НАУКА И МЕТОД

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе я собрал различные этюды, более или менее непосредственно относящиеся к вопросам научной методологии. Научный метод заключается в наблюдении и в экспериментировании. Если бы ученый располагал бесконечным запасом времени, то оставалось бы только сказать ему: «Смотри и смотри хорошо!» Но так как время не позволяет обозреть все, а в особенности все обозреть хорошо, — с другой же стороны, лучше вовсе не смотреть, чем смотреть плохо, — то ученый вынужден делать выбор. Первый вопрос заключается, следовательно, в том, как он должен производить свой выбор. Этот вопрос равно возникает перед физиком, как и перед историком; с ним приходится считаться и математику, и принципы, которыми должны руководствоваться вы и другие ученые, не лишены аналогии. Ученый обыкновенно следует здесь инстинкту; но, вдумываясь в эти принципы, можно предвидеть, каково должно быть будущее математики.

Мы еще лучше отдадим себе в этом отчет, если будем наблюдать ученого в его творческой деятельности; прежде всего необходимо знать психологический механизм творчества и, в частности, математического творчества. Наблюдения над процессом работы математика особенно поучительны для психолога.

Во всех опытных науках необходимо считаться с ошибками, обусловливаемыми несовершенством наших чувств и наших инструментов. К счастью, можно допустить, что при некоторых условиях эти ошибки часто компенсируются, так что в средних результатах они вовсе исчезают; эта компенсация обусловливается случайностью. Но что такое случайность? Это понятие не только трудно установить точно, его вообще трудно определить; и при всем том то, что я сейчас сказал относительно ошибок наблюдения, показывает, что ученый не может обойтись без этого понятия. Нужно, следовательно, дать по возможности точное определение этого понятия, столь же необходимого, как и неуловимого.

Все это суть общие соображения, которые в целом применяются во всех науках; механизм математического творчества, например, не отличается существенно от механизма какого бы то ни было иного творчества. Я обращаюсь затем к вопросам, которые носят более частный характер и находят себе применение в некоторых специальных науках и прежде всего в чистой математике.

В главах, посвященных чистой математике, мне приходится говорить о предмете очень абстрактном. Мне приходится прежде всего говорить о пространстве Все знают, что пространство относительно, вернее, все это говорят; а между тем множество людей фактически в своем мышлении принимают его за нечто абсолютное. Достаточно немного поразмыслить, чтобы сообразить, к каким противоречиям эти люди должны приходить.

Вопросы преподавания важны прежде всего сами по себе, а затем и по другим причинам: размышлять о том, каким образом лучше всего внедрить новые понятия в девственный ум ребенка,— значит в то же время размышлять о том, каким образом эти понятия были приобретены нашими предками; значит, следовательно, размышлять об их истинном происхождении, а это, по существу, значит размышлять об их истинной природе. Почему дети обыкновенно ничего не понимают в тех определениях, которые удовлетворяют ученого? Почему им необходимо давать другие определения? Именно этот вопрос я ставлю себе в следующей главе; решение его могло бы, на мой взгляд, навести на весьма плодотворные размышления философов, которые занимаются логикой науки.

С другой стороны, многие геометры полагают, что математику можно свести к правилам формальной логики. В этом направлении были сделаны неимоверные усилия; чтобы достигнуть этой цели, не останавливались, например, даже перед тем, чтобы опрокинуть весь порядок исторического развития наших представлений, чтобы определить конечное через бесконечное. Я полагаю, что мне удалось показать всякому непредубежденному читателю, что это лишь обманчивая иллюзия. Я надеюсь, что читатель поймет всю важность вопроса и не поставит мне в вину той страстности, с которой написаны относящиеся к этому страницы.

Последние главы, относящиеся к астрономии и механике, легче по содержанию.

Механика переживает, по-видимому, момент полного переворота. Понятия, которые казались установленными наиболее прочно, были разбиты дерзкими новаторами. Конечно, было бы поспешно признать их уже правыми только потому, что они являются новаторами. Но интересно познакомить читателей с их учением, что я и пытался сделать. По возможности, я держался исторической последовательности: новые идеи показались бы слишком странными, если не видеть, откуда они зародились.

Астрономия развертывает перед нами гигантские картины и подымает грандиозные вопросы. Нечего и думать о том, чтобы подвергнуть их непосредственно экспериментальному изучению; наши лаборатории слишком малы для этого. Но аналогии с явлениями, доступными экспериментальному исследованию, могут тем не менее служить для астронома путеводной нитью. Так, например, Млечный путь представляет собой скопление солнц, движение которых представляется на первый взгляд совершенно капризным. Но нельзя ли сравнить это огромное скопление с молекулами газа, свойства которых развивает кинетическая теория газов? Таким образом, методы физиков могут косвенным путем прийти на помощь астроному.

Наконец, я хотел в немногих чертах набросать историю развития французской геодезии.

Я показал, ценою каких настойчивых усилий, ценою каких опасностей геодезисты снабдили нас теми немногими сведениями, которыми мы владеем относительно формы Земли. Есть ли это вопрос метода? Да, без сомнения, ибо эта история учит нас, какими предосторожностями должно быть обставлено серьезное научное предприятие, сколько необходимо времени и труда, чтобы установить лишний десятичный знак.

Книга I

УЧЕНЫЙ И НАУКА

Глава I

ВЫБОР ФАКТОВ

Граф Толстой где-то объясняет, почему «наука для науки» в его глазах представляется идеей, лишенной смысла. Мы не можем знать всех фактов, ибо число их в действительности безгранично. Необходимо, следовательно, делать между ними выбор. Можем ли мы руководствоваться при производстве этого выбора исключительно капризами нашего любопытства? Не лучше ли руководствоваться полезностью, нашими нуждами, практическими и в особенности моральными? Разве нет у нас лучшего дела, чем считать божьих коровок, живущих на нашей планете?

Ясно, что для него слово «польза» не имеет того значения, какое ему обычно приписывают деловые люди, а за ними и бо́льшая часть наших современников. Он мало озабочен применением науки к промышленности, чудесами электричества или автомобильного спорта, на которые он смотрит скорее как на препятствие к моральному прогрессу; полезным является исключительно то, что делает человека лучшим.

Что касается меня, то нужно ли мне говорить, что я не мог бы удовлетвориться ни тем, ни другим идеалом? Я не желал бы ни этой плутократии, жадной и ограниченной, ни этой демократии, добродетельной и посредственной, всегда готовой подставить левую щеку; демократии, среди которой жили бы мудрецы, лишенные любознательности, люди, которые, избегая всякого излишества, не умирали бы от болезни, но наверняка погибали бы от скуки. Впрочем, все это дело вкуса, и не об этом, собственно, я хотел говорить.

Вопрос, поставленный выше, тем не менее остается в силе, и на нем мы и должны сосредоточить свое внимание. Если наш выбор может определяться только капризом или непосредственной пользой, то не может существовать наука для науки, но не может, вследствие этого, существовать и наука вообще. Так ли это? Что выбор сделать необходимо, этого нельзя оспаривать; какова бы ни была наша деятельность, факты идут быстрее нас, и мы не можем за ними гнаться, в то время как ученый открывает один факт, в каждом кубическом миллиметре его тела их происходит миллиарды миллиардов. Желать, чтобы наука охватывала природу, значило бы заставить целое войти в состав своей части.

Но ученые все-таки полагают, что есть известная иерархия фактов и что между ними может быть сделан разумный выбор; и они правы, ибо иначе не было бы науки, а наука все-таки существует. Достаточно только открыть глаза, чтобы убедиться, что завоевания промышленности, обогатившие стольких практических людей, никогда не увидели бы света, если бы существовали только люди практики, если бы последних не опережали безумные бессеребреники, умирающие нищими, никогда не думающие о своей пользе и руководимые все же не своим капризом, а чем-то другим.

Эти именно безумцы, как выразился Мах, сэкономили своим последователям труд мысли. Те, которые работали бы исключительно в целях непосредственного приложения, не оставили бы ничего за собой; стоя перед новой нуждой, нужно было бы заново все начинать сначала. Но бо́льшая часть людей не любит думать, и, может быть, это и к лучшему, ибо ими руководит инстинкт, и руководит он ими обыкновенно лучше, чем интеллектуальные соображения, по крайней мере во всех тех случаях, когда люди имеют в виду одну и ту же непосредственную цель. Но инстинкт — это рутина, и если бы его не оплодотворяла мысль, то он и в человеке не прогрессировал бы больше, чем в пчеле или в муравье. Необходимо, следовательно, чтобы кто-нибудь думал за тех, кто не любит думать; а так как последних чрезвычайно много, то необходимо, чтобы каждая из наших мыслей приносила пользу столь часто, сколь это возможно, и именно поэтому всякий закон будет тем более ценным, чем более он будет общим.

Это нам показывает, как мы должны производить выбор. Наиболее интересными являются те факты, которые могут служить свою службу многократно, которые могут повторяться. Мы имели счастье родиться в таком мире, где такие факты существуют. Представьте себе, что существовало бы не 60 химических элементов, а 60 миллиардов и что между ними не было бы обыкновенных и редких, а что все были бы распространены равномерно. В таком случае всякий раз, как нам случилось бы подобрать на земле булыжник, была бы большая вероятность, что он состоит из новых, нам неизвестных, элементов. Все то, что мы знали бы о других камнях, могло бы быть совершенно неприменимо к нему. Перед каждым новым предметом мы стояли бы, как новорожденный младенец; как и последний, мы могли бы подчиняться только нашим капризам и нашим нуждам. В таком мире не было бы науки; быть может, мысль и сама жизнь в нем были бы невозможны, ибо эволюция не могла бы развивать инстинктов сохранения рода. Слава богу, дело обстоит не так! Как всякое счастье, к которому мы приспособились, мы не оцениваем и этого во всем его значении. Биолог был бы совершенно подазлен, если бы существовали только индивидуумы и не было бы видов, если бы наследственность не воспроизводила детей, похожих на их отцов.

Каковы же те факты, которые имеют шансы на возобновление? Таковыми являются, прежде всего, факты простые. Совершенно ясно, что в сложном факте тысячи обстоятельств соединены случаем, и лишь случай, еще гораздо менее вероятный, мог бы их объединить снова в той же комбинации. Но существуют ли простые факты? А если таковые существуют, то как их распознать? Кто удостоверит нам, что факт, который мы считаем простым, не окажется ужасно сложным? На это мы можем только ответить, что мы должны предпочитать те факты, которые нам *представляются* простыми, всем тем, в которых наш грубый глаз различает несходные составные части; и тогда одно из двух: либо эта простота действительная, либо же элементы так тесно между собою соединены, что мы не в состоянии их отличать один от другого. В первом случае мы имеем шансы встретить снова тот же самый простой факт либо непосредственно во всей его чистоте, либо как составную часть некоторого сложного комплекса. Во втором случае эта однородная смесь имеет больше шансов на новое воспроизведение, чем совершенно разнородный агрегат. Случай может образовать смесь, но он не может ее разделить, и чтобы из разнообразных элементов соорудить упорядоченное сооружение, в котором можно было бы нечто различать, нужно его строить сознательно. Поэтому есть очень мало шансов, чтобы агрегат, в котором мы нечто различаем, когда-либо повторился. Напротив, есть много шансов, чтобы смесь, представляющаяся на первый взгляд однородной, возобновлялась многократно. Факты, которые представляются простыми, даже в том случае, когда они не являются таковыми в действительности, все же легче возобновляются случаем.

Вот что оправдывает метод, инстинктивно усвоенный ученым, и, быть может, еще больше его оправдывает то обстоятельство, что факты, которые мы чаще всего встречаем, представляются нам простыми именно потому, что мы к ним привыкли.

Но где же они — эти простые факты? Ученые искали их в двух крайних областях: в области бесконечно большого и в области бесконечно малого. Их нашел астроном, ибо расстояния между светилами громадны, настолько громадны, что каждое из светил представляется только точкой; настолько громадны, что качественные различия сглаживаются, ибо точка проще, чем тело, которое имеет форму и качество. Напротив, физик искал элементарное явление, мысленно разделяя тело на бесконечно малые кубики, ибо условия задачи, которые испытывают медленные непрерывные изменения, когда мы переходим от одной точки тела к другой, могут рассматриваться как постоянные в пределах каждого из этих кубиков. Точно так же и биолог инстинктивно пришел к тому, что он смотрит на клетку как на нечто более интересное, чем целое животное, и этот взгляд в дальнейшем действительно подтвердился, ибо клетки, принадлежащие к самым различным организмам, оказываются гораздо более схожими для того, кто умеет это сходство усматривать, чем самые эти организмы. Социолог находится в более затруднительном положении: люди, которые для него служат элементами, слишком различны между собой, слишком изменчивы, слишком капризны, словом, слишком сложны; и история не повторяется. Как же здесь выбрать интересный факт, т. е. тот, который возобновляется? Метод — это, собственно, и есть выбор фактов; и прежде всего, следовательно, нужно озаботиться изобретением метода; и этих методов придумали много, ибо ни один из них не напрашивается сам собой. Каждая диссертация в социологии предлагает новый метод, который, впрочем, каждый новый доктор опасается применять, так что социология есть наука, наиболее богатая методами и наиболее бедная результатами.

Итак, начинать нужно с фактов, систематически повторяющихся; но коль скоро правило установлено и установлено настолько прочно, что никакого сомнения не вызывает, то те факты, которые вполне с ним согласуются, не представляют уже для нас никакого интереса, так как они уже не учат ничему новому. Таким образом, интерес представляет лишь исключение. Мы вынуждены прекратить изучение сходства, чтобы сосредоточить свое внимание прежде всего на возможных здесь различиях, а из числа последних нужно выбрать прежде всего наиболее резкие, и притом не только потому, что они более всего бросаются в глаза, но и потому, что они более поучительны. Простой пример лучше пояснит мою мысль. Положим, что мы желаем определить кривую по нескольким наблюдаемым ее точкам. Практик, который был бы заинтересован только непосредственными приложениями, наблюдал бы исключительно такие точки, которые были бы ему нужны для той или иной специальной цели; но такого рода точки были бы плохо распределены на кривой; они были бы скоплены в одних областях, были бы разрежены в других, так что соединить их непрерывной линией было бы невозможно, нельзя было бы воспользоваться ими для каких-либо иных приложений. Совершенно иначе поступил бы ученый. Так как он желает изучить кривую саму по себе, то он правильно распределит точки, подлежащие наблюдению, и, как только он их будет знать, он соединит их непрерывной линией и тогда будет иметь в своем распоряжении кривую целиком. Но что же он для этого сделает? Если он первоначально определил крайнюю точку кривой, то он не будет оставаться все время вблизи этой точки, а, напротив, он перейдет прежде всего к другой крайней точке. После двух конечных точек наиболее интересной будет середина между ними и т. д.

Итак, если установлено какое-нибудь правило, то прежде всего мы должны исследовать те случаи, в которых это правило имеет больше всего шансов оказаться неверным. Этим, между прочим, объясняется интерес, который вызывают факты астрономические, а также факты, которые относятся к прошлому геологических эпох. Уходя далеко в пространстве и во времени, мы можем ожидать, что наши обычные правила там совершенно рушатся. И именно это великое разрушение часто может помочь нам лучше усмотреть и лучше понять те небольшие изменения, которые могут происходить вблизи нас, в том небольшом уголке Вселенной, в котором мы призваны жить и действовать. Мы познаем лучше этот уголок, если побываем в отдаленных странах, в которых нам, собственно, нечего делать.

Однако мы должны сосредоточить свое внимание главным образом не столько на сходствах и различиях, сколько на тех аналогиях, которые часто скрываются в кажущихся различиях. Отдельные правила кажутся вначале совершенно расходящимися, но, присматриваясь к ним поближе, мы обыкновенно убеждаемся, что они имеют сходство. Различные по материалу, они имеют сходство в форме и в порядке частей. Таким образом, когда мы взглянем на них как бы со стороны, мы увидим, как они разрастаются на наших глазах, стремясь охватить все. Это именно и составляет ценность многих фактов, которые, заполняя собой одни комплексы, оказываются в то же время верными изображениями других известных нам комплексов.

Я не могу останавливаться на этом более, но, я полагаю, из сказанного достаточно ясно, что ученый не случайно выбирает факты, которые он должен наблюдать. Он не считает божьих коровок, как говорил граф Толстой, ибо число этих насекомых, как бы они ни были интересны, подвержено чрезвычайно капризным колебаниям. Он старается сконцентрировать много опытов, много мыслей в небольшом объеме, и поэтому-то небольшая книга по физике содержит так много опытов, уже произведенных, и в тысячу раз больше других возможных опытов, результаты которых мы знаем наперед.

Но мы рассмотрели пока только одну сторону дела. Ученый изучает природу не потому, что это полезно; он исследует ее потому, что это доставляет ему наслаждение, а это дает ему наслаждение потому, что природа прекрасна. Если бы природа не была прекрасной, она не стоила бы того, чтобы быть познанной; жизнь не стоила бы того, чтобы быть прожитой. Я здесь говорю, конечно, не о той красоте, которая бросается в глаза, не о красоте качества и видимых свойств; и притом не потому, что я такой красоты не признаю, отнюдь нет, а потому, что она не имеет ничего общего с наукой. Я имею в виду ту более глубокую красоту, которая кроется в гармонии частей и которая постигается только чистым разумом. Это она создает почву, создает, так сказать, остов для игры видимых красот, ласкающих наши чувства, и без этой поддержки красота мимолетных впечатлений была бы весьма несовершенной, как все неотчетливое и преходящее. Напротив, красота интеллектуальная дает удовлетворение сама по себе, и, быть может, больше ради нее, чем ради будущего блага рода человеческого, ученый обрекает себя на долгие и тяжкие труды.

Так вот именно эта особая красота, чувство гармонии мира, руководит нами в выборе тех фактов, которые наиболее способны усиливать эту гармонию, подобно тому, как артист разыскивает в чертах своего героя наиболее важные, которые сообщают ему о его характере и жизни; и нечего опасаться, что это бессознательное, инстинктивно предвзятое отношение отвлечет ученого от поисков истины. Можно мечтать о мире, полном гармонии, но как далеко его все же оставит за собой действительный мир! Наиболее великие художники, которые когда-либо существовали,— греки — создавали свое небо, но как оно убого по сравнению с нашим действительным небом.

И это потому, что прекрасна простота, прекрасна грандиозность; потому, что мы предпочтительнее ищем простые и грандиозные факты, потому, что нам доставляет наслаждение то уноситься в гигантскую область движения светил, то проникать при помощи микроскопов в таинственную область неизмеримо малого, которое все же представляет собой нечто величественное, то углубляться в геологические эпохи, изыскивая следы прошлого, которое именно потому нас и привлекает, что оно очень отдалено.

Мы видим, таким образом, что поиски прекрасного приводят нас к тому же выбору, что и поиски полезного; и совершенно таким же образом экономия мысли и экономия труда, к которым, по мнению Маха, сводятся все стремления науки [1]), являются источниками как красоты, так и практической пользы. Мы больше всего удивляемся тем зданиям, в которых архитектор сумел соразмерить средства с целью, в которых колонны как бы без усилия свободно несут возложенную на них тяжесть, как грациозные кариатиды Эрехтейона [2]).

В чем же заключается причина этого совпадения? Обусловливается ли это просто тем, что именно те вещи, которые кажутся нам прекрасными, наиболее соответствуют нашему разуму и потому являются в то же самое время орудием, которым разум лучше всего владеет? Или может быть, это игра эволюции или естественного отбора? Разве народы, идеалы которых наиболее соответствовали их правильно понятым интересам, вытеснили другие народы и заняли их место? Как одни, так и другие преследовали свои идеалы, не отдавая себе отчета о последствиях; но в

---

[1]) В И. Ленин обстоятельнейшим образом анализирует попытки Маха и Авенариуса положить в основу теории познания «принцип экономии мышления» и определяет подобные потуги как стремление под новым соусом протащить субъективный идеализм В И Ленин подчеркивает « Принцип экономии мышления, если его действительно положить *«в основу* теории познания», не может вести *ни к чему* иному, кроме субъективного идеализма. «Экономнее» всего «мыслить», что существую только я и мои ощущения, — это неоспоримо, раз мы вносим в *гносеологию* столь нелепое понятие . Только при отрицании объективной реальности, т. е при отрицании *основ* марксизма, можно всерьез говорить об экономии мышления в теории познания!» (Ленин В И Материализм и эмпириокритицизм.— Полн. собр, соч , т. 18, с 175—176) — *Примеч ред*

[2]) Эрехтейон — древнегреческий храм в Афинах, архитектура которого отличается изяществом и тонкой красотой. — *Примеч. ред.*

то время как эти поиски приводили одних к гибели, они давали другим владычество. Можно думать и так: если греки восторжествовали над варварами и если Европа, наследница греческой мысли, властвует над миром, то это потому, что дикие любили яркие цвета и шумные звуки барабана, которые занимали только их чувства, между тем как греки любили красоту интеллектуальную, которая скрывается за красотой чувственной, которая именно и делает разум уверенным и твердым.

Несомненно, такого рода триумф вызвал бы ужас у Толстого, который ни за что не признал бы, что он может быть действительно полезным. Но это бескорыстное искание истины ради ее собственной красоты несет в себе здоровое семя и может сделать человека лучше. Я знаю, что здесь есть исключения, что мыслитель не всегда почерпнет в этих поисках чистоту души, которую он должен был бы найти, что есть ученые, имеющие весьма дурной характер.

Но следует ли из этого, что нужно отказаться от науки и изучать только мораль? И разве моралисты, когда они сходят со своей кафедры, остаются на недосягаемой высоте?

Глава II

БУДУЩЕЕ МАТЕМАТИКИ

Лучший метод для предвидения будущего развития математических наук заключается в изучении истории и нынешнего состояния этих наук.

Но разве такой прием исследования не является для нас, математиков, некоторым образом профессиональным? Ведь мы привыкли *экстраполировать*, т. е. выводить будущее из прошедшего и настоящего; а так как ценность этого приема нам хорошо известна, то мы и не рискуем впасть в заблуждение относительно надежности тех результатов, которые мы получим с его помощью.

В свое время не было недостатка в прорицателях несчастья. Они охотно повторяли, что все проблемы, допускающие решение, уже были разрешены и что следующим поколениям придется довольствоваться кое-какими не замеченными ранее мелочами. К счастью, пример прошлого нас успокаивает. Уже не раз математики полагали, что все проблемы ими разрешены или, по крайней мере, что ими установлен перечень задач, которые допускают решение. Но вслед, за тем смысл самого слова «решение» расширялся, проблемы, считавшиеся неразрешимыми, становились наиболее интересными; уму представлялись новые задачи, о которых раньше никто и не думал. Для греков хорошим решением было такое, которое выполняется только линейкой и циркулем; потом хорошим стали считать решение в том случае, если оно получается с помощью извлечения корней; наконец, ограничились требованием употреблять для решения исключительно алгебраические или логарифмические функции. Таким образом, предсказания пессимистов ни разу не сбылись, они вынуждены были делать уступку за уступкой, так что в настоящее время, я полагаю, их больше нет.

Но если их уже нет, то я не собираюсь с ними сражаться. Мы все уверены, что развитие математики будет продолжаться; весь вопрос в том, в каком именно направлении. Мне могут ответить: «во всех направлениях»,— и это будет отчасти справедливо; но если бы это было верно вполне, то это нас несколько устрашило бы. Быстро возрастая, наши богатства вскоре образовали бы нечто столь громоздкое, что мы оказались бы перед этой непостижимой грудой не в лучшем положении, чем были раньше перед неизвестной нам истиной.

Историку и даже физику приходится делать выбор между фактами; мозг ученого — этот маленький уголок вселенной — никогда не сумеет вместить в себя весь мир целиком; поэтому среди бесчисленных фактов, которыми нас засыпает природа, необходимо будут такие, которые мы оставим в стороне, и будут другие, которые мы сохраним. То же самое, a fortiori, имеет место и в математике: математик тоже не в состоянии воспринять все факты, которые в беспорядке представляются его уму, тем более, что здесь ведь он сам — я хочу сказать, его прихоть — создает эти факты. Ведь это он строит новую комбинацию из отдельных ее частей, сближая между собой их элементы; лишь в редких случаях природа приносит ему вполне готовые комбинации.

Бывают, конечно, и такие случаи, когда математик берется за ту или иную проблему, желая удовлетворить тем или иным требованиям физики; случается, что физик или инженер предлагают математику вычислить какое-нибудь число, которое им нужно знать для того или иного применения. Следует ли отсюда, что все мы, математики, должны ограничиться выжиданием таких требований и, вместо того чтобы свободно культивировать удовольствия, не иметь другой заботы, как применяться ко вкусам нашей клиентуры? Не должны ли математики, имея единственной целью приходить на помощь испытателям природы, только от последних ждать распоряжений? Можно ли оправдать такой взгляд? Конечно, нет! Если бы мы не культивировали точных наук ради них самих, то мы не создали бы математического орудия исследования, и в тот день, когда от физика пришел бы требовательный приказ, мы оказались бы безоружными.

Ведь физики приступают к изучению того или другого явления не потому, что какая-нибудь неотложная потребность материальной жизни сделала это изучение необходимым, и они правы. Если бы ученые XVIII столетия забросили электричество по той причине, что оно в их глазах было только курьезом, лишенным всякого практического интереса, то мы не имели бы в XX столетии ни телеграфа, ни электрохимии, ни электротехники. Будучи вынуждены сделать выбор, физики, таким образом, не руководствуются при этом единственно вопросом полезности. Как же именно поступают они, выбирая среди фактов природы? Нам нетрудно ответить на этот вопрос: их интересуют именно те факты, которые могут привести к открытию нового закона; другими словами, те факты, которые сходны с множеством других фактов, те, которые представляются нам не изолированными, а как бы тесно связанными в одно целое с другими фактами. Отдельный факт бросается в глаза всем — и невежде и ученому. Но только истинный физик способен подметить ту связь, которая объединяет вместе многие факты глубокой, но скрытой аналогией. Анекдот о яблоке Ньютона знаменателен, хотя он, вероятно, и не соответствует истине; будем поэтому говорить о нем как о действительном факте. Но ведь и до Ньютона, надо полагать, немало людей видели, как падают яблоки; а между тем никто не сумел сделать отсюда никакого вывода. Факты остались бы бесплодными, не будь умов, способных делать между ними выбор, отличать те из них, за которыми скрывается нечто, и распознавать это нечто, умов, которые под грубой оболочкой факта чувствуют, так сказать, его душу.

Буквально то же самое проделываем мы и в математике. Из различных элементов, которыми мы располагаем, мы можем создать миллионы разнообразных комбинаций; но какая-нибудь одна такая комбинация, сама по себе, абсолютно лишена значения; нам могло стоить большого труда создать ее, но это ничему не служит, разве что может быть предложено в качестве школьного упражнения. Другое будет дело, когда эта комбинация займет место в ряду аналогичных ей комбинаций, и когда мы подметим эту аналогию, перед нами будет уже не факт, а закон. И в этот день истинным творцом-изобретателем окажется не тот рядовой работник, который старательно построил некоторые из этих комбинаций, а тот, кто обнаружил между ними родственную связь Первый видел один лишь голый факт, и только второй познал душу факта. Часто для обнаружения этого родства бывает достаточно изобрести одно новое слово, и это слово становится творцом; история науки может доставить нам множество знакомых вам примеров.

Знаменитый венский философ Мах сказал, что роль науки состоит в создании экономии мысли [1]), подобно тому как машина создает экономию силы. И это весьма справедливо. Дикарь считает с помощью своих пальцев или собирая камешки. Обучая детей таблице умножения, мы избавляем их на будущее от бесчисленных манипуляций с камешками. Кто-то как-то узнал, с помощью ли камней или как-либо иначе, что 6 раз 7 составляет 42; ему пришла идея отметить этот результат, и вот благодаря этому мы не имеем больше надобности повторять вычисление сначала. Этот человек не потерял понапрасну своего времени даже в том случае, если он вычислял единственно ради собственного удовольствия; его

---

[1]) См. сноску на с. 379

манипуляция отняла у него не более двух минут, а между тем потребовалось бы целых два миллиарда минут, если бы миллиард людей должен был после него повторять ту же манипуляцию.

Итак, важность какого-нибудь факта измеряется его продуктивностью, т. е. тем количеством мысли, какое он позволяет нам сберечь.

В физике фактами большой продуктивности являются те, которые входят в очень общий закон, ибо благодаря этому они позволяют предвидеть весьма большое количество других фактов; то же мы видим и в математике. Я занялся сложным вычислением и, наконец, после большого труда пришел к некоторому результату; я не был бы вознагражден за свой труд, если бы благодаря полученному результату я не оказался в состоянии предвидеть результаты других подобных вычислений и уверенно направлять их, избегая тех блужданий ощупью, на которые я должен был обречь себя в первый раз. И наоборот, мое время не было бы потеряно, если бы эти самые блуждания привели меня к открытию глубокой аналогии изучаемой мною проблемы с гораздо более обширным классом других проблем; если бы благодаря этим блужданиям я узрел одновременно сходства и различия, словом, если бы они обнаружили передо мной возможность некоторого обобщения. Я приобрел бы тогда не новый факт, а новую силу. Простым примером, который раньше других приходит на ум, является алгебраическая формула, которая дает нам решение всех численных задач определенного типа, так что достаточно лишь заменить буквы числами. Благодаря такой формуле алгебраическое вычисление, однажды выполненное, избавляет нас от необходимости повторять без конца все новые и новые численные выкладки. Но это уже очень грубый пример; всем известно, что существуют такие аналогии, которые невозможно выразить какой-либо формулой, а между тем они-то и являются наиболее ценными.

Новый результат мы ценим в том случае, если, связывая воедино элементы давно известные, но до тех пор рассеянные и казавшиеся чуждыми друг другу, он внезапно вводит порядок там, где до тех пор царил, по-видимому, хаос. Такой результат позволяет нам видеть одновременно каждый из этих элементов и место, занимаемое им в общем комплексе. Этот новый факт имеет цену не только сам по себе, но он — и только он один — придает сверх того значение всем старым фактам, связанным им в одно целое. Наш ум так же немощен, как и наши чувства; он растерялся бы среди сложности мира, если бы эта сложность не имела своей гармонии: подобно близорукому человеку, он видел бы одни лишь детали и должен был бы забывать каждую из них, прежде чем перейти к изучению следующей, ибо он не был бы в состоянии охватить разом всю совокупность частностей. Только те факты достойны нашего внимания, которые вводят порядок в этот хаос и делают его, таким образом, доступным нашему восприятию.

Математики приписывают большое значение изяществу своих методов и результатов, и это не просто дилетантизм. Что, в самом деле, вызывает в нас чувство изящного в каком-нибудь решении или доказательстве? Гармония отдельных частей, их симметрия, их счастливое равновесие,— одним словом, все то, что вносит туда порядок, все то, что сообщает этим частям единство, то, что позволяет нам ясно их различать и понимать целое в одно время с деталями. Но ведь именно эти же свойства сообщают решению большую продуктивность; действительно, чем яснее мы будем видеть этот комплекс в его целом, чем лучше будем уметь обозревать его одним взглядом, тем лучше мы будем различать его аналогии с другими, смежными объектами, тем скорее мы сможем рассчитывать на открытие возможных обобщений. Впечатление изящного может быть вызвано неожиданностью сближения таких вещей, которые мы не привыкли сближать; и в этом случае изящность плодотворна, ибо благодаря ей обнажаются родственные отношения, которых мы не замечали до тех пор; она плодотворна и в том случае, если она обусловливается единственно контрастом между простотой средств и сложностью проблемы; она заставляет нас в этом случае задуматься о причине такого контраста и чаще всего позволяет нам увидеть, что причина не случайна, а таится в том или ином законе, которого мы не подозревали раньше. Одним словом, чувство изящного в математике есть чувство удовлетворения, не скажу, какое именно, но обязанное какому-то взаимному приспособлению между только что найденным решением и потребностями нашего ума; в силу такого именно приспособления найденное решение может служить орудием в наших руках[1]). Следовательно, такое эстетическое удовлетворение находится в связи с экономией мышления Подобно этому, например, кариатиды Эрехтейона[2]) кажутся нам изящными по той причине, что они ловко и, так сказать, весело поддерживают громадную тяжесть и вызывают в нас чувство экономии силы.

По той же причине, когда мы с помощью довольно длинных выкладок приходим к какому-нибудь поразительному по своей простоте результату, мы до тех пор не чувствуем себя удовлетворенными, пока не покажем, что мы могли бы предвидеть, если не весь результат в целом, то по крайней мере его наиболее характерные черты. Чем же это объясняется? Что мешает нам удовольствоваться вычислением, раз оно, по-видимому, дало нам все, что мы хотели знать? Объясняется это тем, что в новом аналогичном случае прежнее длинное вычисление не могло бы помочь нам; иначе обстоит дело с рассуждением, наполовину интуитивным, которое позволило бы нам предвидеть результат наперед. Несложность такого

---

[1]) Подробный анализ гносеологического значения принципов простоты и красоты, их эвристических возможностей и ограниченности их применения дан в работах советских исследователей: Крутов В Ф. К вопросу об обосновании принципа простоты//Философские исследования Уч зап Ленинградск. пед. ин-та — 1968 — Т. 365. — С. 304—317, Кузнецов Б Г. Об эстетических критериях в современном физическом мышлении// Художественное и научное творчество — Л, 1972 — С. 84—90; Мамчур Е А Ленинское понимание познания и проблема эвристической простоты//Вопросы философии — 1969 — № 10.— С. 16—27, Мамчур Е. А, Илларионов С В Регулятивные принципы построения теории//Синтез современного научного знания — М.: Наука, 1973. — С. 355—389, Панкевич Г. И. К вопросу о взаимном проникновении естественнонаучных и эстетических принципов в современном познании//Философские проблемы естествознания. — М, 1971 — С 147—157; Позднеева С П. К вопросу об эстетических критериях оценки научных теорий//Вопросы эстетики — Саратов, 1969.— Вып 3 — С. 75—87. Сухотин А К. Соотношение критериев простоты и истинности знания//Актуальные проблемы диалектической логики — Алма-Ата. Наука, 1971.— С 263—267 — *Примеч ред.*

[2]) См. сноску на с. 379.

рассуждения позволяет одним взглядом охватить все его части, благодаря чему непосредственно бросается в глаза то, что следует в нем изменить для приспособления его ко всем могущим представиться проблемам того же рода. Позволяя, кроме того, предвидеть, насколько просто будет решение этих проблем, такое рассуждение показывает по крайней мере, стоит ли браться за подробное вычисление.

