

КОНФЕРЕНЦИИ И СИМПОЗИУМЫ

К 100-летию со дня рождения С.М. Рытова

Научная сессия Отделения физических наук
Российской академии наук, 26 ноября 2008 г.

Ю.В. Гуляев; Ю.Н. Барабаненков; А.Е. Каплан, С.Н. Волков;
В.И. Кляцкин; Л.С. Долин

PACS number: 01.10.Fv

DOI: 10.3367/UFNr.0179.200905f.0531

26 ноября 2008 г. в конференц-зале Физического института имени П.Н. Лебедева РАН состоялась Научная сессия Отделения физических наук Российской академии наук, посвящённая 100-летию со дня рождения С.М. Рытова. На сессии были заслушаны доклады:

1. **Гуляев Ю.В.** (Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Москва). *Сергей Михайлович Рытов* (вступительное слово).

2. **Барабаненков Ю.Н.** (Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Москва). *Асимптотический предел теории переноса излучения в задачах многократного рассеяния волн случайно-неоднородными средами.*

3. **Каплан А.Е., Волков С.Н.** (Johns Hopkins University, Baltimore, USA). *Поведение локальных полей в нанорешётках из сильно взаимодействующих атомов: наностраты, гигантские резонансы, "магические" числа и оптическая бистабильность.*

4. **Кляцкин В.И.** (Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, Москва). *Современные методы статистического описания динамических стохастических систем.*

5. **Долин Л.С.** (Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород). *Развитие теории переноса излучения в приложении к задачам инструментального видения в мутных средах.*

Краткое содержание докладов публикуется ниже.

PACS numbers: **01.60. + q, 01.65. + g, 42.25.Bs**
DOI: 10.3367/UFNr.0179.200905g.0531

Сергей Михайлович Рытов
(вступительное слово)

Ю.В. Гуляев

3 июля 2008 г. исполнилось 100 лет со дня рождения одного из крупнейших российских радиофизиков, члена-корреспондента Академии наук СССР, профессора Сергея Михайловича Рытова.

В каждой из областей физики, которых Сергей Михайлович касался, а это — теория колебаний и



Сергей Михайлович Рытов
(03.07.1908 – 22.10.1996)

акустика, распространение волн, электродинамика и оптика и, наконец, статистическая радиофизика, — ему принадлежат результаты первостепенной важности, получившие мировое признание. Некоторые из них стали основополагающими для новых направлений теоретической радиофизики. Работы С.М. Рытова по параметрическим системам, развитию метода возмущений и его приложению к задаче о стабилизации частоты

генератора принадлежат к крупнейшим достижениям советской школы теории нелинейных колебаний. К числу наиболее существенных результатов из серии исследований по дифракции света на ультразвуковых волнах относится, в частности, разработанный им метод плавных возмущений (известный в литературе как метод Рытова), нашедший широкое применение в исследованиях распространения волн в случайно-неоднородных средах. В области статистической радиофизики работы С.М. Рытова, подытоженные им в монографии, открыли новое направление теории тепловых флуктуационных шумов и полей, позволяющее единым образом рассмотреть тепловые электромагнитные поля для всего диапазона частот — от квазистационарной области до оптической.

Можно было бы и ограничиться этим кратким перечислением — о великом человеке можно рассказать кратко.

Но я, тем не менее, напомним основные этапы биографии Сергея Михайловича, в основном для молодёжи, которая не имела счастья работать рядом с ним.

Сергей Михайлович Рытов родился 3 июля 1908 г. в Харькове. В 1930 г. он окончил физико-математический факультет Московского государственного университета, а в 1933 г. — аспирантуру МГУ под руководством академика Леонида Исааковича Мандельштама. Надо сказать, что в своей дальнейшей научной и педагогической деятельности Сергей Михайлович достойно продолжил лучшие традиции школы Л.И. Мандельштама, которого всегда считал своим учителем. Эти прекрасные традиции, среди которых — безграничная преданность науке и чрезвычайная требовательность к себе, Сергей Михайлович постоянно прививал и научной молодёжи.

В 1934 г. Сергей Михайлович был зачислен на должность научного сотрудника 1-го разряда в оптическую лабораторию Физического института Академии наук СССР (ФИАН), а позднее, с 1950 г. по 1958 г., был заведующим теоретическим сектором этой лаборатории. В 1958 г. по просьбе академика Александра Львовича Минца Сергей Михайлович перешёл в теоретический отдел Радиотехнического института АН СССР (РТИ), где он работал до конца жизни.

Сергей Михайлович беззаветно отдавал всего себя научной работе. Талант и трудолюбие позволили ему добиться замечательных результатов, стать общепризнанным авторитетом во многих областях физики и, прежде всего, радиофизики.

Выполненное им исследование дифракции света на ультразвуке стало одним из основополагающих в акустооптике, получившей в дальнейшем бурное развитие и разнообразные применения на практике. Разработанный метод плавных возмущений (метод Рытова) открыл широкие возможности исследования распространения волн в случайно-неоднородных средах. Эти возможности были с успехом реализованы позднее самим Сергеем Михайловичем, его учениками и последователями. Полученные результаты частично подытожены в широко известных обзорах, опубликованных в *УФН* (1970–1975 гг.), в последних изданиях *Введения в статистическую радиофизику*, отражены в монографиях и обзорах других авторов. В РТИ одни из основных работ Сергея Михайловича легли в основу важнейших исследований влияния тропосферы и ионосферы Земли на

точность создаваемых наземных радиолокационных комплексов дальнего действия и оценки их потенциальных возможностей в условиях реальной атмосферы.

Докторская диссертация Сергея Михайловича "Модулированные колебания и волны" оказала огромное влияние на развитие теории колебаний и ярко продемонстрировала плодотворность последовательного колебательного подхода к различным задачам физики. Опубликованная в *Трудах ФИАН СССР* в 1940 г., она стала настольным руководством для многих исследователей в области теории колебаний. Вопросами теории колебаний и волн Сергей Михайлович занимался и позднее, получив важные результаты в теории автоколебаний систем томсоновского типа, теории бетатронных и синхротронных колебаний, теории параметрических генераторов и усилителей (1948–1963 гг.). Им впервые рассмотрен вопрос о резонансе в параметрических системах, исследовано явление "затягивания" при жёстком режиме самовозбуждения колебаний. Его работы по параметрическим системам, развитию метода возмущений и приложению этого метода к задаче о стабилизации частоты генератора принадлежат к крупнейшим достижениям отечественной школы теории нелинейных колебаний. Выполненные им исследования в теории колебаний успешно развивались многочисленными учениками и последователями.

Развитая Сергеем Михайловичем и завершённая им совместно с М.Л. Левиным теория равновесных тепловых флуктуаций электромагнитного поля, в которой "неожиданно" эффективной оказалась классическая теорема взаимности, приводит к единому описанию этих флуктуаций во всем диапазоне частот — от квазистационарной области до оптического диапазона — и широко используется в самых разнообразных областях физики. Впоследствии результаты теории были обобщены для случая поля любой природы (1973 г.).

Сергею Михайловичу принадлежит наиболее общая феноменологическая теория молекулярного рассеяния света, включающая в себя анализ спектров Мандельштама–Бриллюэна и деполяризованного излучения, а также спектра рассеяния, обусловленного флуктуациями энтропии (1955–1970 гг.). Эта теория, подтверждённая многочисленными экспериментами, получила общее признание.

Отметим также работы Сергея Михайловича, в которых впервые было дано строгое решение задачи об отражении электромагнитных волн от слоя с отрицательной диэлектрической постоянной, указан корректный электродинамический подход к проблеме распространения волн в трубах и обобщённых линиях передачи с потерями, рассмотрен новый вид фазовых дифракционных структур, внесена полная ясность в вопрос о связи между вектором Пойнтинга, вектором групповой скорости и плотностью энергии при распространении электромагнитных волн в анизотропных средах.

Неотъемлемой частью творческой деятельности Сергея Михайловича являлась педагогическая работа, которой он увлечённо и чрезвычайно ответственно занимался практически всю жизнь. О её значении в жизни Сергея Михайловича свидетельствует уже тот факт, что именно этот вид деятельности он поставил на первое место в своих *Биографических сведениях*, где он пишет, что преподавать начал ещё в 1928 г., будучи студентом 3-го курса МГУ. Позднее он читал лекции по физике и

математике в МГУ и в Горьковском государственном университете.

С 1947 г. и практически до конца жизни Сергей Михайлович Рытов работал по совместительству в Московском физико-техническом институте¹ (МФТИ), являясь до 1949 г. профессором кафедры общей физики, а затем — профессором кафедры радиофизики. С 1953 г. по 1978 г. (т.е. 25 лет) он возглавлял эту кафедру МФТИ.

Каждый, кто хотя бы раз слышал выступление Сергея Михайловича, восхищался его лекторским мастерством, отточенной формой, ясностью, глубиной и в то же время простотой изложения. Студенты любили своего профессора, с удовольствием посещали его лекции и уходили после сдачи экзамена Сергею Михайловичу с чувством полного удовлетворения, независимо от полученной оценки, — он всегда был предельно корректен и справедлив.

Мне тоже выпало счастье прослушать его курс "Теория колебаний" и даже получить лично у него отличную оценку. Я, как и другие студенты, подробно записывал все лекции его курса и в дальнейшей своей работе в области теории колебаний и микроволновой акустики пользовался, по существу, только ими. Таким полным и ясным был этот курс лекций Сергея Михайловича.

Венцом педагогического творчества Сергея Михайловича является курс лекций по статистической радиофизике, который он создал и блистательно читал в течение многих лет в МФТИ. Здесь впервые прозвучало данное им наиболее краткое и ёмкое определение: "Радиофизика — это физика для радио плюс радио для физики", узаконившее радиофизику в ряду смежных дисциплин. На основе этих лекций им был написан первый в мире учебник по статистической радиофизике для высшей школы — *Введение в статистическую радиофизику* (1966 г.), который получил признание не только в нашей стране, но и за рубежом.

Сергей Михайлович принимал активное участие в создании учебников физики под редакцией Н.Д. Папалекси (1939–1948 гг.), в создании *Элементарного учебника физики* под редакцией Г.С. Ландсберга. Под редакцией самого Сергея Михайловича вышло 15 книг, из них три переводных.

Долгое время, начиная с 1953 г., Сергей Михайлович являлся бессменным руководителем основанного им Общесоюзного радиофизического семинара, который оказал огромное влияние на развитие отечественной радиофизики. В работе семинара постоянно принимали участие учёные из многих научных центров страны, так что на самом деле этот семинар был общесоюзным. Популярность и высокий рейтинг семинара были обусловлены, в первую очередь, непрерываемым научным авторитетом Сергея Михайловича, его умением дать квалифицированную оценку работы и чётко сформулировать её сильные и слабые стороны. Семинар был чисто научным, лишённым всякого официоза и формальностей. Единственной "официальной бумагой" была повестка дня с названиями докладов и фамилиями докладчиков, которая заблаговременно рассылалась секретарём семинара. На заседаниях царил демократия, умело управляемая Сергеем Михайловичем.

Семинар явился центром притяжения не только радиофизиков, но и специалистов самых разных областей физики, заинтересованных в методологии и результатах радиофизических исследований. Трудно назвать какое-либо новое актуальное направление радиофизики, которое не было бы представлено на семинаре. Именно здесь многие направления получили путёвку в жизнь. Для молодых участников семинар был настоящей научной школой. Этому способствовала особая атмосфера неподдельного интереса к науке, доброжелательности и мягкого юмора, которую создавал Сергей Михайлович на заседаниях. Поэтому неудивительно, что к школе Рытова с гордостью причисляют себя не только его непосредственные ученики и сотрудники, но и многие другие, на ком благотворно отразилось общение с Сергеем Михайловичем.

Более 35 лет, начиная с 1958 г., Сергей Михайлович проработал в РТИ — институте, призванном решать важные государственные оборонные задачи. Его работа по тематике РТИ касалась исследования принципиальных физических вопросов, связанных с разработкой и созданием наземных крупноапертурных радиоинформационных комплексов. По мелочам его старались не беспокоить. Он был инициатором и непосредственным участником ряда направлений исследований в РТИ, важных для развития основной тематики института.

Одно из направлений работ С.М. Рытова — исследование влияния неоднородностей атмосферы на характеристики радиолокаторов дальнего действия — уже упоминалось. Можно также указать на такие направления, как разработка и создание малошумящих параметрических усилителей, развитие акустооптических методов обработки радиолокационных сигналов, исследование ионосферы с помощью ракет и искусственных спутников Земли в интересах дальней радиолокации и др.

В спорных ситуациях С.М. Рытову доводилось выступать в роли авторитетного арбитра. Его мнение всегда было глубоко аргументированным и научно обоснованным, что позволяло избежать неверных и авантюрных технических решений, насколько бы привлекательными они не казались на первый взгляд. К нему часто обращались за советом и консультацией как руководители подразделений и члены дирекции, так и рядовые сотрудники. Он никому не отказывал. Надолго сохранились в памяти доклады по актуальным направлениям науки и техники, прочитанные им на семинарах в РТИ для широкой аудитории сотрудников. Лаборатория теоретической радиофизики, которую он возглавлял, была центром притяжения талантливой творческой молодёжи, прежде всего студентов и аспирантов базовой кафедры радиофизики МФТИ, многие из которых стали потом кандидатами и докторами наук, руководителями и ведущими специалистами в нашей стране.

Сергей Михайлович широко использовал свои знания и опыт в научно-общественной деятельности: он был членом Учёных советов МФТИ и РТИ, членом редколлегии журнала *Радиотехника и электроника*, входил в состав Методического совета по физико-математическим наукам Всесоюзного общества "Знание", Межведомственного научно-технического совета по проблеме и службе "Солнце–Земля"² и бюро Научного совета

¹ До 1951 г. — физико-технический факультет МГУ.

² С 1978 г. — Научный совет АН СССР по проблеме "Физика солнечно-земных связей".

АН СССР по комплексной проблеме "Распространение радиоволн", являлся председателем секции Научного совета АН СССР по проблеме "Статистическая радиофизика" и др.

Выдающиеся научные и трудовые заслуги С.М. Рытова отмечены присуждением ему Золотой медали им. А.С. Попова, Премии им. Л.И. Мандельштама, Государственной премии, а также награждением его многими орденами и медалями.

Отмечая 100-летие со дня рождения Сергея Михайловича Рытова, мы с благодарностью вспоминаем тот огромный вклад, который он внёс в становление и развитие радиофизики и смежных с ней дисциплин, в формирование отечественной радиофизической школы, в воспитание и подготовку научных кадров. Его отличали беззаветная преданность науке, блестящее педагогическое мастерство, высокие человеческие качества. Имя С.М. Рытова безусловно занимает достойное место в ряду классиков отечественной и мировой науки.

Более подробные сведения о жизни и научной деятельности Сергея Михайловича Рытова можно найти в редакционной статье специального выпуска журнала *Электромагнитные волны и электронные системы*, посвящённого 100-летию со дня рождения этого учёного.

PACS numbers: 42.25.Bs, 42.25.Dd, 72.15.Rn
DOI: 10.3367/UFNr.0179.200905h.0534

Асимптотический предел теории переноса излучения в задачах многократного рассеяния волн случайно-неоднородными средами

Ю.Н. Барабаненков

1. Введение

Распространение волн в неупорядоченных системах считается одним из наиболее трудных предметов теоретической физики. Традиционный подход использует феноменологическую теорию переноса излучения [1, 2], возникшую более ста лет назад при изучении Хвольсоном (1890 г.), Шустером (1905 г.) и Шварцшильдом (1906 г.) рассеяния света в молочных стёклах, солнечной атмосфере и туманной атмосфере Земли на основе представлений линейной кинетической теории об элементарном акте рассеяния и длине свободного пробега излучения. В 1950-е годы в связи с созданием теории частичной когерентности волновых полей начались активные исследования вопроса о границах применимости теории переноса излучения с точки зрения статистической теории многократного рассеяния волн в случайно-неоднородных средах. Результаты этих исследований регулярно докладывались и критически обсуждались на заседаниях Общественного радиофизического семинара под руководством С.М. Рытова в период 1965–1985 гг. Хотя данные исследования носили теоретический характер, они привели в 1973 г. к предсказанию явления слабой локализации света в случайно-неоднородной среде. Поскольку это явление лежало на границе применимости теории переноса излучения, обойти его было невозможно.

Уже в 1967 г. был дан вывод [3] (см. также [4]) феноменологического уравнения переноса излучения в дискретной случайно-неоднородной среде с учётом корреляций рассеивателей всех порядков и взаимного облучения рассеивателей внутри одной и той же эффективной неоднородности, т.е. кластера рассеивателей. При этом некоторый рассеиватель задавался его формой, диэлектрической постоянной и проводимостью; были использованы аппарат уравнений Дайсона и Бете–Солпитера, диаграммная техника Фейнмана и понятие квантово-механического оператора рассеяния [5]. Уравнение переноса [3] с учётом парных корреляций слабых рассеивателей, удовлетворяющих условию применимости борновского приближения, использовалось при исследовании как эффекта увеличения длины свободного пробега микроволнового излучения в снежных покровах и электронов проводимости в жидких металлах [6], так и противоположного эффекта уменьшения длины свободного пробега света [7] и нейтронов в жидкости [6] вблизи критической точки фазового перехода. Вклад высших корреляций слабых рассеивателей в длину свободного пробега света при критической опалесценции рассматривался в [8], а в работе [9] был рассмотрен вклад высших корреляций больших оптически жёстких рассеивателей в пропускательную способность слоя среды, состоящей из таких частиц.

Одновременно с выводом уравнения переноса [3] было сформулировано условие применимости феноменологической теории переноса как условие пренебрежения всеми повторными рассеяниями излучения на одной и той же неоднородности — одногрупповое приближение, совместно с расположением неоднородностей в дальней волновой зоне дифракции Фраунгофера относительно друг друга. Первая часть этого условия применимости, названная впоследствии [10] приближением независимого рассеяния на эффективных неоднородностях, исключает из рассмотрения все петли в многократном рассеянии волн с диаметром петли порядка и более средней длины свободного пробега излучения.

Решающая роль одногруппового приближения для теории переноса была убедительно продемонстрирована на модели многократного рассеяния нестационарного волнового излучения в случайно-неоднородной и случайно-переменной среде, в которой можно ввести представление о конечном "времени жизни" неоднородности. Из этой модели, детально изученной в [6, 11], теория переноса следует как асимптотически точный предел Ван Хова [12] при условии, что отношение времени жизни неоднородности к времени свободного пробега излучения стремится к нулю и отношение времени наблюдения к времени свободного пробега фиксировано. Второе условие предела Ван Хова означает, что повторные рассеяния одной и той же неоднородностью могут происходить на большом временном или пространственном масштабе распространения волнового излучения и тогда должны быть приняты во внимание эффекты многогруппового или зависимого рассеяния, т.е. петли. В этом случае феноменологическая теория переноса излучения нуждается в модификации.

Наиболее хорошо изученный эффект многогруппового или зависимого рассеяния эффективными неоднородностями находит проявление в когерентном усилении обратного рассеяния. Этот эффект впервые был предсказан в виде волновой поправки к решению уравнения

переноса для рассеяния, направленного точно "назад" [13]. В работе [14] с использованием техники циклических (максимально перекрёстных) фейнмановских диаграмм показано, что данная волновая поправка существует с почти единичной относительной величиной в узком конусе направлений рассеяния "назад", ширина которого имеет порядок отношения длины волны к длине свободного пробега излучения.

Предсказанный конус усиления обратного рассеяния, который экспериментально наблюдался несколькими группами [15–17], послужил мощным стимулом к исследованию явления слабой локализации в оптике [18]. Когерентному усилению обратного рассеяния соответствуют когерентные петли, в которых поле и его комплексно сопряжённое значение обходят заданную совокупность неоднородностей в обратной последовательности. Существуют также некогерентные петли в случае, когда заданная совокупность неоднородностей обходится полем и его комплексным сопряжением в одинаковой последовательности. Некогерентные петли приводят к эффекту обратного рассеяния нестационарного излучения в модифицированной теории переноса излучения с запаздыванием [19], где время запаздывания имеет порядок времени свободного пробега излучения. Другой вариант теории переноса с запаздыванием получается при рассмотрении эффекта пленения [20] при многократном рассеянии волнового излучения, например короткого фемтосекундного лазерного импульса [21], в случайно-неоднородной среде из резонансных рассеивателей.

Учёт петель в многократном рассеянии волн связан с отказом от той части условия применимости феноменологического уравнения переноса [3], в которой речь идёт о пренебрежении всеми повторными рассеяниями излучения на одной и той же неоднородности. Однако не видно принципиальных препятствий при исследовании с помощью этого уравнения процесса многократного рассеяния света такими новыми искусственными системами, как статистические ансамбли нанокластеров [22], в которых каждый кластер представляет собой совокупность, возможно, большого, но все-таки конечного числа атомов (или молекул) и требует описания рассеяния света на нём методами квантовой механики или квантовой электродинамики. Правда, здесь может возникнуть необходимость учёта эффектов ближних полей в виде неоднородных (эванесцентных) волн вблизи эффективных неоднородностей (нанокластеров), т.е. отказа от условия о расположении неоднородностей в дальней волновой зоне дифракции Фраунгофера относительно друг друга.

За последние годы достигнут заметный прогресс в теоретическом изучении эффектов ближних полей при многократном рассеянии электромагнитных волн неоднородными диэлектрическими средами. Прогресс обусловлен использованием техники Зоммерфельда–Вейля угловых спектральных амплитуд волн локального электромагнитного поля, распространяющихся в прямом и обратном направлениях по отношению к оси параметра погружения в слой трёхмерной среды; рассмотрением явления эмиссии энергии из эванесцентной волны при её рассеянии диэлектрической структурой [23] с проверкой свойства расширенной унитарности 2×2 -блочной S -матрицы рассеяния [24] и интерпретацией упомянутой эмиссии энергии как результата интерференции двух эванесцентных волн, убывающих навстречу друг другу

[25]. В результате сформулирован подход [26] к построению модифицированной теории переноса электромагнитного излучения в случайно-неоднородной среде с учётом эффектов ближних полей и интерференции встречных волновых потоков.

Наконец, перспективы изучения электродинамических свойств искусственных материалов в виде статистических ансамблей частиц, имеющих заданную форму, диэлектрическую проницаемость и проводимость (см., например, [27]) и, возможно, значительный параметр упаковки в пространстве, выдвинули проблему коренной модификации феноменологической теории переноса излучения, однако с сохранением некоторых её признаков. Такая модификация исходит из метода расщепления слоёв Амбарцумяна [28], согласно которому рассеивающая среда мысленно разбивается на элементарные слои (срезы) с малыми зазорами между ними, с последующим выводом соотношений переноса между потоками излучения по интенсивности в зазорах и отражённым от всей среды и прошедшим через неё потоком.

