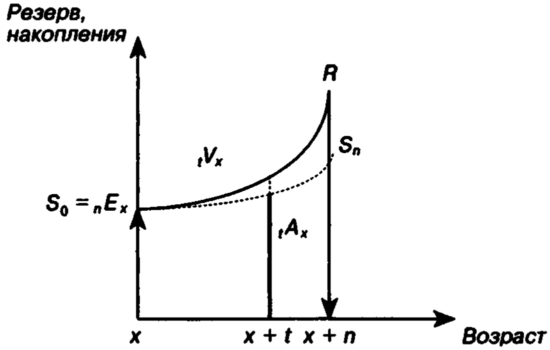

Рис. 17.4

ПРИМЕР 17.10. Мужчина в возрасте 50 лет страхуется на дожитие до 60 лет, страховая сумма R = 1000 денежных единиц. Пусть коммутационные функции определены для 9% и условий, учтенных в табл.12 Приложения. В этом случае сумма взноса и резерв на начало срока составит

$$V_{50} = {}_{10}E_{50} = 1000\frac{D_{60}}{D_{50}} = 1000\frac{389,17}{1124,8} = 345,98.$$

Спустя один год на счете окажется наращенная сумма

$$S_1 = 345,98 \times 1,09 = 377,12.$$

В то же время резерв составит

$${}_1V_{50} = 1000\frac{D_{60}}{D_{51}} = 1000\frac{389,17}{1017,4} = 382,51$$

или по формуле (17.21)

$${}_1V_{50} = 377,12 \times \frac{1}{{}_1p_{50}} = 377,12 \times \frac{l_{50}}{l} = 377,12 \times \frac{83\,640}{82\,461} = 382,51.$$

Таким образом, прирост резерва за один год за счет солидарности застрахованных равен 382,51 − 377,12 = 5,39. Динамика средств на счете и размеров резерва показана в следующей таблице.

t	0	5	10
S_t	345,98	532,33	819,06
${}_tV_{50}$	345,98	625,77	1000,00

Как видим, на индивидуальном счете к концу срока страхования средств меньше необходимых 1000 единиц. Однако следует учесть, что из 100 застрахованных в указанном возрасте согласно таблице смертности доживут до 60 лет только 82 человека, поэтому накопленные средства всех застрахованных окажутся достаточными для них.

Интересно выделить влияние факторов на размер резерва. Для этого найдем отношение размеров резерва для двух первых лет накопления для страхования на дожитие:

$$\frac{{}_1V_x}{{}_0V_x} = \frac{D_{x+n}}{D_{x+1}} : \frac{D_{x+n}}{D_x} = \frac{D_x}{D_{x+1}} = \frac{l_x v^x}{l_{x+1} v^{x+1}} = \frac{1}{p_x}(1 + i),$$

где p_x — вероятность прожить один год после возраста x лет.

Аналогичным образом определим динамику резерва за t лет:

$$\frac{{}_tV_x}{{}_0V_x} = \frac{1}{{}_tp_x}(1 + i)^t. \qquad (17.22)$$

Из сказанного выше следует, что размеры резерва можно определять и последовательно как

$${}_{t+1}V_x = {}_tV_x \frac{1}{{}_tp_x}(1 + i). \qquad (17.23)$$

Как следует из полученного соотношения, ***резерв увеличивается быстрее, чем идет наращение за счет процентов***, так как ${}_tp_x < 1$. Причем рост процентной ставки ускоряет накопление резерва, а увеличение вероятности дожития сокращает его.

Математический резерв при страховании жизни в случае, когда это страхование оплачивается разовым взносом, формируется аналогично тому, как было показано выше для страхования на дожитие.

Страхование пенсии. Кратко остановимся на определении резерва для еще одного вида личного страхования — индивидуального страхования пожизненной пенсии с единовременной выплатой взноса. Динамика резерва для этого случая показана на рис 17.5. Обозначения на нем имеют следующее содержание:

P_x — размер единовременного взноса,
L — возраст выхода на пенсию,
h — возраст, в котором исчерпываются средства на персональном счете застрахованного,
ω — предельный возраст.

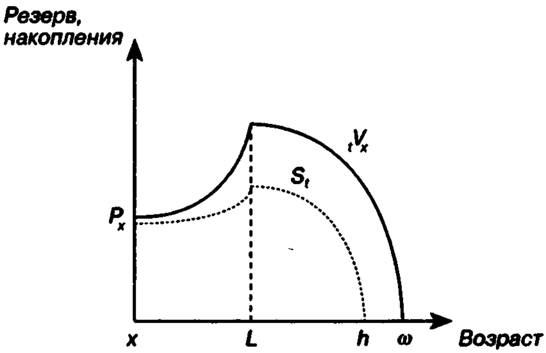

Рис. 17.5

Весь период от возраста x до предельного возраста можно разделить на два временных отрезка. В первом, до начала выплат пенсии, происходит накопление резерва, во втором — накопление сопровождается расходованием средств. На начало страхования (сразу после взноса премии) резерв равен актуарной стоимости страховых выплат, которая в свою очередь равна величине единовременного взноса P_x. Если принять, что размер годовой пенсии равен R и она выплачивается в начале года, то

$$_0V_x = A_x = \frac{N_L}{D_x}R. \tag{17.24}$$

Размер резерва в первом периоде ($x + t < L$)

$$_tV_x = \frac{N_L}{D_{x+t}}R. \tag{17.25}$$

С увеличением возраста знаменатель уменьшается и соответственно растет резерв. Во втором периоде ($x + t \geq L$) динамика резерва иная. Она определяется как

$$_tV_x = \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}}R. \qquad (17.26)$$

Размеры резерва можно получить и последовательно. Для первого периода он определяется формулой (17.19). Во втором периоде, когда выплачиваются пенсии, получаем

$$_{t+1}V_x = {}_tV_x \times \frac{1}{p_{x+t}}(1+i) - R. \qquad (17.27)$$

В свою очередь движение средств на персональном счете (S_t) на каждом шаге во времени рассчитывается в первом периоде как

$$S_t = P_x \times (1+i)^t, \qquad (17.28)$$

а во втором как

$$S_{t+1} = S_t \times (1+i) - R. \qquad (17.29)$$

Важно отметить, что поскольку на персональном счете средств меньше, чем сумма резерва, то ***через некоторый отрезок времени (в возрасте h лет) они полностью исчерпываются*** (см. рис. 17.5).

ПРИМЕР 17.11. Исходные данные: мужчина, $x = 50$, $L = 60$, $R = 1000$, $i = 9\%$. Размер единовременной премии (коммутационные функции из табл. 12 Приложения):

$$_0V_{50} = P_{50} = \frac{N_{60}}{D_{50}}R = \frac{3082{,}2}{1124{,}8}1000 = 2740{,}2.$$

Динамика средств на персональном счете и резерва характеризуется следующими данными.

$x + t$	50	55	60	65	90
S_t	2740	4216	6486	4582	—
$_tV_x$	2740	4579	7919	7120	1000

Полностью сумма на персональном счете будет исчерпана спустя 10 лет после начала выплат пенсии. Теоретическая нехватка средств на индивидуальном счете застрахованного компенсируется, как и в предыдущем примере, за счет действия принципа солидарности застрахованных.

Динамика резерва в рассматриваемом виде страхования различается по периодам. В первом, до начала выплаты пенсии, она описывается формулой (17.23). Что касается второго, то здесь искомая зависимость более сложная. Найдем соотношение двух последовательных показателей резерва:

$$\frac{{}_{t+1}V_x}{{}_tV_x} = \frac{N_{x+t+1}}{D_{x+t+1}} : \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} = \frac{N_{x+t+1}}{N_{x+t}} \times \frac{1}{p_{x+t}}(1 + i).$$

Таким образом,

$${}_{t+1}V_x = {}_tV_x \times \frac{N_{x+t+1}}{N_{x+t} \times p_{x+t}}(1 + i). \qquad (17.30)$$

Очевидно, что, если второй сомножитель в правой части равенства (17.30) меньше множителя наращения $(1 + i)$, то резерв уменьшается с каждым шагом во времени.

ПРИМЕР17.12. Продолжим пример 17.11. Найдем величину резерва для мужчины в возрасте 61 год, применив формулу (17.30):

$${}_{11}V_{50} = {}_{10}V_{50} \times \frac{N_{61}}{N_{60} \times p_{61}} \times 1{,}09 = 7919 \times \frac{2693}{3082 \times 0{,}9692} \times 1{,}09 =$$

$$= 7781,$$

что меньше резерва для 60 лет (см. пример 17.10).