Только что сказанного достаточно, чтобы показать, насколько было бы тщетно пытаться заменить свободную инициативу математика каким-нибудь механическим приемом.

Для получения действительно ценного результата недостаточно нагромоздить кучу выкладок или иметь машину для приведения всего в порядок; имеет значение не порядок вообще, а порядок неожиданный. Машина может сколько угодно кромсать сырой фактический материал, но то, что мы назвали душой факта, всегда будет ускользать от нее.

Начиная с середины истекшего столетия, математики все больше и больше стремятся к достижению абсолютной строгости, и в этом они вполне правы. Это стремление выступает все ярче и ярче. В математике строгость еще не составляет всего, но где ее нет, там нет ничего; нестрогое доказательство — это ничто! Думаю, что с этим никто спорить не станет. Но если толковать эту истину слишком буквально, то окажется, что, например, до 1820 г. не было вовсе математики — утверждение, несомненно, преувеличенное; математики того времени охотно подразумевали то, что мы излагаем в пространных рассуждениях. Это не значит, что они вовсе не замечали этого, но они проходили мимо слишком поспешно; а чтобы хорошо разглядеть проблему, надо было бы взять на себя труд хотя бы высказать ее.

Но есть ли необходимость каждый раз подробно останавливаться на этой точности? Те, которые первые выдвинули требование строгой точности на первый план, дали нам образцы рассуждений, которым мы можем стараться подражать; но если будущие доказательства нужно будет всегда строить по этим образцам, то математические трактаты станут чересчур уж длинными; если я боюсь слишком длинных рассуждений, то не из одного только страха перед переполнением библиотек, а главным образом потому, что наши доказательства, все более удлиняясь, потеряют ту внешнюю видимую гармонию, о полезной роли которой я только что говорил.

Надо иметь в виду экономию мысли; недостаточно только дать образцы для подражания. Надобно, чтобы после нас смогли обойтись без этих образцов, и вместо повторения однажды построенного рассуждения могли бы резюмировать его в нескольких строках. В этом отношении уже сделаны кое-какие успехи. Был, например, некоторый тип сходных между собой рассуждений; они встречались повсюду; они были абсолютно строги, но страдали растянутостью И вот в один прекрасный день придуман был новый термин «равномерная сходимость», и уже одно это выражение сделало все прежние рассуждения бесполезными; не было больше необходимости повторять их, так как они подразумевались под этим термином. Творцы таких решительных и быстрых приемов преодоления трудностей могут оказать нам двоякую услугу: во-первых, мы учимся поступать в случае надобности подобно им, а во-вторых,— и это наиболее важно — их пример и результаты позволяют нам, и очень часто, не проделывать того, что пришлось делать им, ничем, однако, не жертвуя по отношению к строгости.

Только что мы видели пример того значения, какое в математике имеют слова и выражения; я мог бы привести еще много других примеров. Трудно поверить, какую огромную экономию мысли — как выражается Мах — может осуществить одно хорошо подобранное слово. Я, кажется, уже высказал как-то ту мысль, что математика — это искусство давать одно и то же название различным вещам. Объяснимся подробнее. Надо, чтобы эти вещи, различные по своему содержанию, были сходны по форме, надо, чтобы они, так сказать, могли войти в одну и ту же форму для отливки. Когда названия хорошо подобраны, вдруг с удивлением замечаешь, что все доказательства, проведенные для одного какого-нибудь предмета, непосредственно могут быть приложены к множеству новых предметов, причем не приходится даже ничего в них изменять, даже отдельных слов, ибо названия остались те же.

Очень часто бывает достаточно одного удачно подобранного слова, чтобы устранить те исключения, которые содержались в правилах, выраженных на старом языке. С этой именно целью придуманы были отрицательные и мнимые количества, точки в бесконечности и т. д. А ведь исключения вредны, ибо они заменяют законы.

Итак, одним из характерных признаков, отличающих факты большой продуктивности, является их свойство допускать эти счастливые нововведения в языке. Сам по себе голый факт часто бывает лишен особенного значения; его можно не раз отмечать, не оказывая этим наукам сколько-нибудь значительной услуги; свое значение он приобретает лишь с того дня, когда более проницательный мыслитель подметит сходство, которое он извлекает на свет и символически обозначает тем или другим термином.

У физиков мы встречаемся с совершенно таким же приемом. Они, например, придумали слово э н е р г и я, и это слово оказалось удивительно плодотворным. Изгнав исключения, оно тоже создало закон; оно дало также одно название вещам, различным по содержанию, но сходным по форме.

Из слов, имевших наиболее счастливое влияние, я отмечу названия «группа» и «инвариант». Эти слова позволили нам проникнуть в сущность многих математических рассуждений. Они нам показали, как часто древние математики рассматривали группы, сами того не замечая, как они, считая себя отдаленными друг от друга целой пропастью, вдруг сходились вместе, не понимая, как это могло случиться. Теперь мы сказали бы, что они рассматривали так называемые «изоморфные группы». Мы теперь знаем, что в группе нас мало интересует содержание, материал, что одна только форма имеет значение и что когда одна группа хорошо изучена, тем самым становятся известными все группы, с нею изоморфные. Благодаря этим словам — группа, изоморфизм,— резюмирующим в нескольких слогах этот трудно уловимый закон и делающим его сразу для всех знакомым, переход от одной группы к другой, с нею изоморфной, оказывается непосредственным и совершается с большой экономией в работе мысли. С другой стороны, идея группы тесно примыкает к идее преобразования. Почему же приписывают такое громадное значение открытию нового преобразования? Да потому, что из одной какой-нибудь теоремы это преобразование позволяет вывести десятки других теорем; оно имеет такое же значение, как нуль, приставленный справа к целому числу.

Вот чем до сих пор обусловливалось направление, в котором развивалась математика; этим же оно, несомненно, будет определяться и в будущем. Но равным образом имеет значение и природа тех проблем, которые требуют своего разрешения. Мы не должны забывать, что должно быть нашей целью; мне она представляется двоякой Ведь наша наука одновременно граничит и с физикой и с философией; для этих двух наших соседок мы и работаем. Соответственно этому мы всегда видели и будем видеть, что математики движутся в двух прямо противоположных направлениях.

С одной стороны, математике приходится размышлять о себе самой, а это полезно, так как, размышляя о себе, она тем самым размышляет о человеческом уме, создавшем ее, тем более что среди всех своих творений он создал математику с наименьшими заимствованиями извне. Вот чем полезны некоторые математические исследования, каковы, например, исследования о постулатах, о воображаемых геометриях, о функциях со странным ходом. Чем более эти размышления уклоняются от наиболее общепринятых представлений, а следовательно, и от природы и прикладных вопросов, тем яснее они показывают нам, на что способен человеческий ум, когда он постепенно освобождается от тирании внешнего мира, тем лучше мы ум познаем в его внутренней сущности.

Но все же главные силы нашей армии приходится направлять в сторону противоположную, в сторону изучения природы.

Здесь мы встречаемся с физиком или инженером, которые говорят нам: «будьте любезны проинтегрировать такое-то дифференциальное уравнение; через неделю мне понадобится решение ввиду такого-то сооружения, которое должно быть закончено к такому-то сроку».— «Но это уравнение,— отвечаем мы,— не входит ни в один тип интегрируемых уравнений;

последних, как вам известно, весьма немного» — «Да, это мне известно, но какой тогда в вас толк?» В большинстве случаев бывает достаточно понять друг друга; в самом деле, инженер не имеет нужды в интеграле конечной формы; ему надо лишь знать общий ход интегральной функции или попросту ему нужно определенное числовое значение, которое без труда можно было бы найти, если бы интеграл уравнения был известен. Обыкновенно, хотя последний и неизвестен, но можно вычислить, и не зная его, требуемое числовое значение, если только точно известно, какое именно значение нужно инженеру и с какой степенью точности.

В былое время уравнение считалось решенным лишь в том случае, если решение выражалось с помощью конечного числа известных функций; но это едва ли возможно даже в одном случае из ста. Однако мы всегда можем или, вернее, должны стремиться узнать общий вид кривой, изображающей неизвестную функцию.

Затем остается найти количественное решение задачи; если неизвестное нельзя определить с помощью конечного вычисления, то его всегда можно представить при помощи бесконечного сходящегося ряда, который и позволит его вычислить. Но можно ли это считать настоящим решением? Рассказывают, что Ньютон сообщил Лейбницу приблизительно такую анаграмму: aaaaabbb eeeeii и т. д. Лейбниц, разумеется, ничего в ней не понял. Но нам теперь известен ключ, и мы знаем, что эта анаграмма в переводе на современный язык гласит: «я умею интегрировать все дифференциальные уравнения». Казалось бы, что либо Ньютону сильно повезло, либо он странным образом обманулся. Но в действительности он попросту хотел сказать, что он умеет образовывать (по способу неопределенных коэффициентов) степенной ряд, формально удовлетворяющий предложенному уравнению.

Но нас подобное решение не удовлетворило бы, и вот почему: во-первых, такой ряд сходится очень медленно; во-вторых, члены его следуют друг за другом без всякого закона. Напротив, ряд Θ, например, не оставляет желать ничего лучшего как потому, что он сходится очень быстро (это важно для практика, желающего получить нужное ему число как можно скорее), так и потому, что мы можем подметить с первого взгляда закон образования членов этого ряда (это служит для удовлетворения эстетических потребностей теоретика).

Но в таком случае нет более проблем решенных и проблем нерешенных; есть только проблемы более или менее решенные, смотря по быстроте сходимости ряда, являющегося их решением, или по большей или меньшей гармоничности закона, управляющего образованием членов этих рядов. Иногда случается, что одно несовершенное решение приводит нас к другому, более совершенному. Иногда же ряд сходится так медленно, что вычисление практически невыполнимо, и, таким образом, удается лишь доказать возможность проблемы. Но инженер считает такой ответ насмешкой над собой, и он прав, ибо действительно такой ответ ему нисколько не поможет окончить сооружение к назначенному сроку. Инженеру мало дела до того, окажет ли это решение услугу инженерам XXII столетия: но мы, математики, держимся другого мнения; часто мы бываем более счастливы, если нам удалось сберечь один день труда наших внуков, чем когда мы сберегаем один час для наших современников.

Иногда ощупью, так сказать эмпирически, мы приходим к достаточно быстро сходящейся формуле. «Чего же вам больше?» — говорит инженер, но мы хотели предвидеть эту сходимость Почему? Да потому, что если бы мы сумели предвидеть ее однажды, мы сумели бы сделать это и в другой раз. На этот раз мы удачно справились с вопросом; но это для нас не имеет большого значения, если мы не надеемся серьезно на повторение удачи и в другой раз.

По мере развития науки становится все более трудным охватить ее всю; тогда стараются разбить ее на части и довольствоваться одной такой частью, словом, специализироваться. Но если бы так продолжалось всегда, то это было бы значительным препятствием для прогресса науки. Как мы говорили уже, этот прогресс осуществляется именно благодаря неожиданным сближениям между различными частями науки. А между тем слишком отдаться специализации — значит закрыть себе дорогу к этим сближениям. Будем же надеяться, что конгрессы, подобные

Гейдельбергскому и Римскому, создавая между нами общение, откроют перед каждым из нас картину деятельности его соседей, заставят его сравнить их деятельность с его собственной, выйти несколько за пределы своей деревушки и окажутся, таким образом, лучшим средством против отмеченной мною опасности.

Но я слишком долго останавливаюсь на общих идеях; пора перейти к деталям.

Сделаем обзор различных дисциплин, совокупность которых образует математику. Посмотрим, что сделала каждая из них, каковы ее стремления и чего можно от нее ожидать. Если взгляды, изложенные выше, соответствуют действительности, то мы должны будем увидеть, что в прошлом главные успехи достигались в тех случаях, когда две такие дисциплины сближались к сознанию сходства их форм, невзирая на различие материала, когда они отливались одна по образу другой, благодаря чему каждая из них могла использовать успехи другой. Вместе с тем в сближениях подобного рода мы должны предвидеть и прогресс будущего.

Арифметика

Прогресс в области арифметики совершался медленнее, чем в области алгебры и анализа, и легко понять почему. Арифметисты лишены драгоценного руководителя, каким является чувство непрерывности; каждое целое число стоит отдельно от других целых чисел, оно, так сказать, обладает своей собственной индивидуальностью; каждое из них представляет своего рода исключение; вот почему в области чисел так редки общие теоремы, а те, которые существуют, оказываются сравнительно более глубоко скрытыми и дольше ускользают от внимания исследователей.

Но если арифметика отстала от алгебры и анализа, то лучшее, что она может сделать,— это постараться уподобиться этим наукам, чтобы воспользоваться их успехами. Итак, арифметист должен взять в руководители аналогии с алгеброй. Эти аналогии многочисленны, и если во многих случаях они еще не изучены настолько, чтобы их можно было использовать, то во всяком случае их существование предчувствовалось с давних пор; самый язык обеих наук показывает, что эти аналогии были подмечены. Так, говорят о трансцендентных числах и при этом отдают себе отчет в том, что будущая классификация этих чисел имеет своим прообразом классификацию трансцендентных функций, и в то же время пока еще не видно, как можно будет перейти от одной классификации к другой, но ведь, будь это вполне ясным, этот переход был бы уже выполнен, а не был бы делом будущего.

Как пример, мне прежде всего приходит на ум теория сравнения, в которой мы видим совершенный параллелизм с теорией алгебраических уравнений. Несомненно, что этот параллелизм будет еще пополнен, например, параллелизмом между теорией алгебраических кривых и теорией сравнений с двумя переменными. А когда проблемы относительно сравнений с многими переменными будут разрешены, это будет первым шагом на пути к решению многих вопросов неопределенного анализа.

Область арифметики, совершенно лишенную всякого единства, представляет собой теория простых (первоначальных) чисел. Здесь найдены только асимптотические законы, да других и нельзя ожидать; но эти законы оказываются изолированными; к ним можно прийти лишь по различным путям, между которыми, по-видимому, невозможно никакое сообщение. Мне кажется, что я предвижу, откуда придет желанное единство, но, конечно, не вполне ясно; несомненно, что все сведется к изучению семейства трансцендентных функций, которые дадут возможность путем изучения их особых точек и с помощью метода Дарбу[1]) вычислить асимптотически известные функции очень больших чисел.

Алгебра

Теория алгебраических уравнений еще долго будет привлекать к себе внимание математиков; к ней можной подойти со многих различных между собой сторон, самой важной является, несомненно, теория

---

[1]) Известный французский математик, современник Пуанкаре. — *Примеч. ред.*

групп. Но остается еще вопрос о численном определении корней и об исследовании числа действительных корней. Лагерр[1]) показал, что Штурм[2]) не сказал последнего слова по этому вопросу.

Лет сорок назад казалось, что изучение инвариантов алгебраических форм поглотит всю алгебру; теперь оно почти заброшено, хотя предмет далеко еще не исчерпан; надо только его расширить, не ограничиваясь, например, инвариантами, относящимися к линейным преобразованиям, но захватывая все те, которые относятся к какой-либо группе. Таким образом, прежде добытые теоремы наведут нас на мысль о других более общих, которые будут группироваться вокруг них, подобно тому, как кристалл растет в растворе.

Не следует думать, что алгебра закончена, раз она дала нам правила образования всех возможных комбинаций; остается еще разыскание интересных комбинаций, удовлетворяющих тому или другому условию. Таким путем может образоваться своего рода неопределенный анализ, в котором неизвестными будут не целые числа, а многочлены. Но здесь уже алгебра будет брать пример с арифметики, руководствуясь аналогией целого числа либо с целым многочленом с произвольными коэффициентами, либо с целым многочленом с целыми же коэффициентами.

Геометрия

По-видимому, геометрия не может содержать ничего такого, чего не было бы уже в алгебре или в анализе: ведь геометрические факты — это те же факты алгебры или анализа, но только выраженные на другом языке. Казалось бы, поэтому, что после того обзора, который мы сделали, не остается больше ничего сказать, специально относящегося к геометрии. Но думать так — значило бы проглядеть важность самого языка, когда он удачно создан, значило бы не понимать того, что прибавляет к вещам способ обо-

---

[1]) Французский математик, преподававший в Политехнической школе в то время, когда там учился Пуанкаре. — *Примеч. ред*

[2]) Французский математик, работавший в области математической физики, оптики и механики. — *Примеч. ред.*

значения этих вещей и, следовательно, способ их группирования.

И прежде всего геометрические рассуждения приводят нас к постановке новых проблем; конечно, это, если угодно, аналитические проблемы, но анализ никогда не привел бы нас к их постановке. Однако анализ извлекает для себя из этого выгоду, как и из того, что он вынужден разрешать проблемы для удовлетворения потребностей физики.

Большое преимущество геометрии состоит именно в том, что в ней чувства могут прийти на помощь рассудку и помогают отгадать нужный путь, так что многие предпочитают приводить проблемы анализа к их геометрической форме. К несчастью, наши чувства не могут вести нас особенно далеко, они покидают нас, лишь только мы обнаруживаем желание унестись за три классические измерения. Значит ли это, что, выйдя из той области, в которой они нас, по-видимому, хотят удержать, мы не вправе более рассчитывать на что-либо, кроме чистого анализа, и что всякая геометрия более чем трех измерений тщетна и бесцельна? Величайшие умы предшествующего нам поколения ответили бы: «да»; мы же теперь так освоились с этим понятием, что можем говорить о нем даже в университетском курсе, не вызывая особенного удивления.

Но к чему оно нам? Ответ очевиден: оно дает нам прежде всего весьма удобный способ выражения, язык, который в очень немногих словах выражает то, что при обыкновенном аналитическом языке потребовало бы пространных фраз. Мало того: этот язык побуждает нас называть одним и тем же именем сходные между собой вещи и закрепляет аналогии, делая невозможным забвение их. Он дает нам возможность ориентироваться в этом пространстве, слишком громадном для нас, которого мы не можем обнять иначе, как вызывая перед собой постоянно образ видимого пространства, хотя последнее есть лишь весьма несовершенное его изображение. И тут, как и в предыдущих примерах, аналогия с тем, что просто, помогает нам понять то, что сложно.

Эта геометрия пространств, имеющих более трех измерений, не является простой аналитической геометрией; она имеет характер не исключительно количественный, но также и качественный, и этим-то она особенно интересна. Есть дисциплина, которую называют «Analysis situs» и предметом изучения которой являются соотношения расположений различных элементов фигуры независимо от их величины. Эта геометрия — чисто качественная: ее теоремы остались бы справедливыми, если бы точные фигуры были заменены грубыми изображениями, созданными ребенком. Можно построить также Analysis situs более чем трех измерений. Важность Analysis situs огромна, и я не думаю, чтобы его значение могло быть преувеличено; это достаточно подтверждается той пользой, которую из него извлек Риман [1]), один из главных творцов этой дисциплины. Нужно дойти до ее полного построения в пространствах высшего порядка; тогда у нас будет в руках такое орудие, которое позволит действительно видеть в гиперпространстве и расширить область наших чувственных восприятий.

Быть может, проблемы Analysis situs не были бы даже поставлены, если бы пользовались только языком анализа; впрочем, нет, я ошибаюсь: они были бы, несомненно, поставлены, ибо их разрешение необходимо для множества вопросов анализа, но наверное изолированно, так что нельзя было бы вовсе усмотреть их общей связи. Особенно содействовало недавнему успеху геометрии введение понятия о преобразованиях и группах. Благодаря этому понятию геометрия перестала быть агрегатом теорем, более или менее интересных, но следующих одна за другой без всякого сходства между ними, она приобрела единство. А с другой стороны, история не должна забывать того, что именно по поводу геометрии начали систематически исследовать непрерывные преобразования, так что чистые геометры со своей стороны также содействовали развитию идеи группы, идеи, столь полезной в других отраслях математики.

Канторизм

Выше я говорил о представляющейся нам необходимости постоянно восходить к основным принципам

---

[1]) Б Риман (1826—1866) — выдающийся немецкий математик, выдвинувший ряд основных идей топологии. Имеет многочисленные труды по разнообразным разделам математики. — *Примеч. ред.*

нашей науки и о той пользе, которую отсюда может извлечь наука о человеческом духе. Эта потребность породила два стремления, занявшие весьма обширное место на самых последних страницах истории математики. Первое из них — канторизм, заслуги которого перед наукой известны. Одна из характерных черт канторизма состоит в том, что вместо того, чтобы подниматься к общему, строя все более и более сложные конструкции, и вводить определения через построения, он исходит из genus supremum [1]) и дает определения только per genus proximum et differentiam specificam [2]), как сказали бы схоластики. Этим объясняется тот ужас, который он некоторое время тому назад вызвал в иных умах, например у Эрмита, излюбленной идеей которого является сравнение математических наук с естественными. У большинства из нас эти предубеждения уже рассеялись, но случилось так, что натолкнулись на некоторые парадоксы, которые привели бы в восторг Зенона Элейского [3]) и мегарскую школу [4]). И тогда все пустились в поиски за противоядием. Я держусь того мнения — и не я один,— что важно вводить в рассмотрение исключительно такие вещи, которые можно вполне определить при помощи конечного количества слов. Но какое бы противоядие ни было признано действительным, мы можем предвкушать наслаждение врача, имеющего возможность наблюдать интересный патологический случай.

Поиски постулатов

С другой стороны, мы видим попытки перечислить те более или менее скрытые аксиомы и постулаты, которые служат основанием для различных математических теорий. Самые блестящие результаты полу-

---

[1]) Высший род (*лат.*). — *Примеч. ред.*

[2]) Через родовое сходство и видовое отличие (*лат.*), — *Примеч ред.*

[3]) Зенон из Элеи (ок. 490—430 гг. до н. э) — древнегреческий философ, известен своими знаменитыми парадоксами· «Ахиллес», «Стрела» и другие. — *Примеч. ред.*

[4]) Одна из школ древнегреческой философии, представителям которой приписывают рождение многих известных софизмов — *Примеч. ред.*

чил Гильберт. На первый взгляд эта область кажется довольно ограниченной; кажется, что когда перечень будет закончен — а это не замедлит произойти,— нечего будет больше делать. Но когда все будет перечислено, тогда найдется множество приемов для классификации всего материала; хороший библиотекарь всегда находит себе занятие, а каждая новая классификация будет поучительна для философа.

Этим я кончаю мой обзор, которого я не мог и рассчитывать сделать полным по множеству причин, и прежде всего потому, что я и без того уже слишком злоупотребил вашим вниманием. Думаю, что приведенных примеров будет достаточно, для того чтобы показать вам, в чем состоял механизм прогресса математических наук в прошлом и в каком направлении они должны будут двигаться в будущем.

Глава III

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ТВОРЧЕСТВО

Вопрос о процессе математического творчества должен возбуждать в психологе самый живой интерес. В этом акте человеческий ум, по-видимому, заимствует из внешнего мира меньше всего; как орудием, так и объектом воздействия здесь является только он сам, так по крайней мере кажется; поэтому, изучая процесс математической мысли, мы вправе рассчитывать на проникновение в самую сущность человеческого ума.

Это было понято давно; и вот несколько месяцев тому назад журнал «Математическое образование», редактируемый профессорами Лезаном и Фером, предпринял анкету по вопросу о привычках ума и приемах работы различных математиков. Но мое сообщение в главных чертах было уже готово, когда были опубликованы результаты этой анкеты, так что я совершенно не мог ими воспользоваться. Скажу только, что большинство свидетельств подтверждало мои заключения, я не говорю — все, так как нельзя рассчитывать на единогласие ответов, когда вопрос ставится на всеобщее голосование.

I

Начнем с одного факта, который должен нас изумлять или, вернее, должен был бы изумлять, если бы мы к нему не привыкли. Чем объяснить то обстоятельство, что некоторые люди не понимают математических рассуждений? Если эти рассуждения основаны на одних лишь правилах логики, правилах, признаваемых всеми нормальными умами, если их очевидность основывается на принципах, которые общи всем людям и которых никто в здравом уме не станет отрицать, то как возможно существование столь многих людей, совершенно к ним неспособных?

Что не всякий способен на творчество, в этом нет ничего удивительного. Что не всякий может запомнить доказательство, однажды им узнанное, с этим также можно примириться. Но что не всякий может понимать математическое рассуждение в тот момент, когда ему его излагают, вот что кажется в высшей степени поразительным, когда начинаешь в это вдумываться. А между тем тех, которые лишь с трудом могут следить за таким рассуждением, большинство; это неоспоримый факт, и опыт учителей средней школы наверное ему не противоречит.

Но мало того: как возможна ошибка в математическом рассуждении? Здравый ум не должен допускать логических ошибок, а между тем иные острые умы, безошибочные в тех кратких рассуждениях, которые приходится делать при обычных повседневных обстоятельствах, оказываются неспособными следить или повторить без ошибок математические доказательства, которые, хотя и более длинны, но, в сущности, представляют собой лишь нагромождение маленьких рассуждений, совершенно подобных тем, что даются им так легко. Нужно ли добавлять, что и хорошие математики далеко не непогрешимы?

Ответ представляется мне очевидным. Представив себе длинную цепь силлогизмов, в которой заключения предыдущих силлогизмов служат посылками для последующих; мы способны понять каждый силлогизм в отдельности, и при переходе от посылок к заключению мы не рискуем впасть в ошибку. Но между моментом, когда мы в первый раз встретили какое-нибудь предложение в виде заключения некоторого силлогизма, и тем моментом, когда мы вновь с ним встречаемся как посылкой другого силлогизма, иногда проходит много времени, в течение которого были развернуты многочисленные звенья цепи; и вот может случиться, что за это время мы либо вовсе забыли это предложение, либо, что еще хуже, забыли его смысл. Таким образом, возможно, что мы его заменим другим, несколько отличным от него предложением или, сохраняя его словесное выражение, припишем ему несколько иной смысл; в том и в другом случае мы рискуем ошибиться.

Часто математику приходится пользоваться много раз одним и тем же правилом: в первый раз он, конечно, доказывает себе его справедливость; пока это доказательство остается в его памяти вполне ясным и свежим, пока он совершенно точно представляет себе смысл и широту охвата этого правила, до тех пор нет никакого риска в его употреблении. Но когда в дальнейшем наш математик, полагаясь на свою память, продолжает применять правило уже совершенно механически, тогда какой-нибудь изъян в памяти может привести к ложному применению правила. Так, если взять простой, почти избитый пример, мы иногда делаем ошибки в счете по той причине, что забыли нашу таблицу умножения.

С этой точки зрения специальная способность в математике должна обусловливаться очень верной памятью или скорее необычайной напряженностью внимания. Это качество можно было бы сравнить со способностью игрока в вист запоминать вышедшие карты, или, чтобы взять более сильную степень, со способностью шахматиста обозревать и предвидеть очень большое число комбинаций и удерживать их в памяти. С этой точки зрения всякий хороший математик должен был бы быть в то же время хорошим шахматистом, и наоборот; равным образом, он должен быть силен в числовых выкладках. Конечно, иногда так и бывает; так, Гаусс одновременно был гениальным геометром и очень искусным и уверенным вычислителем.

Но бывают исключения; впрочем, я ошибаюсь, говоря «исключения», ибо тогда исключения окажутся многочисленнее случаев, подходящих под правило. Напротив, именно Гаусс и представляет собой исключение. Что же касается, например, меня лично, то я должен сознаться, что неспособен сделать без ошибки сложение. Равным образом, из меня вышел бы плохой шахматист; я, быть может, хорошо рассчитал бы, что, играя таким-то образом, я подвергаюсь такой-то опасности; я бы разобрал много других ходов, которые отверг бы по тем или другим причинам; но в конце концов я, наверное, сделал бы ход, уже рассмотренный, забыв тем временем о той опасности, которую я раньше предусмотрел

Одним словом, память у меня неплохая, но она была бы недостаточна для того, чтобы я мог стать хорошим игроком в шахматы.

Почему же она не изменяет мне в трудном математическом рассуждении, в котором растерялось бы большинство шахматистов? Очевидно, по той причине, что здесь моей памятью руководит общий ход рассуждения. Математическое доказательство представляет собой не просто какое-то нагромождение силлогизмов: это силлогизмы, *расположенные в известном порядке*, причем этот порядок расположения элементов оказывается гораздо более важным, чем сами элементы. Если я обладаю чувством, так сказать, интуицией этого порядка, так что могу обозреть одним взглядом все рассуждения в целом, то мне не приходится опасаться, что я забуду какой-нибудь один из элементов; каждый из них сам по себе займет назначенное ему место без всякого усилия памяти с моей стороны.

Далее, когда я повторяю усвоенное доказательство, мне часто кажется, что я мог бы и сам придумать его; быть может, часто это только иллюзия; но если даже у меня недостаточно сил, чтобы самостоятельно найти такое доказательство, то я по меньшей мере самостоятельно создаю его всякий раз, когда мне приходится его повторять.

Понятно, что это чувство, этот род математической интуиции, благодаря которой мы отгадываем скрытые гармонии и соотношения, не может быть принадлежностью всех людей Одни не обладают ни этим тонким, трудно оценимым чувством, ни силой памяти и внимания выше среднего уровня, и тогда они оказываются совершенно неспособными понять сколько-нибудь сложные математические теории.

Другие, обладая этим чувством лишь в слабой степени, одарены в то же время редкой памятью и большой способностью внимания. Они запомнят наизусть частности, одну за другой; они смогут понять математическую теорию и даже иной раз сумеют ее применить, но они не в состоянии творить. Наконец, третьи, обладая в более или менее высокой степени той специальной интуицией, о которой я только что говорил, не только смогут понять математику, не обладая особенной памятью, но они смогут оказаться творцами, и их поиски новых открытий будут более или менее успешны, смотря по степени развития у них этой интуиции.

В чем, в самом деле, состоит математическое творчество? Оно заключается не в создании новых комбинаций с помощью уже известных математических объектов. Это может сделать мало ли кто; но число комбинаций, которые можно найти этим путем, было бы бесконечно, и даже самое большое их число не представляло бы ровно никакого интереса. Творчество состоит как раз в том, чтобы не создавать бесполезных комбинаций, а строить такие, которые оказываются полезными; а их ничтожное меньшинство. Творить — это отличать, выбирать.

Как следует производить этот выбор, я объяснил в другом месте; в математике фактами, заслуживающими изучения, являются те, которые ввиду их сходства с другими фактами способны привести нас к открытию какого-нибудь математического закона, совершенно подобно тому, как экспериментальные факты приводят к открытию физического закона. Это именно те факты, которые обнаруживают родство между другими фактами, известными с давних пор, но ошибочно считавшимися чуждыми друг другу.

Среди комбинаций, на которые падает выбор, часто наиболее плодотворными оказываются те, элементы которых взяты из наиболее удаленных друг от друга областей. Я не хочу сказать, что для нового открытия достаточно сблизить возможно глубже различающиеся предметы; большинство комбинаций, построенных таким образом, оказались бы совершенно бесплодными; но некоторые, правда, очень немногие из них, бывают наиболее плодотворными.

Творить, изобретать, сказал я, значит выбирать; но это слово, пожалуй, не вполне подходит. Оно вызывает представление о покупателе, которому предлагают громадное число образчиков и который их пересматривает один за другим, имея в виду сделать свой выбор. Здесь число образчиков было бы так велико, что всей жизни не хватило бы для пересмотра всех их. Но в действительности это обстоит иначе. Бесплодные комбинации даже и не представляются уму изобретателя. В поле его сознания появляются лишь действительно полезные комбинации, да еще некоторые другие, которые он, правда, отбросит в сторону, но которые не лишены характера полезных комбинаций. Все происходит подобно тому, как если бы изобретатель был экзаменатором второй ступени, имеющим дело лишь с кандидатами, успешно прошедшими через первое испытание.

II

К тому, что мною сказано до сих пор, можно прийти посредством наблюдения или вывода при чтении произведений математиков, если только вдумчиво это делать.

Теперь пора вникнуть глубже и посмотреть, что происходит в самой душе математика. Лучшее, что я могу сделать с этой целью,— это, я полагаю, обратиться к моим личным воспоминаниям. Впрочем, я ограничусь тем, что расскажу вам, как я написал мой первый мемуар о фуксовых функциях. Прошу у вас извинения, ибо мне придется употребить несколько технических выражений; но они не должны вас пугать: вам, собственно, незачем их понимать. Например, я скажу так: я нашел доказательство такой-то теоремы при таких-то обстоятельствах; эта теорема будет носить варварское название, которое для большинства из вас не будет понятно, но это совершенно неважно; все, что интересно здесь для психолога,— это условия, обстоятельства.

В течение двух недель я старался доказать, что невозможна никакая функция, которая была бы подобна тем, которым я впоследствии дал название фуксовых функций; в то время я был еще весьма далек от того, что мне было нужно. Каждый день я усаживался за свой рабочий стол, проводил за ним один-два часа, перебирал большое число комбинаций и не приходил ни к какому результату. Но однажды вечером я выпил, вопреки своему обыкновению, чашку черного кофе; я не мог заснуть; идеи возникали во множестве; мне казалось, что я чувствую, как они сталкиваются между собой, пока, наконец, две из них, как бы сцепившись друг с другом, не образовали устойчивого соединения. Наутро я установил существование класса функций Фукса, а именно тех, которые получаются из гипергеометрического ряда; мне оставалось лишь сформулировать результаты, что отняло у меня всего несколько часов.

Я захотел затем представить эти функции в виде частного двух рядов; это была вполне сознательная и обдуманная мысль; мною руководила аналогия с эллиптическими функциями. Я задал себе вопрос; каковы должны быть свойства этих рядов, если они существуют, и я пришел без труда к образованию рядов, названных мною тета-фуксовыми функциями.

В эту пору я покинул Кан, где я тогда жил, чтобы принять участие в геологической экскурсии, организованной Горным институтом. Среди дорожных перипетий я забыл о своих математических работах; по прибытии в Кутанс мы взяли омнибус для прогулки; и вот в тот момент, когда я заносил ногу на ступеньку омнибуса, мне пришла в голову идея — хотя мои предыдущие мысли не имели с нею ничего общего, — что те преобразования, которыми я воспользовался для определения фуксовых функций, тождественны с преобразованиями неевклидовой геометрии. Я не проверил этой идеи; для этого я не имел времени, так как, едва усевшись в омнибус, я возобновил начатый разговор, тем не менее я сразу почувствовал полную уверенность в правильности идеи. Возвратясь в Кан, я сделал проверку; идея оказалась правильной.