Идея о виртуальном расщеплении на срезы с зазорами применима, очевидно, к любой среде, в частности, состоящей из упомянутых частиц, при дальнейшем выводе соотношений переноса для потоков излучения, но уже не по интенсивности, а по амплитуде волн, как было сделано в работах [29, 30]. Из соотношений переноса этих работ следует система четырёх матричных дифференциальных уравнений Риккати для блоков S -матрицы рассеяния слоя среды в форме Рейда [31] и Редгеффера [32], с дифференцированием по параметру погружения в слой среды. С помощью метода Рейда устанавливается связь между решением системы нелинейных матричных уравнений Риккати и решением линейного дифференциального уравнения для трансфер-матрицы. В работе [30] выводятся расширенные соотношения унитарности и инвариантности относительно обращения времени для решения системы уравнений Риккати и решения уравнения для трансфер-матрицы. Расширенные соотношения обобщают для случая включения эффектов ближних полей более привычные квантово-механические соотношения, использованные в широко известной теории коэффициента прохождения и длины локализации электрона в N связанных неупорядоченных цепочках, разработанной Дороховым [33] и авторами [34] на основе уравнения Фоккера–Планка для функции распределения вероятностей элементов трансфер-матрицы.

Следует отметить, что в упомянутой системе матричных уравнений Риккати главным является независимое от других уравнение Риккати для волнового коэффициента отражения слоя трёхмерной случайно-неоднородной диэлектрической среды в представлении угловых спектральных амплитуд, которое изучалось Кляцкиным [35] и исходя из которого в [36] записано функциональное уравнение Фоккера–Планка для функционала распределения вероятностей данного коэффициента отражения.

Рассмотрение уравнения Фоккера–Планка в вариационных производных весьма затруднительно. Однако можно перейти к обыкновенным производным путём дискретизации пространства значений поперечного волнового вектора относительно оси параметра погружения, по аналогии с методом трансфер-матрицы с конечным числом каналов распространения квантово-механи-

ческой теории интерференционных эффектов в металлических проводниках [37].

При исследовании многократного рассеяния волн статистическими ансамблями частиц с большим параметром упаковки представляется разумным считать распределение частиц в нулевом приближении периодическим, как в структуре фотонного кристалла Яблоновича и Джона [38]. В этом случае, например, матричное уравнение Риккати для коэффициента отражения оказывается естественно дискретизированным по дифракционным порядкам отражённого от слоя структуры и прошедшего через него излучения, и это уравнение с успехом применяется [39] для численного расчёта методом Рунге–Кутты формирования запрещённых зон спектра прохождения излучения через упорядоченную систему диэлектрических цилиндров с произвольным профилем поперечного сечения.

Остановимся далее на деталях некоторых затронутых вопросов асимптотического предела теории переноса.

2. Одногрупповое приближение и предел Ван Хова

В скалярном варианте феноменологическое уравнение переноса для лучевой интенсивности $I(\mathbf{R}, \mathbf{s})$ в точке \mathbf{R} в направлении единичного вектора \mathbf{s} имеет вид

$$s \nabla I(\mathbf{R}, \mathbf{s}) = -\frac{1}{l} I(\mathbf{R}, \mathbf{s}) + \int_{4\pi} ds' W(\mathbf{s}, \mathbf{s}') I(\mathbf{R}, \mathbf{s}'). \quad (1)$$

Коэффициент экстинкции $1/l$ и коэффициент рассеяния $W(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$ элементарного объёма выражаются преобразованиями Фурье через массовый оператор M_1 и оператор интенсивности K_1 уравнений Дайсона и Бете–Солпитера в одногрупповом приближении, которые символически представляются рядами

$$M_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d\mathbf{l} \dots \int d\mathbf{g}_n(1, \dots, n) T_{1\dots n}^{\text{gr}} (T_{1\dots n} \otimes T_{1\dots n}^*)^{\text{gr}}. \quad (2)$$

Здесь целые числа $1, \dots, n$ обозначают координаты точек пространства, $T_{1\dots n}$ — оператор рассеяния системы n рассеивателей с центрами в данных точках, $g_n(1, \dots, n)$ — корреляционная функция рассеивателей. Групповая операция вычитания gr устраняет малые кратности рассеяния в группе рассеивателей и в простейшем случае действует как $T_{12}^{\text{gr}} = T_{12} - T_1 - T_2$. Символ \otimes отвечает за тензорное произведение.

Первоначально одногрупповое приближение (2) было введено на основе диаграммной техники Фейнмана. Однако впоследствии появилась возможность прийти к этому приближению на чисто аналитической основе, используя точное соотношение Бете–Солпитера [20, 40] вида

$$\begin{aligned} (\mathbf{L} \otimes I - I \otimes \mathbf{L}) \langle G \otimes G^* \rangle = \\ = \left\langle [\mathbf{M} \otimes I - I \otimes \mathbf{M}^* - (G \otimes I - I \otimes G^*) \mathbf{K}] G \otimes G^* \right\rangle + \\ + I \otimes \langle G^* \rangle - \langle G \rangle \otimes I. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь \mathbf{L} — дифференциальный оператор волнового уравнения в свободном пространстве, G — функция Грина волнового уравнения в случайно-неоднородной среде, угловые скобки означают усреднение по статисти-

ческому ансамблю рассеивателей. Операторы \mathbf{M} и \mathbf{K} имеют формально такую же аналитическую структуру, как массовый оператор и оператор интенсивности в одногрупповом приближении (2), но при замене T -операторов рассеяния в свободном пространстве само-согласованными случайными операторами рассеяния в случайно-неоднородной среде.

Допустим, что случайная функция Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ обладает локальным свойством, мало отличающимся от её среднего по ансамблю значения и от функции Грина в свободном пространстве, если расстояние между точками наблюдения и источника \mathbf{r} и \mathbf{r}' порядка радиуса рассеивателей и их радиуса корреляций. Тогда случайные операторы \mathbf{M} и \mathbf{K} практически совпадают с массовым оператором и оператором интенсивности в одногрупповом приближении (2), а соотношение (3) превращается в уравнение Бете–Солпитера в форме кинетического уравнения [20].

Сформулированное локальное свойство случайной функции Грина означает, в частности, пренебрежение всеми петлями в многократном рассеянии волн с диаметром порядка и более длины свободного пробега излучения. Возможно ли оправдать такое свойство асимптотически точно? Такое оправдание известно, например, для задачи о распространении квантовомеханического потока частиц под воздействием случайно-переменного потенциала $V(\mathbf{r}, t)$. Исходя из стохастического уравнения Лиувилля–Неймана для матрицы плотности $\rho(t)$ потока частиц в предположении о гауссовом распределении вероятностей реализаций случайного потенциала в [6, 20] выводится кинетическое уравнение для усреднённой по ансамблю матрицы плотности $\bar{\rho}(\mathbf{R}, \mathbf{k}, t)$ в переменных Вигнера:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar \mathbf{k}}{m} \nabla_{\mathbf{R}} \right) \bar{\rho}(\mathbf{R}, \mathbf{k}, t) = \\ = \int d\mathbf{k}' W(\mathbf{k}, \mathbf{k}') [\bar{\rho}(\mathbf{R}, \mathbf{k}', t) - \bar{\rho}(\mathbf{R}, \mathbf{k}, t)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнение (4) является асимптотически точным в пределе Ван Хова, $\tau_0/t_M \rightarrow 0$, $t/t_M = \text{const}$, где t_M оценивает снизу время релаксации t_r кинетического уравнения, "время жизни" τ_0 эффективной неоднородности определяется в терминах кумулянта флуктуаций случайного потенциала. В работе [11] рассмотрен предельный переход от кинетического уравнения (4) к стационарному уравнению переноса (1) путём замены времени наблюдения во втором условии предела Ван Хова временем поглощения.

3. Когерентные петли и слабая локализация

Когерентным петлям отвечают циклические фейнмановские диаграммы оператора интенсивности [14]. Циклические диаграммы не учитываются при выводе уравнения переноса (1) на основе одногруппового приближения (2). Тем не менее циклические диаграммы в определённом смысле эквивалентны "лестничным" диаграммам, которые составляют главное содержание теории переноса. Это свойство эквивалентности получается путём инверсии верхнего или нижнего рядов циклической диаграммы с использованием свойства взаимности функции Грина и свойств взаимности оператора интенсивности в одногрупповом приближении. Именно свой-

ство эквивалентности циклических диаграмм позволило автору [14] сделать вывод о существовании конуса усиления обратного рассеяния с шириной $\delta\theta \approx \lambda/l$ порядка отношения длины волны λ к длине свободного пробега l .

Уместно отметить, что упомянутая статья [14] была опубликована в связи с обсуждением работы Газаряна [41], в которой на основе точного решения проблемы сильной локализации Андерсона [42] в одномерной случайно-неоднородной среде было продемонстрировано, вслед за [43], экспоненциально быстрое убывание пропускательной способности слоя среды по средней интенсивности в зависимости от его толщины вместо степенного закона убывания согласно уравнению переноса [1]. Иными словами, уравнение переноса даёт заниженное значение для отражательной способности одномерного рассеивающего слоя. Цель статьи [14] состояла в том, чтобы продемонстрировать подобного рода занижение теорией переноса отражательной способности и трёхмерного рассеивающего слоя, но занижение в слабом смысле.

4. Ближние поля и туннельная компонента переноса излучения

Ближние поля возникают при многократном рассеянии волн в случайно-неоднородной среде как эванесцентные волны вблизи эффективных неоднородностей и принимают специфическое участие в переносе излучения наряду с распространяющимися волнами, которые только и учитываются феноменологической теорией переноса. Принципиальным здесь является полученная в [25] формула для потока энергии излучения в неоднородной диэлектрической среде, имеющая в скалярном варианте вид

$$P_z(z) = \int_{\mathbf{k}_\perp} H^{\text{Pr}}(k_\perp) [\rho_{11}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_\perp; z) - \rho_{22}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_\perp; z)] + \int_{\mathbf{k}_\perp} iH^{\text{Ev}}(k_\perp) [\rho_{12}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_\perp; z) - \rho_{21}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_\perp; z)]. \quad (5)$$

Здесь $P_z(z)$ — составляющая вектора Пойнтинга вдоль оси z параметра погружения в слой среды $0 < z < L$, проинтегрированная вдоль перпендикулярной к этой оси плоскости; $\rho_{mm'}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}'_\perp; z)$ — матрица плотности [25] (медленно изменяющихся) угловых спектральных амплитуд локальных волн прямого (индекс 1) и обратного (индекс 2) направлений распространения относительно оси z ($m, m' = 1, 2$), $\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}'_\perp$ — перпендикулярные оси z составляющие волновых векторов \mathbf{k}, \mathbf{k}' ; $H^{\text{Pr}}(k_\perp)$ и $H^{\text{Ev}}(k_\perp)$ — проекторы на распространяющиеся, $k_\perp < k_0$, и эванесцентные, $k_\perp > k_0$, волны соответственно, для которых продольное волновое число $\gamma_k = [k_0^2 - k_\perp^2]^{1/2}$ имеет вещественное или чисто мнимое значение; k_0 — волновое число свободного пространства; используется сокращённое обозначение интеграла $\int_{\mathbf{k}_\perp} = (2\pi)^{-2} \int d\mathbf{k}_\perp$.

Согласно формуле (5), если вклад распространяющихся волн в полный поток энергии вдоль оси z определяется интенсивностями угловых спектральных амплитуд волн прямого и обратного направлений распространения, то вклад эванесцентных волн в этот поток энергии выражается через интерференционный член двух эванесцентных волн, убывающих навстречу

друг другу. При обращении к случайно-неоднородной среде необходимо рассматривать матрицу когерентности угловых спектральных амплитуд локальных волн для двух значений параметра погружения в среду, $\bar{\rho}_{mm'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; z, z')$, где черта сверху означает усреднение по ансамблю и вместо $\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}'_\perp$ используются более краткие обозначения \mathbf{p}, \mathbf{p}' . Для такой матрицы когерентности выводится уравнение Бете–Солпитера с массовым оператором и оператором интенсивности в одногрупповом приближении (2).

В простейшем случае слабых некоррелированных рассеивателей мы приходим к модели среды с гауссовыми флуктуациями потенциала, использованной в работе [26] при анализе эффектов ближних полей в теории переноса. После некоторых упрощений уравнение Бете–Солпитера для матрицы когерентности угловых спектральных амплитуд преобразуется в четыре уравнения, два из которых служат для вычисления усреднённых по ансамблю интенсивностей угловых спектральных амплитуд волн прямого и обратного направлений распространения и два других — для комплексно-сопряжённых взаимных когерентностей эванесцентных волн, убывающих навстречу друг другу. Одно из двух первых уравнений выглядит как

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{11}(\mathbf{p}, \mathbf{p}, z, z) &= \exp(-2\Im\gamma_{1p}z) |f(\mathbf{p})|^2 + \\ &+ \int_0^z dz_1 \exp[-2\Im\gamma_{1p}(z - z_1)] \int_{\mathbf{p}'} \frac{1}{4|\gamma_p||\gamma_{p'}|} \times \\ &\times [B(\mathbf{p} - \mathbf{p}', \gamma_p - \gamma_{p'}) \hat{\rho}_{11}(\mathbf{p}', \mathbf{p}'; z_1, z_1) + \\ &+ B(\mathbf{p} - \mathbf{p}', \gamma_p + \gamma_{p'}) \hat{\rho}_{22}(\mathbf{p}', \mathbf{p}'; z_1, z_1) + \\ &+ B(\mathbf{p} - \mathbf{p}', \gamma_p - \gamma_{p'}) \hat{\rho}_{12}(\mathbf{p}', \mathbf{p}'; z_1, z_1) + \\ &+ B(\mathbf{p} - \mathbf{p}', \gamma_p + \gamma_{p'}) \hat{\rho}_{21}(\mathbf{p}', \mathbf{p}'; z_1, z_1)]. \quad (6) \end{aligned}$$

Уравнение (6) записано в терминах матрицы когерентности быстро меняющихся угловых спектральных амплитуд $\hat{\rho}_{mm'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; z, z') = \exp(i\xi_m\gamma_p z - i\xi_{m'}\gamma_{p'} z') \bar{\rho}_{mm'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; z, z')$ с $\xi_1 = 1$ и $\xi_2 = -1$. Величина $\Im\gamma_{1p}$ — это мнимая часть продольного волнового числа в детерминированной среде с эффективным комплексным волновым числом k_1 ; предполагается, что на левую границу слоя падает распространяющаяся волна с угловой спектральной амплитудой $f(\mathbf{p})$. Функция $B(\mathbf{k}_\perp, k_z)$ имеет смысл трёхмерного преобразования Фурье кумулянта флуктуаций случайного потенциала. Уравнение (6) описывает в основном обычное для теории переноса многократное рассеяние усреднённых по ансамблю интенсивностей угловых спектральных амплитуд на эффективных неоднородностях со свободным пробегом между ними. Кроме того, мы видим, конечно, в этом уравнении вклад в усреднённую интенсивность волн прямого направления распространения, вносимый взаимными когерентностями эванесцентных волн при их рассеянии на эффективных неоднородностях.

Уравнение для вычисления усреднённой по ансамблю интенсивности угловых спектральных амплитуд волн обратного направления распространения выглядит аналогично (6), и оно здесь не приводится.

Обратимся к уравнению для взаимной когерентности убывающих навстречу друг другу пар эванесцентных

волн вида

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{12}(\mathbf{p}, \mathbf{p}; z, z) = & \int_0^z dz_1 \int_z^L d\zeta_1 \exp [i\gamma_{1p}(z - z_1)] \times \\ & \times \exp [i\gamma_{1p}^*(z - \zeta_1)] \int_{\mathbf{p}'} \frac{1}{4|\gamma_p||\gamma_{p'}|} \times \\ & \times B(\mathbf{p} - \mathbf{p}', z_1 - \zeta_1) \sum_{m,n} \exp [-i\zeta_m \gamma_{p'}(z - z_1)] \times \\ & \times \exp [i\zeta_n \gamma_{p'}^*(z - \zeta_1)] \hat{\rho}_{nm}(\mathbf{p}', \mathbf{p}'; z, z). \end{aligned} \quad (7)$$

Через $B(\mathbf{k}_\perp, z)$ обозначено двумерное преобразование Фурье кумулянта флуктуаций случайного потенциала в плоскости, перпендикулярной оси z .

Уравнение (7) принципиально отличается по структуре от уравнения (6). Действительно, в двойном интеграле правой части (7) выполняется неравенство $z_1 < z < \zeta_1$, с разностью $\zeta_1 - z_1 \approx r_0$, где r_0 — пространственный масштаб эффективной неоднородности. Это означает, что точка наблюдения z и две точки рассеяния — z_1 и ζ_1 — расположены внутри одной и той же неоднородности и две появляющиеся при рассеянии элементарные эванесцентные волны убывают навстречу друг другу с интерференцией в точке наблюдения. Эта интерференция приводит, как показывает более детальный анализ уравнения (7), к следующей туннельной компоненте потока энергии излучения:

$$\begin{aligned} -2 \int_{\mathbf{p}(k_0 < p < p_0)} \Im \hat{\rho}_{12}(\mathbf{p}, \mathbf{p}; z, z) = \\ = \frac{g}{1-g} \int_{\mathbf{p}(p < k_0)} [\hat{\rho}_{11}(\mathbf{p}, \mathbf{p}; z, z) - \hat{\rho}_{22}(\mathbf{p}, \mathbf{p}; z, z)]. \end{aligned} \quad (8)$$

Решение (8) мнимой части уравнения (7) получается в пределе мелкомасштабных флуктуаций случайного потенциала, когда падающая на неоднородность и рассеянная ею эванесцентные волны слабо убывают на протяжении неоднородности, $|\gamma_p| r_0 \ll 1$ и $|\gamma_{p'}| r_0 \ll 1$, с $k_0 < p < p_0$ и $k_0 < p' < p_0$, где $p_0 \approx 1/r_0$ — некоторый параметр обрезания. Параметр туннельной компоненты потока энергии имеет порядок величины $g \approx r_0/l$ — отношения масштаба неоднородности к длине свободного пробега, определяемой согласно $1/l = \langle V^2 \rangle r_0^3$. Точка наблюдения z предполагается расположенной достаточно далеко от границ слоя в масштабе эффективной неоднородности.

Равенство (8) демонстрирует существование однородного туннельного потока энергии в случайно-неоднородной среде, пропорционального обычному в феноменологической теории переноса потоку энергии распространяющихся волн. В слабо рассеивающей среде коэффициент пропорциональности мал по сравнению с единицей. Однако в сильно рассеивающей среде, например, состоящей из резонансных рассеивателей, коэффициент пропорциональности может возрасти по абсолютной величине.

5. Заключение

Выяснение границ применимости феноменологической теории переноса излучения с точки зрения статистической теории многократного рассеяния волн привело к предсказанию и открытию явления слабой локализации

света в случайно-неоднородной среде. Построенные модификации теории переноса позволили включить в рассмотрение такие явления, как пленение излучения в резонансной среде и туннельный перенос энергии излучения в ближних полях эффективных рассеивающих неоднородностей. Идеи и методы теории переноса нашли применение в исследовании формирования запрещенных зон спектров прохождения излучения через фотонные кристаллы и могут быть применены для исследования многократного рассеяния света статистическими ансамблями нанокластеров и проводящих частиц с большим параметром упаковки.

Работа частично поддержана грантом РФФИ (06-02-17451).

Список литературы

1. Соболев В В *Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет* (М.: Гостехиздат, 1956) [Sobolev V V *A Treatise on Radiative* (Princeton, NJ: Van Nostrand, 1963)]
2. Chandrasekhar S *Radiative Transfer* (New York: Dover Publ., 1960)
3. Барабаненков Ю Н, Финкельберг В М *ЖЭТФ* **53** 978 (1967) [Barabanenkov Yu N, Finkel'berg V M *Sov. Phys. JETP* **26** 587 (1968)]
4. Барабаненков Ю Н *УФН* **117** 49 (1975) [Barabanenkov Yu N *Sov. Phys. Usp.* **18** 673 (1975)]
5. Goldberger M L, Watson K M *Collision Theory* (New York: Wiley, 1964)
6. Барабаненков Ю Н, Озрин В Д, Калинин М И *Асимптотический метод в теории стохастических линейных динамических систем* (М.: Энергоатомиздат, 1985)
7. Барабаненков Ю Н, Стайнова Е Г *Опт. и спектроск.* **63** 362 (1987) [Barabanenkov Yu N, Stainova E G *Opt. Spectrosc.* **63** 211 (1987)]
8. Барабаненков Ю Н, Стайнова Е Г *Опт. и спектроск.* **59** 1342 (1985) [Barabanenkov Yu N, Stainova E G *Opt. Spectrosc.* **59** 803 (1985)]
9. Барабаненков Ю Н, Калинин М И *Изв. вузов. Радиофизика* **29** 913 (1986) [Barabanenkov Yu N, Kalinin M I *Radiophys. Quantum Electron.* **29** 701 (1986)]
10. Legendijk A, van Tiggelen B A *Phys. Rep.* **270** 143 (1996)
11. Барабаненков Ю Н *ДАН СССР* **295** 79 (1987) [Barabanenkov Yu N *Sov. Phys. Dokl.* **32** 556 (1987)]
12. van Hove L *Physica* **21** 517 (1954)
13. Watson K M *J. Math. Phys.* **10** 688 (1969)
14. Барабаненков Ю Н *Изв. вузов. Радиофизика* **16** 88 (1973) [Barabanenkov Yu N *Radiophys. Quantum Electron.* **16** 65 (1973)]
15. Kuga Y, Ishimaru A *J. Opt. Soc. Am. A* **1** 831 (1984)
16. Van Albada M P, Legendijk A *Phys. Rev. Lett.* **55** 2692 (1985)
17. Wolf P-E, Maret G *Phys. Rev. Lett.* **55** 2696 (1985)
18. van Rossum M C W, Nieuwenhuizen Th M *Rev. Mod. Phys.* **71** 313 (1999)
19. Барабаненков Ю Н, Озрин В Д *Изв. вузов. Радиофизика* **28** 450 (1985) [Barabanenkov Yu N, Ozrin V D *Radiophys. Quantum Electron.* **28** 305 (1985)]
20. Barabanenkov Yu N, in *Wave Scattering in Complex Media: from Theory to Applications* (Eds B A van Tiggelen, S E Skipetrov) (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2003) p. 415
21. Vreeker R et al. *Phys. Lett. A* **132** 51 (1988)
22. Кресин В З, Овчинников Ю Н *УФН* **178** 449 (2008) [Kresin V Z, Ovchinnikov Yu N *Phys. Usp.* **51** 427 (2008)]
23. Gulyaev Yu V, Barabanenkov Yu N, Barabanenkov M Yu, Nikitov S A *Phys. Lett. A* **335** 471 (2005)
24. Gulyaev Yu V, Barabanenkov Yu N, Barabanenkov M Yu, Nikitov S A *Phys. Rev. E* **72** 026602 (2005)
25. Barabanenkov M Yu, Barabanenkov Yu N, Gulyaev Yu V, Nikitov S A *Phys. Lett. A* **364** 421 (2007)
26. Барабаненков Ю Н, Барабаненков М Ю *Электромагнитные волны и электронные системы* (11) 16 (2007)
27. Виноградов А П, Дорофеев А В, Зухди С *УФН* **178** 511 (2008) [Vinogradov A P, Dorofeenko A V, Zouhdi S *Phys. Usp.* **51** 485 (2008)]

28. Амбарцумян В А *ЖЭТФ* **13** 244 (1943)
29. Varabanenkov Yu N, Kouznetsov V L, Varabanenkov M Yu *Prog. Electromagn. Res., PIER* **24** 39 (1999)
30. Varabanenkov Y N, Varabanenkov M Y, in *PIERS 2006: Progress in Electromagnetics Research Symp., March 26–29, 2006, Cambridge, Mass., USA: Proc.* (Cambridge, Mass.: The Electromagnetics Academy, 2006) p. 10
31. Reid W *Indiana Univ. Math. J.* **8** 221 (1959)
32. Redheffer R *Indiana Univ. Math. J.* **8** 349 (1959)
33. Дорохов О Н *Письма в ЖЭТФ* **36** 259 (1982) [Dorokhov O N *JETP Lett.* **36** 318 (1982); *Solid State Commun.* **44** 915 (1982)]
34. Mello P A, Pereyra P, Kumar N *Ann. Physics* **181** 290 (1988)
35. Кляцкин В И *Метод погружения в теории распространения волн* (М.: Наука, 1986)
36. Varabanenkov Yu N, Kryukov D I *Waves Random Media* **2** (1) 1 (1992)
37. Mello P A, Stone A D *Phys. Rev. B* **44** 3559 (1991)
38. Yablonovitch E *Phys. Rev. Lett.* **58** 2059 (1987); John S *Phys. Rev. Lett.* **58** 2486 (1987)
39. Varabanenkov Yu N, Varabanenkov M Yu *ЖЭТФ* **123** 763 (2003) [*JETP* **96** 674 (2003)]
40. Varabanenkov Yu N, Kalinin M I *Phys. Lett. A* **163** 214 (1992)
41. Газарян Ю Л *ЖЭТФ* **56** 1856 (1969) [Gazaryan Yu L *Sov. Phys. JETP* **29** 996 (1969)]
42. Anderson P W *Phys. Rev.* **109** 1492 (1958)
43. Герцштейн М Е, Васильев В В *Теория вероятностей и ее примен.* **4** 424 (1959) [Gertsenshtein M E, Vasil'ev V V *Theor. Probab. Appl.* **4** 391 (1959)]

PACS numbers: **41.20.** – q, **42.65.**Pc, **85.50.** – n
DOI: 10.3367/UFNr.0179.200905i.0539

Поведение локальных полей в нанорешётках из сильно взаимодействующих атомов: наностраты, гигантские резонансы, "магические" числа и оптическая бистабильность

А.Е. Каплан, С.Н. Волков

С.М. Рытов интересовался многими вещами, в том числе теорией слоистых сред с периодом много меньшим длины волны [*ЖЭТФ* **29** 605 (1955)]. Один из нас, А.Е.К., в течение 20 лет, до 1979 г., бывший участником рытовских семинаров, тоже занимался очень многими и разными вещами, но иногда с удивлением обнаруживал, что его работа становится близка к давним интересам С.М. Рытова. Удивительного здесь, конечно, мало: у С.М. Рытова было чутьё на необычные и фундаментальные вещи, и он часто смотрел далеко вперёд. Наши новые результаты, представленные в этом докладе, — в какой-то мере, эхо тех давних интересов С.М. Рытова.