Ничего принципиально не меняется, если взнос производится не разовым платежом, а в рассрочку. Пусть предусматривается пожизненная выплата пенсий и рассрочка взносов в течение k лет. Изменение резерва во времени изображено на рис. 17.6. Общий срок действия страхового полиса в этом случае можно разбить на три периода. В первом, в возрасте от x до $x + k$, осуществляются взносы и происходит ускоренное накопление, во втором, от $x + k$ и до возраста L, сумма резерва увеличивается только за счет процентов, в третьем средства расходуются на выплату пенсий, причем на остаток средств начисляются проценты. В "финальном" возрасте ω после выплаты пенсии резерв равен нулю. Аналогичное можно сказать и относительно динамики средств на персональном счете, кроме момента полного исчерпания средств, который происходит в возрасте $(h < \omega)$.

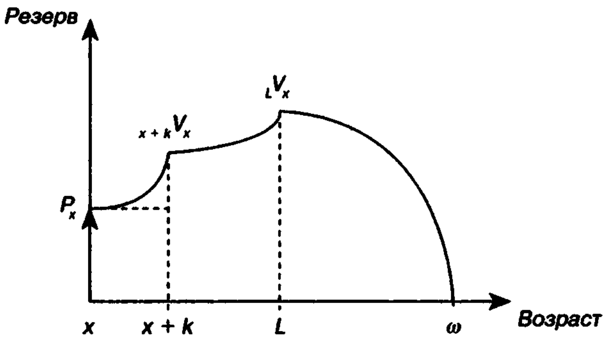

Рис 17.6

Ограничимся случаем, когда пенсии и взносы выплачиваются раз в году пренумерандо и не учитывается дополнительный инвестиционный доход, выплата которого предусматривается в некоторых пенсионных фондах. Запишем в общем виде формулу величины резерва в момент $x + t$:

$$_tV_x = A_{x+t} - P_x \times \ddot{a}_{x+t}, \tag{17.31}$$

где A_{x+t} — современная стоимость пенсионных выплат, производимых после возраста $x + t$, $\ddot{a}_{x+t}$ — стоимость немедленного ограниченного страхового аннуитета пренумерандо в возрасте $x + t$ лет, P_x — годовой размер премии, установленный в возрасте x лет.

Формула (17.31), как видим, предполагает определение будущих (ожидаемых) поступлений. Ее результат представляет собой "чистые" обязательства страховщика перед участником в возрасте $x + t$ лет. Подобный способ получил название *прямой метод определения резерва.*

Определим резерв для случая, когда пенсия пожизненная, $R = 1$, нетто-премия равна P_x в расчете на денежную единицу пенсии, пенсия и премии выплачиваются пренумерандо. В этом случае для первого периода ($t < k$) находим

$$_tV_x = {}_{n-t|}\ddot{a}_x - P_x \times \ddot{a}_{x:\overline{k-t|}}, \tag{17.32}$$

где $n = L - x$ — временной интервал от x до L лет, $_{n-t|}\ddot{a}_x$ — стоимость отложенного пожизненного страхового аннуитета пренумерандо, $\ddot{a}_{x:\overline{k-t|}}$ — стоимость немедленного ограниченного аннуитета.

Величина P_x находится на основе принципа эквивалентности обязательств страховщика и страхователя. Если $R = 1$, то из равенства этих обязательств следует, что ${}_0V_x = 0$ и нетто-премия находится как соотношение двух страховых аннуитетов — отложенного пожизненного и немедленного ограниченного, а именно:

$$P_x = \frac{{}_n\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}. \tag{17.33}$$

В свою очередь

$${}_n\ddot{a}_x = \frac{N_L}{D_x};\ \ddot{a}_{x:\overline{k}|} = \frac{N_x - N_{x+k}}{D_x}.$$

Подставив в (17.32) приведенные формулы для страховых аннуитетов и нетто-премии, получим для первого периода

$$\begin{aligned}{}_tV_x &= \frac{N_L}{D_{x+t}} - \frac{N_L}{N_x - N_{x+k}} \times \frac{N_{x+t} - N_{x+k}}{D_{x+t}} = \\ &= \frac{N_L}{D_{x+t}}\left(1 - \frac{N_{x+t} - N_{x+k}}{N_x - N_{x+k}}\right).\end{aligned} \tag{17.34}$$

Для второго периода ($k < t < n$) находим

$${}_tV_x = \frac{N_L}{D_{x+t}}. \tag{17.35}$$

Наконец, для третьего периода ($t > n$) получим

$${}_tV_x = \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}}. \tag{17.36}$$

Приведенные выше методы расчета резерва, разумеется, не охватывают весь спектр возможных способов выплат премий и пенсий. Однако ничего принципиально не меняется, если скажем, вместо пенсий пренумерандо выплачиваются пенсии постнумерандо, а вместо годовых пенсий или взносов — ежемесячные, вместо пожизненных пенсий выплачиваются ограниченные и т.д. Разумеется, в этих случаях несколько изменяется техника расчетов, общие принципы расчетов остаются без изменений.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Касимов Ю. Ф.* Начала актуарной математики (для страхования жизни и пенсионных схем). Зеленоград, 1995.
2. *Четыркин Е. М.* Актуарные методы в негосударственном медицинском страховании. М.: Дело, 1999. Гл. 3.
3. *Четыркин Е.М.* Пенсионные фонды. М.: АРГО, 1993.
4. *Neil A.* Life Contingencies. L., 1992 (6-е издание учебника для актуариев, подготовленное Институтом актуариев и Факультетом актуариев. Лондон).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблицы

1. Порядковые номера дней в году
2. Множители наращения (сложные проценты)
3. Множители наращения (непрерывные проценты)
4. Дисконтные множители (сложные проценты)
5. Дисконтные множители (непрерывные проценты)
6. Коэффициенты наращения дискретных рент (сложные проценты)
7. Коэффициенты приведения дискретных рент (сложные проценты)
8. Коэффициенты наращения непрерывных рент
9. Коэффициенты приведения непрерывных рент
10. Коэффициенты рассрочки. Ежемесячные платежи пренумерандо, полное погашение стоимости
11. Коэффициенты рассрочки. Ежемесячные платежи пренумерандо, остаточная стоимость 10%
12. Таблица смертности и стандартных коммутационных функций (мужчины, 9%)

Таблица 1

Порядковые номера дней в году

День меся-ца	я	ф	м	а	м	и	и	а	с	о	н	д
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31		90		151		212	243		304		365

Таблица 2

Множители наращения (сложные проценты)

Число периодов *n*	Ставка процента (%)					
	2	5	7	9	10	11
1	1,020000	1,050000	1,070000	1,090000	1,100000	1,110000
2	1,040400	1,102500	1,144900	1,188100	1,210000	1,232100
3	1,061208	1,157625	1,225043	1,295029	1,331000	1,367631
4	1,082432	1,215506	1,310796	1,411582	1,464100	1,518070
5	1,104081	1,276282	1,402552	1,538624	1,610510	1,685058
6	1,126162	1,340096	1,500730	1,677100	1,771561	1,870415
7	1,148686	1,407100	1,605781	1,828039	1,948717	2,076160
8	1,171659	1,477455	1,718186	1,992563	2,143589	2,304538
9	1,195093	1,551328	1,838459	2,171893	2,357948	2,558037
10	1,218994	1,628895	1,967151	2,367364	2,593742	2,839421
11	1,243374	1,710339	2,104852	2,580426	2,853117	3,151757
12	1,268242	1,795856	2,252192	2,812665	3,138428	3,498451
13	1,293607	1,885649	2,409845	3,065805	3,452271	3,883280
14	1,319479	1,979932	2,578534	3,341727	3,797498	4,310441
15	1,345868	2,078928	2,759032	3,642482	4,177248	4,784589
16	1,372786	2,182875	2,952164	3,970306	4,594973	5,310894
17	1,400241	2,292018	3,158815	4,327633	5,054470	5,895093
18	1,428246	2,406619	3,379932	4,717120	5,559917	6,543553
19	1,456811	2,526950	3,616528	5,141661	6,115909	7,263344
20	1,485947	2,653298	3,869684	5,604411	6,727500	8,062312
21	1,515666	2,785963	4,140562	6,108808	7,400250	8,949166
22	1,545980	2,925261	4,430402	6,658600	8,140275	9,933574
23	1,576899	3,071524	4,740530	7,257874	8,954302	11,02626
24	1,608437	3,225100	5,072367	7,911083	9,849733	12,23915
25	1,640606	3,386355	5,427433	8,623081	10,83470	13,58546
26	1,673418	3,555673	5,807353	9,399158	11,91817	15,07986
27	1,706886	3,733456	6,213868	10,24508	13,10999	16,73865
28	1,741024	3,920129	6,648838	11,16714	14,42099	18,57990
29	1,775845	4,116136	7,114257	12,17218	15,86309	20,62369
30	1,811362	4,321942	7,612255	13,26767	17,44940	22,89229
35	1,999890	5,516015	10,67658	20,41396	28,10243	38,57485
40	2,208040	7,039989	14,97445	31,40942	45,25925	65,00086
45	2,437854	8,985008	21,00245	48,32728	72,89048	109,5302
50	2,691588	11,46740	29,45702	74,35752	117,3908	184,5648