Вслед за тем я занялся некоторыми вопросами арифметики, по-видимому, без особенного успеха; мне и в голову не приходило, что эти вопросы могут иметь хотя бы самое отдаленное отношение к моим предыдущим исследованиям. Раздосадованный неудачей, я решил провести несколько дней на берегу моря и стал думать о совершенно других вещах. Однажды, когда я бродил по прибрежным скалам, мне пришла в голову мысль, опять-таки с теми же характерными признаками: краткостью, внезапностью и непосредственной уверенностью в ее истинности, что арифметические преобразования неопределенных квадратичных трехчленов тождественны с преобразованиями неевклидовой геометрии.

Возвратившись в Кан, я стал размышлять над этой мыслью и сделал из нее некоторые выводы; пример квадратичных форм показал мне, что, помимо фуксовых групп, которые соответствуют гипергеометрическому ряду, существуют еще и другие; я увидел, что к ним можно приложить теорию тета-фуксовых рядов и что, следовательно, существуют еще иные фуксовы функции, помимо тех, которые происходят из гипергеометрического ряда и которые только и были известны мне до тех пор. Понятно, я задался целью образовать все такие функции; я повел правильную осаду и овладел одним за другим всеми наружными фортами; но один все еще держался; его падение должно было повлечь за собой сдачу крепости. Однако все мои усилия приводили лишь к большему убеждению в трудности задачи; но и это уже имело некоторое значение. Вся эта работа происходила вполне сознательно.

Тут мне пришлось уехать в Мон-Валерьен, где я должен был отбывать воинскую повинность; конечно, я был поглощен разнообразнейшими делами. Однажды я шел по бульвару, как вдруг мне представилось решение занимавшей меня задачи. Я не стал тогда же вникать в этот вопрос; это я сделал лишь по окончании военной службы. В руках у меня были все необходимые данные, оставалось только собрать их вместе и расположить в надлежащем порядке. Теперь я уже в один присест без всякого усилия написал свой окончательный мемуар.

III

Я ограничусь одним только этим примером; было бы бесполезно увеличивать их число, о многих других исследованиях мне пришлось бы повторять почти то же самое; наблюдения, сообщаемые другими математиками в ответе на анкету журнала «Математическое образование», тоже лишь подтвердили бы сказанное.

Прежде всего, поражает этот характер внезапного прозрения, с несомненностью свидетельствующий о долгой предварительной бессознательной работе; роль этой бессознательной работы в процессе математического творчества кажется мне неоспоримой; следы ее можно было бы найти и в других случаях, где она является менее очевидной. Часто, когда думаешь над каким-нибудь трудным вопросом, за первый присест не удается сделать ничего путного, затем, отдохнув более или менее продолжительное время, садишься снова за стол Проходит полчаса и все так же безрезультатно, как вдруг в голове появляется решающая мысль. Можно думать, что сознательная работа оказалась более плодотворной благодаря тому, что она была временно прервана, и отдых вернул уму его силу и свежесть. Но более вероятно, что это время отдыха было заполнено бессознательной работой, результат которой потом раскрывается перед математиком, подобно тому как это имело место в приведенных примерах; но только здесь это откровение приходит не во время прогулки или путешествия, а во время сознательной работы, хотя в действительности независимо от этой работы, разве только разматывающей уже готовые изгибы; эта работа играет как бы только роль стимула, который заставляет результаты, приобретенные за время покоя, но оставшиеся за порогом сознания, облечься в форму, доступную сознанию.

Можно сделать еще одно замечание по поводу условий такой бессознательной работы; а именно: эта работа возможна или по меньшей мере плодотворна лишь в том случае, если ей предшествует и за нею следует период сознательной работы. Никогда (и приведенные мною примеры достаточны для такого утверждения) эти внезапные внушения не происходят иначе, как после нескольких дней волевых усилий, казавшихся совершенно бесплодными, так что весь пройденный путь в конце концов представлялся ложным. Но эти усилия оказываются в действительности не такими уж бесплодными, как это казалось; это они пустили в ход машину бессознательного, которая без них не стала бы двигаться и ничего бы не произвела.

Необходимость второго периода сознательной работы представляется еще более понятной. Надо пустить в действие результаты этого вдохновения, сделать из них непосредственные выводы, привести их в порядок, провести доказательства; а прежде всего их надо проверить. Я говорил вам о чувстве абсолютной достоверности, сопровождающем вдохновение; в приведенных примерах это чувство меня не обмануло, и так оно бывает в большинстве случаев; но следует остерегаться мнения, что так бывает всегда; подчас это чувство нас обманывает, хотя оно и в этих случаях ощущается не менее живо; ошибка обнаруживается лишь тогда, когда хочешь провести строгое доказательство. Это, по моим наблюдениям, особенно часто имееет место с мыслями которые приходят в голову утром или вечером, когда я лежу в постели в полусонном состоянии.

IV

Таковы факты; они наводят нас на следующие размышления. Бессознательное или, как еще говорят, подсознательное «я» играет в математическом творчестве роль первостепенной важности; это явствует из всего предшествующего. Но это подсознательное «я» обычно считают совершенно автоматическим. Между тем мы видели, что математическая работа не есть простая механическая работа; ее нельзя доверить никакой машине, как бы совершенна она ни была. Дело не только в том, чтобы применять известные правила и сфабриковать как можно больше комбинаций по некоторым установленным законам. Полученные таким путем комбинации были бы невероятно многочисленны, но бесполезны и служили бы лишь помехой. Истинная творческая работа состоит в том, чтобы делать выбор среди этих комбинаций, исключая из рассмотрения те, которые являются бесполезными, или даже в том, чтобы освобождать себя от труда создавать эти бесполезные комбинации.

Но правила, руководящие этим выбором, — крайне тонкого, деликатного характера; почти невозможно точно выразить их словами; они явственно чувствуются, но плохо поддаются формулировке; возможно ли при таких обстоятельствах представить себе решето, способное просеивать их механически?

А в таком случае представляется правдоподобной такая гипотеза: «я» подсознательное нисколько не «ниже», чем «я» сознательное; оно отнюдь не имеет исключительно механического характера, но способно к распознаванию, обладает тактом, чувством изящного; оно умеет выбирать и отгадывать. Да что там! Оно лучше умеет отгадывать, чем «я» сознательное, ибо ему удается то, перед чем другое «я» оказывается бессильным. Одним словом, не является ли подсознательное «я» чем-то более высшим, чем «я» сознательное? Вам понятна вся важность этого вопроса. Бутру в лекции, прочитанной месяца два тому назад, показал, каким образом к тому же вопросу приводят совершенно другие обстоятельства и к каким следствиям привел бы положительный ответ на него.

Приводят ли нас к этому положительному ответу те факты, которые я только что изложил? Что касается меня, то я, признаюсь, отнесся бы к такому ответу далеко не сочувственно. Пересмотрим же вновь факты и поищем, не допускают ли они другого объяснения.

Несомненно, что те комбинации, которые представляются уму в момент какого-то внезапного просветления, наступающего после более или менее продолжительного периода бессознательной работы, в общем случае оказываются полезными и плодотворными, являясь, по-видимому, результатом первого отбора. Но следует ли отсюда, что подсознательное «я», отгадавшее с помощью тонкой интуиции, что эти комбинации могут быть полезны, только эти именно комбинации и построило, или, может быть, оно построило еще множество других, оказавшихся лишенными всякого интереса и потому не переступивших порога сознания?

С этой второй точки зрения все комбинации создаются благодаря автоматизму подсознательного «я», но только те из них, которые могут оказаться интересными, проникают в поле сознания. И это представляется еще более таинственным. В чем причина того, что среди тысяч продуктов нашей бессознательной деятельности одним удается переступить порог сознания, тогда как другие остаются за его порогом? Случайно ли даруется такая привилегия? Очевидно, нет; например, среди всех раздражений наших чувств только самые интенсивные остановят на себе наше внимание, если только оно не привлекается еще и другими причинами. Вообще, среди несознаваемых явлений привилегированными, т. е. способными стать сознаваемыми, оказываются те, которые прямо или косвенно оказывают наибольшее воздействие на нашу способность к восприятию.

Может показаться странным, что по поводу математических доказательств, имеющих, по-видимому, дело лишь с мышлением, я заговорил о восприятии. Но считать это странным значило бы забыть о чувстве прекрасного в математике, о гармонии чисел и форм, о геометрическом изяществе. Всем истинным математикам знакомо настоящее эстетическое чувство. Но ведь здесь мы уже в области чувственного восприятия.

Но какие же именно математические предметы мы называем прекрасными и изящными, какие именно предметы способны вызвать в нас своего рода эстетические эмоции? Это те, элементы которых расположены так гармонично, что ум без труда может охватить целое, проникая в то же время и в детали. Эта гармония одновременно удовлетворяет нашим эстетическим потребностям и служит подспорьем для ума, который она поддерживает и которым руководит. И в то же время, давая нам зрелище правильно расположенного целого, она вызывает в нас предчувствие математического закона. А ведь мы видели, что единственными математическими фактами, достойными нашего внимания и могущими оказаться полезными, являются как раз те, которые могут привести нас к открытию нового математического закона. Таким образом, мы приходим к следующему заключению: полезными комбинациями являются как раз наиболее изящные комбинации, т. е. те, которые в наибольшей степени способны удовлетворять тому специальному эстетическому чувству, которое знакомо всем математикам, но которое до того непонятно профанам, что упоминание о нем вызывает улыбку на их лицах.

Но что же тогда оказывается? Среди тех крайне многочисленных комбинаций, которые слепо создает мое подсознательное «я», почти все оказываются лишенными интереса и пользы, но именно поэтому они не оказывают никакого воздействия на эстетическое чувство, и сознание никогда о них не узнает; лишь некоторые среди них оказываются гармоничными, а следовательно, полезными и прекрасными в то же время; они сумеют разбудить ту специальную восприимчивость математика, о которой я только что говорил; последняя же, однажды возбужденная, со своей стороны, привлечет наше внимание к этим комбинациям и этим даст им возможность переступить через порог сознания.

Это не более как гипотеза; но вот наблюдение, решительно говорящее в ее пользу: когда ум математика испытывает внезапное просветление, то большей частью оно его не обманывает; но иногда все же случается, как я уже говорил, что пришедшие таким образом в голову идеи не выдерживают проверочных операций; и вот замечено, что почти всегда такая ложная идея, будь она верна, была бы приятна нашему естественному инстинкту математического изящества.

Таким образом, именно это специальное эстетическое чувство играет роль того тонкого критерия, о котором я говорил выше; благодаря этому становится понятным и то, почему человек, лишенный этого чувства, никогда не окажется истинным творцом.

V

Однако такое объяснение не устраняет всех затруднений; сознательное «я» в крайней степени ограничено; что же касается подсознательного «я», то нам неизвестны его границы, и потому нет ничего неестественного в предположении, что оно может за небольшой промежуток времени создать больше различных комбинаций, чем может охватить сознательное существо за целую жизнь. Но тем не менее эти пределы существуют; в таком случае правдоподобно ли, чтобы это подсознательное «я» могло образовать все возможные комбинации, число которых ужаснуло бы всякое воображение? И, однако, это представляется необходимым, ибо если оно создает лишь небольшую часть этих комбинаций, да и то делает на авось, то будет очень уж мало шансов на то, что среди них окажется удачная комбинация, т. е. та, которую надо найти.

Но, быть может, объяснения следует искать в том периоде сознательной работы, который всегда предшествует плодотворной бессознательной работе? Позвольте мне прибегнуть к грубому сравнению. Представим себе будущие элементы наших комбинаций чем-то вроде крючкообразных атомов Эпикура. Во время полного бездействия ума эти атомы неподвижны, как если бы они были повешены на стену; таким образом, этот полный покой ума может продолжаться неопределенно долго, и за все это время атомы не сблизятся ни разу и, следовательно, не осуществится ни одна комбинация.

В противоположность этому, в течение периода кажущегося покоя и бессознательной работы некоторые из атомов отделяются от стены и приходят в движение. Они бороздят по всем направлениям то пространство, в котором они заключены, подобно рою мошек или, если вы предпочитаете более ученое сравнение, подобно молекулам газа в кинетической теории газов. Тогда их взаимные столкновения могут привести к образованию новых комбинаций.

Какова же тогда роль предварительной сознательной работы? Очевидно, она заключается в том, чтобы привести некоторые атомы в движение, сорвав их со стены. Когда мы, пытаясь собрать воедино эти элементы, на тысячу ладов ворочаем их во все стороны, но не находим в конце концов удовлетворительного сопоставления, тогда мы бываем склонны отрицать всякое значение такой работы. А между тем атомы после того возбуждения, в которое их привела наша воля, отнюдь не возвращаются в свое первоначальное состояние покоя. Они продолжают, теперь уже свободно, свою пляску.

Но ведь наша воля взяла их не наугад, она при этом преследовала вполне определенную цель, так что пришли в движение не какие-нибудь атомы вообще, но такие, от которых можно с некоторым основанием ожидать искомого решения. Раз придя в движение, атомы начинают испытывать столкновения, которые приводят к образованию комбинаций этих атомов либо между собой, либо с другими, неподвижными атомами, с которыми они сталкиваются на своем пути. Я еще раз прошу у вас извинения; мое сравнение довольно грубо, но я не знаю иного способа сделать понятной мою мысль.

Как бы там ни было, но единственными комбинациями, образование которых представляется вероятным, являются те, хоть один элемент которых оказывается в числе атомов, свободно выбранных нашей волей. Но ведь очевидно, что именно среди них находится та комбинация, которую я только что назвал удачной. Быть может, здесь мы имеем средство смягчить то, что представлялось парадоксальным в первоначальной гипотезе.

Другое замечание. Никогда не случается, чтобы бессознательная работа доставила вполне готовым результат сколько-нибудь продолжительного вычисления, состоящего в одном только применении определенных правил. Казалось бы, что абсолютное «я» подсознания в особенности должно быть способно к такого рода работе, являющейся в некотором роде исключительно механической. Казалось бы, что, думая вечером о множителях какого-нибудь произведения, можно надеяться найти при пробуждении готовым самое произведение или, еще иначе, что алгебраическое вычисление, например проверка, может быть выполнено помимо сознания. Но в действительности ничего подобного не происходит, как то доказывают наблюдения.

От таких внушений, являющихся продуктами бессознательной работы, можно ожидать только исходных точек для подобных вычислений; самые же вычисления приходится выполнять во время второго периода сознательной работы, который следует за внушением и в течение которого проверяются результаты этого внушения и делаются из них выводы. Правила этих вычислений отличаются строгостью и сложностью; они требуют дисциплины, внимания, участия воли и, следовательно, сознания. В подсознательном же «я» господствует, в противоположность этому, то, что я назвал бы свободой, если бы только можно было дать это имя простому отсутствию дисциплины и беспорядку, обязанному своим происхождением случаю. Только этот самый беспорядок делает возможным возникновение неожиданных сближений.

Сделаю последнее замечание. Излагая выше некоторые мои личные наблюдения, я рассказал, между прочим, об одной бессонной ночи, когда я работал как будто помимо своей воли; подобные случаи бывают нередко, и для этого нет необходимости в том, чтобы нормальная мозговая деятельность была вызвана каким-нибудь физическим возбудителем, как то имело место в описанном мною случае. И вот в таких случаях кажется, будто сам присутствуешь при своей собственной бессознательной работе, которая, таким образом, оказалась отчасти доступной перевозбужденному сознанию, но нисколько вследствие этого не изменила своей природе. Тогда отдаешь себе в общих чертах отчет в том, что различает оба механизма или, если вам угодно, методы работы обоих «я». Психологические наблюдения, которые я, таким образом, имел возможность сделать, подтверждают те взгляды, которые я только что изложил.

А в подтверждении они конечно нуждаются, так как, вопреки всему, они остаются весьма гипотетическими; однако вопрос столь интересен, что я не раскаиваюсь в том, что изложил вам эти взгляды.

Глава IV

СЛУЧАЙНОСТЬ

I

«Как можно говорить о законах случайности? Разве случайность не представляет собой противоположности всякой закономерности?» Этим вопросом Бертран начинает свое «Исчисление вероятностей». Вероятность противоположна достоверности; вероятность — это то, чего мы не знаем и чего поэтому мы, казалось бы, не можем вычислять. В этом содержится противоречие, по крайней мере кажущееся, о котором уже много писали.

Прежде всего, что такое случайность? Древние различали явления, которые, как им казалось, повинуются гармоничным законам, установленным раз навсегда, и другие явления, которые приписывались случаю. К последним относили все то, чего нельзя было предвидеть, что было противно всякому закону. В каждой области точные законы регулировали отнюдь не все. Они намечали лишь границы, в пределах которых возможна игра случая. С этой точки зрения слово «случайность» приобрело объективный смысл. То, что было случайностью для одного, должно было быть случайностью и для других, даже для богов.

Однако в настоящее время мы уже не придерживаемся этого взгляда. Мы сделались абсолютными детерминистами, и даже те, которые склонны сохранить за человеком свободу воли, признают неограниченное господство детерминизма в области неорганического мира. Всякое явление, сколь бы оно ни было незначительно, имеет свою причину, и бесконечно мощный дух, беспредельно осведомленный в законах природы, мог бы его предвидеть с начала веков. С такого рода духом, если бы он существовал, нельзя было бы играть ни в какую азартную игру, не теряя всего состояния.

Для него слово «случайность» не имело бы смысла или, вернее, для него вовсе не существовало бы случайности. Лишь вследствие нашей слабости, вследствие нашего невежества случайность для нас существует. Можно даже оставить в стороне слабость человеческой природы; то, что представляется случайным для невежды, отнюдь не будет таковым для ученого. Случайность является, таким образом, как бы мерой нашего невежества. Случайными явлениями, согласно этому определению, будут те, законы которых нам неизвестны.

Но достаточно ли это определение? Когда первые халдейские пастухи следили за движением светил, они не знали еще законов астрономии; но приходило ли им в голову сказать, что движение светил предоставлено случаю?

Когда современный физик изучает новое явление, закон которого он открыл во вторник, то говорил ли он в понедельник, что это явление случайное? Но мало того. Не прибегают ли часто для предсказания явления к тому, что Бертран называет законом случайностей? Так, например, в кинетической теории газов мы приходим к известным законам Мариотта и Гей-Люссака именно благодаря той гипотезе, что скорости молекул газа меняются совершенно случайно. Наблюдаемые законы, скажут физики, были бы менее просты, если бы скорости регулировались простым элементарным законом, если бы молекулы были, как говорят, организованы, если бы они подчинялись какому-нибудь распорядку. Именно благодаря господству случая, т. е. именно благодаря нашему невежеству, мы имеем возможность делать заключения. И далее, если слово «случай» является простым синонимом нашего невежества, то что же это значит? Надо ли это толковать, примерно, следующим образом.

«Вы желаете, чтобы я предсказал вам явления, которые должны произойти? Если бы я имел несчастье знать законы этих явлений, то я мог бы этого достигнуть разве только путем непроходимого леса вычислений, и я должен был бы отказаться от ответа. Но так как, к счастью, я этих законов не знаю, то я вам сейчас отвечу, и, что наиболее странно, мой ответ будет верен».

Ясно, что случайность должна быть чем-то иным, не одним лишь названием, которое мы даем собственному невежеству. Ясно, что между явлениями, истинные причины которых нам неизвестны, мы должны были бы различать случайные явления, относительно которых вероятностные расчеты дадут нам некоторые предварительные сведения, и явления, которые не являются случайными и относительно которых мы не можем сказать ничего, пока не узнаем законов, которые ими управляют.

Что касается явлений случайных, то ясно, что сведения, которые нам дает о них теория вероятностей, не перестанут быть справедливыми в тот день, когда мы получим об этих явлениях больше сведений.

Директор общества страхования жизни не знает, когда умрет каждое из застрахованных у него лиц, но он вычисляет на основании теории вероятностей и по закону больших чисел и при этом не ошибается, поскольку он делит дивиденды между акционерами. Эти дивиденды не исчезли бы даже и в том случае, если бы какой-либо врач, столь же прозорливый, сколь и нескромный, после подписания полисов осведомлял бы директора о шансах на жизнь застрахованных лиц. Такой врач рассеял бы неосведомленность директора, но он не оказал бы влияния на дивиденды, которые, очевидно, вовсе не являются продуктами этой неосведомленности.

II

Чтобы найти лучшие определения случайности, нам необходимо исследовать некоторые из тех фактов, которые обыкновенно принято считать случайными и к которым, по-видимому, применяется теория вероятностей.

Первым примером, на котором мы остановимся, будет вопрос о неустойчивом равновесии. Если конус стоит на вершине, то мы знаем, что он опрокинется, но мы не знаем, в какую сторону. Нам представляется, что это полностью зависит от случая. Если бы конус был совершенно симметричен, если бы ось его была совершенно вертикальна, если бы он не был подвержен действию никакой силы, кроме тяжести, то он не упал бы вовсе. Но малейший изъян в симметрии заставил бы его слегка наклониться в ту или иную сторону; наклонившись же, хотя бы и весьма незначительно, он упадет в сторону наклона окончательно. Если бы даже симметрия была совершенна, то самого легкого дрожания, легчайшего дуновения ветерка было бы достаточно, чтобы наклонить его на несколько секунд дуги; и этим не только было бы решено его падение, было бы предопределено и направление этого падения, которое совпало бы с направлением первоначального наклона. Таким образом, совершенно ничтожная причина, ускользающая от нас по своей малости, вызывает значительное действие, которого мы не можем предусмотреть, и тогда мы говорим, что это явление есть результат случая.

Если бы мы знали точно законы природы и состояние Вселенной в начальный момент, то мы могли бы точно предсказать состояние Вселенной в любой последующий момент. Но даже и в том случае, если бы законы природы не представляли собой никакой тайны, мы могли бы знать первоначальное состояние только приближенно. Если это нам позволяет предвидеть дальнейшее ее состояние с тем же приближением, то это все, что нам нужно. Мы говорим, что явление было предвидено, что оно управляется законами. Но дело не всегда обстоит так; иногда небольшая разница в первоначальном состоянии вызывает большое различие в окончательном явлении. Небольшая погрешность в первом вызвала бы огромную ошибку в последнем. Предсказание становится невозможным, мы имеем перед собой явление случайное.

Второй пример, на котором мы остановимся, будет в большой мере аналогичен первому; мы заимствуем его из метеорологии. Почему метеорологам так трудно предсказать погоду сколько-нибудь достоверно? Почему выпадение дождя, наступление грозы всегда представляется нам делом случая, так что многие люди находят естественным молиться о ниспослании дождя или хорошей погоды, те самые люди, которые считали бы смешным испрашивать молитвой затмение. Мы видим, что большие пертурбации бывают обыкновенно в тех местах, где атмосфера находится в состоянии неустойчивого равновесия. Метеорологи часто хорошо видят, что равновесие неустойчиво, что образуется циклон, но где именно, они не в состоянии сказать. Лишняя десятая градуса в какой-либо точке — и циклон разражается здесь, а не там; он бушует над странами, которые были бы пощажены, если бы не эта десятая. Если бы мы могли знать эту десятую градуса, то мы могли бы это предсказать; но сеть наблюдений недостаточно густа и сами наблюдения недостаточно точны, а именно поэтому нам и кажется, что все обусловлено случаем. Здесь мы вновь находим то же несоответствие между мельчайшей, неощутимой наблюдателем причиной и значительным эффектом, вызывающим иногда страшные последствия.

Перейдем к другому примеру — к распределению малых планет по зодиаку. Их начальные долготы могли быть какие угодно, но их средние движения были различны, и они двигались уже так долго, что в настоящее время можно спокойно сказать, что они распределены вдоль зодиака совершенно случайно. Незначительные разности в их начальных расстояниях от Солнца и, что сводится к тому же, в их среднем движении в конце концов дали огромное различие в долготах, которые они теперь имеют. В самом деле, разница в одну тысячную долю секунды их суточного пути дает уже секунду за три года, градус — приблизительно за 10 000 лет и целую окружность — за три-четыре миллиона лет; но что это составляет по сравнению со временем, которое протекло с тем пор, как малые планеты отделились от туманности Лапласа! Перед нами опять ничтожная причина и большой эффект или, иначе, небольшие разности в причине и большие — в действии.

Игра в рулетку отличается от этого примера меньше, чем это может казаться на первый взгляд. Представим себе иглу, которая вращается на шпиле в центре циферблата, разделенного на сто секторов, попеременно красных и черных. Если игла останавливается на красном секторе, то игра выиграна, в противном случае — проиграна. Все, очевидно, зависит от толчка, который мы первоначально сообщаем игле. Игла сделает, скажем, 10 или 20 оборотов, но остановится она раньше или позже, смотря по тому, толкнул ли я ее сильнее или слабее. Однако достаточно, чтобы толчок изменился на тысячную или на две тысячных доли, и игла остановится на черном или соответственно на следующем красном секторе. Это — различия, которые не могут быть восприняты мускульным чувством, которые ускользают даже и от более тонких инструментов. Я лишен, следовательно, возможности предвидеть, что произойдет с иглой, которую я только что толкнул, а потому мое сердце бьется, и я с нетерпением ожидаю, что мне даст случай. Разность в причине совершенно неощутима, разность в результате имеет для меня чрезвычайно большую важность, потому что речь идет о всей моей ставке.

III

Позвольте мне теперь сделать отступление, несколько странное для моей темы. Один философ несколько лет тому назад сказал, что будущее определено прошлым, но что прошлое не определено будущим. Иными словами: зная настоящее, мы могли бы сделать заключение относительно будущего, но не относительно прошлого, ибо, сказал бы он, определенная причина всегда должна привести к одному результату, но один и тот же результат может быть вызван множеством различных причин. Ясно, что ни один ученый не подпишется под этим выводом. Законы природы связывают предшествующее с последующим таким образом, что предшествующее определено последующим так же, как последующее предшествующим. Но в чем же может заключаться источник ошибки, допущенной этим философом? Как известно, в силу принципа Карно физические явления необратимы, и мир стремится к полному однообразию. Когда два тела различной температуры находятся в соприкосновении, то более теплое уступает тепло холодному; мы можем, таким образом, предвидеть, что температура сравняется. Но когда температура уже сравняется, и нас спросят о том, что было раньше, что сможем мы ответить? Мы скажем, конечно, что одно тело было более нагрето, а другое менее, но мы не сумеем угадать, какое из них было прежде более теплым.

Между тем в действительности температуры никогда не сделаются совершенно равными. Разность температур стремится к нулю лишь асимптотически, и наступает момент, когда наши термометры уже неспособны ее распознать. Но если бы мы имели термометры в тысячу раз, в сто тысяч раз более чувствительные, то мы убедились бы, что есть еще небольшая разница и что одно из двух тел осталось более теплым, чем другое, и тогда мы могли бы утверждать, что именно это тело было некогда более теплым.

Мы видим здесь, в противоположность предыдущим примерам, большие различия в причинах и ничтожные — в результатах. Фламмарион придумал както наблюдателя, который удаляется от Земли со скоростью большей, чем скорость света. Для него время изменило бы знак, история потекла бы вспять, и Ватерлоо предшествовало бы Аустерлицу. Ясно, что для такого рода наблюдателя результаты и причины заменили бы друг друга, неустойчивое равновесие не было бы исключением, вследствие общей необратимости явлений ему казалось бы, что все исходит из какого-то хаоса в неустойчивом равновесии. Вся природа казалась бы ему предоставленной случаю.

IV

Мы обратимся теперь к другим примерам, в которых мы увидим совершенно другие свойства. Начнем с кинетической теории газов. Как должны мы представлять себе сосуд, наполненный газом? Бесчисленные молекулы, несущиеся с большими скоростями, бороздят сосуд во всех направлениях. В любой момент они ударяются о стенки и друг о друга, и эти столкновения происходят в самых разнообразных условиях. Здесь нас больше всего поражает не столько малость причин, сколько их сложность. И все-таки первоначальный элемент находится здесь и играет важную роль. Если бы молекула уклонилась налево или направо от своей траектории на очень малую величину, сравнимую с радиусом действия молекул газа, то она избежала бы толчка или таковой произошел бы при совершенно иных условиях, а это могло бы изменить на 90° или 180° направление скорости после толчка. И это еще не все. Как мы видели, достаточно отклонить молекулу до толчка на бесконечно малое расстояние, чтобы она после толчка отклонилась на конечное расстояние. Поэтому, если бы молекула подверглась двум последовательным столкновениям, то ей достаточно было бы сообщить до первого толчка бесконечно малое уклонение второго порядка, чтобы мы получили после первого столкновения бесконечно малое уклонение первого порядка, а после второго — конечное. Между тем молекула испытывает не только два столкновения, а весьма большое число их в секунду. Поэтому, если первый толчок умножает отклонение на весьма большое число A, то после n столкновений оно будет умножено на A^n. Оно сделается, следовательно, весьма большим не только потому, что A очень велико, т. е. потому, что малые причины производят большие следствия, но и потому, что показатель n велик, т. е. потому, что столкновения весьма многочисленны и причины очень сложны.

Обратимся теперь к другому примеру. Почему нам кажется во время ливня, что капли дождя распределены совершенно случайно? Это опять-таки происходит оттого, что причины, которыми обусловливается их образование, очень сложны. Ионы были распространены в атмосфере задолго до ливня, задолго до него они были подвержены постоянно меняющимся токам воздуха, они были увлечены в вихри весьма малых размеров, так что окончательное распределение их не находилось уже ни в каком соответствии с начальным. Затем температура внезапно понижается, туман сгущается, и каждый из этих ионов становится центром капли дождя. Чтобы установить, каково будет распределение капель и сколько их упадет на каждый камень мостовой, недостаточно было бы узнать начальное положение ионов.

Необходимо было бы учесть действие тысячи слабых и прихотливых воздушных течений.

Совершенно то же имеет место, когда пылинки взвешены в воде. Сосуд изборожден токами, законы которых нам неизвестны. Мы знаем только, что они очень сложны; по истечении некоторого времени пылинки будут распределены случайно, т. е. равномерно по всему сосуду: и это обусловливается именно сложностью потоков. Если бы они подчинялись простому закону, если бы, например, сосуд был круглый и токи описывали круги вокруг оси сосуда, то дело обстояло бы иначе, ибо каждая пылинка оставалась бы на той же высоте и на том же расстоянии от оси.

Мы пришли бы к тому же результату, если бы мы рассматривали смесь двух жидкостей или смесь двух мелко истолченных порошков. Чтобы привести еще грубый пример, скажем, что приблизительно то же самое происходит, когда мы тасуем игральные карты. При каждой перетасовке карты подвергаются перемещению (аналогичному тому, которое мы изучаем в теории перестановок). Какое же расположение карт получится в результате? Вероятность того, что получится некоторое определенное расположение (например, то, при котором на n-м месте оказывается карта, занимавшая до перетасовки $\varphi(n)$-е место), зависит от привычки игрока. Но если игрок тасует карты довольно долго, то образуется множество последовательных перестановок, и окончательный порядок уже зависит исключительно от случая. Я хочу сказать, что все возможные порядки будут равновероятны. Это обусловлено большим числом последовательных перестановок, т. е. сложностью всего явления.

Еще два слова о теории ошибок. Здесь причины особенно сложны и особенно многообразны. Сколько ловушек должен избежать наблюдатель, располагая даже лучшими инструментами. Он должен приучить себя замечать наиболее опасные и избегать их. Их называют систематическими ошибками. Но даже когда он их устранил, — допуская, что это ему удалось, — остается много мелких ошибок, которые, накапливаясь, могут оказаться опасными. Таким образом, возникают случайные ошибки; мы приписываем их случаю, потому что причины их слишком сложны и многочисленны; и здесь мы имеем только мелкие причины, каждая из которых производит незначительный эффект, но вследствие их взаимодействия и вследствие значительного их числа результаты становятся серьезными.

V

Можно стать еще на третью точку зрения, которая имеет меньшее значение, чем предыдущие, и на которой я буду менее настаивать. Когда хотят предсказать какой-либо факт и исследуют подготавливающие его обстоятельства, стараются получить сведения о предшествующем состоянии. Но этого ведь нельзя сделать по отношению ко всей Вселенной. Мы ограничиваемся поэтому местами, соседними с пунктом, где наше явление должно произойти, и тем, что, по-видимому, имеет связь с этим явлением. Выяснение обстоятельств не может быть полным, и нужно уметь сделать выбор. Но при таких условиях легко может случиться, что мы оставили в стороне такого рода факты, которые на первый взгляд казались совершенно чуждыми предусматриваемому явлению, которым нам даже в голову не приходило приписать какое-либо влияние на это явление и которые тем не менее, помимо нашего предвидения, играют здесь важную роль.

Человек проходит по улице, отправляясь по своим делам. Лицо, которое было бы в курсе этих дел, могло бы сказать, почему он прошел в таком-то часу по такой-то улице. На крыше работает кровельщик; подрядчик, который его нанял, вероятно, в известной мере мог бы предвидеть, что он там делает. Но прохожий, о котором была речь выше, не думает вовсе о кровельщике, как и кровельщик не думает о прохожем. Они принадлежат точно двум совершенно отдельным мирам; и тем не менее кровельщик уронил черепицу, которая убила прохожего. Мы, не колеблясь, скажем, что это дело случая.

Наши слабые силы не дают нам возможности охватить всей Вселенной, и это заставляет нас разрезать ее на слои. Мы стараемся выполнить это наименее искусственно, и тем не менее иногда оказывается, что два различных слоя влияют один на другой.

Результаты такого взаимодействия мы склонны приписывать случаю.

Есть ли это особая третья точка зрения на случайность? Не всегда; в большей части случаев мы здесь возвращаемся к первой или ко второй точке зрения. Если два мира, вообще совершенно отличные один от другого, оказывают иногда друг на друга влияние, то законы этого взаимодействия неизбежно должны быть весьма сложны; а с другой стороны, достаточно весьма слабого изменения в начальных условиях, и взаимодействие между этими двумя мирами не имело бы места. Как мало было бы нужно, чтобы прохожий прошел на одну секунду раньше или чтобы кровельщик уронил свою черепицу на одну секунду позже.

VI

Все изложенное до сих пор еще не объясняет, почему случай повинуется законам. Достаточно ли, чтобы причины были незначительны или чтобы они были сложны, для того чтобы мы могли уже предвидеть если не результаты каждого случая, то по крайней мере средние результаты. Чтобы ответить на этот вопрос, лучше всего обратиться к одному из приведенных уже выше примеров.