В настоящем докладе, следуя нашей недавней краткой публикации [1], мы рассматриваем ряд новых эффектов, возникающих в упорядоченных одномерных и двумерных системах из двухуровневых атомов при наличии достаточно сильного дипольного взаимодействия. Мы показали, что в системах с размерами, меньшими длины волны света, распределение наведённых дипольных моментов атомов (а следовательно, и локального поля) может стать существенно неоднородным, образуя страты и двумерные структуры нанометрового масштаба. Такое поведение локального поля в диэлектрической системе существенно расходится с результатами классической теории Лоренца–Лоренца для ло-

кальных полей и приводит к возникновению определяемых размером и геометрией системы резонансов, способных вызвать гигантское усиление локального поля. Нами показано, что нелинейность насыщения в двухуровневых атомах может приводить к оптической бистабильности, в том числе в простейшем случае, когда система состоит всего из двух атомов. Нами также предсказаны "магические" размеры и геометрии системы, при которых локальное поле, в отличие от такового в лоренцевской модели, не вытесняется из системы при частоте электромагнитной волны, совпадающей с частотой резонанса двухуровневого атома.

Как известно из электродинамики сплошных сред, микроскопическое электрическое поле в среде, действующее на атомы или молекулы (известное как "локальное поле"), как правило, отличается от макроскопического (среднего) поля из-за наличия дипольного взаимодействия между частицами среды. Это отличие является центральным пунктом классической теории локальных полей в диэлектриках, развитой Лоренцем и Лоренцем [2]. Важной, хоть и неявной предпосылкой этой теории является предположение о том, что локальное поле практически не изменяется от атома к атому на масштабах, гораздо меньших длины световой волны λ . Таким образом, эта теория фактически опирается на так называемое приближение среднего поля.

Стремительное развитие нанотехнологий открыло возможность создания искусственных систем, состоящих из сильно взаимодействующих частиц, в которых априорное предположение об однородности локального поля являлось бы неверным. Вполне естественно было бы предположить, что отказ от приближения среднего поля при описании локальных полей способен привести к открытию множества новых интересных эффектов, подобно тому, как переход от макроскопической теории Кюри–Вейсса к модели Изинга значительно расширил возможности для описания магнитных материалов [3]. При этом, конечно, не следует ожидать полной аналогии в описании локальных полей и магнитных сред. В рассматриваемом нами случае можно ожидать ещё более интересных находок, поскольку электрические диполи, наводимые локальным полем в атомах, определяются падающей электромагнитной волной, в отличие от статических магнитных диполей в модели Изинга. Другим фундаментальным отличием нашей работы является рассмотрение очень небольших систем (размером менее длины волны), в то время как большинство исследований в теории магнетизма сосредоточено на построении макроскопического ("термодинамического") описания среды.

В этом докладе на основе результатов, впервые кратко изложенных в нашей недавно опубликованной работе [1], будет продемонстрировано, что принятие во внимание значительных изменений локального поля от атома к атому на масштабе, меньшем длины волны, открывает путь к описанию многих новых эффектов в упорядоченных системах сильно взаимодействующих атомов: гигантских резонансов локального поля, "магических" размеров и геометрий системы, оптической бистабильности и гистерезиса. Особенно важно, что наше исследование открывает совершенно новый подход в теории взаимодействия света с веществом. Как следует из наших расчётов, различные внешние условия могут привести к нарушению плавного изменения локального поля от атома к атому, порождая почти периодические

страты или более сложные структуры (patterns) из наведённых дипольных моментов. Этот эффект наиболее чётко выражен в одномерных и двумерных диэлектрических системах из упорядоченных атомов, молекул, квантовых точек, кластеров или других резонансных частиц. Резонансный характер взаимодействия этих частиц с полем световой волны позволяет управлять анизотропией и силой взаимодействия между частицами. Если при этом световая волна распространяется перпендикулярно к одномерной или двумерной решётке из атомов, то мы можем также не учитывать эффект распространения волны.

В общем случае возможно возникновение двух различных типов дипольных страт: коротковолновых, с периодом до четырёх межатомных расстояний, и длинноволновых. Эти страты могут быть интерпретированы как стоячие волны возмущений локального поля в системе, которые далее мы будем называть "локситонами" (locsitons). Локситоны имеют электростатическую природу и могут обладать очень малой групповой скоростью. Их можно отнести к френкелевским экситонам [4], поскольку в рассматриваемых нами системах электроны связаны с атомами и перенос заряда отсутствует.

В первом приближении рассматриваемый нами эффект линеен относительно внешнего поля, при этом возникновение локситонов возможно в полосе частот, гораздо большей ширины атомного резонанса. По существу, мы имеем дело с уширением Раби для спектральной линии резонансного атома за счёт сильного межатомного взаимодействия. Управление дипольными стратами возможно посредством изменения поляризации лазерного излучения и безразмерного коэффициента связи между атомами Q , который, в свою очередь, зависит от расстояния между атомами, величины дипольного момента и спектральной ширины линии резонансного перехода в атоме, а также от отстройки частоты лазера относительно частоты атомного резонанса. При $|Q| > Q_{cr} = O(1)$ плавное изменение локального поля от атома к атому может быть нарушено из-за наличия границ, неоднородностей, дефектов решётки и т.п. Одним из наиболее ярких проявлений этого эффекта является возникновение гигантских резонансов локального поля, обусловленных собственными колебаниями локситонов в цепочках и решётках с конечными размерами. Другой интересный и неожиданный эффект состоит в отсутствии вытеснения локального поля из системы при точной настройке частоты лазера на атомный резонанс, если система содержит в себе определённое "магическое" число атомов. Кроме того, при наличии нелинейности насыщения в системе возможно появление различных типов оптической бистабильности и гистерезиса.

Рассматриваемая нами модель основана на дипольном взаимодействии между атомами. Малый размер системы позволяет нам не учитывать запаздывание, поэтому, как и в классической теории локальных полей [2], мы будем опираться на тот факт, что поле диполя в ближней зоне имеет преимущественно квазистатический, безызлучательный характер. Частота падающего лазерного излучения ω мало отличается от резонансной частоты ω_0 атома, который мы будем приближённо считать двухуровневой системой [5–7] с дипольным моментом квантового перехода d_a . Локальное поле, действующее на атом, расположенный в точке с координатами \mathbf{r} , может быть представлено в виде суммы поля

\mathbf{E}_{in} падающей на систему световой волны и суммы квазистатических вкладов от всех остальных диполей [8] (координаты которых мы обозначим как \mathbf{r}'), наведённых локальными полями $\mathbf{E}_L(\mathbf{r}')$:

$$\mathbf{E}_L(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{in}(\mathbf{r}) - \frac{Q}{4} \sum_{\text{lattice}}^{\mathbf{r}' \neq \mathbf{r}} \frac{l_a^3}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} \times \frac{3\mathbf{u}[\mathbf{E}_L(\mathbf{r}')\mathbf{u}] - \mathbf{E}_L(\mathbf{r}')}{1 + |\mathbf{E}_L(\mathbf{r}')|^2/[E_{sat}^2(1 + \delta^2)]}, \quad (1)$$

где \mathbf{u} — единичный вектор, направленный вдоль $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $\delta = T\Delta\omega = T(\omega - \omega_0)$ — безразмерная отстройка частоты лазера от частоты атомного резонанса, $E_{sat}^2 = \hbar^2\epsilon/(|d_a|^2\tau T)$ — интенсивность насыщения двухуровневой системы. Безразмерный параметр

$$Q = \frac{4|d_a|^2 T}{\epsilon\hbar l_a^3(\delta + i)}, \quad (2)$$

характеризующий силу дипольного взаимодействия между соседними атомами, зависит от $T = 2/\Gamma$ — времени поперечной релаксации двухуровневого атома с однородной шириной спектральной линии Γ , времени его продольной релаксации (времени жизни в возбуждённом состоянии) τ и диэлектрической проницаемости среды ϵ , содержащей резонансные атомы. Мы также предполагаем, что расстояние между соседними атомами l_a достаточно велико для того, чтобы не допустить перекрытия электронных орбиталей соседних атомов, так что $l_a \gg |d_a|/e$. Это предположение фактически присутствует и в лоренцевской теории локального поля [5–7], опирающейся на классическое описание взаимодействия между атомами и молекулами. Кардинальным отличием нашего подхода от стандартной лоренцевской теории является отсутствие неявного усреднения локального поля по всем соседним узлам кристаллической решётки, проявляющегося в предположении, что $\mathbf{E}_L(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_L(\mathbf{r}')$, а также в отказе от воображаемой сферы, окружающей рассматриваемый атом, за пределами которой в лоренцевской теории среда считается непрерывной.

Обнаруженные нами эффекты могут быть существенно усилены за счёт больших дипольных моментов атомных переходов, которые можно встретить, например, в парах щелочных металлов, CO_2 , узкополосных резонансах в твёрдых телах [9], квантовых точках, кластерах и т.п. Во многих из этих случаев появление локситонов становится возможным даже при значениях l_a , достигающих нескольких десятков нанометров. Следует отметить, что описание поверхностных плазмонов в металлдиэлектрических композитных материалах [10, 11], как правило, требует более сложного теоретического подхода, учитывающего поле, создаваемое диполями в дальней зоне, поэтому рассмотрение данного случая выходит за рамки нашего доклада.

Рассмотрим сначала более простую задачу о нахождении локального поля в одномерной цепочке атомов, выстроенных вдоль оси z с одинаковыми межатомными расстояниями l_a (рис. 1). Лазерный пучок, который падает перпендикулярно к цепочке, может быть поляризован либо вдоль неё ($\mathbf{E}_{in} \parallel \hat{\mathbf{e}}_z$), наводя дипольные моменты в атомах вдоль оси цепочки, либо перпендикулярно к ней ($\mathbf{E}_{in} \perp \hat{\mathbf{e}}_z$), соответствующим образом выстраивая диполи по нормали к цепочке параллельно друг к другу.

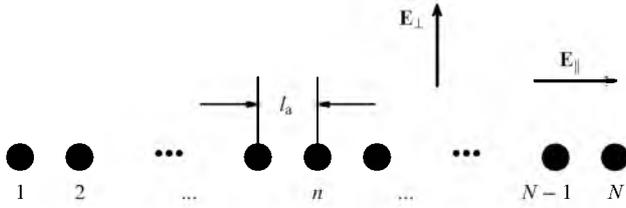


Рис. 1. Геометрия одномерной задачи: локальное поле в цепочке резонансных атомов. Световая волна распространяется по нормали к рисунку.

В обоих случаях мы имеем $\mathbf{E}_L \parallel \mathbf{E}_{in}$, так что уравнения для поля сводятся к скалярным. Вводя безразмерные величины $\mathcal{E}_n = [E_L(\mathbf{r}_n)/E_{in}]_{(p)}$, где $(p) = \parallel, \perp$ обозначает поляризацию поля, мы можем записать уравнение (1) для каждой из поляризаций как

$$\mathcal{E}_n - \frac{\delta_R}{2(\delta + i)} \sum_{\text{chain } j \neq n} \frac{\mathcal{E}_j/S}{|j-n|^3} = 1, \quad (3)$$

где $1 \leq n, j \leq N$,

$$\delta_R = -4SF_{(p)} \frac{|d_a|^2 T}{\epsilon \hbar l_a^3}, \quad (4)$$

а суммирование в уравнении (3) производится по всем атомам одномерной цепочки, что приводит к появлению коэффициента $S = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-3} \approx 1,202$. Коэффициент $F_{(p)}$ определяется поляризацией поля: $F_{\parallel} = 1$ и $F_{\perp} = -1/2$. В приближении ближнего соседа (аналогично тому, как это делается в модели Изинга для магнитных сред) суммирование по всем атомам в уравнении (3) может быть заменено более простой суммой: $\mathcal{E}_{n-1} + \mathcal{E}_{n+1}$ (и тогда можно принять $S = 1$). Решение уравнения (3) в обоих случаях — и с полным суммированием в уравнении (3), и в приближении ближнего соседа — приводит к качественно похожим результатам. В случае системы из двух атомов, рассматриваемом ниже, оба подхода, естественно, совпадают.

При $N \rightarrow \infty$ решение уравнения (3) может быть найдено в виде суммы пространственно однородного "лоренцевского" поля

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{\delta + i}{\delta - \delta_R + i} \quad (5)$$

и волновых составляющих вида $\Delta \mathcal{E} \propto \exp(\pm iqn)$. Волновое число каждого такого пространственно осциллирующего решения $q = 2\pi l_a / \Lambda$, а длина волны Λ , как правило, значительно меньше длины волны падающего света. Здесь можно заметить некоторую аналогию с теорией фононов [4], хотя в рассматриваемом нами случае участвуют возбуждения связанных электронов, а не механических колебаний атомных ядер. Решение уравнения (3) является сильно анизотропным и обладает ярко выраженной зависимостью от поляризации падающей волны. При частоте лазера, точно совпадающей с частотой атомного перехода, т.е. при $\delta = 0$, и наличии сильного дипольного взаимодействия между атомами, при котором $|\delta_R| \gg 1$, однородная "лоренцевская" составляющая локального поля оказывается сильно подавленной:

$$|\bar{\mathcal{E}}_{\text{res}}|^2 = \frac{1}{1 + \delta_R^2} \ll 1. \quad (6)$$

В этом случае поле фактически вытесняется из системы. Максимальное значение $|\bar{\mathcal{E}}|$ принимает при $\delta = \delta_R$:

$$|\bar{\mathcal{E}}_{\text{peak}}|^2 = 1 + \delta_R^2 \gg 1. \quad (7)$$

Значения волновых векторов q находятся из следующего дисперсионного соотношения:

$$\frac{1}{S} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nq)}{n^3} = \frac{\delta + i}{\delta_R}. \quad (8)$$

(В приближении ближнего соседа всю левую часть этого уравнения можно заменить $\cos q$.) В рамках настоящей модели нами было показано, что пространственно осциллирующие решения возникают при $|\delta_R| > 1$ в диапазоне значений частотных отстроек $1 > \delta/\delta_R > -3/4$ (в приближении ближнего соседа этот диапазон становится шире: $|\delta/\delta_R| < 1$). Дипольные страты особенно ярко выражены при $|\delta_R| \gg 1$. О силе дипольного взаимодействия между атомами можно судить по частоте Раби $\Omega_R = \delta_R/T$, которая фактически определяет положение лоренцевского резонанса относительно частоты атомного перехода. Частота Раби задает ширину полосы энергетического спектра, в которой могут существовать локситоны, причём при $|\delta_R| \gg 1$ эта ширина $\sim 2\hbar|\Omega_R| \gg \hbar\Gamma$. Здесь можно провести аналогии с полосами энергетического спектра в твёрдом теле [4] и фотонных кристаллах [12]. В пределе $1 - \delta/\delta_R \ll 1$ (т.е. на границе полосы вблизи лоренцевского резонанса, при $\delta \approx \delta_R$) возникают "длинноволновые" локситоны, для которых

$$q_{LW} \approx \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{\delta_R^2}}, \quad (9a)$$

$$A_{LW} = \frac{2\pi l_a}{q_{LW}}. \quad (9b)$$

Следует отметить, что их длина волны A_{LW} может достигать величины $2\pi l_a \delta_R$, оставаясь при этом значительно короче длины падающей световой волны. Характерный пример таких длинноволновых дипольных страт показан на рис. 2 (верхняя кривая). На противоположном конце частотной полосы локситонов (в приближении ближнего соседа это соответствует условию $1 + \delta/\delta_R \ll 1$) возникают коротковолновые локситоны, для которых $q_{SW} \gtrsim \pi$ и $A_{SW}/2 \gtrsim l_a$ и которые близки к наиболее коротковолновой пространственной осцилляции, способной существовать в дискретной системе.

Поскольку $A_{SW}/2$, как правило, не кратно l_a , распределение дипольных моментов и соответствующих локальных полей в дискретной цепочке из атомов может иметь более длинноволновую пространственную модуляцию, подобно биениям двух волн с близкими волновыми векторами. Такая модуляция хорошо заметна на средней кривой рис. 2, где $A_{SW}/2$ весьма близко к l_a . Случай точного резонанса падающей волны с атомным переходом ($\delta = 0$) может рассматриваться как граница, разделяющая частотную полосу локситонов на области с длинноволновыми и коротковолновыми локситонами. Этот граничный случай, при котором $\Lambda = 4l_a$, представлен на рис. 2 нижней кривой.

Проводя аналогию с фононами, можно отметить, что длинноволновые локситоны соответствуют акустическим фононам, а коротковолновые — оптическим. Другую интересную аналогию можно провести с ферромагнитными или ферроэлектрическими материалами, в ко-

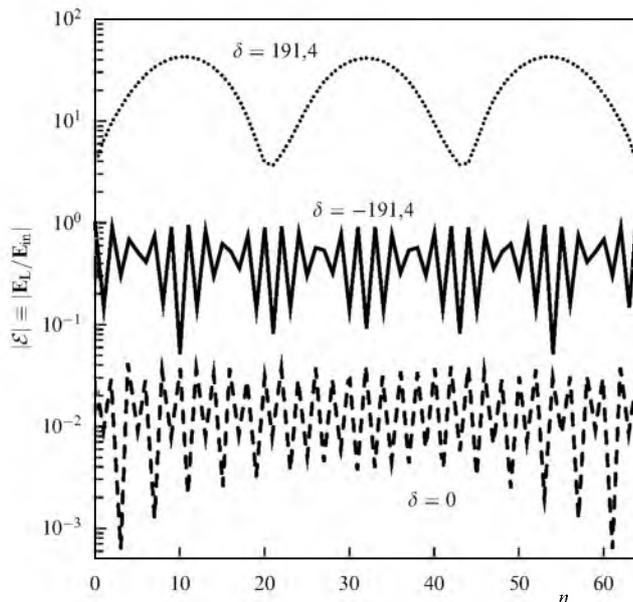


Рис. 2. Дипольные страты в цепочке из $N = 65$ атомов: распределение абсолютной величины локального поля при $\delta_R = 200$ для трёх различных отстроек частоты лазера δ , n — номер атома в цепочке.

торых существует сильное взаимодействие между статическими магнитными или электрическими диполями. При этом наиболее длинноволновые локситоны напоминают ферромагнетики, а наиболее коротковолновые — антиферромагнетики. Подобная аналогия прослеживается и в различии между режимами бистабильности в этих двух предельных случаях, что будет рассмотрено нами далее для простейшего случая — двухатомной системы.

Следует подчеркнуть, что указанная аналогия между локситонами и ферромагнетиками или ферроэлектриками неизбежно является очень ограниченной. Например, при $\delta = 0$ в цепочке атомов возникает своего рода "гибридная" конфигурация наведённых атомных диполей: $\uparrow \circ \downarrow \circ \uparrow \cdots$ (что соответствует нижней кривой на рис. 2). Подобные гибридные конфигурации диполей возможны только благодаря наведённому характеру диполей в рассматриваемой нами оптической задаче, они невозможны в случае статических диполей. Таким образом, перестраивая частоту лазерного излучения с одного края частотной полосы локситонов к другому, можно плавно изменять конфигурацию диполей в цепочке из атомов от "ферромагнитного" типа до "антиферромагнитного", проходя при этом через целый спектр различных гибридных конфигураций.

Нами было показано, что в конечной цепочке из атомов возникают резонансы, определяемые размером системы, в какой-то мере подобные резонансам в тонких полуметаллических плёнках [13], длинных органических молекулах [14] или в обычной скрипичной струне. Основное различие состоит в том, что число этих резонансов ограничено числом атомов N . Линейную систему уравнений (3) можно решить, например, используя численные методы решения матричных уравнений при $N \gg 1$, в то время как при небольших N задача может быть решена аналитически. Некоторые результаты применения численного подхода к нахождению локального поля E_L приведены на рис. 2–5.

Для лучшего качественного понимания полученных численных результатов мы также применили следующее

простое приближение. Используя решение для бесконечной цепочки атомов, мы можем приближённо представить решение для конечной цепочки из N атомов в виде суммы однородного "лоренцевского" решения \mathcal{E} для $N = \infty$ и пространственно осциллирующих составляющих $\Delta\mathcal{E} \propto \exp(\pm iqn)$, после чего волновое число резонансного локситона q и резонансная амплитуда $\Delta\mathcal{E}$ находятся из соответствующих граничных условий для локального поля на концах цепочки. В случае рассмотрения полного взаимодействия между атомами возможен только приближённый учёт граничных условий, однако хорошая точность такого приближения для достаточно длинноволновых локситонов была нами подтверждена с помощью многих численных расчётов.