Число периодов *n*	Ставка процента (%)					
	13	15	18	20	22	25
1	1,130000	1,150000	1,180000	1,200000	1,220000	1,250000
2	1,276900	1,322500	1,392400	1,440000	1,488400	1,562500
3	1,442897	1,520875	1,643032	1,728000	1,815848	1,953125
4	1,630474	1,749006	1,938778	2,073600	2,215335	2,441406
5	1,842435	2,011357	2,287758	2,488320	2,702708	3,051758
6	2,081952	2,313061	2,699554	2,985984	3,297304	3,814697
7	2,352605	2,660020	3,185474	3,583181	4,022711	4,768372
8	2,658444	3,059023	3,758859	4,299817	4,907707	5,960464
9	3,004042	3,517876	4,435454	5,159780	5,987403	7,450581
10	3,394567	4,045558	5,233836	6,191736	7,304631	9,313226
11	3,835861	4,652391	6,175926	7,430084	8,911650	11,641532
12	4,334523	5,350250	7,287593	8,916100	10,872213	14,551915
13	4,898011	6,152788	8,599359	10,699321	13,264100	18,189894
14	5,534753	7,075706	10,147244	12,839185	16,182202	22,737368
15	6,254270	8,137062	11,973748	15,407022	19,742287	28,421709
16	7,067326	9,357621	14,129023	18,488426	24,085590	35,527137
17	7,986078	10,761264	16,672247	22,186111	29,384420	44,408921
18	9,024268	12,375454	19,673251	26,623333	35,848992	55,511151
19	10,197423	14,231772	23,214436	31,948000	43,735771	69,388939
20	11,523088	16,366537	27,393035	38,337600	53,357640	86,736174
21	13,021089	18,821518	32,323781	46,005120	65,096321	108,420217
22	14,713831	21,644746	38,142061	55,206144	79,417512	135,525272
23	16,626629	24,891458	45,007632	66,247373	96,889364	169,406589
24	18,788091	28,625176	53,109006	79,496847	118,205024	211,758237
25	21,230542	32,918953	62,668627	95,396217	144,210130	264,697796
26	23,990513	37,856796	73,948980	114,475460	175,936358	330,872245
27	27,109279	43,535315	87,259797	137,370552	214,642357	413,590306
28	30,633486	50,065612	102,966560	164,844662	261,863675	516,987883
29	34,615839	57,575454	121,500541	197,813595	319,473684	646,234854
30	39,115898	66,211772	143,370638	237,376314	389,757894	807,793567
35	72,068506	133,175523	327,997290	590,668229	1053,401842	2465,190329
40	132,781552	267,863546	750,378345	1469,771568	2847,037759	7523,163845
45	244,641402	538,769269	1716,683879	3657,261988	7694,712191	22958,87404
50	450,735925	1083,657442	3927,356860	9100,438150	20796,56145	70064,92322

Множители наращения (непрерывные проценты)

Число периодов *n*	Сила роста (%)					
	2	5	7	9	10	11
1	1,020201	1,051271	1,072508	1,094174	1,105171	1,116278
2	1,040811	1,105171	1,150274	1,197217	1,221403	1,246077
3	1,061837	1,161834	1,233678	1,309964	1,349859	1,390968
4	1,083287	1,221403	1,323130	1,433329	1,491825	1,552707
5	1,105171	1,284025	1,419068	1,568312	1,648721	1,733253
6	1,127497	1,349859	1,521962	1,716007	1,822119	1,934792
7	1,150274	1,419068	1,632316	1,877611	2,013753	2,159766
8	1,173511	1,491825	1,750673	2,054433	2,225541	2,410900
9	1,197217	1,568312	1,877611	2,247908	2,459603	2,691234
10	1,221403	1,648721	2,013753	2,459603	2,718282	3,004166
11	1,246077	1,733253	2,159766	2,691234	3,004166	3,353485
12	1,271249	1,822119	2,316367	2,944680	3,320117	3,743421
13	1,296930	1,915541	2,484323	3,221993	3,669297	4,178699
14	1,323130	2,013753	2,664456	3,525421	4,055200	4,664590
15	1,349859	2,117000	2,857651	3,857426	4,481689	5,206980
16	1,377128	2,225541	3,064854	4,220696	4,953032	5,812437
17	1,404948	2,339647	3,287081	4,618177	5,473947	6,488296
18	1,433329	2,459603	3,525421	5,053090	6,049647	7,242743
19	1,462285	2,585710	3,781043	5,528961	6,685894	8,084915
20	1,491825	2,718282	4,055200	6,049647	7,389056	9,025013
21	1,521962	2,857651	4,349235	6,619369	8,166170	10,074425
22	1,552707	3,004166	4,664590	7,242743	9,025013	11,245859
23	1,584074	3,158193	5,002811	7,924823	9,974182	12,553506
24	1,616074	3,320117	5,365556	8,671138	11,023176	14,013204
25	1,648721	3,490343	5,754603	9,487736	12,182494	15,642632
26	1,682028	3,669297	6,171858	10,381237	13,463738	17,461527
27	1,716007	3,857426	6,619369	11,358882	14,879732	19,491920
28	1,750673	4,055200	7,099327	12,428597	16,444647	21,758402
29	1,786038	4,263115	7,614086	13,599051	18,174145	24,288427
30	1,822119	4,481689	8,166170	14,879732	20,085537	27,112639
35	2,013753	5,754603	11,588347	23,336065	33,115452	46,993063
40	2,225541	7,389056	16,444647	36,598234	54,598150	81,450869
45	2,459603	9,487736	23,336065	57,397457	90,017131	141,17496
50	2,718282	12,182494	33,115452	90,017131	148,41315	244,69193

Число периодов n	Сила роста (%)					
	13	15	18	20	22	25
1	1,138828	1,161834	1,197217	1,221403	1,246077	1,284025
2	1,296930	1,349859	1,433329	1,491825	1,552707	1,648721
3	1,476981	1,568312	1,716007	1,822119	1,934792	2,117000
4	1,682028	1,822119	2,054433	2,225541	2,410900	2,718282
5	1,915541	2,117000	2,459603	2,718282	3,004166	3,490343
6	2,181472	2,459603	2,944680	3,320117	3,743421	4,481689
7	2,484323	2,857651	3,525421	4,055200	4,664590	5,754603
8	2,829217	3,320117	4,220696	4,953032	5,812437	7,389056
9	3,221993	3,857426	5,053090	6,049647	7,242743	9,487736
10	3,669297	4,481689	6,049647	7,389056	9,025013	12,182494
11	4,178699	5,206980	7,242743	9,025013	11,245859	15,642632
12	4,758821	6,049647	8,671138	11,023176	14,013204	20,085537
13	5,419481	7,028688	10,381237	13,463738	17,461527	25,790340
14	6,171858	8,166170	12,428597	16,444647	21,758402	33,115452
15	7,028688	9,487736	14,879732	20,085537	27,112639	42,521082
16	8,004469	11,023176	17,814273	24,532530	33,784428	54,598150
17	9,115716	12,807104	21,327557	29,964100	42,097990	70,105412
18	10,381237	14,879732	25,533722	36,598234	52,457326	90,017131
19	11,822447	17,287782	30,569415	44,701184	65,365853	115,58428
20	13,463738	20,085537	36,598234	54,598150	81,450869	148,41315
21	15,332887	23,336065	43,816042	66,686331	101,49403	190,56626
22	17,461527	27,112639	52,457326	81,450869	126,46935	244,69193
23	19,885682	31,500392	62,802821	99,484316	157,59051	314,19066
24	22,646380	36,598234	75,188628	121,51041	196,36987	403,42879
25	25,790340	42,521082	90,017131	148,41315	244,69193	518,01282
26	29,370771	49,402449	107,77007	181,27224	304,90492	665,14163
27	33,448268	57,397457	129,02420	221,40641	379,93493	854,05876
28	38,091837	66,686331	154,47001	270,42640	473,42807	1096,6331
29	43,380065	77,478463	184,93418	330,29956	589,92770	1408,1048
30	49,402449	90,017131	221,40641	403,42879	735,09518	1808,0424
35	94,632408	190,56626	544,57191	1096,6331	2208,3479	6310,6881
40	181,27224	403,42879	1339,4307	2980,9579	6634,2440	22026,465
45	347,23438	854,05876	3294,4680	8103,0839	19930,370	76879,919
50	665,14163	1808,0424	8103,0839	22026,465	59874,141	268337,28

Таблица 4

Дисконтные множители (сложные проценты)