Я начну с рулетки. Я сказал, что точка, на которой остановится игла, будет зависеть от начального толчка, который ей дан. Какова вероятность того, что этот толчок будет иметь ту или другую величину? Я об этом ничего не знаю, но мне трудно не допустить, что эта вероятность выражается непрерывной аналитической функцией. Тогда вероятность того, что толчок содержится между a и $a+\varepsilon$, будет практически такая же, как и вероятность того, что он заключен между $a+\varepsilon$ и $a+2\varepsilon$, лишь бы ε было очень мало. Это общее свойство всех аналитических функций: небольшие изменения функций будут пропорциональны небольшим изменениям переменных.

Но, как мы предположили, весьма малого изменения силы толчка будет достаточно для изменения цвета сектора, перед которым в конце концов остановится игла. При интервале от a до $a+\varepsilon$ это будет красный сектор, при интервале от $a+\varepsilon$ до $a+2\varepsilon$

это будет черный сектор. Вероятность каждого красного сектора такая же, как и вероятность следующего за ним черного, и общая вероятность красного та же, что и общая вероятность черного.

Данной в этой задаче является аналитическая функция, которая выражает вероятность определенного начального толчка. Но теорема остается справедливой, каково бы ни было это данное, так как она зависит от свойства, общего всем аналитическим функциям. Отсюда следует, что в конечном результате данное нам вовсе не нужно.

То, что мы сказали о рулетке, применяется также к примеру малых планет. Мы можем смотреть на зодиак как на громадную рулетку, по которой Творец разбросал большое число шариков, сообщив им различные начальные скорости, меняющиеся согласно закону, вообще говоря, произвольному. В настоящее время они распределены равномерно, независимо от этого закона, по той же причине, что и в предыдущем случае. Мы видим также, почему явления повинуются законам случая, когда незначительные разницы в причинах способны вызвать большие различия в результатах. Вероятности этих малых разностей мы можем в этом случае считать пропорциональными самим разностям именно потому, что эти разности очень малы, и незначительные приращения непрерывной функции пропорциональны приращениям переменной.

Перейдем теперь к совершенно другому примеру, где главную роль играет сложность причин. Я предположу, что игрок тасует колоду карт. При каждой перетасовке он меняет порядок карт и может это сделать несколькими способами. Предположим для простоты, что мы имеем только три карты. Карты, которые вначале были расположены в порядке 1 2 3, могут после перетасовки оказаться в одном из шести расположений:

$$123,\quad 231,\quad 312,\quad 321,\quad 132,\quad 213.$$

Каждая из этих шести гипотез возможна и соответственно имеет вероятность

$$p_1,\quad p_2,\quad p_3,\quad p_4,\quad p_5,\quad p_6.$$

Сумма этих шести чисел равна единице, но это и все, что мы о них-знаем. Эти шесть вероятностей зависят от привычек игрока, которых мы не знаем.

При второй тасовке повторится то же и притом в тех же условиях. Я хочу этим сказать, что p_4 попрежнему выражает возможность того, что три карты, которые после n-го взмаха были расположены в порядке 123, расположатся после $n+1$-го взмаха в порядке 321; и это остается справедливым, каково бы ни было число n, ибо привычки игрока, его манера тасовать остаются теми же.

Но если число взмахов очень велико, то карты, которые до первого взмаха были расположены в порядке 123, могут после последнего взмаха иметь любое из расположений

$$123,\quad 231,\quad 312,\quad 321,\quad 132,\quad 213,$$

и вероятность этих шести гипотез в доступных нам пределах будет одна и та же, т. е. 1/6; и это будет справедливо, каковы бы ни были числа p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, которых мы не знаем. Большое число взмахов, т. е. сложность причин, вызвало это единообразие.

Это без изменения относится и к тому случаю, когда число карт больше трех, но даже и при трех картах доказательство было бы сложно. Я ограничусь тем, что проведу его для случая только двух карт. Тогда мы имеем лишь две гипотезы

$$12,\quad 21$$

с соответственными вероятностями p_1 и $p_2 = 1 - p_1$. Предположим теперь, что сделано n взмахов и что я выигрываю один франк, если карты оказываются в конце концов в первоначальном порядке, и столько же теряю, если они окажутся расположенными в обратном порядке. В таком случае мое математическое ожидание составит

$$(p_1 - p_2)^n.$$

Разность $p_1 - p_2$, конечно, меньше единицы. Вследствие этого, если n слишком велико, то мое ожидание сведется к нулю. Мы не имеем нужды знать p_1 и p_2, мы и без того знаем, что игра должна кончиться вничью.

Есть, однако, одно исключение — именно, когда одно из чисел p_1 и p_2 равно единице, а другое нулю.

В этом случае дело будет обстоять иначе, потому что начальные гипотезы слишком просты.

Изложенное относится не только к смеси карт, но и ко всяким смесям, в том числе и к смесям порошков и жидкостей; оно относится и к смесям газовых молекул в кинетической теории газов. Чтобы перейти от изложенных примеров к этой теории, представим себе газ, молекулы которого не могут взаимно сталкиваться, но могут отклоняться только при ударах о стенки сосуда, в который они заключены. Если сосуд имеет достаточно сложную форму, то распределение молекул и скоростей не замедлит стать однородным; этого, однако, не будет, если сосуд имеет форму шара или прямоугольного параллелепипеда. Почему же? Потому что в первом случае расстояние центра от каждой траектории остается постоянным. Во втором случае постоянной остается абсолютная величина угла, составляемого каждой траекторией с гранями параллелепипеда.

Мы видим также, что нужно понимать под очень простыми условиями. Это те условия, которые сохраняют нечто неизменное, которые допускают инварианты. Не слишком ли просты дифференциальные уравнения задачи, чтобы мы могли применить к ней законы случая? На первый взгляд вопрос кажется лишенным точного смысла, но теперь мы понимаем его содержание. Эти дифференциальные уравнения слишком просты, если они сохраняют что-то постоянным, если они допускают общий интеграл. Если что-то из начальных условий остается неизменным, то ясно, что конечное состояние не сможет быть независимым от начального.

Обратимся теперь к теории ошибок. Чем обусловливаются случайные ошибки, мы не знаем, и именно потому, что мы этого не знаем, мы уверены, что они будут подчиняться закону Гаусса. Таков парадокс. Он объясняется приблизительно так же, как и предыдущий случай. Нам нужно знать только одно: что ошибки очень многочисленны, что они очень малы, что каждая из них может столь же легко оказаться отрицательной, как и положительной. Какова кривая вероятностей каждой из них, мы этого не знаем; мы только предполагаем, что это симметричная кривая. Тогда мы можем доказать, что окончательная ошибка будет следовать закону Гаусса, и этот окончательный закон не зависит от частных законов, которые остались для нас неизвестными. Здесь опять-таки простота результата обусловливается сложностью данных.

VII

Однако мы еще не покончили с парадоксами. Выше я воспользовался выдумкой Фламмариона о человеке, который движется быстрее света и для которого время вследствие этого меняет знак. Я сказал, что ему все явления представлялись бы случайными. С известной точки зрения это справедливо; и все эти явления в некоторый определенный момент не были бы распределены согласно законам случая потому, что они в действительности были бы распределены так же, как и для нас, на глазах которых они разматываются гармонично, не возникая из какого-то первичного хаоса, а мы отнюдь не считаем их результатом случая. Что же это значит? Люмену, человеку Фламмариона, кажется, что незначительные причины приводят к большим эффектам. Почему же явления не протекают для него так же, как для нас, когда мы полагаем, что видим большие результаты, обусловливаемые малыми причинами. Нельзя ли и к его случаю применить то же самое рассуждение?

Возвратимся же к этому рассуждению. Почему в тех случаях, когда незначительные изменения причин вызывают большую разницу в результатах, последние распределяются по законам случайностей? Допустим, что разница в один миллиметр в причине вызывает разницу в один километр в результате. Если я выигрываю всякий раз, когда результат будет соответствовать километру, занумерованному четным числом, то вероятность выигрыша составит половину. Почему же так? Потому, что для этого необходимо, чтобы причина соответствовала миллиметру с четным номером. Между тем, по всей видимости, вероятность, что причина будет меняться в известных пределах, пропорциональна расстоянию между этими пределами, если только последнее очень мало. Не делая этого допущения, мне было бы совершенно невозможно выражать вероятность непрерывной функцией.

Что же произойдет теперь, когда большие причины будут вызывать мелкие результаты. В этом случае мы не приписывали бы явления случаю, между тем как Люмен считал бы их случайными. При разнице в километр в причине мы имели бы разницу в один миллиметр в результате. Будет ли и теперь пропорциональна n вероятность того, что причина заключается в интервале длиною n километров? Мы не имеем никаких оснований это предполагать, ибо расстояние в n километров весьма велико. Но вероятность того, что следствие останется в пределах n миллиметров, будет совершенно та же; она не будет потому пропорциональна числу n, несмотря на то, что расстояние в n миллиметров очень мало. В этом случае закон вероятности результатов невозможно, следовательно, представить непрерывной кривой. Заметим, однако, что в аналитическом смысле слова эта кривая может оставаться непрерывной, т. е. *бесконечно малым* изменениям абсциссы соответствовали бы *бесконечно малые* изменения ординаты. Но практически она не будет непрерывной, ибо *очень малым* изменениям абсциссы не будут соответствовать *очень малые* изменения ординаты. Я хочу сказать, что нарисовать такую кривую карандашом было бы невозможно.

Что же мы должны отсюда заключить? Люмен не имеет права утверждать, что вероятность причины (его причины, которая для нас является результатом) непременно должна выражаться непрерывной функцией. Но в таком случае почему же имеем на это право мы? Потому, что то состояние неустойчивого равновесия, которое мы выше назвали начальным, само представляет собой конечный момент долгой предшествующей истории. В продолжение этой истории сложные причины действовали и действовали долго: именно они содействовали тому, что образовалось смешение элементов, они стремились придать всему однородный характер, по крайней мере на небольшой части пространства; они закругляли углы, нивелировали горы, заполняли долины: как бы капризна и неправильна ни была первоначальная кривая, которая была им дана, они затратили столько труда на то, чтобы сделать ее правильной, что мы в конце концов получим непрерывную кривую. Вот почему мы можем совершенно спокойно допустить ее непрерывность.

Однако Люмен не имел бы права сделать такое заключение; ему сложные причины не представлялись бы факторами правильности и нивелирования; напротив, с его точки зрения они вели бы только к дифференциации и к неравенству; в его глазах из первоначального хаоса разрастался бы мир, все более и более разнородный; изменения, которые он наблюдал бы, были бы для него неожиданными; предусмотреть их он бы не мог; ему казалось бы, что они обусловлены бог весть каким капризом, но это был бы каприз, совершенно не похожий на нашу случайность; он был бы противоположен всякой закономерности, между тем как наши случайности имеют свои законы. Полное выяснение всего этого требовало бы еще более продолжительного изложения, которое, быть может, содействовало бы лучшему пониманию необратимости мироздания.

VIII

Мы старались определить, что такое случайность. Теперь будет уместно спросить: определив таким образом случайность, можем ли мы утверждать, что она имеет объективный характер?

Можно задать себе этот вопрос. Я говорил о причинах, весьма малых и весьма сложных, но не будет ли то, что кажется малым одному, весьма большим для другого, и не будет ли то, что представляется весьма сложным одному, казаться простым другому. Я уже отчасти ответил на этот вопрос, потому что я выше точно указал, в каком случае дифференциальные уравнения становятся слишком простыми, чтобы законы случая оставались применимыми. Но будет полезно вдуматься несколько глубже в этот вопрос, так как возможны и другие точки зрения.

Что означает слово «весьма малый»? Чтобы уяснить его себе, нужно обратиться к тому, что мы сказали выше. Разница весьма мала, интервал весьма мал, если в пределах этого интервала вероятность остается приблизительно постоянной. Но почему же эта вероятность может считаться постоянной в таком небольшом интервале? Именно потому, что мы допускаем, что закон вероятности выражается непрерывной кривой и притом непрерывной не только в аналитическом смысле этого слова, но и практически, как я это старался выяснить выше.

Что же дает нам право делать такое предположение? Как было сказано выше, это происходит оттого, что с начала веков имеются сложные причины, неизменно действующие в одном и том же смысле и постоянно направляющие мир к однородному состоянию, возврат от которого для него невозможен. Эти именно причины мало-помалу отбили выступы и заполнили впадины, и по этой-то причине наши кривые вероятности имеют лишь слабые колебания. Через миллиарды миллиардов веков мы сделаем еще шаг вперед по направлению к единообразию, и эти колебания сделаются еще в десять раз медленнее. Радиус средней кривизны нашей кривой сделается в десять раз больше. И тогда длина, которая сейчас не представляется для нас очень малой, так как на нашей кривой дуга такой длины не может считаться прямолинейной, будет в ту эпоху признана весьма малой, ибо кривизна уменьшится в десять раз и дуга такой длины может быть в доступных нам пределах уподоблена прямой.

Таким образом, понятие о весьма малом все-таки остается относительным; но относительным оно оказывается не по отношению к тому или иному лицу, а по отношению к настоящему состоянию мира. Оно изменит смысл, когда мир станет более единообразным, когда все еще больше смешается, но тогда, несомненно, люди уже не смогут больше жить и должны будут уступить место другим существам, более крупным или более мелким — могу ли я это предсказать? Таким образом, наш критерий остается справедливым для всех людей, и в этом смысле он должен быть признан объективным.

С другой стороны, что должно означать слово «очень сложный»? Я уже дал ответ на этот вопрос и повторил его в начале этой главы. Но возможны и другие толкования. Как мы сказали, сложные причины вызывают все более и более тесное смешение; но сколько же нужно времени, чтобы эта смесь нас удовлетворила? В какой момент мы признаем достаточным накопление сложных элементов? Когда мы признаем достаточной тасовку карт? Если мы смешиваем два порошка — белый и голубой, то наступает момент, когда окраска смеси представляется нам однородной. Это обусловливается, однако, несовершенством наших чувств. Смесь может оказаться уже однородной для дальнозоркого, который должен рассматривать ее издалека, но она не будет таковой для близорукого. Если она станет уже однородной для всякого глаза, то можно будет эту границу отодвинуть еще далее, если мы будем пользоваться оптическими инструментами. Нет, конечно, никаких шансов на то, чтобы какой-нибудь человек мог когда-либо различать все бесконечное многообразие, которое скрывается под видимой однородностью газа, если только верна кинетическая теория. И все же, если принять идеи Гуи о броуновском движении, то микроскоп, по-видимому, находится уже на той ступени, что может обнаружить нам такого рода вещи.

Этот критерий таким же образом является относительным, как и первый; и если он сохраняет характер объективности, то это происходит оттого, что люди одарены приблизительно одними и теми же чувствами, что силы наших инструментов ограничены и что мы пользуемся ими лишь в виде исключения.

IX

С тем же обстоятельством мы встречаемся в гуманитарных науках и, в частности, в истории. Историк должен делать выбор между событиями эпохи, которую он изучает. Он рассказывает только о тех, которые ему кажутся более важными. Он довольствуется поэтому тем, что изложит, скажем, наиболее значительные события XVI века и также наиболее важные факты, относящиеся к XVII веку. Если первых оказывается достаточно, чтобы объяснить вторые, то говорят, что последние согласуются с законами истории. Но если великое событие XVII столетия имеет своей причиной незначительный факт XVI столетия, о котором не сообщает ни один историк и который все оставили в пренебрежении, то говорят, что это событие обусловливается случаем, и слово это имеет, таким образом, то же значение, что в физических науках. Оно означает, что незначительные причины произвели большие действия.

Что может быть в большей мере явлением случайности, как не рождение великого человека! Только случай свел две клетки различных полов, которые содержали каждая со своей стороны те элементы, взаимодействие которых было необходимо для создания гения. Все согласятся, что эти элементы вообще должны быть редки, а такое совпадение должно было быть еще реже. Как мало было бы нужно, чтобы уклонить с пути сперматозоид, который его нес, достаточно было бы отклонить его на десятую долю миллиметра, и Наполеон не родился бы, и судьбы целого материка изменились бы. Никакой другой пример не может лучше выяснить истинных признаков случайности.

Еще несколько слов относительно парадоксов, к которым привело применение теории вероятностей в гуманитарных науках. Доказывали, что ни одна Палата не должна была бы включать ни одного оппозиционного депутата, или по крайней мере это должно было бы быть явлением настолько редким, что за это можно было бы спокойно биться об заклад, ставя при этом миллион против одного су. Кондорсе пытался выяснить, сколько должно быть присяжных, для того чтобы судебная ошибка была практически невозможна. Если мы, однако, вздумали бы пользоваться результатами этого вычисления, то нас, несомненно, ожидало бы такое же разочарование, как и в случае, если бы мы держали пари, основываясь на вычислениях, по которым оппозиция не должна была бы иметь ни одного представителя в Палате.

Законы случая не применяются к этим вопросам. Если суд не всегда руководствуется справедливыми доводами, то он, во всяком случае, пользуется методами Бридуа [1]) меньше, чем это можно думать; может быть, это дурно, ибо тогда система Кондорсе избавила бы нас от судебных ошибок.

Что же это значит? Мы пытались приписать случаю факты этого рода, потому что причины их весьма

---

[1]) Бридуа — комическая фигура судьи в романе Ф. Рабле «Гаргантюа и Пантагрюэль», выносившего приговоры с помощью игральных костей. — *Примеч. ред.*

темны. Но здесь нет настоящей случайности. Причины остаются нам, правда, неизвестными; верно и то, что они сложны; но они не в достаточной мере сложны, ибо они нечто сохраняют неизменным. Мы видели, что этим именно и отличаются причины «слишком простые». Когда люди сталкиваются, они не предоставлены уже случаю независимо один от другого, они воздействуют друг на друга. Многочисленные причины оказывают свое влияние, они толкают людей, увлекают их вправо и влево; но есть нечто, чего они не в состоянии разрушить: это их привычки панургова стада [1]). Именно это и сохраняется.

X

Применение теории вероятностей к точным наукам также сопряжено с большими трудностями. Почему десятичные знаки таблицы логарифмов или числа π распределены по законам случайности? Я занимался исследованием этого вопроса в другом месте — в применении к логарифмам. Ясно, что небольшая разница в аргументе должна дать незначительную разницу в логарифме, но это может выразиться большой разницей в шестом или седьмом десятичном знаке. Мы приходим, таким образом, к тому же критерию. Но что касается числа π, то здесь представляется затруднение, о котором я не могу сказать ничего путного.

Пришлось бы разобрать много других вопросов, если бы я хотел к ним приступить, не разрешив того, который я себе специально поставил. Когда мы обнаруживаем простой результат, например, когда мы получаем круглое число, мы говорим, что такого рода результат не может быть делом случая, и мы ищем для его объяснения причину не случайную. И действительно, вероятность того, чтобы из десяти тысяч чисел случай привел нас к круглому числу, скажем, именно к числу 10 000, очень незначительна; она составляет один шанс из десяти тысяч. Но есть также один шанс из десяти тысяч, что мы пришли бы к любому из остальных чисел. И все-таки такой резуль-

---

[1]) Имеется в виду эпизод из романа Ф. Рабле «Гаргантюа и Пантагрюэль», в котором Панург бросил с корабля в море барана, и за ним устремилось за борт все стадо. — *Примеч. ред.*

тат нас не удивит, и мы спокойно припишем его случаю. И это только потому, что он менее бросается в глаза.

В чем же тут дело? Есть ли это простая иллюзия с нашей стороны или бывают случаи, в которых эта точка зрения законна? Нужно думать, что это так, ибо иначе никакая наука не была бы возможна. Что делаем мы, когда хотим проконтролировать какую-либо гипотезу? Мы не можем проверить все ее выводы, потому что таковых имеется бесчисленное множество. Мы ограничиваемся тем, что выверяем некоторые и в благоприятном случае объявляем гипотезу установленной, ибо такое число совпадений не могло быть делом случая. По существу это то же самое рассуждение.

Я не имею возможности здесь вполне его оправдать, так как это потребовало бы слишком много времени, но я могу сказать по крайней мере следующее. Мы стоим перед двумя гипотезами: либо здесь действует простая причина, либо же совокупность сложных причин, которую мы называем случаем. Мы считаем естественным допустить, что первая вызывает простой результат; поэтому, когда мы констатируем простой результат, например круглое число, нам представляется гораздо более правдоподобным приписать его простой причине, которая почти наверное должна была к нему привести, чем случайности, которая могла его дать только с вероятностью один на десять тысяч. Иначе будет обстоять дело, когда мы обнаружим не простой результат. Случай, конечно, тоже приведет к нему с вероятностью один на десять тысяч, но зато простая причина не имеет шансов его воспроизвести.

Книга II

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ РАССУЖДЕНИЕ

Глава I

ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА

I

Совершенно невозможно представить себе пространство пустым. Все наши усилия представить себе чистое пространство, из которого были бы исключены изменчивые образы материальных предметов, могут заканчиваться только тем, что мы составляем себе, например, представление, в котором сильно окрашенные поверхности заменены линиями со слабой окраской; и идти в этом направлении до конца нет возможности без того, чтобы все не уничтожалось, не свелось на нет. Отсюда и возникает неустранимая относительность пространства.

Если кто говорит об абсолютном пространстве, то он употребляет слово, лишенное смысла. Эту истину высказывали уже давно все, кто размышлял по этому вопросу, но ее слишком часто забывают и по сей день.

Я нахожусь в определенной точке Парижа, скажем на площади Пантеона, и говорю: «я возвращусь сюда завтра». Если меня спросить: «разумеете ли вы, что возвратитесь в ту же точку пространства», то я буду склонен ответить: «да!»; и все же я буду неправ, ибо в течение этого времени Земля будет двигаться, унося с собой и площадь Пантеона, которая пробежит, таким образом, свыше двух миллионов километров. Если же я пожелал бы учесть это обстоятельство и выразиться точнее, то это все-таки ни к чему бы не привело; в самом деле, эти два миллиона километров Земля пробежала относительно Солнца; но Солнце перемещается относительно Млечного Пути, а Млечный Путь в свою очередь, несомненно, имеет движение, скорости которого мы не можем знать. Таким образом, мы совершенно не знаем и не будем знать никогда, на какое собственно расстояние перемещается площадь Пантеона в течение суток. Все, что я хотел сказать, сводится, таким образом к следующему: «завтра я снова увижу купол и фасад Пантеона», и если бы не было Пантеона, то моя фраза потеряла бы всякий смысл — пространство свелось бы на нет.

Это одна из наиболее тривиальных форм идеи относительности пространства; но есть и другая точка зрения, которую особенно отстаивал Дельбёф. Вообразим себе, что за одну ночь все размеры Вселенной возросли в тысячу раз. Мир остался бы подобен самому себе, если разуметь под подобием то, что указано в третьей книге «Геометрии». Все сведется к тому, что предмет, имевший метр в длину, будет измеряться километром; предмет, имевший миллиметр, возрастет до метра. Постель, на которой я лежал, и само мое тело возрастут в одной и той же пропорции. Что же почувствую я на следующее утро, проснувшись после такого поразительного превращения? Я попросту ничего не замечу. Самые точные измерения не будут в состоянии ни в малейшей мере обнаружить этот поразительный переворот, ибо метры, которыми я буду пользоваться, изменятся в совершенно том же отношении, что и предметы, которые я буду измерять. В действительности переворот существует только для тех, которые рассуждают так, как будто бы пространство было абсолютным. Если бы я стал на минуту рассуждать, как они, то лишь для того, чтобы обнаружить, что их точка зрения необходимо содержит противоречие. В действительности было бы лучше сказать, что ввиду относительности пространства не произошло, собственно говоря, ничего, и именно потому мы ничего не заметили.

Можем ли мы, таким образом, сказать, что мы знаем расстояние между точками. Нет, ибо это расстояние может подвергнуться огромным изменениям, и мы могли бы их не заметить, если бы другие расстояния изменились в той же пропорции. Если я говорю: «я буду здесь завтра», то, как мы видели только что, я не хочу этим сказать, что я буду завтра в той же точке пространства, где сегодня; я имею в виду только, что я буду завтра на том же расстоянии от Пантеона, что и сегодня. Но, строго говоря, и эта формулировка недостаточно ясна. Я, собственно, должен был бы сказать: «завтра, как и сегодня, расстояние от меня до Пантеона составит столько-то раз взятую длину моего тела».

Но это не все; я предположил, что размеры мира изменятся, но что этот мир останется по крайней мере подобен самому себе. Но в этом направлении можно идти гораздо дальше, и одна из наиболее поразительных теорий современных физиков дает нам к этому повод. По теории Лоренца и Фицджеральда все тела, увлекаемые движением Земли, подвергаются деформации. Эта деформация в действительности весьма мала, потому что все размеры, параллельные движению Земли, должны уменьшиться на одну стомиллионную часть, между тем как размеры, перпендикулярные этому движению, совсем не должны измениться. Но для нас даже неважно, что эти изменения ничтожны; достаточно того, что они существуют, чтобы сделать вывод, который я имею в виду. Да к тому же, когда я говорю, что изменения ничтожны, я в действительности об этом ничего не знаю; я обнаруживаю только, что становлюсь сам жертвой упорной иллюзии, рисуя себе абсолютное пространство. Я размышлял о движении Земли вокруг Солнца по ее эллиптической орбите, и я принял скорость, равную 30 километрам. Но ее истинная скорость (я разумею на этот раз не абсолютную скорость, которая не имеет никакого смысла, а скорость по отношению к эфиру) мне совершенно неизвестна, и я не имею никаких средств ее узнать; она может быть в 10, 100 раз больше; а тогда и деформация будет в 100 или в 10 000 раз больше.

Можем ли мы обнаружить эту деформацию? Конечно, нет. Вот перед нами куб, ребро которого равно одному метру; вследствие перемещения Земли куб испытывает деформацию; одно из ребер, то, которое параллельно движению, становится меньше, другие же не изменяются. Если я хочу в этом убедиться при помощи метра, то я измерю сначала одно из ребер, перпендикулярных движению, и найду, что мой метр точно совпадает с этим ребром; и, в самом деле, ни одна из этих величин ведь не изменилась, так как обе они перпендикулярны движению. Я хочу затем измерить другое ребро, параллельное движению: для этого я перемещаю свой метр и поворачиваю его, чтобы наложить на это ребро. Но метр, изменив свое направление и сделавшись параллельным движению, в свою очередь претерпел деформацию; таким образом, хотя длина ребра не равна более одному метру, последний точно совпадает с ребром, и я ровно ничего не замечу.

Меня спросят в таком случае, в чем же польза гипотезы Лоренца и Фицджеральда, если она не может быть проверена опытом? Но мое изложение не было полное, я говорил только об измерениях, которые могут быть произведены при помощи метра; но длину можно измерять и при помощи времени, которое нужно свету, чтобы ее пробежать, в предположении, что скорость света постоянна и не зависит от направления. Лоренц мог бы дать объяснение того же факта, допустив, что скорость света по направлению движения Земли больше, чем скорость света в перпендикулярном направлении. Он предпочел допустить, что скорость эта одинакова во всех направлениях, но что тела в одних направлениях обладают меньшими размерами, чем в других. Если бы поверхности световой волны испытали те же деформации, что и материальные тела, то мы не заметили бы деформации Лоренца — Фицджеральда.

Как в одном случае, так и в другом нет речи об абсолютной величине, а лишь об измерении этой величины посредством какого-нибудь инструмента; этим инструментом может быть метр или же путь, пройденный светом; мы измеряем только отношение величины к инструменту, и, если это отношение изменилось, мы никоим образом не можем узнать, что именно изменилось — измеряемая величина или инструмент.

Но я хочу лишь показать, что при деформации, о которой идет речь, мир не остался себе подобным: квадраты обратились в прямоугольники или в параллелограммы, круги — в эллипсы, сферы — в эллипсоиды. И, однако, мы ни в каком случае не можем знать, реальна ли эта деформация.

Очевидно, что в этом направлении можно было бы пойти гораздо дальше: вместо деформации Лоренца — Фицджеральда, законы которой чрезвычайно просты, мы могли бы вообразить какую-нибудь совершенно произвольную деформацию. Тела могли бы изменять-ся по законам, сколь угодно сложным, и мы бы этого не заметили, если бы все тела без исключения подчинялись тем же законам. Говоря «все тела», я разумею, конечно, в том числе и наше тело и световые лучи, исходящие от разных предметов. Если бы мы рассматривали мир в одном из тех зеркал сложной формы, которые самым причудливым образом изменяют предметы, то взаимные отношения различных частей мира от этого не изменялись бы; если, в самом деле, два реальных предмета касаются друг друга, то их изображения также будут касаться друг друга. Собственно говоря, когда мы смотрим в такое зеркало, мы замечаем происшедшую деформацию, но это потому, что реальный мир существует рядом с его измененным образом, и если бы даже этот реальный мир был от нас скрыт, то все же осталось бы нечто, что от нас не было бы скрыто: это мы сами; мы не можем не видеть или по крайней мере не чувствовать нашего тела и наших членов, которые не испытали деформации и продолжают служить нам орудием измерения. Но если бы мы вообразили, что наше тело изменилось и притом стало таким, каким оно показалось бы в зеркале, то у нас исчезло бы орудие измерения, и деформация не могла бы быть обнаружена.

Вот два мира, из которых каждый является изображением другого; всякому предмету P мира A соответствует в мире B предмет P', который и есть его изображение; координаты изображения являются определенными функциями координат предмета P; эти функции могут, конечно, быть какими угодно; я предполагаю только, что они выбраны раз и навсегда. Между положением P и положением P' существует постоянное соотношение; неважно, каково это соотношение; достаточно, что оно постоянное.

При таких условиях эти два мира не будут отличимы друг от друга. Я хочу сказать, что первый будет для своих обитателей тем же, чем является второй мир для своих.

И так будет до тех пор, пока два мира останутся обособленными друг от друга. Допустим, что мы обитаем в мире A, что мы построили нашу науку и, в частности, нашу геометрию. В это же время обитатели мира B также построят науку и, так как их мир есть образ нашего мира, то их геометрия будет также образом нашей геометрии, или, лучше сказать, она будет такой же, как и наша. Но если в один прекрасный день перед нами откроется окно в мир *B*, нас охватит чувство жалости: «несчастные, — скажем мы, — они думают, что построили геометрию, но то, что они называют этим именем, есть не что иное, как смешной и странный образ нашей геометрии, их прямые искривлены, их круги искажены буграми, их сферы усажены капризными неровностями». И мы не сомневаемся в том, что они скажут то же самое о нас, и никогда нельзя будет сказать, кто прав.

Ясно, таким образом, в каком широком смысле нужно понимать относительность пространства. В действительности пространство аморфно, и форму ему сообщают те вещи, которые в нем находятся. Что же можно сказать о той непосредственной интуиции, которую мы как будто имеем о прямой линии и о расстоянии? Мы столь мало обладаем интуицией расстояния самого по себе, что, как мы уже сказали, в течение ночи расстояние может увеличиваться в тысячу раз незаметно для нас, если только все другие расстояния испытывают то же самое изменение. И в течение ночи же мир *B* может стать на место мира *A*, причем мы этого решительно не будем знать; вместе с тем прямые линии перестанут быть прямыми и мы этого совершенно не заметим.

Одна часть пространства сама по себе и в абсолютном смысле слова не равна другой части пространства; ибо если она равна для нас, она не равна для обитателей мира *B*; а эти последние могут иметь такое же точно право отвергнуть наше воззрение, какое имеем мы для того, чтобы отвергнуть их воззрение.

Я указал в другом сочинении, какие последствия вытекают из этих фактов для того представления, которое мы должны себе составить о неевклидовой геометрии и о других аналогичных геометриях; я не буду к ним возвращаться. Теперь же я стану на несколько иную точку зрения.

II

Если эта интуиция расстояния, направления, прямой линии, словом, если эта непосредственная интуиция пространства не существует, то почему нам кажется, что мы ее имеем? Если здесь только иллюзия, то почему эта иллюзия держится так прочно? Этот вопрос требует исследования. Непосредственной интуиции величины, сказали мы, не существует, и мы в состоянии только определить отношение этой величины к нашим измерительным инструментам. Мы не были бы способны построить пространство, если бы мы не имели инструмента для его измерения. А инструмент, к которому мы все относим, которым мы инстинктивно пользуемся, — это наше собственное тело. По отношению к нашему телу мы располагаем внешние предметы, и единственные пространственные отношения этих предметов, какие мы можем себе представить, суть их отношения с нашим телом. Наше тело служит, так сказать, системой осей координат.

Например, в один момент α присутствие предмета A обнаруживается мною органом зрения. В другой момент β присутствие другого предмета B обнаруживается мною при помощи другого органа чувств, например слуха или осязания. Я заключаю, что предмет B занимает то же место, что и предмет A. Что же это значит? Прежде всего, это не значит, что оба предмета занимают в два различных момента одну и ту же точку в абсолютном пространстве; такое пространство, если бы и существовало, ускользало бы от нашего сознания, ибо между моментами α и β Солнечная система переместилась, а мы этого перемещения не знаем. Это значит только, что оба предмета занимают одно и то же положение по отношению к нашему телу.

Но какое же содержание имеет это утверждение? Впечатления, которые мы получили от этих предметов, шли по совершенно различным путям: по зрительному нерву для предмета A, по слуховому нерву для предмета B. С точки зрения качественной эти впечатления не имеют ничего общего. Представления, которые мы можем себе составить об этих двух предметах, являются абсолютно разнородными, друг к другу не сводимыми. Но я знаю только, что мне стоит известным образом протянуть правую руку, и я ухвачу тело A; если даже я воздерживаюсь от соответствующего движения, то я представляю себе мускульные ощущения и другие аналогичные ощущения, которыми сопровождается это движение. Такое представление и ассоциируется с представлением предмета A.

Я знаю, однако, что могу достать тело B, протягивая тем же самым образом правую руку, причем это движение сопровождается таким же рядом мускульных ощущений. И только это я и разумею, когда утверждаю, что оба предмета занимают одно и то же положение.

Я знаю также, что мог бы достать предмет A при помощи другого подходящего движения левой руки, и я представляю себе те мускульные ощущения, которыми сопровождалось бы это движение; и при помощи того же движения левой руки, влекущего за собою те же ощущения, я мог бы достать предмет B.

Это очень важно, потому что именно этим путем я могу защитить себя против опасностей, которыми мне могут угрожать предметы A и B. Каждому удару, который может быть нам нанесен извне, природа противопоставила один или несколько ответных ударов, которые имеют для нас предохранительное значение. Одним и тем же парированием можно отвечать на несколько ударов; например, одним и тем же движением правой руки можно будет защитить себя в момент α против предмета A и в момент β против предмета B. Точно так же один и тот же удар может быть отражен несколькими приемами, и, например, как мы уже указали, предмет A можно достать при помощи известного движения либо правой, либо левой руки.