В приближении ближнего соседа описанный метод даёт точное решение задачи, при этом половина длины волны самого длинноволнового резонансного локситона $\Lambda_1/2 = (N + 1)l_a$ определяется из условия, что узлы этого собственного колебания локального поля находятся за пределами цепочки на расстоянии l_a от крайних атомов: $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_{N+1} = 0$. Положения частотных резонансов для локситонов задаются безразмерной частотной отстройкой δ_k , где $0 < k \leq N$:

$$\delta_k = \delta_R \cos q_k, \quad (10a)$$

$$q_k = \frac{\pi k}{N + 1}. \quad (10б)$$

Соответствующая длина волны локситонов $\Lambda_k = \Lambda_1/k$. Из соображений симметрии только резонансы, соответствующие нечётным k , могут быть вызваны падающим лазерным пучком с симметричным поперечным распределением поля, а резонансы, соответствующие чётным k , — пучком с антисимметричным профилем. Сплошной кривой на рис. 3 изображены резонансы максимального

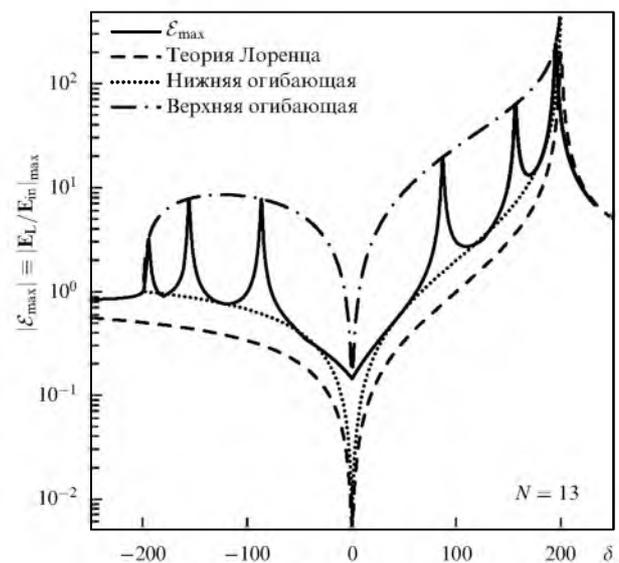


Рис. 3. Появление локситонных резонансов в зависимости нормированной максимальной амплитуды локального поля \mathcal{E}_{\max} в цепочке из $N = 13$ атомов от отстройки частоты лазера δ при $\delta_R = 200$ (сплошная кривая). Для сравнения показаны её нижняя и верхняя огибающие, а также соответствующая зависимость, полученная в классической лоренцевской теории для неограниченных сред (штриховая кривая, отмеченная как "Теория Лоренца").

локального поля

$$\mathcal{E}_{\max} = \max_{0 < n \leq N} |\mathcal{E}_n|$$

на атомах в цепочке, полученные в приближении ближнего соседа в случае однородного распределения амплитуды падающего поля вдоль цепочки при $N = 13$ и $\delta_R = 200$. Нижняя огибающая этой кривой $\mathcal{E}_{\text{low}}(\delta) \approx 2\bar{\mathcal{E}}$, а верхняя огибающая, полученная в приближении ближнего соседа, описывается следующим выражением:

$$\mathcal{E}_{\text{up}} \approx \begin{cases} \bar{\mathcal{E}} \left(n_\delta + \frac{1}{n_\delta} \right) & \text{при } n_\delta \leq 1, \\ 2\bar{\mathcal{E}} & \text{при } n_\delta > 1, \end{cases} \quad (11a)$$

где

$$n_\delta = \frac{N+1}{2\sqrt{\delta_R^2 - \delta^2}}. \quad (11b)$$

По мере возрастания N резонансы начинают сливаться друг с другом, ослабевая при приближении к $N \sim \delta_R$. Однако даже при больших N нижняя огибающая \mathcal{E}_{low} в два раза превосходит величину локального поля $\bar{\mathcal{E}}$, предсказываемую классической лоренцевской теорией (см. формулу (5)).

При $N = 3k - 1$, где k — натуральное число, амплитуда локального поля \mathcal{E}_{\max} , рассчитанная в приближении ближнего соседа, опускается ниже кривой \mathcal{E}_{low} при $\delta = -\delta_R/2$. При такой частотной отстройке δ модуль волнового числа локситона $|q| \approx 2\pi/3$, а его пространственный период $\Lambda = 3l_a$. Поскольку Λ в этом случае оказывается кратным l_a , длинноволновая модуляция пространственного профиля распределения дипольных моментов и локального поля в цепочке из атомов исчезает, приводя к появлению своего рода "антирезонанса" в зависимости локального поля \mathcal{E}_{\max} от δ , иными словами к частичному подавлению локситона в цепочке.

Другим важным и необычным эффектом, обнаруженным нами, является исчезновение резонансного подавления локального поля в системе при определённых "магических" размерах цепочки из атомов. При точном резонансе лазерного излучения с атомным переходом (т.е. при $\delta = 0$) и при $|\delta_R| \gg 1$ локальное поле, рассчитанное в рамках лоренцевской теории, "выталкивается" из системы (см. уравнение (6)). Мы будем называть этот эффект резонансным подавлением локального поля. Это происходит также в конечных цепочках из атомов при большинстве N . Однако нами было обнаружено, что при некоторых ("магических") N такое резонансное подавление исчезает и локальное поле проникает в систему даже при $\delta = 0$. В приближении ближнего соседа такие "магические" размеры цепочки задаются выражением $N = km_{\text{mag}} + 1$, где k — натуральное число, $m_{\text{mag}} = 4$. Наиболее сильно этот эффект проявляется при $N = 5$, при этом пространственная конфигурация атомных диполей приобретает вид $\uparrow \circ \downarrow \circ \uparrow$, а амплитуды диполей и локального поля становятся максимальными на нечётных атомах ($\mathcal{E}_{\text{mag}} \approx 1/3$), почти полностью исчезая на чётных.

"Магическое" усиление локального поля по сравнению с однородным, лоренцевским, случаем при этом может быть весьма велико: $|\mathcal{E}_{\text{mag}}/\bar{\mathcal{E}}_{\text{res}}| \approx \delta_R/3$. Фактически один из резонансных локситонов, частота которого точно совпадает с частотой атомного перехода, компен-

сирует резонансное подавление локального поля в системе. Такой эффект присутствует и при учёте взаимодействия между всеми атомами в цепочке (см. формулу (3)), при этом $m_{\text{mag}} = 13$. Хотя вмешательство нечистой силы полностью не исключается, мы полагаем, что этот результат основан на свойствах уравнения для волнового вектора локситона q в цепочке из атомов, которое вытекает из уравнения (8) при $\delta = 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nq)}{n^3} = 0. \quad (12)$$

Наименьший корень уравнения (12) q_1 таков, что q_1/π очень близко к рациональному числу: $(q_1/\pi)/(6/13) = 1,00026\dots$, поэтому длина волны локситона $\Lambda = 2\pi/q_1 \approx (13/3)l_a$, а следовательно, одно из кратных $\Lambda/2$ будет приблизительно кратно l_a . Таким образом, при $N = 14$ резонансное подавление локального поля исчезает, при этом относительная величина амплитуды поля достигает внушительного значения: $\mathcal{E}_{\text{mag}} \approx 2/15$.

Семантическая ирония состоит в том, что эффекты локального поля являются следствием нелокального характера взаимодействия между атомами. Если поле падающей волны сосредоточено в очень малой пространственной области, то локальное поле может выйти за пределы этой области. Локситоны способны распространяться за пределы той области, в которой они возникли. На краях частотной полосы локситонов, т.е. при $|\delta_R| > |\delta| \gg 1$, групповая скорость локситона $v_{\text{gr}} \approx l_a(\Omega_R^2 - \Delta\omega^2)^{1/2}$ может стать очень малой — меньшей скорости звука в твёрдом теле. Этот эффект может оказаться полезным, например, для создания линий задержки нанометрового масштаба, которые могли бы найти применение в молекулярных компьютерах или интегрированных наноустройствах для обработки оптических сигналов.

В двумерных решётках из резонансных атомов возможно возникновение не только дипольных страт, но и ещё более интересных структур. Рассмотрим, например, правильную треугольную решётку из атомов, на которую действует стоячая электромагнитная волна, поляризованная перпендикулярно к плоскости решётки. Расстояния между атомами очень малы — порядка нескольких нанометров, так что внешнее поле можно считать неизменным на масштабах нескольких десятков и даже сотен атомов. Нами было обнаружено, что если проделать в решётке круглое отверстие, убрав несколько десятков атомов, то при определённых условиях возможно возникновение локализованного локситона — концентрических дипольных страт вокруг этого отверстия, показанных на рис. 4, амплитуда которых быстро спадает по направлению от его границы. Ещё более интересное распределение диполей возникает, если лазерное излучение падает по нормали к решётке и поляризовано в плоскости решётки. Для лучшего качественного понимания решения для локального поля в этом случае мы применили приближение "ближнего кольца" ("near-ring"), являющееся модифицированным вариантом приближения ближнего соседа. В этом приближении мы учитываем взаимодействие каждого атома только с его ближайшим окружением из шести атомов, при этом предполагая, что местоположения этих шести соседей равномерно "размазаны" по окружности диаметром в одно межатомное расстояние l_a . По аналогии с одномерным случаем мы введём безразмерный и не

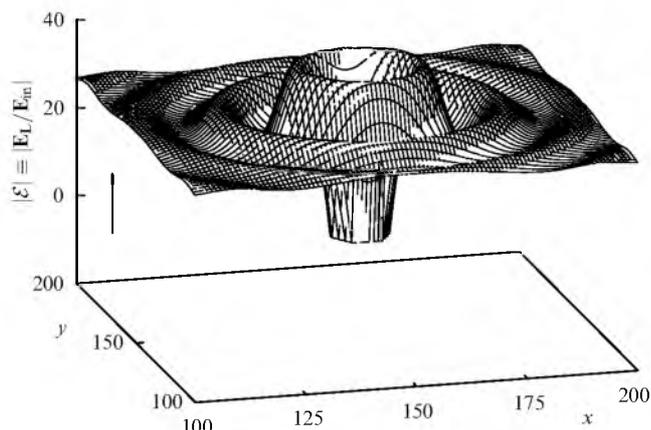


Рис. 4. Возникновение локализованного локситона вокруг отверстия диаметром в 15 межатомных расстояний, сделанного в двумерной треугольной решётке из атомов. Показано распределение локального поля \mathcal{E} в такой системе в случае, когда внешнее поле световой волны поляризовано перпендикулярно к плоскости решётки при $\delta = 100$ и $\delta_R = 69$.

зависящий от поляризации параметр $\tilde{\delta}_R$, отличающийся от δ_R , задаваемого уравнением (4), тем, что мы полагаем $SF_{(p)} = -1$:

$$\tilde{\delta}_R = \frac{|d_a|^2 T}{\epsilon \hbar l_a^3}. \quad (13)$$

Сравнивая уравнения (2) и (4), можно заметить, что $Q = \tilde{\delta}_R / (\delta + i)$. Заменяя суммирование в уравнении (1) интегрированием по описанному выше "ближнему кольцу", мы получаем простое изотропное выражение для однородного лоренцевского локального поля:

$$\bar{E}_L = \frac{E_{in}}{1 + (3/4)Q}. \quad (14)$$

Можно показать, что выражение (14) остаётся верным не только в приближении ближнего кольца, но и в рамках более точных расчётов, учитывающих структуру двумерной решётки из атомов и зависимость решения от направления волнового вектора локситона \mathbf{q} внутри зоны Бриллюэна. Как и в одномерном случае, мы ищем решение уравнения (1) в виде суперпозиции лоренцевского поля \bar{E}_L и плоскотоволновых локситонов, которые зависят от координат как $\exp(\pm i\mathbf{q}\mathbf{r}/l_a)$. Предполагая, что \mathbf{q} составляет угол ψ с поляризацией падающего лазерного излучения, мы приходим к следующему дисперсионному соотношению для двумерных локситонов, которое является неплохим приближением для относительно длинноволновых локситонов:

$$1 + \frac{3}{4}Q[J_0(q) - 3J_2(q)\cos(2\psi)] = 0, \quad (15)$$

где J_n — функция Бесселя первого рода.

Для достаточно коротковолновых локситонов приближение ближнего кольца неприменимо; этот случай требует более детального рассмотрения, учитывающего симметрию треугольной решётки из атомов и структуру соответствующей зоны Бриллюэна. Нами было показано, что в этом более общем случае решение зависит от направления поляризации падающего лазерного излучения относительно решётки. Обозначим единичный век-

тор, направленный от данного атома к одному из его ближайших соседей, через \mathbf{u}_K (это направление соответствует направлению ГК внутри первой зоны Бриллюэна).

Рассмотрим четыре наиболее интересных случая, задаваемых различными поляризациями и направлениями волнового вектора локситона:

- а) $\mathbf{q} \perp \mathbf{E}_{in}$, $\mathbf{E}_{in} \parallel \mathbf{u}_K$,
- б) $\mathbf{q} \perp \mathbf{E}_{in}$, $\mathbf{E}_{in} \perp \mathbf{u}_K$,
- в) $\mathbf{q} \parallel \mathbf{E}_{in}$, $\mathbf{E}_{in} \parallel \mathbf{u}_K$,
- г) $\mathbf{q} \parallel \mathbf{E}_{in}$, $\mathbf{E}_{in} \perp \mathbf{u}_K$.

Соответствующие дисперсионные соотношения для этих четырёх случаев имеют вид:

- а) $\cos \frac{q\sqrt{3}}{2} = 4(1 + Q^{-1})$,
- б) $\cos \frac{q}{2} = \frac{1}{8} [5 \pm \sqrt{57 + 64Q^{-1}}]$,
- в) $\cos \frac{q}{2} = \frac{1}{8} [1 \pm \sqrt{1 + 128(1 - Q^{-1})}]$,
- г) $\cos \frac{q\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{5}(1 - 2Q^{-1})$.

Диполи, наведённые в конечной двумерной решётке, выстраиваются, образуя характерные структуры, когда резонансы для локситонов возникают при одном и том же Q в обоих измерениях. В пределе длинноволновых локситонов ($q \ll 1$) дисперсионные соотношения в случаях а и б совпадают между собой и с результатом, полученным в приближении ближнего кольца (см. уравнение (15)). При этом $\psi = \pi/2$ и $Q \approx -4/3$, а

$$q_a^2 \approx q_b^2 \approx q_{ring}^2 \approx -\frac{32}{3} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{Q} \right). \quad (16)$$

Аналогично можно получить приближённое решение для случаев в и г, для которых $\psi = 0$:

$$q_v^3 \approx q_r^2 \approx q_{ring}^2 \approx \frac{32}{15} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{Q} \right). \quad (17)$$

Используя комбинации случаев а и б или случаев в и г, можно достигнуть одновременных резонансов в обоих направлениях решётки, если сделать её приблизительно квадратной. При этом резонансы для локситонов с волновыми векторами, ориентированными в двух перпендикулярных направлениях, будут иметь один и тот же порядок, а достаточной "квадратности" двумерной треугольной решётки можно добиться, подбирая число атомов вдоль этих направлений. Более коротковолновые локситоны с волновыми векторами, ориентированными в других направлениях, тоже будут присутствовать, но, будучи нерезонансными, они не окажут заметного влияния на возникающую структуру из диполей.

Интерференция локситонов в двумерной атомной решётке может вызвать появление множества различных дипольных структур и страт. Для некоторые из них можно провести аналогию с "квантовыми коврами" ("quantum carpets") [15]. На рисунке 5 показаны векторные структуры, образованные диполями, наведёнными локальным полем в атомах. Атомы расположены в виде

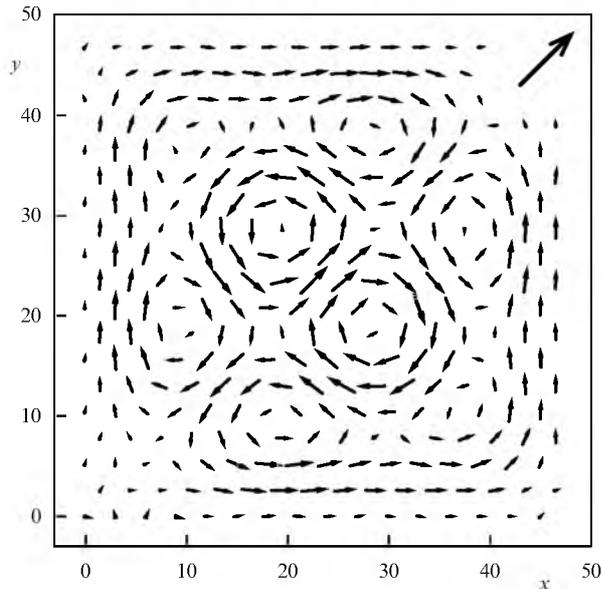


Рис. 5. Образование завихрений в распределении локального поля \mathcal{E} в почти квадратном фрагменте двумерной треугольной атомной решётки при $\delta = -1000$ и $\delta_R = 1316,5$. Чтобы не перегружать рисунок, показан только один из каждых девяти диполей. Поле падающей световой волны (показанное большой стрелкой) поляризовано в плоскости решётки по диагонали квадрата.

правильной треугольной решётки размером 48×56 , что соответствует примерно одинаковой длине сторон решётки. Поле падающей электромагнитной волны однородно и поляризовано по диагонали к решётке. Частота падающей волны подобрана так, что вдоль каждого измерения решётки доминирует третий (по возрастанию волнового числа) резонанс из допустимых симметрией задачи; при этом хорошо заметно образование, по меньшей мере, шести завихрений локального поля. На рисунке 5 показаны мнимые части комплексной амплитуды поля, поскольку именно они доминируют для каждого из резонансных локситонов.

В ограниченных двумерных решётках и других подобных системах из резонансных атомов осуществимы особенно интересные случаи исчезновения резонансного подавления локального поля. В таких системах, в отличие от одномерных цепочек из атомов, "восстановление" локального поля при $\delta = 0$ по сравнению с таковым в однородном, лоренцевском, случае является более значительным и может достигать 100%. Как и в одномерном случае, двумерные "магические" конфигурации атомов опять проявляют некую "каббалистическую" склонность. Так, в приближении ближнего соседа наиболее значительный эффект, с максимальным восстановлением локального поля ($\mathcal{E}_{\max} \approx 1,02$), имеет место только в системе из 13 атомов, расположенных в виде правильной шестиконечной звезды с атомом посередине. Направление и относительная величина локального поля на атомах в такой системе показаны на рис. 6 для случая, в котором поле падающей волны $\mathbf{E}_{\text{in}} \parallel \mathbf{u}_K$. Как видно из рисунка, локальное поле оказывается сосредоточенным на внешних и центральном атомах, в то время как внутренний шестиугольник из атомов вытесняет локальное поле почти полностью. При любом нарушении симметрии в этой системе из сильно взаимодействующих атомов, например при присоединении к ней инород-

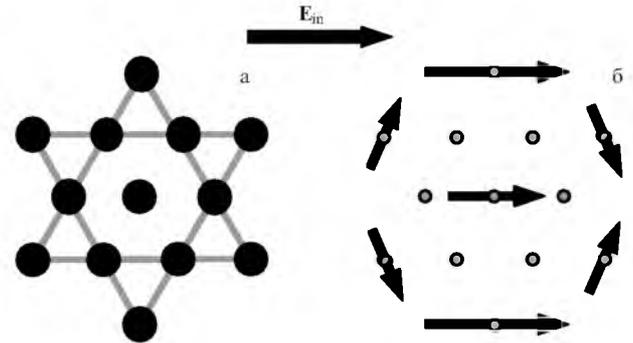


Рис. 6. (а) Геометрия "магической" системы из 13 резонансных атомов. (б) Распределение в этой системе локального поля.

ного атома или молекулы, баланс локальных полей в системе нарушается и восстанавливается резонансное подавление локального поля, исчезающее в симметричной "магической" системе. Подобное явление может быть использовано для создания нанометровых сенсоров для детектирования различных биологических молекул и т. п.

При приложении достаточно сильного электромагнитного поля к системе из сильно взаимодействующих атомов возможно появление нелинейно-оптических эффектов для локального поля, например возникновение солитонов. Подробное рассмотрение всего многообразия подобных интересных эффектов выходит за рамки этого доклада. Интересно отметить, однако, что некоторые нелинейные эффекты, такие как оптическая бистабильность и гистерезис, реализуемы даже в рассматриваемом здесь случае постоянной во времени амплитуды падающей электромагнитной волны. Появление оптической бистабильности для однородного, лоренцевского, локального поля в неограниченной среде было предсказано в работе [16] и позднее обнаружено экспериментально [17]. Однако возможность возникновения бистабильности и мультистабильности для коротковолновых локситонов, локальное поле в которых обладает сильной пространственной неоднородностью, ранее в литературе не обсуждалась. Нами было обнаружено, что этот эффект возможен даже в предельно простой системе из двух двухуровневых атомов с нелинейностью насыщения и сильным дипольным взаимодействием. Эта система, кроме того, представляет собой наиболее яркий пример возникновения самоиндуцированной неоднородности локального поля.

Для описания такой двухатомной системы мы будем использовать уравнения (3) и (4), положив в них $S = 1$. В зависимости от того, как ориентированы локальное и внешнее поля $\mathbf{E}_L \parallel \mathbf{E}_{\text{in}}$, перпендикулярно или параллельно линии, соединяющей оба атома, формула (4) будет содержать соответственно F_{\perp} или F_{\parallel} . Нормируя амплитуды всех входящих в задачу полей на поле насыщения двухуровневой системы E_{sat} , мы введём безразмерные амплитуды локального поля на обоих атомах $Y_j = E_j/E_{\text{sat}}$, где $j = 1, 2$, а также безразмерное поле падающей волны $X = E_{\text{in}}/E_{\text{sat}}$. В этих новых переменных система уравнений для локальных полей примет следующий вид:

$$Y_1 = X + \frac{\delta R_2(\delta - i) Y_2}{1 + \delta^2 + |Y_2|^2}, \quad (18a)$$

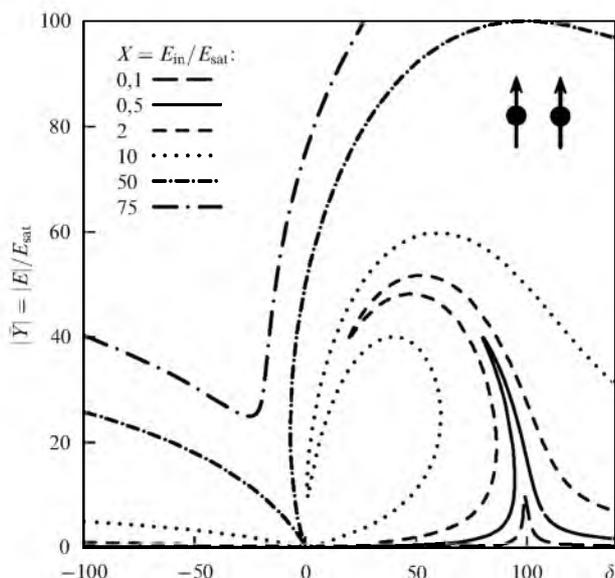


Рис. 7. Оптическая бистабильность и гистерезис в системе из двух резонансных атомов с нелинейностью насыщения. Показаны зависимости нормированной амплитуды локального поля $|\bar{Y}|$ от частотной отстройки δ при $\delta_{R2} = 100$ и различных нормированных амплитудах X поля падающей волны.

$$Y_2 = X + \frac{\delta_{R2}(\delta - i) Y_1}{1 + \delta^2 + |Y_1|^2}, \quad (18б)$$

где $\delta_{R2} \equiv \delta_R/2 > 0$. Уравнения (18) порождают два типа решений для локального поля в системе — две различные моды колебаний. Первый тип решения аналогичен однородному лоренцевскому решению для бесконечной цепочки из атомов, локальные поля на двух атомах при этом осциллируют синхронно. Система уравнений (18) в этом случае приводит к кубическому уравнению для $|\bar{Y}|^2$, которое несложно решить или проанализировать на графике (рис. 7). При $|\delta_{R2}| \gg 1$ наступление бистабильности и гистерезиса для \bar{Y} происходит при отстройке частоты лазера от частоты двухуровневого перехода $\delta \approx \delta_{R2}$, причём $\delta_{R2} - \delta > \sqrt{3}$. Пороговое значение поля падающей волны при этом $X_{thr} \approx [(2/\sqrt{3})^3/\delta_{R2}]^{1/2} \ll 1$, т.е. может быть значительно меньше поля насыщения двухуровневой системы E_{sat} .