Число периодов *n*	Ставка процента (%)					
	2	**5**	**7**	**9**	**10**	**11**
1	0,980392	0,952381	0,934579	0,917431	0,909091	0,900901
2	0,961169	0,907029	0,873439	0,841680	0,826446	0,811622
3	0,942322	0,863838	0,816298	0,772183	0,751315	0,731191
4	0,923845	0,822702	0,762895	0,708425	0,683013	0,658731
5	0,905731	0,783526	0,712986	0,649931	0,620921	0,593451
6	0,887971	0,746215	0,666342	0,596267	0,564474	0,534641
7	0,870560	0,710681	0,622750	0,547034	0,513158	0,481658
8	0,853490	0,676839	0,582009	0,501866	0,466507	0,433926
9	0,836755	0,644609	0,543934	0,460428	0,424098	0,390925
10	0,820348	0,613913	0,508349	0,422411	0,385543	0,352184
11	0,804263	0,584679	0,475093	0,387533	0,350494	0,317283
12	0,788493	0,556837	0,444012	0,355535	0,318631	0,285841
13	0,773033	0,530321	0,414964	0,326179	0,289664	0,257514
14	0,757875	0,505068	0,387817	0,299246	0,263331	0,231995
15	0,743015	0,481017	0,362446	0,274538	0,239392	0,209004
16	0,728446	0,458112	0,338735	0,251870	0,217629	0,188292
17	0,714163	0,436297	0,316574	0,231073	0,197845	0,169633
18	0,700159	0,415521	0,295864	0,211994	0,179859	0,152822
19	0,686431	0,395734	0,276508	0,194490	0,163508	0,137678
20	0,672971	0,376889	0,258419	0,178431	0,148644	0,124034
21	0,659776	0,358942	0,241513	0,163698	0,135131	0,111742
22	0,646839	0,341850	0,225713	0,150182	0,122846	0,100669
23	0,634156	0,325571	0,210947	0,137781	0,111678	0,090693
24	0,621721	0,310068	0,197147	0,126405	0,101526	0,081705
25	0,609531	0,295303	0,184249	0,115968	0,092296	0,073608
26	0,597579	0,281241	0,172195	0,106393	0,083905	0,066314
27	0,585862	0,267848	0,160930	0,097608	0,076278	0,059742
28	0,574375	0,255094	0,150402	0,089548	0,069343	0,053822
29	0,563112	0,242946	0,140563	0,082155	0,063039	0,048488
30	0,552071	0,231377	0,131367	0,075371	0,057309	0,043683
35	0,500028	0,181290	0,093663	0,048986	0,035584	0,025924
40	0,452890	0,142046	0,066780	0,031838	0,022095	0,015384
45	0,410197	0,111297	0,047613	0,020692	0,013719	0,009130
50	0,371528	0,087204	0,033948	0,013449	0,008519	0,005418

Число периодов *n*	Ставка процента (%)					
	13	15	18	20	22	25
1	0,884956	0,869565	0,847458	0,833333	0,819672	0,800000
2	0,783147	0,756144	0,718184	0,694444	0,671862	0,640000
3	0,693050	0,657516	0,608631	0,578704	0,550707	0,512000
4	0,613319	0,571753	0,515789	0,482253	0,451399	0,409600
5	0,542760	0,497177	0,437109	0,401878	0,369999	0,327680
6	0,480319	0,432328	0,370432	0,334898	0,303278	0,262144
7	0,425061	0,375937	0,313925	0,279082	0,248589	0,209715
8	0,376160	0,326902	0,266038	0,232568	0,203761	0,167772
9	0,332885	0,284262	0,225456	0,193807	0,167017	0,134218
10	0,294588	0,247185	0,191064	0,161506	0,136899	0,107374
11	0,260698	0,214943	0,161919	0,134588	0,112213	0,085899
12	0,230706	0,186907	0,137220	0,112157	0,091978	0,068719
13	0,204165	0,162528	0,116288	0,093464	0,075391	0,054976
14	0,180677	0,141329	0,098549	0,077887	0,061796	0,043980
15	0,159891	0,122894	0,083516	0,064905	0,050653	0,035184
16	0,141496	0,106865	0,070776	0,054088	0,041519	0,028147
17	0,125218	0,092926	0,059980	0,045073	0,034032	0,022518
18	0,110812	0,080805	0,050830	0,037561	0,027895	0,018014
19	0,098064	0,070265	0,043077	0,031301	0,022865	0,014412
20	0,086782	0,061100	0,036506	0,026084	0,018741	0,011529
21	0,076798	0,053131	0,030937	0,021737	0,015362	0,009223
22	0,067963	0,046201	0,026218	0,018114	0,012592	0,007379
23	0,060144	0,040174	0,022218	0,015095	0,010321	0,005903
24	0,053225	0,034934	0,018829	0,012579	0,008460	0,004722
25	0,047102	0,030378	0,015957	0,010483	0,006934	0,003778
26	0,041683	0,026415	0,013523	0,008735	0,005684	0,003022
27	0,036888	0,022970	0,011460	0,007280	0,004659	0,002418
28	0,032644	0,019974	0,009712	0,006066	0,003819	0,001934
29	0,028889	0,017369	0,008230	0,005055	0,003130	0,001547
30	0,025565	0,015103	0,006975	0,004213	0,002566	0,001238
35	0,013876	0,007509	0,003049	0,001693	0,000949	0,000406
40	0,007531	0,003733	0,001333	0,000680	0,000351	0,000133
45	0,004088	0,001856	0,000583	0,000273	0,000130	0,000044
50	0,002219	0,000923	0,000255	0,000110	0,000048	0,000014

Таблица 5

Дисконтные множители (непрерывные проценты)

Число периодов *n*	Сила роста (%)					
	2	5	7	9	10	11
1	0,980199	0,951229	0,932394	0,913931	0,904837	0,895834
2	0,960789	0,904837	0,869358	0,835270	0,818731	0,802519
3	0,941765	0,860708	0,810584	0,763379	0,740818	0,718924
4	0,923116	0,818731	0,755784	0,697676	0,670320	0,644036
5	0,904837	0,778801	0,704688	0,637628	0,606531	0,576950
6	0,886920	0,740818	0,657047	0,582748	0,548812	0,516851
7	0,869358	0,704688	0,612626	0,532592	0,496585	0,463013
8	0,852144	0,670320	0,571209	0,486752	0,449329	0,414783
9	0,835270	0,637628	0,532592	0,444858	0,406570	0,371577
10	0,818731	0,606531	0,496585	0,406570	0,367879	0,332871
11	0,802519	0,576950	0,463013	0,371577	0,332871	0,298197
12	0,786628	0,548812	0,431711	0,339596	0,301194	0,267135
13	0,771052	0,522046	0,402524	0,310367	0,272532	0,239309
14	0,755784	0,496585	0,375311	0,283654	0,246597	0,214381
15	0,740818	0,472367	0,349938	0,259240	0,223130	0,192050
16	0,726149	0,449329	0,326280	0,236928	0,201897	0,172045
17	0,711770	0,427415	0,304221	0,216536	0,182684	0,154124
18	0,697676	0,406570	0,283654	0,197899	0,165299	0,138069
19	0,683861	0,386741	0,264477	0,180866	0,149569	0,123687
20	0,670320	0,367879	0,246597	0,165299	0,135335	0,110803
21	0,657047	0,349938	0,229925	0,151072	0,122456	0,099261
22	0,644036	0,332871	0,214381	0,138069	0,110803	0,088922
23	0,631284	0,316637	0,199888	0,126186	0,100259	0,079659
24	0,618783	0,301194	0,186374	0,115325	0,090718	0,071361
25	0,606531	0,286505	0,173774	0,105399	0,082085	0,063928
26	0,594521	0,272532	0,162026	0,096328	0,074274	0,057269
27	0,582748	0,259240	0,151072	0,088037	0,067206	0,051303
28	0,571209	0,246597	0,140858	0,080460	0,060810	0,045959
29	0,559898	0,234570	0,131336	0,073535	0,055023	0,041172
30	0,548812	0,223130	0,122456	0,067206	0,049787	0,036883
35	0,496585	0,173774	0,086294	0,042852	0,030197	0,021280
40	0,449329	0,135335	0,060810	0,027324	0,018316	0,012277
45	0,406570	0,105399	0,042852	0,017422	0,011109	0,007083
50	0,367879	0,082085	0,030197	0,011109	0,006738	0,004087

