

*П. Я. Уфимцев*

**МЕТОД КРАЕВЫХ ВОЛН  
В ФИЗИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ  
ДИФРАКЦИИ**

„СОВЕТСКОЕ РАДИО“



П. Я. УФИМЦЕВ

МЕТОД КРАЕВЫХ ВОЛН  
В ФИЗИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ  
ДИФРАКЦИИ

С ПРЕДИСЛОВИЕМ  
*Л. А. Вайнштейна*

ИЗДАТЕЛЬСТВО „СОВЕТСКОЕ РАДИО“

---

МОСКВА — 1962

Книга представляет собой монографию, написанную по результатам работ автора. В ней исследуется дифракция плоских электромагнитных волн на идеально проводящих телах, поверхность которых имеет изломы. Линейные размеры тел предполагаются большими по сравнению с длиной волны. Разработанный в книге метод учитывает возмущение поля вблизи излома поверхности и позволяет существенно уточнить приближения геометрической и физической оптики. Найденны выражения для рассеянного поля в дальней зоне. Выполнен численный расчет характеристик рассеяния и проведено их сравнение с результатами строгой теории и с экспериментом.

Книга предназначена для физиков и радиотехников, интересующихся дифракционными явлениями, а также для студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся по антеннам и распространению радиоволн.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Прежде всего следует пояснить термин «физическая теория дифракции». Для этого остановимся кратко на историческом развитии дифракционной теории.

Если рассмотреть, например, падение плоской электромагнитной волны на хорошо проводящее тело, все размеры которого велики по сравнению с длиной волны, то простейшее решение этой задачи можно получить с помощью *геометрической оптики*. Известно, что в ряде случаев геометрическую оптику следует дополнить законами *физической оптики*, связанной с именами Гюйгенса, Френеля, Кирхгофа и Котлера, используемой наряду с уравнениями поля предположение о том, что вблизи отражающего тела справедлива геометрическая оптика.

На рубеже XX века появился новый раздел математической физики — *математическая теория дифракции*, были получены строгие решения задач о дифракции на клине, сфере и бесконечном цилиндре. Впоследствии к этому прибавились другие строгие решения, однако общее число решений сравнительно невелико. Для достаточно коротких волн (по сравнению с размерами тела или другими характерными расстояниями) эти решения, как правило, неэффективны; прямые численные методы здесь также становятся непригодными.

Отсюда возникает интерес к приближенным (асимптотическим) методам, которые позволили бы рассмотреть дифракцию достаточно коротких волн на различных телах и приводили бы к более точным и надежным количественным выводам, чем геометрическая или физическая оптика. Очевидно, что эти методы должны как-то учитывать наиболее важные результаты, добытые математической теорией дифракции.

В «геометрической теории дифракции», предложен-

ной Келлером, как раз используются и обобщаются результаты, полученные в математической теории дифракции коротких волн. Здесь выдвигается на первый план концепция дифракционных лучей, высказанная скорее как физическая гипотеза и не пригодная для представления поля во всем пространстве: там, где происходит формирование дифракционного поля (каустика, граница света и тени и т. д.), о лучах говорить нельзя и необходима волновая трактовка.

Сказанное выше делает понятным появление большого числа работ, в которых дифракция коротких волн рассматривается иными методами. Применительно к отражающим телам с резкими изломами поверхности или с острыми краями (лента, диск, конечный цилиндр или конус и т. п.) здесь прежде всего следует отметить работы П. Я. Уфимцева, которые начали появляться в печати в 1957 г. На основе этих работ и написана данная книга.

П. Я. Уфимцев исследует характеристики рассеяния на таких телах, принимая во внимание наряду с токами, возбуждаемыми на поверхности тела по законам геометрической оптики («равномерная часть тока» по его терминологии), дополнительные токи, возникающие вблизи ребер или краев, имеющие характер краевых волн и быстро ослабевающие при удалении от ребра или края («неравномерная часть тока»). Поле излучения, создаваемое дополнительными токами, можно найти, сравнивая ребро или край с ребром бесконечного клина или краем полуплоскости. В некоторых случаях приходится учитывать дифракционное взаимодействие различных краев, т. е. то обстоятельство, что волна, создаваемая одним краем и распространяющаяся мимо другого края, дифрагирует на нем (вторичная дифракция).

Такой подход к дифракции коротких волн обладает большой физической наглядностью и позволяет получить довольно простые приближенные выражения для поля, рассеянного различными металлическими телами. Этот подход можно назвать *физической теорией дифракции*, причем это название применимо ко многим работам по дифракции коротких волн, в которых математические трудности обходят с помощью физических соображений.

Ясно, что физическая теория дифракции есть шаг вперед по сравнению с физической оптикой, которая вообще пренебрегает дополнительными (краевыми) токами. Результаты, полученные в данной книге, показывают, что при заданной длине волны физическая теория дифракции дает лучшую точность, чем физическая оптика, а при заданной точности физическая теория дифракции позволяет продвинуться в более длинноволновый диапазон и, в частности, получить ряд результатов, интересных для радиолокации, где отношения размеров тел к длине волны не достигают таких больших значений, как в оптике.

Вместе с тем физическая теория дифракции охватывает ряд интересных явлений, совершенно чуждых физической оптике. Так, в ряде случаев дополнительные токи дают не малую поправку к полю излучения, а основной вклад в это поле (см. особенно гл. IV и V). Если плоская волна дифрагирует на тонком прямом проводе (пассивном вибраторе), то дополнительный ток спадает весьма медленно при удалении от конца провода, поэтому решение получается суммированием всей цепочки дифракционных волн (вторичных, третичных и т. д.), последовательно возникающих вследствие отражения токов от концов провода, и имеет резонансный характер. Так решена в гл. VII задача о рассеянии плоской волны на проводе конечной длины, являющаяся дифракционной задачей несколько необычного типа: полученное решение применимо при условии, что диаметр провода мал по сравнению с длиной волны и длиной провода, а отношение длины провода к длине волны произвольно.

Окончательные формулы, которые выведены в данной книге и применены для расчетов, не являются асимптотическими в строгом смысле этого слова. Поэтому естественно поставить вопрос: чем будут отличаться от них последовательные асимптотические формулы, когда их, наконец, получают в математической теории дифракции? Можно сказать заранее, что главный член асимптотического разложения не будет в общем случае совпадать с решением, полученным на основе физических соображений: в главном члене будут фигурировать другие (как правило, более сложные) медленно меняющиеся функции, определяющие спадание

полей и токов при удалении от ребер и краев, а также дифракционное взаимодействие краев и затенение краевых волн. Однако уточнение медленно меняющихся функций в выражении для дифракционного поля не может серьезно повлиять на количественные соотношения: это видно из сравнения результатов, полученных в данной книге, с расчетами по строгой теории и другим приближенным формулам, а также с результатами измерений.

Соотношения, полученные в данной книге, должны также помочь разработке асимптотических методов в математической теории дифракции, поскольку они подсказывают характер аппроксимаций и структуру искомого решения.

*Л. А. Вайнштейн*

## ВВЕДЕНИЕ

В последние годы заметно повысился интерес к дифракции электромагнитных волн на металлических телах сложной формы. Такие дифракционные задачи при строгой математической формулировке сводятся к интегрированию волнового уравнения или уравнений Максвелла с учетом граничных условий на поверхности тела. Однако найти решения в случае реальных тел сложной конфигурации не удается. Это может быть сделано лишь для тел простейшей геометрической формы — таких, как бесконечно длинный цилиндр, сфера, диск и т. д. При этом оказывается, что полученные решения позволяют эффективно вычислить дифракционное поле лишь при условии, если длина волны больше или сравнима с конечными размерами тела. В «квазиоптическом» случае, когда длина волны много меньше размеров тела, строгие решения обычно теряют свою практическую ценность, и их необходимо дополнять трудоемкими и сложными асимптотическими исследованиями. Численные методы решения граничных задач здесь также становятся неэффективными. Поэтому в теории дифракции большое значение приобретают приближенные методы, позволяющие изучить дифракцию достаточно коротких волн на различных телах.

Полё, рассеянное данным телом, может быть вычислено приближенно с помощью законов геометрической оптики (отражательные формулы, см. например [1—3]), принципа Гюйгенса — Френеля, формул Кирхгофа и Котлера [3—6].

Наиболее употребительным методом расчета в квазиоптическом случае является принцип Гюйгенса — Френеля в формулировке Кирхгофа и Котлера — так называемое приближение физической оптики. Суть этого метода можно сформулировать следующим образом.

Пусть плоская электромагнитная волна падает на какое-либо идеально проводящее тело, находящееся в свободном пространстве. В приближении физической оптики поверхностная плотность тока, индуцированного этой волной на освещенной части поверхности тела, принимается (в абсолютной системе единиц) равной

$$j^0 = \frac{c}{2\pi} [nH_0], \quad (A)$$

где  $c$  — скорость света в вакууме,  $n$  — внешняя нормаль к поверхности тела,  $H_0$  — магнитное поле падающей волны. На затененной стороне тела поверхностный ток предполагается равным нулю ( $j^0 = 0$ ). Формула (A) означает, что на каждом элементе освещенной поверхности тела возбуждается такой же ток, как на касательной к этому элементу идеально проводящей плоскости бесконечных размеров. Рассеянное поле, создаваемое током (A), находится затем с помощью уравнений Максвелла.

Очевидно, что в действительности ток, индуцируемый на поверхности тела, будет отличаться (вследствие искривления поверхности) от тока  $j^0$ . Точное выражение для плотности поверхностного тока имеет вид

$$j = j^0 + j^1, \quad (B)$$

где  $j^1$  есть поверхностная плотность дополнительного тока, обусловленного искривлением поверхности. Под искривлением поверхности мы понимаем любое ее отклонение от бесконечной плоскости (плавное искривление, излом, выступ, отверстие и т. д.). Если тело является выпуклым и гладким, а его размеры и радиусы кривизны велики по сравнению с длиной волны, то дополнительный ток сосредоточен, в основном, вблизи границы между освещенной и теневой частями поверхности тела. Если же тело имеет края, изломы или острия, то дополнительный ток возникает также вблизи них. Плотность дополнительного тока сравнима с плотностью  $j^0$ , как правило, лишь на расстояниях порядка длины волны от соответствующего края, излома или острия. Таким образом, если размеры тела значительно превышают длину волны, то дополнительные токи занимают сравнительно небольшую часть его поверхности.

Поскольку ток, возбуждаемый плоской волной на идеально проводящей плоскости, распределен по ней равномерно (его поверхностная плотность постоянна по абсолютной величине), то вектор  $j^0$  можно назвать «равномерной» частью поверхностного тока. Дополнительный ток  $j^1$ , обусловленный искривлением поверхности тела, мы будем в дальнейшем называть «неравномерной» частью тока. В приближении физической оптики учитывается только равномерная часть тока, поэтому неудивительно, что оно дает в ряде случаев неудовлетворительные результаты. При более точном расчете необходимо учитывать и неравномерную часть тока.

В предлагаемой книге изложены и систематизированы результаты автора, относящиеся к приближенному решению дифракционных задач. В основном эти результаты были кратко изложены в ряде статей [7—14]. Примерно в то же время появились работы других авторов, посвященные аналогичным задачам. Мы остановимся на них более подробно (в § 25) после того, как читатель привыкнет к понятиям, используемым в дифракционных задачах такого типа. Заметим лишь пока, что в этих работах применены, как правило, иные методы.

В книге рассматриваются задачи о дифракции плоских электромагнитных волн на выпуклых металлических телах, поверхность которых имеет изломы (ребра). Размеры тел предполагаются большими по сравнению с длиной волны, а их поверхность — идеально проводящей.

Очевидно, что если ребра удалены друг от друга достаточно далеко, то ток, текущий на малом элементе поверхности тела вблизи ее излома, можно приближенно считать таким же, как на соответствующем бесконечном двугранном угле (клине). Действительно в гл. I показано (см. также [5] § 20), что неравномерная часть тока на клине имеет характер краевой волны, которая быстро убывает с удалением от ребра. Поэтому можно считать, что неравномерная часть тока сосредоточена, в основном, вблизи излома. С помощью этого физически очевидного предположения вычислено поле, рассеянное лентой (гл. I), диском (гл. II), цилиндром конечной длины (гл. III) и некоторыми другими телами вращения (гл. IV).

При более точном расчете нужно, однако, иметь в виду, что истинное распределение тока вблизи краев тела отличается от распределения тока вблизи ребра клина. Действительно, краевая волна, соответствующая неравномерной части тока, распространяясь вдоль поверхности тела, достигает соседнего ребра и испытывает на нем дифракцию, возбуждая вторичные краевые волны. Последние в свою очередь порождают новые краевые волны и т. д. Если все размеры тела велики по сравнению с длиной волны, то, как правило, достаточно учесть только вторичную дифракцию. Это явление изучается в гл. V на примере ленты и диска.

В случае тонкого цилиндрического проводника конечной длины краевые волны тока убывают с удалением от каждого конца очень медленно. Поэтому здесь нельзя ограничиться учетом только вторичной дифракции, а необходимо рассматривать многократную дифракцию краевых волн. Этой задаче посвящена гл. VII.

Равномерная и неравномерная части тока являются не только вспомогательными понятиями, полезными при решении дифракционных задач. В гл. VI показано, что из полного рассеянного поля можно экспериментально выделить ту его часть, которая создается неравномерной частью тока. Там же доказывается, что явление деполяризации отраженного сигнала обусловлено *только* неравномерной частью тока.

Отметим следующую особенность метода, изложенного в книге. В нем широко используется физическое представление о неравномерной части тока, но нигде не приводятся ее явные математические выражения. Дело в том, что эта часть тока не выражается в общем случае через известные функции. Очевидно, что непосредственное интегрирование токов при вычислении рассеянного поля может привести лишь к весьма сложным и необозримым формулам. Поэтому мы находим рассеянное поле, созданное неравномерной частью тока, без ее непосредственного интегрирования на основании косвенных соображений (см. особенно гл. I—IV).

Метод, которым решаются дифракционные задачи в данной книге, можно кратко сформулировать следующим образом. Мы ищем приближенное решение дифракционной задачи для какого-либо тела, предвари-

тельно изучив дифракцию на его отдельных геометрических элементах. Например, для конечного цилиндра такими элементами являются: боковая поверхность как часть поверхности бесконечного цилиндра, каждое основание как часть плоскости, каждый отрезок ребра как край клина (кривизной ребра в первом приближении можно пренебречь). Изучив дифракцию на отдельных элементах тела, мы получаем представление о неравномерной части тока и о поле, которое ею излучается. Затем исследуется вторичная, третичная и т. д. дифракция, т. е. учитывается дифракционное взаимодействие различных элементов тела.

Данный метод апеллирует к физическим соображениям не только при постановке задачи, но и в процессе ее решения, и этим отличается от методов математической теории дифракции. Поэтому такой метод можно отнести к *физической* теории дифракции.

К физической теории дифракции можно также отнести целый ряд других дифракционных исследований, появившихся в последние 5—10 лет. Первой работой, в которой содержатся идеи физической теории дифракции, является, по-видимому, статья Шварцшильда [15], опубликованная еще в начале нынешнего столетия и посвященная дифракции на щели.

Следует отметить, что приближенные решения дифракционных задач были бы невозможны без использования результатов, полученных в математической теории дифракции. В частности, в данной книге широко используется строгое решение задачи о дифракции на клине, принадлежащее Зоммерфельду [16]; в гл. I это решение получено иным методом. Работы Фока [17, 18] послужили отправным пунктом многочисленных исследований по дифракции на гладких выпуклых телах. Строгое решение задачи о дифракции на открытом конце волновода [19] вскрывает механизм образования первичных дифракционных волн и их затенение противоположным краем волновода. Строгая теория, относящаяся к ленте и диску, позволяет выяснить точность приближенной теории (см. гл. V).

## ГЛАВА I

### ДИФРАКЦИЯ НА КЛИНЕ

Как уже говорилось во введении, рассеянное телом поле можно рассматривать в виде суммы полей, излучаемых равномерной и неравномерной частями поверхностного тока. Равномерная часть тока полностью определяется геометрией тела и магнитным полем падающей волны. Неравномерная часть в общем случае неизвестна. Однако приближенно можно считать, что вблизи излома выпуклой поверхности она будет такой же, как на соответствующем клине. Поэтому нам нужно сначала изучить дифракцию плоской электромагнитной волны на клине. Этой задаче и будет посвящена настоящая глава. Вначале мы рассмотрим строгое решение данной задачи (§ 1 и 2). Затем найдем ее решение в приближении физической оптики (§ 3). Разность этих решений определяет поле, создаваемое неравномерной частью тока (§ 4).

#### § 1. СТРОГОЕ РЕШЕНИЕ

Строгое решение задачи о дифракции плоской волны на клине впервые было получено Зоммерфельдом с помощью метода разветвленных волновых функций [16]. Впоследствии была изучена также дифракция цилиндрических и сферических волн на клине. Довольно обширную библиографию по этим вопросам можно найти, например, в статье Оберхеттингера [20]. Поскольку задача о дифракции на клине лежит в основе наших исследований, мы сочли целесообразным не только привести результаты ее строгого решения, но и дать их новый, более наглядный вывод. Идея этого вывода непосредственно вытекает из работы Зоммерфельда. Зоммерфельд нашел решение задачи в виде контурно-

го интеграла, а затем преобразовал его в ряд. Можно, однако, поступить наоборот: сначала найти решение в виде ряда, а затем уже дать его интегральное представление. Такой путь кажется нам более наглядным и изложен в данном параграфе. Необходимость в подробном выводе вызывается еще тем, что результаты Зоммерфельда [16] представлены в недостаточно четкой форме, затрудняющей их использование.

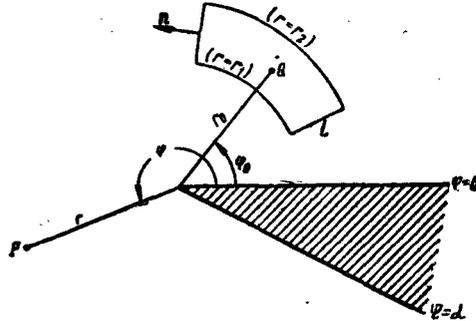


Рис. 1. Возбуждение клиновидной области линейным источником.  $Q$  — источник,  $P$  — точка наблюдения,  $L$  — контур интегрирования в формуле (1.10).

Итак, пусть в свободном пространстве (пустоте) находится идеально проводящий клин и параллельный его ребру источник  $Q$  цилиндрической волны (рис. 1). Введем цилиндрическую систему координат  $r, \varphi, z$  так, чтобы ось  $z$  совпала с ребром клина, а угол  $\varphi$  отсчитывался от освещенной грани. Внешний угол клина обозначим буквой  $\alpha$ , так что  $0 \leq \varphi \leq \alpha$ . Координаты источника  $Q$  обозначим через  $r_0, \varphi_0$ .

Рассмотрим два частных случая возбуждения электромагнитного поля. В первом случае оно возбуждается „нитью электрического тока“

$$j_z^e = -i\omega p_z \delta(r - r_0, \varphi - \varphi_0), \quad (1.01)$$

во втором случае — „нитью магнитного тока“

$$j_z^m = -i\omega m_z \delta(r - r_0, \varphi - \varphi_0). \quad (1.02)$$

Величины  $p_z$  и  $m_z$  означают здесь соответственно электрический и магнитный моменты нити на единицу ее

длины по оси  $z$ ,  $\omega$  — циклическую частоту ( $\omega = ck = c \frac{2\pi}{\lambda}$ ),  $\delta(r - r_0, \varphi - \varphi_0) = \delta(r - r_0) \delta[\varphi - \varphi_0]$  — двумерную дельта-функцию, удовлетворяющую условию

$$\iint \delta(r - r_0, \varphi - \varphi_0) r dr d\varphi = 1$$

при интегрировании по окрестности точки  $r_0, \varphi_0$ .

Здесь и в дальнейшем мы применяем абсолютную систему единиц (систему Гаусса), а зависимость от времени предполагаем в виде  $e^{-i\omega t}$ .

В первом случае „электрический“ вектор-потенциал  $A_z^e$  удовлетворяет уравнению (см., например, [4])

$$\Delta A_z^e + k^2 A_z^e = -\frac{4\pi}{c} j_z^e \quad (1.03)$$

и граничным условиям

$$A_z^e = 0 \quad \text{при } \varphi = 0 \text{ и } \varphi = \alpha. \quad (1.04)$$

Во втором случае „магнитный“ вектор-потенциал  $A_z^m$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta A_z^m + k^2 A_z^m = -\frac{4\pi}{c} j_z^m \quad (1.05)$$

и граничным условиям

$$\frac{\partial A_z^m}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{при } \varphi = 0 \text{ и } \varphi = \alpha. \quad (1.06)$$

Решение неоднородных уравнений (1.03) и (1.05) естественно искать в виде

$$A_z^e = \begin{cases} \sum_{s=1}^{\infty} a_s J_{\nu_s}(kr) H_{\nu_s}^{(1)}(kr_0) \sin \nu_s \varphi_0 \sin \nu_s \varphi & \text{при } r < r_0, \\ \sum_{s=1}^{\infty} a_s J_{\nu_s}(kr_0) H_{\nu_s}^{(1)}(kr) \sin \nu_s \varphi_0 \sin \nu_s \varphi & \text{при } r > r_0; \end{cases} \quad (1.07)$$

$$A_z^m = \begin{cases} \sum_{s=0}^{\infty} b_s J_{\nu_s}(kr) H_{\nu_s}^{(1)}(kr_0) \cos \nu_s \varphi_0 \cos \nu_s \varphi & \text{при } r < r_0, \\ \sum_{s=0}^{\infty} b_s J_{\nu_s}(kr_0) H_{\nu_s}^{(1)}(kr) \cos \nu_s \varphi_0 \cos \nu_s \varphi & \text{при } r > r_0, \end{cases} \quad (1.08)$$

$$\nu_s = s \frac{\pi}{\alpha}.$$

Произведения

$$\begin{aligned} J_{\nu_s}(kr) \sin \nu_s \varphi & \quad J_{\nu_s}(kr) \cos \nu_s \varphi \\ & \quad \text{и} \\ H_{\nu_s}^{(1)}(kr) \sin \nu_s \varphi & \quad H_{\nu_s}^{(1)}(kr) \cos \nu_s \varphi \end{aligned} \quad (1.09)$$

являются частными решениями уравнений (1.03) и (1.05) без правой части, удовлетворяющими граничным условиям (1.04) и (1.06). Остальные множители, входящие в формулы (1.07), (1.08), обеспечивают соблюдение принципа взаимности и непрерывность поля на дуге  $r=r_0$ . Функция Бесселя  $J_{\nu_s}(kr)$  входит в эти формулы при  $r < r_0$  потому, что она остается конечной при  $r \rightarrow 0$ , а функция Ханкеля  $H_{\nu_s}^{(1)}(kr)$  взята при  $r > r_0$  для того, чтобы решение удовлетворяло условию излучения.

Коэффициенты  $a_s$  и  $b_s$  можно определить с помощью теоремы Грина

$$\oint_L \frac{\partial u}{\partial n} dl = \int \Delta u dS, \quad dS = r dr d\varphi \quad (1.10)$$

для контура  $L$  в плоскости  $z = \text{const}$ , изображенного на рис. 1. Буквой  $n$  здесь обозначена внешняя нормаль к контуру  $L$ . Применяя формулу (1.10) к функциям  $A_z^e$ ,  $A_z^m$  и совершая в ней предельные переходы  $r_1 \rightarrow r_0$  и  $r_2 \rightarrow r_0$ , получим

$$\int \left( \frac{\partial A_z^e}{\partial r} \Big|_{r_0+0} - \frac{\partial A_z^e}{\partial r} \Big|_{r_0-0} \right) r_0 d\varphi = i \frac{4\pi k}{r_0} p_z \int \delta(\varphi_1 - \varphi_0) r_0 d\varphi,$$

$$\int \left( \frac{\partial A_z^m}{\partial r} \Big|_{r_0+0} - \frac{\partial A_z^m}{\partial r} \Big|_{r_0-0} \right) r_0 d\varphi = i \frac{4\pi k}{r_0} m_z \int \delta(\varphi - \varphi_0) r_0 d\varphi.$$

Так как здесь пределы интегрирования произвольны, то из равенства интегралов следует равенство подинтегральных функций:

$$\frac{\partial A_z^e}{\partial r} \Big|_{r_0+0} - \frac{\partial A_z^e}{\partial r} \Big|_{r_0-0} = i \frac{4\pi k p_z}{r_0} \delta(\varphi - \varphi_0), \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial A_z^m}{\partial r} \Big|_{r_0+0} - \frac{\partial A_z^m}{\partial r} \Big|_{r_0-0} = i \frac{4\pi k m_z}{r_0} \delta(\varphi - \varphi_0). \quad (1.12)$$

Подставим теперь выражение (1.07) в равенство (1.11) и умножим обе части последнего на  $\sin \nu_s \varphi$ . Интегрируя затем полученное равенство по  $\varphi$  в пределах от 0 до  $\alpha$ , находим

$$a_s = \frac{4\pi^2}{\alpha} k p_z. \quad (1.13)$$

Аналогичным путем определяем коэффициенты

$$b_s = \varepsilon_s \frac{4\pi^2}{\alpha} k m_z, \quad (1.14)$$

где

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = 1. \quad (1.15)$$

Следовательно, нить электрического тока возбуждает в пространстве вне клина поле

$$\begin{aligned} E_z &= ikA_z^e = \\ &= \begin{cases} i \frac{4\pi^2}{\alpha} k^2 p_z \sum_{s=1}^{\infty} H_{\nu_s}^{(1)}(kr_0) J_{\nu_s}(kr) \sin \nu_s \varphi_0 \sin \nu_s \varphi & \text{при } r < r_0, \\ i \frac{4\pi^2}{\alpha} k^2 p_z \sum_{s=1}^{\infty} J_{\nu_s}(kr_0) H_{\nu_s}^{(1)}(kr) \sin \nu_s \varphi_0 \sin \nu_s \varphi & \text{при } r > r_0, \end{cases} \quad (1.16) \\ E_r = E_\varphi &= 0, \quad H = \frac{1}{ik} \text{rot } E, \end{aligned}$$

а нить магнитного тока — поле

$$\begin{aligned} H_z &= ikA_z^m = \\ &= \begin{cases} i \frac{4\pi^2}{\alpha} k^2 m_z \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_s H_{\nu_s}^{(1)}(kr_0) J_{\nu_s}(kr) \cos \nu_s \varphi_0 \cos \nu_s \varphi & \text{при } r < r_0, \\ i \frac{4\pi^2}{\alpha} k^2 m_z \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_s J_{\nu_s}(kr_0) H_{\nu_s}^{(1)}(kr) \cos \nu_s \varphi_0 \cos \nu_s \varphi & \text{при } r > r_0, \end{cases} \quad (1.17) \\ H_r = H_\varphi &= 0, \quad E = -\frac{1}{ik} \text{rot } H. \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь асимптотической формулой для функции Ханкеля при  $kr_0 \rightarrow \infty$  [21]

$$H_{\nu_s}^{(1)}(kr_0) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr_0}} e^{i\left(kr_0 - \frac{\pi}{2}\nu_s - \frac{\pi}{4}\right)} = H_0^{(1)}(kr_0) e^{-i\frac{\pi}{2}\nu_s}. \quad (1.18)$$

Тогда выражения (1.16) и (1.17) в области  $r < r_0$  принимают вид

$$\begin{aligned} E_z &= i \frac{4\pi^2}{\alpha} k^2 p_z H_0^{(1)}(kr_0) \times \\ &\times \sum_{s=1}^{\infty} e^{-i\frac{\pi}{2}\nu_s} J_{\nu_s}(kr) \sin \nu_s \varphi_0 \sin \nu_s \varphi, \\ H_z &= i \frac{4\pi^2}{\alpha} k^2 m_z H_0^{(1)}(kr_0) \times \\ &\times \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_s e^{-i\frac{\pi}{2}\nu_s} J_{\nu_s}(kr) \cos \nu_s \varphi_0 \cos \nu_s \varphi \end{aligned}$$

или

$$\left. \begin{aligned} E_z &= i\pi k^2 p_z H_0^{(1)}(kr_0) [u(r, \varphi - \varphi_0) - u(r, \varphi + \varphi_0)], \\ H_z &= i\pi k^2 m_z H_0^{(1)}(kr_0) [u(r, \varphi - \varphi_0) + u(r, \varphi + \varphi_0)], \end{aligned} \right\} (1.19)$$

где

$$u(r, \psi) = \frac{2\pi}{\alpha} \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_s e^{-i\frac{\pi}{2}\nu_s} J_{\nu_s}(kr) \cos \nu_s \psi \quad (1.20)$$

( $\psi = \varphi \pm \varphi_0$ ).