Второй тип мультистабильного решения в случае, когда локальные поля на двух атомах осциллируют в противофазе, является, по существу, предельным случаем коротковолнового локситона, возникающего на противоположном краю частотной полосы локситонов при $\delta \approx -\delta_{R2}$. В пределе $|X| \ll \delta_{R2}$, помимо однородного, лоренцевского, локального поля $\bar{Y} \approx X/2$, нами было найдено неоднородное решение

$$Y_{1,2} = \bar{Y} \pm s, \quad (19а)$$

где

$$s = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{1 \mp R} - i \sqrt{1 \pm R} \right), \quad (19б)$$

$$\sigma = \sqrt{\delta_{R2}(\delta_{R2} + \delta) - 2\bar{Y}^2 \pm \bar{Y}^2 R}, \quad (19в)$$

$$R = \sqrt{1 - \frac{\delta_{R2}^2}{\bar{Y}^4}}. \quad (19г)$$

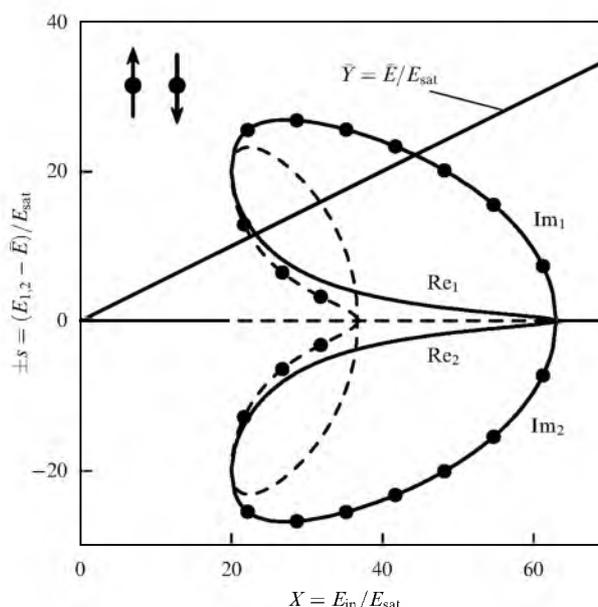


Рис. 8. Оптическая мультистабильность в системе из двух резонансных атомов с нелинейностью насыщения при $\delta_{R2} = 100$ и $\delta_{R2} + \delta = 10$. Сплошная жирная прямая показывает среднее однородное ("лоренцевское") решение, кривые изображают "неоднородную составляющую" полученного нами решения в зависимости от нормированной амплитуды X поля падающей волны. Сплошные кривые соответствуют стабильному, штриховые — нестабильному режимам; кривые, отмеченные кружками, показывают действительную часть решения, кривые без кружков — его мнимую часть.

Выбор знака в формулах (19б) и (19в) независим от выбора знака в (19а). В выражении (19а) один из знаков в \pm соответствует Y_1 , а другой — Y_2 , при этом в зависимости от выбора знака получаются два разных решения. Известно, что аналогичное свойство приводит к возникновению бистабильности разветвления (split-fork bistability) для волн, распространяющихся в противоположных направлениях в кольцевом резонаторе [18]. Необходимыми условиями для появления мультистабильного решения второго типа для локального поля являются $\delta_{R2} + \delta > \sqrt{3}$ и $X^2 > 4\delta_{R2}$. Как видно из рис. 8, вблизи порога бистабильности решение имеет три ветви: две стабильные, задаваемые выражениями (19), и одно нестабильное "лоренцевское" решение \bar{Y} . При $\delta_{R2} + \delta > 2$ существуют пять различных ветвей решения, но только две из них стабильны. Осцилляцию дипольных моментов двух атомов в противофазе, передаваемую членом $\pm s$ в формуле (19а), можно уподобить двум спином, один из которых ориентирован вдоль приложенного магнитного поля, а другой — в противоположном направлении.

Возвращаясь к отмеченной выше аналогии между поведением локальных полей в системе из атомов и поведением спинов в магнитных материалах, следует подчеркнуть, что наши исследования сосредоточены на тех эффектах, которые характерны для достаточно малых систем атомов, в то время как исследования магнитных явлений, как правило, направлены на нахождение усредненных, "термодинамических", свойств систем достаточно больших размеров. Возможно, применение нашего подхода, позволившего предсказать появление гигантских резонансов, "магических" чисел и конфигураций атомов и т.д., откроет дорогу к обнаружению подобных эффектов и в магнитных системах нанометровых масштабов.

Локситоны и дипольные страты имеют внутреннюю структуру нанометрового масштаба, причём многие интересные эффекты предполагают радикальные изменения локального поля даже между соседними атомами, т.е. на расстояниях порядка нескольких нанометров или меньших. Оптические методы плохо подходят для разрешения столь малых структур, так что более реалистичными методами для экспериментального обнаружения локситонов могут стать наблюдение предсказанных нами резонансов, определяемых размерами системы, и использование рентгеновского излучения или спектроскопии рассеяния электронов (electron energy loss spectroscopy).

Следует отметить, что локситоны и дипольные наностраты могут открыть новые возможности для создания элементов для молекулярных компьютеров и других наноустройств [19]. Существенным преимуществом локситонов по сравнению с электронами в полупроводниках и металлах является то, что для возникновения локситонов не требуется электрического тока и переноса заряда. Это преимущество могло бы способствовать дальнейшему уменьшению размеров логических элементов компьютеров, поскольку полупроводниковая технология на масштабах менее 10 нм сталкивается со значительными проблемами, связанными с выделением тепла.

Локситоны могли бы работать как в пассивных элементах (например, для передачи данных или создания линий задержки), так и в активных (переключателях или логических устройствах). Наноструктуры, основанные на локситонах, могли бы, таким образом, дополнить спектр альтернативных нанотехнологий, включающий в себя плазмонику (plasmonics) [20, 21], во многом опирающуюся на поверхностные плазмоны [10, 11], и спинтроннику (spintronics) [22]. Кроме того, локситоны могут найти применение при создании наносенсоров биологических молекул и других частиц или примесей. Такой наносенсор можно сконструировать из резонансных молекул-рецепторов, которые избирательно присоединяют к себе интересующие нас молекулы или частицы, или же молекулы-рецепторы могут быть присоединены к частицам, обладающим оптическим резонансом. Используя "магическую" конфигурацию молекул, можно добиться того, что локситон в такой системе не исчезает даже при точном резонансе лазерного излучения с составляющими её молекулами, при этом при присоединении интересующей нас биологической молекулы к наносенсору локситон будет подавлен.

Ещё более захватывающие возможности открываются в цепочках и решётках из атомов с инверсной населённостью резонансного квантового перехода, которую можно создать с помощью какого-либо рода накачки (например, оптической). Такие системы могут открыть путь к манипулированию локситонами, их усилению и, возможно, даже к когерентной генерации локситонов — своего рода "локситонному лазеру" ("locster").

Итак, нами было показано, что подвергая цепочки и решётки из сильно взаимодействующих атомов (в том числе, двухатомную систему) действию лазерного излучения с частотой близкой к частоте атомного резонанса, можно добиться появления дипольных нанострат и коротковолновых возбуждений локального поля — локситонов. Связанные с локситонами эффекты включают в себя гигантские резонансы локального поля, определяемые размерами системы, наличие "магических"

чисел и конфигураций атомов, отмеченных исчезновением резонансного подавления локального поля в системе, а также оптическую бистабильность и гистерезис.

Авторы благодарят Управление по научным исследованиям ВВС США (US AFOSR) за финансирование работы.

Список литературы

1. Kaplan A E, Volkov S N *Phys. Rev. Lett.* **101** 133902 (2008)
2. Born M, Wolf E *Principles of Optics* 6th ed. (Oxford: Pergamon Press, 1980), глава 2 и содержащиеся в ней ссылки [Борн М, Вольф Э *Основы оптики* 2-е изд. (М.: Наука, 1973)]
3. Aharoni A *Introduction to the Theory of Ferromagnetism* 2nd ed. (Oxford: Oxford Univ. Press, 2000)
4. Kittel Ch *Introduction to Solid State Physics* 7th ed. (New York: Wiley, 1996) [Киттель Ч *Введение в физику твердого тела* (М.: Наука, 1978)]
5. Bowden C M, Dowling J P *Phys. Rev. A* **47** 1247 (1993)
6. Maki J J et al. *Phys. Rev. Lett.* **67** 972 (1991)
7. Бутылкин В С, Каплан А Е, Хронополо Ю Г *ЖЭТФ* **59** 921 (1970) [Butylkin V S, Kaplan A E, Khronopulo Yu G *Sov. Phys. JETP* **32** 501 (1971)]
8. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1988) [Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Butterworth-Heinemann, 1980)]
9. Steel D G, Rand S C *Phys. Rev. Lett.* **55** 2285 (1985)
10. Shalaev V M et al. *Opt. Lett.* **30** 3356 (2005)
11. Markel V A, Sarychev A K *Phys. Rev. B* **75** 085426 (2007)
12. Yablonovitch E *Phys. Rev. Lett.* **58** 2059 (1987)
13. Сандомирский В Б *ЖЭТФ* **52** 158 (1967) [Sandomirskii V B *Sov. Phys. JETP* **25** 101 (1967)]
14. Chernyak V, Volkov S N, Mukamel S *Phys. Rev. Lett.* **86** 995 (2001)
15. Kaplan A E et al. *Phys. Rev. A* **61** 032101 (2000)
16. Bowden C M, Sung C C *Phys. Rev. A* **19** 2392 (1979)
17. Hehlen M P et al. *Phys. Rev. Lett.* **73** 1103 (1994)
18. Kaplan A E, Meystre P *Opt. Commun.* **40** 229 (1982)
19. Heath J R, Ratner M A *Phys. Today* **56** (5) 43 (2003)
20. Murray W A, Barnes W L *Adv. Mater.* **19** 3771 (2007)
21. Fainman Y et al. *Opt. Photon. News* **17** (7) 24 (2006)
22. Žutić I, Fabian J, Das Sarma S *Rev. Mod. Phys.* **76** 323 (2004)

PACS numbers: **05.40.** – a, **05.45.** – a, 42.25.Dd, **46.65.** + g, 47.27.eb

DOI: 10.3367/UFNr.0179.200905j.0547

Современные методы статистического описания динамических стохастических систем

В.И. Кляцкин

1. Введение

С.М. Рыгов уделял большое внимание развитию функциональных методов анализа стохастических систем на семинарах по статистической радиофизике, возглавляемых им. Эти методы он называл *радиоматематикой*. Я принимал участие в работе этих семинаров с конца 1960-х годов. С.М. Рыгов часто задавал, в частности и мне, вопрос: "Что Вы изучаете?" Я традиционно отвечал, что решения стохастических уравнений (обыкновенных дифференциальных и в частных производных или интегральных) являются функционалами от случайных коэффициентов этих уравнений и я изучаю зависимость статистических характеристик этих решений от различных моделей и статистических параметров этих коэффициентов. Примерно 30 лет я считал этот ответ исчерпывающим. И только в последние 10–15 лет, я понял всю актуальность вопроса "что Вы изучаете?" и полную

несостоятельность моего традиционного ответа. Это связано с тем, что в последнее время внимание как теоретиков, так и экспериментаторов привлекает вопрос о связи динамики усреднённых характеристик решения задачи с поведением решения в отдельных реализациях. Это особенно актуально для геофизических проблем, связанных с атмосферой и океаном, в которых, вообще говоря, отсутствует соответствующий ансамбль усреднения и экспериментаторы, как правило, имеют дело с отдельными реализациями. При этом часто результаты статистического анализа не только не имеют ничего общего с поведением решения в отдельных реализациях, но и нередко просто им противоречат. Это я и хочу продемонстрировать в настоящем сообщении.

Сейчас используются три подхода к анализу стохастических динамических систем.

Первый подход, основанный на анализе устойчивости решений детерминированных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = A(t) \mathbf{x}(t)$$

по Ляпунову, традиционно привлекает большое внимание многих исследователей. При этом анализируется верхний предел решения задачи

$$\lambda_{\mathbf{x}(t)} = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln |\mathbf{x}(t)|,$$

который называется его характеристическим показателем. При применении такого подхода к стохастическим динамическим системам часто для интерпретации и упрощения полученных результатов на последней стадии подключают статистический анализ и вычисляют их статистические средние, такие, например, как

$$\langle \lambda_{\mathbf{x}(t)} \rangle = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \langle \ln |\mathbf{x}(t)| \rangle.$$

Недостатки этого подхода для стохастических динамических систем следующие:

1. Такие упрощающие свойства случайных параметров, как стационарность во времени, однородность и изотропность в пространстве, используется лишь на последней стадии анализа.

2. При переходе к континуальным обобщениям обыкновенных дифференциальных уравнений (например, в механике и электродинамике сплошных сред), т.е. к уравнениям в частных производных (к полям), анализ устойчивости по Ляпунову возможен только с помощью разложения решений в ряды по полной системе ортогональных функций. При применении такой методики к стохастическим задачам возникает вопрос о перестановочности операций разложения в ряды и статистического усреднения. В частности, при аппроксимации статистических характеристик случайных процессов и полей сингулярными (обобщёнными) функциями (как, например, в приближении дельта-коррелированных флуктуаций параметров системы) эти операции, как правило, не перестановочны.

Второй подход, также традиционный, основан на анализе моментных и корреляционных функций решений стохастических задач.

Недостатком второго подхода является то, что обычно используемые методы статистического усреднения сглаживают качественные особенности отдельных

реализаций и нередко полученные статистические характеристики не имеют ничего общего с поведением отдельных реализаций.

В ряде случаев существуют, однако, физические процессы и явления, происходящие с вероятностью единица (т.е. почти во всех их реализациях), называемые *когерентными* (см. монографии [1–4] и работу [5], в которых подробно обсуждается этот вопрос). Для описания таких явлений используется третий подход, основанный на *методе статистической топографии*, в котором изучаются не моментные функции, а статистические характеристики некоторых функционалов, описывающих именно когерентные явления.

Далее мы проиллюстрируем применение этих подходов к простейшим физическим задачам.

2. Примеры динамических систем

2.1. Диффузия пассивной безынерционной примеси в случайном поле скоростей

В качестве первого примера рассмотрим задачу об относительной диффузии безынерционных частиц в случайном гидродинамическом потоке с полем скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ в рамках простейшего кинематического уравнения для каждой частицы

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}(t), t), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0.$$

Численное моделирование этой задачи показывает, что динамика системы частиц существенно различается в зависимости от того, является ли случайное поле скоростей бездивергентным или дивергентным. Так, на рис. 1а для конкретной реализации бездивергентного стационарного во времени поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ схематически изображён фрагмент эволюции системы частиц (двумерный случай) в безразмерном времени, связанном со статистическими параметрами поля $\mathbf{u}(\mathbf{r})$. В начальный момент частицы равномерно располагались в круге. В этом случае частицы относительно равномерно заполняют область, ограниченную деформированным контуром. Возникает лишь сильная изрезанность фрактального характера этого контура.

Тогда как в случае потенциального поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ частицы, равномерно расположенные в квадрате в начальный момент, в процессе временной эволюции образуют кластерные области. На рисунке 1б приведён фрагмент результата такой эволюции, полученный численным моделированием. Подчеркнём ещё раз, что образование *кластеров* в этом случае — чисто кинематический эффект. Очевидно, что при усреднении по ансамблю реализаций случайного поля скоростей такая особенность динамики частиц полностью исчезает.

Рассмотрим совместную динамику двух частиц. В этом случае плотность вероятности расстояния между частицами (для малого начального расстояния между ними) является логнормальной и моментные функции расстояния (например, для двумерного случая) экспоненциально возрастают во времени:

$$\langle l^n(t) \rangle = l_0 \exp \left\{ \frac{1}{8} \left[2(D^s - D^p) n + 3D^p n^2 \right] \right\},$$

где D^s и D^p связаны с соленоидальной и потенциальной составляющими спектральной функции поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$.

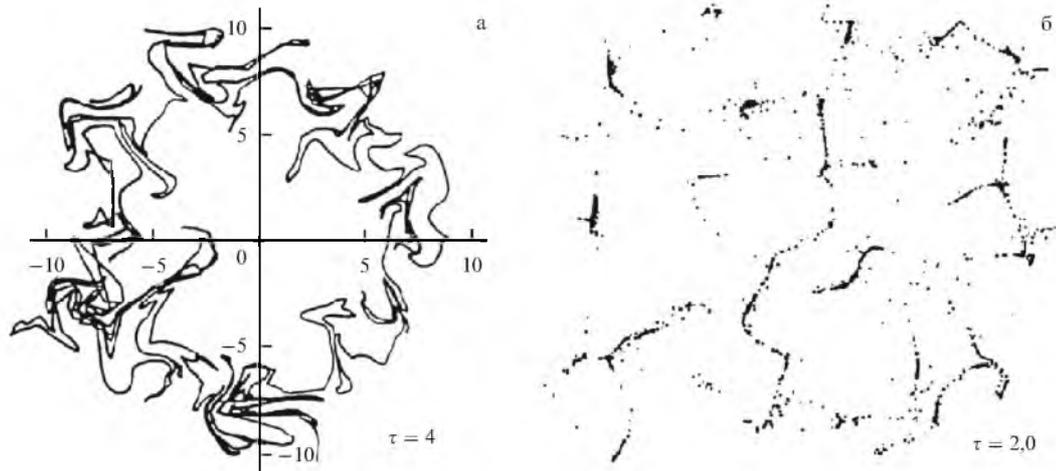


Рис. 1. Результаты моделирования диффузии системы частиц в соленоидальном (а) и потенциальном (б) случайных полях скоростей.

При этом существует детерминированная функция, называемая *кривой типичной реализации* (КТР), которая описывает основную тенденцию поведения случайного процесса $l(t)$ во времени. Эта функция для данной задачи будет являться также экспоненциальной функцией времени

$$l^*(t) = l_0 \exp \left\{ \frac{1}{4} (D^s - D^p) t \right\},$$

и она связана с *ляпуновской экспонентой*.

КТР существенно зависит от знака разности $D^s - D^p$. В частности, для бездивергентного поля скоростей ($D^p = 0$) имеем экспоненциально возрастающую типичную реализацию. В другом предельном случае — потенциальном поле скоростей ($D^s = 0$) — типичной реализацией будет экспоненциально убывающая кривая, т.е. налицо стремление частиц слиться. Это означает, что должны образовываться *кластеры*, т.е. зоны компактного сосредоточения частиц, расположенные в большей степени в разреженных областях, что согласуется с результатами численного моделирования. Таким образом, для кластеризации частиц в данной задаче должно выполняться неравенство $D^s < D^p$.

Экспоненциальное возрастание моментов обусловлено выбросами процесса $l(t)$ относительно кривой типичной реализации $l^*(t)$ как в сторону больших, так и малых значений l , т.е. оно является чисто статистическим эффектом, обусловленным усреднением по всему ансамблю реализаций.

Таким образом, мы имеем явное противоречие между характером поведения статистических характеристик процесса $l(t)$ и поведением процесса в конкретных реализациях. Сделаем два уточняющих замечания.

Замечание 1. Кривая типичной реализации (КТР)

Статистические характеристики случайного процесса $z(t)$ описываются плотностью вероятности $P(t; z) = \langle \delta(z(t) - z) \rangle$ и интегральной функцией распределения

$$F(t; z) = \text{Prob}(z(t) < z) = \langle \theta(z(t) - z) \rangle = \int_{-\infty}^z dz' P(t; z'),$$

где $\delta(z)$ — дельта-функция Дирака, $\theta(z)$ — функция Хевисайда, равная 1 при $z > 0$ и 0 при $z < 0$.

Кривой типичной реализации случайного процесса $z(t)$ называется детерминированная кривая $z^*(t)$, которая является *медианой интегральной функции распределения* и определяется как решение алгебраического уравнения

$$F(t; z^*(t)) = \frac{1}{2}.$$

Основанием для этого является свойство медианы, заключающееся в том, что для любого интервала времени (t_1, t_2) случайный процесс $z(t)$ как бы обвивает кривую $z^*(t)$ таким образом, что среднее время, в течение которого выполняется неравенство $z(t) > z^*(t)$, совпадает со средним временем, в течение которого выполняется обратное неравенство $z(t) < z^*(t)$ (рис. 2), т.е.

$$\langle T_{z(t) > z^*(t)} \rangle = \langle T_{z(t) < z^*(t)} \rangle = \frac{1}{2} (t_2 - t_1).$$

Кривая типичной реализации, полученная с помощью одновременной плотности вероятности, определена, тем не менее, на всём интервале времени $t \in (0, \infty)$.

Для гауссова случайного процесса $z(t)$ КТР совпадает со средним значением процесса, т.е. $z^*(t) = \langle z(t) \rangle$.

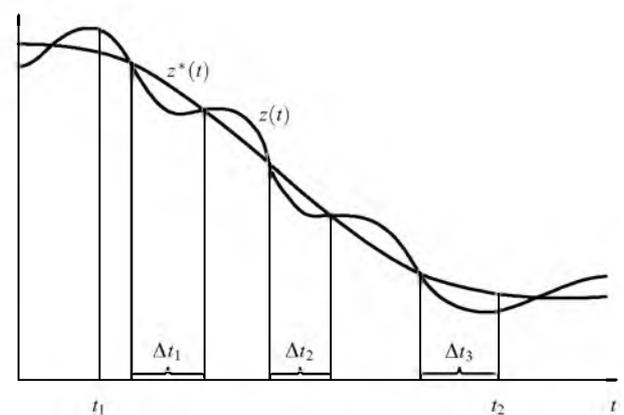


Рис. 2. К определению кривой типичной реализации случайного процесса.

Замечание 2. Логарифмически нормальный случайный процесс

Определим логнормальный случайный процесс стохастическим уравнением

$$\frac{d}{dt} y(t; \alpha) = [-\alpha + z(t)] y(t; \alpha), \quad y(0; \alpha) = 1,$$

где $z(t)$ — гауссов процесс с параметрами $\langle z(t) \rangle = 0$, $\langle z(t) z(t') \rangle = 2D\delta(t - t')$. Его одновременная плотность вероятностей описывается уравнением Фоккера–Планка

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha \frac{\partial}{\partial y} y \right) P(t; y, \alpha) = D \frac{\partial}{\partial y} y \frac{\partial}{\partial y} y P(t; y, \alpha),$$

$$P(0; y, \alpha) = \delta(y - 1).$$

Характерная особенность решения этого уравнения — появление длинного пологого хвоста при $Dt \gg 1$, означающего усиление роли больших выбросов процесса $y(t; \alpha)$ в формировании одновременной статистики. Следствием этого является то, что его моментные функции

$$\langle y^n(t; \alpha) \rangle = \exp \left[n \left(n - \frac{\alpha}{D} \right) Dt \right],$$

$$\left\langle \frac{1}{y^n(t; \alpha)} \right\rangle = \exp \left[n \left(n + \frac{\alpha}{D} \right) Dt \right], \quad n = 1, 2, \dots$$

экспоненциально возрастают во времени при $n > \alpha/D$.