Число периодов *n*	Сила роста (%)					
	13	15	18	20	22	25
1	0,878095	0,860708	0,835270	0,818731	0,802519	0,778801
2	0,771052	0,740818	0,697676	0,670320	0,644036	0,606531
3	0,677057	0,637628	0,582748	0,548812	0,516851	0,472367
4	0,594521	0,548812	0,486752	0,449329	0,414783	0,367879
5	0,522046	0,472367	0,406570	0,367879	0,332871	0,286505
6	0,458406	0,406570	0,339596	0,301194	0,267135	0,223130
7	0,402524	0,349938	0,283654	0,246597	0,214381	0,173774
8	0,353455	0,301194	0,236928	0,201897	0,172045	0,135335
9	0,310367	0,259240	0,197899	0,165299	0,138069	0,105399
10	0,272532	0,223130	0,165299	0,135335	0,110803	0,082085
11	0,239309	0,192050	0,138069	0,110803	0,088922	0,063928
12	0,210136	0,165299	0,115325	0,090718	0,071361	0,049787
13	0,184520	0,142274	0,096328	0,074274	0,057269	0,038774
14	0,162026	0,122456	0,080460	0,060810	0,045959	0,030197
15	0,142274	0,105399	0,067206	0,049787	0,036883	0,023518
16	0,124930	0,090718	0,056135	0,040762	0,029599	0,018316
17	0,109701	0,078082	0,046888	0,033373	0,023754	0,014264
18	0,096328	0,067206	0,039164	0,027324	0,019063	0,011109
19	0,084585	0,057844	0,032712	0,022371	0,015299	0,008652
20	0,074274	0,049787	0,027324	0,018316	0,012277	0,006738
21	0,065219	0,042852	0,022823	0,014996	0,009853	0,005248
22	0,057269	0,036883	0,019063	0,012277	0,007907	0,004087
23	0,050287	0,031746	0,015923	0,010052	0,006346	0,003183
24	0,044157	0,027324	0,013300	0,008230	0,005092	0,002479
25	0,038774	0,023518	0,011109	0,006738	0,004087	0,001930
26	0,034047	0,020242	0,009279	0,005517	0,003280	0,001503
27	0,029897	0,017422	0,007750	0,004517	0,002632	0,001171
28	0,026252	0,014996	0,006474	0,003698	0,002112	0,000912
29	0,023052	0,012907	0,005407	0,003028	0,001695	0,000710
30	0,020242	0,011109	0,004517	0,002479	0,001360	0,000553
35	0,010567	0,005248	0,001836	0,000912	0,000453	0,000158
40	0,005517	0,002479	0,000747	0,000335	0,000151	0,000045
45	0,002880	0,001171	0,000304	0,000123	0,000050	0,000013
50	0,001503	0,000553	0,000123	0,000045	0,000017	0,000004

Таблица 6

Коэффициенты наращения дискретных рент (сложные проценты)

Число периодов *n*	Ставка процента (%)					
	2	5	7	9	10	11
1	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
2	2,020000	2,050000	2,070000	2,090000	2,100000	2,110000
3	3,060400	3,152500	3,214900	3,278100	3,310000	3,342100
4	4,121608	4,310125	4,439943	4,573129	4,641000	4,709731
5	5,204040	5,525631	5,750739	5,984711	6,105100	6,227801
6	6,308121	6,801913	7,153291	7,523335	7,715610	7,912860
7	7,434283	8,142008	8,654021	9,200435	9,487171	9,783274
8	8,582969	9,549109	10,259803	11,028474	11,435888	11,859434
9	9,754628	11,026564	11,977989	13,021036	13,579477	14,163972
10	10,949721	12,577893	13,816448	15,192930	15,937425	16,722009
11	12,168715	14,206787	15,783599	17,560293	18,531167	19,561430
12	13,412090	15,917127	17,888451	20,140720	21,384284	22,713187
13	14,680332	17,712983	20,140643	22,953385	24,522712	26,211638
14	15,973938	19,598632	22,550488	26,019189	27,974983	30,094918
15	17,293417	21,578564	25,129022	29,360916	31,772482	34,405359
16	18,639285	23,657492	27,888054	33,003399	35,949730	39,189948
17	20,012071	25,840366	30,840217	36,973705	40,544703	44,500843
18	21,412312	28,132385	33,999033	41,301338	45,599173	50,395936
19	22,840559	30,539004	37,378965	46,018458	51,159090	56,939488
20	24,297370	33,065954	40,995492	51,160120	57,274999	64,202832
21	25,783317	35,719252	44,865177	56,764530	64,002499	72,265144
22	27,298984	38,505214	49,005739	62,873338	71,402749	81,214309
23	28,844963	41,430475	53,436141	69,531939	79,543024	91,147884
24	30,421862	44,501999	58,176671	76,789813	88,497327	102,17415
25	32,030300	47,727099	63,249038	84,700896	98,347059	114,41331
26	33,670906	51,113454	68,676470	93,323977	109,18177	127,99877
27	35,344324	54,669126	74,483823	102,72313	121,09994	143,07864
28	37,051210	58,402583	80,697691	112,96822	134,20994	159,81729
29	38,792235	62,322712	87,346529	124,13536	148,63093	178,39719
30	40,568079	66,438848	94,460786	136,30754	164,49402	199,02088
35	49,994478	90,320307	138,23688	215,71075	271,02437	341,58955
40	60,401983	120,79977	199,63511	337,88245	442,59256	581,82607
45	71,892710	159,70016	285,74931	525,85873	718,90484	986,63856
50	84,579401	209,34800	406,52893	815,08356	1163,9085	1668,7712

Число периодов *n*	Ставка процента (%)					
	13	15	18	20	22	25
1	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
2	2,130000	2,150000	2,180000	2,200000	2,220000	2,250000
3	3,406900	3,472500	3,572400	3,640000	3,708400	3,812500
4	4,849797	4,993375	5,215432	5,368000	5,524248	5,765625
5	6,480271	6,742381	7,154210	7,441600	7,739583	8,207031
6	8,322706	8,753738	9,441968	9,929920	10,442291	11,258789
7	10,404658	11,066799	12,141522	12,915904	13,739595	15,073486
8	12,757263	13,726819	15,326996	16,499085	17,762306	19,841858
9	15,415707	16,785842	19,085855	20,798902	22,670013	25,802322
10	18,419749	20,303718	23,521309	25,958682	28,657416	33,252903
11	21,814317	24,349276	28,755144	32,150419	35,962047	42,566129
12	25,650178	29,001667	34,931070	39,580502	44,873697	54,207661
13	29,984701	34,351917	42,218663	48,496603	55,745911	68,759576
14	34,882712	40,504705	50,818022	59,195923	69,010011	86,949470
15	40,417464	47,580411	60,965266	72,035108	85,192213	109,68684
16	46,671735	55,717472	72,939014	87,442129	104,93450	138,10855
17	53,739060	65,075093	87,068036	105,93056	129,02009	173,63568
18	61,725138	75,836357	103,74028	128,11667	158,40451	218,04460
19	70,749406	88,211811	123,41353	154,74000	194,25350	273,55576
20	80,946829	102,44358	146,62797	186,68800	237,98927	342,94470
21	92,469917	118,81012	174,02100	225,02560	291,34691	429,68087
22	105,49101	137,63164	206,34479	271,03072	356,44323	538,10109
23	120,20484	159,27638	244,48685	326,23686	435,86075	673,62636
24	136,83147	184,16784	289,49448	392,48424	532,75011	843,03295
25	155,61956	212,79302	342,60349	471,98108	650,95513	1054,7911
26	176,85010	245,71197	405,27211	567,37730	795,16526	1319,4889
27	200,84061	283,56877	479,22109	681,85276	971,10162	1650,3612
28	227,94989	327,10408	566,48089	819,22331	1185,7440	2063,9515
29	258,58338	377,16969	669,44745	984,06797	1447,6077	2580,9394
30	293,19922	434,74515	790,94799	1181,8816	1767,0813	3227,1742
35	546,68082	881,17016	1816,6516	2948,3411	4783,6447	9856,7613
40	1013,7042	1779,0903	4163,2130	7343,8578	12936,535	30088,655
45	1874,1646	3585,1285	9531,5771	18281,310	34971,419	91831,496
50	3459,5071	7217,7163	21813,094	45497,191	94525,279	280255,69

Таблица 7

Коэффициенты приведения дискретных рент (сложные проценты)

Число периодов *n*	Ставка процента (%)					
	2	5	7	9	10	12
1	0,980392	0,952381	0,934579	0,917431	0,909091	0,892857
2	1,941561	1,859410	1,808018	1,759111	1,735537	1,690051
3	2,883883	2,723248	2,624316	2,531295	2,486852	2,401831
4	3,807729	3,545951	3,387211	3,239720	3,169865	3,037349
5	4,713460	4,329477	4,100197	3,889651	3,790787	3,604776
6	5,601431	5,075692	4,766540	4,485919	4,355261	4,111407
7	6,471991	5,786373	5,389289	5,032953	4,868419	4,563757
8	7,325481	6,463213	5,971299	5,534819	5,334926	4,967640
9	8,162237	7,107822	6,515232	5,995247	5,759024	5,328250
10	8,982585	7,721735	7,023582	6,417658	6,144567	5,650223
11	9,786848	8,306414	7,498674	6,805191	6,495061	5,937699
12	10,575341	8,863252	7,942686	7,160725	6,813692	6,194374
13	11,348374	9,393573	8,357651	7,486904	7,103356	6,423548
14	12,106249	9,898641	8,745468	7,786150	7,366687	6,628168
15	12,849264	10,379658	9,107914	8,060688	7,606080	6,810864
16	13,577709	10,837770	9,446649	8,312558	7,823709	6,973986
17	14,291872	11,274066	9,763223	8,543631	8,021553	7,119630
18	14,992031	11,689587	10,059087	8,755625	8,201412	7,249670
19	15,678462	12,085321	10,335595	8,950115	8,364920	7,365777
20	16,351433	12,462210	10,594014	9,128546	8,513564	7,469444
21	17,011209	12,821153	10,835527	9,292244	8,648694	7,562003
22	17,658048	13,163003	11,061240	9,442425	8,771540	7,644646
23	18,292204	13,488574	11,272187	9,580207	8,883218	7,718434
24	18,913926	13,798642	11,469334	9,706612	8,984744	7,784316
25	19,523456	14,093945	11,653583	9,822580	9,077040	7,843139
26	20,121036	14,375185	11,825779	9,928972	9,160945	7,895660
27	20,706898	14,643034	11,986709	10,026580	9,237223	7,942554
28	21,281272	14,898127	12,137111	10,116128	9,306567	7,984423
29	21,844385	15,141074	12,277674	10,198283	9,369606	8,021806
30	22,396456	15,372451	12,409041	10,273654	9,426914	8,055184
35	24,998619	16,374194	12,947672	10,566821	9,644159	8,175504
40	27,355479	17,159086	13,331709	10,757360	9,779051	8,243777
45	29,490160	17,774070	13,605522	10,881197	9,862808	8,282516
50	31,423606	18,255925	13,800746	10,961683	9,914814	8,304498