Заметим далее, что в свободном пространстве поле электрической нити с моментом  $p_z$  определяется соотношением

$$E_z = i\pi k^2 p_z H_0^{(1)}(kr_0), \quad (1.21)$$

а поле магнитной нити с моментом  $m_z$  — соотношением

$$H_z = i\pi k^2 m_z H_0^{(1)}(kr_0). \quad (1.22)$$

Поэтому выражения, стоящие перед квадратными скобками в формулах (1.19), можно рассматривать как первичное поле нити — цилиндрическую волну, приходящую к ребру клина. Удаляя теперь нить тока на бесконеч-

ность ( $r_0 \rightarrow \infty$ ), перейдем к падающим плоским волнам

$$E_z = E_{0z} \cdot e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad E_r = E_\varphi = 0 \quad (1.23)$$

и

$$H_z = H_{0z} \cdot e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad H_r = H_\varphi = 0. \quad (1.24)$$

Поле, возникающее при дифракции этих волн на клине, будет, очевидно, иметь компоненту

$$E_z = E_{0z} [u(r, \varphi - \varphi_0) - u(r, \varphi + \varphi_0)] \quad (1.25)$$

и

$$H_z = H_{0z} [u(r, \varphi - \varphi_0) + u(r, \varphi + \varphi_0)]. \quad (1.26)$$

Найдем интегральное представление для функции  $u(r, \psi)$ . С этой целью воспользуемся формулой (см. [16], стр. 866)

$$J_{\nu_s}(kr) = \frac{1}{2\pi} \int_I^{III} e^{i\left[kr \cos \beta + \nu_s \left(\beta - \frac{\pi}{2}\right)\right]} d\beta, \quad (1.27)$$

где пределы  $I - III$  означают, что контур интегрирования проходит из области  $I$  в область  $III$  (рис. 2). Заштрихованные участки в плоскости комплексного пере-

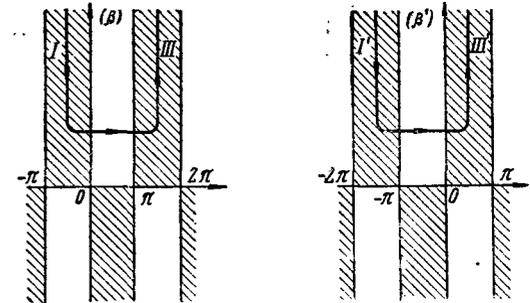


Рис. 2. Контур интегрирования в комплексной плоскости  $\beta$ .

менного  $\beta$  ( $\beta'$ ), изображенные на рис. 2, являются областями, в которых  $\text{Im} \cos \beta > 0$  ( $\text{Im} \cos \beta' < 0$ ). Поэтому на участках контура, уходящих в бесконечность, подынтегральная функция стремится к нулю, обеспечивая сходи-

мость интеграла. Подставляя выражение (1.27) в формулу (1.20), получим

$$u(r, \psi) = \frac{1}{2\alpha} \int_I^{III} e^{ikr \cos \beta} \left[ 1 + \sum_{s=1}^{\infty} e^{i\nu_s (\beta - \pi + \psi)} + \sum_{s=1}^{\infty} e^{i\nu_s (\beta - \pi - \psi)} \right] d\beta.$$

После суммирования бесконечных геометрических прогрессий и замены переменной  $\beta$  на  $\beta' = \beta - \pi$  функция  $u(r, \psi)$  приобретает вид

$$u(r, \psi) = \frac{1}{2\alpha} \int_{I'}^{III'} e^{-ikr \cos \beta'} \left[ \frac{1}{1 - e^{i\frac{\pi}{\alpha}(\beta' + \psi)}} - \frac{1}{1 - e^{-i\frac{\pi}{\alpha}(\beta' - \psi)}} \right] d\beta'.$$

В результате мы получаем известный интеграл Зоммерфельда

$$u(r, \psi) = \frac{1}{2\alpha} \int_C \frac{e^{-ikr \cos \beta}}{1 - e^{i\frac{\pi}{\alpha}(\beta + \psi)}} d\beta. \quad (1.28)$$

Контур интегрирования  $C$  изображен на рис. 3 и состоит из двух бесконечных ветвей. Так как подынте-

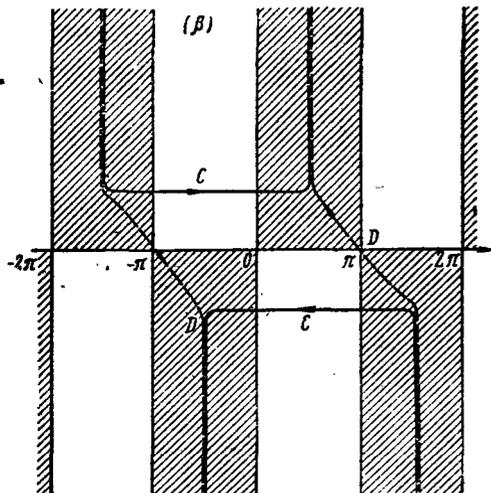


Рис. 3. Контур интегрирования в формуле (1.28).

гральное выражение имеет полюсы в точках  $\beta_m = 2\alpha m - \psi$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), то для значений  $\psi$ , соответствующих пространству вне клина ( $0 < \psi < \alpha$ ), функцию  $u(r, \psi)$  можно представить (при  $\pi < \alpha \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \psi_0 \leq \pi$ ) следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} u(r, \psi) &= v(r, \psi) + e^{-ikr \cos \psi} && \text{при } -\pi < \psi < \pi, \\ u(r, \psi) &= v(r, \psi) && \text{при } \pi < \psi < 2\alpha - \pi, \\ u(r, \psi) &= v(r, \psi) + e^{-ikr \cos (2\alpha - \psi)} && \text{при } 2\alpha - \pi < \psi \leq 2\alpha, \end{aligned} \right\} (1.29)$$

где

$$v(r, \psi) = \frac{1}{2\alpha} \int_D \frac{e^{-ikr \cos \beta}}{1 - e^{i\frac{\pi}{\alpha}(\beta + \psi)}} d\beta,$$

или

$$v(r, \psi) = \frac{i}{2\alpha} \sin \frac{\pi^2}{\alpha} \int_{D_0} \frac{e^{ikr \cos \zeta} d\zeta}{\cos \frac{\pi^2}{\alpha} - \cos \frac{\pi}{\alpha}(\psi + \zeta)}. \quad (1.30)$$

Контур интегрирования  $D$  и  $D_0$  изображены соответственно на рис. 3 и 4.

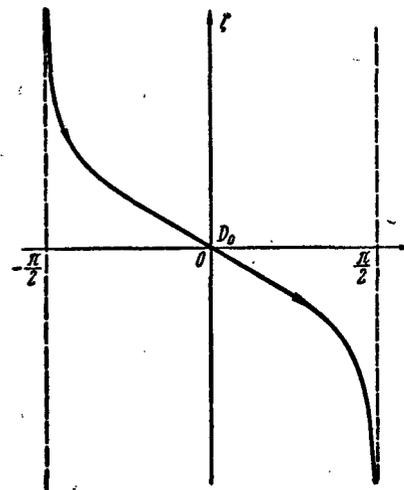


Рис. 4. Контур интегрирования в формуле (1.30).

При произвольном падении плоской волны на клин может представиться один из двух случаев: 1) плоская волна „освещает“ только одну грань клина ( $0 < \varphi_0 < \alpha - \pi$ ) и 2) плоская волна „освещает“ обе грани клина ( $\alpha - \pi < \varphi_0 < \pi$ ). Выпишем более подробно соответствующие им функции  $u(r, \psi)$ . В случае  $\varphi_0 < \alpha - \pi$  (рис. 5) имеем

$$\left. \begin{aligned}
 & u(r, \varphi - \varphi_0) = \\
 & = v(r, \varphi - \varphi_0) + e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \\
 & u(r, \varphi + \varphi_0) = \\
 & = v(r, \varphi + \varphi_0) + e^{-ikr \cos(\varphi + \varphi_0)} \\
 & u(r, \varphi - \varphi_0) = \\
 & = v(r, \varphi - \varphi_0) + e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \\
 & u(r, \varphi + \varphi_0) = v(r, \varphi + \varphi_0) \\
 & u(r, \varphi - \varphi_0) = v(r, \varphi - \varphi_0) \\
 & u(r, \varphi + \varphi_0) = v(r, \varphi + \varphi_0)
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 & \text{при } 0 < \varphi < \pi - \varphi_0, \\
 & \text{при } \pi - \varphi_0 < \varphi < \pi + \varphi_0, \\
 & \text{при } \pi + \varphi_0 < \varphi \leq \alpha,
 \end{aligned} \quad (1.31)$$

а в случае  $\alpha - \pi < \varphi_0 < \pi$  (рис. 6)

$$\left. \begin{aligned}
 & u(r, \varphi - \varphi_0) = \\
 & = v(r, \varphi - \varphi_0) + e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \\
 & u(r, \varphi + \varphi_0) = \\
 & = v(r, \varphi + \varphi_0) + e^{-ikr \cos(\varphi + \varphi_0)} \\
 & u(r, \varphi - \varphi_0) = \\
 & = v(r, \varphi - \varphi_0) + e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \\
 & u(r, \varphi + \varphi_0) = v(r, \varphi + \varphi_0) \\
 & u(r, \varphi - \varphi_0) = \\
 & = v(r, \varphi - \varphi_0) + e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \\
 & u(r, \varphi + \varphi_0) = \\
 & = v(r, \varphi + \varphi_0) + e^{-ikr \cos(2\alpha - \varphi - \varphi_0)}
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 & \text{при } 0 < \varphi < \pi - \varphi_0, \\
 & \text{при } \pi - \varphi_0 < \varphi < 2\alpha - \pi - \varphi_0, \\
 & \text{при } 2\alpha - \pi - \varphi_0 < \varphi \leq \alpha.
 \end{aligned} \quad (1.32)$$

Направление  $\varphi = \pi - \varphi_0$  соответствует лучу, зеркально отраженному от первой грани (первой считаем ту грань,

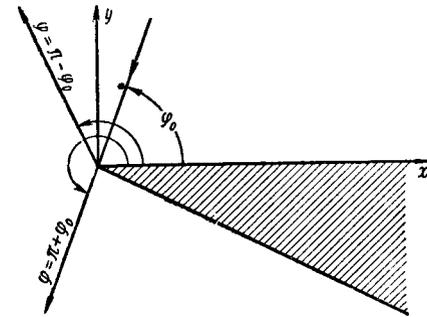


Рис. 5. Дифракция плоской волны на клине. Плоская волна освещает только одну грань клина.  $\varphi_0$  — угол падения. Линия  $\varphi = \pi - \varphi_0$  является границей отраженной плоской волны, а линия  $\varphi = \pi + \varphi_0$  — границей тени.

от которой ведется отсчет углов), а направление  $\varphi = 2\alpha - \pi - \varphi_0$  — лучу, зеркально отраженному от второй грани (рис. 5, 6). Функции  $e^{-ikr \cos \psi}$  описывают плоские

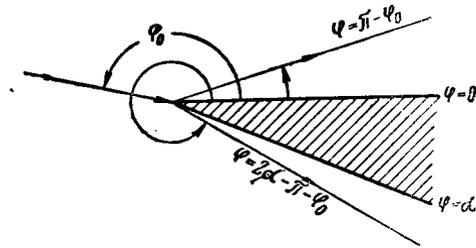


Рис. 6. Дифракция на клине. Плоская волна освещает обе грани. Линия  $\varphi = 2\alpha - \pi - \varphi_0$  является границей плоской волны, отраженной от второй грани ( $\varphi = \alpha$ ).

волны единичной амплитуды:  $e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)}$  — падающая волна,  $e^{-ikr \cos(\varphi + \varphi_0)}$  — волна, отраженная от первой грани,  $e^{-ikr \cos(2\alpha - \varphi - \varphi_0)}$  — волна, отраженная от второй грани.

## § 2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Интеграл

$$v(r, \psi) = \frac{i}{2\alpha} \sin \frac{\pi^2}{\alpha} \int_{D_0} \frac{e^{ikr \cos \zeta} d\zeta}{\cos \frac{\pi^2}{\alpha} - \cos \frac{\pi}{\alpha}(\psi + \zeta)}, \quad (2.01)$$

входящий в формулы (1.31), (1.32), не выражается в общем случае через известные функции. Однако при  $kr \gg 1$  его можно вычислить приближенно с помощью метода перевала [21]. Переходя с этой целью в интеграле (2.01) к новой переменной интегрирования

$$s = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \sin \frac{\zeta}{2}, \quad s^2 = i(1 - \cos \zeta),$$

получим

$$v(r, \psi) = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sqrt{2\pi n}} e^{i(kr + \frac{\pi}{4})} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-krs^2} ds}{\left(\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\psi + \zeta}{n}\right) \cos \frac{\zeta}{2}}, \quad (2.02)$$

где

$$n = \frac{\alpha}{\pi}. \quad (2.03)$$

Нетрудно видеть, что точка  $s=0$  является точкой перевала: при удалении от нее по мнимой оси ( $\text{Re } s=0$ ) в плоскости комплексного переменного  $s$  функция  $e^{-krs^2}$  наиболее быстро возрастает, а при удалении по действительной оси ( $\text{Im } s=0$ ) — наиболее быстро убывает. Поэтому при  $kr \gg 1$  основной вклад в интеграл (2.02) дает подынтегральная функция на участке контура вблизи точки перевала ( $s=0$ ).

Метод перевала заключается в том, что подынтегральная функция (за исключением множителя  $e^{-krs^2}$ ) разлагается в ряд Тейлора по степеням  $s$ , который затем почленно интегрируется. Если подынтегральное разложение сходится только на части контура интегрирования — результирующий ряд, полученный после интегрирова-

ния, будет полусходящимся (асимптотическим). Ограничиваясь в нем первым членом, получим:

$$\begin{aligned} v(r, \psi) &\approx \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sqrt{2\pi n}} \frac{e^{i(kr + \frac{\pi}{4})}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\psi}{n}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-krs^2} ds = \\ &= \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n} \frac{e^{i(kr + \frac{\pi}{4})}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\psi}{n} \sqrt{2\pi kr}}. \end{aligned} \quad (2.04)$$

Остальные члены асимптотического ряда имеют величину порядка  $\frac{1}{(kr)^{3/2}}$  и выше.

Найденное выражение (2.04) справедливо при условии  $(\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\psi}{n}) \sqrt{kr} \gg 1$  и описывает ту часть дифракционного поля, которая имеет характер цилиндрических волн, расходящихся от ребра клина. При падении на клин плоской волны (1.23), электрический вектор которой параллелен ребру клина, цилиндрическая волна определяется согласно (1.25) и (2.04) формулой

$$\begin{aligned} E_z &= -H_\varphi = E_{0z} \cdot [v(r, \varphi - \varphi_0) - v(r, \varphi + \varphi_0)] = \\ &= E_{0z} f \frac{e^{i(kr + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi kr}}, \end{aligned} \quad (2.05)$$

где

$$f = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n} \left( \frac{i}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{n}} - \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{n}} \right). \quad (2.06)$$

В случае возбуждения клина плоской волной (1.24), у которой магнитный вектор параллелен ребру клина, цилиндрическая волна имеет вид

$$\begin{aligned} H_z &= E_\varphi = H_{0z} \cdot [v(r, \varphi - \varphi_0) + v(r, \varphi + \varphi_0)] = \\ &= H_{0z} g \frac{e^{i(kr + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi kr}}, \end{aligned} \quad (2.07)$$

где

$$g = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n} \left( \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{n}} + \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{n}} \right). \quad (2.08)$$

Вблизи границы тени ( $\varphi \approx \pi + \varphi_0$ ) и вблизи направленных зеркально отраженных лучей ( $\varphi \approx \pi - \varphi_0$ ,  $\varphi \approx 2\alpha - \pi - \varphi_0$ ) выражения (2.04) — (2.08) не справедливы, так как полюсы

$$s_1 = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}} \sin \frac{\pi - \varphi}{2}, \quad s_2 = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}} \sin \left( n\pi - \frac{\pi + \varphi}{2} \right)$$

подынтегральной функции в (2.02) близки к  $s=0$  и, следовательно, ее разложение в ряд Тейлора теряет смысл. Физически этот результат означает, что в указанной области дифракционное поле не сводится к плоским и цилиндрическим волнам, а имеет более сложный характер. Асимптотическое представление функции  $v(r, \varphi)$  в этой области было получено в 1938 г. Паули [22]; мы приведем здесь вывод первого члена асимптотического ряда, полученного в [22].

Умножим и разделим подынтегральное выражение в формуле (2.02) на величину

$$\cos \psi + \cos \zeta = i(s^2 - is_0^2) \left( s_0^2 = 2 \cos^2 \frac{\psi}{2} \right) \quad (2.09)$$

и разложим в ряд Тейлора по степеням  $s$  функцию

$$\frac{\cos \psi + \cos \zeta}{\left( \cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\psi + \zeta}{n} \right) \cos \frac{\zeta}{2}},$$

которая уже не имеет полюса в точке перевала ( $s=0$ ) при  $\psi = \varphi \pm \varphi_0 = \pi$ . Ограничиваясь в этом ряде первым членом, получаем

$$v(r, \varphi) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n} \frac{1 + \cos \psi}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\psi}{n}} e^{i \left( kr - \frac{\pi}{4} \right)} \int_0^\infty \frac{e^{-krs^2}}{s^2 - is_0^2} ds. \quad (2.10)$$

Входящий сюда интеграл можно представить в виде

$$\int_0^\infty \frac{e^{-krs^2}}{s^2 - is_0^2} ds = e^{-ikrs_0^2} \int_0^\infty ds \int_{kr}^\infty e^{-(s^2 - is_0^2)t} dt.$$

Меняя здесь порядок интегрирования, находим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^{-krs^2}}{s^2 - is_0^2} ds &= e^{-ikrs_0^2} \int_{kr}^\infty e^{is_0^2 t} \frac{dt}{\sqrt{t}} \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{|s_0|} e^{-ikrs_0^2} \int_{\sqrt{kr}|s_0|}^\infty e^{iq^2} dq \end{aligned} \quad (2.11)$$

■ окончательно

$$\begin{aligned} v(r, \varphi) &= \frac{2}{n} \frac{\sin \frac{\pi}{n} \left| \cos \frac{\psi}{2} \right|}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\psi}{n}} e^{-ikr \cos \psi} \frac{e^{-i \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \times \\ &\times \int_{\sqrt{2kr} \left| \cos \frac{\psi}{2} \right|}^\infty e^{iq^2} dq. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Следующий член асимптотического разложения для функции  $v(r, \varphi)$  имеет величину, порядок которой зависит от направления наблюдения: вблизи границы плоских волн ( $\varphi \approx \pi \pm \varphi_0$ ) он порядка  $\frac{1}{\sqrt{kr}}$ , а вдали от нее — порядка  $\frac{1}{kr}$  по сравнению с выписанным членом (2.12).

Выражение (2.12) удобно представить в следующей форме:

$$\begin{aligned} v(r, \varphi) &= -\frac{2}{n} \frac{\sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\psi}{2}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\psi}{n}} e^{-ikr \cos \psi} \frac{e^{-i \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \times \\ &\times \int_{\infty \cos \frac{\psi}{2}}^{\sqrt{2kr} \cos \frac{\psi}{2}} e^{iq^2} dq. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Здесь нижний предел интеграла Френеля по абсолютной величине всегда равен бесконечности, а его знак определяется знаком  $\cos \frac{\psi}{2}$ . Поэтому при переходе через границу плоских волн ( $\psi = \varphi \pm \varphi_0 = \pi$ ) нижний предел меняет знак, и интеграл Френеля испытывает конечный разрыв, обеспечивая на этой границе непрерывность функции  $u(r, \psi)$  и, следовательно, дифракционного поля. Действительно, с помощью известной формулы

$$\int_0^{\infty} e^{iq^2} dq = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \quad (2.14)$$

нетрудно показать, что

$$v(r, \pi + 0) = \frac{e^{ikr}}{2}, \quad v(r, \pi - 0) = -\frac{e^{ikr}}{2} \quad (2.15)$$

и, следовательно,

$$u(r, \pi \pm 0) = \frac{1}{2} e^{ikr}. \quad (2.16)$$

В силу асимптотических соотношений

$$\int_0^p e^{iq^2} dq = \frac{e^{ip^2}}{2ip}, \quad \int_{-\infty}^{-p} e^{iq^2} dq = -\frac{e^{ip^2}}{2ip} \quad (\text{при } p \gg 1) \quad (2.17)$$

формула Паули (2.13) преобразуется при  $\sqrt{2kr} \left| \cos \frac{\psi}{2} \right| \gg 1$  к выражению (2.04). Оно, как уже указывалось выше, определяет цилиндрические волны, расходящиеся от ребра клина.

С помощью формулы (2.13) можно вычислить поле и вблизи направления  $\varphi = 2\alpha - \pi - \varphi_0$ , т. е. вблизи границы плоской волны, отраженной от грани  $\varphi = \alpha$ ; для этого достаточно заменить  $\varphi$  на  $\alpha - \varphi$ , а  $\varphi_0$  на  $\alpha - \varphi_0$ .

Интересно также отметить, что в случае полуплоскости ( $n=2$ ) формула (2.13) дает выражение

$$v(r, \psi) = e^{-ikr \cos \psi} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2kr \cos \frac{\psi}{2}}}{\sqrt{\pi}} \times \int_{\infty \cos \frac{\psi}{2}}^{\infty} e^{iq^2} dq, \quad (2.18)$$

которое полностью совпадает со строгим решением. Действительно, при  $\alpha = 2\pi$ , когда клин превращается в полуплоскость, интеграл (1.30) равен

$$v(r, \psi) = -\frac{i}{4\pi} \int_{D_0} \frac{e^{ikr \cos \zeta}}{\cos \frac{\psi + \zeta}{2}} d\zeta \quad (2.19)$$

и может быть сведен к интегралу Френеля. Разделим для этого контур  $D_0$  точкой  $\zeta = 0$  на две части. Суммируя интегралы по этим частям контура, находим, что

$$\begin{aligned} v(r, \psi) &= -\frac{i}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2} - i\infty} e^{ikr \cos \zeta} \left( \frac{1}{\cos \frac{\psi + \zeta}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{\psi - \zeta}{2}} \right) d\zeta = \\ &= -\frac{i}{\pi} \cos \frac{\psi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2} - i\infty} \frac{e^{ikr \cos \zeta} \cos \frac{\zeta}{2}}{\cos \psi + \cos \zeta} d\zeta. \end{aligned}$$

Переходя далее к новой переменной интегрирования  $s = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \sin \frac{\zeta}{2}$  и принимая во внимание формулу (2.09), получаем

$$v(r, \psi) = -\frac{\sqrt{2}}{\pi} \cos \frac{\psi}{2} e^{i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-krs^2}}{s^2 - is_0^2} ds. \quad (2.20)$$

Интеграл, входящий сюда, был уже нами вычислен. Обращаясь к формуле (2.11), мы приходим к выражению (2.18), которое вместе с соотношениями (1.25), (1.26) и (1.31) дает нам строгое решение задачи о дифракции плоских волн на идеально проводящей полуплоскости.

### § 3. ПРИБЛИЖЕНИЕ ФИЗИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

В приближении физической оптики рассеянное поле ищется как электромагнитное поле, создаваемое равномерной частью поверхностного тока

$$j^0 = \frac{c}{2\pi} [nH_0]. \quad (3.01)$$

Напомним, что  $\mathbf{n}$  означает здесь внешнюю нормаль к поверхности тела, а  $\mathbf{H}_0$  — магнитный вектор падающей волны. Рассмотрим сначала случай  $0 \leq \varphi_0 < \alpha - \pi$ , когда падающая плоская волна освещает только одну грань клина (рис. 5).