Все эти ответные удары не имеют между собою ничего общего, кроме того, разве, что они дают возможность избежать одного и того же удара, и только об этом-то идет речь, когда мы говорим о них как о движениях, заканчивающихся в одной и той же точке пространства. Равным образом, то общее, которое заключается в предметах, когда мы говорим, что они занимают одно и то же место пространства, выражается лишь в том, что для защиты от них может быть употреблен один и тот же ответный удар.

Другими словами, представим себе сеть бесчисленных телеграфных проволок, из которых одни имеют центробежное, другие центростремительное направление. Центростремительные проволоки предупреждают нас о бедах, совершившихся во внешнем мире, центробежные должны принести помощь. Соединения установлены таким образом, что когда по одной из центростремительных проволок пробегает ток, он действует на электрический прибор, реле, и вызывает ток в одной из центробежных проволок. При этом несколько центростремительных проволок могут действовать на одну и ту же центробежную, если один и тот же вид помощи применим в разных несчастных случаях, и одна центростремительная проволока может поколебать разные центробежные проволоки либо одновременно, либо в каком-нибудь последовательном порядке, если одно и то же бедствие может быть исправлено несколькими средствами.

Вот эта-то сложная система связей, этот, если можно так сказать, распределительный щит и есть вся наша геометрия или, иначе говоря, все то истинктивное, что заключается в нашей геометрии. То, что мы называем интуицией прямой линии или расстояния, и есть реализация в нашем сознании этих связей и их управляющего характера.

Легко понять, откуда вытекает этот управляющий характер. Связь нам кажется тем более неразрушимой, чем древнее ее происхождение. Но эти связи в большинстве случаев не являются приобретениями индивидуума, ибо в зачаточном состоянии они заметны уже у новорожденного. Эти связи — приобретения расовые [1]. Естественный отбор должен был упрочить их тем скорее, чем они более необходимы.

В числе последних на первом месте должны были быть, конечно, те приобретения, о которых мы говорили, потому что без них защита организма была бы невозможна. Как только клетки вышли из стадии простого наложения и стали вступать в стадию взаимного служения друг другу, должен был создаться механизм, аналогичный тому, который мы выше описали, для того чтобы это служение не уклонялось от должного пути и направлялось против опасности.

Если пустим каплю кислоты на кожу обезглавленной лягушки, то последняя старается снять эту каплю лапой, ближайшей к тому месту, где упала капля; а если эта лапа ампутирована, то лягушка пользуется другой лапой. Вот пример того дублирования ответного удара, о котором я только что говорил и которое позволяет бороться с бедствием вторым средством, ес-

---

[1]) Под расой Пуанкаре имеет в виду человеческий род — *Примеч. ред.*

ли первое вышло из строя. Именно эта множественность ответных ударов и координация, которая из нее вытекает, образуют в своей совокупности пространство.

Мы видим, в какие глубины бессознательного надобно спуститься, чтобы найти первые следы пространственных связей, ибо в них играют роль простейшие и низшие части нервной системы. Можно ли после этого удивляться сопротивлению, которое мы оказываем каждой попытке разъединить то, что уже так давно соединено? Но это сопротивление и есть то, что мы называем очевидностью геометрических истин, эта очевидность есть не что иное, как то тягостное чувство противления, которое мы обыкновенно испытываем, когда отказываемся от очень старых привычек, с коими нам всегда легко жилось.

III

Созданное таким образом пространство имеет малые размеры: оно не простирается дальше того места, которое достигается моей рукой. Границы пространства расширяются благодаря вмешательству памяти. Имеются такие точки, которые навсегда останутся для меня недостижимыми, какие бы усилия я ни употреблял, протягивая руку. Если бы я был прикреплен к почве наподобие, например, гидроидного полипа, который может протягивать свои щупальца, то все эти точки оставались бы вне пространства, потому что те ощущения, которые мы можем испытывать благодаря действию тел, помещенных в этих точках, не были бы ассоциированы ни с какой-либо идеей движения, необходимого для достижения этих тел, ни с каким-либо соответствующим ответным ударом. Нам казалось бы, что эти ощущения не имеют пространственного характера, и мы не старались бы их локализовать.

Но, в отличие от низших животных, мы не прикреплены к почве. Если враг находится далеко от нас, то мы можем до него дойти и, приблизившись, протянуть руку. Это тоже ответный удар, но дальнего действия. Кроме того, это сложный ответный удар и в представление, которое мы о нем себе составляем, входит представление о мускульных ощущениях, вызванных движением ног, представление о мускульных ощущениях, вызванных конечным движением руки, представление об ощущениях полукружных каналов и т. д. Мы должны, кроме того, представить себе не комплекс одновременных ощущений, а комплекс ощущений последовательных, сменяющих друг друга в определенном порядке, и вот почему я указал выше на необходимость вмешательства памяти.

Заметим еще, что для того, чтобы прийти к одной и той же точке, я могу очень близко подойти к цели, которую мне нужно достигнуть, и лишь немного вытянуть руку. Что же еще мне известно? Не один, а тысячу ответных ударов могу я противопоставить одной и той же опасности. Все эти удары образованы из ощущений, которые могут не иметь между собой ничего общего, но мы их рассматриваем как определяющие одну и ту же точку пространства, потому что они могут отвечать одной и той же опасности и все ассоциированы с понятием об этой опасности. Возможность парировать один и тот же удар и сообщает этим различным ответным ударам единство, подобно тому как возможность быть парированным одним и тем же способом сообщает единство различного рода ударам, которые могут угрожать нам из одной и той же точки пространства. Именно это двоякое единство и создает индивидуальность каждой точки пространства, а понятие о точке ничего, кроме этого, в себе не заключает.

Пространство, которое я рассматривал в предыдущем разделе, и которое я мог бы назвать ограниченным пространством, было отнесено к осям координат, связанным с моим телом; эти оси были постоянны, так как мое тело не двигалось, а перемещались лишь мои члены. Каковы же оси, к которым может быть отнесено расширенное пространство, т. е. то пространство, которое я только что определил? Мы определяем точку при помощи ряда движений, которые необходимо совершать для ее достижения, исходя при этом из определенного начального положения тела. Оси, следовательно, связаны с этим начальным положением.

Но положение, которое я называю начальным, может быть произвольно избрано среди всех тех положений, которые мое тело последовательно занимало; если более или менее бессознательное воспоминание об этих последовательных положениях необходимо для генезиса понятия пространства, то это воспоминание может простираться более или менее далеко в прошлое. Отсюда получается известная неопределенность в самом определении пространства и этой именно неопределенностью обусловливается его относительность.

Итак, нет абсолютного пространства, а есть только пространство, отнесенное к известному начальному положению тела. Для сознательного существа, которое, как низшие животные, было бы прикреплено к почве и которому, следовательно, было бы знакомо лишь ограниченное пространство, это пространство также было бы относительным, так как оно было бы отнесено к его телу; но такое существо не сознавало бы этой относительности, потому что оси, к которым оно относило ограниченное пространство, не изменялись бы! Конечно, скала, к которой это существо было бы приковано, не оставалась бы неподвижной, так как она увлекалась бы движением нашей планеты; для нас, следовательно, эти оси изменялись бы в каждое мгновение; но для него они оставались бы неизменными. Мы обладаем способностью относить наше расширенное пространство то к положению A нашего тела, рассматриваемому как начальное, то к положению B, которое наше тело приобрело несколькими мгновениями позже и которое совершенно свободно можем также рассматривать как начальное; мы, следовательно, каждое мгновение производим бессознательное изменение координат. Этой способности не было бы у нашего воображаемого существа; лишенное возможности путешествовать, оно почитало бы пространство абсолютным. В каждое мгновение его система в действительности изменялась бы, но для него она оставалась бы одной и той же, так как она была бы единственной его системой. Не то для нас, обладающих в каждое мгновение несколькими системами, между которыми мы можем произвольно выбирать, и сохраняющих воспоминания, которые могут нас переносить в более или менее далекое прошлое.

Но это не все. Ограниченное пространство не было бы однородным; различные точки этого пространства не могли бы рассматриваться как эквивалентные, потому что для достижения одних потребовались бы величайшие усилия, для достижения других — незначительные. Напротив, наше беспредельное пространство кажется нам однородным, и мы говорим, что все его точки эквивалентны. Что же это, собственно, значит?

Если мы исходим из известного положения A, то мы можем совершить известные движения M, характеризуемые известным комплексом мускульных ощущений. Но, исходя из другого положения B, мы сможем совершить движения M', характеризуемые теми же мускульными ощущениями. Обозначим буквой a положение определенной точки тела, например конца указательного пальца правой руки при начальном положении A, и обозначим буквой B положение того же пальца после того, как, исходя из этого положения A, мы совершили движения M. Пусть a' будет положение того же пальца в B, а b' — положение того же пальца после совершения движений M'.

Так вот, при таких условиях я обыкновенно говорю, что точки пространства a и b относятся друг к другу как точки a' и b', а это обозначает только, что два ряда движений M и M' сопровождаются одними и теми же мускульными ощущениями. И так как я сознаю, что при переходе из положения A в B мое тело сохранило способность к одним и тем же движениям, то я знаю, что есть точка пространства, которая по отношению к точке a' составляет то же, что произвольно выбранная точка B относительно точки a, и что, таким образом, обе точки a и a' эквивалентны. И вот поэтому пространство в то же время относительно, ибо его свойства остаются одними и теми же, когда оно отнесено к осям A или к осям B. Таким образом, относительность пространства и его однородность — это одно и то же.

Теперь, если я захочу перейти к огромному пространству, которое служит уже не только для меня, но в котором я могу себе представить всю Вселенную, я прибегну к акту воображения. Я представлю себе, что испытал бы великан, который несколькими шагами достиг бы планет или, если это угодно, что испытал бы я сам перед лицом миниатюрного мира, в котором планеты были бы заменены маленькими шариками, и на одном из них суетился бы лилипут, и этим лилипутом был бы я. Но вот акт воображения был бы для меня невозможен, если бы я не построил предварительно и притом для собственного обихода своего ограниченного и своего обширного пространства.

IV

Теперь возникает вопрос; почему все эти пространства имеют три измерения? Обратимся к «распределительному щиту», о котором мы говорили выше. Мы имеем, с одной стороны, список возможных опасностей: обозначим их A_1, A_2 и т. д.; с другой стороны — список разных средств защиты, которые мы обозначим B_1, B_2 и т. д. Мы имеем, таким образом, связи между элементами первого и второго списков, так что, когда, например, сработает сигнализатор опасности A_3, он приведет или может привести в действие реле, соответствующее ответному удару B_3.

Так как я говорил выше о центростремительных и центробежных проволоках, то я опасаюсь, как бы во всем этом не усмотрели не простое сравнение, а описание нервной системы. Но моя мысль не такова. Прежде всего я не позволил бы себе высказать мнение относительно структуры нервной системы, которой я не знаю, между тем как лица, изучавшие ее, высказываются о ней с большой осторожностью. Затем, несмотря на мою некомпетентность, я чувствую, что эта схема была бы слишком упрощенной, и, наконец, в моем списке ответных ударов имеются некоторые очень сложные; как мы выше видели, когда речь шла об обширном пространстве, некоторые ответные удары могут включать в себя ряд движений ног, сопровождающихся движением руки. Дело, следовательно, идет не о физической связи между двумя реальными проводниками, но о психологической связи между двумя рядами ощущений.

Если сигнализаторы A_1 и A_2, например, связаны один и другой с ответным ударом B_1, и если A_1 связан также с ответным ударом B_2, то обыкновенно случается, что A_2 и B_2 также связаны. Если бы этот основной закон не был вообще справедлив, то произошло бы неимоверное смешение, и ничего схожего с понятием о пространстве или с геометрией не могло бы составиться. В самом деле, вспомним, как мы определяли точку пространства. Мы это сделали двояко: с одной стороны, мы имели совокупность сигнализаторов A, которые связаны с одним и тем же ответным ударом B, с другой — совокупность ответных ударов B, связанных с одним и тем же сигнализатором A. Если бы наш закон не был справедлив, следовало бы сказать, что A_1 и A_2 отвечают одной и той же точке, потому что оба они связаны с ответным ударом B_1, но, равным образом, следовало бы также сказать, что они не отвечают одной и той же точке, потому что A_1 связан с B_2, а A_2 не связан с B_2. Это было бы противоречием.

Но, с другой стороны, если бы закон был строго и всегда правилен, пространство было бы отлично от того, каким оно является. Мы имели бы резко очерченные категории, между которыми распределились бы, с одной стороны, сигнализаторы A и с другой — ответные удары B; эти категории были бы чрезвычайно многочисленны, но они были бы друг от друга совершенно отделены. Пространство было бы составлено из очень многочисленных, но раздельных точек, оно было бы прерывным. Не было бы оснований предпочесть один порядок расположения точек другому, не было бы, следовательно, оснований приписывать пространству три измерения.

Но дело обстоит не так. Да будет мне позволено воспользоваться на мгновение языком людей, уже знающих геометрию. Это даже необходимо, потому что именно такой язык наиболее понятен читателям, которых я имею в виду, поясняя свою мысль. Когда я хочу отразить удар, я стараюсь достигнуть той точки, откуда удар исходит, но для этого достаточно, чтобы я приблизился к точке на надлежащее расстояние. В таком случае ответный удар B_1 может отвечать ударам A_1 и A_2, если только точка, отвечающая B_1, одновременно достаточно близка к точкам, отвечающим A_1 и A_2. Но может случиться, что точка, отвечающая другому ответному удару B_2, окажется достаточно близкой к точке, отвечающей A_1, но недостаточно близкой к точке, отвечающей A_2. Таким образом, ответный удар B_2 будет соответствовать A_1 и не соответствовать A_2.

Для того, кто не знает еще геометрии, все это покажется просто нарушением формулированного выше закона Для него дело будет происходить таким образом: два ответных удара B_1 и B_2 будут связаны с одним и тем же сигнализатором A_1 и с еще бо́льшим числом сигнализаторов, которые мы включили в ту же категорию, в какой находится A_1, и которые мы отнесем к одной и той же точке пространства. Но мы сможем найти сигнализаторы A_2, которые будут связаны с B_2, не будучи связанными с B_1, и которые зато связаны с B_3, причем B_3 не связан с A_1, и т. д. Итак, мы можем писать ряд B_1, A_1, B_2, A_2, B_3, A_3, B_4, A_4, в котором каждый член связан со следующим и с предыдущим, но не связан с членами, отстоящими от него дальше.

Излишне прибавлять, что каждый из членов этих рядов не является изолированным, а составляет часть очень многочисленной категории других сигнализаторов или других ответных ударов. Эта категория имеет такие же связи, как и первый член, и ее можно рассматривать как относящуюся к одной и той же точке пространства. Основной закон, несмотря на исключения, остается, следовательно, почти всегда верным. Но благодаря этим исключениям упомянутые категории вместо того, чтобы оставаться совершенно обособленными, захватывают друг друга некоторыми частями, проникают одни в другие, и пространство, таким образом, становится непрерывным.

С другой стороны, порядок, в котором категории должны быть размещены, не оказывается уже произвольным. Обращаясь к предыдущему ряду, легко заметить, что B_2 должен быть помещен между A_1 и A_2 и, следовательно, между B_1 и B_3, но не может быть помещен, например, между B_3 и B_4.

Итак, существует порядок, в котором естественно располагаются категории, отвечающие точкам пространства И опыт нас учит, что этот порядок представляется в виде таблицы с тремя входами, вот почему пространство имеет три измерения.

V

Характерная особенность пространства, выражающаяся в том, что оно обладает тремя измерениями, есть, таким образом, особенность нашего распределительного щита, есть, так сказать, внутреннее свойство человеческого ума. Достаточно было бы разрушить некоторые из соединений, т. е. некоторые ассоциации идей, чтобы получить другой распределительный щит, а этого было бы достаточно, чтобы пространство приобрело четвертое измерение. Такой результат может удивить некоторых. Ведь внешний мир, скажут они, должен же играть здесь какую-то роль. Если число измерений зависит от того, как мы созданы, то можно предположить, что мыслящие существа, живущие в нашем мире, но созданные иначе, чем мы, полагали бы, что пространство имеет больше или меньше трех измерений. И не утверждал ли Цион, что японские мыши, имеющие только две пары полукружных каналов, думают, что пространство имеет два измерения? А подобное мыслящее существо, если бы оно было способно создать физику, разве не построило бы физики двух или четырех измерений, физики, которая, в известном смысле, была бы такою же, как и наша, ибо она описывала бы другим языком тот же самый мир?

В самом деле, не представляет, по-видимому, никаких затруднений перевести нашу физику на язык геометрии четырех измерений. Осуществить действительно такую задачу значило бы потратить много усилий с ничтожной пользой, и я ограничусь лишь указанием на механику Герца, в которой мы имеем нечто, напоминающее такой перевод. Но такой перевод, по-видимому, всегда был бы сложнее текста и всегда обнаруживал бы свою заимствованную природу, тогда как язык трех измерений кажется наиболее приспособленным к описанию нашего мира, хотя это описание может быть точно выполнено и на другом языке.

Однако наш распределительный щит возник не случайно. Имеется связь между сигналом A_1 и ответным ударом B_1, это — внутреннее свойство нашего ума. Но чем объясняется эта связь? Тем, что ответный удар B_1 позволяет действительно защититься против опасности A_1, а это — факт, внешний для нас, это — свойство внешнего мира. Таким образом, наш распределительный щит есть лишь выражение совокупности внешних фактов; если он имеет три измерения, то это потому, что он приспособлен к миру, имеющему определенные свойства, и главное из этих свойств заключается в том, что в этом мире существуют твердые тела, перемещающиеся по таким законам, которые мы называем законами движения неизменяющихся твердых тел. Если, следовательно, язык трех измерений лучше всего позволяет нам описать наш мир, то мы не должны этому удивляться. Этот язык скопирован с нашего распределительного щита, а этот щит установлен для того, чтобы можно было жить в этом мире.

Я сказал, что мы могли бы представить себе мыслящие существа, живущие в нашем мире и обладающие распределительным щитом четырех измерений; такие существа мыслили бы сверхпространство. Но не может быть уверенности в том, что такие существа, если бы и рождались, могли бы выжить и защититься против тысяч опасностей, которыми они были бы окружены в этом мире.

VI

В заключение несколько замечаний. Существует разительный контраст между грубостью той примитивной геометрии, которая сводится к распределительному щиту, и безграничной точностью геометрии геометров. И, однако, последняя — плод первой. Но не ее одной; она должна была быть оплодотворена присущей нам способностью к построению математических понятий, как, например, понятия о группах; нужно было среди этих чистых понятий найти наиболее приспособленное к этому грубому пространству, генезис которого я пытался объяснить на предшествующих страницах и которое является общим у нас и у высших животных.

Очевидность некоторых геометрических постулатов, сказали мы, есть не что иное, как наша косная неспособность отказаться от очень старых привычек. Но эти постулаты чрезвычайно точны, тогда как привычки заключают в себе нечто по существу зыбкое. И, как только мы хотим мыслить, мы испытываем нужду в этих чрезвычайно точных постулатах, так как лишь с их помощью мы можем избежать противоречия. Но среди всех возможных систем постулатов имеются такие, которые мы отказываемся принять, потому что они не согласуются с нашими привычками; как ни зыбки, как ни эластичны эти привычки, все же они имеют предел этой эластичности.

Мы видим, что если геометрия не есть экспериментальная наука, то это все же наука, рожденная в связи с опытом; мы создали пространство, которое она изучает, но мы приспособили его к миру, в котором мы живем. Мы сделали выбор наиболее удобного пространства, но этим выбором руководил опыт. И так как выбор был бессознателен, то нам кажется, что он для нас необходим; одни говорят, что он сделался для нас необходимым путем опыта, другие говорят, что мы рождаемся с вполне сложившимся представлением о пространстве. Из предыдущих рассуждений явствует, какая доля истины и ошибки заключается в этих двух суждениях.

Очень трудно определить участие индивида и участие расы[1]) в том эволюционном процессе воспитания, который закончился построением пространства. В какой мере кто-нибудь из нас, будучи перенесен с момента рождения в другой совершенно мир, где, например, преобладали бы тела, перемещающиеся по законам движения, свойственным неевклидовским твердым телам, в какой мере, повторяю, мог бы он отказаться от пространства предков, чтобы построить совершенно новое пространство?

Участие расы кажется преобладающим. Однако если мы и обязаны ему грубым пространством, зыбким пространством высших животных, о котором я говорил выше, то не обязаны ли мы бессознательному опыту индивида тем безгранично точным пространством, которое имеет геометр? Этот вопрос нелегко разрешается. Укажем, однако, на факт, который показывает, что пространство, завещанное нам предками, сохраняет известную пластичность. Некоторые охотники научиваются ловить рыбу под водой, хотя изображение этих рыб вследствие преломления несколько приподнято. Они учатся этому инстинктивно: они сумели, следовательно, изменить свой прежний инстинкт направления. Или, если хотите, они сумели на место связи A_1, B_1 поставить другую связь A_1, B_2, потому что опыт показал им, что с первой связью нельзя достигнуть цели.

[1]) См. сноску на с. 444.

Глава II

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕПОДАВАНИЕ

1. Я должен говорить здесь об общих определениях в математических науках; по крайней мере к этому меня обязывает название настоящей главы. Но мне невозможно будет оставаться в рамках предмета в такой мере, в какой это требовалось бы правилом единства действия; я не смогу трактовать вопроса, не затрагивая отчасти других ближайших вопросов, и потому прошу простить мне уклонения вправо и влево, которые встретятся в дальнейшем.

Что разумеют под хорошим определением? Для философа или для ученого это есть определение, которое приложимо ко всем определяемым предметам и только к ним; такое определение удовлетворяет правилам логики. Но при преподавании дело обстоит иначе. Здесь хорошим определением будет то, которое понято учениками.

Чем объяснить, что многие умы отказываются понимать математику? Не парадоксально ли это? В самом деле, вот наука, которая апеллирует только к основным принципам логики, например к принципу противоречия, апеллирует к тому, что составляет, так сказать, скелет нашего разумения, к тому, от чего нельзя отказаться, не отказываясь вместе с тем от самого мышления, и все же встречаются люди, которые находят эту науку темной! И этих людей большинство! Пусть бы они оказались неспособными изобретать — это еще допустимо. Но они не понимают доказательств, которые им предлагают, они остаются слепыми, когда им подносят свет, который для нас горит чистым и ярким пламенем, — вот что чрезвычайно странно.

А между тем достаточно и небольшого опыта, доставляемого экзаменами, чтобы убедиться в том, что эти слепые отнюдь не являются исключениями. Здесь имеется проблема, которая не легко решается, но которая должна занимать всех, желающих посвятить себя делу преподавания.

Что значит понимать? Имеет ли это слово для всех одно и то же значение? Понять доказательство теоремы — значит ли это рассмотреть последовательно каждый из силлогизмов, из коих составляется доказательство, и констатировать, что он правилен и согласуется с ходом задачи? Точно так же понять определение — значит ли это только признать, что смысл всех употребленных в нем терминов уже известен, и констатировать, что определение не заключает в себе никакого противоречия?

«Да», — скажут одни, которые, констатировав отсутствие противоречия в определении, говорят· «мы его поняли». «Нет», — скажет большинство. Почти все люди оказываются более требовательными; они хотят не только знать, правильны ли все силлогизмы доказательства, но еще и знать, почему силлогизмы связываются в данном, а не в другом порядке. Пока им кажется, что эта связь рождена капризом, а не разумом в постоянном сознании преследуемой цели, они думают, что не поняли доказательства.

Без сомнения, они сами не отдают себе отчета в том, чего они собственно требуют, и не могут формулировать своего желания; но если они не находят удовлетворения, то они смутно чувствуют, что чего-то им недостает. Что же тогда происходит? Вначале они еще схватывают те очевидные вещи, которые представляются их взору; но, так как последние связаны чрезвычайно тонкой нитью с предшествующими и последующими, то они не оставляют никакого следа в их мозгу; они тотчас забываются. Освещенные на одно мгновение, они сейчас же исчезают в сумраке вечной ночи. А когда эти люди следят за дальнейшим развитием доказательства, для них исчезает и прежняя эфемерная ясность, так как теоремы опираются одна на другую, а теоремы, которые им нужны, уже забыты. Таким образом, эти люди становятся неспособными понимать математику.

Не всегда здесь виной преподаватель; зачастую ум людей, нуждающийся в руководящей нити, слишком ленив для поисков ее. Но, чтобы помочь непонимающим, мы должны сначала хорошо узнать то, что их останавливает.

Другие же спросят, для чего все это служит; они не поймут силлогизмов, если они не нашли вокруг себя на практике или в природе основания для того или иного математического понятия. Под всяким словом они хотят разглядеть чувственный образ; необходимо, чтобы определение вызывало этот образ, чтобы на каждой стадии доказательства они видели его превращения и эволюцию. Лишь при таком условии они поймут и удержат в памяти доказательство. Такие люди часто заблуждаются относительно самих себя; они не слушают рассуждений, а рассматривают фигуры, они воображают, что поняли, тогда как они только видели.

2. Сколько различных тенденций! Нужно ли с ними бороться? Или нужно ими воспользоваться? А если мы хотим с ними бороться, то какой из них должны мы благоприятствовать? Нужно ли доказывать тем, которые довольствуются чистой логикой, что они видят только одну сторону вещей? Или, напротив, нужно доказывать тем, которые не удовлетворяются так легко, что то, чего они требуют, не является необходимостью?

Другими словами, должны ли мы принуждать молодых людей к тому, чтобы они изменяли природу своего ума? Такая попытка была бы бесплодна. Мы не обладаем философским камнем, который дал бы нам возможность превращать один в другой вверенные нам металлы; все, что мы можем сделать, — это работать, приспосабливаясь к их свойствам.

Многие дети неспособны стать математиками, тем не менее им необходимо преподавать математику. Да и сами математики не все отлиты по одной и той же модели. Достаточно прочитать их труды, чтобы заметить существование умов двух типов: логиков, как Вейерштрасс, и интуитивистов, как Риман. Такая же разница наблюдается и среди студентов. Одни любят разрабатывать задачи, как они выражаются, «путем анализа», другие — «путем геометрии».

Было бы бесполезно пытаться изменить что-либо в этом отношении, да и, помимо того, было ли бы это желательно?

Хорошо, что существуют логики и интуитивисты; кто рискнет утверждать, что он предпочел бы, чтобы Вейерштрасс никогда не писал или чтобы Римана не было? Таким образом, мы должны примириться с разнообразием умов или, еще лучше, мы должны ему радоваться.

3. Так как слово «понимать» имеет несколько значений, то определения, наиболее понятные для одних

людей, не будут совпадать с определениями, которые подходят для других. Мы имеем такие определения, которые стараются вызвать в нас образ, и такие, которые лишь комбинируют пустые формы, доступные интеллекту, но только ему одному, определения, которые по своей абстрактности лишены всякого материального содержания.

Я не знаю, нужно ли приводить примеры. Однако мы приведем некоторые, и прежде всего мы остановимся на определении дробей, которое даст нам крайний пример. В начальных школах, чтобы определить дробь, разрезают яблоко или пирог; конечно, разрезание происходит в уме, а не в действительности, ибо я не думаю, чтобы бюджет начальной школы позволял такую расточительность. В высшей нормальной школе или на факультетах, напротив, скажут: дробь — это совокупность двух целых чисел, разделенных горизонтальной чертой; определят при помощи соглашений те операции, которым можно подвергать эти символы; докажут, что правила для этих операций те же, какие употребляются в исчислении целых чисел и, наконец, обнаружат, что, умножая, согласно этим правилам, дробь на знаменатель, мы находим числитель. Такое определение будет здесь уместным, потому что его преподносят молодым людям, которые уже давно освоились с понятием о дробях — они уже делили яблоки и другие предметы; ум которых уже изощрен математической эрудицией; которые хотят, наконец, получить чисто логическое определение. Но как был бы ошеломлен начинающий, к которому подошли бы с подобным определением.

Таковы же определения, которые вы найдете в удивительной и несколько раз премированной книге Гильберта «Основания геометрии». Посмотрим, как он начинает: вообразим три системы вещей, которые мы назовем точками, прямыми и плоскостями. Что это за «вещи» — мы не знаем, да и незачем нам это знать. Было бы даже греховно стараться это узнать. Все, на что мы можем претендовать, сводится к тому, чтобы мы усвоили относящиеся к ним аксиомы, например следующую: две различные точки всегда определяют прямую, и комментарий к ней: вместо «определяют» мы можем сказать, что прямая проходит через две точки, или соединяет эти две точки, или что две точки расположены на прямой. Значит, фраза «точки расположены на прямой» является просто синонимом фразы «точки определяют прямую». Вот книга, которую я очень высоко ценю, но которую я не рекомендую лицеисту. Впрочем, я мог бы это сделать без опаски, так как в чтении ее он ушел бы не очень далеко.

Я взял крайние примеры; никакой преподаватель, конечно, не предложил бы таких определений. Но разве не остается такая же опасность и тогда, когда мы стоим ближе к действительности?

Вот в четвертом классе. Преподаватель диктует: «окружность — это геометрическое место точек на плоскости, находящихся на одном и том же расстоянии от одной внутренней точки, именуемой центром». Хороший ученик вписывает эту фразу в свою тетрадь; плохой ученик рисует в ней «человечков», но ни тот, ни другой ничего не поняли. Тогда преподаватель берет мел и рисует круг на доске. «Ага, — думают ученики, — почему он не сказал сразу: окружность — это кружок, и мы бы сразу поняли». Без сомнения, преподаватель прав. Определение учеников не имело бы никакой ценности, потому что не могло бы служить ни для какого доказательства, и в особенности не привило бы им спасительной привычки анализировать свои понятия. Но им надобно было бы доказать, что они не понимают того, что им кажется понятным, надобно было бы заставить их отдать себе отчет в грубости их первоначального представления, сделать так, чтобы они сами пожелали очистить и улучшить это представление.

4. Я еще вернусь ко всем этим примерам. Я хотел лишь показать вам две противоположные идеи: между ними имеется самый резкий контраст, причина которого нам раскрывается историей науки. Если мы читаем книгу, написанную пятьдесят лет назад, то рассуждения, которые мы в ней находим, кажутся нам большей частью лишенными логической строгости.

В ту эпоху допускали, что непрерывная функция не может изменить знак, не проходя через нуль; теперь это доказывают. Допускали, что обыкновенные правила счисления приложимы к несоизмеримым числам, теперь это доказывают. Допускали еще и другие вещи, которые порою оказывались ложными.

Доверялись интуиции. Но интуиция не может дать ни строгости суждений, ни уверенности в их правильности, в этом убеждались все более и более. Интуиция, например, учит нас, что всякая кривая имеет касательную, т. е. что каждая непрерывная функция имеет производную, и, однако, это положение ложно. А так как знание стремилось к уверенности, то приходилось все более и более ограничивать роль интуиции. Каким образом свершилась эта необходимая эволюция? Вскоре было замечено, что рассуждения лишь тогда приобретут строго доказательную силу, когда эта строгость будет предварительно внесена в определения.

Объекты, которыми занимаются математики, долгое время не имели хороших определений; эти предметы казались известными потому, что их себе представляли при помощи чувств или воображения; но в действительности их образы отличались грубостью; не было точных идей, на которые могли бы опереться доказательства. Вот в эту сторону логики вынуждены были направить свои усилия. Примером могут служить несоизмеримые числа.

Неопределенная идея непрерывности, которой мы обязаны интуиции, разрешилась в сложную систему неравенств, имеющих дело с целыми числами. Благодаря этому исчезли, наконец, все те трудности, которые пугали наших отцов, когда они размышляли об основаниях исчисления бесконечно малых величин.

Теперь анализ имеет дело только с целыми числами или же с конечными или бесконечными системами целых чисел, связанных совокупностью равенств и неравенств.

Математические науки, как говорят, арифметизировались.

5. Но можно ли думать, что эти науки достигли абсолютной строгости, ничем со своей стороны не жертвуя? Ничуть; то, что они выиграли в строгости, они потеряли в объективности. Они приобретали совершенную чистоту, удаляясь от реальности. Теперь можно свободно обозреть всю область математического знания, которая раньше была усеяна преградами, но эти преграды не исчезли. Они были лишь

перенесены на границу; и если мы хотим перейти эту границу, чтобы вступить в область практики, то мы должны снова преодолеть эти препятствия.

Прежде мы обладали лишь неясными понятиями, составленными из несвязанных элементов, из которых одни были априорны, другие вытекали из более или менее уясненного опыта; мы думали, что главные их свойства узнаны интуитивным путем. Теперь эмпирические элементы отвергаются и сохраняются лишь элементы априорные, для определения берется одно из свойств, все другие выводятся из него путем строгого рассуждения. Это хорошо, но остается еще доказать, что свойство, ставшее определением, принадлежит действительно тем реальным объектам, с которыми нас познакомил опыт и из которых мы вывели наше ясное интуитивное понятие. Чтобы это доказать, необходимо обратиться к опыту или прибегнуть к усилию интуиции; если же мы этого не докажем, то наши теоремы будут совершенно строгими, но и совершенно бесполезными.

Логика приводит часто к уродствам. На протяжении полувека мы видели, как возникло множество причудливых функций; эти новые функции как будто старались возможно менее походить на те благородные функции, которые чему-нибудь да служат. Таковы, например, функции непрерывные, но без производных, и т. д. Более того, с точки зрения логической эти именно причудливые функции и являются наиболее общими; те же функции, которые мы находим без долгих поисков, образуют как бы частный случай. Для них остается лишь маленький уголок. Некогда при нахождении новых функций имелась в виду какая-нибудь практическая цель. Теперь функции изобретаются специально для того, чтобы обнаружить недостаточность рассуждения наших отцов, никакого иного вывода, кроме этого, из них нельзя извлечь.

Если бы логика была единственным руководителем педагога, то нужно было бы начинать с наиболее общих, т. е. наиболее причудливых функций. Именно начинающего следовало бы в таком случае отдать во власть этого музея уродств. «Если вы этого не делаете, — могли бы сказать логики, — то вы достигнете надлежащей строгости лишь после целого ряда этапов».

6. Быть может, это и так; но мы не можем не дорожить реальностью. Я разумею здесь не только реальность чувственного мира, который, впрочем, имеет свою ценность уже потому, что девять десятых ваших учеников ищут у вас орудий именно для борьбы с этой реальностью. Но есть реальность более утонченная, которая составляет жизнь математических субстанций и которая все-таки не логика.