Число периодов *n*	Ставка процента (%)					
	13	15	18	20	22	25
1	0,884956	0,869565	0,847458	0,833333	0,819672	0,800000
2	1,668102	1,625709	1,565642	1,527778	1,491535	1,440000
3	2,361153	2,283225	2,174273	2,106481	2,042241	1,952000
4	2,974471	2,854978	2,690062	2,588735	2,493641	2,361600
5	3,517231	3,352155	3,127171	2,990612	2,863640	2,689280
6	3,997550	3,784483	3,497603	3,325510	3,166918	2,951424
7	4,422610	4,160420	3,811528	3,604592	3,415506	3,161139
8	4,798770	4,487322	4,077566	3,837160	3,619268	3,328911
9	5,131655	4,771584	4,303022	4,030967	3,786285	3,463129
10	5,426243	5,018769	4,494086	4,192472	3,923184	3,570503
11	5,686941	5,233712	4,656005	4,327060	4,035397	3,656403
12	5,917647	5,420619	4,793225	4,439217	4,127375	3,725122
13	6,121812	5,583147	4,909513	4,532681	4,202766	3,780098
14	6,302488	5,724476	5,008062	4,610567	4,264562	3,824078
15	6,462379	5,847370	5,091578	4,675473	4,315215	3,859263
16	6,603875	5,954235	5,162354	4,729561	4,356734	3,887410
17	6,729093	6,047161	5,222334	4,774634	4,390765	3,909928
18	6,839905	6,127966	5,273164	4,812195	4,418660	3,927942
19	6,937969	6,198231	5,316241	4,843496	4,441525	3,942354
20	7,024752	6,259331	5,352746	4,869580	4,460266	3,953883
21	7,101550	6,312462	5,383683	4,891316	4,475628	3,963107
22	7,169513	6,358663	5,409901	4,909430	4,488220	3,970485
23	7,229658	6,398837	5,432120	4,924525	4,498541	3,976388
24	7,282883	6,433771	5,450949	4,937104	4,507001	3,981111
25	7,329985	6,464149	5,466906	4,947587	4,513935	3,984888
26	7,371668	6,490564	5,480429	4,956323	4,519619	3,987911
27	7,408556	6,513534	5,491889	4,963602	4,524278	3,990329
28	7,441200	6,533508	5,501601	4,969668	4,528096	3,992263
29	7,470088	6,550877	5,509831	4,974724	4,531227	3,993810
30	7,495653	6,565980	5,516806	4,978936	4,533792	3,995048
35	7,585572	6,616607	5,538618	4,991535	4,541140	3,998377
40	7,634376	6,641778	5,548152	4,996598	4,543858	3,999468
45	7,660864	6,654293	5,552319	4,998633	4,544864	3,999826
50	7,675242	6,660515	5,554141	4,999451	4,545236	3,999943

Коэффициенты наращения непрерывных рент

Число периодов *n*	Сила роста (%)					
	2	5	7	9	10	11
1	1,010067	1,025422	1,035831	1,046381	1,051709	1,057073
2	2,040539	2,103418	2,146769	2,191304	2,214028	2,237061
3	3,091827	3,236685	3,338258	3,444049	3,498588	3,554256
4	4,164353	4,428055	4,616140	4,814771	4,918247	5,024611
5	5,258546	5,680508	5,986679	6,314580	6,487213	6,665937
6	6,374843	6,997176	7,456594	7,955632	8,221188	8,498112
7	7,513690	8,381351	9,033089	9,751229	10,137527	10,543330
8	8,675544	9,836494	10,723893	11,715925	12,255409	12,826361
9	9,860868	11,366244	12,537294	13,865644	14,596031	15,374859
10	11,070138	12,974425	14,482182	16,217812	17,182818	18,219691
11	12,303837	14,665060	16,568089	18,791494	20,041660	21,395315
12	13,562458	16,442376	18,805243	21,607551	23,201169	24,940194
13	14,846504	18,310817	21,204608	24,688807	26,692967	28,897265
14	16,156491	20,275054	23,777946	28,060239	30,552000	33,314457
15	17,492940	22,340000	26,537873	31,749173	34,816891	38,245271
16	18,856388	24,510819	29,497917	35,785509	39,530324	43,749431
17	20,247380	26,792937	32,672589	40,201965	44,739474	49,893604
18	21,666471	29,192062	36,077450	45,034337	50,496475	56,752209
19	23,114229	31,714193	39,729191	50,321794	56,858944	64,408320
20	24,591235	34,365637	43,645714	56,107194	63,890561	72,954668
21	26,098078	37,153022	47,846216	62,437430	71,661699	82,494770
22	27,635361	40,083320	52,351290	69,363811	80,250135	93,144180
23	29,203699	43,163858	57,183018	76,942479	89,741825	105,03187
24	30,803720	46,402338	62,365085	85,234863	100,231764	118,30185
25	32,436064	49,806859	67,922895	94,308176	111,824940	133,11484
26	34,101382	53,385933	73,883692	104,23596	124,637380	149,65024
27	35,800343	57,148511	80,276695	115,09869	138,797317	168,10836
28	37,533625	61,103999	87,133244	126,98441	154,446468	188,71275
29	39,301922	65,262290	94,486948	139,98945	171,741454	211,71298
30	41,105940	69,633781	102,37386	154,21924	190,855369	237,38763
35	50,687635	95,092054	151,26210	248,17850	321,15452	418,11876
40	61,277046	127,78112	220,63781	395,53594	535,98150	731,37150
45	72,980156	169,75472	319,08664	626,63841	890,17131	1274,3179
50	85,914090	223,64988	458,79217	989,07924	1474,1316	2215,3812

Число периодов *n*	Сила роста (%)					
	13	15	16	20	22	25
1	1,067911	1,078895	1,084443	1,107014	1,118531	1,136102
2	2,284078	2,332392	2,357049	2,459123	2,512306	2,594885
3	3,669083	3,788748	3,850465	4,110594	4,249056	4,468000
4	5,246367	5,480792	5,603005	6,127705	6,413180	6,873127
5	7,042622	7,446667	7,659631	8,591409	9,109846	9,961372
6	9,088248	9,730687	10,073103	11,600585	12,470097	13,926756
7	11,417866	12,384341	12,905339	15,276000	16,657229	19,018411
8	14,070900	15,467446	16,228998	19,765162	21,874715	25,556224
9	17,092251	19,049504	20,129349	25,248237	28,376104	33,950943
10	20,533051	23,211260	24,706453	31,945280	36,477334	44,729976
11	24,451532	28,046532	30,077734	40,125067	46,572088	58,570528
12	28,914010	33,664316	36,380990	50,115882	59,150925	76,342148
13	33,996005	40,191251	43,777931	62,318690	74,825122	99,161360
14	39,783527	47,774466	52,458321	77,223234	94,356375	128,46181
15	46,374520	56,584906	62,644852	95,427685	118,69381	166,08433
16	53,880530	66,821176	74,598858	117,66265	149,02013	214,39260
17	62,428588	78,714025	88,627014	144,82050	186,80905	276,42165
18	72,163358	92,531545	105,08921	177,99117	233,89694	356,06853
19	83,249591	108,58521	124,40777	218,50592	292,57206	458,33714
20	95,874908	127,23691	147,07831	267,99075	365,68577	589,65264
21	110,25298	148,90710	173,68244	328,43166	456,79106	758,26507
22	126,62713	174,08426	204,90268	402,25434	570,31524	974,76773
23	145,27448	203,33595	241,53996	492,42158	711,77507	1252,7626
24	166,51061	237,32156	284,53422	602,55209	888,04489	1609,7152
25	190,69492	276,80721	334,98844	737,06580	1107,6906	2068,0513
26	218,23670	322,68299	394,19702	901,36121	1381,3860	2656,5665
27	249,60206	375,98305	463,67893	1102,0321	1722,4315	3412,2351
28	285,32182	437,90887	545,21670	1347,1320	2147,4003	4382,5326
29	326,00050	509,85642	640,90217	1646,4978	2676,9441	5628,4194
30	372,32653	593,44754	753,19011	2012,1440	3336,7963	7228,1697
35	720,24929	1263,7751	1683,9150	5478,1658	10033,400	25238,752
40	1386,7096	2682,8586	37[illegible]5,2815	14899,790	30151,109	88101,863
45	2663,3414	5687,0584	[illegible]365,1923	40510,420	90588,047	307515,68
50	5108,7818	12046,949	18624,737	110127,33	272150,64	1073345,1