Из формулы (3.01) следует, что плотность равномерной части тока, возбуждаемого на освещенной грани плоскими волнами (1.23) и (1.24), имеет соответственно компоненты

$$j_z^0 = \frac{c}{2\pi} E_{0z} \cdot \sin \varphi_0 e^{-ikh \cos \varphi_0}, \quad j_x^0 = j_y^0 = 0 \quad (3.02)$$

и

$$j_x^0 = \frac{c}{2\pi} H_{0z} e^{-ikh \cos \varphi_0}, \quad j_y^0 = j_z^0 = 0. \quad (3.03)$$

Для вычисления поля, излучаемого этим током, мы воспользуемся следующим интегральным представлением функции Ханкеля (см. [16], стр. 866)

$$H_0^{(1)}(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta+i\infty}^{\delta-i\infty} e^{i\rho \cos \beta} d\beta = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\rho \operatorname{ch} t} dt \quad (3.04)$$

$(0 \leq \delta \leq \pi).$

Полагая здесь  $\rho = kd$  и переходя к новой переменной интегрирования  $\zeta = d \operatorname{sh} t$ , получаем

$$H_0^{(1)*}(kd) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik \sqrt{d^2 + \zeta^2}}}{\sqrt{d^2 + \zeta^2}} d\zeta. \quad (3.05)$$

С помощью формул (3.02), (3.03) и (3.05) легко показать, что вектор-потенциал

$$\mathbf{A}(x, y, 0) = \frac{1}{c} \int_0^{\infty} \mathbf{j}^0(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik \sqrt{y^2 + (x-\xi)^2 + \zeta^2}}}{\sqrt{y^2 + (x-\xi)^2 + \zeta^2}} d\zeta \quad (3.06)$$

имеет компоненты

$$A_z = \frac{i}{2} E_{0z} \sin \varphi_0 \cdot I_1, \quad A_x = A_y = 0, \quad (3.07)$$

если клин возбуждается плоской волной (1.23), и

$$A_x = \frac{i}{2} H_{0z} \cdot I_1, \quad A_y = A_z = 0, \quad (3.08)$$

если клин возбуждается плоской волной (1.24). Через  $I_1$  здесь обозначен интеграл

$$I_1 = \int_0^{\infty} e^{-ik\xi \cos \varphi_0} H_0^{(1)}(k \sqrt{y^2 + (x-\xi)^2}) d\xi. \quad (3.09)$$

Преобразуем его, используя соотношение

$$H_0^{(1)}(k \sqrt{d^2 + z^2}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(vd - wz)}}{v} dv$$

$(v = \sqrt{k^2 - w^2}, \operatorname{Im} v > 0, d > 0), \quad (3.10)$

в справедливости которого нетрудно убедиться, проверив, что оно переходит в выражение (3.04) при замене  $w = k \sin t$ ,  $v = k \cos t$  и  $k \sqrt{d^2 + z^2} = \rho$ . В результате

$$I_1 = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(v|y| - wx)}}{v(k \cos \varphi_0 - w)} dv, \quad (3.11)$$

где контур интегрирования огибает сверху полюс  $w = k \cos \varphi_0$ .

Заметим, что интеграл (3.11) является функцией от  $|y|$  и перейдем к полярным координатам по формулам

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ |y| &= r \sin \varphi \text{ при } \varphi < \pi, \\ |y| &= -r \sin \varphi \text{ при } \varphi > \pi. \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Осуществив далее замену

$$w = -k \cos \xi \quad (v = k \sin \xi), \quad (3.13)$$

получим

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{i\pi k} \int_F \frac{e^{ikr \cos(\xi - \varphi)}}{\cos \varphi_0 + \cos \xi} d\xi \text{ при } \varphi < \pi, \\ I_1 &= \frac{1}{i\pi k} \int_F \frac{e^{ikr \cos(\xi + \varphi)}}{\cos \varphi_0 + \cos \xi} d\xi \text{ при } \varphi > \pi. \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Контур интегрирования  $F$  изображен на рис. 7,а и 7,б. При этом на рис. 7,а штриховкой отмечены участки в плоскости комплексного переменного  $\xi$ , на которых  $\text{Im} \cos(\xi - \varphi) > 0$ , а на рис. 7,б — участки, где  $\text{Im} \cos(\xi + \varphi) > 0$ . Деформируем теперь контур  $F$  в контур  $G_1(G_2)$  для значений  $\varphi < \pi$  ( $\varphi > \pi$ ) и перейдем к новой переменной интегрирования

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \xi - \varphi && \text{при } \varphi < \pi, \\ \zeta &= \xi - (2\pi - \varphi) && \text{при } \varphi > \pi. \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

В результате получим следующие выражения:

$$I_1 = \frac{1}{i\pi k} \int_{D_0} \frac{e^{ikr \cos \zeta} d\zeta}{\cos \varphi_0 + \cos(\zeta + \varphi)} + \begin{cases} 0 & \text{при } \varphi > \pi - \varphi_0, \\ \frac{2}{k \sin \varphi_0} e^{-ikr \cos(\varphi + \varphi_0)} & \text{при } \varphi < \pi - \varphi_0, \end{cases} \quad (3.16)$$

если  $\varphi < \pi$ , и

$$I_1 = \frac{1}{i\pi k} \int_{D_0} \frac{e^{ikr \cos \zeta} d\zeta}{\cos \varphi_0 + \cos(\zeta - \varphi)} + \begin{cases} 0 & \text{при } \varphi < \pi + \varphi_0, \\ \frac{2}{k \sin \varphi_0} e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} & \text{при } \varphi > \pi + \varphi_0, \end{cases} \quad (3.17)$$

если  $\varphi > \pi$ . Контур интегрирования  $D_0$  показан на рис. 4.

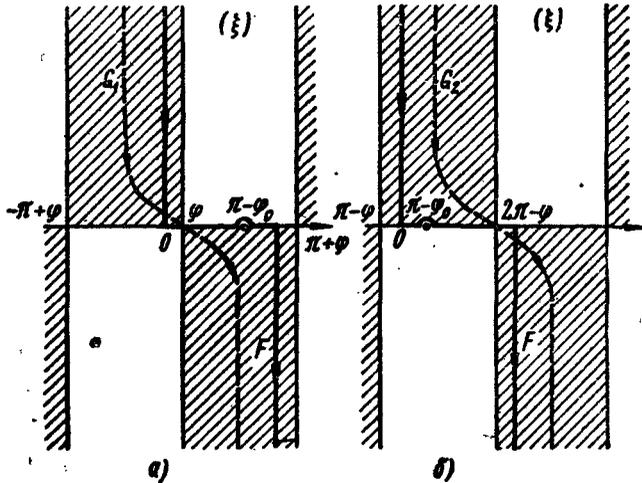


Рис. 7. Контур интегрирования в формулах (3.14).

С помощью формулы (3.06) и равенства

$$E_z = ikA_z \quad (3.18)$$

находим поле, которое излучается равномерной частью тока, возбужденного на грани  $\varphi = 0$  плоской волной (1.23)

$$\frac{E_z}{E_{0z}} = \begin{cases} v_1^+(\varphi, \varphi_0) - e^{-ikr \cos(\varphi + \varphi_0)} & \text{при } 0 < \varphi < \pi - \varphi_0, \\ v_1^+(\varphi, \varphi_0) & \text{при } \pi - \varphi_0 < \varphi < \pi, \\ v_1^-(\varphi, \varphi_0) & \text{при } \pi < \varphi < \pi + \varphi_0, \\ v_1^-(\varphi, \varphi_0) - e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} & \text{при } \pi + \varphi_0 < \varphi < \alpha, \end{cases} \quad (3.19)$$

где

$$v_1^\pm(\varphi, \varphi_0) = \frac{i}{2\pi} \sin \varphi_0 \int_{D_0} \frac{e^{ikr \cos \zeta} d\zeta}{\cos \varphi_0 + \cos(\zeta \pm \varphi)}. \quad (3.20)$$

Нетрудно видеть, что при  $\alpha - \pi < \varphi_0 < \pi$ , когда освещены обе грани клина, поле, возбуждаемое второй гранью ( $\varphi = \alpha$ ), будет описываться этими же формулами, если в них заменить  $\varphi$  на  $\alpha - \varphi$ , а  $\varphi_0$  на  $\alpha - \varphi_0$ .

Складывая поле, излучаемое равномерной частью тока, с падающей плоской волной (1.23), мы получаем дифракционное поле в приближении физической оптики. Оно равно

$$\frac{E_z}{E_{0z}} = \begin{cases} v_1^+(\varphi, \varphi_0) + e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} - e^{-ikr \cos(\varphi + \varphi_0)} & \text{при } 0 \leq \varphi < \pi - \varphi_0, \\ v_1^+(\varphi, \varphi_0) + e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} & \text{при } \pi - \varphi_0 < \varphi < \pi, \\ v_1^-(\varphi, \varphi_0) + e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} & \text{при } \pi < \varphi < \pi + \varphi_0, \\ v_1^-(\varphi, \varphi_0) & \text{при } \pi + \varphi_0 < \varphi < \alpha, \end{cases} \quad (3.21)$$

если освещена одна грань клина ( $0 \leq \varphi_0 < \alpha - \pi$ ), и

$$\frac{E_z}{E_{0z}} = \begin{cases} v_1^+(\varphi, \varphi_0) + v_1^-(\alpha - \varphi, \alpha - \varphi_0) + \\ + e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} - e^{-ikr \cos(\varphi + \varphi_0)} \\ \quad \text{при } 0 \leq \varphi < \pi - \varphi_0, \\ v_1^+(\varphi, \varphi_0) + v_1^-(\alpha - \varphi, \alpha - \varphi_0) + \\ + e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad \text{при } \pi - \varphi_0 < \varphi < \alpha - \pi, \\ v_1^+(\varphi, \varphi_0) + v_1^+(\alpha - \varphi, \alpha - \varphi_0) + \\ + e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad \text{при } \alpha - \pi < \varphi < \pi, \\ v_1^-(\varphi, \varphi_0) + v_1^+(\alpha - \varphi, \alpha - \varphi_0) + \\ + e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad \text{при } \pi < \varphi < 2\alpha - \pi - \varphi_0, \\ v_1^-(\varphi, \varphi_0) + v_1^+(\alpha - \varphi, \alpha - \varphi_0) + \\ + e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} - e^{-ikr \cos(2\alpha - \varphi - \varphi_0)} \\ \quad \text{при } 2\alpha - \pi - \varphi_0 < \varphi \leq \alpha, \end{cases} \quad (3.22)$$

если освещены обе грани клина ( $\alpha - \pi < \varphi_0 < \pi$ ).

Вычислим теперь поле, возникающее при дифракции на клине плоской волны (1.24). Поле, рассеянное первой гранью ( $\varphi = 0$ ), определяется соотношением

$$\left. \begin{aligned} H_z &= -\frac{\partial A_x}{\partial y}, \\ H_x &= H_y = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Компоненту  $H_z$  можно записать в виде

$$H_z = -\frac{i}{2} H_{0z} \frac{\partial}{\partial y} I_1 \quad (3.24)$$

или

$$\left. \begin{aligned} H_z &= -\frac{i}{2} H_{0z} \cdot I_2 \quad \text{при } \varphi < \pi, \\ H_z &= \frac{i}{2} H_{0z} \cdot I_2 \quad \text{при } \varphi > \pi. \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

Входящая сюда величина  $I_2$  есть интеграл

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(v|y| - wx)}}{k \cos \varphi_0 - w} d\omega \quad (3.26)$$

по бесконечному контуру, огибающему полюс  $w = k \cos \varphi_0$  сверху. Этот интеграл точно так же, как и  $I_1$ , преобразуется в интеграл по контуру  $D_0$ . В результате получаем

$$\frac{H_z}{H_{0z}} = \begin{cases} v_2^+(\varphi, \varphi_0) + e^{-ikr \cos(\varphi + \varphi_0)} \quad \text{при } 0 \leq \varphi \leq \pi - \varphi_0, \\ v_2^+(\varphi, \varphi_0) \quad \text{при } \pi - \varphi_0 < \varphi < \pi, \\ v_2^-(\varphi, \varphi_0) \quad \text{при } \pi < \varphi < \pi + \varphi_0, \\ v_2^-(\varphi, \varphi_0) - e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad \text{при } \pi + \varphi_0 < \varphi \leq \alpha, \end{cases} \quad (3.27)$$

где

$$v_2^\pm(\varphi, \varphi_0) = \mp \frac{i}{2\pi} \int_{D_0} \frac{\sin(\zeta + \varphi) e^{ikr \cos \zeta}}{\cos \varphi_0 + \cos(\zeta \pm \varphi)} d\zeta. \quad (3.28)$$

В случае, когда освещены обе грани клина, поле, рассеянное второй гранью, также определяется формулами (3.27), (3.28), в которых следует только заменить  $\varphi_0$  на  $\alpha - \varphi_0$  и  $\varphi$  на  $\alpha - \varphi$ .

Складывая затем поле, излучаемое равномерной частью тока, с падающей волной (1.24), находим дифракционное поле в приближении физической оптики. Оно равно

$$\frac{H_z}{H_{0z}} = \begin{cases} v_2^+(\varphi, \varphi_0) + e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} + e^{-ikr \cos(\varphi + \varphi_0)} \\ \quad \text{при } 0 \leq \varphi < \pi - \varphi_0, \\ v_2^+(\varphi, \varphi_0) + e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \\ \quad \text{при } \pi - \varphi_0 < \varphi < \pi, \\ v_2^-(\varphi, \varphi_0) + e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \\ \quad \text{при } \pi < \varphi < \pi + \varphi_0, \\ v_2^-(\varphi, \varphi_0) \quad \text{при } \pi + \varphi_0 < \varphi \leq \alpha, \end{cases} \quad (3.29)$$

если освещена одна грань клина, и

$$\frac{H_z}{H_{0z}} = \left\{ \begin{array}{l} v_2^+(\varphi, \varphi_0) + v_2^-(\alpha - \varphi, \alpha - \varphi_0) + \\ + e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} + e^{-ikr \cos(\varphi + \varphi_0)} \\ \quad \text{при } 0 \leq \varphi \leq \pi - \varphi_0, \\ v_2^+(\varphi, \varphi_0) + v_2^-(\alpha - \varphi, \alpha - \varphi_0) + \\ + e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \\ \quad \text{при } \pi - \varphi_0 < \varphi < \alpha - \pi, \\ v_2^+(\varphi, \varphi_0) + v_2^+(\alpha - \varphi, \alpha - \varphi_0) + \\ + e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \\ \quad \text{при } \alpha - \pi < \varphi < \pi, \\ v_2^-(\varphi, \varphi_0) + v_2^+(\alpha - \varphi, \alpha - \varphi_0) + \\ + e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \\ \quad \text{при } \pi < \varphi < 2\alpha - \pi - \varphi_0, \\ v_2^-(\varphi, \varphi_0) + v_2^+(\alpha - \varphi, \alpha - \varphi_0) + \\ + e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} + e^{-ikr \cos(2\alpha - \varphi - \varphi_0)} \\ \quad \text{при } 2\alpha - \pi - \varphi_0 < \varphi \leq \alpha, \end{array} \right. \quad (3.30)$$

если освещены обе его грани.

Интегралы  $v_1^\pm$ ,  $v_2^\pm$  не выражаются в общем случае через известные функции. Однако, пользуясь методом перевала, нетрудно получить их асимптотическое разложение при  $kr \gg 1$ . Вдали от направлений  $\varphi = \pi \pm \varphi_0$  и  $\varphi = 2\alpha - \pi - \varphi_0$  первый член асимптотического разложения дает нам цилиндрические волны, расходящиеся от ребра клина. В случае возбуждения клина плоской волной (1.23) эти цилиндрические волны определяются формулой

$$\left. \begin{array}{l} E_z = -H_\varphi = E_{0z} \cdot f^0 \cdot \frac{e^{i(kr + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi kr}}, \\ E_\varphi = H_z = 0, \end{array} \right\} \quad (3.31)$$

а при возбуждении клина плоской волной (1.24) — формулой

$$\left. \begin{array}{l} H_z = E_\varphi = H_{0z} \cdot g^0 \cdot \frac{e^{i(kr + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi kr}}, \\ H_\varphi = E_z = 0. \end{array} \right\} \quad (3.32)$$

Функции  $f^0$  и  $g^0$  имеют вид

$$\left. \begin{array}{l} f^0 = \frac{\sin \varphi_0}{\cos \varphi + \cos \varphi_0}, \\ g^0 = -\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi + \cos \varphi_0}, \end{array} \right\} \quad (3.33)$$

если освещена одна грань клина ( $0 \leq \varphi_0 < \alpha - \pi$ ), и

$$\left. \begin{array}{l} f^0 = \frac{\sin \varphi_0}{\cos \varphi + \cos \varphi_0} + \frac{\sin(\alpha - \varphi_0)}{\cos(\alpha - \varphi) + \cos(\alpha - \varphi_0)}, \\ g^0 = -\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi + \cos \varphi_0} - \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\alpha - \varphi) + \cos(\alpha - \varphi_0)}, \end{array} \right\} \quad (3.34)$$

если освещены обе его грани ( $\alpha - \pi < \varphi_0 < \pi$ ). Индекс «0» у функций  $f^0$  и  $g^0$  означает, что цилиндрические волны (3.31), (3.32) излучаются равномерной частью псверхностного тока ( $j^0$ ).

#### § 4. ПОЛЕ, ИЗЛУЧАЕМОЕ НЕРАВНОМЕРНОЙ ЧАСТЬЮ ТОКА

В § 1 и 3 мы представили строгое и приближенное выражение для дифракционного поля с помощью интегралов по одному и тому же контуру в плоскости комплексного переменного. Вычитая из строгого выражения приближенное, найдем поле, создаваемое неравномерной частью тока. Оно определяется интегралами типа

$$\int_{D_0} p(\alpha, \varphi, \varphi_0, \zeta) e^{ikr \cos \zeta} d\zeta, \quad (4.01)$$

которые при замене переменной  $\zeta$  на  $s = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \sin \frac{\zeta}{2}$  преобразуются к виду

$$e^{ikr} \int_{-\infty}^{\infty} q(\alpha, \varphi, \varphi_0, s) e^{-krs^2} ds \quad (4.02)$$

и могут быть приближенно вычислены методом перевала. Разложим для этого функцию  $q(s)$  в ряд Тейлора

$$q(\alpha, \varphi, \varphi_0, s) = q_0 + q_1 \cdot s + q_2 \cdot s^2 + \dots \quad (4.03)$$

Заметим, что разложение (4.03) не имеет смысла лишь в частном случае

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \pi \pm \varphi_0 && \text{при } \varphi_0 = 0; \pi, \\ \varphi &= 2\alpha - \pi - \varphi_0 && \text{при } \varphi_0 = \alpha - \pi, \end{aligned} \right\} (4.04)$$

когда направление наблюдения ( $\varphi$ ) совпадает с направлением распространения падающей волны, скользящей вдоль одной из граней клина.

Подставляя ряд (4.03) в формулу (4.02) и осуществляя затем почленное интегрирование, находим асимптотическое разложение для поля, излучаемого неравномерной частью тока. Мы ограничимся первым членом асимптотического разложения, опуская члены порядка  $(kr)^{-3/2}$  и выше. В результате искомое поле от неравномерной части тока будет равно

$$\left. \begin{aligned} E_z &= -H_\varphi = E_{0z} f^1 \frac{e^{i\left(kr + \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi kr}}, \\ E_\varphi &= H_z = 0 \end{aligned} \right\} (4.05)$$

при возбуждении клина плоской волной (1.23) и

$$\left. \begin{aligned} H_z &= E_\varphi = H_{0z} g^1 \frac{e^{i\left(kr + \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi kr}}, \\ H_\varphi &= E_z = 0 \end{aligned} \right\} (4.06)$$

при возбуждении клина плоской волной (1.24).

Вычисляя с помощью формул (4.05) и (4.06) неравномерную часть тока, нетрудно видеть, что она сосредоточена в основном вблизи ребра клина. Поле же, создаваемое в области  $kr \gg 1$  этой частью тока, имеет вид цилиндрических волн, угловые функции которых определяются соотношениями\*

$$f^1 = f - f^0, \quad g^1 = g - g^0, \quad (4.07)$$

\* Принятые здесь обозначения несколько отличаются от использованных в статьях [7—11]. Функции  $f$  и  $f^1$  были обозначены там соответственно через  $f_1$  и  $f$ .

где в соответствии с § 1 и 3 имеем

$$\left. \begin{aligned} f \\ g \end{aligned} \right\} = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n} \left( \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{n}} \mp \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{n}} \right) \quad (4.08)$$

$$\left( n = \frac{\alpha}{\pi} \right)$$

и

$$\left. \begin{aligned} f^0 &= \frac{\sin \varphi_0}{\cos \varphi + \cos \varphi_0}, \\ g^0 &= -\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi + \cos \varphi_0}, \end{aligned} \right\} (4.09)$$

если освещена одна грань клина (т. е. при  $0 \leq \varphi_0 < \alpha - \pi$ ), и

$$\left. \begin{aligned} f^0 &= \frac{\sin \varphi_0}{\cos \varphi + \cos \varphi_0} + \frac{\sin(\alpha - \varphi_0)}{\cos(\alpha - \varphi) + \cos(\alpha - \varphi_0)}, \\ g^0 &= -\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi + \cos \varphi_0} - \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\alpha - \varphi) + \cos(\alpha - \varphi_0)}, \end{aligned} \right\} (4.10)$$

если освещены обе грани клина (т. е. при  $\alpha - \pi < \varphi_0 < \pi$ ). Напомним, что функции  $f$ ,  $g$  описывают цилиндрические волны, излучаемые полным током, т. е. суммой равномерной и неравномерной частей, а функции  $f^0$ ,  $g^0$  относятся к цилиндрическим волнам, излучаемым только равномерной частью тока ( $j^0$ ).

Отметим некоторые свойства функции  $f^1$  и  $g^1$ . Функция  $f^1 = f^1(\alpha, \varphi, \varphi_0)$  непрерывна, тогда как функция  $g^1 = g^1(\alpha, \varphi, \varphi_0)$  испытывает конечный разрыв при  $\varphi_0 = \alpha - \pi$ . Причина этого разрыва заключается в том, что равномерная часть тока отлична от нуля на грани, вдоль которой распространяется (при  $\varphi_0 = \alpha - \pi$ ) плоская волна (1.24). В радиолокационном случае, когда направление в точку наблюдения совпадает с направлением на источник ( $\varphi = \varphi_0$ ), обе функции  $f^1$  и  $g^1$  непрерывны. Разрыва у функции  $g^1$  при  $\varphi = \varphi_0 = \alpha - \pi$  нет потому, что элемент тока не излучает в продольном направлении.

На границе плоских волн (т. е. при  $\varphi = \pi \pm \varphi_0$  и  $\varphi = 2\alpha - \pi - \varphi_0$ ) функции  $f$ ,  $f^0$  и  $g$ ,  $g^0$  обращаются в бес-

конечность, в то время как функции  $f^1$ ,  $g^1$  остаются конечными. В соответствии с формулами (4.07) — (4.10) они принимают следующие значения

$$\left. \begin{matrix} f^1 \\ g^1 \end{matrix} \right\} = \frac{\frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{n}} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \varphi_0 \pm \frac{1}{2n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}, \quad (4.11)$$

если  $\varphi = \pi - \varphi_0$ , а  $\varphi_0 < \alpha - \pi$ ,

$$\left. \begin{matrix} f^1 \\ g^1 \end{matrix} \right\} = \frac{\frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{n}} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \varphi_0 + \frac{1}{2n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} - \frac{\sin(\alpha - \varphi_0)}{\cos(\alpha - \varphi) + \cos(\alpha - \varphi_0)}, \quad (4.12)$$

$$g^1 = \frac{\frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{n}} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \varphi_0 - \frac{1}{2n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} + \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\alpha - \varphi) + \cos(\alpha - \varphi_0)},$$

если  $\varphi = \pi - \varphi_0$ , а  $\alpha - \pi < \varphi_0 < \pi$ , и

$$\left. \begin{matrix} f^1 \\ g^1 \end{matrix} \right\} = \mp \frac{\frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{n}} \pm \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \varphi_0 - \frac{1}{2n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}, \quad (4.13)$$

если  $\varphi = \pi + \varphi_0$ , а  $\varphi_0 < \alpha - \pi$ . Значение  $\varphi = \pi + \varphi_0$  при  $\alpha - \pi < \varphi_0 < \pi$  соответствует углу внутри клина и поэтому не представляет интереса. В направлении зеркально отраженного луча  $\varphi = 2\alpha - \pi - \varphi_0$  функции  $f^1$  и  $g^1$  определяются (при  $\alpha - \pi < \varphi_0 < \pi$ ) следующими формулами:

$$f^1 = \frac{\frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{n}} - \frac{\sin \varphi_0}{\cos \varphi + \cos \varphi_0} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg}(\alpha - \varphi_0) + \frac{1}{2n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}, \quad (4.14)$$

$$g^1 = \frac{\frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{n}} + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi + \cos \varphi_0} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg}(\alpha - \varphi_0) - \frac{1}{2n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}. \quad (4.14)$$

Функции  $f^1$  и  $g^1$  имеют конечную величину всюду, за исключением особых значений  $\varphi$  и  $\varphi_0$ , перечисленных в формуле (4.04). Графики функций  $f^1$  и  $g^1$  (рис. 8—13), построенные в полярных координатах, дают наглядное

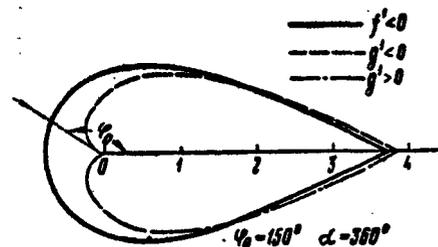


Рис. 8. Диаграмма поля от неравномерной части тока, возбуждаемого плоской волной на полуплоскости. Функция  $f^1$  (или  $g^1$ ) соответствует случаю, когда электрический (или магнитный) вектор падающей волны параллелен ребру клина.

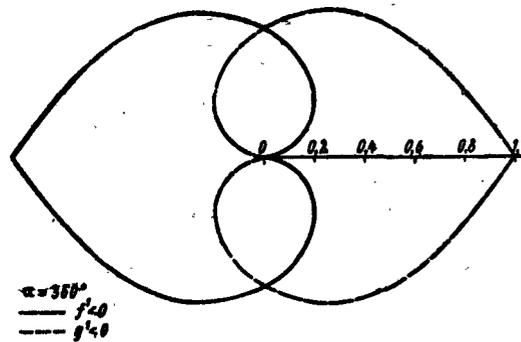


Рис. 9. То же, что и на рис. 8, для случая  $\varphi = \varphi_0$ .

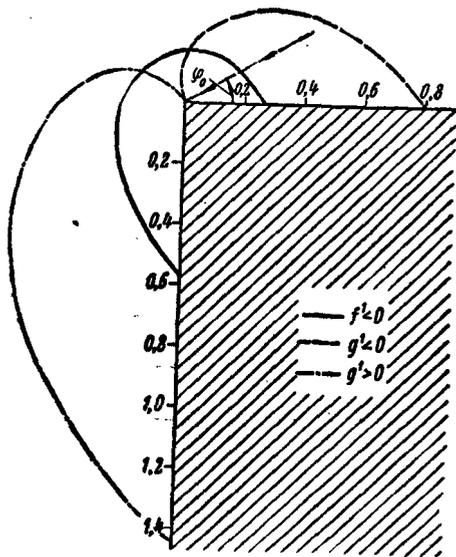


Рис. 10. Функции  $f^1$  и  $g^1$  для клина ( $\varphi_0 = 30^\circ$ ,  $\alpha = 270^\circ$ ).