Наше тело составлено из клеток, клетки — из атомов. Составляют ли эти клетки и эти атомы все, что есть реального в человеческом теле? Не представляет ли собою способ, каким эти клетки собраны и который обусловливает единство индивида, также реальности и реальности гораздо более интересной. Мог бы натуралист, изучавший слона только под микроскопом, думать, что он достаточно познакомился с этим животным?

То же самое в области математики. Когда логик разложил всякое доказательство на множество элементарных операций, вполне правильных, он еще не уловил реальности в ее целом; то неизвестное мне, что составляет единство доказательства, совершенно от него ускользнуло.

Стóит ли в здании, возведенном нашими учителями, удивляться работе каменщика, если мы не понимаем плана архитектора? Но общий взгляд не дается нам чистой логикой; чтобы получить его, мы должны обратиться к интуиции.

Возьмем для примера идею непрерывной функции. Сначала это не что иное, как чувственный образ, след, начертанный мелом на черной доске. Мало-помалу эта идея очищается. Ею пользуются для построения сложной системы неравенств, воспроизводящей все линии примитивного образа. Когда построение закончено; кружала[1]) снимаются, как это делается после сооружения свода, то грубое представление, которое стало отныне бесполезным, исче-

---

[1]) Кружало — деревянное сооружение, устанавливаемое под сводом перед его кладкой. Служит для придания своду надлежащей кривизны и предохраняет его от падения до отвердения цемента. — *Примеч. ред.*

зает, остается лишь само здание, безупречное в глазах логика. И, однако, если бы преподаватель не влил содержания в первоначальные образы, если бы он не установил на время кружал, разве мог бы ученик догадаться, по какому капризу все эти неравенства определенным образом нанизывались одно на другое? Определение было бы правильным с логической стороны, но оно не раскрыло бы ученику настоящей реальности.

7. Мы должны вернуться назад. Без сомнения, учителю неприятно вести преподавание в рамках, которые его не вполне удовлетворяют. Но удовлетворение учителя — не единственная цель обучения; нужно прежде всего считаться с умом ученика и с тем, что из него желают сделать.

Зоологи утверждают, что эмбриональное развитие животного резюмирует вкратце историю его предков в разные геологические периоды. Воспитатель должен заставить ребенка пройти через те ступени, которые были пройдены его предками, пройти быстрее, но без пропуска промежуточных этапов. В этом смысле история науки должна быть нашим первым руководителем.

Наши предки думали, что знают, что такое дробь, непрерывность, площадь кривой поверхности; лишь мы заметили, что они этого не знали. Точно так же наши ученики думают, что они это знают, когда уже принимаются серьезно за изучение математики. Если я, без предварительной подготовки, скажу им: «нет, вы этого не знаете, вы не понимаете того, что вам казалось понятным; я должен вам доказать то, что вы считали очевидным», — и если я в своих доказательствах буду опираться на посылки, которые им кажутся менее очевидными, чем заключения, то что подумают эти несчастные? Они подумают, что математическая наука есть не что иное, как произвольно собранная груда бесполезных умствований; и они либо почувствуют к ней отвращение, либо будут забавляться ею, как игрою, и в умственном отношении уподобятся греческим софистам.

Напротив, позже, когда ученик освоится с математическим суждением и ум его созреет в этой продолжительной работе, сомнения станут возникать сами собой, и тогда ваше доказательство будет своевременным. Оно разбудит новые сомнения, и вопросы предстанут перед юношей в той последовательности, в какой они представлялись нашим отцам; и это будет продолжаться до тех пор, пока он не разовьется в такой мере, что его будут удовлетворять только совершенно строгие определения. Недостаточно еще во всем сомневаться, нужно знать, почему возникает сомнение.

8. Главная цель обучения математике — это развить известные способности ума, а между этими способностями интуиция отнюдь не является наименее ценной. Благодаря ей мир математических образов остается в соприкосновении с реальным миром; и если чистая математика может обойтись без нее, то она всегда необходима, чтобы заполнить пропасть, которая отделяет символы от реального мира; к нему будет постоянно обращаться практик, а ведь на одного чистого геометра приходится сто практиков.

Инженер должен получить полное математическое образование, но для чего оно ему? Для того чтобы видеть различные стороны вещей, видеть их быстро. У него нет времени гоняться за мелочами. В сложных физических предметах, которые представляются его взору, он должен быстро найти точку, к которой могут быть приложены данные ему в руки математические орудия. Как бы он это сделал, если бы между предметами и орудиями оставалась та пропасть, которую вырыли логики?

9. Наряду с будущими инженерами имеются ученики, не столь многочисленные, которые должны стать учителями. Последние должны дойти до конца; для них прежде всего обязательно глубокое и строгое изучение основных принципов. Но отсюда не следует, что в них не надо культивировать интуиции. Ибо они могут составить себе ложное представление о науке, если всегда будут смотреть на нее с одной только стороны, и они не сумеют развить в своих питомцах того качества, которым сами не обладают.

Для чистого геометра эта способность необходима. Доказывают при помощи логики, изобретают при помощи интуиции. Хорошо уметь критиковать, еще лучше — уметь творить. Вы способны распознать, правильна ли данная комбинация, и это недурно, раз вы не обладаете искусством сделать выбор между всеми возможными комбинациями. Логика нам говорит, что на таком-то пути мы можем быть уверены, что не встретим препятствий; она не говорит, какой путь ведет к цели. Для этого необходимо видеть цель издалека, и интуиция есть та способность, которая этому нас учит. Без нее геометр походил бы на писателя, который был бы прикован к грамматике, но не имел бы идей. Но как может развиться такая способность, раз ее преследуют и изгоняют, лишь только она обнаруживается, раз приучают относиться к ней с недоверием еще раньше, чем убедились в пользе, которую она может принести.

Позвольте мне здесь мимоходом остановиться на важности письменных работ. Эти работы занимают, быть может, слишком мало места на экзаменах, например, в Политехнической школе. Мне говорят, что такие работы закрыли бы доступ хорошим ученикам, которые понимают пройденные курсы, хорошо их знают, но не способны сделать из них ни малейшего применения. Я сказал выше, что слово «понимать» имеет несколько значений: эти ученики «понимают» определения в первом из указанных мною значений этого слова; но мы видели, что такого понимания недостаточно ни для инженера, ни для геометра. А так как здесь необходимо сделать выбор, то я предпочитаю выбрать тех, которые понимают вполне.

10. Но искусство правильно рассуждать разве не есть драгоценное качество, которое преподаватель математики должен прежде всего культивировать? Я этого не забываю. Об этом нужно позаботиться с самого начала. Я был бы в отчаянии, если бы увидел, что геометрия выродилась в какую-то тахеометрию[1]) нижайшего уровня, и нисколько не подписываюсь под крайними доктринами некоторых немецких обер-учителей. Но при изучении математики и именно тех отделов ее, где указанные выше неудобства не встречаются, бывает немало случаев, которые дают место для упражнения учеников в правильном рассуждении. У нас имеются длинные сцепления

---

[1]) Тахеометрия — раздел геодезии, посвященный изучению методов измерения на земной поверхности с помощью специального прибора — тахеометра. — *Примеч. ред.*

теорем, в которых абсолютная логика сразу и как будто естественно заняла господствующее положение и которые, как образцы, вышедшие из рук первых геометров, достойны всякого удивления и подражания.

Именно в изложении основных принципов нужно избегать излишних тонкостей. Здесь они и не привились бы и к тому же были бы бесполезны. Нельзя все доказать и нельзя все определить. Приходится всегда делать заимствование у интуиции. Неважно, сделаем ли мы это заимствование немного раньше или немного позже, будет ли оно немного больше или меньше, лишь бы мы, правильно пользуясь теми посылками, которые даны нам интуицией, научились правильно рассуждать.

11. Можно ли, однако, удовлетворить столь противоположным условиям? Возможно ли это в особенности тогда, когда приходится дать определение? Как найти такую краткую формулировку, которая одновременно удовлетворяла бы непреклонным правилам логики, нашему желанию понять то место, которое занимает новое понятие в совокупности знаний, нашей необходимости мыслить образами? Чаще всего такой формулировки найти нельзя, и вот почему недостаточно высказать определение: необходимо его подготовить и необходимо его оправдать.

Что я хочу этим сказать? Вы знаете, как часто говорят: всякое определение включает в себя аксиому, так как оно утверждает существование определенного объекта. Определение будет, следовательно, оправдано с точки зрения логической лишь тогда, когда будет доказано, что оно не находится в противоречии ни с терминами, ни с ранее допущенными истинами.

Но это не все. Определение теперь называют соглашением; но большинство умов возмутится, если вы захотите навязать это определение как соглашение произвольное. Они успокоятся только тогда, когда вы им дадите ответ на многочисленные вопросы, которые у них возникнут.

Чаще всего математические определения, как это показал Лиар, суть целые построения, составленные при помощи простейших понятий. Но почему эти элементы соединены именно данным образом, когда возможна еще тысяча других способов соединения? Каприз ли это? А если нет, то почему данная комбинация имеет больше прав на существование, чем все прочие? Какой необходимости она отвечает? Как можно было предвидеть, что она сыграет важную роль в развитии науки, что она сократит наши суждения и наши вычисления? Существует ли в природе некоторый особый предмет, который является, так сказать, неясным и грубым прообразом такой комбинации?

Это не все. Если вы ответите на эти вопросы удовлетворительно, то мы увидим, что принятую комбинацию нужно окрестить каким-либо именем. Но выбор имени не является произвольным. Нужно объяснить, какими аналогиями руководились, избирая имя. Если же аналогичное имя присваивалось различным вещам, то нужно показать, что эти вещи отличаются между собой только материально, по форме же близки друг к другу, что их свойства подобны и, так сказать, параллельны.

Вот какой ценой можно удовлетворить всем притязаниям. Если формулировка достаточно правильна, чтобы удовлетворить логика, то ее оправдание удовлетворит интуитивиста. Но лучше поступить иначе: необходимо, чтобы оправдание во всех случаях, когда это возможно, предшествовало формулировке и подготовляло ее; изучение нескольких частных примеров лучше всего приводит к общей формулировке.

Еще другое обстоятельство: каждая часть формулированного определения имеет целью установить отличие определяемого объекта от класса других близких предметов. Определение будет понято лишь тогда, когда вы покажете не только определяемый предмет, но и те соседние предметы, от которых его надобно отличать; когда вы сделаете явственным это отличие и при этом прибавите: «вот для чего я внес в определение то-то и то-то».

Теперь нам нужно перейти от общих суждений к исследованию вопроса, каким образом все изложенные мною несколько абстрактные принципы могут быть приложены в арифметике, геометрии, анализе и механике.

Арифметика

12. Нет нужды определять целое число; но зато обыкновенно определяют действия над целыми числами. Я предполагаю, что ученики выучивают определения наизусть и не связывают с ними никакого смысла. Для этого у меня есть два основания: во-первых, учеников заставляют заучивать определения слишком рано, когда их ум не чувствует в этом никакой потребности; во-вторых, даваемые им определения неудовлетворительны с логической точки зрения. Для сложения нельзя найти хорошее определение просто потому, что нельзя же все определить и необходимо где-нибудь остановиться. Сказать: «сложение заключается в прибавлении» — не значит дать определение. Все, что можно сделать, это взять за исходный пункт некоторое число конкретных примеров и сказать: «действие, которое мы сделали, называется сложением».

Иное дело при вычитании; его можно логически определить как действие, обратное сложению. Но следует ли с этого и начинать? И здесь надобно начать с примеров, выяснить на них взаимность этих двух действий; тогда определение будет и подготовлено и оправдано.

То же самое нужно сказать об умножении. Надо взять частную задачу и показать на ней, что она может быть разрешена, если складывать между собой равные числа. Затем уже можно показать, что к такому же результату можно прийти посредством умножения, т. е. посредством действия, которое учениками уже усвоено, и тогда логическое определение выяснится само собой.

Деление необходимо определить как действие, обратное умножению; но начать нужно с примера, заимствованного из повседневного обихода, например с деления какого-нибудь предмета на равные доли, и на этом примере показать, что делимое получается посредством умножения.

Остаются действия над дробями. Некоторые затруднения здесь представляет только умножение. Лучше изложить сначала теорию пропорций, так как только из нее можно извлечь логическое определение.

Но для того чтобы стали приемлемы те определения, которые встречаются в начале этой теории, необходимо предварительно воспользоваться многими примерами, заимствованными из классических задач на тройное правило, вводя в них дробные величины. Можно без боязни прибегать к геометрическим образам для ознакомления учеников с понятием о пропорции; для этого либо нужно вызвать в их памяти воспоминания, если они уже занимались геометрией, либо обращаться к их непосредственной интуиции, что, между прочим, подготовит их к занятию геометрией. Прибавлю, наконец, что, дав определение умножения дробей, необходимо оправдать это определение, показав, что умножение является действием переместительным, сочетательным и распределительным, а также указать при этом, что такое доказательство приводится для оправдания определения.

Отсюда видно, какую роль играют во всем этом геометрические образы, и эта роль оправдывается философией и историей науки. Если бы арифметика не имела никакой геометрической примеси, она знала бы только целые числа; для приспособления к нуждам геометрии она кроме них изобрела еще и нечто другое.

Геометрия

В геометрии мы встречаемся на первых шагах с понятием о прямой линии. Можно ли определить прямую линию? Обычное определение ее как кратчайшего расстояния от одной точки до другой меня не удовлетворяет. Я исходил бы просто из линейки и показал бы ученику, как можно проверить линейку, повернув ее другой стороной, такая проверка есть истинное определение прямой линии: прямая линия — это ось вращения. Затем надобно ученику показать, что линейку можно проверить посредством скольжения, и при этом обнаружится одно из наиболее важных свойств прямой линии. Что же касается того свойства, что прямая линия есть кратчайшее расстояние между двумя точками, то это уже теорема, которая может быть доказана аподиктически[1]), но это доказательство слишком тонко, чтобы найти себе место в курсе средней школы. Лучше было бы показать, что линейка, предварительно проверенная, налагается на натянутую проволоку. При всех затруднениях такого рода можно без опасений умножать число аксиом, оправдывая их даже на грубых примерах. Некоторое число аксиом необходимо должно быть допущено, и если число их немного превосходит то, которое строго необходимо, то беда еще невелика. Главное — это научить правильно рассуждать при помощи раз допущенных аксиом. Дедушка Сарсей[2]) часто говорил, что в театре зритель охотно принимает те постулаты, которые ему навязаны сначала, но раз занавес поднят, он становится неумолимым в своей логической требовательности. То же самое происходит в математике.

Для определения круга можно исходить из циркуля. Ученики с первого взгляда узнают начерченную кривую. Затем им покажут, что расстояние между двумя точками инструмента остается постоянным, что одна из этих точек неподвижна, а другая движется, и таким образом ученики естественно придут к логическому определению. Определение плоскости содержит в себе аксиому, этого не нужно скрывать. Возьмем рисовальную доску и покажем, что движущаяся линейка постоянно накладывается на эту плоскость, сохраняя при этом три степени свободы. Сравним затем плоскость с цилиндром и конусом, с поверхностями, на которые прямая может быть наложена только при сохранении двух степеней свободы. Возьмем далее три рисовальные доски и покажем сначала, что они, будучи наложены одна на другую, могут скользить при трех степенях свободы. И, наконец, чтобы установить различие между плоскостью и сферой, покажем, что две доски, накладывающиеся порознь на третью, накладываются также друг на друга.

Быть может, вас удивит это постоянное применение подвижных инструментов. Это не грубый прием, он более философский, чем это кажется с первого

[1]) Аподиктическим (*греч*) называется такое доказательство, которое исключает возможность противного. — *Примеч. ред*

[2]) Франциск Сарсей (1828—1899) — известный в то время французский театральный критик и журналист. — *Примеч. ред.*

взгляда. Что такое геометрия для философа? Это изучение некоторой группы. Какой именно? Группы движений твердых тел. Каким же образом определить эту группу, не заставляя двигаться некоторые твердые тела?

Должны ли мы сохранить классическое определение параллельных линий и сказать, что параллельными называются такие прямые, которые расположены в одной плоскости и никогда не встречаются, сколько бы их ни продолжали? Нет, ибо это определение отрицательное, оно не может быть проверено опытом и не может быть, следовательно, рассматриваемо как непосредственное данное интуицией. Определение это не может быть сохранено особенно еще потому, что оно совершенно чуждо понятию о группе, чуждо идее о движении твердых тел, которая, как я уже сказал, является истинным источником геометрии. Не лучше ли определить сначала прямолинейное переносное движение какой-либо неизменяемой фигуры как такое движение, в котором все точки этой фигуры описывают прямолинейные траектории, показать, что подобное перемещение возможно, когда треугольник скользит по линейке? Из экспериментального констатирования этого факта, возведенного в аксиому, легко было бы вывести как понятие о параллельной прямой, так и сам евклидов постулат.

Механика

Мне нет надобности останавливаться на определении скорости или ускорения, а также и других кинематических понятий; они с большим удобством могут быть отнесены к определению производной. Я остановлюсь, напротив, на динамических понятиях о силе и массе.

Одна вещь меня поражает, а именно: сколь многие молодые люди, получившие среднее образование, далеки от того, чтобы применять к реальному миру те механические законы, которые им были преподаны. И это не только потому, что они к этому неспособны, но и потому, что об этом даже и не думают. Для них мир науки и мир реальности отделены друг от друга непроницаемой перегородкой. Нередко можно видеть господина, прилично одетого, вероятно, бакалавра, сидящего в карете и воображающего, что он помогает ей двигаться, толкая ее вперед, вопреки принципу действия и противодействия.

Если мы попытаемся проанализировать душевное состояние наших учеников, то это нас менее удивит. Каково в их глазах настоящее определение силы? Не то определение, которое они произносят наизусть, но то скрытое в далеком углу их разума, которое из него всем управляет? Вот это определение: силы суть стрелы, при помощи которых составляются параллелограммы. Эти стрелы суть воображаемые существа, которые ничего общего не имеют с тем, что существует в природе. Но этого не случилось бы, если бы раньше, чем изображать силы при помощи стрелок, ученикам показали бы их в действительности.

Как же определить силу? Логическое определение, как я это показал в другом месте, вряд ли уместно. Есть определение антропоморфное: ощущение мускульного усилия, но оно поистине слишком грубо и ничего полезного из него извлечь нельзя.

Вот тот путь, по которому нужно следовать. Для того чтобы познакомить с понятием силы, нужно показать в последовательном порядке все виды этого понятия. Эти виды очень многочисленны и разнообразны, как-то: давление жидкостей на стенки сосудов, в которых они заключаются; напряжение проволок; упругость пружины; тяжесть, которая действует на все молекулы тела; трение; взаимное нормальное действие и противодействие двух твердых тел, касающихся друг друга.

Это определение, конечно, только качественное. Нужно научиться измерять силу. Здесь надобно сначала показать, что можно одну силу заменить другой, не нарушая равновесия. Первый пример такой замены мы найдем в рычажных весах и в двойном взвешивании Борда [1]). Мы покажем затем, что данный вес может быть заменен не только другим весом, но и силами, отличающимися по своей природе; на-

[1]) Борда (1733—1799) — французский ученый. Усовершенствовал способы точного взвешивания тел. — *Примеч. ред.*

пример, нажим Прони[1]) позволяет нам заменить вес трением.

Из всего этого вытекает понятие об эквивалентности двух сил.

Необходимо теперь определить направление силы. Если сила F эквивалентна другой силе F', приложенной к данному телу через посредство натянутой проволоки, так что сила F может быть заменена силой F' без всякого нарушения равновесия, то точка приложения проволоки будет, согласно определению, точкою приложения силы F' и, следовательно, эквивалентной силы F. Направление проволоки будет направлением силы F' и направлением эквивалентной силы F.

Отсюда мы переходим к сравнению величины сил. Если одна сила может заместить две другие одного и того же направления, значит, она равна их сумме; показать это можно на примере с гирей в 20 граммов, замещавшей две гири по 10 граммов.

Достаточно ли этого? Нет еще. Мы умеем сравнивать интенсивность двух сил, имеющих одно и то же направление и одну и ту же точку приложения. Нужно уметь производить сравнения и в том случае, когда направления различны. Для этого вообразим проволоку, перекинутую через блок и натянутую при помощи гири; мы скажем тогда, что натяжение обеих частей проволоки одинаково и равно весу натягивающего груза.

Вот наше определение. Оно позволяет нам сравнить натяжение двух частей проволоки или нити и, пользуясь предыдущими определениями, сравнить любые две силы, имеющие то же направление, что и обе нити. Нужно оправдать его, показав, что натяжение второй части нити остается тем же при том же натягивающем весе, каковы бы ни были число и расположение направляющих блоков. Нужно дополнить еще это определение, указав, что оно верно лишь в тех случаях, когда блоки не производят трения.

Дав эти определения, нужно показать, что точка приложения, направление и интенсивность достаточны

---

[1]) Прони (1755—1839) — французский ученый и инженер, которому принадлежит целый ряд работ по прикладной механике. Предложил нажим с рычагом для измерения работ машин. — *Примеч. ред.*

для определения силы; что две силы, у коих эти три элемента одинаковы, всегда эквивалентны и всегда могут друг друга заменить как в состоянии равновесия, так и в состоянии движения, и притом независимо от других сил, привходящих в систему.

Нужно показать, что две сходящиеся силы всегда могут быть заменены одной равнодействующей и что эта равнодействующая остается одной и той же как в том случае, когда тело остается в покое, так и в случае его движения, и притом независимо от других приложенных к нему сил.

Нужно показать, наконец, что силы, определенные таким образом, как мы показали, удовлетворяют принципу равенства действия и противодействия.

Все это есть опыт, но только опыт и может нас этому научить.

Достаточно привести несколько примеров из тех обычных действий, которые ученики без всяких колебаний производят ежедневно, и сделать на их глазах несколько простых и хорошо подобранных опытов.

Когда ученики прошли по всем этим обходным путям, можно перейти к изображению сил при помощи стрелок, но я считал бы желательным, чтобы воспитатели, развивая в учениках способность рассуждать, возвращались время от времени от символа к реальности. Не представит труда, например, иллюстрировать параллелограмм сил при помощи прибора, составленного из трех нитей, проходящих через блоки и натянутых посредством грузов, которые уравновешивают друг друга в одной и той же точке.

Зная силу, легко определить массу. На этот раз определение должно быть заимствовано из динамики. Иначе этого сделать нельзя, так как цель, которой здесь хотят достигнуть, заключается в уяснении различия между массой и весом. Здесь определение также должно быть подготовлено рядом опытов. У нас есть машина, которая, как будто, нарочно создана для того, чтобы познать, что такое масса, это — машина Атвуда. Затем следует напомнить о законах падения тел, о том, что ускорение тяжести остается одним и тем же для тяжелых и легких тел, что оно изменяется вместе с географической широтой и т. д.

Если вы мне теперь скажете, что методы, которые я пропагандирую, давно уже применяются в лицеях, я буду более обрадован, чем удивлен. Я знаю, что в общем у нас обучение математике поставлено удовлетворительно. Я не хочу, чтобы оно было нарушено, это меня опечалило бы, я желаю лишь медленных прогрессивных улучшений. Это обучение не должно подвергаться крутым колебаниям и капризу преходящей моды. Его высокая воспитательная ценность померкла бы в такой буре. Здравая и прочная логика должна по-прежнему лежать в его основании. Определение, внушаемое при помощи примеров, всегда необходимо, но оно должно подготовлять определение, а не заменять его; оно должно по крайней мере выяснить желательность такого логического определения в тех случаях, когда это последнее с пользой для дела может быть дано лишь на ступени высшего обучения.

Вы, конечно, понимаете, что изложенными соображениями я отнюдь не отказываюсь от того, что писал раньше. Я часто имел случай критиковать некоторые определения, которые я теперь сам же предлагаю. Эта критика сохраняет всю свою силу. Определения, о которых идет речь, могут быть только предварительными. Но пройти через эти определения необходимо.

Глава III

МАТЕМАТИКА И ЛОГИКА

Введение

Можно ли математику свести к логике, не обращаясь предварительно к тем принципам, которые ей, математике, свойственны? Существует школа математиков, которая со всей страстью и верой в дело стремится доказать это. Она выработала специальный язык, в котором нет больше слов, а имеются одни только знаки. Этот язык понятен только немногим посвященным, так что профаны склонны преклоняться перед категорическими утверждениями горячих адептов. Небесполезно, однако, ближе исследовать эти утверждения, чтобы убедиться, насколько оправдывается тот категорический тон, с которым они высказываются.

Но чтобы понять сущность вопроса, необходимо познакомиться с историческими деталями дела и в особенности вспомнить характер работ Кантора.

Понятие бесконечности уже давно было введено в математику. Но эта бесконечность была такой, какую философы называют потенциальной. В математике бесконечность обозначала количество, способное расти выше или ниже какого бы то ни было предела; это было изменяющееся количество, о котором можно было сказать, что оно перейдет все пределы, но нельзя было сказать, что оно их перешло. Кантор решил ввести в математику актуальную бесконечность, т. е. количество, не только способное перейти все пределы, но уже перешедшее через них. Он поставил себе вопросы вроде следующих: существует ли больше точек в пространстве, чем целых чисел? Существует ли больше точек в пространстве, чем точек на плоскости? И так далее.

Число целых чисел, число точек в пространстве и т. д. составляет то, что Кантор назвал кардинальным трансфинитным числом, т. е. таким количественным числом, которое больше всех обыкновенных количественных чисел. Кантор затем занялся сравнением этих кардинальных трансфинитных чисел. Размещая в соответствующем порядке элементы в совокупности, составленной из бесконечного числа таких элементов, он изобрел так называемые порядковые трансфинитные числа, на которых я не буду здесь останавливаться.

Многие математики последовали за Кантором и поставили ряд аналогичных вопросов. Они в такой степени освоились с трансфинитными числами, что готовы поставить теорию конечных чисел в зависимость от теории кардинальных чисел Кантора. По их мнению, чтобы вести преподавание арифметики по действительно логическому методу, необходимо начать с установления общих свойств кардинальных трансфинитных целых чисел, а затем выделить из них очень небольшой класс обыкновенных целых чисел. Этим способом можно было бы достигнуть цели, т. е. доказать все предложения, относящиеся к этому небольшому классу (т. е. всю нашу арифметику и нашу алгебру), не прибегая ни к какому началу, лежащему вне логики.

Этот метод, очевидно, противоречит всякой здоровой психологии. Конечно, не этим путем шел человеческий ум, создавая математику; и адепты нового метода, я полагаю, не думают ввести его на ступени среднего образования. Но по крайней мере логичен ли этот метод или, лучше сказать, безошибочен ли он? В этом можно усомниться.

Однако геометры, пользовавшиеся этим методом, очень многочисленны. Они собрали массу формул. Написав мемуары, в которых формулы не чередовались со словесными объяснениями, как это делается в обыкновенных математических книгах, а в которых, следовательно, такие объяснения совершенно отсутствуют, они вообразили, что освободились от всего того, что не представляет собой чистой логики. К несчастью, они пришли к противоречивым результатам. Это так называемые антиномии Кантора, к которым мы еще вернемся. Эти противоречия, однако, их не обескуражили, и они попытались внести такие изменения в свои правила, при которых обнаружившиеся уже противоречия исчезли; но мы при этом не приобрели уверенности в том, что не обнаружатся новые противоречия.

Настало время для справедливой оценки этих преувеличений. Я не надеюсь убедить упомянутых математиков: слишком долго дышали они своей атмосферой. Да и, кроме того, если вы опровергли одно из их доказательств, вы можете быть уверены, что оно возродится лишь в слегка измененном виде. Некоторые из доказательств уже несколько раз возрождались из пепла, наподобие той лернейской гидры[1]), у которой вырастали новые головы. Геркулес выпутался из затруднения, потому что его гидра имела девять голов, если не одиннадцать; но здесь слишком много голов: они имеются в Англии, в Германии, в Италии, во Франции, и Геркулес должен был бы отказаться от состязания. Я обращаюсь поэтому только к непредубежденным людям, обладающим здравым смыслом.

---

[1]) Чудовищная девятиголовая змея, которая, как говорят древнегреческие мифы, жила в Лернейском болоте. На месте отрубленных голов у нее вырастали новые.— *Примеч. ред.*

I

В последние годы появилось много трудов, посвященных чистой математике и философии математики, имевших своей задачей выделить и изолировать логические элементы математического рассуждения. Эти труды были ясно изложены и исследованы в работе Кутюра, озаглавленной: «Основания математических наук».

По мнению Кутюра, новейшие труды, в особенности работы Рассела и Пеано, окончательно разрешили давний спор между Лейбницем и Кантом[1]). Они показали, что не существует синтетического априорного суждения (этим именем Кант называл суждения, которые не могут быть ни доказаны аналитически, ни сведены к тождествам, ни установлены экспериментально); они показали, что математические науки целиком могут быть сведены к логике и что интуиция не играет в них никакой роли.

Все это Кутюра изложил в названном выше сочинении. Еще отчетливее высказал он это в речи, произнесенной на юбилее Канта, высказал так убедительно, что мой сосед сказал в полголоса: «мы видим ясно, что истекло столетие со дня смерти Канта».

Можем ли мы подписаться под этим решительным приговором? Я этого не думаю и постараюсь ниже показать, почему я этого не думаю.

II

Что нам сразу бросается в глаза в новой математике, так это ее чисто формальный характер. «Вообразим, — говорит Гильберт, — три рода вещей, которые мы назовем точками, прямыми и плоскостями; условимся, что прямая будет определяться двумя точками, и вместо того, чтобы сказать, что данная

[1]) Имеется в виду не действительный спор между ними, который был бы невозможен, поскольку они жили в разное время, а противопоставление взглядов Лейбница и Канта на математику. Лейбниц считал, что все математические науки можно воплотить в некотором универсальном логическом исчислении, Кант же утверждал, что математические положения могут доказываться только путем обращения к наглядному представлению, которое дается априорными формами чувственности. — *Примеч. ред.*

прямая определяется данными двумя точками, мы будем говорить, что она проходит через эти две точки или что эти две точки расположены на этой прямой». Что это за вещи, мы не только не знаем, но и не должны стремиться узнать. Нам этого не нужно, и всякий, кто никогда не видел ни точки, ни прямой, ни плоскости, так же легко мог бы построить геометрию, как и мы. Слова «проходят через» или «расположены на» не должны вызывать у нас никакого образа, ибо первые являются синонимом слова «определяться», вторые — синонимом слова «определять».

Таким образом, для доказательства теоремы не нужно и даже бесполезно знать, что она хочет сказать. Геометра можно было бы заменить «логической машиной», выдуманной Стенли Джевонсом. Или, если угодно, можно было бы выдумать машину, в которую через один конец были бы введены аксиомы, а в другом конце ее были бы собраны теоремы, наподобие той легендарной машины в Чикаго, в которую вкладывают живых поросят и из которой извлекают окорока и сосиски. Математик, как и эта машина, отнюдь не должен понимать, что он делает.

Я не ставлю в вину Гильберту этот формальный характер его геометрии. Он должен был прийти к ней, разрешая ту проблему, которую он себе ставил. Он хотел довести до минимума число основных аксиом геометрии и перечислить их все без остатка. Но в тех суждениях, в которых наш ум обнаруживает активность, в которых интуиция еще играет роль, трудно отделаться от внесения постулата или аксиомы, которые незаметно входят в суждение. Лишь в случае, если бы все геометрические суждения приняли чисто механическую форму, Гильберт мог бы быть уверенным в том, что он исполнил свое намерение и успешно закончил свою задачу.

То, что Гильберт сделал в геометрии, другие захотели сделать в арифметике и в анализе. Однако если бы они в этом даже и успели, то разве кантианцы были бы осуждены на полное молчание? Может быть, и нет, ибо когда мы сообщаем математической мысли пустую форму, эта мысль, конечно, подвергается искажению. Допустим даже, что удалось установить, что все теоремы могут быть выведены из конечного числа аксиом путем чисто аналитических приемов, путем простых логических комбинаций, и что эти аксиомы суть не что иное, как соглашения. Философ, однако, сохранил бы за собой право исследовать происхождение этих условий и определить, почему эти условия оказались предпочтительными перед противоположными им.

Кроме того, не одна только логическая правильность суждений, ведущих от аксиом к теоремам, должна нас занимать. Разве вся математика исчерпывается правилами совершенной логики? Это было бы все равно, как если бы мы сказали, что все искусство шахматного игрока сводится к правилам хода пешек. Из всех построений, которые могут быть скомбинированы из материалов, доставляемых логикой, нужно сделать выбор. Настоящий геометр и производит этот выбор здраво, руководствуясь верным инстинктом или же некоторым смутным сознанием о — я не знаю какой именно — более глубокой и более скрытой геометрии, которая одна и составляет ценность воздвигнутого здания.

Искать происхождение этого инстинкта, изучать законы этой глубокой геометрии, которые чувствуются, но словесно не формулируются — вот прекрасная задача для философов, которые не допускают, что логикой исчерпывается все. Но не на эту точку зрения хочу я стать, не так хочу я ставить вопрос. Инстинкт, о котором мы только что говорили, необходим изобретателю, но на первый взгляд кажется, будто при изучении уже созданной науки можно обойтись и без него. И вот я хочу исследовать, можно ли, приняв однажды принципы логики, я уж не говорю открыть, но даже доказать все математические истины, не прибегая снова к интуиции.

III

На этот вопрос я однажды уже дал отрицательный ответ (см. «Наука и гипотеза», глава I). Должен ли я этот ответ изменить ввиду появившихся новых трудов? Если я в то время ответил отрицательно, то это потому, что «принцип совершенной индукции» казался мне, с одной стороны, необходимым для математика, а с другой стороны, не сводимым к логике.

Известно, что этот принцип заключается в следующем.

«Если какое-либо свойство справедливо относительно числа 1 и если установлено, что оно справедливо относительно числа $n+1$, коль скоро оно справедливо относительно числа n, то оно будет верно для всех целых чисел».

В этом я по преимуществу видел математическое суждение. Я не хотел этим сказать, как некоторые это думали, что все математические суждения могут быть сведены к приложению этого принципа. Исследуя эти суждения ближе, можно заметить, что в них применяются многие другие аналогичные принципы, обладающие теми же существенными признаками. В их ряду принцип полной индукции является лишь простейшим, и вот почему я остановился на нем как на типичном.