Таблица 9

Коэффициенты приведения непрерывных рент

Число периодов *n*	Сила роста (%)					
	2	5	7	9	10	12
1	0,990066	0,975412	0,965803	0,956320	0,951626	0,942330
2	1,960528	1,903252	1,866311	1,830331	1,812692	1,778101
3	2,911773	2,785840	2,705939	2,629117	2,591818	2,519364
4	3,844183	3,625385	3,488804	3,359152	3,296800	3,176805
5	4,758129	4,423984	4,218742	4,026354	3,934693	3,759903
6	5,653978	5,183636	4,899331	4,636131	4,511884	4,277065
7	6,532088	5,906238	5,533909	5,193424	5,034147	4,735746
8	7,392811	6,593599	6,125585	5,702753	5,506710	5,142559
9	8,236489	7,247437	6,677260	6,168244	5,934303	5,503371
10	9,063462	7,869387	7,191639	6,593670	6,321206	5,823382
11	9,874060	8,461004	7,671242	6,982481	6,671289	6,107206
12	10,668607	9,023767	8,118421	7,337827	6,988058	6,358935
13	11,447421	9,559084	8,535368	7,662590	7,274682	6,582199
14	12,210813	10,068294	8,924127	7,959400	7,534030	6,780217
15	12,959089	10,552669	9,286604	8,230664	7,768698	6,955843
16	13,692548	11,013421	9,624574	8,478580	7,981035	7,111609
17	14,411484	11,451701	9,939696	8,705159	8,173165	7,249761
18	15,116184	11,868607	10,233514	8,912237	8,347011	7,372291
19	15,806930	12,265180	10,507468	9,101491	8,504314	7,480965
20	16,483998	12,642411	10,762901	9,274457	8,646647	7,577350
21	17,147659	13,001245	11,001064	9,432535	8,775436	7,662837
22	17,798179	13,342578	11,223127	9,577008	8,891968	7,738656
23	18,435818	13,667265	11,430177	9,709047	8,997412	7,805902
24	19,060830	13,976116	11,623229	9,829721	9,092820	7,865544
25	19,673467	14,269904	11,803229	9,940009	9,179150	7,918441
26	20,273973	14,549364	11,971061	10,040804	9,257264	7,965357
27	20,862587	14,815195	12,127546	10,132924	9,327945	8,006968
28	21,439547	15,068061	12,273451	10,217115	9,391899	8,043873
29	22,005082	15,308594	12,409493	10,294061	9,449768	8,076605
30	22,559418	15,537397	12,536337	10,364383	9,502129	8,105636
35	25,170735	16,524521	13,052949	10,634976	9,698026	8,208370
40	27,533552	17,293294	13,416999	10,807514	9,816844	8,264752
45	29,671517	17,892016	13,673541	10,917529	9,888910	8,295695
50	31,606028	18,358300	13,854323	10,987678	9,932621	8,312677

Число периодов *n*	Сила роста (%)					
	13	15	18	20	22	25
1	0,937727	0,928613	0,915165	0,906346	0,897642	0,884797
2	1,761142	1,727879	1,679576	1,648400	1,618016	1,573877
3	2,484178	2,415812	2,318065	2,255942	2,196130	2,110534
4	3,119073	3,007922	2,851376	2,753355	2,660078	2,528482
5	3,676571	3,517556	3,296835	3,160603	3,032404	2,853981
6	4,166108	3,956202	3,668914	3,494029	3,331203	3,107479
7	4,595968	4,333748	3,979700	3,767015	3,570995	3,304904
8	4,973426	4,658705	4,239290	3,990517	3,763432	3,458659
9	5,304870	4,938398	4,456118	4,173506	3,917867	3,578403
10	5,595909	5,179132	4,637228	4,323324	4,041804	3,671660
11	5,851470	5,386334	4,788504	4,445984	4,141265	3,744289
12	6,075876	5,564674	4,914860	4,546410	4,221085	3,800852
13	6,272927	5,718173	5,020402	4,628632	4,285142	3,844903
14	6,445956	5,850290	5,108558	4,695950	4,336549	3,879210
15	6,597892	5,964005	5,182192	4,751065	4,377804	3,905929
16	6,731306	6,061880	5,243696	4,796189	4,410912	3,926737
17	6,848457	6,146122	5,295068	4,833134	4,437481	3,942943
18	6,951326	6,218630	5,337978	4,863381	4,458804	3,955564
19	7,041655	6,281038	5,373820	4,888146	4,475916	3,965393
20	7,120972	6,334753	5,403757	4,908422	4,489648	3,973048
21	7,190621	6,380986	5,428763	4,925022	4,500669	3,979010
22	7,251779	6,420779	5,449649	4,938613	4,509513	3,983653
23	7,305481	6,455029	5,467095	4,949741	4,516611	3,987269
24	7,352637	6,484509	5,481667	4,958851	4,522307	3,990085
25	7,394045	6,509882	5,493839	4,966310	4,526878	3,992278
26	7,430404	6,531721	5,504005	4,972417	4,530547	3,993986
27	7,462331	6,550518	5,512497	4,977417	4,533491	3,995316
28	7,490367	6,566696	5,519590	4,981511	4,535853	3,996352
29	7,514984	6,580621	5,525515	4,984862	4,537749	3,997159
30	7,536601	6,592607	5,530463	4,987606	4,539271	3,997788
35	7,611022	6,631683	5,545354	4,995441	4,543396	3,999366
40	7,649873	6,650142	5,551408	4,998323	4,544769	3,999818
45	7,670155	6,658861	5,553869	4,999383	4,545226	3,999948
50	7,680743	6,662979	5,554870	4,999773	4,545379	3,999985

Таблица 10

Коэффициенты рассрочки.
Ежемесячные платежи пренумерандо, полное погашение стоимости

%	Продолжительность лизинга в месяцах						
	18	**24**	**36**	**48**	**60**	**72**	**84**
10	0,05956	0,04576	0,03200	0,02515	0,02107	0,01837	0,01646
11	0,05997	0,04618	0,03244	0,02561	0,02154	0,01886	0,01697
12	0,06038	0,04661	0,03289	0,02607	0,02202	0,01936	0,01748
13	0,06079	0,04703	0,03333	0,02654	0,02251	0,01986	0,01800
14	0,06120	0,04746	0,03378	0,02701	0,02300	0,02037	0,01852
15	0,06161	0,04789	0,03424	0,02749	0,02350	0,02088	0,01906
16	0,06203	0,04832	0,03469	0,02797	0,02400	0,02141	0,01960
17	0,06245	0,04875	0,03515	0,02845	0,02451	0,02194	0,02015
18	0,06286	0,04919	0,03562	0,02894	0,02502	0,02247	0,02071
19	0,06328	0,04962	0,03608	0,02943	0,02554	0,02301	0,02127
20	0,06370	0,05006	0,03655	0,02993	0,02606	0,02356	0,02184
21	0,06412	0,05050	0,03703	0,03043	0,02659	0,02411	0,02242
22	0,06455	0,05094	0,03750	0,03094	0,02712	0,02467	0,02300
23	0,06497	0,05139	0,03798	0,03145	0,02766	0,02524	0,02359
24	0,06539	0,05183	0,03846	0,03196	0,02820	0,02581	0,02419
25	0,06582	0,05228	0,03895	0,03248	0,02875	0,02639	0,02480
26	0,06625	0,05273	0,03944	0,03300	0,02931	0,02697	0,02540
27	0,06668	0,05318	0,03993	0,03353	0,02986	0,02756	0,02602
28	0,06711	0,05364	0,04042	0,03406	0,03043	0,02815	0,02664
29	0,06754	0,05409	0,04092	0,03459	0,03099	0,02875	0,02726
30	0,06797	0,05455	0,04142	0,03513	0,03156	0,02935	0,02790
40	0,07236	0,05921	0,04656	0,04069	0,03750	0,03562	0,03445
50	0,07686	0,06404	0,05195	0,04656	0,04378	0,04223	0,04134

Таблица 11

Коэффициенты рассрочки.
Ежемесячные платежи пренумерандо, остаточная стоимость 10%