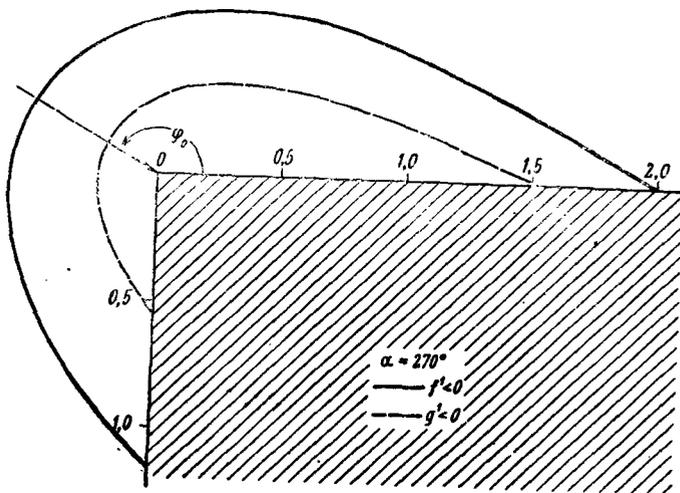


Рис. 11. То же, что и на рис. 10, при  $\varphi_0 = 150^\circ$ .

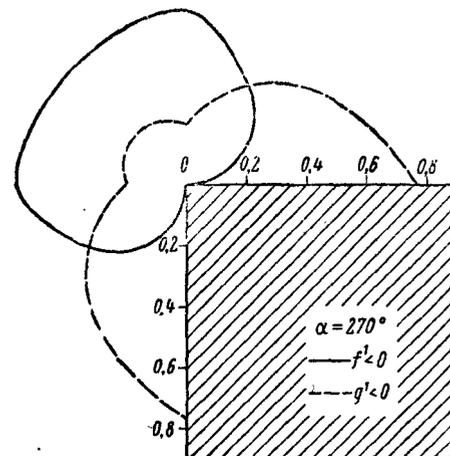


Рис. 12. То же, что и на рис. 10, для случая  $\varphi = \varphi_0$ .

Сплошные линии на рисунках соответствуют функции  $f^1$  ( $f^1 < 0$ ), штриховые и штрихпунктирные — функции  $g^1$ , причем штриховые линии относятся к случаю  $g^1 < 0$ , а штрихпунктирные — к случаю  $g^1 > 0$ .

Обратим внимание на следующий важный момент. Как видно из § 1 и 3, неравномерная часть тока на клине описывается контурным интегралом, который в об-

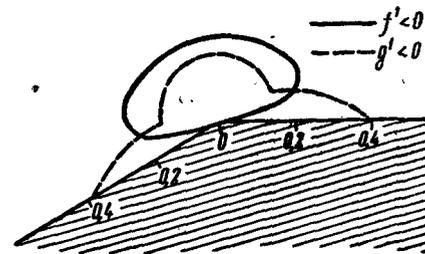


Рис. 13. Функции  $f^1$  и  $g^1$  для клина ( $\varphi = \varphi_0$ ,  $\alpha = 210^\circ$ ).

шем случае не выражается через известные функции. Для вычисления же поля, рассеянного какой-либо выпуклой идеально проводящей поверхностью с изломами (ребрами), указанное выражение необходимо еще интегрировать по данной поверхности. Очевидно, что такой путь может привести лишь к весьма громоздким формулам. Поэтому в дальнейшем при расчете поля, рассеянного сложными телами, мы не будем интегрировать явные выражения для неравномерной части тока, а постараемся выразить эти интегралы непосредственно через найденные функции  $f^1$  и  $g^1$ .

### § 5. НАКЛОННОЕ ПАДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА КЛИН

Выше была изучена дифракция плоской волны, падающей на клин перпендикулярно к его ребру. Рассмотрим теперь случай, когда на клин падает плоская волна

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{ik(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)} \quad (5.01)$$

под косым углом  $\gamma$  ( $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ ) к ребру клина (рис. 14).

Из геометрии задачи следует, что дифракционное поле должно иметь ту же зависимость от координаты  $z$ , что и поле падающей волны, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}(x, y) e^{ikz \cos \gamma}, \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}(x, y) e^{ikz \cos \gamma}. \end{aligned} \right\} \quad (5.02)$$

Пользуясь уравнениями Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = -ik\mathbf{E}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = ik\mathbf{H}, \quad (5.03)$$

можно получить следующие выражения для радиальных и азимутальных компонент поля:

$$\left. \begin{aligned} E_r &= -\frac{1}{ik \sin^2 \gamma} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} + \cos \gamma \frac{\partial E_z}{\partial r} \right), \\ H_r &= \frac{1}{ik \sin^2 \gamma} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \cos \gamma \frac{\partial H_z}{\partial r} \right), \\ E_\varphi &= \frac{1}{ik \sin^2 \gamma} \left( \frac{\partial H_z}{\partial r} - \frac{\cos \gamma}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \right), \\ H_\varphi &= -\frac{1}{ik \sin^2 \gamma} \left( \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\cos \gamma}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.04)$$

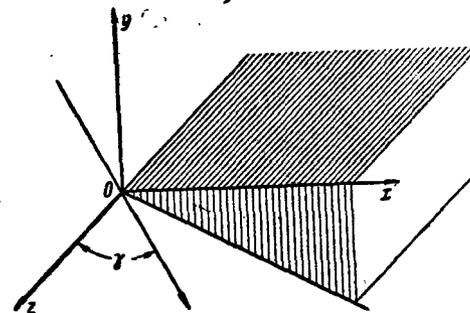


Рис. 14. Дифракция на клине при наклонном падении плоской волны.  $\gamma$  — угол между нормалью к фронту падающей волны и осью  $z$ .

Функции  $E_z$  и  $H_z$  в свою очередь удовлетворяют волновым уравнениям

$$\Delta E_z + k_1^2 E_z = 0, \quad \Delta H_z + k_1^2 H_z = 0, \quad (5.05)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{и} \quad k_1 = k \sin \gamma. \quad (5.06)$$

В § 4 мы нашли поля (4.05) и (4.06), удовлетворяющие уравнениям

$$\Delta E_z + k^2 E_z = 0, \quad \Delta H_z + k^2 H_z = 0 \quad (5.07)$$

и создаваемые неравномерной частью тока, возбуждаемого на клине плоской волной

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-ik(x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0)}. \quad (5.08)$$

Представляя выражение (5.01) в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{ikz \cos \gamma - ik_1(x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0)} \quad (5.09)$$

и сравнивая уравнения (5.05) и (5.07), мы легко найдем поле, создаваемое неравномерной частью тока при облучении клина плоской волной (5.01); для этого достаточно

в формулах (4.05) и (4.06) заменить  $k$  на  $k_1$ , а  $E_{0z}$  и  $H_{0z}$  на  $E_{0z}e^{ikz \cos \gamma}$  и  $H_{0z}e^{ikz \cos \gamma}$ . В результате получим

$$\left. \begin{aligned} E_z = -H_\varphi = E_{0z} f^1(\varphi, \varphi_0) \frac{e^{i(k_1 r + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi k_1 r}} e^{ikz \cos \gamma}, \\ H_z = E_\varphi = H_{0z} g^1(\varphi, \varphi_0) \frac{e^{i(k_1 r + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi k_1 r}} e^{ikz \cos \gamma}. \end{aligned} \right\} (5.10)$$

Входящий сюда угол  $\varphi_0$  определяется условием

$$e^{ik(x \cos \alpha + y \cos \beta)} = e^{-ik_1(x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0)}, \quad (5.11)$$

откуда

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}. \quad (5.12)$$

Остальные компоненты поля, создаваемого неравномерной частью тока при наклонном падении плоской волны, находятся из соотношений (5.04) и при  $kr \gg 1$  равны

$$\begin{aligned} E_r = -\operatorname{ctg} \gamma E_z, \quad H_r = -\operatorname{ctg} \gamma H_z \\ E_\varphi = \frac{1}{\sin \gamma} H_z, \quad H_\varphi = -\frac{1}{\sin \gamma} E_z. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Поверхности равной фазы для этих волн имеют вид

$$r \sin \gamma + z \cos \gamma = \text{const} \quad (5.14)$$

и являются коническими поверхностями, образующие которых составляют угол  $\frac{\pi}{2} + \gamma$  с положительным направлением оси  $z$ . Таким образом, при наклонном облучении клина плоской волной поле, создаваемое неравномерной частью тока, представляет собой конические волны, расходящиеся от ребра клина. Нормали к фазовым поверхностям этих волн составляют угол  $\gamma$  с положительным направлением оси  $z$  и показаны на рис. 15. Эти волны можно представить в более наглядной форме, если ввести компоненты (см. рис. 15):

$$\left. \begin{aligned} E_\gamma = E_r \cos \gamma - E_z \sin \gamma, \\ H_\gamma = H_r \cos \gamma - H_z \sin \gamma. \end{aligned} \right\} (5.15)$$

Тогда окончательные выражения для рассеянного поля в дальней зоне будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} E_\gamma = H_\varphi = -\frac{1}{\sin \gamma} E_z, \\ H_\gamma = -E_\varphi = -\frac{1}{\sin \gamma} H_z. \end{aligned} \right\} (5.16)$$

Теперь мы можем перейти к применению полученных результатов для решения конкретных дифракционных задач. Простейшей из них является задача о дифракции на бесконечно длинной ленте, которая имеет

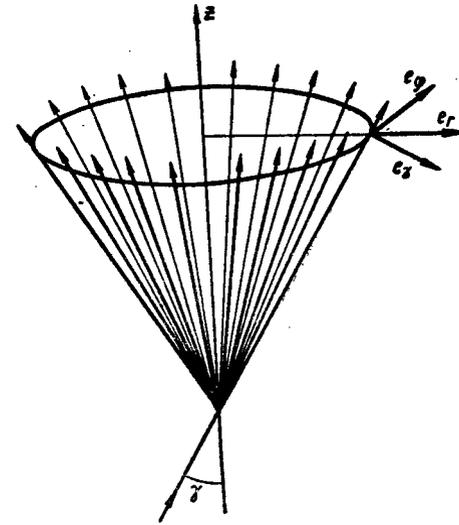


Рис. 15. Конус дифрагированных лучей.

строгое решение [23] в виде рядов по функциям Матье. Однако в квазиоптической области, когда ширина ленты велика по сравнению с длиной волны, эти ряды обладают плохой сходимостью и не пригодны для численных расчетов. Поэтому возникает потребность в приближенных формулах, пригодных в квазиоптической области. Вывод таких формул для поля, рассеянного лентой, будет дан в следующем параграфе.

## § 6. ДИФРАКЦИЯ НА ЛЕНТЕ

Рассмотрим дифракцию на бесконечно тонкой идеально проводящей ленте, имеющей ширину  $2a$  и неограниченную длину. Ориентация ленты в пространстве показана на рис. 16.

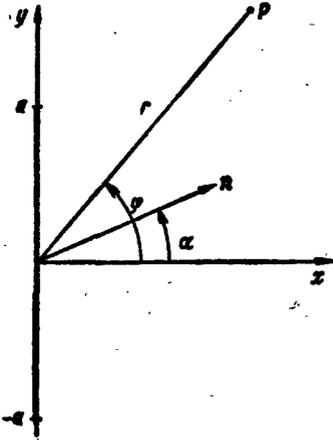


Рис. 16. Дифракция плоской волны на бесконечно длинной ленте. Отрезок оси  $y$  ( $-a \leq y \leq a$ ) изображает поперечное сечение ленты плоскостью  $z=0$ ,  $\alpha$  — угол падения.

Пусть нормально к краям ленты падает плоская электромагнитная волна, направление распространения которой составляет угол  $\alpha$  ( $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$ ) с плоскостью  $y=0$ . Поле этой волны можно представить в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}. \quad (6.01)$$

Равномерная часть тока, возбуждаемого плоской волной на ленте, имеет компоненты

$$\left. \begin{aligned} j_x^0 &= 0, \\ j_y^0 &= \frac{c}{2\pi} H_{0z} e^{iky \sin \alpha}, \\ j_z^0 &= \frac{c}{2\pi} E_{0z} \cos \alpha e^{iky \sin \alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (6.02)$$

Подставляя эти значения в формулу для вектор-потенциала

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int_{-a}^a \mathbf{j}^0(\eta) d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik\sqrt{x^2 + (y-\eta)^2 + z^2}}}{\sqrt{x^2 + (y-\eta)^2 + z^2}} d\zeta. \quad (6.03)$$

и принимая во внимание соотношения (3.05) и (1.18), получим следующие выражения в области  $r \gg ka^2$ :

$$\left. \begin{aligned} A_x &= 0, \\ A_y &= \frac{2}{k} H_{0z} \frac{\sin[ka(\sin \alpha - \sin \varphi)]}{\sin \alpha - \sin \varphi} \frac{e^{i(kr + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi kr}}, \\ A_z &= \frac{2}{k} E_{0z} \cos \alpha \frac{\sin[ka(\sin \alpha - \sin \varphi)]}{\sin \alpha - \sin \varphi} \frac{e^{i(kr + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi kr}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.04)$$

Компоненты рассеянного поля в цилиндрической системе координат равны

$$E_z = -H_\varphi = ikA_z, \quad H_z = E_\varphi = ikA_\varphi, \quad (6.05)$$

где

$$A_\varphi = A_y \cos \varphi - A_x \sin \varphi. \quad (6.06)$$

Подставляя сюда выражения (6.04), определим поле, излучаемое равномерной частью тока,

$$\left. \begin{aligned} E_z = -H_\varphi &= 2E_{0z} \cos \alpha \frac{\sin[ka(\sin \alpha - \sin \varphi)]}{\sin \alpha - \sin \varphi} \frac{e^{i(kr + \frac{3\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi kr}}, \\ E_\varphi = H_z &= 2H_{0z} \cos \varphi \frac{\sin[ka(\sin \alpha - \sin \varphi)]}{\sin \alpha - \sin \varphi} \frac{e^{i(kr + \frac{3\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi kr}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.07)$$

Это поле можно представить в виде цилиндрических волн, расходящихся от краев ленты

$$\left. \begin{aligned} E_z = -H_\varphi &= E_{0z} \cdot [f^0(1) e^{ika(\sin \alpha - \sin \varphi)} + \\ &+ f^0(2) e^{-ika(\sin \alpha - \sin \varphi)}] \frac{e^{i(kr + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi kr}}, \\ E_\varphi = H_z &= H_{0z} \cdot [g^0(1) e^{ika(\sin \alpha - \sin \varphi)} + \\ &+ g^0(2) e^{-ika(\sin \alpha - \sin \varphi)}] \frac{e^{i(kr + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi kr}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.08)$$

Первые слагаемые здесь соответствуют волнам от края 1 ( $y=a$ ), а вторые — волнам от края 2 ( $y=-a$ ). Функции  $f^0$  и  $g^0$  определяются в правом полупространстве ( $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$ ) формулами

$$\left. \begin{aligned} f^0(1) = -f^0(2) &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha - \sin \varphi}, \\ g^0(1) = -g^0(2) &= \frac{\cos \varphi}{\sin \alpha - \sin \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (6.09)$$

Найдем теперь поле, излучаемое неравномерной частью тока. Предполагая ленту достаточно широкой ( $ka \gg 1$ ), можно ток вблизи ее верхнего края приближенно считать таким же, как на идеально проводящей полуплоскости  $-\infty \leq y \leq a$ , а вблизи нижнего — таким, как на полуплоскости  $-a \leq y \leq \infty$ . Поэтому, согласно § 4, поле от неравномерной части тока, текущего на ленте, можно представить в виде суммы краевых цилиндрических волн

$$\left. \begin{aligned} E_z = -H_\varphi &= E_{0z} \cdot [f^1(1) e^{ika(\sin \alpha - \sin \varphi)} + \\ &+ f^1(2) e^{-ika(\sin \alpha - \sin \varphi)}] \frac{e^{i\left(kr + \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi kr}}, \\ E_\varphi = H_z &= H_{0z} \cdot [g^1(1) e^{ika(\sin \alpha - \sin \varphi)} + \\ &+ g^1(2) e^{-ika(\sin \alpha - \sin \varphi)}] \frac{e^{i\left(kr + \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi kr}}, \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

где функции  $f^1$  и  $g^1$  определяются в правом полупространстве ( $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$ ) формулами

$$\left. \begin{aligned} f^1(1) &= f(1) - f^0(1), & f^1(2) &= f(2) - f^0(2), \\ g^1(1) &= g(1) - g^0(1), & g^1(2) &= g(2) - g^0(2). \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= \frac{\cos \frac{\alpha + \varphi}{2} - \sin \frac{\alpha - \varphi}{2}}{\sin \alpha - \sin \varphi}, \\ f(2) &= -\frac{\cos \frac{\alpha + \varphi}{2} + \sin \frac{\alpha - \varphi}{2}}{\sin \alpha - \sin \varphi}, \\ g(1) &= \frac{\cos \frac{\alpha + \varphi}{2} + \sin \frac{\alpha - \varphi}{2}}{\sin \alpha - \sin \varphi}, \\ g(2) &= \frac{-\cos \frac{\alpha + \varphi}{2} + \sin \frac{\alpha - \varphi}{2}}{\sin \alpha - \sin \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

Функции  $f^0$  и  $g^0$  описываются соотношениями (6.09).

В результате рассеянное поле (сумма полей, излучаемых равномерной и неравномерной частями тока) будет равно

$$\left. \begin{aligned} E_z = -H_\varphi &= E_{0z} \cdot [f(1) e^{ika(\sin \alpha - \sin \varphi)} + \\ &+ f(2) e^{-ika(\sin \alpha - \sin \varphi)}] \frac{e^{i\left(kr + \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi kr}}, \\ E_\varphi = H_z &= H_{0z} \cdot [g(1) e^{ika(\sin \alpha - \sin \varphi)} + \\ &+ g(2) e^{-ika(\sin \alpha - \sin \varphi)}] \frac{e^{i\left(kr + \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi kr}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

Следовательно, результирующее поле выражается только через функции  $f$  и  $g$ , определяющие цилиндрическую волну в строгом решении (см. § 2), и является суперпозицией двух таких волн, расходящихся от краев 1 ( $y=a$ ) и 2 ( $y=-a$ ).

Подставляя в формулы (6.13) явные выражения

(6.12) для функций  $f$  и  $g$ , получим

$$\left. \begin{aligned} E_z = -H_\varphi = E_{oz} & \left\{ \frac{\cos [ka(\sin \alpha - \sin \varphi)]}{\cos \frac{\alpha + \varphi}{2}} + \right. \\ & \left. + i \frac{\sin [ka(\sin \alpha - \sin \varphi)]}{\sin \frac{\alpha - \varphi}{2}} \right\} \frac{e^{i(kr + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi kr}}, \\ E_\varphi = H_z = H_{oz} & \left\{ \frac{\cos [ka(\sin \alpha - \sin \varphi)]}{\cos \frac{\alpha + \varphi}{2}} + \right. \\ & \left. + i \frac{\sin [ka(\sin \alpha - \sin \varphi)]}{\sin \frac{\alpha - \varphi}{2}} \right\} \frac{e^{i(kr + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi kr}}. \end{aligned} \right\} (6.14)$$

Эти формулы справедливы при  $r \gg ka^2$  и  $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$ . Кроме того, предполагается, что  $ka \gg 1$ , так как только при этом условии можно считать неравномерную часть тока вблизи ребра ленты примерно такой же, как на соответствующей полуплоскости. В случае нормального падения плоской волны ( $\alpha = 0$ ) формулы (6.14) переходят в выражения, соответствующие первому приближению Шварцшильда [15].

Из соотношений (6.03) и (6.05) следует, что электрическое поле является четной, а магнитное — нечетной функцией координаты  $x$ , отсчитываемой перпендикулярно плоскости  $x=0$  (в которой течет ток)

$$E_z(x) = E_z(-x), \quad H_z(x) = -H_z(-x). \quad (6.15)$$

Поэтому на основании формул (6.14) и (6.15) можно написать выражения для рассеянного поля в области  $x < 0$  (где  $\frac{\pi}{2} \leq |\varphi| \leq \pi$ )

$$E_z = -H_\varphi = \pm E_{oz} \left\{ \frac{\cos [ka(\sin \alpha - \sin \varphi)]}{\sin \frac{\alpha - \varphi}{2}} - \right.$$

$$\left. \begin{aligned} & - i \frac{\sin [ka(\sin \alpha - \sin \varphi)]}{\cos \frac{\alpha + \varphi}{2}} \right\} \frac{e^{i(kr + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi kr}}, \\ E_\varphi = H_z = \pm H_{oz} & \left\{ \frac{\cos [ka(\sin \alpha - \sin \varphi)]}{\sin \frac{\alpha - \varphi}{2}} + \right. \\ & \left. + i \frac{\sin [ka(\sin \alpha - \sin \varphi)]}{\cos \frac{\alpha + \varphi}{2}} \right\} \frac{e^{i(kr + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi kr}}. \end{aligned} \right\} (6.16)$$

Верхний знак перед фигурными скобками здесь нужно брать при  $\varphi > 0$ , а нижний — при  $\varphi < 0$ .

Полученные формулы (6.14) и (6.16) в отличие от формул (6.07) удовлетворяют принципу взаимности. В этом нетрудно убедиться, проверив, что формула (6.14) не изменяется при одновременной замене  $\alpha$  на  $\varphi$  и  $\varphi$  на  $\alpha$ , а формула (6.16) — при замене  $\alpha$  на  $\pi - \varphi$  и  $\varphi$  на  $\alpha - \pi$  (если  $-\pi < \varphi < -\frac{\pi}{2}$ ) и при замене  $\alpha$  на  $\pi - \varphi$  и  $\varphi$  на  $\pi - \alpha$  (если  $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ ).

Однако указанные формулы приводят к разрыву тангенциальной составляющей  $H_z$  магнитного вектора на плоскости  $x=0$ . Это обстоятельство связано с тем, что, считая неравномерную часть тока вблизи края ленты такой же, как на соответствующей полуплоскости, мы фактически предполагаем наличие токов на всей плоскости, содержащей ленту. Чтобы уточнить полученные выражения, нужно решить задачу о вторичной дифракции, т. е. о дифракции волны, идущей от одного края ленты, на другом ее крае. Иначе говоря, необходимо принять во внимание дифракционное взаимодействие краев ленты. Как мы видим, в учете вторичной дифракции нуждается и случай  $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ , когда должна быть равна нулю компонента  $H_z$  рассеянного поля.

В гл. V мы вернемся к задаче о дифракции на ленте и наряду с рассмотрением вторичной дифракции приведем результаты численных расчетов по формулам (6.07), (6.14) и (6.16).

## ГЛАВА II ДИФРАКЦИЯ НА ДИСКЕ

Задача о дифракции на диске имеет строгое решение [24—26], однако оно непригодно для численных расчетов в квазиоптической области, когда размеры диска велики по сравнению с длиной волны. Между тем, используемое в таких случаях приближение физической оптики дает иногда ошибочные результаты. В частности, рассеянное поле, вычисленное в этом приближении, не удовлетворяет принципу взаимности.

В данной главе проводится уточнение приближения физической оптики. Сначала рассматривается дифракция плоской электромагнитной волны на диске при нормальном падении (§ 7—9), а затем (§ 10—12) — при наклонном падении.

### НОРМАЛЬНОЕ ОБЛУЧЕНИЕ

#### § 7. ПРИБЛИЖЕНИЕ ФИЗИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

Пусть идеально проводящий бесконечно тонкий диск радиуса  $a$  (рис. 17) облучается плоской волной

$$\left. \begin{aligned} E_y &= -H_x = -H_{0x} e^{ikz}, \\ E_x &= H_y = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.01)$$

Равномерная часть тока, возбуждаемая на диске волной (7.01), определяется формулой (3.01) и имеет компоненты

$$j_y^0 = -\frac{c}{2\pi} H_{0x}, \quad j_x^0 = j_z^0 = 0. \quad (7.02)$$

Найдем поле, создаваемое этим током.

Поскольку нас интересует дифракционное поле в дальней зоне ( $R \gg ka^2$ ), то вектор-потенциал

$$A(x, y, z) = \frac{1}{c} \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} J(\rho, \psi) \frac{e^{ikr}}{r} d\psi \quad (7.03)$$

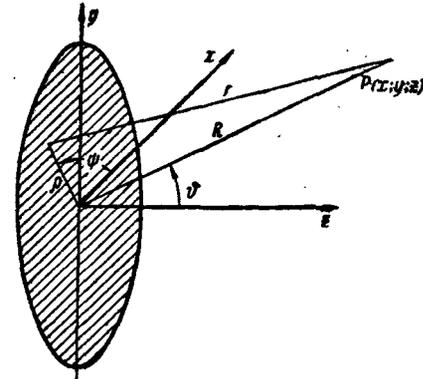


Рис. 17. Дифракция на диске плоской волны, распространяющейся вдоль оси  $z$ .

можно упростить, пользуясь соотношением

$$r = \sqrt{R^2 + \rho^2 - 2\rho R \cos \Omega} \approx R - \rho \cos \Omega, \quad (7.04)$$

где  $\Omega$  — угол между  $\rho$  и  $R$ , а

$$\cos \Omega = \sin \theta \cos(\psi - \varphi). \quad (7.05)$$

В результате получим более простую формулу

$$A(x, y, z) = \frac{1}{c} \frac{e^{ikR}}{R} \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} J(\rho, \psi) e^{-ik\rho \cos \Omega} d\psi. \quad (7.06)$$

Исходя далее из уравнений

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \text{rot } \mathbf{H} = -ik\mathbf{E}, \quad (7.07)$$

легко показать, что в сферической системе координат компоненты рассеянного поля при  $R \gg ka^2$  равны

$$\left. \begin{aligned} E_\theta &= H_\varphi = ikA_\theta, \\ E_\varphi &= -H_\theta = ikA_\varphi, \\ E_R &= H_R = 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.08)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_\varphi &= A_y \cos \varphi - A_x \sin \varphi, \\ A_\theta &= (A_x \cos \varphi + A_y \sin \varphi) \cos \theta - A_z \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (7.09)$$

Подставляя сюда значения

$$\left. \begin{aligned} A_y &= -H_{0x} \cdot \frac{a}{k \sin \vartheta} J_1(ka \sin \vartheta) \frac{e^{ikR}}{R}, \\ A_x &= A_z = 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

вытекающие из формул (7.02) и (7.06), находим поле, излучаемое равномерной частью тока, в виде

$$\left. \begin{aligned} E_\vartheta &= H_\varphi = -iaH_{0x} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta} \cos \vartheta J_1(ka \sin \vartheta) \frac{e^{ikR}}{R}, \\ E_\varphi &= -H_\vartheta = -iaH_{0x} \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin \vartheta} J_1(ka \sin \vartheta) \frac{e^{ikR}}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

Функция  $J_1(ka \sin \vartheta)$  есть функция Бесселя первого порядка. Пользуясь ее асимптотическим выражением

$$J_1(ka \sin \vartheta) = \sqrt{\frac{2}{\pi ka \sin \vartheta}} \cos \left( ka \sin \vartheta - \frac{3\pi}{4} \right), \quad (7.12)$$

пригодным при  $ka \sin \vartheta \gg 1$ , можно переписать формулы (7.11) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} E_\vartheta &= H_\varphi = -iH_{0x} \sqrt{\frac{a}{2\pi k \sin \vartheta}} \cos \vartheta \frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta} \times \\ &\times \left[ e^{-i \left( ka \sin \vartheta - \frac{3\pi}{4} \right)} + e^{i \left( ka \sin \vartheta - \frac{3\pi}{4} \right)} \right] \frac{e^{ikR}}{R}, \\ E_\varphi &= -H_\vartheta = -iH_{0x} \sqrt{\frac{a}{2\pi k \sin \vartheta}} \frac{\cos \varphi}{\sin \vartheta} \times \\ &\times \left[ e^{-i \left( ka \sin \vartheta - \frac{3\pi}{4} \right)} + e^{i \left( ka \sin \vartheta - \frac{3\pi}{4} \right)} \right] \frac{e^{ikR}}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

Полученные формулы показывают, что в области  $R \gg ka^2$ ,  $ka \sin \vartheta \gg 1$  рассеянное поле можно рассматривать как сумму сферических волн от двух „светящихся“ точек на ободе диска, полярный угол которых соответственно равен  $\psi = \varphi$  и  $\psi = \pi + \varphi$ . Нетрудно видеть, что эти волны удовлетворяют принципу Ферма. Действительно, из всех точек на поверхности диска точка  $\rho = a$ ,  $\psi = \varphi$  является ближайшей к точке наблюдения  $(R, \vartheta, \varphi)$ , а точка  $\rho = a$ ,  $\psi = \pi + \varphi$  — наиболее удаленной от нее.