Для логнормального процесса $\langle \ln y(t) \rangle = -\alpha t$ и, следовательно, параметр $-\alpha = (1/t) \langle \ln y(t) \rangle$ является ляпуновским характеристическим показателем, а КТР процесса $y(t; \alpha)$ оказывается экспоненциально спадающей кривой во времени:

$$y^*(t) = \exp(\langle \ln y(t) \rangle) = \exp(-\alpha t).$$

Рассмотрим теперь континуальное обобщение задачи о диффузии безынерционной пассивной примеси. Для этой задачи поле плотности примеси $\rho(\mathbf{r}, t)$ описывается уравнением непрерывности

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \right) \rho(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}). \quad (1)$$

При этом общая масса её сохраняется в процессе эволюции, т.е.

$$M = M(t) = \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r} \rho_0(\mathbf{r}) = \text{const}.$$

Для описания локального поведения реализаций поля примеси в пространстве в случайном поле скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ нужно знать вероятностное распределение её плотности. Исходя из стохастического уравнения (1), получим уравнение для плотности вероятностей поля плотности (концентрации) примеси:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D_0 \Delta \right) P(\mathbf{r}, t; \rho) = D_\rho \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 P(\mathbf{r}, t; \rho),$$

где коэффициент диффузии в ρ -пространстве $D_\rho = D^2$ связан только с потенциальной составляющей поля

$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$. Решение этого уравнения имеет вид

$$P(\mathbf{r}, t; \rho) = \frac{1}{2\rho\sqrt{\pi Dt}} \exp \left(D_0 t \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} \right) \times \exp \frac{\ln^2 [\rho \exp(\alpha t) / \rho_0(\mathbf{r})]}{4Dt}. \quad (2)$$

Если начальная плотность примеси всюду одинакова, $\rho_0(\mathbf{r}) = \rho_0 = \text{const}$, то вероятностное распределение плотности не зависит от \mathbf{r} и описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t; \rho) = D_\rho \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 P(t; \rho). \quad (3)$$

Из уравнения (3), в частности следует, что распределение вероятностей является логнормальным и моментные функции поля плотности, начиная со второй, экспоненциально возрастают со временем $\tau = D_\rho t$:

$$\langle \rho^n(\mathbf{r}, t) \rangle = \rho_0^n \exp [n(n-1)\tau].$$

С точки зрения одноточечных характеристик поля плотности $\rho(\mathbf{r}, t)$ в этом случае задача статистически эквивалентна случайному процессу $\rho(t)$, плотность вероятностей для которого описывается уравнением Фоккера–Планка (3), и при этом КТР экспоненциально убывает во времени для любой фиксированной точки пространства:

$$\rho^*(t) = \rho_0 \exp(-\tau),$$

что свидетельствует о наличии кластерного характера флуктуаций плотности среды в произвольных дивергентных потоках.

Распределение вероятностей (2) даёт также возможность выяснить некоторые характерные особенности пространственно-временной структуры реализаций поля плотности.

Замечание 3. Статистическая топография случайного поля плотности

Для наглядности ограничимся здесь также двумерным случаем. В статистической топографии важные сведения о пространственном поведении реализаций даёт анализ линий уровня, определяемых равенством

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho = \text{const}.$$

В частности, средние значения таких функционалов поля плотности, как общая площадь, где $\rho(\mathbf{r}, t) > \rho$,

$$S(t, \rho) = \int d\mathbf{r} \theta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho) = \int d\mathbf{r} \int_\rho^\infty d\tilde{\rho} \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \tilde{\rho}),$$

и общая масса примеси, заключённая в этой области,

$$M(t, \rho) = \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}, t) \theta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho) = \int d\mathbf{r} \int_\rho^\infty d\tilde{\rho} \tilde{\rho} \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \tilde{\rho}),$$

определяются одноточечной плотностью вероятности и описываются равенствами

$$\langle S(t, \rho) \rangle = \int_{\rho}^{\infty} d\tilde{\rho} \int d\mathbf{r} P(\mathbf{r}, t; \tilde{\rho}),$$

$$\langle M(t, \rho) \rangle = \int_{\rho}^{\infty} d\tilde{\rho} \tilde{\rho} \int d\mathbf{r} P(\mathbf{r}, t; \tilde{\rho}).$$

Отсюда видно, в частности, что при $\tau \gg 1$ средняя площадь областей, в которых плотность превышает заданный уровень ρ , убывает со временем по закону

$$\langle S(t, \rho) \rangle \approx \frac{1}{\sqrt{\pi\rho\tau}} \exp\left(-\frac{\tau}{4}\right) \int d\mathbf{r} \sqrt{\rho_0(\mathbf{r})},$$

в то время как заключённая в этих областях средняя масса примеси

$$\langle M(t, \rho) \rangle \approx M - \sqrt{\frac{\rho}{\pi\tau}} \exp\left(-\frac{\tau}{4}\right) \int d\mathbf{r} \sqrt{\rho_0(\mathbf{r})}$$

монотонно стремится к полной массе. Это ещё раз подтверждает сделанный ранее вывод о том, что частицы примеси со временем стремятся собраться в кластеры — компактные области повышенной плотности, окружённые разрежёнными областями.

Отметим, что для пространственно однородного поля $\rho(\mathbf{r}, t)$ эти выражения упрощаются и для удельных величин, приходящихся на единицу площади, получаем выражения

$$\langle s(t, \rho) \rangle = \int_{\rho}^{\infty} d\tilde{\rho} P(t; \tilde{\rho}), \quad \langle m(t, \rho) \rangle = \int_{\rho}^{\infty} d\tilde{\rho} \tilde{\rho} P(t; \tilde{\rho}),$$

связанные с решением уравнения (3).

2.2. Волны в случайно-неоднородной среде

В качестве второго примера рассмотрим задачу о распространении волн в случайных средах.

Прежде всего рассмотрим одномерную задачу, соответствующую волнам в слоистых средах.

Пусть слой хаотически неоднородной среды занимает часть пространства $L_0 < x < L$ и из области $x > L$ на неё падает плоская волна $u_0(x) = \exp[-ik(x-L)]$. Из-за наличия неоднородностей возникает отражённая от слоя волна с коэффициентом отражения $R_L = u(L) - 1$ и выходящая из слоя волна с коэффициентом прохождения $T_L = u(L_0)$. Внутри слоя волновое поле описывается краевой задачей

$$\frac{d^2}{dx^2} u(x) + k^2[1 + \varepsilon(x)]u(x) = 0,$$

$$u(L) + \frac{i}{k} \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=L} = 2, \quad u(L_0) - \frac{i}{k} \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=L_0} = 0,$$

где функция $\varepsilon(x)$, которую мы считаем случайной, описывает неоднородности среды.

В предположении, что статистические характеристики функции $\varepsilon(x)$ являются известными, статистическая задача состоит в нахождении статистических характеристик интенсивности волнового поля $I(x) = |u(x)|^2$ внутри неоднородной среды и на границах слоя.

Статистический анализ решения задачи показывает, что для достаточно толстого слоя среды, а именно

$D(L-L_0) \gg 1$ (где величина D связана со статистическими характеристиками $\varepsilon(x)$), с вероятностью единица $|T_L| \rightarrow 0$ и, следовательно, $|R_L| \rightarrow 1$, т.е. полупространство ($L_0 \rightarrow -\infty$) случайно-неоднородной среды полностью отражает падающую волну. Таким образом, имеет место *динамическая локализация волнового поля* в этом слое.

Однако среднее значение интенсивности волнового поля для полупространства случайной среды постоянно, а более высокие моменты, нормированные на их значения на границе слоя, описываются выражением

$$\langle I^n(L-x) \rangle = \exp[Dn(n-1)(L-x)],$$

т.е. интенсивность волнового поля имеет логарифмически нормальное распределение вероятностей, а моментные функции экспоненциально возрастают по направлению вглубь среды.

При этом кривая типичной реализации интенсивности волны в среде описывается экспоненциально спадающей кривой

$$I^*(x) = 2 \exp[-D(L-x)]$$

и совпадает с ляпуновской экспонентой, а величина $l_{loc} = 1/D$, которая называется *длиной локализации*, определяет пространственный масштаб затухания интенсивности волнового поля в среде в отдельных его реализациях.

Таким образом, видим, что формирование статистики осуществляется за счёт больших выбросов относительно кривой типичной реализации. На рисунке 3 приведены две реализации интенсивности волнового поля в достаточно толстом слое среды, полученные численным моделированием. На этом рисунке явно просматривается тенденция резкого экспоненциального убывания (с большими выбросами как в сторону увели-

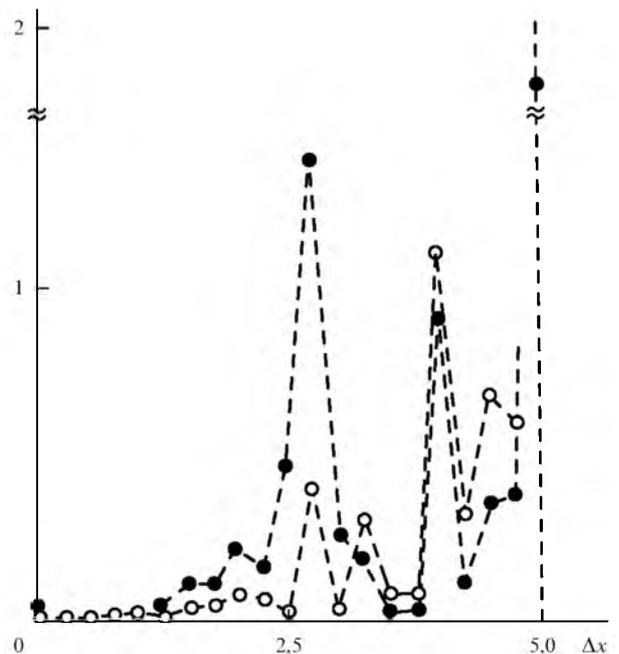


Рис. 3. Численное моделирование динамической локализации для двух реализаций неоднородностей среды.

чения величины интенсивности, так и в сторону значений, близких к нулю).

Рассмотрим теперь распространение волн в случайно-неоднородной трёхмерной среде на основе скалярного параболического уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} U(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} U(x, \mathbf{R}) + \frac{ik}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}) U(x, \mathbf{R}),$$

$$U(0, \mathbf{R}) = U_0(\mathbf{R}). \quad (4)$$

Здесь x — координата в направлении распространения волны, \mathbf{R} — координаты в поперечной плоскости, $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ — отклонение диэлектрической проницаемости от единицы.

Если ввести амплитуду и фазу волнового поля как

$$U(x, \mathbf{R}) = A(x, \mathbf{R}) \exp \{iS(x, \mathbf{R})\},$$

то уравнение переноса для интенсивности волнового поля $I(x, \mathbf{R}) = |U(x, \mathbf{R})|^2$ можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} I(x, \mathbf{R}) + \frac{1}{k} \nabla_{\mathbf{R}} \{ \nabla_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R}) I(x, \mathbf{R}) \} = 0,$$

$$I(0, \mathbf{R}) = I_0(\mathbf{R}). \quad (5)$$

Откуда следует, что в общем случае произвольного падающего волнового пучка сохраняется мощность волны в плоскости $x = \text{const}$:

$$E_0 = \int I(x, \mathbf{R}) d\mathbf{R} = \int I_0(\mathbf{R}) d\mathbf{R}.$$

Уравнение (5) по форме совпадает с уравнением (1), поэтому его можно трактовать как уравнение переноса консервативной примеси в потенциальном поле скоростей. Следовательно, реализации поля интенсивности имеют кластерный характер, и эта кластеризация проявляется в виде *каустических структур*. Так, на рис. 4 приведены фотографии поперечного сечения лазерного пучка, распространяющегося в турбулентной среде в лабораторных исследованиях при различных интенсивностях флуктуаций диэлектрической проницаемости. Из рисунка ясно видно возникновение каустической структуры волнового поля.

Введём амплитуду и фазу волнового поля, а также комплексную фазу волны:

$$U(x, \mathbf{R}) = A(x, \mathbf{R}) \exp (iS(x, \mathbf{R})) = \exp (\phi(x, \mathbf{R})),$$

где

$$\phi(x, \mathbf{R}) = \chi(x, \mathbf{R}) + iS(x, \mathbf{R}),$$

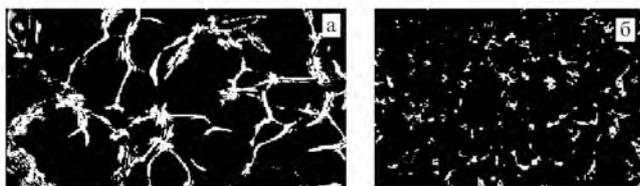


Рис. 4. Поперечное сечение лазерного пучка при распространении в турбулентной среде в лабораторных условиях (а) в области сильных фокусировок и (б) в области сильных (насыщенных) флуктуаций.

$\chi(x, \mathbf{R}) = \ln A(x, \mathbf{R})$ — уровень амплитуды волны, $S(x, \mathbf{R})$ — флуктуации фазы волны относительно фазы падающей волны kx . Исходя из параболического уравнения (4) можно получить для комплексной фазы нелинейное уравнение так называемого *метода плавных возмущений* (МПВ) Рытова:

$$\frac{\partial}{\partial x} \phi(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \phi(x, \mathbf{R}) + \frac{i}{2k} [\nabla_{\mathbf{R}} \phi(x, \mathbf{R})]^2 + i \frac{k}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}).$$

Для случая плоской падающей волны, который и будет рассматриваться далее, без ограничения общности можно считать, что $U_0(\mathbf{R}) = 1$ и, следовательно, $\phi(0, \mathbf{R}) = 0$. В этом случае случайное поле $\phi(x, \mathbf{R})$ является статистически однородным в плоскости \mathbf{R} и все его одноточечные статистические характеристики не зависят от параметра \mathbf{R} .

Замечание 4. О методе плавных возмущений С.М. Рытова. Метод плавных возмущений был предложен С.М. Рытовым при анализе задачи о дифракции света на ультразвуковых волнах в 1938 г. Этот метод А.М. Обухов применил в 1953 г. для учёта дифракционных эффектов при распространении волн в случайных средах в рамках теории возмущений. Ранее аналогичные исследования проводились в приближении геометрической оптики (акустики). Эта методика не потеряла актуальности и сейчас, являясь основным математическим аппаратом для различных технических приложений.

В первом приближении МПВ статистические свойства амплитудных флуктуаций описываются дисперсией уровня амплитуды, т.е. параметром $\sigma_0^2(x) = \langle \chi_0^2(x, \mathbf{R}) \rangle$, при этом $\langle \chi_0(x, \mathbf{R}) \rangle = -\sigma_0^2(x)$. Что касается дисперсии интенсивности волны, которая называется *индексом мерцания*, то для неё в первом приближении имеем

$$\beta_0^2(x) = \langle I^2(x, \mathbf{R}) \rangle - 1 = \langle \exp [4\chi_0(x, \mathbf{R})] \rangle - 1 \approx 4\sigma_0^2(x).$$

В этом случае интенсивность волнового поля является логарифмически нормальным случайным полем и все статистические моменты интенсивности волнового поля возрастают с увеличением параметра $\beta_0(x)$, т.е. с расстоянием, пройденном волной. Теперь можно рассмотреть статистически эквивалентный случайный процесс $I(x)$, для которого кривой типичной реализации интенсивности волнового поля является экспоненциально спадающая с увеличением дистанции кривая

$$I^*(x) = \exp \left(-\frac{1}{2} \beta_0(x) \right)$$

в любой фиксированной точке пространства \mathbf{R} , что свидетельствует о начале возникновения кластерной (каустической) структуры поля интенсивности. Формирование статистики (например, моментных функций $\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle$) осуществляется за счёт больших выбросов процесса $I(x)$ относительно этой кривой.

Полученное описание флуктуаций интенсивности на основе первого приближения МПВ справедливо при значениях параметра $\beta_0(x) \leq 1$. При дальнейшем увеличении параметра $\beta_0(x)$ это приближение становится

несправедливым и необходимо принимать во внимание нелинейный характер уравнения для комплексной фазы волнового поля. Эта область флуктуаций, называемая *областью сильных фокусировок*, очень трудна для аналитических исследований. При дальнейшем увеличении параметра $\beta_0(x)$ статистические характеристики интенсивности выходят на режим насыщения, в котором $\beta(x) \rightarrow 1$ при $\beta_0^2(x) \rightarrow \infty$, эта область изменения параметра $\beta_0(x)$ называется *областью сильных флуктуаций интенсивности*.

В указанной области статистические характеристики волнового поля перестают зависеть от дистанции и

$$\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle = n!, \quad P(x, I) = \exp(-I).$$

В этом случае средняя удельная площадь областей, внутри которых $I(x, \mathbf{R}) > I$, и средняя удельная мощность, сосредоточенная в этих областях, являются постоянными и не описывают поведение интенсивности волнового поля в отдельных реализациях. Также в этом случае не информативен и переход к статистически эквивалентному случайному процессу, так как кривой типичной реализации для него будет также постоянная величина. Понимание структуры волнового поля в этом случае в отдельных реализациях можно получить только исходя из анализа таких величин, как удельная средняя длина контуров и удельное среднее число контуров интенсивности волнового поля. Эти величины продолжают возрастать с увеличением параметра $\beta_0(x)$, и, следовательно, происходит дробление контуров (см. рис. 4).

3. Заключение

В завершение, хочу ещё раз подчеркнуть основной тезис доклада. Подход к анализу стохастических динамических задач на основе идей статистической топографии, позволяющий по одноточечным статистическим характеристикам случайных процессов и полей определять количественные и качественные характеристики поведения конкретных реализаций этих величин на всём интервале времён (во всём пространстве), возник в процессе дискуссий с экспериментаторами, которые в основном имеют дело с отдельными реализациями. Для достаточно полного описания стохастических динамических систем недостаточно сформулировать основные уравнения и начальные или краевые условия для них. Необходимо прежде всего понимать, какие когерентные явления (происходящие с вероятностью единица, т.е. почти во всех реализациях их решений) содержатся в этих системах, и соответствующим образом строить статистический анализ.

Работа проводилась при поддержке РФФИ (проекты 07-05-0006а и 07-05-92210-НЦНИЛ.а).

Список литературы

1. Кляцкин В И *Стохастические уравнения глазами физика: Основные положения, точные результаты и асимптотические приближения* (М.: Физматлит, 2001) [Klyatskin V I *Stochastic Equations through the Eye of the Physicist: Basic Concepts, Exact Results and Asymptotic Approximations* (Amsterdam: Elsevier, 2005)]
2. Кляцкин В И *Динамика стохастических систем* (М.: Физматлит, 2002) [Klyatskin V I *Dynamics of Stochastic Systems* (Amsterdam: Elsevier, 2005)]

3. Кляцкин В И *Диффузия и кластеризация пассивной примеси в случайных гидродинамических потоках* (М.: Физматлит, 2005)
4. Кляцкин В И *Стохастические уравнения. Теория и ее приложения к акустике, гидродинамике и радиофизике* Т. 1, 2 (М.: Физматлит, 2008)
5. Кляцкин В И *УФН* **178** 419 (2008) [Klyatskin V I *Phys. Usp.* **51** 395 (2008)]

PACS numbers: 42.25.Dd, 42.68.Ay, 42.68.Xy
DOI: 10.3367/UFNr.0179.200905k.0553

Развитие теории переноса излучения в приложении к задачам инструментального видения в мутных средах

Л.С. Долин

1. Введение

В докладе излагаются основные положения теории инструментального видения в средах с сильно анизотропным рассеянием и методика расчёта изображений диффузно отражающих объектов с учётом эффектов поглощения и многократного рассеяния света в среде. Обсуждаются особенности различных вариантов уравнения переноса в малоугловом приближении, используемых в теории видения и оптической когерентной "томографии" (ОКТ) мутных сред. Описан новый способ вычисления временных моментов импульсного светового пучка, прошедшего через слой мутной среды. Приводятся результаты теоретического и экспериментального исследования теневого шума в ОКТ-изображениях мутных сред с флуктуирующими оптическими параметрами.

Мутная среда, рассеивая свет, ограничивает дальность видимости находящихся в ней объектов и при этом сама становится видимой. Поэтому развитию методов и теории инструментального видения в мутных средах было направлено на решение двух взаимосвязанных задач — устранение негативного влияния среды на видимость объектов и дистанционное измерение оптических характеристик самой среды.

К числу основополагающих результатов теории видения в мутных средах относится уравнение Кошмидера [1], которое устанавливает связь между контрастом изображения чёрного объекта (наблюдаемого на фоне неба вблизи горизонта) с показателем ослабления света в атмосфере. Соотношения для оценки контраста изображения и дальности визуальной видимости подводных объектов в условиях естественного освещения были получены в классической работе Дантли [2]. При этом предполагалось, что угловые размеры наблюдаемого объекта малы и поэтому его видимая яркость ослабляется средой по закону Бугера. Потребность в более универсальной теории видения появилась в связи с развитием лазерных методов подводного наблюдения.

Пионерские исследования по этой тематике были выполнены в 1960-е годы под руководством А.В. Гапонова-Грехова в Научно-исследовательском радиофизическом институте (НИРФИ) (г. Горький). Эти исследования привели к созданию первого макета лазерно-импульсной системы подводного видения, с помощью

которого в морских условиях была показана возможность существенного увеличения дальности наблюдения подводных объектов за счёт использования лазерной подсветки и импульсного стробирования полезного сигнала. Тогда же были получены основные результаты, составляющие основу современной теории лазерной локации и инструментального видения в мутных средах: на основе уравнения переноса излучения (УПИ) в малоугловом приближении построена аналитическая модель размытия и ослабления лазерного пучка при его прохождении через среду с сильно анизотропным рассеянием [3, 4]; получены формулы для расчёта характеристик изображений подводных объектов с учётом эффектов поглощения и многократного рассеяния света в воде [5–10]; развита универсальная методика оценки потенциальных возможностей систем подводного наблюдения различного типа, в том числе лазерных [11–14].

Возможность применения феноменологической теории переноса в задаче о распространении когерентного пучка света в мутной среде вызвала определённые вопросы. Отчасти их удалось снять благодаря работам [15–17], в которых было получено уравнение для функции когерентности волнового пучка в среде с сильно анизотропным рассеянием и показано, что фурье-образ функции когерентности удовлетворяет УПИ в малоугловом приближении, а следовательно, является волновым аналогом яркости светового поля (в 1966 г. эти результаты докладывались на семинаре С.М. Рытова по инициативе М.А. Миллера, который курировал теоретические исследования НИРФИ по гидрооптике и оказывал исполнителям работы повседневную помощь своими советами и критикой). Задаче обоснования УПИ в более общей постановке было посвящено большое число исследований, результаты которых отражены в ряде обзоров и монографий [18–20].