Название принципа совершенной индукции, упрочившееся за этой формой суждения, не может быть признано правильным. Этот способ суждения представляет настоящую математическую индукцию, которая отличается от обыкновенной индукции только степенью своей достоверности.

IV

Определения и аксиомы

Существование подобных принципов ставит непримиримых логиков в затруднительное положение. Но как думают они выпутаться из него? Принцип полной индукции, говорят они, не есть аксиома в собственном смысле слова или априорное синтетическое суждение, он есть просто определение целого числа. Следовательно, этот принцип является простым соглашением. Чтобы разобраться в этой точке зрения, нужно подробнее исследовать отношения между определениями и аксиомами.

Обратимся сначала к статье Кутюра о математических определениях, появившейся в выходящем в Женеве журнале «Математическое образование». Мы найдем здесь различие между прямым определением и определением при помощи постулатов.

«Определение при помощи постулатов, — говорит Кутюра, — применяется не к одному понятию, а к системе понятий; оно заключается в перечислении основных соотношений, их связывающих и позволяющих доказать все прочие их свойства; эти соотношения и суть постулаты»...

Если предварительно были определены все эти понятия, за исключением одного, то это последнее и будет по определению тем объектом, который проверяет эти постулаты.

Итак, некоторые недоказуемые аксиомы математики суть лишь скрытые определения. Такая точка зрения часто правомерна, и я сам ее принял, когда шел вопрос, например, о постулате Евклида. Другие аксиомы геометрии недостаточны для полного определения расстояния между двумя точками. Ввиду этого из всех величин, удовлетворяющих этим остальным аксиомам, расстояние будет по определению той именно величиной, которая удовлетворяет постулату Евклида.

Так вот логики в применении к принципу совершенной индукции допускают то же самое, что я допускаю относительно постулата Евклида; они хотят видеть в этом принципе только скрытое определение.

Но они вправе это сделать лишь при двух условиях. Стюарт Милль сказал, что всякое определение заключает в себе одну аксиому, а именно ту, которая утверждает существование определяемого объекта. В таком случае не аксиома будет скрытым определением, а, напротив, определение будет скрытой аксиомой. Милль понимал слово «существование» в эмпирическом и материальном смысле слова. Он хотел сказать, что, определяя круг, утверждают тем самым, что в природе имеются круглые предметы.

В таком виде его мнение неприемлемо. Математика не зависит от существования материальных объектов. В математике слово «существующее» имеет только один смысл и обозначает: «свободное от противоречия». При такой поправке мысль Стюарта Милля становится точной; определяя какой-нибудь объект, мы утверждаем, что определение не заключает противоречия.

Если, следовательно, мы имеем систему постулатов и если мы можем доказать, что эти постулаты не заключают противоречия, то мы вправе рассматривать их как определения одного из тех понятий, которые фигурируют в этой системе предложений. Если мы этого доказать не можем, то мы допускаем понятие без доказательства. Тогда мы имеем аксиому; и если мы искали определение в постулатах, то мы обратно находим аксиому в определении.

Чаще всего, для того чтобы доказать, что определение не заключает противоречия, прибегают к методу примеров: пытаются создать пример предмета, удовлетворяющий определению. Возьмем определение, выражаемое при помощи постулатов. Мы хотим определить понятие *A* и говорим, что, согласно определению, *A* есть всякий предмет, для которого известные постулаты истинны. Если мы можем прямо доказать, что все эти постулаты истинны для известного предмета *B*, то определение будет оправдано, и предмет *B* будет примером понятия *A*. Мы будем уверены, что постулаты непротиворечивы, так как имеются случаи, в которых все они оказываются истинными.

Но такое прямое доказательство при помощи примера не всегда возможно.

Чтобы установить, что постулаты не содержат в себе противоречия, нужно рассмотреть все предложения, которые могут быть выведены из данных постулатов как посылок, и показать, что среди этих предложений нет двух, противоречащих друг другу. Если число этих предложений конечное, то прямая проверка возможна. Но такой случай и встречается редко, и интереса не представляет.

Если же число этих предложений оказывается неограниченным, то прямая проверка уже невозможна. Тогда необходимо обратиться к таким способам доказательства, в которых вообще нельзя обойтись без принципа полной индукции, т. е. того принципа, который именно и надлежит проверить.

Мы указали на одно условие, которому логики должны были удовлетворить, и мы увидим ниже, что они ему не удовлетворили.

V

Есть еще другое условие. Если мы даем определение, то мы делаем это для того, чтобы им пользоваться.

В пределах некоторого рассуждения, например, мы неоднократно встречаемся с определяемым словом. Возникает вопрос: вправе ли мы в отношении к предмету, который мы в этом рассуждении называем нашим термином, утверждать тот постулат, который послужил для его определения? Очевидно, вправе, если термин сохранил свой смысл, если мы неявно (implicite) не приписали ему другого значения. Но иногда такое изменение смысла имеет место и при этом чаще всего остается незамеченным. Необходимо убедиться, каким путем это слово проникло в наше рассуждение, не вошло ли оно в другом определении, отличающемся от того, которое было формулировано первоначально.

Это затруднение встречается во всех приложениях математического знания. Математическое понятие получило вполне чистое и строгое определение, которое не возбуждает никаких колебаний в чистой математике. Но, когда мы его применяем, например, к физическим наукам, тут мы уже имеем дело не с этим чистым понятием, но с конкретным предметом, который зачастую является лишь грубым образом этого понятия. Сказать, что этот предмет удовлетворяет, хотя бы приблизительно, определению, это значит высказать новую истину, которая может быть подтверждена только опытом и которая уже не имеет характера условного постулата.

Но то же затруднение встречается и в пределах чистой математики.

Вы даете тонкое определение числа. Но, однажды дав его, вы о нем больше не думаете, ибо в действительности не из этого определения вы узнали, что такое число, а вам это уже давно было известно; и когда в дальнейшем вы употребляете слово «число», вы приписываете ему такое же значение, какое ему дает первый встречный. Чтобы узнать, каково это значение и остается ли оно одним и тем же в той или другой фразе, необходимо проследить, что заставило вас заговорить о числе и ввести это слово в обе фразы. Я не буду больше здесь по этому поводу распространяться, так как нам еще представится случай вернуться к этому вопросу.

Итак, вот слово, которому мы явно (explicite) дали некоторое определение A; затем мы пользовались им в рассуждении таким образом, что неявно (implicite) внесли другое его определение *B*. Возможно, что оба определения обозначают одно и то же. Но самая эта возможность есть уже новая истина, которую нужно либо доказать, либо допустить как независимую аксиому.

Мы увидим ниже, что логики столь же мало удовлетворили второму условию, сколько первому.

VI

Определения числа чрезвычайно многочисленны и разнообразны; я отказываюсь даже перечислить имена авторов, давших эти определения. В этом нет ничего удивительного. Если бы одно из них было удовлетворительно, не было бы нужды в прочих. Если всякий новый философ, занимавшийся этим вопросом, считал необходимым изобрести другое определение, то это потому, что определения предшественников его не удовлетворяли, а не удовлетворяли они его потому, что он усматривал в них petitio principii [1]).

Когда я читал труды, посвященные этой проблеме, я всегда испытывал чувство беспокойства; я ожидал, что натолкнусь на petitio principii, и если не встречал этой логической ошибки с самого начала, то всегда опасался, что просмотрел ее.

И это потому, что невозможно дать определение, не выражая его при помощи фразы; с другой стороны, трудно сказать фразу, не вводя в нее слова «число», или слова «несколько», или, наконец, какого-либо слова во множественном числе. И вот уже готова наклонная плоскость; в каждое мгновение мы рискуем впасть в petitio principii.

В дальнейшем я остановлюсь только на тех определениях, в которых petitio principii наиболее искусно скрыто.

VII

Пасиграфия

Символический язык, который создал Пеано, играет большую роль в новых исследованиях. Этот

[1]) Аргумент, основанный на выводе из положения, которое само требует доказательства. — *Примеч. ред.*

язык может оказать некоторые услуги, но мне кажется, что Кутюра приписывает ему такое преувеличенное значение, которое удивило бы и самого Пеано.

Существенным элементом в этом языке являются определенные алгебраические знаки, представляющие собой различные союзы: «если», «и», «или», «следовательно». Возможно, что эти знаки и удобны, но призваны ли они обновить всю философию — это совершенно другой вопрос. Трудно допустить, чтобы слово «если», изображенное при помощи знака $\supset$, приобрело особенное свойство, которого оно не имело раньше.

Это изобретение Пеано названо было сначала пасиграфией, т. е. искусством писать математические трактаты, не употребляя ни одного слова из житейского словаря. Это название очень точно определяет и меру важности самого искусства. Но позже изобретению Пеано было предписано более высокое достоинство, и ему дали название логистики. Последнее слово, кажется, употребляется в военных школах для обозначения искусства квартирмейстера, искусства передвижения и распределения войск; но здесь нет никакого основания опасаться смешения понятий, и сразу видно, что новое слово выражает намерение революционизировать логику.

Применение нового метода можно видеть в математическом мемуаре Бурали-Форти, озаглавленном: «Вопрос о трансфинитных числах» и помещенном в XI томе «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo».

Я должен прежде всего сказать, что этот мемуар чрезвычайно интересен, и потому именно беру его в качестве примера, что он является важнейшим из всех трудов, написанных на новом языке. К тому же и люди непосвященные легко могут его читать благодаря имеющемуся в нем междустрочному итальянскому переводу.

Важность этого мемуара заключается в том, что в нем дан первый пример тех антиномий, которые встречаются в изучении трансфинитных чисел и которые на протяжении нескольких лет приводили в отчаяние математиков. Цель настоящего мемуара, говорит Бурали-Форти, это показать, что могут быть два трансфинитных числа (порядковых) a и b, причем a не будет ни равно, ни больше, ни меньше b.

Пусть читатель будет спокоен; чтобы понять рассуждение, которое последует, ему нет необходимости знать, что такое порядковое трансфинитное число.

Между тем Кантор точно показал, что между двумя трансфинитными числами, как и между двумя конечными числами, не может быть другого отношения, кроме равенства либо неравенства в ту или другую сторону. Но не о сути этого мемуара хочу я здесь говорить, это увлекло бы меня далеко от моего предмета. Я хочу лишь заняться формой и задаюсь вопросом, много ли выиграл автор в строгости положений, применяя эту форму, и вознаграждает ли она за те усилия, которые писатель и читатель должны употребить.

Мы видим, что Бурали-Форти определяет число 1 следующим образом:

$$1 = \iota T' \{\mathrm{Ko} \frown (u,\ h)\, \varepsilon\, (u \varepsilon\, \mathrm{Un})\}.$$

Это определение в высшей степени подходит для того, чтобы дать представление о числе 1 тем лицам, которые никогда о нем ничего не слышали!

Я слишком мало понимаю приверженцев Пеано, чтобы рискнуть его критиковать; но я опасаюсь, что это определение заключает petitio principii, так как я вижу цифру 1 в первой части и изображенное буквами слово «один» (Un) во второй части равенства.

Как бы то ни было, Бурали-Форти исходит из этого определения и после коротких вычислений приходит к уравнению

$$1 \varepsilon NO, \tag{27}$$

которое дает нам понять, что «один» есть число.

Так как нам теперь приходится иметь дело с определениями простых чисел, то мы напомним, что Кутюра также определил 0 и 1.

Что такое нуль? Это число элементов нулевого класса. А что такое нулевой класс? Это класс, который не содержит никакого элемента.

Определять нуль при помощи нулевого класса, а нулевой класс при помощи термина «никакой» — это значит поистине злоупотреблять богатством языка; поэтому Кутюра ввел усовершенствование в свое определение, написав:

$$0 = \iota\Lambda : \varphi x = \Lambda . \supset . \Lambda = (x \varepsilon \varphi x),$$

что обозначает: нуль есть число предметов, удовлетворяющих такому условию, которое никогда не выполняется.

Но так как «никогда» обозначает «ни в одном случае», то я не вижу значительного успеха в этой замене.

Спешу прибавить, что определение, которое Кутюра дает числу 1, более удовлетворительно.

«Один,— говорит он,— в сущности, есть число элементов класса, два любых элемента коего тождественны».

Это определение более удовлетворительно, как я сказал, в том смысле, что для определения понятия 1 автор не пользуется словом «один». Но зато он пользуется словом «два». И я боюсь, что если спросить у Кутюра, что такое «два», то он должен будет в ответе воспользоваться словом «один».

VIII

Вернемся к мемуару Бурали-Форти. Я сказал, что его заключения прямо противоположны выводам Кантора. Но однажды меня посетил Адамар. Разговор коснулся этой антиномии.

— Не кажется ли вам,— сказал я,— что рассуждение Бурали-Форти безупречно?

— Нет, напротив, я не вижу в нем никаких возражений Кантору. Кроме того, Бурали-Форти не имел права говорить о совокупности всех порядковых чисел.

— Простите, он имел это право, потому что всегда мог написать:

$$\Omega = T'(\mathrm{No}, \bar{\varepsilon} >).$$

— Я хотел бы знать, кто бы мог ему в этом воспрепятствовать, и можно ли сказать, что предмет не существует, если его назвали Ω?

Мои старания были тщетны, убедить Адамара я не мог (противоположное было бы, впрочем, очень прискорбно, так как он был прав). Потому ли это было, что я не говорил достаточно красноречиво на языке Пеано? Возможно; но, между нами говоря, я этого не думаю.

Таким образом, несмотря на весь этот пасиграфический аппарат, вопрос не был разрешен. Что это доказывает? Когда вопрос идет только о том, чтобы доказать, что один есть число, пасиграфия достаточна; но если представляется затруднение, если возникает антиномия, требующая разрешения, то пасиграфия становится бессильной.

Глава IV

НОВЫЕ ЛОГИКИ

I

Логика Рассела

Чтобы оправдать свои притязания, логика должна была преобразоваться. Народились новые логики, среди которых наиболее интересной является логика Рассела. Казалось бы, что в области формальной логики ничего нового нельзя сказать и что Аристотель давно узрел ее основы. Но поле действия, которое Рассел отводит логике, бесконечно шире, чем поле классической логики, и Рассел сумел высказать в этом отношении оригинальные и часто правильные взгляды.

Между тем как логика Аристотеля была преимущественно логикой классов и за исходную точку брала отношение субъекта к предикату, Рассел прежде всего подчиняет логику классов логике предложений. Классический силлогизм «Сократ — человек и т. д.» уступает место гипотетическому силлогизму: если *A* истинно, то *B* истинно, но если *B* истинно, то *C* истинно и т. д.; и эта идея, на мой взгляд, одна из наиболее счастливых, ибо классический силлогизм легко свести к гипотетическому, тогда как обратное превращение представляет затруднение.

Но это не все: логика предложений Рассела есть этюд о законах, по которым комбинируются союзы «если», «и», «или» и отрицание «не». Это значительное расширение старой логики. Свойства классического силлогизма без труда распространяются на гипотетический силлогизм, и в формах последнего легко узнаются схоластические формы. Мы находим здесь то, что является существенным в классической логике. Но теория силлогизма есть еще не что иное, как синтаксис союза «если» и, быть может, отрицания.

Присоединяя два других союза — «и» и «или»,— Рассел открывает логике новую область. Знаки «и», «или» подчиняются тем же законам, что и знаки $\times$ и $+$, т. е. переместительному, сочетательному и распределительному законам. Таким образом, «и» представляет логическое умножение, тогда как «или» представляет логическое сложение. Это также весьма интересно.

Рассел приходит к выводу, что какое-нибудь ложное предложение заключает в себе и все прочие истинные или ложные предложения. Кутюра говорит, что этот вывод покажется на первый взгляд парадоксальным. Но кто исправлял плохую кандидатскую математическую работу, тот мог заметить, насколько правильно смотрит на дело Рассел. Кандидат часто много трудится для того, чтобы найти первое ложное уравнение; но лишь только он его получил, для него уже не представляет никакого труда сделать из него самые неожиданные выводы, из которых иные могут оказаться и точными.

II

Отсюда ясно, насколько новая логика богаче классической логики. Символы разрослись и сочетаются в разнообразные комбинации, число которых уже неограничено. Вправе ли мы так сильно расширять смысл слова «логика». Разбирать этот вопрос и вступать с Расселом в спор о слове — занятие бесцельное. Признаем то, чего требует Рассел, но не будем удивляться, если окажется, что некоторые истины, которые мы считали несводимыми к логике в старом смысле этого слова, теперь сводятся к новой логике, которая совершенно отличается от прежней.

Мы ввели большое число новых понятий, и эти понятия не были простыми комбинациями старых. Рассел на этот счет не обманывался; не только в начале первой главы, т. е. логики предложений, но в начале второй и третьей глав, т. е. логики классов и отношений, он вводит новые слова, которые принимает как определению не подлежащие.

Но это не все, он вводит также принципы, которые признает недоказуемыми. Но эти недоказуемые принципы являются обращениями к интуиции, являются априорными синтетическими суждениями. Мы принимали их за интуитивные, когда встречали их в более или менее явной форме в математических трактатах. Но изменился ли их характер от того, что смысл слова «логика» расширился и что мы находим их теперь в книге, носящей заголовок «Трактат по логике»? Они не изменили своей природы, они изменили лишь свое место.

III

Можно ли рассматривать эти принципы как скрытые определения?

Чтобы дать положительный ответ на этот вопрос, нужно было бы быть в состоянии доказать, что они не заключают в себе противоречия. Нужно установить, что, как бы далеко мы ни проводили ряд дедукций, мы никогда не впадем в противоречие с собой.

Можно было бы попытаться рассуждать таким образом. Мы можем проверить, что операции новой логики, будучи приложены к посылкам, не заключающим противоречия, приводят только к следствиям, также свободным от противоречия. Если, следовательно, после n операций мы не пришли к противоречию, то мы не придем к противоречию после $n+1$ операций. Невозможно, следовательно, наступление такого момента, когда противоречие началось бы, а это доказывает, что мы никогда не можем к нему прийти. Вправе ли мы так рассуждать? Нет, ибо это значило бы прибегнуть к полной индукции; принцип же полной индукции, будем это помнить, еще нам неизвестен.

Мы не вправе, следовательно, рассматривать эти аксиомы как скрытые определения, и нам остается только один исход: допустить для каждой из них новый акт интуиции. И такова именно, я думаю, мысль Рассела и Кутюра.

Таким образом, каждое из девяти неопределяемых понятий и каждое из двадцати недоказуемых предложений (я думаю, что если бы я считал, то насчитал бы их несколько больше), которые составляют основу новой логики, логики в широком смысле слова, предполагают акт новый, независимый от нашей интуиции, предполагают — почему этого не сказать? — настоящее синтетическое априорное суждение. В этом вопросе все, кажется, согласны. Но Рассел утверждает, что этими обращениями к интуиции дело и закончится, что в других обращениях не будет более нужды и можно будет построить всю математику, не вводя никакого нового элемента. Это мне и кажется сомнительным.

IV

Кутюра часто повторяет, что эта новая логика совершенно не зависит от идеи о числе. Я не стану подсчитывать, как часто в его изложении встречаются числительные, как количественные, так и порядковые, или неопределенные прилагательные, как, например, «несколько». Процитируем, однако, некоторые примеры:

«Логическое произведение двух или нескольких предложений есть...».

«Все предложения допускают только двоякую оценку: как истинные или как ложные».

«Относительное произведение двух отношений есть отношение».

«Отношение имеет место между двумя терминами» и т. д.

В некоторых случаях можно было бы избежать неудобства такого выражения, но иногда оно требуется существом дела. Отношение не может быть понято без двух терминов; нельзя иметь интуиции отношения, не имея в то же время интуиции двух его терминов; мало того, мы должны усмотреть, что есть два термина, ибо для того, чтобы можно было постигнуть отношение, необходимо, чтобы этих терминов было два и только два.

V

Арифметика

Я подхожу к тому, кто Кутюра называет теорией расположения (или порядка) и что является основанием арифметики в собственном смысле этого слова.

Кутюра начинает с формулировки пяти аксиом Пеано, независимость которых доказали Пеано и Падоа.

1. Нуль есть целое число.

2. Нуль не следует ни за каким целым числом.

3. Следующее за целым числом есть целое число; к этому следовало бы прибавить: всякое целое число имеет следующее за ним число.

4. Два целых числа равны, если равны следующие за ними числа.

Пятая аксиома есть принцип полной индукции.

Кутюра смотрит на эти аксиомы как на скрытые определения; они содержат выраженные при помощи постулатов определения нуля, целого числа и «следующего числа».

Но, как мы видели, для того чтобы основанное на постулатах определение могло быть принято, необходимо установить, что оно не заключает противоречия.

Имеем ли мы дело здесь с таким именно случаем? Нисколько.

Доказательства этого нельзя дать с помощью примера. Нельзя выбрать часть всех целых чисел, например первые три числа, и доказать, что они удовлетворяют определению.

Если я возьму ряд 0, 1, 2, то увижу, что он удовлетворяет аксиомам 1, 2, 4, 5. Но, для того чтобы он удовлетворял третьей аксиоме, необходимо еще, чтобы 3 было целым числом, следовательно, чтобы ряд 0, 1, 2, 3 удовлетворял всем аксиомам. При проверке окажется, что ряд 0, 1, 2, 3 удовлетворяет аксиомам 1, 2, 4, 5, но третья аксиома требует, сверх того, чтобы 4 было целым числом и чтобы ряд 0, 1, 2, 3, 4 удовлетворял всем аксиомам, и т. д.

Нет, следовательно, возможности доказать аксиомы для нескольких целых чисел, не доказывая их для всех. Приходится отказаться от доказательства путем примера.

Остается собрать все выводы из наших аксиом и рассмотреть, не заключают ли они в себе противоречия. Если бы число этих выводов было конечное, то это было бы легко сделать; но число выводов бесконечно велико, они охватывают всю математику или по крайней мере всю арифметику. Что же делать? Быть может, повторить рассуждение, указанное в разделе III.

Но мы уже сказали, что это рассуждение основано на полной индукции, а между тем дело идет именно о том, чтобы оправдать принцип полной индукции.

VI

Логика Гильберта

Я перехожу теперь к тому капитальному труду Гильберта, о котором последний сделал сообщение на Математическом конгрессе в Гейдельберге. Французский перевод этого труда, сделанный Пьером Бутру, появился в «Математическом образовании»; английский перевод, сделанный Халстедом, появился в «The Monist». В этом труде, изобилующем самыми глубокими мыслями, автор преследует такую же цель, как и Рассел, но во многих случаях отклоняется от своего предшественника.

«Если мы присмотримся ближе,— говорит он,— то мы заметим, что логические принципы, в той форме, в какой их обыкновенно представляют, уже включают в себя известные арифметические понятия, как, например, понятие совокупности, а, в некоторой мере, и понятие о числе. Таким образом, мы находимся как бы в заколдованном круге, и вот почему, во избежание всякого парадокса, мне кажется необходимым развивать одновременно логику и принципы арифметики».

Как мы видели выше, то, что Гильберт говорит о принципах логики в той форме, в какой их себе обыкновенно представляют, одинаково приложимо и к логике Рассела. Для Рассела логика предшествует арифметике; для Гильберта они «одновременны». Мы встретимся ниже с другими, более глубокими различиями, но мы будем их отмечать по мере того, как они перед нами предстанут; я предпочитаю следить шаг за шагом за развитием мысли Гильберта и цитировать текстуально наиболее важные места его работы.

«Рассмотрим прежде всего предмет 1». Заметим, что в это рассмотрение мы отнюдь не включаем понятия о числе, ибо само собой разумеется, что 1 в данном случае является только символом и что мы не стремимся узнать его значение. «Группы, образованные этим предметом, повторенным два, три или несколько раз...» Ну, здесь уже дело меняется; если мы вводим слова «два», «три», и, в особенности, «несколько», мы вводим понятие числа, а в таком случае понятие конечного целого числа, к которому нас приведет это рассуждение, окажется запоздалым. Автор был слишком предусмотрителен, чтобы не заметить этого petitio principii. В конце своего труда он пытается загладить погрешность.

Гильберт вводит затем два простых предмета 1 и =, рассматривает все комбинации из этих двух предметов, затем комбинации этих комбинаций и т. д. Само собой разумеется, что при этом нужно забыть обычное значение этих двух знаков, не нужно приписывать им никакого значения. Затем Гильберт распределяет эти комбинации в два класса, в класс «сущего» и в класс «не сущего», и впредь до следующего соглашения это распределение совершенно произвольно. Всякое утвердительное предложение показывает нам, что комбинация принадлежит классу сущего; всякое отрицательное предложение показывает, что известная комбинация относится к классу не сущего.

VII

Отметим теперь некоторое различие, имеющее важное значение. Для Рассела какой-нибудь предмет, который он обозначает буквой x, есть предмет абсолютно неопределенный, относительно которого он не делает никаких предположений; для Гильберта этот предмет есть одна из комбинаций, составленных из символов 1 и = не нужно представлять, будто здесь вводится что-либо новое помимо комбинации уже определенных предметов. Гильберт, впрочем, формулирует свою мысль самым точным образом, и я считаю необходимым воспроизвести его слова полностью: «Неопределенные, которые фигурируют в аксиомах (вместо понятий «нечто» и «все» обыкновенной логики), представляют собой исключительно совокупность предметов и комбинаций, которыми мы уже владеем при данном состоянии теории или которые мы начинаем вводить. Как только мы из рассматриваемых аксиом начнем выводить предложения, мы получим право заменять упомянутые предметы только этими предметами и этими комбинациями. Но если мы увеличиваем число основных предметов, то не нужно забывать, что тем самым аксиомы также испытывают новое расширение, и они, следовательно, должны быть снова проверены и, в случае нужды, изменены».

Здесь мы имеем полный контраст с точкой зрения Рассела. В той постановке, в какой вопрос ставится у этого философа, мы можем на место x ставить не только известные нам, но и какие угодно предметы. Рассел остается верным своей точке зрения, именно точке зрения понятия. Он исходит из общей идеи существующего и обогащает ее, придавая ей новые качества. Напротив, Гильберт считает существенными одни только комбинации известных уже предметов, так что (имея в виду лишь одну сторону его идеи) можно сказать, что Гильберт стоит на точке зрения объема понятий.

VIII

Проследим за изложением идей Гильберта. Он вводит две аксиомы, которые формулирует на своем символическом языке, но которые на языке таких профанов, как мы, обозначают, что всякое количество равно самому себе и что всякая операция, произведенная над двумя тождественными количествами, дает тождественные результаты. В такой формулировке аксиомы очевидны, но выразить их в таком виде значило бы исказить мысль Гильберта. С точки зрения Гильберта, математика комбинирует только чистые символы, и настоящий математик должен рассуждать о них, не заботясь об их смысле. Его аксиомы не являются для него тем же, чем они являются для обыкновенного человека.

Он рассматривает эти аксиомы как выраженное при помощи постулатов определение символа $=$, не опороченного еще каким-либо значением. Но чтобы оправдать это определение, необходимо доказать, что эти две аксиомы не ведут ни к какому противоречию.

Для этого Гильберт пользуется рассуждением, изложенным у него в разделе III, не замечая, по-видимому, что он прибегает к полной индукции.

IX

Конец мемуара Гильберта совершенно загадочен, и мы на нем не будем подробно останавливаться. Противоречия здесь умножаются; чувствуется, что автор сознает смутно petitio principii, в которое он впал, и что он напрасно старается замазать трещины своего рассуждения.

Что же это значит? В тот момент, когда необходимо доказать, что определение целого числа при помощи аксиомы полной индукции не влечет противоречия, Гильберт от этого отделывается, как отделываются Рассел и Кутюра, ибо трудность слишком велика.

X

Геометрия

Геометрия, говорит Кутюра, есть обширная область доктрин, в которой не фигурирует принцип полной индукции. В известной мере это верно; нельзя сказать, чтобы он совсем не входил, но он входит мало. Если обратиться к «Rational Geometry», написанной Халстедом (N. Y., John Wiley and Sons, 1904) и построенной на принципах Гильберта, то можно заметить, что принцип полной индукции появляется в первый раз на с. 114, если только я не пропустил его раньше, что очень возможно.

Таким образом, геометрия, которая еще несколько лет тому назад казалась областью, в которой господство интуиции бесспорно, является теперь областью, в которой торжествует логистика. Этим лучше всего измеряется важность геометрических трудов Гильберта и тот глубокий отпечаток, который они оставили на наших понятиях.

Но не нужно поддаваться обману. Какова в конце концов основная теорема геометрии? Она заключается в том, что аксиомы геометрии не заключают в себе противоречия, а это не может быть доказано без принципа индукции.

Как же Гильберт доказывает этот существенный пункт? Опираясь на анализ, через анализ на арифметику и через арифметику на принцип индукции.

И если когда-нибудь изобретут другое доказательство, то придется все же опереться на этот принцип, потому что выводов из тех аксиом, логическую совместимость которых нужно доказать, может быть бесконечное множество.

XI

Заключение

Наш вывод заключается прежде всего в том, что на принцип индукции нельзя смотреть как на скрытое определение целого числа.

Вот три истины:

принцип полной индукции;

постулат Евклида;

физический закон, согласно которому фосфор плавится при 44° (приводится у Леруа).

Говорят, что эти истины являются скрытыми определениями: первое есть определение целого числа, второе — прямой линии, третье — фосфора.

Я принимаю это для второй истины, но не принимаю для двух других. Объясню причину такой кажущейся непоследовательности.

Мы видели прежде всего, что определение приемлемо лишь в случае, если установлено, что оно не заключает в себе противоречия. Мы доказали также, что такое доказательство невозможно для первого определения; для второго, наоборот, Гильберт дал полное доказательство.

Что же касается третьего определения, то оно, очевидно, не заключает противоречия; но значит ли это, что определение, как это требовалось бы, с несомненностью свидетельствует о существовании определенного предмета? Мы выходим здесь из области математических наук и вступаем в область физических наук. Слово «существование» не имеет уже того смысла, что раньше, оно не обозначает отсутствия противоречия, а обозначает объективное существование.

Вот уже первое основание для различия, которое я делаю между вышеприведенными тремя случаями. Есть еще другое основание. Эти три понятия находят последующие применения; имеют ли эти понятия в применениях то значение, которое установлено этими тремя постулатами?

Возможные применения принципа индукции бесчисленны. Возьмем для примера одно из указанных нами выше применений, где мы стремились установить, что некоторая совокупность аксиом не может вести к противоречию. Для этого следует рассмотреть один из рядов силлогизмов, которые можно построить, исходя из этих аксиом как посылок.

Когда мы закончили n-й силлогизм, мы видим, что можно еще составить $(n+1)$-й силлогизм. Таким образом, число n служит для счета ряда последовательных операций, это — число, которое может быть получено путем последовательных прибавлений. Другими словами, это есть число, исходя из которого, можно прийти к единице путем последовательных вычитаний. Этого, очевидно, нельзя было бы достигнуть, если бы мы имели равенство $n = n - 1$, потому что в таком случае мы при вычитании всегда получали бы то же самое число. Таким образом, способ, при помощи которого мы пришли к рассмотрению этого числа n, заключает в себе определение конечного целого числа, и это определение гласит: конечное целое число есть такое число, которое может быть получено путем последовательных сложений, это есть число n, которое не равняется $n - 1$.

Приняв это, что делаем мы дальше? Мы показываем, что если нет противоречия с n-м силлогизмом, то не будет противоречия с $(n+1)$-м и не будет такого противоречия никогда. Вы скажете: я вправе сделать такое заключение, потому что целые числа по определению представляют собой такие именно числа, для которых подобное рассуждение законно. Но это приводит к другому определению целого числа, а именно к следующему: целое число есть такое число, о котором можно рассуждать в рекуррентном порядке. В данном случае это — число, о котором можно сказать следующее: если отсутствие противоречия в момент силлогизма, имеющего целый номер, влечет за собой отсутствие противоречия для силлогизма, имеющего следующий целый номер, то нет оснований опасаться противоречия для любого из силлогизмов, имеющего целый номер.

Оба определения не тождественны; они эквивалентны, без сомнения, но они таковы в силу априорного синтетического суждения: нельзя прийти от одного к другому путем чисто логических операций. Мы не вправе, следовательно, принять второе определение, раз мы ввели целое число, следуя такому пути, который предполагает первое определение.

Посмотрим, напротив, как обстоит дело с прямой линией. Я так часто уже говорил об этом, что не решаюсь снова повторять то же самое.

Мы не имеем здесь, как это было в предыдущем случае, двух эквивалентных определений, логически друг к другу несводимых. Мы имеем только одно определение, выраженное словами. Могут сказать, что мы имеем еще другое определение, которое мы чувствуем, но не можем выразить, потому что мы имеем интуицию прямой линии, или потому, что мы представляем себе прямую линию. Но, прежде всего, мы не можем представить себе этой линии в геометрическом пространстве, а можем представить лишь в пространстве, имеющемся в нашем представлении; и затем мы легко можем представить себе объекты, которые обладают всеми другими свойствами прямой линии, кроме того свойства, которое удовлетворяет постулату Евклида. Эти объекты суть «неевклидовы прямые», которые с известной точки зрения отнюдь не являются чем-то, лишенным смысла, но представляют собой окружности (настоящие окружности в настоящем пространстве), ортогональные к определенной сфере. Если из этих объектов, которые мы также можем себе представить, мы считаем прямыми первые, т. е. евклидовы прямые, а не последние, т. е. неевклидовы прямые, то это обусловливается определением.

Если мы, наконец, обратимся к третьему примеру, к определению фосфора, то мы увидим, что истинное определение будет таково: фосфор — это кусок вещества, который я вижу вот в этом флаконе.

XII

Остановившись уже на этом примере, скажу еще несколько слов. Относительно истины, касающейся фосфора, я выше сказал: «это предложение есть настоящий физический закон, доступный проверке, так как оно обозначает: все тела, которые обладают всеми прочими свойствами фосфора, помимо точки его плавления, плавятся, как и фосфор при 44°». На это мне ответили: «нет, этот закон не может быть проверен, потому что, если бы после проверки оказалось, что два тела, похожие на фосфор, плавятся одно при 44°, а другое при 50°, то всегда можно было бы сказать, что, кроме точки плавления, наверное, имеется еще и другое неизвестное свойство, благодаря которому эти тела друг от друга отличаются».

Это было не совсем то, что я хотел сказать. Я должен был бы написать: все тела, которые обладают такими-то и такими-то свойствами в конечном числе (а именно теми свойствами фосфора, которые перечислены в руководствах по химии, за исключением точки плавления), плавятся при 44°.