Однако формулы (7.13) описывают излучение не только от двух „светящихся“ точек. Они определяют поле, излучаемое целой „светящейся“ областью, которая прилегает к линии, соединяющей точки  $\rho = a$ ,  $\psi = \varphi$  и  $\rho = a$ ,  $\psi = \pi + \varphi$ .

Покажем, что светящаяся область действительно дает основной вклад в рассеянное поле. С этой целью вычислим поле, излучаемое токами, которые текут внутри сектора, охватывающего линию  $\psi = \varphi$  (рис. 18). Угловые размеры сектора возьмем такими, чтобы его дуга,

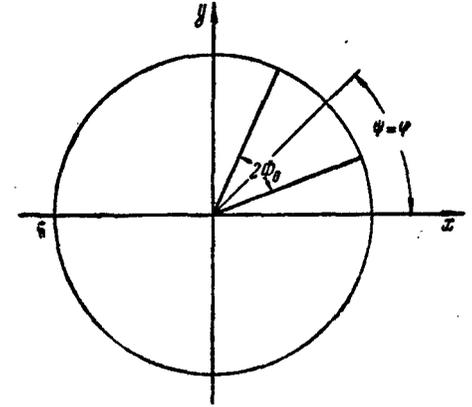


Рис. 18. К расчету поля, излучаемого „светящейся“ областью диска.

равная  $2a\Phi_0$ , занимала первую зону Френеля. При этом угол  $\Phi_0$  будет удовлетворять уравнению

$$a(1 - \cos \Phi_0) \sin \vartheta = \frac{\lambda}{4}. \quad (7.14)$$

В рассматриваемом нами случае, когда выполняется условие  $ka \sin \vartheta \gg 1$ , из формулы (7.14) имеем

$$\cos \Phi_0 = 1 - \frac{\lambda}{4a \sin \vartheta} \approx 1 - \frac{\Phi_0^2}{2}, \quad (7.15)$$

откуда

$$\Phi_0 = \sqrt{\frac{\pi}{ka \sin \vartheta}}. \quad (7.16)$$

Вектор-потенциал токов, текущих в указанном секторе, определяется формулой

$$\left. \begin{aligned} A_y &= -\frac{1}{2\pi} H_{0x} \frac{e^{ikR}}{R} \int_{-\Phi_0}^{\Phi_0} d\psi \int_0^a e^{-ik\rho \sin \vartheta \cos \psi} \rho d\rho, \\ A_x &= A_z = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.17)$$

Принимая во внимание условие  $ka \sin \theta \gg 1$ , можно показать, что поле, создаваемое токами данного сектора, будет равно

$$\left. \begin{aligned} E_{\theta} &= H_{\varphi} \sim H_{0x} \sqrt{\frac{a}{\pi k \sin \theta}} \cos \theta \times \\ &\times \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \frac{e^{ikR}}{R} e^{-ika \sin \theta + i\frac{\pi}{5}} + 0 \left( \frac{1}{\sqrt{ka \sin \theta}} \right), \\ E_{\varphi} &= -H_{\theta} \sim H_{0x} \sqrt{\frac{a}{\pi k \sin \theta}} \times \\ &\times \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \frac{e^{ikR}}{R} e^{-ika \sin \theta + i\frac{\pi}{5}} + 0 \left( \frac{1}{\sqrt{ka \sin \theta}} \right). \end{aligned} \right\} (7.18)$$

Амплитуда найденных выражений примерно в  $\sqrt{2}$  раз больше амплитуды первых членов в формуле (7.13). Кроме того, выражения (7.18) и соответствующие члены в формуле (7.13) несколько отличаются своими

фазами: первые имеют множитель  $e^{i\frac{\pi}{5}}$ , а последние —  $e^{i\frac{\pi}{4}}$ . Полученный результат аналогичен известному в оптике положению, что действие волны равно действию половины первой зоны Френеля (см., например, [27], стр. 132).

Вблизи направлений  $\theta=0$  и  $\theta=\pi$ , когда азимутальные компоненты теряют смысл, для исследования рассеянного поля удобнее пользоваться декартовыми компонентами.

$$\left. \begin{aligned} E_x &= (E_{\theta} \cos \theta + E_R \sin \theta) \cos \varphi - E_{\varphi} \sin \varphi, \\ E_y &= (E_{\theta} \cos \theta + E_R \sin \theta) \sin \varphi + E_{\varphi} \cos \varphi. \end{aligned} \right\} (7.19)$$

Обращаясь к формулам (7.11), находим, что при  $\theta=0$  и  $\theta=\pi$

$$E_x = 0, \quad E_y = -iH_{0x} \cdot \frac{ka^2}{2} \cdot \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (7.20)$$

Следовательно, в приближении физической оптики поле, рассеянное в направлениях  $\theta=0$  и  $\theta=\pi$ , сохраняет поляризацию падающей волны.

### § 8. ПОЛЕ ОТ НЕРАВНОМЕРНОЙ ЧАСТИ ТОКА

Переходим к вычислению поля, создаваемого неравномерной частью тока при нормальном облучении диска. Так как последняя сосредоточена в основном вблизи края диска ( $\rho=a$ ), то соответствующий ей вектор-потенциал будет согласно формуле (7.03) равен

$$A = \frac{a}{c} \frac{e^{ikR}}{R} \int_0^a d\rho \int_0^{2\pi} J^1(\rho, \psi) e^{-ik\rho \sin \theta \cos(\psi-\varphi)} d\psi. \quad (8.01)$$

Внутренний интеграл вычисляется при  $ka \sin \theta \gg 1$  по методу стационарной фазы (см., например, [21], стр. 256) и формула (8.01) преобразуется к виду

$$A(x, y, z) = \frac{a}{c} \sqrt{\frac{2\pi}{ka \sin \theta}} \frac{e^{ikR}}{R} e^{i\frac{\pi}{4}} \times \\ \times \left[ \int_0^a J^1(\rho, \psi_1) e^{-ik\rho \sin \theta} d\rho - i \int_0^a J^1(\rho, \psi_2) e^{ik\rho \sin \theta} d\rho \right], \quad (8.02)$$

который позволяет интерпретировать рассеянное поле, как поле от светящейся линии на диске. Эта линия есть диаметр, полярный угол  $\psi$  точек на этом диаметре равен

$$\psi_1 = \varphi \text{ и } \psi_2 = \pi + \varphi. \quad (8.03)$$

Предполагая диаметр диска достаточно большим по сравнению с длиной волны ( $ka \gg 1$ ), можно приближенно считать, что неравномерная часть тока вблизи края диска будет такой же, как на соответствующей полуплоскости (рис. 19). На основании § 4 поле от неравномерной части тока, текущего на полуплоскости  $-\infty \leq y_1 \leq a$ , можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} E_{x_1}(1) &= ikA_{x_1}(1) = E_{0x_1} \cdot f^1(1) \frac{e^{i(kR + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi kR}} e^{-ika \sin \theta}, \\ H_{x_1}(1) &= -ikA_{y_1}(1) \cos \theta = \\ &= H_{0x_1} \cdot g^1(1) \frac{e^{i(kR + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi kR}} e^{-ika \sin \theta}, \end{aligned} \right\} (8.04)$$

и аналогично — поле от тока, текущего на полуплоскости  $-a \leq y_1 \leq \infty$ ,

$$\left. \begin{aligned} E_{x_1}(2) &= ikA_{x_1}(2) = E_{0x_1} \cdot f^1(2) \frac{e^{i(kR + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi kR}} e^{ika \sin \theta}, \\ H_{x_1}(2) &= -ikA_{y_1}(2) \cos \theta = H_{0x_1} \cdot g^1(2) \frac{e^{i(kR + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi kR}} e^{ika \sin \theta}. \end{aligned} \right\} (8.05)$$

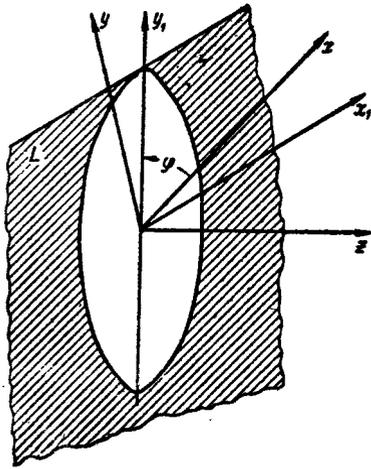


Рис. 19. К дифракции на диске. Полуплоскость  $L$  лежит в плоскости диска. Ребро полуплоскости является касательной к окружности диска в точке  $y_1 = a, x_1 = 0$  ( $a$  — радиус диска).

Здесь

$$\left. \begin{aligned} A(1) &= \frac{1}{c} \sqrt{\frac{2\pi}{kR}} e^{i(kR + \frac{\pi}{4})} \int_{-\infty}^a j^1(\eta) e^{-ik\eta \sin \theta} d\eta, \\ A(2) &= \frac{1}{c} \sqrt{\frac{2\pi}{kR}} e^{i(kR + \frac{\pi}{4})} \int_{-\infty}^a j^1(\eta) e^{ik\eta \sin \theta} d\eta, \end{aligned} \right\} (8.06)$$

а функции  $f^1$  и  $g^1$  определяются для правого полупространства ( $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ) формулами

$$\left. \begin{aligned} f^1(1) &= f(1) + \frac{1}{\sin \theta}, \quad f(1) = -\frac{\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}}{\sin \theta}, \\ f^1(2) &= f(2) - \frac{1}{\sin \theta}, \quad f(2) = \frac{\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2}}{\sin \theta}; \end{aligned} \right\} (8.07)$$

$$\left. \begin{aligned} g^1(1) &= g(1) + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \quad g(1) = -\frac{\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2}}{\sin \theta}, \\ g^1(2) &= g(2) - \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \quad g(2) = \frac{\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}}{\sin \theta}. \end{aligned} \right\} (8.08)$$

Из соотношений (8.04) — (8.06) следует, что

$$\left. \begin{aligned} &\int_{-\infty}^a j_{x_1}^1(\eta) e^{-ik\eta \sin \theta} d\eta = \\ &= -\frac{ic}{2\pi k} E_{0x_1} \cdot f^1(1) e^{-ika \sin \theta}, \\ &\int_{-\infty}^a j_{x_1}^1(\eta) e^{ik\eta \sin \theta} d\eta = \\ &= -\frac{ic}{2\pi k} E_{0x_1} \cdot f^1(2) e^{ika \sin \theta} \end{aligned} \right\} (8.09)$$

и

$$\left. \begin{aligned} &\int_{-\infty}^a j_{y_1}^1(\eta) e^{-ik\eta \sin \theta} d\eta = \\ &= \frac{ic}{2\pi k \cos \theta} H_{0x_1} \cdot g^1(1) e^{-ika \sin \theta}, \\ &\int_{-\infty}^a j_{y_1}^1(\eta) e^{ik\eta \sin \theta} d\eta = \\ &= \frac{ic}{2\pi k \cos \theta} H_{0x_1} \cdot g^1(2) e^{ika \sin \theta}. \end{aligned} \right\} (8.10)$$

В соответствии с предположением о тождественности токов на диске и полуплоскости можно считать справедливыми следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^a j^1(\rho, \psi_1) e^{-ik\rho \sin \theta} d\rho &= \int_{-\infty}^a j^1(\eta) e^{-ik\eta \sin \theta} d\eta, \\ \int_0^a j^1(\rho, \psi_2) e^{ik\rho \sin \theta} d\rho &= \int_{-\infty}^a j^1(\eta) e^{ik\eta \sin \theta} d\eta. \end{aligned} \right\} (8.11)$$

Поэтому поле от неравномерной части тока, текущего на диске, будет равно

$$\left. \begin{aligned} E_{\varphi} = -H_{\vartheta} &= \frac{iaE_{0\varphi}}{\sqrt{2\pi ka \sin \vartheta}} \left[ f^1(2) e^{i\left(ka \sin \vartheta - \frac{3\pi}{4}\right)} - \right. \\ &\quad \left. - f^1(1) e^{-i\left(ka \sin \vartheta - \frac{3\pi}{4}\right)} \right] \frac{e^{ikR}}{R}, \\ E_{\vartheta} = H_{\varphi} &= \frac{iaH_{0\varphi}}{\sqrt{2\pi ka \sin \vartheta}} \left[ g^1(2) e^{i\left(ka \sin \vartheta - \frac{3\pi}{4}\right)} - \right. \\ &\quad \left. - g^1(1) e^{-i\left(ka \sin \vartheta - \frac{3\pi}{4}\right)} \right] \frac{e^{ikR}}{R}, \end{aligned} \right\} (8.12)$$

где в силу (7.01)

$$E_{0\varphi} = -H_{0x} \cos \varphi, \quad H_{0\varphi} = -H_{0x} \sin \varphi. \quad (8.13)$$

Для направления  $\vartheta = 0$  по формуле (8.01) имеем

$$A = \frac{a}{c} \cdot \frac{e^{ikR}}{R} \cdot \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^a j^1(\rho, \psi) d\rho, \quad (8.14)$$

но согласно равенствам (8.09) — (8.11)

$$\left. \begin{aligned} \int_0^a j_{x_1}^1(\rho, \psi) d\rho &= \frac{ic}{4\pi k} H_{0x} \cdot \cos \psi, \\ \int_0^a j_{y_1}^1(\rho, \psi) d\rho &= \frac{ic}{4\pi k} H_{0x} \sin \psi. \end{aligned} \right\} (8.15)$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} A_x &= \frac{a}{c} \frac{e^{ikR}}{R} \cdot \left[ \int_0^{2\pi} \cos \psi d\psi \int_0^a j_{y_1}^1(\rho, \psi) d\rho + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{2\pi} \sin \psi d\psi \int_0^a j_{x_1}^1(\rho, \psi) d\rho \right] = 0, \\ A_y &= \frac{a}{c} \frac{e^{ikR}}{R} \cdot \left[ - \int_0^{2\pi} \cos \psi d\psi \int_0^a j_{x_1}^1(\rho, \psi) d\rho + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{2\pi} \sin \psi d\psi \int_0^a j_{y_1}^1(\rho, \psi) d\rho \right] = 0, \end{aligned} \right\} (8.16)$$

т. е. в направлении главного лепестка ( $\vartheta = 0$ ) поле от неравномерной части тока равно нулю.

С помощью функций Бесселя  $J_1$  и  $J_2$  для поля от неравномерной части тока можно написать формулы

$$\left. \begin{aligned} E_{\varphi} = -H_{\vartheta} &= \frac{iaE_{0\varphi}}{2} \{ [f^1(2) - f^1(1)] J_1(ka \sin \vartheta) + \\ &\quad + i [f^1(2) + f^1(1)] J_2(ka \sin \vartheta) \} \frac{e^{ikR}}{R}, \\ E_{\vartheta} = H_{\varphi} &= \frac{iaH_{0\varphi}}{2} \{ [g^1(2) - g^1(1)] J_1(ka \sin \vartheta) + \\ &\quad + i [g^1(2) + g^1(1)] J_2(ka \sin \vartheta) \} \frac{e^{ikR}}{R}, \end{aligned} \right\} (8.17)$$

которые при  $ka \sin \vartheta \gg 1$  переходят в уже найденные выражения (8.12). В направлении  $\vartheta = 0$  эти формулы дают поле, равное в соответствии с (8.16) нулю, а при промежуточных значениях являются интерполяционными. Поскольку переход от формул (8.12) к формулам (8.17) не является вполне однозначным, то в интервале углов  $0 < \vartheta \leq \frac{1}{ka}$  формулы (8.17) могут давать некоторую ошибку, последняя не очень существенна, так как в этом интервале велико поле от равномерной части тока.

### § 9. ПОЛНОЕ ПОЛЕ, РАССЕИВАЕМОЕ ДИСКОМ ПРИ НОРМАЛЬНОМ ОБЛУЧЕНИИ

Обращаясь к формулам (8.07), (8.08) и (8.17), представим поле от неравномерной части тока в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} E_{\varphi} = -H_{\vartheta} &= iaH_{0x} \frac{\cos \varphi}{\sin \vartheta} J_1(ka \sin \vartheta) \frac{e^{ikR}}{R} - \\ &\quad - \frac{iaH_{0x}}{2} \{ [f(2) - f(1)] J_1(ka \sin \vartheta) + \\ &\quad + i [f(2) + f(1)] J_2(ka \sin \vartheta) \} \cos \varphi \frac{e^{ikR}}{R}, \\ E_{\vartheta} = H_{\varphi} &= iaH_{0x} \frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta} \cos \vartheta J_1(ka \sin \vartheta) \frac{e^{ikR}}{R} - \\ &\quad - \frac{iaH_{0x}}{2} \{ [g(2) - g(1)] J_1(ka \sin \vartheta) + \\ &\quad + i [g(2) + g(1)] J_2(ka \sin \vartheta) \} \sin \varphi \frac{e^{ikR}}{R}. \end{aligned} \right\} (9.01)$$

Первые слагаемые здесь, как нетрудно видеть, представляют собой взятое с обратным знаком поле от равномерной части тока. В результате полное поле, рассеянное диском (т. е. сумма полей, излучаемых равномерной и неравномерной частями тока), будет выражаться только через функции  $f$  и  $g$ , определяющие в строгом решении цилиндрическую волну от края полуплоскости

$$\left. \begin{aligned} E_{\varphi} = -H_{\vartheta} &= -\frac{iaH_{0x}}{2} \cos \varphi \left\{ [f(2) - \right. \\ & - f(1)] J_1(ka \sin \vartheta) + i [f(2) + \\ & \left. + f(1)] J_2(ka \sin \vartheta) \right\} \frac{e^{ikR}}{R}, \\ E_{\vartheta} = H_{\varphi} &= -\frac{iaH_{0x}}{2} \sin \varphi \left\{ [g(2) - \right. \\ & - g(1)] J_1(ka \sin \vartheta) + i [g(2) + \\ & \left. + g(1)] J_2(ka \sin \vartheta) \right\} \frac{e^{ikR}}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (9.02)$$

Подставляя сюда явные выражения функций  $f$  и  $g$ , приходим к окончательным выражениям для рассеянного поля

$$\left. \begin{aligned} E_{\varphi} = -H_{\vartheta} &= -\frac{iaH_{0x}}{2} \left[ \frac{J_1(ka \sin \vartheta)}{\sin \frac{\vartheta}{2}} - \right. \\ & \left. - i \frac{J_2(ka \sin \vartheta)}{\cos \frac{\vartheta}{2}} \right] \frac{e^{ikR}}{R} \cos \varphi, \\ E_{\vartheta} = H_{\varphi} &= -\frac{iaH_{0x}}{2} \left[ \frac{J_1(ka \sin \vartheta)}{\sin \frac{\vartheta}{2}} + \right. \\ & \left. + i \frac{J_2(ka \sin \vartheta)}{\cos \frac{\vartheta}{2}} \right] \frac{e^{ikR}}{R} \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (9.03)$$

Эти формулы справедливы в правом полупространстве ( $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$ ). В левом полупространстве ( $\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \pi$ ) рассеянное поле легко найти, учитывая, что его электрическое поле есть четная, а магнитное — нечетная функция координаты  $z$ :

$$\left. \begin{aligned} E_{\varphi}(z) &= E_{\varphi}(-z), \\ H_{\varphi}(z) &= -H_{\varphi}(-z). \end{aligned} \right\} \quad (9.04)$$

Следовательно, в области  $z < 0$  (т. е. при  $\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \pi$ )

$$\left. \begin{aligned} E_{\varphi} = -H_{\vartheta} &= -\frac{iaH_{0x}}{2} \left[ \frac{J_1(ka \sin \vartheta)}{\cos \frac{\vartheta}{2}} - \right. \\ & \left. - i \frac{J_2(ka \sin \vartheta)}{\sin \frac{\vartheta}{2}} \right] \frac{e^{ikR}}{R} \cos \varphi, \\ E_{\vartheta} = H_{\varphi} &= \frac{iaH_{0x}}{2} \left[ \frac{J_1(ka \sin \vartheta)}{\cos \frac{\vartheta}{2}} + \right. \\ & \left. + i \frac{J_2(ka \sin \vartheta)}{\sin \frac{\vartheta}{2}} \right] \frac{e^{ikR}}{R} \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (9.05)$$

Полагая в формулах (9.03) и (9.05) соответственно  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = \pi$ , получим

$$E_y = -\frac{ika^2}{2} \cdot H_{0x} \cdot \frac{e^{ikR}}{R}, \quad E_x = 0, \quad (9.06)$$

что эквивалентно приближению физической оптики [см. формулу (7.20)].

Выражения (9.03) и (9.05) согласуются с результатом Браунбека [29] для рассеянного скалярного поля в дальней зоне. Эти выражения интересно также сравнить с точными численными результатами, полученными Белкиной [34] методом разделения переменных в сферической системе координат. Оказывается, что уже при  $ka = 5$

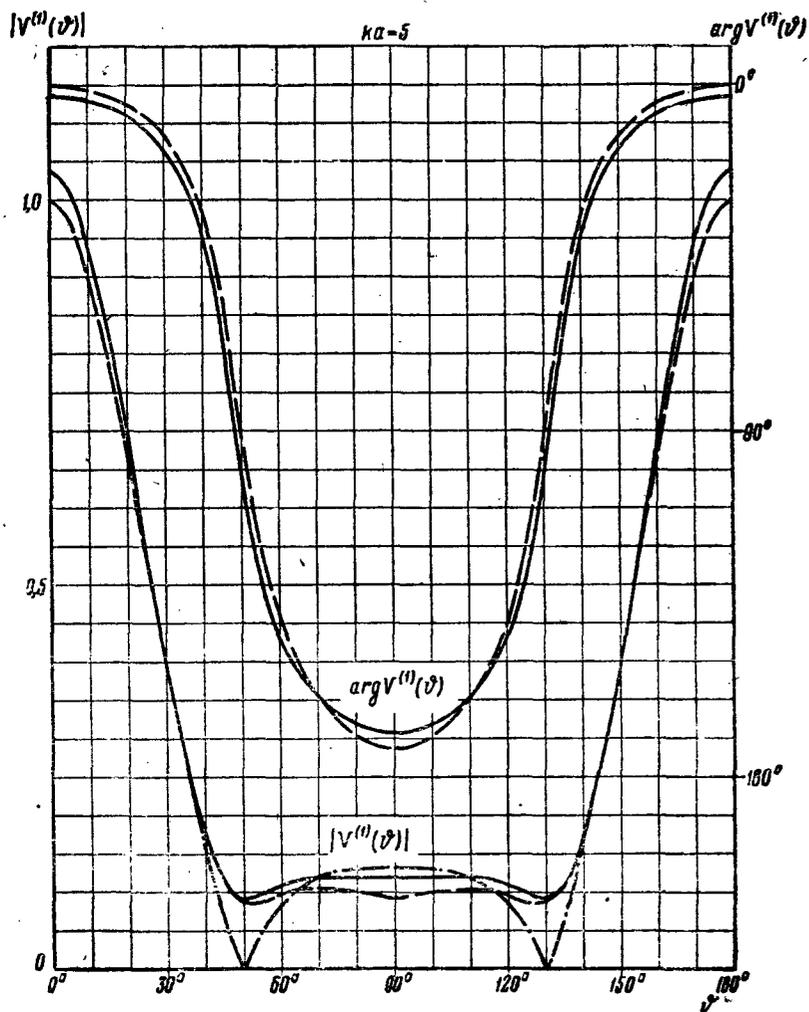


Рис. 20. Функция  $V^{(1)}(\theta)$  для диска при нормальном падении волны. Различные кривые соответствуют разным приближениям.

наблюдается удовлетворительное согласие между нашим приближенным методом и строгой теорией. На рис. 20 и 21 приведены графики функций  $V^{(1)}(\theta)$  и  $V^{(2)}(\theta)$ , позволяющих вычислять рассеянное поле по формулам

$$\left. \begin{aligned} E_{\varphi} = -H_{\theta} &= \frac{ika^2}{2} E_{0y} \cdot V^{(1)}(\theta) \frac{e^{ikR}}{R} \cos \varphi, \\ E_{\theta} = H_{\varphi} &= \frac{ika^2}{2} E_{0y} \cdot V^{(2)}(\theta) \frac{e^{ikR}}{R} \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (9.07)$$

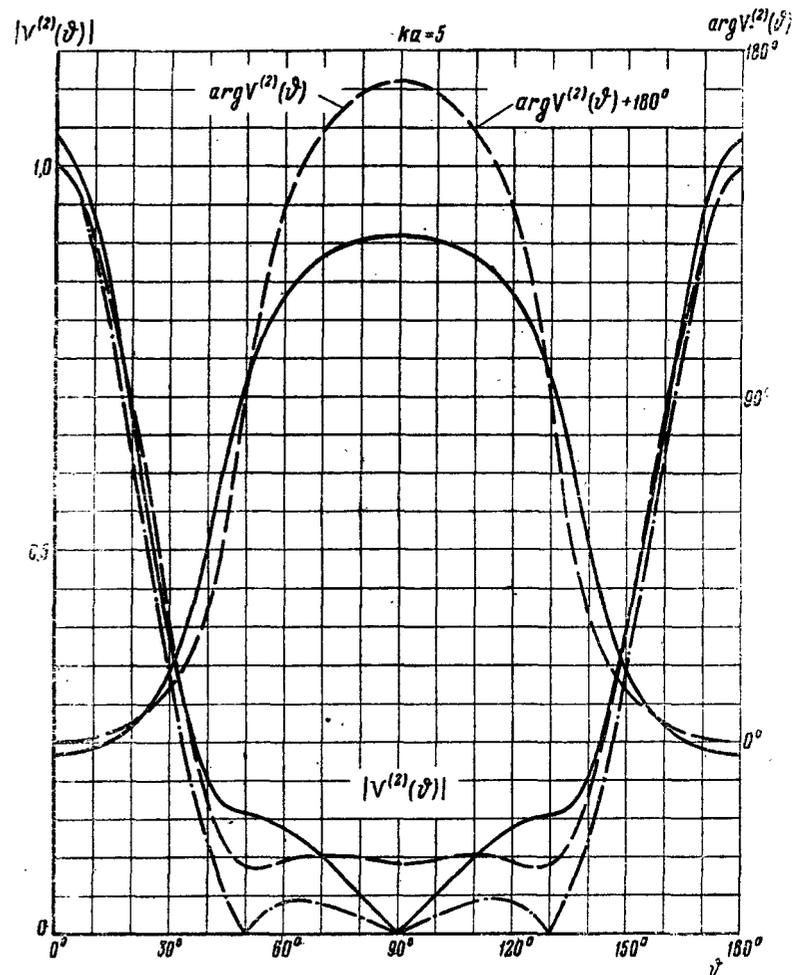


Рис. 21. Функция  $V^{(2)}(\theta)$  для диска при нормальном падении плоской волны. Различные кривые соответствуют разным приближениям.