%	Продолжительность лизинга в месяцах						
	18	24	36	48	60	72	84
10	0,05443	0,04201	0,02963	0,02346	0,01979	0,01736	0,01564
11	0,05488	0,04247	0,03011	0,02396	0,02030	0,01788	0,01618
12	0,05533	0,04294	0,03059	0,02446	0,02081	0,01841	0,01672
13	0,05578	0,04340	0,03107	0,02496	0,02133	0,01894	0,01727
14	0,05623	0,04387	0,03156	0,02546	0,02185	0,01948	0,01782
15	0,05669	0,04433	0,03205	0,02597	0,02238	0,02003	0,01839
16	0,05714	0,04480	0,03254	0,02649	0,02291	0,02058	0,01896
17	0,05760	0,04527	0,03304	0,02700	0,02345	0,02114	0,01953
18	0,05805	0,04575	0,03353	0,02752	0,02399	0,02170	0,02011
19	0,05851	0,04622	0,03403	0,02805	0,02454	0,02227	0,02070
20	0,05897	0,04669	0,03454	0,02858	0,02509	0,02284	0,02130
21	0,05943	0,04717	0,03504	0,02911	0,02565	0,02342	0,02190
22	0,05989	0,04765	0,03555	0,02965	0,02621	0,02401	0,02250
23	0,06035	0,04813	0,03606	0,03018	0,02677	0,02460	0,02312
24	0,06082	0,04861	0,03658	0,03073	0,02734	0,02519	0,02373
25	0,06128	0,04909	0,03709	0,03127	0,02792	0,02579	0,02436
26	0,06174	0,04958	0,03761	0,03182	0,02850	0,02639	0,02498
27	0,06221	0,05007	0,03813	0,03238	0,02908	0,02700	0,02562
28	0,06268	0,05055	0,03866	0,03293	0,02966	0,02762	0,02626
29	0,06314	0,05104	0,03918	0,03349	0,03025	0,02823	0,02690
30	0,06361	0,05153	0,03971	0,03405	0,03085	0,02885	0,02755
40	0,06835	0,05652	0,04513	0,03985	0,03698	0,03528	0,03423
50	0,07318	0,06164	0,05075	0,04591	0,04340	0,04201	0,04121

Таблица смертности и стандартных коммутационных функций (мужчины, 9%)

x	l_x	q_x	d_x	D_x	N_x	C_x	M_x
18	100000	0,00149	149	21199	244593	28,979	1003,6
19	99851	0,00173	173	19420	223393	30,823	974,7
20	99678	0,00196	195	17786	203973	31,982	943,8
21	99483	0,00216	215	16285	186188	32,272	911,9
22	99268	0,00234	232	14908	169903	32,005	879,6
23	99036	0,00249	247	13645	154994	31,171	847,6
24	98789	0,00263	260	12487	141349	30,130	816,4
25	98529	0,00277	273	11426	128862	29,037	786,3
26	98256	0,00293	288	10454	117435	28,100	757,2
27	97968	0,00312	306	9562,5	106982	27,372	729,1
28	97663	0,00333	325	8745,6	97419,2	26,718	701,8
29	97338	0,00356	347	7996,7	88673,6	26,118	675,1
30	96991	0,00381	370	7310,3	80676,9	25,553	648,9
31	96622	0,00405	391	6681,2	73366,6	24,825	623,4
32	96230	0,00425	409	6104,7	66685,4	23,803	598,6
33	95821	0,00445	426	5576,8	60580,7	22,768	574,8
34	95395	0,00465	444	5093,6	55003,9	21,730	552,0
35	94951	0,00487	462	4651,3	49910,3	20,781	530,3
36	94489	0,00514	486	4246,5	45259,0	20,025	509,5
37	94003	0,00550	517	3875,8	41012,6	19,557	489,4
38	93486	0,00595	556	3536,2	37136,7	19,303	469,9
39	92930	0,00649	603	3224,9	33600,5	19,202	450,6
40	92327	0,00708	654	2939,5	30375,6	19,093	431,4
41	91673	0,00770	706	2677,7	27436,1	18,916	412,3
42	90967	0,00831	756	2437,7	24758,5	18,584	393,4
43	90211	0,00888	801	2217,8	22320,8	18,068	374,8
44	89410	0,00943	843	2016,6	20103,0	17,446	356,7
45	88567	0,00997	883	1832,7	18086,4	16,763	339,3
46	87684	0,01057	927	1664,6	16253,7	16,142	322,5
47	86757	0,01126	977	1511,0	14589,2	15,609	306,4
48	85780	0,01208	1036	1370,6	13078,2	15,190	290,8
49	84744	0,01303	1104	1242,3	11707,6	14,850	275,6
50	83640	0,01409	1178	1124,8	10465,3	14,540	260,7
51	82461	0,01522	1255	1017,4	9340,48	14,207	246,2
52	81206	0,01637	1329	919,20	8323,06	13,805	232,0
53	79877	0,01754	1401	829,50	7403,85	13,348	218,2
54	78476	0,01872	1469	747,66	6574,35	12,841	204,8
55	77007	0,01997	1538	673,09	5826,69	12,332	192,0
56	75469	0,02136	1612	605,18	5153,60	11,859	179,7
57	73857	0,02293	1694	543,35	4548,42	11,430	167,8
58	72164	0,02470	1782	487,06	4005,07	11,037	156,4
59	70381	0,02665	1876	435,81	3518,01	10,655	145,3
60	68505	0,02871	1967	389,17	3082,20	10,250	134,7
61	66539	0,03080	2049	346,78	2693,04	9,799	124,4
62	64489	0,03296	2126	308,35	2346,25	9,324	114,6

x	l_x	q_x	d_x	D_x	N_x	C_x	M_x
63	62364	0,03523	2197	273,57	2037,90	8,842	105,3
64	60167	0,03765	2265	242,14	1764,34	8,364	96,5
65	57901	0,04027	2332	213,78	1522,20	7,898	88,1
66	55570	0,04310	2395	188,23	1308,42	7,443	80,2
67	53175	0,04616	2455	165,25	1120,19	6,998	72,8
68	50720	0,04947	2509	144,60	954,947	6,563	65,8
69	48211	0,05304	2557	126,10	810,344	6,136	59,2
70	45654	0,05691	2598	109,55	684,243	5,720	53,1
71	43056	0,06108	2630	94,787	574,691	5,312	47,3
72	40426	0,06558	2651	81,649	479,904	4,912	42,0
73	37775	0,07044	2661	69,995	398,255	4,523	37,1
74	35114	0,07568	2657	59,692	328,260	4,145	32,6
75	32456	0,08129	2638	50,619	268,568	3,775	28,4
76	29818	0,08738	2606	42,664	217,949	3,420	24,7
77	27213	0,09393	2556	35,721	175,284	3,078	21,2
78	24656	0,10098	2490	29,694	139,563	2,751	18,2
79	22167	0,10857	2407	24,491	109,869	2,439	15,4
80	19760	0,11672	2306	20,029	85,3780	2,145	13,0
81	17454	0,12548	2190	16,231	65,3486	1,868	10,8
82	15264	0,13489	2059	13,022	49,1178	1,612	9,0
83	13205	0,14497	1914	10,335	36,0957	1,375	7,4
84	11290	0,15577	1759	8,1074	25,7603	1,159	6,0
85	9531,7	0,16733	1594,9	6,2794	17,6529	0,964	4,8
86	7936,7	0,23931	1899,3	4,7969	11,3735	1,053	3,9
87	6037,4	0,34210	2065,4	3,3477	6,57654	1,051	2,8
88	3972,0	0,48910	1942,7	2,0206	3,22886	0,907	1,8
89	2029,3	0,69940	1419,3	0,9471	1,20827	0,608	0,8
90	610,01	1	610,01	0,2612	0,26119	0,240	0,2

Учебник

Евгений Михайлович **Четыркин**

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Гл. редактор *Ю.В. Луизо*
Зав. редакцией *Г.Г. Кобякова*
Редактор *М.Н. Глухова*
Художник *Н.Н. Сенько*
Компьютерная подготовка оригинал-макета *Ю.А. Воронкова*
Технический редактор *Л.А. Зотова*
Корректоры *Е.И. Борисова, Л.И. Трифонова*

ЛР № 064377 от 04.01.96 г.

Гигиеническое заключение № 77.99.1.953.П.232.12.98 от 10.12.98 г.

Подписано в печать 05.07.2000. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 25,0. Тираж 10 000 экз. (1-й завод 3000 экз.).
Заказ № 224. Изд. № 83.

Издательство "Дело"
117571, Москва, пр-т Вернадского, 82

Коммерческий отдел — тел. 433-2510, 433-2502
E-mail: delo@ane.ru
Internet: http://www.delo.ane.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в Московской типографии № 6
Министерства РФ по делам печати, телерадиовещания и средств
массовых коммуникаций, 109088, Москва, Южнопортовая ул., 24

ISBN 5-7749-0193-9

9 785774 901937 >