Чтобы сделать более очевидной разницу между примером с прямой линией и примером с фосфором, сделаем еще одно замечание. Прямая линия имеет в природе несколько более или менее несовершенных образов, между которыми главные суть световой луч и ось вращения твердого тела. Я допускаю, что каким-нибудь образом было бы установлено, что световой луч не удовлетворяет постулату Евклида (т. е. было бы, например, доказано, что звезда имеет отрицательный параллакс), что сделаем мы дальше? Заключим ли мы отсюда, что прямая, будучи по определению траекторией света, не удовлетворяет постулату или, наоборот, что раз прямая по определению удовлетворяет постулату, то световой луч не представляет собой прямой линии?

Конечно, мы свободны в выборе того или другого определения и, следовательно, того или иного заключения. Но принять первое заключение было бы нелепо, потому что световой луч удовлетворяет лишь несовершенным образом, вероятно, не только постулату Евклида, но и другим свойствам прямой линии; если он отклоняется от евклидовой прямой, то он также отклоняется и от оси вращения твердых тел, которая является другим несовершенным образом прямой линии; и, наконец, он, без сомнения, подвержен изменениям: будучи прямым вчера, он перестает быть таковым завтра, если какое-нибудь физическое условие изменилось.

Предположим, что было бы найдено, что фосфор плавится не при 44°, а при 43,9°. Заключим ли мы отсюда, что это новое тело, которое мы назвали фосфором, не есть настоящий фосфор, ибо последний, согласно определению, есть тело, которое плавится при 44° или, напротив, мы заключим, что фосфор плавится при 43,9°?

В этом случае мы также свободны в выборе того или другого определения, а следовательно, того или другого заключения. Но было бы нелепо принять первое заключение, так как нельзя же менять наименование тела каждый раз, когда удается определить лишний десятичный знак в его температуре плавления.

XIII

В итоге Рассел и Гильберт сделали большие усилия. Тот и другой написали книги, изобилующие оригинальными, глубокими и часто очень правильными взглядами. Эти две книги дают нам большой материал для размышления; из них мы можем многому научиться. Некоторые и даже многие из выводов, к которым приходят авторы, прочны и будут жить.

Но, очевидно, было бы неправильно сказать, что они окончательно разрешили спор между Кантом и Лейбницем[1]) и разрушили кантову теорию математики. Я не знаю, стоят ли они сами на этой точке зрения, но если они это думают, то они ошибаются.

Глава V

ПОСЛЕДНИЕ УСИЛИЯ ЛОГИСТИКОВ

I

Логистики пытались ответить на все приведенные выше соображения. Для такого ответа им надобно было преобразовать логистику[2]), и Рассел в особенности видоизменил в некоторых отношениях первона-

---

[1]) См. сноску на с. 478.

[2]) В начале XX века под логистикой понимали математическую логику. — *Примеч. ред.*

чальные ее точки зрения. Не входя в детали дела, я хочу остановиться только на двух вопросах, на мой взгляд, наиболее важных.

Дали ли правила логистики действительно доказательства своей плодотворности и непогрешимости? Верно ли, что они имеют возможность доказать принцип полной индукции, совершенно не обращаясь к интуиции?

II

Непогрешимость логистики

Что касается плодотворности, то Кутюра, по-видимому, строит наивные иллюзии. Логистика, по его мнению, дает изобретательности в ее распоряжение «леса и крылья». А на следующей странице он говорит: «десять лет тому назад Пеано опубликовал первое издание своего «Formulaire»[1]).

Как, уже десять лет, как вы имеете крылья, и вы еще не полетели!

Я питаю величайшее уважение к Пеано, который сделал превосходные работы (например, его кривая, которая заполняет целую площадь), но в конце концов он не ушел ни дальше, ни выше, ни быстрее, чем бо́льшая часть бескрылых математиков, и этот путь он мог бы ведь проделать так же хорошо на своих ногах.

Я, напротив, вижу в логистике только помеху для изобретателя; с ее помощью мы отнюдь не выигрываем в сжатости; если нужны 27 уравнений, для того чтобы установить, что 1 есть число, то сколько нужно будет уравнений, чтобы доказать настоящую теорему? Если мы различаем вместе с Уайтхедом индивид x, класс, единственный член коего есть x и который называется ιx, затем — класс, единственный член которого есть класс с единственным членом x и который называется $\iota\iota x$, то можно ли думать, что эти различия, как бы ни были они полезны, облегчат нам движение вперед?

---

[1]) По-видимому, речь идет о первых томах «Математического формуляра» Дж. Пеано, пять томов которого издавались с 1895 по 1903 годы. — *Примеч. ред.*

Логистика заставляет нас сказать все то, что обыкновенно подразумевается; она заставляет нас двигаться шаг за шагом; это, быть может, делает движение более верным, но не более быстрым.

Вы даете нам не крылья, а детские помочи. Но тогда мы имеем право требовать, чтобы эти помочи не давали нам падать. В такой помощи — единственное их оправдание. Если ценное имущество не приносит крупных доходов, то нужно по крайней мере, чтобы оно было в надежных руках.

Нужно ли следовать вашим правилам слепо? Конечно, да, иначе нам могла бы помочь разобраться в них одна только интуиция. Но в таком случае необходимо, чтобы эти правила были непогрешимы; слепое доверие можно питать только к непогрешимому авторитету. Для вас это необходимость. Вы должны быть непогрешимы, или вас не будет.

Вы не вправе сказать нам: «мы ошибаемся — это правда, но вы также ошибаетесь». Но наша ошибка для нас — несчастье, большое несчастье, для вас — это смерть.

Еще менее вправе вы сказать: «Разве непогрешимость арифметики препятствует ошибкам сложения? Правила счета непогрешимы, и все же мы видим, как ошибаются те, которые их применяют». Однако, просматривая их переделки, легко заметить, в какой момент они уклонились от правил. Здесь же совсем не то; логистики применили свои правила и впали в противоречие. Это настолько верно, что они готовы изменить правила и «пожертвовать понятием класса». Зачем же изменять правила, если они были непогрешимы?

«Мы не обязаны,— говорите вы,— разрешать hic et nunc [1]) все возможные проблемы». О, мы от вас не требуем столь многого; если бы вы, разрешая проблему, не давали никакого решения, мы ничего не сказали бы; но вы, напротив, даете нам два решения, которые друг другу противоречат и из которых, следовательно, по крайней мере одно ложно. А это банкротство.

Рассел старается примирить эти противоречия и признает, что для такого примирения необходимо

---

[1]) Здесь и сейчас (*лат.*) (означает категорическое требование). — *Примеч. ред.*

«ограничить понятие класса или даже пожертвовать им». Кутюра же, учитывая успех этой попытки, прибавляет: «если логистики достигнут того, что не удавалось другим, Пуанкаре не откажется воспомнить эту фразу и воздать должное решению логистики».

Но это не так: логистика существует, она имеет свое уложение, вышедшее уже в четырех изданиях; или, правильнее, это уложение и есть сама логистика. Готов ли Рассел показать, что по крайней мере одно из двух противоречивых суждений вышло за пределы уложения? Отнюдь нет; он готов изменить эти законы, а некоторые из них и уничтожить. Если он успешно выполнит свою попытку, то я воздам должное интуиции Рассела, но не логистике Пеано, которую он таким образом разрушит.

III

Отсутствие противоречия

Я привел выше два главных возражения против того определения целого числа, которое принято в логистике. Какой ответ дает Кутюра на первое возражение?

Что обозначает в математике слово существовать? Оно обозначает, сказал я, отсутствие противоречия. Кутюра возражает против этого. Он говорит: «Логическое существование есть нечто отличное от отсутствия противоречия. Оно заключается в том факте, что некоторый класс не пуст; сказать: «элементы *a* существуют» — значит, согласно определению, утверждать, что класс не есть нулевой». И, само собой разумеется, утверждать, что класс *a* не есть нулевой, значит, согласно определению, утверждать, что элементы *a* существуют. Но одно из этих утверждений так же лишено смысла, как и другое, если только они оба не обозначают либо то, что можно это *a* видеть или осязать, либо то, что можно постигнуть *a*, не впадая в противоречие. Но в первом случае мы имеем дело с утверждением, которое принимают физики и натуралисты; во втором случае — с утверждением, которое выставляют логики и математики.

Для Кутюра не отсутствие противоречия доказывает бытие, а бытие доказывает отсутствие противоречия. Чтобы установить существование класса, нужно установить при помощи примера, что есть какой-нибудь индивид, принадлежащий к этому классу. «Но,— скажут,— как доказать существование такого индивида? Не надобно ли, чтобы это существование было установлено для того, чтобы мы из него могли вывести существование класса, к которому принадлежит индивид? Совсем нет. Как ни покажется парадоксальным такое утверждение, нужно сказать, что никогда не доказывают существования индивида. Индивиды уже по одному тому, что они индивиды, всегда рассматриваются как существующие. Абсолютно говоря, нет нужды высказывать, что индивид существует, а нужно лишь сказать, что он существует в классе». Кутюра находит свое собственное утверждение парадоксальным, и, конечно, не он один найдет его таковым. Это утверждение, однако, должно иметь свой смысл. Кутюра, без сомнения, хочет сказать, что существование индивида, который является единственным в мире и о котором ничего не утверждается, не может повлечь противоречия; пока он остается единственным, он, очевидно, никого не стесняет. Пусть так; допустим, «абсолютно говоря», существование индивида; но с этим существованием нам нечего делать; нам нужно будет доказать существование индивида «в классе», а для этого надобно будет доказать, что утверждение «такой-то индивид принадлежит к такому-то классу» не стоит в противоречии ни с самим собой, ни с другими принятыми постулатами.

«Утверждать, что определение лишь тогда имеет действительное значение, когда раньше доказано, что оно непротиворечиво, это значит,— продолжает Кутюра,— предъявлять произвольное и неправильное требование». Капитуляция в вопросе об отсутствии противоречия выражена здесь в словах как нельзя более энергичных и самонадеянных. «Во всяком случае onus probandi [1]) падает на тех, кто полагает, что эти принципы противоречивы». Постулаты предполагаются совместимыми друг с другом до тех пор, пока не доказано противоположное, подобно тому, как обвиняемый по презумпции предполагается невиновным.

---

[1]) Бремя доказательств (*лат.*). — *Примеч. ред.*

Излишне говорить, что я не подписываюсь под этой капитуляцией. Но, говорите вы, доказательство, которого вы от нас требуете, невозможно, вы не должны от нас требовать, чтобы мы «схватили Луну зубами»[1]). Простите, оно невозможно для вас, но не для нас, допускающих принцип индукции в качестве априорного синтетического суждения. И оно так же необходимо вам, как и нам.

Чтобы доказать, что система постулатов не заключает противоречия, необходимо применить принцип полной индукции; этот способ суждения не только не «странный», но единственно правильный. Отнюдь нельзя считать «неправдоподобными» случаи его применения; и нетрудно найти соответствующие «примеры и прецеденты». Я цитировал в моей статье два таких примера, заимствованных из брошюры Гильберта. Но он не один применял такой способ; те же, которые его избегали, были неправы. Я упрекал Гильберта не в том, что он к нему прибегал (как настоящий математик, Гильберт не мог не увидеть, что здесь необходимо было доказательство и что данное им доказательство было единственно возможное), но в том, что, прибегая к нему, он не признавал в нем суждения по рекуррентному методу.

IV

Второе возражение

Я отметил вторую ошибку логистиков в статье Гильберта. Теперь Гильберт отлучен, и Кутюра более не считает его логистиком. Он меня спросит, нашел ли я ту же самую ошибку у логистиков-ортодоксов. Нет, я не встречал ее на тех страницах, которые прочитал; но я не знаю, не встречу ли я ее на трехстах страницах, которые написаны ортодоксами и которые у меня нет желания читать.

Но логистикам придется впасть в эту ошибку, как только они захотят сделать из математической науки какое-нибудь приложение. Эта наука не имеет единственной целью вечное созерцание своего собственного пупа; она приближается к природе, и раньше

---

[1]) Галлицизм, обозначающий: сделать невозможное. — *Примеч. ред.*

или позже она придет с ней в соприкосновение; в этот момент необходимо будет отбросить чисто словесные определения, которыми нельзя будет более довольствоваться.

Вернемся к примеру Гильберта. Дело идет все о том же рекуррентном суждении и о том, заключает ли система постулатов противоречие. Кутюра скажет, без сомнения, что это его не касается; но это заинтересует, быть может, тех, кто не отказывается, как он, от доказательства отсутствия противоречия.

Мы хотим установить, как мы говорили выше, что не встретим противоречия после сколь угодно большого числа суждений, раз это число будет конечным. Для этого необходимо применить принцип индукции. Должны ли мы под конечным числом понимать здесь всякое число, к которому по определению применим принцип индукции? Очевидно, нет, так как в противном случае мы пришли бы к следствиям, которые нас чрезвычайно затруднили бы.

Для того чтобы мы имели право установить систему постулатов, мы должны быть уверены, что постулаты непротиворечивы. Это — истина, принятая большинством ученых, я бы сказал «всеми учеными» до того, как прочел последнюю статью Кутюра. Но что обозначает эта истина? Имеется ли в виду: необходимо, чтобы мы были уверены в том, что не встретим противоречия после конечного числа предложений, причем конечным по определению будет такое число, которое обладает всеми свойствами рекуррентного характера, так что, если одно из этих свойств отсутствует, если мы, например, натолкнемся на противоречие, то мы условимся говорить, что данное число не есть конечное?

Другими словами, хотим ли мы сказать: необходимо, чтобы мы были уверены в том, что мы не встретим противоречия при условии, что мы согласимся остановиться в тот момент, когда такое противоречие начнет обрисовываться? Достаточно сформулировать такое предложение, чтобы тут же его осудить.

Таким образом, рассуждение Гильберта не только предполагает принцип индукции, но оно предполагает, что этот принцип нам дан не как простое определение, а как априорное синтетическое суждение.

Резюмируем:

доказательство необходимо;

единственно возможное доказательство есть рекуррентное доказательство;

оно законно только тогда, когда допускают принцип индукции и когда его рассматривают не как определение, а как синтетическое суждение.

V

Канторовские антиномии

Я обращаюсь теперь к рассмотрению нового мемуара Рассела. Этот мемуар был написан с целью преодолеть трудности, поднятые теми канторовскими антиномиями, на которые я неоднократно намекал выше. Кантор думал, что можно построить науку бесконечного; другие пошли по пути, открытому Кантором, но скоро натолкнулись на странные противоречия. Возникшие антиномии уже многочисленны, но наиболее известны следующие:

1° Антиномия Бурали-Форти.

2° Антиномия Цермело — Кёнига.

3° Антиномия Ришара.

Кантор доказал, что порядковые числа (речь идет о порядковых трансфинитных числах, т. е. о новом понятии, введенном Кантором) могут быть размещены в один линейный ряд, т. е. доказал, что из двух неравных порядковых чисел одно число всегда меньше другого. Бурали-Форти доказывает противоположное. В самом деле, говорит он, если бы все порядковые числа можно было разместить в один ряд, то этот ряд определял бы порядковое число, которое было бы больше, чем все другие, но к нему можно было бы прибавить единицу, и тогда получилось бы порядковое число, которое было бы еще больше, а это приводит к противоречию. Мы вернемся позднее к антиномии Цермело — Кёнига, которая имеет несколько отличную природу.

Но вот антиномия Ришара (Revue Generale des Sciences.— 1905, 30 juin). Рассмотрим все десятичные числа, которые можно определить при помощи конечного числа слов. Эти десятичные числа образуют совокупность E, и легко видеть, что это есть исчислимая совокупность, т. е. можно перенумеровать различные десятичные числа этой совокупности от 1 до бесконечности. Допустим, что это уже произведено, и определим число N следующим образом. Если n-я цифра n-го числа совокупности E есть

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,$$

то n-я цифра числа N будет соответственно

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 1,\ 1.$$

Как мы видим, N не равно n-му числу совокупности E, а так как n есть произвольное число, то N не принадлежит совокупности E; между тем N должно ей принадлежать, так как мы определили N при помощи конечного числа слов.

Мы увидим ниже, что Ришар сам дал объяснение своего парадокса, обнаружив при этом большую проницательность, и что его объяснение может быть mutatis mutandis [1]) распространено на другие аналогичные парадоксы. Рассел цитирует еще другую довольно любопытную антиномию.

Каково то наименьшее целое число, которое нельзя определить при помощи фразы, имеющей менее ста французских слов?

Такое число существует. И в самом деле, числа, которые могут быть определены такой фразой, имеются, очевидно, в конечном количестве, ибо слова французского языка имеются также в конечном количестве. Следовательно, между этими числами будет одно такое, которое меньше всех прочих.

Но, с другой стороны, это число не существует, так как определение его заключает противоречие. Действительно, это число определяется самой фразой, напечатанной выше в разрядку и состоящей менее, чем из ста слов, а по определению это число не может быть определено подобной фразой.

---

[1]) После необходимых изменений (*лат.*).— *Примеч. ред.*

VI

Теория зигзагов и теория неклассов

Какую позицию занимает Рассел ввиду этих противоречий? Рассмотрев те, о которых мы только что говорили, указав еще на другие и придав им форму, которая заставляет вспомнить об Эпимениде, он без колебаний заключает:

«A propositional function of one variable does not always deter mine a class». Пропозициональная функция (т. е. определение) одной переменной не всегда определяет класс. «Пропозициональная функция», или «норма», может быть «непредикативной». И это не значит, что такие непредикативные предложения определяют пустой класс, нулевой класс; это не значит, что нет такой величины x, которая удовлетворяла бы определению и могла бы быть одним из элементов класса. Элементы существуют, но они не могут соединяться для образования класса.

Но это только начало, нужно еще быть в состоянии узнать, является ли определение предикативным или нет. Разрешая эту проблему, Рассел колеблется между тремя теориями, которые он называет:

A. теория зигзага (the zigzag theory);

B. теория ограничения размера (the theory of limitation of size);

C. теория неклассов (the no classes theory).

Согласно теории зигзагов «определения (пропозициональные функции) определяют класс, когда они очень просты, и перестают определять таковой, когда они становятся сложными и неясными». Кто же решит вопрос: можно ли рассматривать данное определение как достаточно простое, для того чтобы оно было приемлемо? На этот вопрос нет ответа, если не считать таковым форменное признание в полном бессилии: «правила, которые позволили бы распознавать, являются ли эти определения предикативными, были бы чрезвычайно сложны и рекомендовать их не было бы целесообразным ни с какой точки зрения. Это недостаток, который можно было бы исправить только при большой изобретательности или при помощи таких отличий, которые еще не намечены. Но до настоящего момента я в поисках этих правил не мог найти другого руководящего принципа, кроме отсутствия противоречия».

Эта теория остается, таким образом, довольно темной. В этой ночи — единственный проблеск, и этот проблеск есть слово «зигзаг». То, что Рассел называет «zigzag-giness», является, без сомнения, тем особенным свойством, которым отличается аргумент Эпименида.

Согласно теории of limitation of size класс теряет право на существование, если он слишком обширен. Он может даже быть бесконечным, но не должен быть «чрезмерно» бесконечным.

Мы и здесь встречаемся все с тем же затруднением: в какой же именно момент класс начинает становиться слишком бесконечным? Само собой разумеется, это затруднение не разрешено, и Рассел переходит к третьей теории.

В no classes theory запрещено произносить слово «класс». Оно должно замещаться разнообразными перифразами. Какой это крупный переворот для логистиков, которые только и говорят о классах и о классах классов! Необходимо переделать всю логистику. Представляют ли себе эти авторы, какой вид примет страница логистики, если в ней будут уничтожены все предложения, в которых идет речь о классах? Кроме нескольких строк, переживших такую операцию, на белой странице ничего не останется.

Как бы то ни было, мы видим, каковы колебания Рассела, видим изменения, которым он подвергает принятые им же основные принципы. Необходимы были критерии, чтобы решить, является ли определение слишком сложным или слишком обширным, а эти критерии не могут быть оправданы иначе, как обращением к интуиции.

Рассел в конце концов склоняется к теории неклассов.

Как бы там ни было, логистика должна быть переделана, и неизвестно, что в ней может быть спасено. Бесполезно прибавлять, что на карту поставлены только канторизм и логистика. Истинные математические науки, т. е. те, которые чему-нибудь служат, могут продолжать свое развитие согласно свойственным им принципам, не заботясь о тех бурях, которые бушуют вне их; они будут шаг за шагом делать свои завоевания, которые являются окончательными и от которых им никогда не будет нужды отказываться.

VII

Правильное решение

Какой же выбор должны мы сделать между этими различными теориями? Мне кажется, что решение заключается в письме Ришара, о котором я уже говорил и которое помещено в «Revue Generale des Sciences» от 30 июня 1905 г. Изложив антиномию, которую я назвал антиномией Ришара, последний дает ей и объяснение.

Вернемся к тому, что мы сказали об этой антиномии в разделе V. Пусть E будет совокупностью всех чисел, которые можно определить при помощи конечного числа слов, не вводя при этом понятия о самой совокупности E. В противном случае определение E заключало бы ложный круг: нельзя определять E при помощи самой же совокупности E.

Далее мы определили число N, правда, при помощи конечного числа слов, но мы опирались на понятие о совокупности E. Вот почему N и не составляет части E.

В примере, избранном Ришаром, вывод представляется с полной очевидностью, и очевидность эта станет еще более ясной, если обратиться к самому тексту письма. Но это же объяснение годится, как в том легко убедиться, и для других антиномий.

Итак, те определения, которые должны быть рассматриваемы как непредикативные, заключают ложный круг. Предшествовавшие примеры достаточно показали, что я под этим разумею. Не это ли Рассел обозначает названием «zigzag-giness»?

Я ставлю вопрос, не разрешая его.

VIII

Доказательства принципа индукции

Рассмотрим теперь мнимые доказательства принципа индукции и в особенности доказательства Уайтхеда и Бурали-Форти. Поговорим сначала о доказательстве Уайтхеда и воспользуемся некоторыми новыми и удачными обозначениями, которые Рассел ввел в своем последнем мемуаре.

Назовем рекуррентным классом всякий класс чисел, который содержит 0 и который содержит $n+1$, если он содержит n.

Назовем индуктивным числом всякое число, которое составляет часть всех рекуррентных классов.

При каком условии это последнее определение, играющее существенную роль в доказательстве Уайтхеда, будет «предикативным» и, следовательно, приемлемым?

Согласно предшествующему изложению под всеми рекуррентными классами надо понимать все классы, в определение которых не входит понятие об индуктивном числе.

Без этого можно впасть в ложный круг, который и породил антиномии.

Но Уайтхед не принял этой предосторожности.

Его рассуждение ложно; именно оно и повело к антиномиям; оно было незаконным, когда давало ложные результаты, и остается незаконным, когда приводит случайно к правильному результату.

Определение, которое содержит заколдованный круг, ничего не определяет. Не к чему говорить: мы уверены, что, какой бы смысл ни был дан нашему определению, все же существует по крайней мере нуль, который принадлежит классу индуктивных чисел. Дело не в том, чтобы узнать, пуст ли этот класс, а в том, чтобы его строго отграничить. «Непредикативный» класс — это не пустой класс, а класс, в котором граница оказывается неопределенной.

Излишне прибавлять, что это частное возражение оставляет в силе те общие возражения, которые приложимы ко всем доказательствам.

IX

Бурали-Форти представил другое доказательство в своей статье «Конечные классы» (Atti di Torino.– Т. 32), но он вынужден допустить два постулата.

Первый утверждает, что существует по крайне мере один бесконечный класс, Второй гласит

$$u \varepsilon K (K - \iota\Lambda). \supset . u < v'u.$$

Первый постулат не более очевиден, чем принцип, подлежащий доказательству. Второй не только не очевиден, но и ложен, как это показал Уайтхед и как это, впрочем, заметил бы любой лицеист математического класса, если бы аксиома была выражена на понятном языке. Ибо эта аксиома означает: число комбинаций, которые можно образовать из нескольких предметов, менее числа этих предметов.

X

Аксиома Цермело

В известном доказательстве Цермело опирается на следующую аксиому:

В какой-либо совокупности (или даже в каждой из совокупностей некоторой совокупности совокупностей) мы можем всегда выбрать наудачу один элемент (даже тогда, когда эта совокупность совокупностей обнимает бесконечно много совокупностей). Тысячу раз применяли эту аксиому, не высказывая ее. Но лишь только она была высказана, как появились сомнения. Одни математики, как Борель, ее отвергают, другие восхищаются ею. Посмотрим, что об этом думает Рассел в своей последней статье.

Он не высказывается, но те размышления, которым он предается, очень знаменательны.

Однако сначала один наглядный пример. Допустим, что мы имеем столько пар сапог, сколько есть целых чисел, так что мы можем нумеровать пары от 1 до бесконечности. Сколько мы будем иметь сапог? Будет ли число сапог равно числу пар? Да, если в каждой паре правый сапог отличается от левого, ибо в таком случае достаточно будет обозначить номером $2n-1$ правый сапог n-й пары, а номером $2n$ — левый сапог n-й пары. Нет, если правый сапог подобен левому, так как в этом случае такая операция будет невозможна. Иначе придется допустить аксиому Цермело, потому что тогда можно в каждой паре выбрать наудачу сапог, который будет рассматриваться как правый.

XI

Заключение

Доказательство, действительно основанное на принципах аналитической логики, будет составляться из ряда предложений. Одни из них, которые служат посылками, будут тождествами или определениями; другие будут последовательно выведены из первых. Но, хотя связь между каждым предложением и последующим замечается непосредственно, трудно будет с первого взгляда увидеть, как мог совершиться переход от первого предложения к последнему, и явится соблазн рассматривать это последнее как новую истину. Но если последовательно заменить фигурирующие в нем различные выражения их определениями, если провести эту операцию насколько можно далеко, то в итоге останутся только тождества, так что все сведется к бесконечной тавтологии. Логика, следовательно, окажется бесплодной, если не будет оплодотворена интуицией.

Вот что я уже писал давно. Логистики исповедуют противоположную точку зрения и думают, что доказали ее, показав действительно новые истины. Но каким образом?

Почему, применяя к их рассуждениям описанный только что прием, т. е. заменяя определенные термины их определениями, мы не видим, чтобы они сливались в тождества, как это бывает с обыкновенными рассуждениями? Значит, этот прием к ним неприменим. А почему? Потому что их определения непредикативные и дают тот заколдованный круг, который я отметил выше; непредикативные определения не могут стать на место определяемого термина. В этих условиях логистика является уже не бесплодной, она родит антиномию.

Вера в существование актуальной бесконечности дала начало этим непредикативным определениям. Я объяснюсь. В этих определениях фигурирует слово «все», как это видно из приведенных выше примеров. Слово «все» имеет достаточно точный смысл, когда речь идет о бесконечном [1]) числе предметов; для того

---

[1]) В оригинале опечатка, следует читать «конечном». — *Примеч. ред.*

чтобы оно имело также смысл, когда предметов имеется бесчисленное множество, необходимо, чтобы существовало актуально бесконечное. В противном случае на все эти предметы нельзя было бы смотреть как на данные до их определения; вместе с тем определение понятия N, если оно зависит от всех предметов A, может страдать пороком заколдованного круга, раз между предметами A имеются такие, которые нельзя определить без помощи самого понятия N.

Правила формальной логики выражают просто свойства всех возможных классификаций. Но для того чтобы эти правила были приложимы, необходимо, чтобы классификации оставались неизменными, чтобы их не приходилось изменять на протяжении рассуждений. Если приходится распределять конечное число предметов, то легко сохранить эти классификации без изменения. Если же предметы имеются в неопределенном количестве, т. е. если имеется возможность постоянного и внезапного появления новых предметов, то может случиться, что такое появление обяжет к изменению классификации. Отсюда опасность антиномий.

Нет актуальной бесконечности. Канторианцы забыли это и впали в противоречие. Верно то, что теория Кантора оказала услуги, но это было тогда, когда она применялась к истинной проблеме, термины которой были отчетливо определены; тогда можно было подвигаться вперед без опасений.

И логистики, подобно канторианцам, забыли об этом и встретились с теми же затруднениями. Но нужно знать, попали ли они на этот путь случайно или по необходимости.

Для меня вопрос не представляет сомнений. Вера в актуально бесконечное является существенной в логике Рассела. Этим она отличается от логистики Гильберта. Гильберт становится на точку зрения объема именно для того, чтобы избежать канторовских антиномий; Рассел становится на точку зрения содержания. Для него, следовательно, род предшествует виду и summum genus [1]) предшествует всему. Это не представляло бы неудобства, если бы summum genus был конечным; но если он бесконе-

[1]) Первый, главный род (*лат.*). — *Примеч. ред.*

чен, то приходится бесконечное ставить перед конечным, т. е. рассматривать бесконечное как актуальное.

Но мы имеем не только бесконечные классы. Когда мы переходим от рода к виду, суживая понятие введением новых условий, то эти условия тоже появляются в бесконечном числе. Ибо они вообще выражают, что рассматриваемый предмет находится в том или ином отношении ко всем предметам бесконечного класса.

Однако все это уже устаревшая история. Рассел заметил опасность. Он ее обдумает. Он все изменит. Он готов, запомним это, не только ввести новые принципы, которые позволяют производить не разрешенные никогда операции, но готов запретить операции, которые считал некогда законными. Он не довольствуется поклонением тому, что сжигал; он готов сжечь то, чему поклонялся, что еще тяжелее. Он не прибавляет нового крыла к зданию, он подрывает его основание.

Старая логистика умерла, а zigzag-theory и no classes theory оспаривают друг у друга преемственность. Чтобы судить о новой логистике, мы подождем, когда она образуется.

ОБЩИЕ ВЫВОДЫ

На предыдущих страницах я старался объяснить, каким образом ученый должен производить выбор между бесчисленными фактами, раскрывающимися перед ним; ведь уже одна естественная немощность ума заставляет его делать такой выбор, хотя бы этот выбор и всегда представлял собой жертву. Сначала я искал оснований для этого в общих соображениях, указывая, с одной стороны, природу проблемы, подлежащей разрешению, с другой, — выясняя причину человеческого ума, этого главного орудия для разрешения. Затем я привел ряд пояснительных примеров. Я не умножал их до бесконечности; я сам должен был произвести между ними выбор и, естественно, выбрал вопросы, мною наиболее изученные. Другие на моем месте, без сомнения, сделали бы другой выбор; но это не имеет значения, потому что они пришли бы, я думаю, к тем же выводам.

Существует иерархия фактов. Одни факты не имеют значения; все то, чему они нас учат, касается их одних Ученый, который констатировал их, не познал ничего более, как один факт, и не сделался способным предвидеть новые. Эти факты как бы происходят однажды, и повториться им не суждено.

С другой стороны, существуют факты большого значения. Каждый из них учит нас новому закону. И так как ученому предстоит сделать выбор, то именно к такого рода фактам он должен обратиться.

Без сомнения, такая классификация относительна и зависит от слабости нашего ума. Факты малого значения суть факты сложные, на которые могут оказывать очень чувствительное влияние различные обстоятельства, слишком многочисленные и многообразные, для того чтобы мы были способны уловить их. Но я должен прибавить, что эти факты мы считаем сложными потому, что запутанная связь влияющих обстоятельств превосходит пределы нашего ума. Без сомнения, ум более обширный и тонкий, чем наш, судил бы об этом иначе. Но все это несущественно; пользоваться мы можем не этим высшим умом, а нашим собственным.

Факты большого значения — это те, которые мы считаем простыми, потому ли, что они таковы в действительности, что на них, следовательно, оказывает влияние небольшое число вполне определенных обстоятельств, или же потому, что они кажутся простыми, и, следовательно, те многочисленные обстоятельства, от которых они зависят, подчиняются законам случая и таким образом друг друга компенсируют. Так, собственно, чаще всего и бывает. Вот почему мы должны были несколько ближе исследовать вопрос о том, что представляет собой случай. Факты, к которым приложимы законы случая, становятся доступны ученому, отступающему в унынии перед чрезвычайной сложностью тех проблем, к которым эти законы неприложимы.

Мы видели, что эти соображения приложимы не только к физическим, но и к математическим наукам. Метод доказательства не один и тот же для физика и для математика. Но методы открытия истины чрезвычайно сходны. В том и в другом случае они заключаются в восхождении от факта к закону и к разысканию фактов, способных вести к закону.

Чтобы сделать этот пункт очевидным, я проследил за творческой деятельностью математика и притом в трех ее формах: за деятельностью математика-изобретателя и творца; за умственным процессом бессознательного геометра, который у наших далеких предков или в смутные годы нашего детства строил наше инстинктивное понятие пространства; за умом юноши, перед которым наставники средней школы раскрывают первые основы науки и которому они стараются объяснить основные определения. Везде мы видели роль интуиции и обобщающего ума, без которых эти, если мне позволено будет так выразиться, три вида математиков были бы осуждены на одинаковое бессилие.

Но и в области доказательств логика еще не составляет всего. Настоящее математическое рассуждение есть настоящая индукция, во многих отношениях отличная от индукции физической, но, как и она, идущая от частного к общему. Все усилия, направленные на то, чтобы опрокинуть этот порядок и свести математическую индукцию к правилам логики, закончились без успеха, и эту неудачу трудно было скрыть под маской особого языка, недоступного профанам.

Примеры, которые я заимствовал из физических наук, ознакомили нас с разнообразными фактами большого значения. Опыт Кауфмана над лучами радия революционизирует сразу механику, оптику и астрономию. Почему? Потому что по мере того, как эти науки развивались, мы лучше познали соединяющие их связи; и тогда мы подметили нечто вроде общей схемы, представляющей собой карту универсальной науки. Существуют факты, общие и нескольким наукам, которые напоминают общие источники вод, направляющихся во все стороны; их можно сравнить с тем Сен-Готардским узлом, откуда выходят воды, питающие четыре различных бассейна.

Но мы можем произвести выбор между фактами с бóльшим сознанием, чем наши предшественники, которые смотрели на эти бассейны как на обособленные и отделенные друг от друга непроходимыми преградами. Мы должны избирать всегда простые факты; но из массы этих простых фактов мы должны отдавать предпочтение тем, которые уподобляются, по месту своего положения, упомянутым выше узлам Сен-Готарда.

Если науки и не имеют непосредственной связи, то они взаимно освещают друг друга путем аналогии. Когда изучили законы, которым подчиняются газы, стало очевидным, что мы подошли к факту крупного значения; однако размер этого значения оценивался ниже действительного; между тем с известной точки зрения в газах мы имели прообраз Млечного пути, а факты, которые могли, как казалось, интересовать только физиков, должны открыть новые горизонты в астрономии, сверх ее ожидания.