Непрерывная кривая соответствует строгой теории [34], штрих-пунктирная — полю от равномерной части тока и штриховая — полю согласно формулам (9.03) и (9.05).

## НАКЛОННОЕ ОБЛУЧЕНИЕ

### § 10. ПРИБЛИЖЕНИЕ ФИЗИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

Рассмотрим общий случай, когда на диск падает плоская волна

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{ik(y \sin \gamma + z \cos \gamma)} \quad (10.01)$$

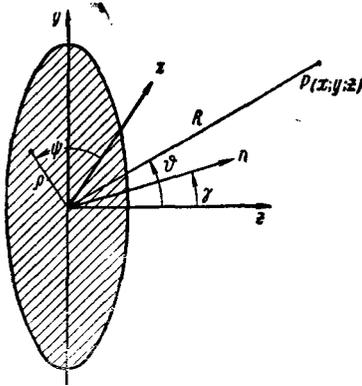


Рис. 22. Наклонное падение плоской волны на диск,  $n$  — нормаль к фронту падающей волны.

волной (10.01), определяется компонентами

$$j_x^0 = \frac{c}{2\pi} H_{0y} \cdot e^{iky \sin \gamma}, \quad j_y^0 = -\frac{c}{2\pi} H_{0x} e^{iky \sin \gamma}, \quad j_z^0 = 0. \quad (10.02)$$

Излучаемое ею поле находится, как и в § 7, интегрированием (при условии  $R \gg ka^2$ ). В случае  $E$ -поляризации падающей волны ( $E_0 \perp yoz$ ) это поле равно

$$\left. \begin{aligned} E_\theta = H_\varphi &= iaE_{0x} \cdot \cos \gamma \cos \vartheta \cos \varphi \frac{J_1(ka\sqrt{\lambda^2 + \mu^2})}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \frac{e^{ikR}}{R}, \\ E_\varphi = -H_\theta &= -iaE_{0x} \cdot \cos \gamma \sin \varphi \frac{J_1(ka\sqrt{\lambda^2 + \mu^2})}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \frac{e^{ikR}}{R}, \end{aligned} \right\} \quad (10.03)$$

под произвольным углом к его оси. Сферическую систему координат выберем так, чтобы нормаль к фронту падающей волны  $n$  лежала в полуплоскости  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  и составляла угол  $\gamma$  ( $0 \leq \gamma < \frac{\pi}{2}$ ) с осью  $z$  (рис.

22). Придерживаясь порядка изложения, принятого в предыдущих параграфах, вычислим сначала рассеянное поле в приближении физической оптики.

Равномерная часть тока, возбуждаемая на диске формулой (3.01) и имеет

а в случае  $H$ -поляризации ( $H_0 \perp yoz$ )

$$\left. \begin{aligned} E_\theta = H_\varphi &= -iaH_{0x} \cos \vartheta \sin \varphi \frac{J_1(ka\sqrt{\lambda^2 + \mu^2})}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \frac{e^{ikR}}{R}, \\ E_\varphi = -H_\theta &= -iaH_{0x} \cos \varphi \frac{J_1(ka\sqrt{\lambda^2 + \mu^2})}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \frac{e^{ikR}}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (10.04)$$

Величины  $\lambda$  и  $\mu$ , входящие в формулы (10.03) и (10.04), определяются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \sin \vartheta \cos \varphi, \\ \mu &= \sin \vartheta \sin \varphi - \sin \gamma, \\ \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} &\geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.05)$$

Полагая в полученных выражениях  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$  и  $\vartheta = \pi - \gamma$  ( $\frac{\pi}{2} < \vartheta \leq \pi$ ), найдем поле, рассеянное диском в направлении на источник. При  $E$ -поляризации падающей волны оно равно

$$\left. \begin{aligned} E_\varphi = -H_\theta &= -\frac{iaE_{0x} \cos \vartheta}{2 \sin \vartheta} J_1(2ka \sin \vartheta) \frac{e^{ikR}}{R}, \\ E_\theta = H_\varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.06)$$

а при  $H$ -поляризации

$$\left. \begin{aligned} E_\theta = H_\varphi &= \frac{iaH_{0x} \cos \vartheta}{2 \sin \vartheta} J_1(2ka \sin \vartheta) \frac{e^{ikR}}{R}, \\ E_\varphi = H_\theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.07)$$

Пользуясь асимптотическими выражениями для функций Бесселя, можно показать, что при  $R \gg ka^2$  и  $ka\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \gg 1$  рассеянное поле есть излучение от светящейся области на диске. В случае, когда  $\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \rightarrow 0$ , светящаяся область увеличивается, и в пределе (при  $\lambda = \mu = 0$ ) начинает «светиться» вся поверхность диска.

### § 11. ПОЛЕ, ИЗЛУЧАЕМОЕ НЕРАВНОМЕРНОЙ ЧАСТЬЮ ТОКА

Приступим к вычислению поля от неравномерной части тока

$$j^1(\rho, \psi) = J(\rho, \psi) e^{ik\rho \sin \gamma \sin \psi} \quad (11.01)$$

Соответствующий ей вектор-потенциал

$$A = \frac{a}{c} \frac{e^{ikR}}{R} \int_0^a d\rho \int_0^{2\pi} J(\rho, \psi) e^{-ik\rho\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \cos(\psi - \delta)} d\psi \quad (11.02)$$

с помощью метода стационарной фазы преобразуется при  $ka\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \gg 1$  к виду

$$A = \frac{a}{c} \sqrt{\frac{2\pi}{ka\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}} e^{i\frac{\pi}{4}} \left[ \int_0^a J(\rho, \psi_1) e^{-ik\rho\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} d\rho - i \int_0^a J(\rho, \psi_2) e^{ik\rho\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} d\rho \right] \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (11.03)$$

Здесь

$$\psi_1 = \delta, \quad \psi_2 = \pi + \delta \quad (11.04)$$

— точки стационарной фазы, а величина  $\delta$  определена равенствами

$$\sin \delta = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}, \quad \cos \delta = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}. \quad (11.05)$$

Из формулы (11.03) следует, что при  $R \gg ka^2$  и  $ka\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \gg 1$  основной вклад в рассеянное поле дает светящаяся область, прилегающая к линии  $\psi = \psi_1, \psi = \psi_2$ . Таким образом, точки стационарной фазы  $\psi_1, \psi_2$  физически соответствуют светящейся линии на поверхности диска.

Для того, чтобы вычислить вектор-потенциал (11.03), нам нужно предварительно выразить неравномерную часть тока на полуплоскости через ее поле в дальней зоне. С этой целью введем вспомогательные системы координат  $x_1, y_1$  и  $x_2, y_2$  (см. рис. 23) и примем следующие обозначения:

- $\alpha_1, \beta_1 (\alpha_2, \beta_2)$  — углы между нормалью к фронту падающей волны и координатными осями  $x_1, y_1 (x_2, y_2)$ ;
- $\varphi_1^0 (\varphi_1^0 = -\varphi_2^0)$  — угол между осью  $z$  и проекцией указанной нормали на плоскость  $x_1 = 0$ ;
- $\varphi_1 (\varphi_1 = -\varphi_2)$  — угол между осью  $z$  и направлением из начала координат в точку  $p(y_1, z)$ , которая лежит в плоскости  $x_1 = 0$  и является проекцией точки наблюдения  $P(x, y, z)$ ;
- $r_1$  — расстояние от начала координат до точки  $p(y_1, z)$ .

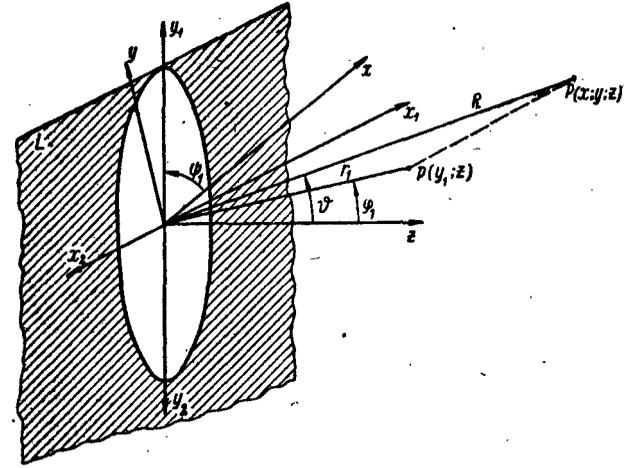


Рис. 23. К-дифракция на диске при наклонном падении плоской волны. Полуплоскость  $L$  лежит в плоскости диска, ее ребро является касательной к окружности диска в точке  $x_1 = 0, y_1 = a$  ( $a$  — радиус диска).

Введенные здесь величины определяются формулами:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_1 &= -\sin \gamma \cos \psi_1, & \cos \beta_1 &= \sin \gamma \sin \psi_1, \\ \alpha_2 &= \pi - \alpha_1, & \beta_2 &= \pi - \beta_1, \\ \sin \varphi_1^0 &= \frac{\cos \beta_1}{\sin \alpha_1}, & \cos \varphi_1^0 &= \frac{\cos \gamma}{\sin \alpha_1}, \\ \sin \varphi_1 &= \frac{\sin \vartheta \cos(\psi_1 - \varphi)}{\sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \sin^2(\psi_1 - \varphi)}}, \\ \cos \varphi_1 &= \frac{\cos \vartheta}{\sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \sin^2(\psi_1 - \varphi)}}, \\ \varphi_2 &= -\varphi_1, & \varphi_2^0 &= -\varphi_1^0, \\ r_1 &= R \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \sin^2(\psi_1 - \varphi)}. \end{aligned} \right\} \quad (11.06)$$

Запишем далее выражения для поля от неравномерной части тока, возбуждаемого волной (10.01) на идеальной проводящей полуплоскости  $-\infty \leq y_1 \leq a$ . Согласно § 5 они имеют вид

$$E_{x_1} = e^{ikx_1 \cos \alpha_1} E_{0x_1} f^1(\varphi_1, \varphi_1^0) \frac{e^{i(k_1 r_1 + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi k_1 r_1}} e^{ik_1 a (\sin \varphi_1^0 - \sin \varphi_1)}, \quad (11.07)$$

$$H_{x_1} = e^{ikx_1 \cos \alpha_1} H_{0x_1} g^1(\varphi_1, \varphi_1^0) \frac{i(k_1 r_1 + \frac{\pi}{4})}{V 2\pi k_1 r_1} e^{ik_1 a (\sin \varphi_1^0 - \sin \varphi_1)},$$

где

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= k \sin \alpha_1, \\ k_1 (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_1^0) &= k \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, \end{aligned} \right\} (11.08)$$

$$\left. \begin{aligned} f^1(\varphi_1, \varphi_1^0) &= \frac{\sin \frac{\varphi_1 - \varphi_1^0}{2} + \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_1^0}{2}}{\sin \varphi_1^0 - \sin \varphi_1} \frac{\cos \varphi_1^0}{\sin \varphi_1^0 - \sin \varphi_1}, \\ g^1(\varphi_1, \varphi_1^0) &= \frac{-\sin \frac{\varphi_1 - \varphi_1^0}{2} + \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_1^0}{2}}{\sin \varphi_1^0 - \sin \varphi_1} \frac{\cos \varphi_1}{\sin \varphi_1^0 - \sin \varphi_1}, \end{aligned} \right\} (11.09)$$

$$\left( -\frac{\pi}{2} \leq \varphi_1 \leq \frac{3\pi}{2} \right).$$

С другой стороны, это поле можно выразить через вектор-потенциал

$$A = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^a J(\eta) e^{ik\eta \cos \beta_1} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz \cos \alpha_1} \frac{e^{ikV\sqrt{z^2 + (y_1 - \eta)^2 + (x_1 - \xi)^2}}}{V\sqrt{z^2 + (y_1 - \eta)^2 + (x_1 - \xi)^2}} d\xi. \quad (11.10)$$

С помощью формулы

$$H_0^{(1)}(qD) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ip\sqrt{D^2 + \zeta^2}}}{V\sqrt{D^2 + \zeta^2}} e^{-i\kappa\zeta} d\zeta, \quad (11.11)$$

$$q = \sqrt{p^2 - t^2}, \quad \text{Im } q > 0, \quad D > 0,$$

которая вытекает из равенства (3.10), если в нем положить  $z = t$ ,  $\omega = \zeta$ ,  $d = -ip$ ,  $k = -iD$ , находим, что

$$A = \frac{i\pi}{c} e^{ikx_1 \cos \alpha_1} \int_{-\infty}^a J(\eta) H_0^{(1)}[k\sqrt{z^2 + (y_1 - \eta)^2}] e^{ik\eta \cos \beta_1} d\eta. \quad (11.12)$$

Принимая во внимание, что неравномерная часть тока сосредоточена, в основном, вблизи ребра полуплоскости, и

пользуясь асимптотическим представлением функции Ханкеля, получим

$$A = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{2\pi}{k_1 r_1}} e^{ik(x_1 \cos \alpha_1 + r_1 \sin \alpha_1) + i\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^a J(\eta) e^{ik\eta \Phi_1} d\eta, \quad (11.13)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \cos \beta_1 - \sin \alpha_1 \sin \varphi_1 = \\ &= \sin \gamma \sin \psi_1 - \sin \vartheta \cos(\psi_1 - \varphi) \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \gamma \cos^2 \psi_1}{1 - \sin^2 \vartheta \sin^2(\psi_1 - \varphi)}}. \end{aligned} \quad (11.14)$$

В случае, когда  $\psi_1 = \delta$  [см. формулы (11.04) и (11.05)] функция  $\Phi_1$  принимает значение

$$\Phi_1 = -\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}. \quad (11.15)$$

Исходя из выражения (11.13), нетрудно показать, что рассеянное поле в дальней зоне описывается следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} E_{x_1} &= -ik \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 \sin \varphi_1 A_{y_1} + ik \sin^2 \alpha_1 A_{x_1}, \\ H_{x_1} &= -ik \sin \alpha_1 \cos \varphi_1 A_{y_1}, \end{aligned} \right\} (11.16)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_{y_1} &= \theta_1 I_{y_1}(\psi_1), \quad A_{x_1} = \theta_1 I_{x_1}(\psi_1), \\ \theta_1 &= \frac{1}{c} \sqrt{\frac{2\pi}{k_1 r_1}} e^{ik(x_1 \cos \alpha_1 + r_1 \sin \alpha_1) + i\frac{\pi}{4}}, \end{aligned} \right\} (11.17)$$

$$\left. \begin{aligned} I_{y_1}(\psi_1) &= \int_{-\infty}^a J_{y_1}(\eta) e^{-ik\eta V\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} d\eta, \\ I_{x_1}(\psi_1) &= \int_{-\infty}^a J_{x_1}(\eta) e^{-ik\eta V\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} d\eta. \end{aligned} \right\} (11.18)$$

Приравнявая затем выражения (11.07) и (11.16), находим искомую связь между неравномерной частью тока на полуплоскости  $-\infty \leq y_1 \leq a$  и ее полем в дальней зоне

$$\left. \begin{aligned} I_{y_1}(\psi_1) &= -\frac{c}{ik2\pi} \frac{H_{0x_1}}{\sin \alpha_1 \cos \varphi_1} g^1(\varphi_1, \varphi_1^0) e^{-ika\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}, \\ I_{x_1}(\psi_1) &= \frac{c}{ik2\pi \sin^2 \alpha_1} [E_{0x_1} f^1(\varphi_1, \varphi_1^0) - \\ &\quad - \cos \alpha_1 \text{tg } \varphi_1 H_{0x_1} g^1(\varphi_1, \varphi_1^0)] e^{-ika\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}. \end{aligned} \right\} (11.19)$$

Совершенно аналогично можно показать, что неравномерная часть тока, возбуждаемая волной (10.01) на полуплоскости  $-\infty \leq y_2 \leq a$ , создает в дальней зоне рассеянное поле

$$\left. \begin{aligned} E_{x_2} &= -ik \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 \sin \varphi_1 A_{y_2} + ik \sin^2 \alpha_1 A_{x_2}, \\ H_{x_2} &= -ik \sin \alpha_1 \cos \varphi_1 A_{y_2}, \end{aligned} \right\} (11.20)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_{y_2} &= \theta_2 I_{y_2}(\psi_2), \quad A_{x_2} = \theta_2 I_{x_2}(\psi_2), \\ \theta_2 &= \frac{1}{c} \sqrt{\frac{2\pi}{k_1 r_1}} e^{ik(r_1 \sin \alpha_1 - x_2 \cos \alpha_1) + i\frac{\pi}{4}}, \end{aligned} \right\} (11.21)$$

$$\left. \begin{aligned} I_{y_2}(\psi_2) &= \int_{-\infty}^a J_{y_2}(\eta) e^{ikr_1 \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} d\eta, \\ I_{x_2}(\psi_2) &= \int_{-\infty}^a J_{x_2}(\eta) e^{ikr_1 \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} d\eta. \end{aligned} \right\} (11.22)$$

С другой стороны, согласно § 5 это поле равно

$$\left. \begin{aligned} E_{x_2} &= e^{-ikx_2 \cos \alpha_1} E_{0x_2} f^1(\varphi_2, \varphi_2^0) \frac{e^{i(k_1 r_1 + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi k_1 r_1}} e^{ik_1 a (\sin \varphi_2^0 - \sin \varphi_2)}, \\ H_{x_2} &= e^{-ikx_2 \cos \alpha_1} H_{0x_2} g^1(\varphi_2, \varphi_2^0) \frac{e^{i(k_1 r_1 + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi k_1 r_1}} e^{ik_1 a (\sin \varphi_2^0 - \sin \varphi_2)} \end{aligned} \right\} (11.23)$$

$$\text{Здесь} \quad k_1 (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_2^0) = -\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, \quad (11.24)$$

а функции  $f^1(\varphi_2, \varphi_2^0)$  и  $g^1(\varphi_2, \varphi_2^0)$  определяются формулами:

$$\left. \begin{aligned} f^1(\varphi_2, \varphi_2^0) &= \frac{\sin \frac{\varphi_1 - \varphi_1^0}{2} - \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_1^0}{2}}{\sin \varphi_1^0 - \sin \varphi_1} + \frac{\cos \varphi_1^0}{\sin \varphi_1^0 - \sin \varphi_1}, \\ g^1(\varphi_2, \varphi_2^0) &= -\frac{\sin \frac{\varphi_1 - \varphi_1^0}{2} + \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_1^0}{2}}{\sin \varphi_1^0 - \sin \varphi_1} + \frac{\cos \varphi_1}{\sin \varphi_1^0 - \sin \varphi_1} \end{aligned} \right\} (11.25)$$

$(-\frac{3\pi}{2} \leq \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2}).$

Приравнявая величины (11.20) и (11.23), находим

$$\left. \begin{aligned} I_{y_2}(\psi_2) &= -\frac{c}{ik2\pi} \frac{e^{ika\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}}{\sin \alpha_1 \cos \varphi_1} H_{0x_2} g^1(\varphi_2, \varphi_2^0), \\ I_{x_2}(\psi_2) &= \frac{c}{ik2\pi} \frac{e^{ika\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}}{\sin^2 \alpha_1} [E_{0x_2} f^1(\varphi_2, \varphi_2^0) - \\ &\quad - \cos \alpha_1 \operatorname{tg} \varphi_1 H_{0x_2} g^1(\varphi_2, \varphi_2^0)]. \end{aligned} \right\} (11.26)$$

Таким образом, мы установили зависимость между неравномерной частью тока на полуплоскости и ее полем в дальней зоне. Вернемся теперь к вычислению поля от неравномерной части тока, текущего на диске.

Поскольку диск предполагается большим по сравнению с длиной волны, то неравномерную часть тока вблизи его края можно приближенно считать такой же, как на соответствующей полуплоскости. Следовательно, интегралы, входящие в формулу (11.03), будут приближенно равны соответствующим интегралам от тока на полуплоскости:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^a J_{x_1}(\rho, \psi_1) e^{-ik\rho \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} d\rho &= I_{x_1}(\psi_1), \\ \int_0^a J_{y_1}(\rho, \psi_1) e^{-ik\rho \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} d\rho &= I_{y_1}(\psi_1), \\ \int_0^a J_{x_2}(\rho, \psi_2) e^{ik\rho \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} d\rho &= I_{x_2}(\psi_2), \\ \int_0^a J_{y_2}(\rho, \psi_2) e^{ik\rho \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} d\rho &= I_{y_2}(\psi_2). \end{aligned} \right\} (11.27)$$

В результате компоненты вектора (11.03) можно представить в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} A_{y_1} &= \frac{1}{c} \sqrt{\frac{2\pi a}{k\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}} \frac{e^{ikR}}{R} e^{i\frac{\pi}{4}} [I_{y_1}(\psi_1) + iI_{y_2}(\psi_2)], \\ A_{x_1} &= \frac{1}{c} \sqrt{\frac{2\pi a}{k\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}} \frac{e^{ikR}}{R} e^{i\frac{\pi}{4}} [I_{x_1}(\psi_1) + iI_{x_2}(\psi_2)]. \end{aligned} \right\} (11.28)$$

Подставляя затем эти значения в формулы

$$\left. \begin{aligned} E_{\varphi} &= ikA_{\varphi} = ik [A_{y_1} \sin(\psi_1 - \varphi) - A_{x_1} \cos(\psi_1 - \varphi)], \\ E_{\vartheta} &= ikA_{\vartheta} = ik [A_{y_1} \cos(\psi_1 - \varphi) + A_{x_1} \sin(\psi_1 - \varphi)] \cos \vartheta, \end{aligned} \right\} \quad (11.29)$$

найдем поле от неравномерной части тока, текущего на диске

$$\begin{aligned} E_{\varphi} = -H_{\vartheta} &= \frac{ae^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi ka V \lambda^2 + \mu^2}} \frac{e^{ikR}}{R} \left\{ -H_{0x_1} \left[ \frac{\sin(\psi_1 - \varphi)}{\sin \alpha_1 \cos \varphi_1} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\cos(\psi_1 - \varphi)}{\sin^2 \alpha_1} \cos \alpha_1 \operatorname{tg} \varphi_1 \right] \times \right. \\ &\quad \times [g^1(\varphi_1, \varphi_1^0) e^{-ikaV\lambda^2 + \mu^2} - ig^1(\varphi_2, \varphi_2^0) e^{ikaV\lambda^2 + \mu^2}] - \\ &\quad \left. - E_{0x_1} \frac{\cos(\psi_1 - \varphi)}{\sin^2 \alpha_1} [f^1(\varphi_1, \varphi_1^0) e^{-ikaV\lambda^2 + \mu^2} - \right. \\ &\quad \left. - if^1(\varphi_2, \varphi_2^0) e^{ikaV\lambda^2 + \mu^2}] \right\}, \quad (11.30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{\vartheta} = H_{\varphi} &= \frac{ae^{i\frac{\pi}{4}} \cos \vartheta}{\sqrt{2\pi ka V \lambda^2 + \mu^2}} \frac{e^{ikR}}{R} \left\{ -H_{0x_1} \left[ \frac{\cos(\psi_1 - \varphi)}{\sin \alpha_1 \cos \varphi_1} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\sin(\psi_1 - \varphi)}{\sin^2 \alpha_1} \cos \alpha_1 \operatorname{tg} \varphi_1 \right] [g^1(\varphi_1, \varphi_1^0) e^{-ikaV\lambda^2 + \mu^2} - \right. \\ &\quad \left. - ig^1(\varphi_2, \varphi_2^0) e^{ikaV\lambda^2 + \mu^2}] + E_{0x_1} \frac{\sin(\psi_1 - \varphi)}{\sin^2 \alpha_1} \times \right. \\ &\quad \left. \times [f^1(\varphi_1, \varphi_1^0) e^{-ikaV\lambda^2 + \mu^2} - if^1(\varphi_2, \varphi_2^0) e^{ikaV\lambda^2 + \mu^2}] \right\}. \quad (11.31) \end{aligned}$$

Полученные выражения справедливы при  $ka\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \gg 1$ . Их можно несколько упростить

$$\begin{aligned} E_{\varphi} = -H_{\vartheta} &= \frac{ae^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi ka V \lambda^2 + \mu^2}} \frac{e^{ikR}}{R} \times \\ &\quad \times \left\{ -H_{0x_1} \cos \vartheta \frac{\sin(\psi_1 - \varphi)}{\sin^2 \alpha_1} [g^1(\varphi_1, \varphi_1^0) e^{-ikaV\lambda^2 + \mu^2} - \right. \\ &\quad \left. - ig^1(\varphi_2, \varphi_2^0) e^{ikaV\lambda^2 + \mu^2}] - E_{0x_1} \frac{\cos(\psi_1 - \varphi)}{\sin^2 \alpha_1} \times \right. \\ &\quad \left. \times [f^1(\varphi_1, \varphi_1^0) e^{-ikaV\lambda^2 + \mu^2} - if^1(\varphi_2, \varphi_2^0) e^{ikaV\lambda^2 + \mu^2}] \right\}, \quad (11.32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{\vartheta} = H_{\varphi} &= \frac{ae^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi ka V \lambda^2 + \mu^2}} \frac{e^{ikR}}{R} \times \\ &\quad \times \left\{ -H_{0x_1} \frac{\cos(\psi_1 - \varphi)}{\sin^2 \alpha_1} [g^1(\varphi_1, \varphi_1^0) e^{-ikaV\lambda^2 + \mu^2} - \right. \\ &\quad \left. - ig^1(\varphi_2, \varphi_2^0) e^{ikaV\lambda^2 + \mu^2}] + E_{0x_1} \cos \vartheta \frac{\sin(\psi_1 - \varphi)}{\sin^2 \alpha_1} \times \right. \\ &\quad \left. \times [f^1(\varphi_1, \varphi_1^0) e^{-ikaV\lambda^2 + \mu^2} - if^1(\varphi_2, \varphi_2^0) e^{ikaV\lambda^2 + \mu^2}] \right\}, \quad (11.32) \end{aligned}$$

если воспользоваться тождествами

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sin(\psi_1 - \varphi)}{\sin \alpha_1 \cos \varphi_1} - \frac{\cos(\psi_1 - \varphi)}{\sin^2 \alpha_1} \cos \alpha_1 \operatorname{tg} \varphi_1 &\equiv \frac{\cos \vartheta \sin(\psi_1 - \varphi)}{\sin^2 \alpha_1}, \\ \frac{\cos(\psi_1 - \varphi)}{\sin \alpha_1 \cos \varphi_1} + \frac{\sin(\psi_1 - \varphi)}{\sin^2 \alpha_1} \cos \alpha_1 \operatorname{tg} \varphi_1 &\equiv \frac{\cos(\psi_1 - \varphi)}{\sin^2 \alpha_1 \cos \vartheta}. \end{aligned} \right\} \quad (11.33)$$

Прделанные выше операции можно кратко сформулировать следующим образом. Поле от неравномерной части тока на диске

$$A = \frac{a}{c} \frac{e^{ikR}}{R} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^a J(\rho, \psi) e^{ik\rho\Phi} d\rho$$

находится (без непосредственного вычисления тока) через известное поле вспомогательной полуплоскости

$$A = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{2\pi}{k_1 r_1}} e^{ik(x_1 \cos \alpha_1 + r_1 \sin \alpha_1) + i\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^a J(\eta) e^{ik\eta\Phi_1} d\eta$$

путем замены

$$\int_0^a J(\rho, \psi) e^{ik\rho\Phi} d\rho \text{ на } \int_{-\infty}^a J(\eta) e^{ik\eta\Phi_1} d\eta$$

в тех случаях, когда  $\Phi = \Phi_1$ . Функции  $\Phi$  и  $\Phi_1$  определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \sin \gamma \sin \psi - \sin \vartheta \cos(\psi - \varphi), \\ \Phi_1 &= \sin \gamma \sin \psi - \sin \vartheta \cos(\psi - \varphi) \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \gamma \cos^2 \psi}{1 - \sin^2 \vartheta \sin^2(\psi - \varphi)}} \end{aligned} \right\} \quad (11.34)$$

Именно так было получено решение (11.32) при  $ka\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \gg 1$ , когда для вспомогательной полуплоскости, ребро которой касается обода диска в точках  $\psi = \delta$ ,  $\psi = \pi + \delta$ , фаза  $\Phi_1$  была равна  $\Phi$ .