В дальнейшем различные варианты решений УПИ в малоугловом приближении использовались для разработки теории лазерной локации и видения подводных объектов через взволнованную морскую поверхность, лидарных методов определения оптических характеристик природных рассеивающих сред и в задачах оптической томографии биотканей.

2. Как на основе уравнения переноса излучения строится модель изображения

При решении задач теории видения в мутных средах без ущерба для общности получаемых результатов можно полагать, что система наблюдения (рис. 1) включает в себя источник подсветки S и оптический приёмник R , а изображение формируется посредством регистрации мощности принимаемого сигнала P_R как функции координат точки \mathbf{r}_0 , в которой оси диаграммы направленности излучателя \mathbf{n}_S и приёмника \mathbf{n}_R пересекаются с поверхностью объекта S_{ob} . Для нахождения сигнала P_R используется уравнение переноса излучения [21]

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{n} \nabla_{\mathbf{r}} + \alpha \right) I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t) = \sigma \int_{4\pi} I(\mathbf{r}, \mathbf{n}', t) x(\gamma) d\mathbf{n}' + Q, \quad (1)$$

где $I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t)$ — интенсивность излучения (яркость) в точке пространства \mathbf{r} в направлении единичного вектора \mathbf{n} в момент времени t , c и $\alpha = \sigma + \kappa$ — скорость и показатель ослабления света в среде соответственно, σ и κ —

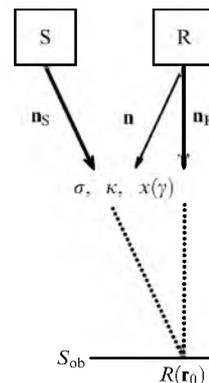


Рис. 1. Схема наблюдения.

показатели рассеяния и поглощения, $x(\gamma)$ — индикатриса рассеяния, удовлетворяющая условию нормировки $2\pi \int_0^\pi x(\gamma) \sin \gamma d\gamma = 1$, $\gamma = \arccos(\mathbf{n}\mathbf{n}')$ — угол рассеяния, $d\mathbf{n}'$ — элемент телесного угла около направления \mathbf{n}' , Q — объёмные источники излучения.

Индикатрисы рассеяния мутных природных сред отличаются ярко выраженной анизотропией. Поэтому они достаточно хорошо описываются выражением

$$x(\gamma) = (1 - 2p_b) x_1(\gamma) + \frac{p_b}{2\pi}, \quad (2)$$

где $p_b = 2\pi \int_{\pi/2}^\pi x(\gamma) \sin \gamma d\gamma$ — вероятность обратного рассеяния, $p_b \ll 1$, $x_1(\gamma)$ — остронаправленная часть индикатрисы рассеяния, удовлетворяющая условиям $2\pi \int_0^\pi x_1(\gamma) \sin \gamma d\gamma = 1$, $x_1(\gamma) \ll p_b/(2\pi)$ при $\gamma > \pi/2$. Мощность принимаемого сигнала $P_R(\mathbf{r}_0, t)$ выражается через яркость излучения $I_R(-\mathbf{n}, t)$, падающего на апертуру приёмника, в виде

$$P_R(\mathbf{r}_0, t) = \Sigma_R \int D_R(\vartheta) I_R(-\mathbf{n}, t) d\mathbf{n},$$

где Σ_R — площадь входного зрачка приёмника, $D_R(\vartheta)$ — его диаграмма направленности, $D_R(0) = 1$, $\vartheta = \arccos(\mathbf{n}\mathbf{n}_R)$. Поле источника S ищется в виде суммы "направленной" I_1 и диффузной I_2 составляющих, первая из которых играет основную роль в подсветке объекта, а вторая формирует отражённый средой сигнал (помеху обратного рассеяния, "дымку"). Поле I_1 отождествляется с полем излучения источника S во "вспомогательной" среде с узкой индикатрисой рассеяния $x_1(\gamma)$, показателем рассеяния $\sigma_1 = \sigma - 2\sigma_b$ и показателем поглощения $\kappa_1 = \alpha - \sigma_1 = \kappa + 2\sigma_b$, где $\sigma_b = p_b\sigma$ — показатель обратного рассеяния реальной среды. Расчёт диффузной составляющей поля в приближении однократного рассеяния света на большие углы сводится к нахождению поля распределённых источников

$$Q = \frac{\sigma_b}{2\pi} \int_{4\pi} I_1 d\mathbf{n}$$

во вспомогательной среде. При этом полная мощность принимаемого сигнала представляется в виде

$$P_R = P_{ob} + P_b, \quad (3)$$

$$P_{ob} = \frac{\Sigma_R \Omega_R}{\pi} \iint_{S_{ob}} R(\mathbf{r}') \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} E^{(s)}(\mathbf{r}', t') E^{(r)}(\mathbf{r}', t - t') dt' \right] d\mathbf{r}', \quad (4)$$

$$P_b = \frac{\Sigma_R \Omega_R}{2\pi} \iiint_V \sigma_b(\mathbf{r}) \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} E_0^{(s)}(\mathbf{r}, t') E_0^{(r)}(\mathbf{r}, t - t') dt' \right] d\mathbf{r}, \quad (5)$$

где P_{ob} — мощность сигнала от объекта, P_b — мощность сигнала обратного объёмного рассеяния; $\Omega_R = 2\pi \int_0^{\pi/2} D_R(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta$ — эффективный телесный угол приёма; $E^{(s)}(\mathbf{r}', t) = \int_{nN>0} (n\mathbf{N}) I_1 d\mathbf{n}$, $E_0^{(s)}(\mathbf{r}, t) = \int_{4\pi} I_1 d\mathbf{n}$ — облучённость поверхности объекта в точке \mathbf{r}' и пространственная облучённость среды в точке \mathbf{r} в момент времени t ; $E^{(r)}(\mathbf{r}', t)$, $E_0^{(r)}(\mathbf{r}, t)$ — соответственно облучённость объекта и среды от вспомогательного δ -импульсного источника излучения с единичной энергией и такой же, как у приёмника, диаграммой направленности; интеграл (4) берётся по поверхности объекта S_{ob} , а интеграл (5) — по освещённому объёму среды V . В случае стационарной подсветки (когда функции с индексом (s) не зависят от времени) в (4), (5) отсутствует операция свёртки по времени, а функции с индексом (r) под знаком интеграла — это облучённости объекта и среды от вспомогательного непрерывного источника излучения с единичной мощностью. Формулы (3)–(5) позволяют выразить принимаемый сигнал через коэффициент отражения объекта наблюдения, показатель обратного рассеяния мутной среды и поля облучённости, которые создаются реальным и вспомогательным источниками излучения в мутной среде, рассеивающей свет только "вперёд".

При заданном положении излучателя, приёмника и объекта наблюдения функции $E^{(s,r)}$, $E_0^{(s,r)}$ в формулах (4), (5) зависят не только от переменных \mathbf{r} , \mathbf{r}' , t , но и от координат точки объекта \mathbf{r}_0 , на которую ориентированы диаграммы направленности излучателя и приёмника. Если угол поля зрения системы наблюдения достаточно мал, а расстояние до объекта z_{ob} велико по сравнению с базой "излучатель–приёмник", то в случае стационарной подсветки объекта зависимость сигнала P_{ob} от \mathbf{r}_0 определяется формулами

$$P_{ob}(\mathbf{r}_0, z_{ob}) = \frac{P_S}{\pi} \iint_{S_{ob}} R(\mathbf{r}') A_{ob}(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}', z_{ob}) d\mathbf{r}', \quad (6)$$

$$A_{ob}(\mathbf{r}_\perp, z) = \Sigma_R \Omega_R \bar{E}^{(s)}(\mathbf{r}_\perp, z) \bar{E}^{(r)}(\mathbf{r}_\perp, z), \quad (7)$$

где P_S — мощность источника подсветки, $\bar{E}^{(s,r)}$ — распределения облучённости в плоскости $z = \text{const}$ от реального и вспомогательного пучков подсветки с единичной мощностью при ориентации осей пучков на точку $\mathbf{r}_\perp = 0$ этой плоскости.

Функции $\bar{E}^{(s,r)}$ можно назвать эффективными диаграммами направленности излучателя и приёмника. Для получения изображения по крайней мере одна из них должна быть узкой. В обычной телевизионной системе изображение формируется за счёт диаграммы $E^{(r)}$, а в системе с бегущим световым лучом — за счёт диаграммы $E^{(s)}$. Согласно уравнению (6) мутная среда преобразует изображение как линейный фильтр двумерных сигналов. Функция $A_{ob}(\mathbf{r}_\perp, z)$, которую называют функцией размытия точки (ФРТ), характеризует структуру изображения точечного объекта и является аналогом импульсной характеристики фильтра электрических сигналов. Для её нахождения достаточно знать диа-

граммы направленности излучателя и приёмника и распределение облучённости $e(r_\perp, z)$ в поперечном сечении бесконечно узкого светового пучка, прошедшего через слой среды толщиной z . Нормированный пространственный спектр этого распределения

$$T(k, z) = \frac{\int_0^\infty e(r_\perp, z) J_0(kr_\perp) r_\perp dr_\perp}{\int_0^\infty e(r_\perp, z) r_\perp dr_\perp}$$

называют частотно-контрастной характеристикой слоя мутной среды.

В случае импульсной подсветки объекта из соотношений (6), (7) можно найти энергию полезного сигнала на элементе изображения $W_{ob}(\mathbf{r}_0) = \int P_{ob}(\mathbf{r}_0, t) dt$, которую и нужно знать для оценки его качества. При расчётах W_{ob} в (6) необходимо произвести замену $P_{ob} \rightarrow W_{ob}$, $P_S \rightarrow W_S$, где W_S — энергия зондирующего импульса.

При зондировании мутной среды световыми импульсами с длительностью Δt обратно рассеянный сигнал в момент t приходит с глубины $z_t = ct/2$ из слоя среды толщиной $c\Delta t/2$. Как следует из (5), при ориентации оптических осей излучателя и приёмника на точку \mathbf{r}_0 плоскости $z = z_t$ мощность принимаемого сигнала выражается в виде

$$P_b(\mathbf{r}_0, z_t) = \frac{cW_S}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \sigma_b(\mathbf{r}_\perp, z_t) A_b(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_\perp, z_t) d\mathbf{r}_\perp, \quad (8)$$

$$A_b(\mathbf{r}_\perp, z) = \Sigma_R \Omega_R \bar{E}_0^{(s)}(\mathbf{r}_\perp, z) \bar{E}_0^{(r)}(\mathbf{r}_\perp, z) \quad (9)$$

через показатель обратного рассеяния среды σ_b и распределения пространственной облучённости $\bar{E}_0^{(s,r)}(\mathbf{r}_\perp, z)$ в поперечном сечении реального и вспомогательного пучков на расстоянии z от источника. Формулы (8), (9) применимы при условии малости длины импульса $c\Delta t$ по сравнению с длиной свободного пробега фотона $1/\alpha$ и масштабом Δz продольной неоднородности σ_b . Они показывают, что импульсная система видения в равной мере пригодна для наблюдения объектов в мутной среде и наблюдения пространственных вариаций показателя обратного рассеяния самой среды. Во вспомогательной среде с узкой индикатрисой рассеяния распределения $\bar{E}_0^{(s,r)}$ и $\bar{E}^{(s,r)}$ различаются очень слабо. Поэтому при расчёте изображений объекта и среды можно полагать $A_b(\mathbf{r}_\perp, z) \approx A_{ob}(\mathbf{r}_\perp, z)$ и пользоваться одинаковой ФРТ.

Формулы (8), (9) лежат в основе теории лазерного зондирования океана и атмосферы и алгоритмов дистанционного определения их оптических характеристик. Эти формулы можно приспособить и для описания изображения рассеивающей среды, получаемого методом оптической когерентной томографии [22]. В установках ОКТ используются непрерывное излучение с фемтосекундными временами когерентности и интерферометрический способ определения глубины, с которой приходит обратно рассеянный сигнал. Оптические сигналы излучаются и принимаются торцом одномодового стекловолокна, что создает условия для проявления эффекта усиления обратного рассеяния [23], который не учитывается уравнением переноса. В связи с этим возникла необходимость в разработке волновой модели ОКТ-изображения [24] с использованием гибридного метода расчёта флуктуаций поля в среде с крупными и мелкими

неоднородностями диэлектрической проницаемости [25]. Было показано [24], что системе ОКТ с гетеродинамным приёмником можно поставить в соответствие эквивалентную систему импульсной локации с прямым детектированием сигнала, а специфику однопозиционного способа зондирования можно учесть, полагая в формуле (8)

$$A_b(\mathbf{r}_\perp, z) = \Sigma_R \Omega_R [2E^2(\mathbf{r}_\perp, z) - E_{ns}^2(\mathbf{r}_\perp, z)],$$

где E — полная облучённость среды в точке (\mathbf{r}_\perp, z) , E_{ns} — облучённость среды не рассеянным (прямым) светом источника.

Таким образом, теория распространения стационарного светового пучка в среде с узкой индикатрисой рассеяния может служить основой для расчёта изображений, формируемых активными системами наблюдения — как непрерывными, так и импульсными. Для анализа работы пассивных средств наблюдения необходимо также располагать моделью естественного светового поля.

3. Аналитические модели световых полей для задач теории видения

Теория распространения узких пучков света в средах с сильно анизотропным рассеянием основывается на уравнении переноса в малоугловом приближении [12]. Полагая, что пучок распространяется в направлении оси z , это уравнение можно записать в виде

$$\left[c^{-1} \frac{\partial}{\partial t} + n_z \frac{\partial}{\partial z} + \mathbf{n}_\perp \nabla_\perp + \alpha \right] I(\mathbf{r}_\perp, z, \mathbf{n}_\perp, t) = \sigma_1 \iint_{-\infty}^{\infty} I(\mathbf{r}_\perp, z, \mathbf{n}'_\perp, t) x_1(|\mathbf{n}_\perp - \mathbf{n}'_\perp|) d\mathbf{n}'_\perp, \quad (10)$$

где \mathbf{r}_\perp , \mathbf{n}_\perp — составляющие \mathbf{r} и \mathbf{n} в плоскости $z = \text{const}$, $n_z = (1 - n_\perp^2)^{1/2}$.

Строгое аналитическое решение уравнения (10) удаётся получить только в приближении $n_z \approx 1$, которое игнорирует эффекты разброса фотонов по пробегам (искажение светового сигнала при его прохождении через среду, формирование стационарного углового распределения яркости в непрерывном пучке на больших оптических расстояниях от источника). Первоначально это уравнение использовалось в теории многократного рассеяния быстрых заряженных частиц в веществе [26–29]; с его помощью было найдено выражение для углового распределения частиц в бесконечно широком пучке [26, 27] и исследованы функции типа $\iint_{-\infty}^{\infty} I(x, y, z, n_x, n_y) dy dn_y$, характеризующие структуру тонкого пучка [28]. Решение уравнения (10) при $n_z = 1$ и произвольном граничном условии для яркости на апертуре излучателя $I(\mathbf{r}_\perp, 0, \mathbf{n}_\perp) = I_0(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{n}_\perp)$ получено в работе [3] и впоследствии обобщено для стратифицированной мутной среды [30]. Как следует из этого решения, распределение облучённости $E(\mathbf{r}_\perp, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} I d\mathbf{n}_\perp$ в поперечном сечении светового пучка на выходе слоя мутной среды с узкой индикатрисой рассеяния $x_1(\gamma)$ и оптическими параметрами $\alpha(z)$, $\sigma_1(z)$, $\kappa_1(z) = \alpha - \sigma_1$ выражается в спектральной форме

$$E(\mathbf{r}_\perp, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(\mathbf{k}, z) T(k, z) \exp(-\tau_k + i\mathbf{k}\mathbf{r}_\perp) d\mathbf{k} \quad (11)$$

через функции

$$F = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} I_0(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{n}_\perp) \exp[-i\mathbf{k}(\mathbf{r}_\perp + z\mathbf{n}_\perp)] d\mathbf{r}_\perp d\mathbf{n}_\perp,$$

$$T = \exp\left[-\int_0^z \sigma_1(z-z')[1 - x_S(kz')] dz'\right], \quad (12)$$

$$\tau_k = \int_0^z \kappa_1(z') dz', \quad x_S(p) = 2\pi \int_0^\infty x_1(\gamma) J_0(p\gamma) \gamma d\gamma,$$

первая из которых (F) определяет структуру пучка на расстоянии z от источника в абсолютно прозрачной среде, а вторая (T) представляет собой частотно-контрастную характеристику слоя мутной среды, через который прошёл пучок.

Уравнение (10) послужило "мостиком", который впервые связал теорию переноса излучения с теорией распространения волн в случайно неоднородных средах. Эта связь выявилась при рассмотрении задачи о распространении волнового пучка $u = V(\mathbf{r}_\perp, z) \exp(i\omega t - ikz)$ в среде с крупномасштабными флуктуациями диэлектрической проницаемости $\varepsilon = \langle \varepsilon \rangle [1 + \delta\varepsilon(\mathbf{r}_\perp, z)]$, когда на основе уравнения

$$\left[\Delta_\perp - 2ik \frac{\partial}{\partial z} + k^2 \delta\varepsilon \right] V = 0$$

для корреляционной функции поля

$$F(\mathbf{r}_\perp, z, \rho_\perp) = \left\langle V\left(\mathbf{r}_\perp + \frac{\rho_\perp}{2}, z\right) V^*\left(\mathbf{r}_\perp - \frac{\rho_\perp}{2}, z\right) \right\rangle \quad (13)$$

было получено уравнение вида [16, 17]

$$\left\{ \nabla_{\mathbf{r}_\perp} \nabla_{\rho_\perp} - ik \frac{\partial}{\partial z} - ik^2 [b(0) - b(\rho_\perp)] \right\} F = 0,$$

$$b(\rho_\perp) = \frac{k}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \delta\varepsilon(\mathbf{r}_\perp + \rho_\perp, z + \xi) \delta\varepsilon(\mathbf{r}_\perp, z) \rangle d\xi,$$

$$k = \omega \frac{\sqrt{\langle \varepsilon \rangle}}{c}.$$

При этом выяснилось, что фурье-образ корреляционной функции

$$I(\mathbf{r}_\perp, z, \mathbf{n}_\perp) = \frac{1}{\lambda^2} \iint_{-\infty}^{\infty} F(\mathbf{r}_\perp, z, \rho_\perp) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{n}_\perp \rho_\perp) d\rho_\perp,$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad (14)$$

удовлетворяет уравнению (10) с коэффициентом $n_z = 1$, описывающему поле излучения в среде с оптическими характеристиками

$$x_1(n_\perp) = \frac{2\pi}{\lambda^2 b(0)} \int_0^\infty b(\rho_\perp) J_0(kn_\perp \rho_\perp) \rho_\perp d\rho_\perp,$$

$$\sigma_1 = kb(0), \quad \kappa_1 = 0.$$

Это означало, что математический аппарат теории переноса излучения можно использовать для анализа влияния случайно-неоднородной среды на корреляционные и энергетические характеристики волнового пучка с учётом его дифракционного уширения, если определять яркость не энергетически (как поток излучения через

единичную площадку в единичном телесном угле), а с помощью соотношения (14).

Влияние разброса фотонов по пробегам на характеристики нестационарных световых полей исследовалось с помощью уравнения типа Фоккера – Планка [12]:

$$\left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + n_z \frac{\partial}{\partial z} + \mathbf{n}_\perp \nabla_\perp + \kappa_1 - \frac{d_2}{4} \sigma_1 \Delta_{\mathbf{n}_\perp} \right] I(\mathbf{r}_\perp, z, \mathbf{n}_\perp, t) = 0 \quad (15)$$

с коэффициентом $n_z = 1 - n_\perp^2/2$. Уравнение (15) следует из (10) при условии малости ширины индикатрисы рассеяния по сравнению с шириной углового распределения яркости и содержит только интегральный параметр индикатрисы $d_2 = 2\pi \int_0^\pi \gamma^2 x_1(\gamma) \sin \gamma d\gamma$. На основе уравнения (15) была развита теория многократного рассеяния синусоидально модулированных пучков света [31] и показано, что синусоидальная составляющая поля излучения ведёт себя подобно волне со специфическими дисперсионными свойствами. Это уравнение использовалось для анализа пространственно-временной структуры импульсного пучка света [32] и построения простых аналитических моделей стационарных полей излучения, формируемых источниками различного вида в сильнопоглощающих средах с узкими индикатрисами рассеяния [33].

Поле излучения δ -импульсного источника $Q(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t) = \bar{Q}(\mathbf{r}, \mathbf{n}) \delta(t)$ в мутной среде с показателем поглощения κ_1 выражается в виде

$$I = \frac{1}{2\pi} \int \bar{I}(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \kappa_1 + i \frac{\omega}{c}) \exp(i\omega t) d\omega$$

через решение уравнения переноса $\bar{I}(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \kappa_1)$ со стационарным источником $\bar{Q}(\mathbf{r}, \mathbf{n})$. Поэтому интегральные параметры импульсного сигнала — среднее время его распространения \bar{t} и характерная длительность Δt , могут быть найдены посредством дифференцирования $\bar{I}(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \kappa_1)$ по параметру κ_1 :

$$\bar{t} = \frac{\int t I dt}{\int I dt} = -\frac{1}{c} \frac{d \ln \bar{I}}{d \kappa_1}, \quad (16)$$

$$(\Delta t)^2 = \frac{\int (t - \bar{t})^2 I dt}{\int I dt} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \ln \bar{I}}{d \kappa_1^2}. \quad (17)$$

Благодаря соотношениям (16), (17) указанные модели стационарных полей излучения оказались весьма полезными и для теории распространения импульсных сигналов в мутной среде.

Пространственная структура узкого пучка света описывается уравнением (15) с большой погрешностью. Поэтому для целого ряда приложений представляет интерес уравнение (10) с коэффициентом $n_z = 1 - n_\perp^2/2$, которое лишено указанного недостатка. На основе этого уравнения была развита теория распространения плоской импульсной волны в турбулентной среде [34]. Получено также его приближённое решение с точечным мононаправленным δ -импульсным источником [35]. Анализ этого решения, в частности, показал, что временной момент (17) определяется из уравнения (15) со значительной погрешностью и зависит не только от дисперсии индикатрисы рассеяния d_2 , но и от параметра

$$g = \frac{2\pi}{d_2^2} \int_0^\pi \gamma^4 x_1(\gamma) \sin \gamma d\gamma,$$

характеризующего её форму.

Отсутствие точного решения уравнения (10) с коэффициентом $n_z = 1 - n_\perp^2/2$ не исключает возможности нахождения интегральных характеристик его точного решения. Если в уравнении (10) перейти к безразмерным переменным [34] $s = ct$, $\zeta = ct - z$, то для моментов продольного распределения яркости в импульсном объёме

$$M_m(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{n}_\perp, s) = \int_0^\infty \zeta^m I(\mathbf{r}_\perp, \zeta, \mathbf{n}_\perp, s) d\zeta, \quad m = 0, 1, \dots \quad (18)$$

получаются уравнения [36]

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial s} + \mathbf{n}_\perp \nabla_\perp + \alpha \right) M_m(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{n}_\perp, s) = \\ & = \sigma_1 \iint_{-\infty}^{\infty} M_m(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{n}'_\perp, s) x_1(|\mathbf{n}_\perp - \mathbf{n}'_\perp|) d\mathbf{n}'_\perp + \frac{m}{2} n_\perp^2 M_{m-1}, \end{aligned} \quad (19)$$

которые решаются точно, поскольку они идентичны стационарному уравнению (10) с коэффициентом $n_z = 1$. Момент M_0 непосредственно находится заменой $z \rightarrow s$, $I \rightarrow M_0$, $I_0 \rightarrow M_0(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{n}_\perp, 0)$, а расчёт последующих моментов требует решения УПИ с объёмными источниками. При этом временные моменты поля легко выражаются через пространственные (M_m), если форма светового импульса мало изменяется при его смещении на собственную длину.