Решение задачи данным методом возможно также в случае

$$\vartheta = \gamma, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad (11.35)$$

когда  $\Phi_1 = \Phi = 0$ . Направление  $\vartheta = \gamma, \varphi = \frac{\pi}{2}$  соответствует главному максимуму диаграммы рассеяния и поэтому представляет особый интерес. Подставляя вытекающие в этом случае из (11.19) соотношения

$$\left. \begin{aligned} I_{y_1} &= \frac{c}{ik4\pi} \frac{H_{0x_1}}{\sin \alpha_1} \frac{\sin \varphi_1^0 - 1}{\cos^2 \varphi_1^0}, \\ I_{x_1} &= \frac{c}{ik4\pi} \frac{1}{\sin^2 \alpha_1} (E_{0x_1} + \cos \alpha_1 \operatorname{tg} \varphi_1^0 H_{0x_1}) \frac{\sin \varphi_1^0 - 1}{\cos \varphi_1^0} \end{aligned} \right\} (11.36)$$

в формулы

$$\left. \begin{aligned} A_x &= \frac{a}{c} \frac{e^{ikR}}{R} \int_0^{2\pi} (I_{y_1} \cos \psi + I_{x_1} \sin \psi) d\psi, \\ A_y &= \frac{a}{c} \frac{e^{ikR}}{R} \int_0^{2\pi} (I_{y_1} \sin \psi - I_{x_1} \cos \psi) d\psi, \end{aligned} \right\} (11.37)$$

найдем поле, излучаемое неравномерной частью тока в направлении главного максимума. При  $E$ -поляризации падающей волны ( $\mathbf{E}_0 \perp yoz$ ) оно равно

$$\left. \begin{aligned} E_x = H_\vartheta = E_{0x} \frac{a}{\pi \sin^2 \gamma} \left( 2K \cos \gamma - \frac{1 + \cos^2 \gamma}{\cos \gamma} E \right) \frac{e^{ikR}}{R}, \\ E_\vartheta = H_x = 0, \end{aligned} \right\} (11.38)$$

а при  $H$ -поляризации ( $\mathbf{H}_0 \perp yoz$ ) —

$$\left. \begin{aligned} E_\vartheta = -H_x = -E_{0\vartheta} \frac{a}{\pi \sin^2 \gamma} \times \\ \times \left( 2K \cos \gamma - \frac{1 + \cos^2 \gamma}{\cos \gamma} E \right) \frac{e^{ikR}}{R}, \\ E_x = H_\vartheta = 0, \end{aligned} \right\} (11.39)$$

где

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \psi}}, \quad E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \psi} d\psi \quad (11.40)$$

—полные эллиптические интегралы. Из полученных выражений следует, что при повороте поляризации падающей волны на  $90^\circ$  фаза поля от неравномерной части тока изменяется, как и в случае полуплоскости, на  $180^\circ$ . Если  $\gamma \rightarrow 0$ , то различие между поляризациями исчезает, и в пределе (при  $\gamma = 0$ ) мы приходим к прежнему результату (8.16).

По формулам (11.38) и (11.39) были проведены численные расчеты. Они показали, что для значений  $\gamma$ , не превышающих  $55^\circ$ , поле от равномерной части тока минимум в  $ka$  раз больше поля от неравномерной части тока.

## § 12. ХАРАКТЕРИСТИКИ РАССЕЯНИЯ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ОБЛУЧЕНИИ

Полное поле, рассеянное диском, равно сумме полей, излучаемых равномерной и неравномерной частями тока. Однако теперь, в отличие от случая нормального облучения, в области  $ka\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \gg 1$  полное поле уже не выражается только через функции  $f$  и  $g$ . Поэтому мы рассмотрим сначала более детально рассеянное поле в плоскости падения ( $x=0, \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ ), где выражения (11.32) принимают вид

$$E_\varphi = -H_\vartheta = \frac{ae^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi ka|\mu|}} E_{0x} [-f^1(1) e^{-ika\mu} + if^1(2) e^{ika\mu}] \frac{e^{ikR}}{R}$$

при  $\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \vartheta > \gamma,$

$$E_\varphi = -H_\vartheta = \frac{ae^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi ka|\mu|}} E_{0x} [-f^1(2) e^{ika\mu} + if^1(1) e^{-ika\mu}] \frac{e^{ikR}}{R}$$

при  $\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \vartheta < \gamma,$

$$E_\varphi = -H_\vartheta = \frac{ae^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi ka|\mu|}} E_{0x} [f^1(2) e^{ika\mu} - if^1(1) e^{-ika\mu}] \frac{e^{ikR}}{R}$$

при  $\varphi = -\frac{\pi}{2};$

(12.01)

$$E_{\varphi} = H_{\varphi} = \frac{ae^{i\frac{\pi}{4}} H_{0x}}{\sqrt{2\pi ka|\mu|}} [-g^1(1)e^{-ika\mu} + ig^1(2)e^{ika\mu}] \frac{e^{ikR}}{R}$$

$$\text{при } \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \vartheta > \gamma,$$

$$E_{\varphi} = H_{\varphi} = \frac{ae^{i\frac{\pi}{4}} H_{0x}}{\sqrt{2\pi ka|\mu|}} [-g^1(2)e^{ika\mu} + ig^1(1)e^{-ika\mu}] \frac{e^{ikR}}{R}$$

$$\text{при } \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \vartheta < \gamma,$$

$$E_{\varphi} = H_{\varphi} = \frac{ae^{i\frac{\pi}{4}} H_{0x}}{\sqrt{2\pi ka|\mu|}} [g^1(2)e^{ika\mu} - ig^1(1)e^{-ika\mu}] \frac{e^{ikR}}{R}$$

$$\text{при } \varphi = -\frac{\pi}{2}.$$

(12.02)

Функции  $f^1(1)$ ,  $g^1(1)$  соответствуют полю вспомогательной полуплоскости  $-\infty \leq y \leq a$ , а функции  $f^1(2)$ ,  $g^1(2)$  — полю полуплоскости  $-a \leq y \leq \infty$ . Согласно формулам (11.09), (11.25) они определяются выражениями

$$f^1(1) = f(1) - \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma - \sin \vartheta}, \quad f(1) = \frac{\sin \frac{\vartheta - \gamma}{2} + \cos \frac{\vartheta + \gamma}{2}}{\sin \gamma - \sin \vartheta},$$

$$g^1(1) = g(1) - \frac{\cos \vartheta}{\sin \gamma - \sin \vartheta}, \quad g(1) = \frac{-\sin \frac{\vartheta - \gamma}{2} + \cos \frac{\vartheta + \gamma}{2}}{\sin \gamma - \sin \vartheta},$$

$$f^1(2) = f(2) + \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma - \sin \vartheta}, \quad f(2) = \frac{\sin \frac{\vartheta - \gamma}{2} - \cos \frac{\vartheta + \gamma}{2}}{\sin \gamma - \sin \vartheta},$$

$$g^1(2) = g(2) + \frac{\cos \vartheta}{\sin \gamma - \sin \vartheta}, \quad g(2) = \frac{\sin \frac{\vartheta - \gamma}{2} + \cos \frac{\vartheta + \gamma}{2}}{\sin \gamma - \sin \vartheta},$$

(12.03)

если  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , а  $\vartheta \leq \frac{\pi}{2}$ ; и

$$f^1(1) = f(1) - \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma + \sin \vartheta}, \quad f(1) = -\frac{\sin \frac{\vartheta + \gamma}{2} - \cos \frac{\vartheta - \gamma}{2}}{\sin \gamma + \sin \vartheta},$$

$$g^1(1) = g(1) - \frac{\cos \vartheta}{\sin \gamma + \sin \vartheta}, \quad g(1) = \frac{\sin \frac{\vartheta + \gamma}{2} + \cos \frac{\vartheta - \gamma}{2}}{\sin \gamma + \sin \vartheta},$$

$$f^1(2) = f(2) + \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma + \sin \vartheta}, \quad f(2) = -\frac{\sin \frac{\vartheta + \gamma}{2} + \cos \frac{\vartheta - \gamma}{2}}{\sin \gamma + \sin \vartheta},$$

$$g^1(2) = g(2) + \frac{\cos \vartheta}{\sin \gamma + \sin \vartheta}, \quad g(2) = \frac{\sin \frac{\vartheta + \gamma}{2} - \cos \frac{\vartheta - \gamma}{2}}{\sin \gamma + \sin \vartheta},$$

(12.04)

если  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ , а  $\vartheta \leq \frac{\pi}{2}$ .

Выше было отмечено, что при  $ka \gg 1$  в направлении  $\vartheta = \gamma$  ( $0^\circ \leq \gamma \leq 55^\circ$ ),  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  поле от неравномерной части тока пренебрежимо мало по сравнению с полем от равномерной части. Поэтому для поля от неравномерной части тока можно написать с помощью функций Бесселя следующие интерполяционные формулы: при  $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$E_{\varphi} = -H_{\varphi} = \frac{iaE_{0x}}{2} \{ [f^1(1) - f^1(2)] J_1(\zeta) -$$

$$- i [f^1(1) + f^1(2)] J_2(\zeta) \} \frac{e^{ikR}}{R},$$

$$E_{\varphi} = H_{\varphi} = \frac{iaH_{0x}}{2} \{ [g^1(1) - g^1(2)] J_1(\zeta) -$$

$$- i [g^1(1) + g^1(2)] J_2(\zeta) \} \frac{e^{ikR}}{R},$$

(12.05)

а при  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

$$\left. \begin{aligned} E_{\varphi} = -H_{\vartheta} &= \frac{iaE_{0x}}{2} \{ [f^1(1) - f^1(2)] J_1(\xi) + \\ &+ i [f^1(1) + f^1(2)] J_2(\xi) \} \frac{e^{ikR}}{R}, \\ E_{\vartheta} = H_{\varphi} &= \frac{iaH_{0x}}{2} \{ [g^1(1) - g^1(2)] J_1(\xi) + \\ &+ i [g^1(1) + g^1(2)] J_2(\xi) \} \frac{e^{ikR}}{R}, \end{aligned} \right\} (12.06)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= ka (\sin \vartheta - \sin \gamma), \\ \xi &= ka (\sin \vartheta + \sin \gamma). \end{aligned} \right\} (12.07)$$

Эти выражения справедливы в области  $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$ , при  $\zeta \gg 1$  и  $|\xi| \gg 1$  они переходят в формулы (12.01) и (12.02), а в направлении  $\vartheta = \gamma$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  дают поле, равное нулю.

Пользуясь конкретными выражениями для функций  $f^1$  и  $g^1$ , нетрудно убедиться, что полное поле, рассеянное диском, в силу формул (10.03) и (10.04) можно представить в следующем виде:

при  $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\left. \begin{aligned} E_{\varphi} = -H_{\vartheta} &= \frac{iaE_{0x}}{2} \{ [f(1) - f(2)] J_1(\zeta) - \\ &- i [f(1) + f(2)] J_2(\zeta) \} \frac{e^{ikR}}{R}, \\ E_{\vartheta} = H_{\varphi} &= \frac{iaH_{0x}}{2} \{ [g(1) - g(2)] J_1(\zeta) - \\ &- i [g(1) + g(2)] J_2(\zeta) \} \frac{e^{ikR}}{R}, \end{aligned} \right\} (12.08)$$

а при  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

$$\left. \begin{aligned} E_{\varphi} = -H_{\vartheta} &= \frac{iaE_{0x}}{2} \{ [f(1) - f(2)] J_1(\xi) + \\ &+ i [f(1) + f(2)] J_2(\xi) \} \frac{e^{ikR}}{R}, \\ E_{\vartheta} = H_{\varphi} &= \frac{iaH_{0x}}{2} \{ [g(1) - g(2)] J_1(\xi) + \\ &+ i [g(1) + g(2)] J_2(\xi) \} \frac{e^{ikR}}{R}. \end{aligned} \right\} (12.09)$$

Эти выражения удобно записать так

$$\left. \begin{aligned} E_{\varphi} = -H_{\vartheta} &= \frac{iaE_{0x}}{2} \bar{\Sigma}(\vartheta, \gamma) \frac{e^{ikR}}{R}, \\ E_{\vartheta} = H_{\varphi} &= \frac{iaH_{0x}}{2} \Sigma(\vartheta, \gamma) \frac{e^{ikR}}{R}, \end{aligned} \right\} (12.10)$$

где функции  $\bar{\Sigma}$  и  $\Sigma$  определены в области  $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$  формулами:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Sigma}(\vartheta, \gamma) \left\{ \begin{aligned} &= -\frac{J_1(\zeta)}{\sin \frac{\vartheta - \gamma}{2}} \pm i \frac{J_2(\zeta)}{\cos \frac{\vartheta + \gamma}{2}} \text{ при } \varphi = \frac{\pi}{2}, \\ &= \frac{J_1(\xi)}{\sin \frac{\vartheta + \gamma}{2}} \mp i \frac{J_2(\xi)}{\cos \frac{\vartheta - \gamma}{2}} \text{ при } \varphi = -\frac{\pi}{2}, \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} (12.11)$$

а в области  $\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \pi$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Sigma}(\vartheta, \gamma) \left\{ \begin{aligned} &= \mp \frac{J_1(\zeta)}{\cos \frac{\vartheta + \gamma}{2}} + i \frac{J_2(\zeta)}{\sin \frac{\vartheta - \gamma}{2}} \text{ при } \varphi = \frac{\pi}{2}, \\ &= \pm \frac{J_1(\xi)}{\cos \frac{\vartheta - \gamma}{2}} - i \frac{J_2(\xi)}{\sin \frac{\vartheta + \gamma}{2}} \text{ при } \varphi = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} (12.12)$$

Полагая здесь  $\gamma = 0$ , получим прежние соотношения (9.03) и (9.05).

В направлениях  $\vartheta = \gamma$  и  $\vartheta = \pi - \gamma$  (при  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ), где диаграмма рассеяния имеет главный максимум, из формул (12.11), (12.12) следует, что

$$\bar{\Sigma}(\gamma) = \Sigma(\gamma) = -ka \cos \gamma \quad (12.13)$$

и

$$\bar{\Sigma}(\pi - \gamma) = -\Sigma(\pi - \gamma) = -ka \cos \gamma. \quad (12.14)$$

В направлении на источник ( $\vartheta = \pi - \gamma$ ,  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ ) функции  $\bar{\Sigma}(\vartheta)$  и  $\Sigma(\vartheta)$  принимают значения

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\Sigma}(\vartheta) \\ \Sigma(\vartheta) \end{array} \right\} = \pm \frac{1}{\sin \vartheta} J_1(\xi) - i J_2(\xi). \quad (12.15)$$

Считая здесь  $\vartheta = \pi$ , получаем

$$\bar{\Sigma}(\pi) = -\Sigma(\pi) = ka, \quad (12.16)$$

что соответствует приближению физической оптики [формуле (7.20)].

Функции  $\bar{\Sigma}$  и  $\Sigma$  позволяют вычислить

$$\sigma_E = \pi a^2 |\bar{\Sigma}|^2, \quad \sigma_H = \pi a^2 |\Sigma|^2 \quad (12.17)$$

— эффективные поверхности рассеяния при  $E$  и  $H$ -поляризациях падающей волны. Напомним, что по определению эффективная поверхность рассеяния есть величина, равная

$$\sigma = 4\pi R^2 \frac{|S|}{|S_0|}, \quad (12.18)$$

где

$$S = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [EH^*] \quad (12.19)$$

— усредненная за период колебаний плотность потока энергии (вектор Пойнтинга) в рассеянной волне, а  $S_0$  — аналогичная величина для падающей волны.

Таким образом, нами получены выражения для рассеянного поля, приближенно учитывающие неравномерную часть тока. Довольно простую и удобную для расчетов форму они имеют в плоскости падения ( $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ ). Интересно также, что в данном случае они удовлетворяют принципу взаимности, в отличие от выражений (10.03) и

(10.04), соответствующих равномерной части тока. В этом нетрудно убедиться, проверив, что формулы (12.11) не изменяются при одновременной замене  $\gamma$  на  $\vartheta$  и  $\vartheta$  на  $\gamma$ , а формулы (12.12) — при замене  $\vartheta$  на  $\pi - \gamma$  и  $\gamma$  на  $\pi - \vartheta$  (в случае  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ ).

Однако формулы (12.11), (12.12) приводят к разрыву тангенциальной составляющей магнитного поля  $H_\varphi$  на плоскости  $z = 0$ , в которой лежит диск. Как и в случае дифракции на ленте, причина этого явления заключается в том, что нами не учтено взаимодействие краев. В учете указанного взаимодействия нуждается также случай скользящего падения плоской волны ( $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ), когда должны быть равны нулю компоненты  $E_\vartheta$  и  $H_\varphi$  рассеянного поля.

В заключение параграфа еще раз отметим, что выражения (12.11) и (12.12) вблизи направлений  $\vartheta = \gamma$ ,  $\vartheta = \pi - \gamma$  (при  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ) имеют интерполяционный характер, но зато позволяют представить в удобной (единообразной) форме рассеянное поле в плоскости падения  $x = 0$ , которое часто представляет наибольший интерес (ср. § 24).

### ГЛАВА III

## ДИФРАКЦИЯ НА ЦИЛИНДРЕ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Особенность данной задачи заключается в том, что на поверхности цилиндра помимо неравномерной части тока, обусловленной изломом, существует также неравномерная часть тока, возникающая вследствие плавного искривления поверхности. Эта часть тока имеет характер волн, бегущих по цилиндрической поверхности вдоль геодезических линий [36], т. е. по винтовым линиям на цилиндре. Наталкиваясь при своем движении на ребро цилиндра, они испытывают дифракцию и возбуждают дополнительные поверхностные токи. В свою очередь, неравномерная часть тока, обусловленная изломом, испытывает дифракцию, распространяясь по цилиндрической поверхности. Ясно, что корректный учет всех этих эффектов является очень сложной задачей.

Однако если все линейные размеры цилиндра достаточно велики по сравнению с длиной волны, то этими эффектами можно пренебречь при расчетах рассеянного поля во многих случаях, имеющих практический интерес. В частности, ими можно пренебречь при расчете поля, рассеянного в направлении на источник [5, 37]. В этом случае достаточно учесть неравномерную часть тока, обусловленную только изломом поверхности, что мы и сделаем в данной главе. Полученные таким путем формулы обобщаются на случай, когда направление наблюдения не совпадает с направлением на источник.

### § 13. ПРИБЛИЖЕНИЕ ФИЗИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

Рассмотрим дифракцию плоской электромагнитной волны

$$E = E_0 e^{ik(y \sin \gamma + z \cos \gamma)} \quad (13.01)$$

на конечном идеально проводящем цилиндре радиуса  $a$  и длины  $l$ . Сферическую систему координат расположим так, чтобы ее начало находилось в центре цилиндра, а нормаль  $n$  к фронту падающей волны лежала в полуплоскости  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  и составляла угол  $\gamma$  ( $0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}$ ) с осью  $z$  (рис. 24).

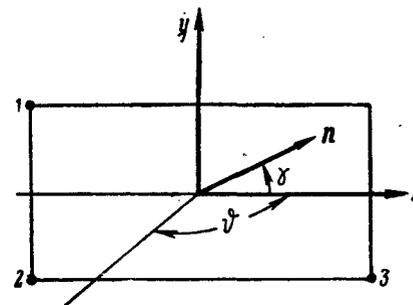


Рис. 24. Дифракция плоской волны на конечном цилиндре.  $n$  — нормаль к фронту падающей волны.

Падающую волну, имеющую произвольную линейную поляризацию, всегда можно представить как сумму двух волн с взаимно перпендикулярными поляризациями. Поэтому для полного решения задачи достаточно рассмотреть два частных случая поляризации падающей волны:

- 1)  $E$ -поляризация, когда электрический вектор падающей волны перпендикулярен плоскости  $yoz$  ( $E_0 \perp yoz$ ), и
- 2)  $H$ -поляризация, когда  $H_0 \perp yoz$ .

Равномерная часть тока, возбуждаемая на цилиндрической поверхности волной (13.01), имеет при  $E$ -поляризации компоненты

$$\left. \begin{aligned} j_x^0 &= -\frac{c}{2\pi} E_{0x} \cdot \sin \gamma \sin \psi e^{ik\Phi}, \\ j_y^0 &= \frac{c}{2\pi} E_{0x} \sin \gamma \cos \psi e^{ik\Phi}, \\ j_z^0 &= \frac{c}{2\pi} E_{0x} \cdot \cos \gamma \cos \psi e^{ik\Phi}, \end{aligned} \right\} \quad (13.02)$$

а при  $H$ -поляризации — компоненты

$$\left. \begin{aligned} j_x^0 = j_y^0 = 0, \\ j_z^0 = -\frac{c}{2\pi} H_{0x} \sin \psi e^{ik\Phi}, \end{aligned} \right\} \quad (13.03)$$

где

$$\Phi = a \sin \gamma \sin \psi + \zeta \cos \gamma. \quad (13.04)$$

Вычислим поле, создаваемое этими токами в области  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ .

Вектор-потенциал рассеянного поля определяется формулами

$$A = \frac{a}{c} \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} j^0(\zeta, \psi) \frac{e^{ikr}}{r} d\zeta \quad \text{при } \gamma = 0 \quad (13.05)$$

и

$$A = \frac{a}{c} \int_{-\pi}^0 d\psi \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} j^0(\zeta, \psi) \frac{e^{ikr}}{r} d\zeta \quad \text{при } \gamma > 0, \quad (13.06)$$

где

$$r = \sqrt{\xi^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}. \quad (13.07)$$

Поскольку нас интересует поле в дальней зоне ( $R \gg ka^2$ ,  $R \gg kl^2$ ), то эти выражения можно упростить, пользуясь соотношением

$$r \approx R + a \sin \vartheta \sin \psi - \zeta \cos \vartheta. \quad (13.08)$$

В результате получим более простую формулу

$$A = \frac{a}{c} \frac{e^{ikR}}{R} \int e^{ika \sin \vartheta \sin \psi} d\psi \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} j^0(\zeta, \psi) e^{-ik\zeta \cos \vartheta} d\zeta. \quad (13.09)$$

Так как компоненты тока описываются функциями  $f(\psi) e^{ik\Phi}$ , то задача о нахождении поля сводится, по существу, к вычислению интегралов типа

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} e^{ik\zeta(\cos \gamma - \cos \vartheta)} d\zeta \int_{-\pi}^0 f(\psi) e^{ip \sin \psi} d\psi = \\ = \frac{1}{ik(\cos \gamma - \cos \vartheta)} \left[ e^{i\frac{kl}{2}(\cos \gamma - \cos \vartheta)} - e^{-i\frac{kl}{2}(\cos \gamma - \cos \vartheta)} \right] \int_{-\pi}^0 f(\psi) e^{ip \sin \psi} d\psi. \end{aligned} \quad (13.10)$$

Интеграл

$$\int_{-\pi}^0 f(\psi) e^{ip \sin \psi} d\psi, \quad p = ka(\sin \gamma + \sin \vartheta) \quad (13.11)$$

при  $p \gg 1$  легко вычисляется методом стационарной фазы. Точка стационарной фазы определяется из условия  $\frac{d}{d\psi} \sin \psi = 0$  и равна

$$\psi_0 = -\frac{\pi}{2}. \quad (13.12)$$

Полагая затем  $\psi = -\frac{\pi}{2} + \delta$ , находим

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^0 f(\psi) e^{ip \sin \psi} d\psi \approx f(\psi_0) e^{-ip} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{ip \frac{\delta^2}{2}} d\delta \approx \\ \approx \sqrt{\frac{2}{p}} f(\psi_0) e^{-ip} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it^2} dt = \sqrt{\frac{2\pi}{p}} f(\psi_0) e^{-ip + i\frac{\pi}{4}}. \end{aligned} \quad (13.13)$$

В результате получаем следующие выражения для вектор-потенциала: при  $E$ -поляризации

$$A_x = \frac{a}{2\pi} E_{0x} \sin \gamma \frac{e^{ikR}}{R} \cdot I, \quad A_y = A_z = 0 \quad (13.14)$$

и при  $H$ -поляризации

$$A_z = \frac{a}{2\pi} H_{0x} \frac{e^{ikR}}{R} \cdot I, \quad A_x = A_y = 0, \quad (13.15)$$

где

$$I = \frac{e^{i \frac{kl}{2} (\cos \gamma - \cos \vartheta)} - e^{-i \frac{kl}{2} (\cos \gamma - \cos \vartheta)}}{ik (\cos \gamma - \cos \vartheta)} \times \\ \times \sqrt{\frac{2\pi}{ka (\sin \gamma + \sin \vartheta)}} e^{-ika (\sin \gamma + \sin \vartheta) + i \frac{\pi}{4}}. \quad (13.16)$$

Рассеянное поле в области  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$  определяется соотношениями

$$\left. \begin{aligned} E_\varphi &= -H_\vartheta = ikA_x, \\ E_\vartheta &= H_\varphi = -ikA_z \sin \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (13.17)$$

Поэтому при  $E$ -поляризации оно равно

$$\left. \begin{aligned} E_\varphi &= -H_\vartheta = \frac{ika}{2\pi} E_{0x} \sin \gamma \frac{e^{ikR}}{R} \cdot I, \\ E_\vartheta &= H_\varphi = 0, \end{aligned} \right\} \quad (13.18)$$

а при  $H$ -поляризации

$$\left. \begin{aligned} E_\vartheta &= H_\varphi = -\frac{ika}{2\pi} H_{0x} \sin \vartheta \frac{e^{ikR}}{R} \cdot I, \\ E_\varphi &= H_\vartheta = 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.19)$$

Полученные формулы показывают, что поле, рассеиваемое цилиндрической поверхностью, создается в основном светящейся полосой, прилегающей к образующей цилиндра при  $\psi = \psi_0 = -\frac{\pi}{2}$ . Излучение от этой полосы

можно представить [см. формулу (13.16)] в виде сферических волн, расходящихся от ее концов (точки 2 и 3 на рис. 24).