4. Флуктуирующие световые поля и изображения

Случайные искажения изображений возникают при наблюдении объектов через турбулентную атмосферу, взволнованную водную поверхность или мутную среду, оптические параметры которой случайным образом изменяются в пространстве (при наблюдении Земли из космоса роль такой среды может играть слой разорванной облачности). Для анализа влияния турбулентности на изображения в основном используется волновая теория, а в других указанных случаях — методы и аппарат теории переноса излучения.

Теория инструментального видения через взволнованную водную поверхность [37, 38] сходна с теорией подводного видения тем, что в обоих случаях сигналы от объекта и среды определяются из соотношений (4), (5). Влияние поверхности на изображение учитывается путём подстановки в эти соотношения полей $E^{(s,r)}$, найденных с учётом преломления света на границе раздела вода – воздух. Поля $E^{(s,r)}$ выражаются через яркость входящего в воду излучения и функцию Грина уравнения переноса в малоугловом приближении. В результате находится общее выражение для случайной реализации изображения, которое и используется для анализа его статистических характеристик. При этом заново решать само уравнение переноса не приходится.

Теория видения в мутных средах с флуктуирующими оптическими характеристиками требует получения качественно новых решений УПИ. Такие решения необходимы и для задач оптической диагностики подобных сред. Исследования по распространению света в мутных средах со случайно-неоднородными оптическими харак-

теристиками первоначально были связаны с задачами радиационного режима Земли [39]. При этом рассматривались достаточно простые модели рассеивающих объектов (однородный слой мутной среды с флуктуирующей оптической толщиной или плавно неоднородный слой). В дальнейшем получили развитие статистические модели переноса излучения в средах с трёхмерными неоднородностями концентрации рассеивающего и поглощающего вещества [40–43]. Наряду с моделями статистически среднего поля излучения разрабатывались модели его флуктуаций. В частности, были получены уравнения для расчёта средней яркости и функции пространственной корреляции яркости светового пучка на выходе слоя мутной среды с узкой индикатрисой рассеяния и случайно-неоднородными показателями поглощения и рассеяния [41]. Эти уравнения позволили количественно описать эффект "просветления" среды, обусловленный флуктуациями её параметров, а также процессы случайной модуляции распределения яркости в узком световом пучке при его многократном прохождении через поглощающие неоднородности и "сглаживания" возникающих флуктуаций яркости вследствие многократного рассеяния света "вперёд". Была показана возможность неограниченного возрастания относительных флуктуаций яркости при увеличении толщины рассеивающего слоя и возможность установления стационарного режима флуктуаций (их насыщения) в зависимости от параметров среды [41, 44, 45].

Указанные уравнения послужили основой для построения статистической модели ОКТ — изображения слоистой мутной среды с трёхмерными неоднородностями показателя поглощения $\kappa = \bar{\kappa}(z) + \tilde{\kappa}(\mathbf{r}_\perp, z)$ и обратного рассеяния $\sigma_b = \bar{\sigma}(z) + \tilde{\sigma}(\mathbf{r}_\perp, z)$ ($\bar{\kappa} = \langle \kappa \rangle$, $\bar{\sigma} = \langle \sigma_b \rangle$). Были найдены выражения для пространственной корреляционной функции $B_P(\mathbf{p}, z_1, z_2)$ относительных флуктуаций мощности $P(\mathbf{r}_\perp, z)$ томографического сигнала, приходящего из двух различных точек среды с координатами $\mathbf{r}_\perp + \mathbf{p}/2, z_1$ и $\mathbf{r}_\perp + \mathbf{p}/2, z_2$, и показано, что флуктуации параметров среды приводят к появлению в её изображении пространственного шума со специфическими свойствами ("теневого" шума) [46, 47]. Этот шум возникает в результате неоднородного затенения каждого из слоев среды сгустками поглощающего или рассеивающего вещества, находящимися в вышележащих слоях. При этом флуктуации κ проявляются только в виде теневого шума, а флуктуации σ_b — в виде теневого шума и изображения самих неоднородностей σ_b . На рисунках 2 и 3 приведены примеры расчёта функции $B_P(\mathbf{p}, z_1, z_2)$ для случаев, когда флуктуирует только один из этих параметров. Вычисления проводились по формулам

$$B_P(\mathbf{p}, z_1, z_2) = \left\{ \left[1 - \frac{4A_\sigma(\mathbf{p}, z_m)}{\bar{\sigma}(z_m) - 2A_\sigma(0, z_m)} + \frac{B_\sigma(\mathbf{p}, z, \xi)}{[\bar{\sigma}(z_1) - 2A_\sigma(0, z_1)][\bar{\sigma}(z_2) - 2A_\sigma(0, z_2)]} \right] \times \exp \left[\int_0^{z_m} [4A_\kappa(\mathbf{p}, z') + 16A_\sigma(\mathbf{p}, z')] dz' \right] \right\} - 1. \quad (20)$$

$$A_\kappa(\mathbf{p}, z) = \int_{-\infty}^{\infty} B_\kappa(\mathbf{p}, z, \xi) d\xi, \quad (21)$$

$$A_\sigma(\mathbf{p}, z) = \int_{-\infty}^{\infty} B_\sigma(\mathbf{p}, z, \xi) d\xi,$$

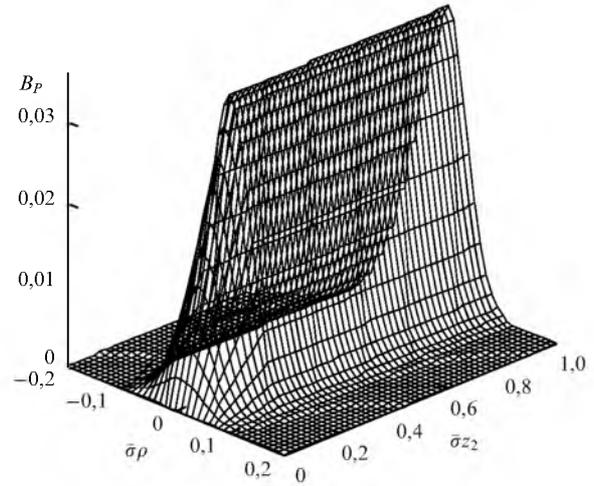


Рис. 2. Функция пространственной корреляции B_P относительных флуктуаций мощности томографического сигнала в среде с флуктуирующим показателем поглощения в зависимости от переменных $\bar{\sigma}_\rho$, $\bar{\sigma}_{z_2}$ при значении $\bar{\sigma}_{z_1} = 0,2$. Дисперсия флуктуаций показателя поглощения $d_\kappa = 0,5\sigma^2$, радиус корреляции $\rho_\kappa = 0,05/\bar{\sigma}$.

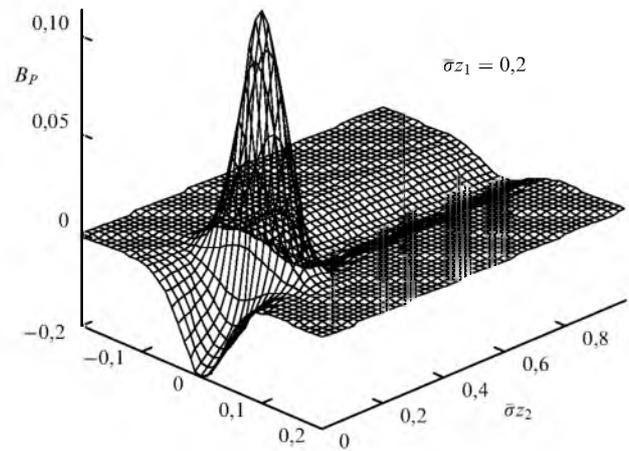


Рис. 3. То же, что и на рис. 2 для среды с флуктуирующим показателем обратного рассеяния при $d_\sigma = 0,125\sigma^2$, $\rho_\sigma = 0,05/\bar{\sigma}$.

$$B_\kappa(\mathbf{p}, z, \xi) = \left\langle \tilde{\kappa} \left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{p}}{2}, z + \frac{\xi}{2} \right) \tilde{\kappa} \left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{2}, z - \frac{\xi}{2} \right) \right\rangle, \quad (22)$$

$$B_\sigma(\mathbf{p}, z, \xi) = \left\langle \tilde{\sigma} \left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{p}}{2}, z + \frac{\xi}{2} \right) \tilde{\sigma} \left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{2}, z - \frac{\xi}{2} \right) \right\rangle, \quad (23)$$

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}, \quad \xi = z_1 - z_2, \quad z_m = z - \frac{1}{2}|\xi|, \quad (24)$$

которые применимы при условии малости ширины ФРТ по сравнению с характерным горизонтальным размером неоднородностей. Как видно из рисунков, флуктуации показателя поглощения приводят к появлению шумов, корреляционная функция которых всюду положительна и имеет вид гребня. В случае, когда флуктуирует показатель обратного рассеяния, корреляционная функция может менять знак, поскольку изображение каждой из неоднородностей и её тень образуют единый образ со знакопеременными вариациями яркости.

Выводы теории качественно подтверждены результатами экспериментов на модельной мутной среде с поглощающими неоднородностями и результатами корреляционной обработки томограмм биотканей. На

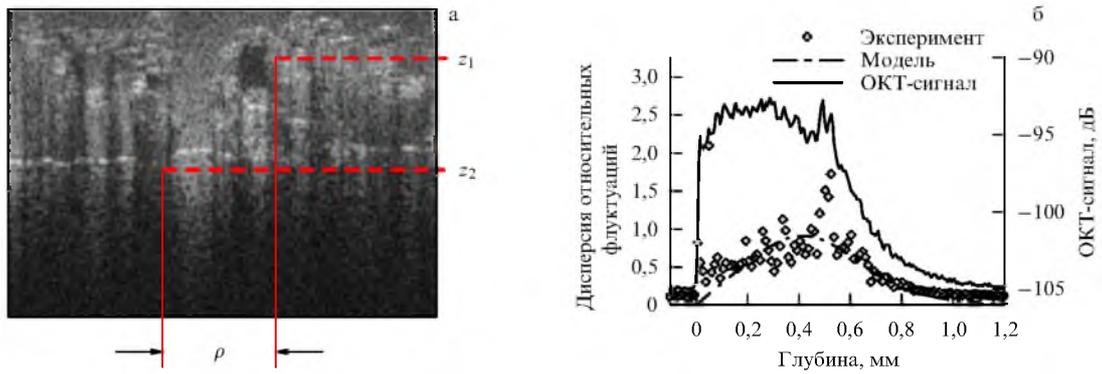


Рис. 4. Томограмма модельной мутной среды (а) и результаты ее анализа (б). Сплошная кривая — средняя мощность ОКТ-сигнала в зависимости от глубины, квадраты — дисперсия относительных флуктуаций измеренного сигнала, штриховая кривая — теоретическая зависимость дисперсии флуктуаций от глубины.

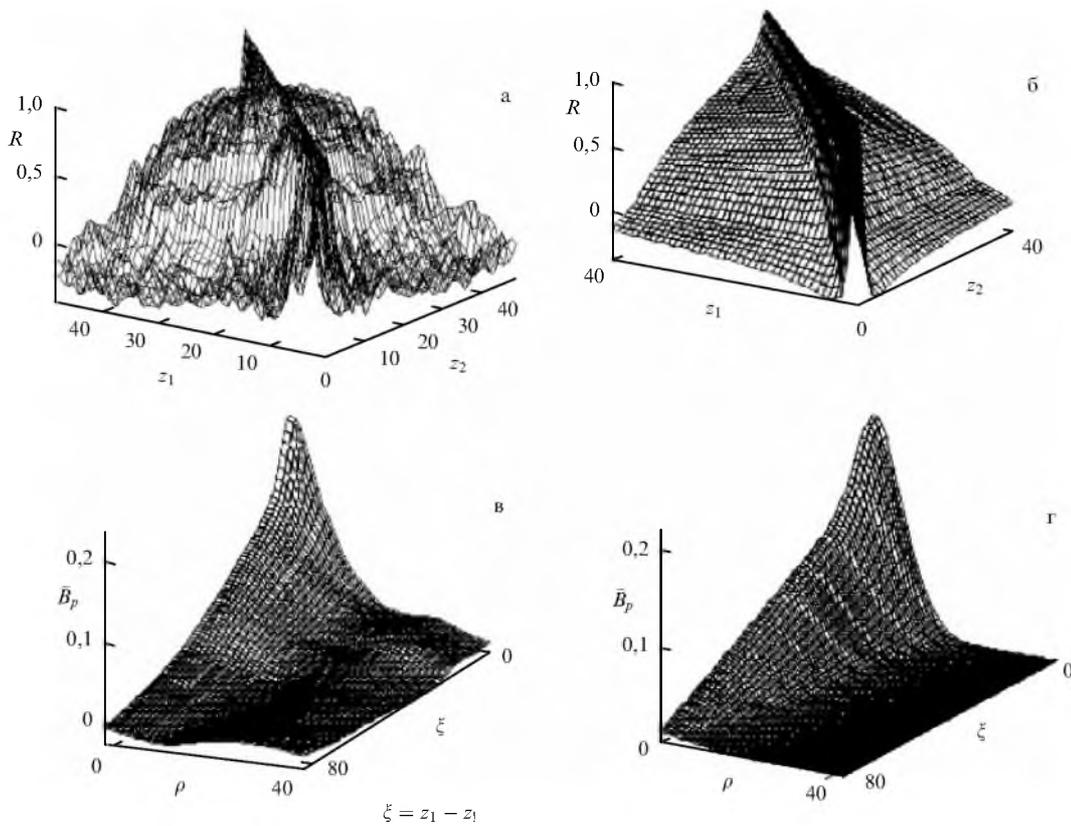


Рис. 5. Корреляционные характеристики томограммы, приведенной на рис. 4: (а, б) коэффициент продольной корреляции $R(z_1, z_2)$ шумов изображения, (в, г) усредненная по глубине функция пространственной корреляции шумов $\bar{B}_P(\rho, \xi)$. На рисунках а и в представлены результаты обработки томограммы, на рис. б, г — теоретические результаты.

рисунке 4 приведён пример сопоставления теоретической и экспериментальной зависимостей дисперсии относительных флуктуаций мощности томографического сигнала $d_P(z) = B_P(0, z, z)$ от глубины z , с которой он приходит. В процессе обработки томограмм наряду с зависимостью $d_P(z)$ определялись функции

$$R(z_1, z_2) = \frac{B_P(0, z_1, z_2)}{\sqrt{d_P(z_1)}\sqrt{d_P(z_2)}},$$

$$\bar{B}_P(\rho, \xi) = \frac{1}{z_0} \int_0^{z_0} B_P\left(\rho, z + \frac{\xi}{2}, z - \frac{\xi}{2}\right) dz$$

— коэффициент продольной корреляции относительных флуктуаций сигнала и их корреляционная функция,

усреднённая по толщине z_0 исследуемого слоя среды. Приведённые на рис. 5 данные иллюстрируют возможность подгонки теоретических результатов под экспериментальные путём перебора численных значений параметров среды, входящих в расчётные формулы, а следовательно, принципиальную возможность их определения методом ОКТ.

5. Заключение

В этом докладе мы рассказали о задачах теории видения, в которых эффективно используется малоугловое приближение теории переноса излучения. Перечень таких задач можно было бы продолжить. Вместе с тем следует

иметь в виду, что точность этого приближения сильно зависит от ширины индикатрисы рассеяния среды и её поглощательной способности. В морской воде, для которой альбеда однократного рассеяния (A) обычно не превышает 0,9, это приближение хорошо работает при оптических глубинах до $\tau \sim 15$, а в биотканях с параметром $A \sim 0,99$ диффузная и направленная составляющие облучённости в узком световом пучке становятся равными друг другу уже при $\tau \sim 5$, в связи с чем возникает необходимость в использовании гибридных моделей светового поля [12, 48], учитывающих эффекты многократного рассеяния света на большие углы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 07-02-01179, и гранта "Ведущие научные школы России" НШ-6043.2006.2.

Список литературы

- Koshmider H *Beitrag Phys. Atm.* **12** (3) 171 (1925)
- Duntley S Q *J. Opt. Soc. Am.* **53** 214 (1963)
- Долин Л С *Изв. вузов. Радиофизика* **7** 380 (1964)
- Браво-Животовский Д М, Долин Л С, Лучинин А Г, Савельев В А *Изв. АН СССР. Сер. физ. атм. и океана* **5** 160 (1969)
- Левин И М *Изв. АН СССР. Сер. физ. атм. и океана* **5** 62 (1969)
- Браво-Животовский Д М, Долин Л С, Лучинин А Г, Савельев В А *Изв. АН СССР. Сер. физ. атм. и океана* **5** 672 (1969)
- Браво-Животовский Д М и др. *Изв. АН СССР. Сер. физ. атм. и океана* **7** 1143 (1971)
- Ермаков Б В, Ильинский Ю А *Изв. вузов. Радиофизика* **12** 694 (1969) [Ermakov B V, Il'inskii Yu A *Radiophys. Quantum Electron.* **12** 554 (1969)]
- Долин Л С, Савельев В А *Изв. АН СССР. Сер. физ. атм. и океана* **7** 505 (1971)
- Mertens L E, Replogle F S (Jr.) *J. Opt. Soc. Am.* **67** 1105 (1977)
- Монин А С (Ред.) *Оптика океана* (М.: Наука, 1983)
- Зеге Э П, Иванов А П, Кацев И Л *Перенос изображения в рассеивающей среде* (Минск: Наука и техника, 1985) [Zege E P, Ivanov A P, Katsev I L *Image Transfer through a Scattering Medium* (Berlin: Springer-Verlag, 1991)]
- Долин Л С, Левин И М *Справочник по теории подводного видения* (Ленинград: Гидрометеиздат, 1991)
- Dolin L S, Levin I M "Optics underwater", in *Encyclopedia of Applied Physics* Vol. 12 (Ed. G L Trigg) (New York: VCH Publ., 1995)
- Долин Л С *Изв. вузов. Радиофизика* **7** 559 (1964)
- Долин Л С, Дисс. ... канд. физ.-мат. наук (Горький: НИРФИ, 1966)
- Долин Л С *Изв. вузов. Радиофизика* **11** 840 (1968) [Dolin L S *Radiophys. Quantum Electron.* **11** 486 (1968)]
- Рытов С М, Кравцов Ю А, Татарский В И *Введение в статистическую радиофизику* Ч. 2 *Случайные поля* (М.: Наука, 1978) [Rytov S M, Kravtsov Yu A, Tatarskii V I *Principles of Statistical Radiophysics* Vol. 3 (Berlin: Springer-Verlag, 1989)]
- Барабаненков Ю Н *УФН* **117** 49 (1975) [Barabanenkov Yu N *Sov. Phys. Usp.* **18** 673 (1975)]
- Апресян Л А, Кравцов Ю А *Теория переноса излучения* (М.: Наука, 1983)
- Соболев В В *Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет* (М.: Гостехиздат, 1956) [Sobolev V V *A Treatise on Radiative Transfer* (Princeton, NJ: Van Nostrand, 1963)]
- Huang D et al. *Science* **254** 1178 (1991)
- Кравцов Ю А, Саичев А И *УФН* **137** 501 (1982) [Kravtsov Yu A, Saichev A I *Sov. Phys. Usp.* **25** 494 (1982)]
- Долин Л С *Изв. вузов. Радиофизика* **41** 1258 (1998) [Dolin L A *Radiophys. Quantum Electron.* **41** 850 (1998)]
- Виноградов А Г, Кравцов Ю А *Изв. вузов. Радиофизика* **16** 1055 (1973) [Vinogradov A G, Kravtsov Yu A *Radiophys. Quantum Electron.* **16** 811 (1973)]
- Компанец А С *ЖЭТФ* **15** 235 (1945)
- Moliere V G *Z. Naturforsch.* **A 3** 78 (1948)
- Компанец А С *ЖЭТФ* **17** 1059 (1947)
- Scott W T, Snyder H S *Phys. Rev.* **78** 223 (1950)
- Долин Л С, Савельев В А *Изв. вузов. Радиофизика* **22** 1310 (1979) [Dolin L S, Savel'ev V A *Radiophys. Quantum Electron.* **22** 911 (1979)]
- Лучинин А Г *Изв. вузов. Радиофизика* **14** 1925 (1971) [Luchinin A G *Radiophys. Quantum Electron.* **14** 1507 (1971)]
- Ремизович В С, Рогозкин Д Б, Рязанов М И *Изв. АН СССР. Сер. физ. атм. и океана* **19** 1053 (1983)
- Долин Л С *АН СССР.* **260** 1344 (1981) [Dolin L S *Sov. Phys. Dokl.* **26** 976 (1981)]
- Furutsu K J. *Math. Phys.* **20** 617 (1979)
- Долин Л С *Изв. АН СССР. Сер. физ. атм. и океана* **16** 55 (1980) [Dolin L S *Изв. Acad. Sci. USSR. Atm. Oceanic Phys.* **16** 34 (1980)]
- Долин Л С, Препринт № 587 (Н. Новгород: ИПФ РАН, 2001)
- Лучинин А Г *Изв. АН СССР. Сер. физ. атм. и океана* **15** 770 (1979)
- Вебер В Л *Изв. вузов. Радиофизика* **22** 989 (1979) [Veber V L *Radiophys. Quantum Electron.* **22** 684 (1979)]
- Мулламаа Ю-А Р и др. *Стохастическая структура полей облачности и радиации* (Тарту: Изд-во АН ЭССР, 1972)
- Боровой А Г *АН СССР* **276** 1374 (1984) [Borovoi A G *Sov. Phys. Dokl.* **29** 490 (1984)]
- Долин Л С *АН СССР* **277** 77 (1984) [Dolin L S *Sov. Phys. Dokl.* **29** 544 (1984)]
- Fukshansky L J. *Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* **38** 389 (1987)
- Клиорин Н И и др. *Изв. вузов. Радиофизика* **32** 1072 (1989) [Kliorin N I et al. *Radiophys. Quantum Electron.* **32** 793 (1989)]
- Долин Л С *Изв. вузов. Радиофизика* **49** 799 (2006) [Dolin L S *Radiophys. Quantum Electron.* **49** 719 (2006)]
- Долин Л С, Щегольков Ю Б, Щегольков Д Ю *Изв. вузов. Радиофизика* **51** 247 (2008) [Dolin L S, Shchegol'kov Yu B, Shchegol'kov D Yu *Radiophys. Quantum Electron.* **51** 222 (2008)]
- Долин Л С, Сергеева Е А, Турчин И В *Квантовая электроника* **38** 543 (2008) [Dolin L S, Sergeeva E A, Turchin I V *Quantum Electron.* **38** 543 (2008)]
- Долин Л С, Турчин И В, Препринт № 750 (Н. Новгород: ИПФ РАН, 2007)
- Геликонов Г В, Долин Л С, Сергеева Е А, Турчин И В *Изв. вузов. Радиофизика* **46** 628 (2003) [Gelikonov G V, Dolin L S, Sergeeva E A, Turchin I V *Radiophys. Quantum Electron.* **46** 565 (2003)]