Запишем теперь выражения (13.18) и (13.19) в форме, наиболее удобной для расчета эффективной поверхности рассеяния

$$\left. \begin{aligned} E_\varphi &= -H_\vartheta = \frac{ia}{2} E_{0x} \frac{e^{ikR}}{R} \cdot \sum_{\vartheta}^0 (\vartheta, \gamma), \\ E_\vartheta &= H_\varphi = \frac{ia}{2} H_{0x} \frac{e^{ikR}}{R} \cdot \sum_{\vartheta}^0 (\vartheta, \gamma). \end{aligned} \right\} \quad (13.20)$$

Здесь

$$\sum_{\vartheta}^0 = G \sin \gamma, \quad \sum_{\vartheta}^0 = -G \sin \vartheta, \quad (13.21)$$

а

$$G = 2 \sqrt{\frac{2}{\pi ka (\sin \gamma + \sin \vartheta)}} \times \\ \times \frac{\sin \left[ \frac{kl}{2} (\cos \gamma - \cos \vartheta) \right]}{\cos \gamma - \cos \vartheta} e^{-ika (\sin \gamma + \sin \vartheta) + i \frac{\pi}{4}}. \quad (13.22)$$

Индекс „0“ у  $\sum_{\vartheta}^0$  и  $\sum_{\vartheta}^0$  означает, что поле вычислено в приближении физической оптики (по равномерной части тока), а индекс „ц“ показывает, что это рассеянное поле создано цилиндрической поверхностью. Эффективная поверхность рассеяния согласно (12.17) определяется для цилиндрической поверхности соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\vartheta, E}^0 &= \pi a^2 \left| \sum_{\vartheta}^0 \right|^2 = \pi a^2 \sin^2 \gamma |G|^2, \\ \sigma_{\vartheta, H}^0 &= \pi a^2 \left| \sum_{\vartheta}^0 \right|^2 = \pi a^2 \sin^2 \vartheta |G|^2. \end{aligned} \right\} \quad (13.23)$$

В направлении зеркально отраженного луча ( $\vartheta = \gamma$ ) имеем

$$\sigma_{\vartheta, E}^0 = \sigma_{\vartheta, H}^0 = ka l^2 \sin \vartheta = \frac{2\pi a}{\lambda} l^2 \sin \vartheta. \quad (13.24)$$

В направлении на источник ( $\vartheta = \pi - \gamma$ ) функции  $\bar{\Sigma}_{\pi}^{\circ}$  и  $\Sigma_{\pi}^{\circ}$  равны

$$\bar{\Sigma}_{\pi}^{\circ} = -\Sigma_{\pi}^{\circ} = \sqrt{\frac{\sin \vartheta}{\pi ka} \cdot \frac{\sin(kl \cos \vartheta)}{\cos \vartheta}} \cdot e^{-2ika \sin \vartheta + \frac{\pi}{4}}. \quad (13.25)$$

Эти выражения справедливы, если  $ka \sin \vartheta \gg 1$ . С помощью формул (13.02)–(13.05) нетрудно убедиться, что рассеянное поле равно нулю, если  $\gamma = 0$ , а  $\vartheta = \pi$ . Таким образом, в радиолокационном случае (т. е. в направлении на источник) мы нашли выражение для рассеянного поля в области  $ka \sin \vartheta \gg 1$  и в направлении  $\vartheta = \pi$ . Естественно, возникает желание написать интерполяционные формулы, т. е. такие формулы, которые обеспечивали бы непрерывный переход из области  $ka \sin \vartheta \gg 1$  к направлению  $\vartheta = \pi$ . Заметим теперь, что поле, рассеянное цилиндром, складывается из полей, рассеянных боковой (цилиндрической) поверхностью и основанием (торцом) цилиндра. В приближении физической оптики поле, рассеянное торцом цилиндра, эквивалентно полю, рассеянному диском. Поле же, рассеянное диском, описывается функциями Бесселя. Поэтому поле, рассеянное цилиндрической поверхностью, также целесообразно выразить через функции Бесселя. В результате искомые интерполяционные формулы для поля, рассеянного цилиндрической поверхностью, можно представить в виде

$$\bar{\Sigma}_{\pi}^{\circ} = -\Sigma_{\pi}^{\circ} = -\frac{\sin \vartheta}{2 \cos \vartheta} (e^{ikl \cos \vartheta} - e^{-ikl \cos \vartheta}) [J_1(\zeta) - iJ_2(\zeta)], \quad (13.26)$$

$$\zeta = 2ka \sin \vartheta.$$

Отсюда следует, что  $\bar{\Sigma}_{\pi}^{\circ} = \Sigma_{\pi}^{\circ} = 0$  в направлении  $\vartheta = \pi$ , а при условии  $ka \sin \vartheta \gg 1$  получаем формулы (13.25).

Поле, рассеиваемое торцом цилиндра (диск), согласно равенствам (10.06) и (10.07) описывается в приближении физической оптики формулами

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\Sigma}_{\pi}^{\circ} \\ \Sigma_{\pi}^{\circ} \end{array} \right\} = \mp \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} J_1(\zeta) e^{ikl \cos \vartheta}. \quad (13.27)$$

Следовательно, поле, рассеянное всей поверхностью цилиндра, будет определяться в плоскости  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$  формулами:

$$\left. \begin{array}{l} E_{\varphi} = -H_{\vartheta} = \frac{ia}{2} E_{0x} \cdot \frac{e^{ikR}}{R} \bar{\Sigma}^{\circ}(\vartheta), \\ E_{\vartheta} = H_{\varphi} = \frac{ia}{2} H_{0x} \cdot \frac{e^{ikR}}{R} \Sigma^{\circ}(\vartheta), \end{array} \right\} \quad (13.28)$$

где

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\Sigma}^{\circ}(\vartheta) \\ \Sigma^{\circ}(\vartheta) \end{array} \right\} = \mp \frac{\sin \vartheta}{2 \cos \vartheta} (e^{ikl \cos \vartheta} - e^{-ikl \cos \vartheta}) [J_1(\zeta) - iJ_2(\zeta)] \mp \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} J_1(\zeta) e^{ikl \cos \vartheta} \quad (\zeta = 2ka \sin \vartheta). \quad (13.29)$$

Эти формулы позволяют определить в приближении физической оптики эффективную поверхность рассеяния конечного цилиндра.

#### § 14. ПОЛЕ, СОЗДАВАЕМОЕ НЕРАВНОМЕРНОЙ ЧАСТЬЮ ТОКА

Найдем поле от неравномерной части тока, обусловленной изломом поверхности. Образно говоря, рассеянное цилиндром поле создается «светящимися» областями на его торце и боковой поверхности. Математически это поле описывается суммой сферических волн от «светящихся» точек 1, 2 и 3 (см. рис. 24). Очевидно, что и поле от неравномерной части тока будет иметь вид сферических волн, расходящихся от этих же точек.

В случае, когда длина и диаметр цилиндра достаточно велики по сравнению с длиной волны, можно считать приближенно, что неравномерная часть тока вблизи излома такая же, как на соответствующем клине. Поле,

излучаемое этой частью тока, в принципе можно найти так же, как и в случае диска. Однако такой путь довольно сложен. Мы найдем искомое поле более простым\* и наглядным путем, исходя из физического анализа решения, полученного для диска.

Рассмотрим с этой целью структуру волн (12.01) и (12.02), излучаемых диском. В указанные формулы входит множитель

$$\frac{ia}{\sqrt{2\pi ka}(\sin \gamma + \sin \vartheta)} \frac{e^{ikR}}{R} = i \frac{e^{ikR}}{\sqrt{2\pi kR}} \sqrt{\frac{a}{R}} \frac{1}{\sqrt{\sin \gamma + \sin \vartheta}}. \quad (14.01)$$

Здесь  $\sqrt{\frac{a}{R}}$  — коэффициент развертывания волны. Он показывает, как формируется поле с удалением от диска: дифрагированная волна, цилиндрическая вблизи диска, развертывается с удалением от него в сферическую. Коэффициент  $(\sin \gamma + \sin \vartheta)^{-1/2}$  пропорционален ширине светящейся области на диске или, иначе говоря, ширине первой зоны Френеля. Таким образом, в формулах (12.01) и (12.02) от геометрии тела, точнее, от характера излома зависят только функции  $f^1$  и  $g^1$ .

Поэтому вполне естественно предположить, что аналогичные волны, рассеиваемые цилиндром, имеют такую же структуру и отличаются лишь функциями  $f^1$  и  $g^1$ , соответствующими в данном случае прямоугольному клину. Следовательно, в направлении на источник поле от неравномерной части тока, текущего на цилиндре, можно представить при  $ka \sin \vartheta \gg 1$  следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} E_{\varphi} = -H_{\vartheta} &= \frac{ia}{\sqrt{2\pi\zeta}} E_{0x} \left\{ f^1(1) e^{i\left(\zeta - \frac{3\pi}{4}\right) + ikl \cos \vartheta} - \right. \\ &- \left. [f^1(2) e^{ikl \cos \vartheta} + f^1(3) e^{-ikl \cos \vartheta}] e^{-i\left(\zeta - \frac{3\pi}{4}\right)} \right\} \frac{e^{ikR}}{R}, \\ E_{\vartheta} = H_{\varphi} &= \frac{ia}{\sqrt{2\pi\zeta}} H_{0x} \cdot \left\{ g^1(1) e^{i\left(\zeta - \frac{3\pi}{4}\right) + ikl \cos \vartheta} - \right. \\ &- \left. [g^1(2) e^{ikl \cos \vartheta} + g^1(3) e^{-ikl \cos \vartheta}] e^{-i\left(\zeta - \frac{3\pi}{4}\right)} \right\} \frac{e^{ikR}}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (14.02)$$

В соответствии с § 4 функции  $f^1$  и  $g^1$  определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} f^1(1) \Big\} &= \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n} \left( \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - 1} \mp \right. \\ g^1(1) \Big\} &= \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi - 2\vartheta}{n}} \Big) \mp \frac{\cos \vartheta}{2 \sin \vartheta}, \\ f^1(2) \Big\} &= \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n} \left( \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - 1} \mp \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{2\vartheta}{n}} \right) \mp \\ g^1(2) \Big\} &= \frac{\cos \vartheta}{2 \sin \vartheta} \mp \frac{\sin \vartheta}{2 \cos \vartheta}, \\ f^1(3) \Big\} &= \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n} \left( \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - 1} \mp \right. \\ g^1(3) \Big\} &= \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi + 2\vartheta}{n}} \Big) \mp \frac{\sin \vartheta}{2 \cos \vartheta}, \end{aligned} \right\} \quad (14.03)$$

где

$$n = \frac{3}{2}. \quad (14.04)$$

В гл. IV будет показано [см. формулу (17. 25)], что в направлении  $\vartheta = \pi - \gamma = \pi$  полем от неравномерной части тока, текущего на цилиндре, можно пренебречь по сравнению с полем от равномерной части, если  $ka \gg 1$ . Поэтому для поля от неравномерной части тока можно написать с помощью функций Бесселя следующие интерполяционные формулы:

$$\left. \begin{aligned} E_{\varphi} = -H_{\vartheta} &= \frac{ia}{2} E_{0x} \frac{e^{ikR}}{R} \sum^1(\vartheta), \\ E_{\vartheta} = H_{\varphi} &= \frac{ia}{2} H_{0x} \frac{e^{ikR}}{R} \sum^1(\vartheta). \end{aligned} \right\} \quad (14.05)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}^1(\vartheta) &= [\bar{M}^1 J_1(\zeta) + i\bar{N}^1 J_2(\zeta)] e^{ikl \cos \vartheta} - \\ &\quad - f^1(3) [J_1(\zeta) - iJ_2(\zeta)] e^{-ikl \cos \vartheta}, \\ \Sigma^1(\vartheta) &= [M^1 J_1(\zeta) + iN^1 J_2(\zeta)] e^{ikl \cos \vartheta} - \\ &\quad - g^1(3) [J_1(\zeta) - iJ_2(\zeta)] e^{-ikl \cos \vartheta}, \end{aligned} \quad (14.06)$$

а функции  $\bar{M}^1$ ,  $\bar{N}^1$  и  $M^1$ ,  $N^1$  соответственно равны

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}^1 \\ \bar{N}^1 \end{aligned} \right\} = f^1(1) \mp f^1(2), \quad \left. \begin{aligned} M^1 \\ N^1 \end{aligned} \right\} = g^1(1) \mp g^1(2), \quad (14.07)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}^1 \\ M^1 \end{aligned} \right\} = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n} \left( \mp \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi - 2\vartheta}{n}} \mp \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{2\vartheta}{n}} \right) \mp \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \mp \frac{\sin \vartheta}{2 \cos \vartheta}, \\ \left. \begin{aligned} \bar{N}^1 \\ N^1 \end{aligned} \right\} = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n} \left( \frac{2}{\cos \frac{\pi}{n} - 1} \mp \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi - 2\vartheta}{n}} \mp \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{2\vartheta}{n}} \right) \mp \frac{\sin \vartheta}{2 \cos \vartheta}. \end{aligned} \quad (14.08)$$

Полученные формулы (14.05) переходят при  $ka \sin \vartheta \gg 1$  в выражения (14.02), а в направлении  $\vartheta = \pi$  дают для поля величину, равную нулю.

## § 15. ПОЛНОЕ РАССЕЯННОЕ ПОЛЕ

Суммируя выражения (13.28) и (14.05), нетрудно видеть, что полное поле, рассеянное цилиндром, будет равно

$$\left. \begin{aligned} E_c = -H_\vartheta &= \frac{ia}{2} E_{0x} \cdot \frac{e^{ikR}}{R} \cdot \Sigma(\vartheta), \\ E_\vartheta = H_c &= \frac{ia}{2} H_{0x} \cdot \frac{e^{ikR}}{R} \cdot \Sigma(\vartheta). \end{aligned} \right\} \quad (15.01)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Sigma(\vartheta) &= [\bar{M} J_1(\zeta) + i\bar{N} J_2(\zeta)] e^{ikl \cos \vartheta} - \\ &\quad - f(3) [J_1(\zeta) - iJ_2(\zeta)] e^{-ikl \cos \vartheta}, \\ \Sigma(\vartheta) &= [M J_1(\zeta) + iN J_2(\zeta)] e^{ikl \cos \vartheta} - \\ &\quad - g(3) [J_1(\zeta) - iJ_2(\zeta)] e^{-ikl \cos \vartheta}, \\ &\quad \zeta = 2ka \sin \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (15.02)$$

а функции  $\bar{M}$ ,  $\bar{N}$  и  $M$ ,  $N$  выражаются только через функции  $f$  и  $g$ , соответствующие асимптотическому решению для прямоугольного клина,

$$\left. \begin{aligned} \bar{M} \\ \bar{N} \end{aligned} \right\} = f(1) \mp f(2), \quad \left. \begin{aligned} M \\ N \end{aligned} \right\} = g(1) \mp g(2), \quad (15.03)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \bar{M} \\ M \end{aligned} \right\} = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n} \left( \mp \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi - 2\vartheta}{n}} \mp \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{2\vartheta}{n}} \right), \\ \left. \begin{aligned} \bar{N} \\ N \end{aligned} \right\} = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n} \left( \frac{2}{\cos \frac{\pi}{n} - 1} \mp \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi - 2\vartheta}{n}} \mp \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{2\vartheta}{n}} \right). \end{aligned} \quad (15.04)$$

Функции  $f(3)$  и  $g(3)$ , в свою очередь, определяются формулой

$$\left. \begin{aligned} f(3) \\ g(3) \end{aligned} \right\} = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n} \left( \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - 1} \mp \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi + 2\vartheta}{n}} \right). \quad (15.05)$$

Таким образом, в окончательные выражения для характеристики рассеяния плоской волны на цилиндре входят лишь функции  $f$  и  $g$ .

В направлении  $\vartheta = \pi$  функции  $\bar{\Sigma}(\vartheta)$  и  $\Sigma(\vartheta)$  принимают, как и в случае диска, значения

$$\bar{\Sigma}(\pi) = -\Sigma(\pi) = ka e^{-ikl}, \quad (15.06)$$

а при  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  они соответственно равны

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Sigma}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -\left(\frac{2}{n} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - 1} + \frac{1}{n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} + ikl\right) [J_1(\zeta) - iJ_2(\zeta)], \\ \Sigma\left(\frac{\pi}{2}\right) &= i\left(\frac{4}{n} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - 1} - \frac{1}{n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} - ikl\right) J_2(\zeta) + \\ &+ \left(\frac{1}{n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} + ikl\right) J_1(\zeta), \end{aligned} \right\} \quad (15.07)$$

где  $\zeta = 2ka$ . Слагаемые в этой формуле, содержащие множитель  $kl$ , относятся к полю от равномерной части тока, а остальные — к полю от неравномерной части тока.

Согласно (12.17) эффективная поверхность рассеяния цилиндра определяется при  $E$ -поляризации падающей волны функцией

$$\sigma_E = \pi a^2 |\bar{\Sigma}(\vartheta)|^2, \quad (15.08)$$

а при  $H$ -поляризации —

$$\sigma_H = \pi a^2 |\Sigma(\vartheta)|^2. \quad (15.09)$$

Заметим, что выражения (15.02) для рассеянного поля можно получить сразу по аналогии с формулами (12.06), минуя вычисление полей от равномерной и неравномерной частей тока. Таким же путем можно получить выражения

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Sigma}(\vartheta, \vartheta_0) &= [\bar{M}J_1(\xi) + i\bar{N}J_2(\xi)] e^{i\frac{kl}{2}(\cos \vartheta + \cos \vartheta_0)} - \\ &- f(3) [J_1(\xi) - iJ_2(\xi)] e^{-i\frac{kl}{2}(\cos \vartheta + \cos \vartheta_0)}, \end{aligned} \right\} \quad (15.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \Sigma(\vartheta, \vartheta_0) &= [MJ_1(\xi) + iNJ_2(\xi)] e^{i\frac{kl}{2}(\cos \vartheta + \cos \vartheta_0)} - \\ &- g(3) [J_1(\xi) - iJ_2(\xi)] e^{-i\frac{kl}{2}(\cos \vartheta + \cos \vartheta_0)}, \end{aligned} \right\} \quad (15.10)$$

пригодные для расчета рассеянного поля в области  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{2} < \vartheta$ ;  $\vartheta_0 < \pi$  ( $\vartheta_0 = \pi - \gamma$ ). Входящие сюда величины равны

$$\xi = ka (\sin \vartheta + \sin \vartheta_0) \quad (15.11)$$

$$\left. \begin{aligned} \left. \begin{aligned} \bar{M} \\ M \end{aligned} \right\} &= \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n} \times \\ &\times \left( \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi - \vartheta - \vartheta_0}{n}} + \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\vartheta + \vartheta_0}{n}} \right), \\ \left. \begin{aligned} \bar{N} \\ N \end{aligned} \right\} &= \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n} \left( \frac{2}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\vartheta - \vartheta_0}{n}} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi - \vartheta - \vartheta_0}{n}} + \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\vartheta + \vartheta_0}{n}} \right), \end{aligned} \right\} \quad (15.12)$$

$$\left. \begin{aligned} f(3) \\ g(3) \end{aligned} \right\} = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n} \left( \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\vartheta - \vartheta_0}{n}} + \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi + \vartheta + \vartheta_0}{n}} \right). \quad (15.13)$$

Выражения (15.10) удовлетворяют принципу взаимности, т. е. не изменяют своей величины, если в них поменять местами  $\vartheta$  и  $\vartheta_0$ . При  $\vartheta = \vartheta_0$  они переходят в прежние выражения (15.02).

Найденные формулы (15.02) и (15.10) описывают излучение от токов, текущих лишь на части поверхности ци-

цилиндра: на одном торце (при  $z = -\frac{l}{2}$ ) и половине боковой поверхности ( $-\pi \leq \psi \leq 0$ ). Кроме того, эти выражения не учитывают неравномерной части тока, обусловленной кривизной цилиндрической поверхности. Поэтому они нуждаются в уточнении при значениях  $\vartheta$  и  $\vartheta_0$ , близких к  $\frac{\pi}{2}$  и  $\pi$ . Однако в случае  $\vartheta = \vartheta_0$ , т. е. в направлении на источник, указанными поправками можно пренебречь, если параметры  $ka$  и  $kl$  достаточно велики. Численные расчеты, проведенные нами по формулам (15.02), показывают, что это, по-видимому, можно сделать уже при

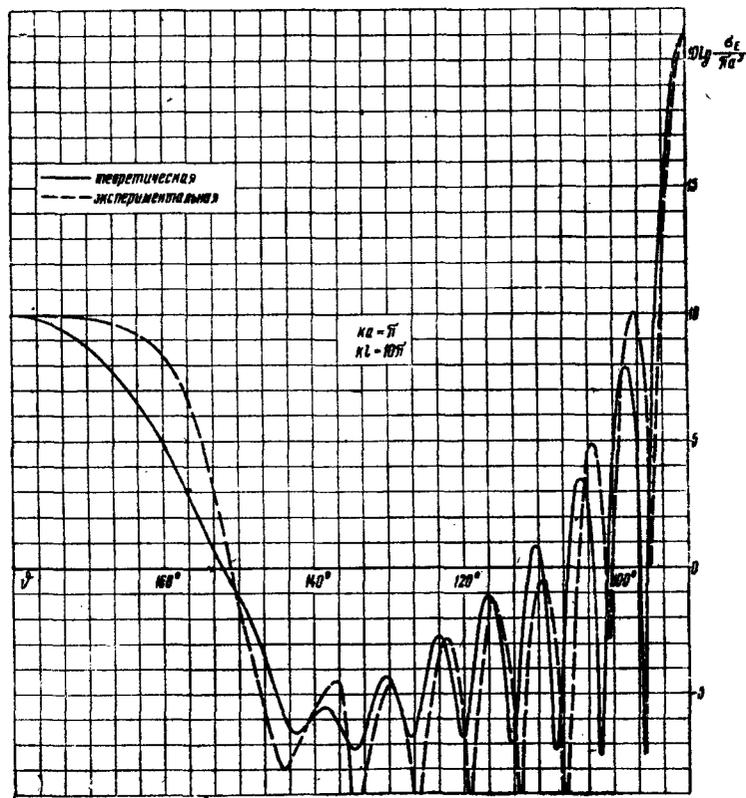


Рис. 25. Диаграмма эффективной поверхности рассеяния для конечного цилиндра. Случай  $E$ -поляризации.

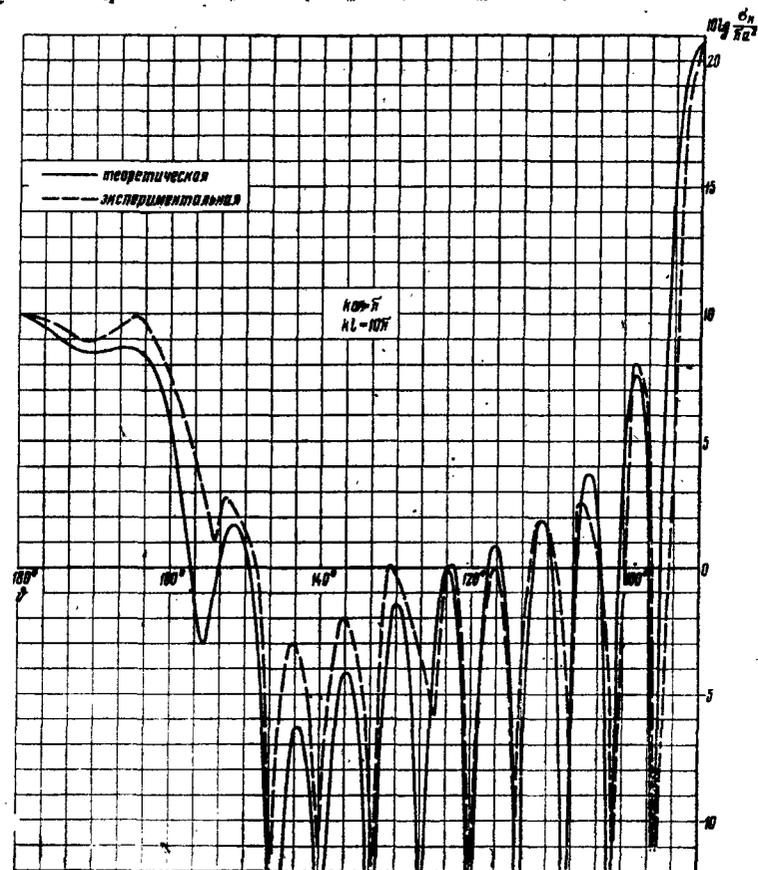


Рис. 26. Диаграмма эффективной поверхности для конечного цилиндра. Случай  $H$ -поляризации.

$ka = \pi$  и  $kl = 10\pi$ . Графики функций  $\frac{\sigma_E}{\pi a^2} = |\bar{\Sigma}(\vartheta)|^2$  и  $\frac{\sigma_H}{\pi a^2} = |\Sigma(\vartheta)|^2$ , построенные для этого случая на рис. 25 и 26, согласуются с экспериментальной кривой\* (штриховая линия): положение максимумов и минимумов в основ-

\* Экспериментальные кривые, изображенные на рис. 25, 26, а также на рис. 31, 32, 65 и 71, получены Е. Н. Майзельсом и Л. С. Чугуновой.

ном совпадает, число дифракционных лепестков одинаково. С целью иллюстрации влияния торцов мы построили график эффективной поверхности рассеяния для тех же значений  $ka$  и  $kl$  при учете только равномерной части тока на цилиндрической поверхности (рис. 27). Сравнение рис. 25, 26 и 27 показывает, что влияние торцов начинает сказываться уже при  $\theta = 120^\circ$ .

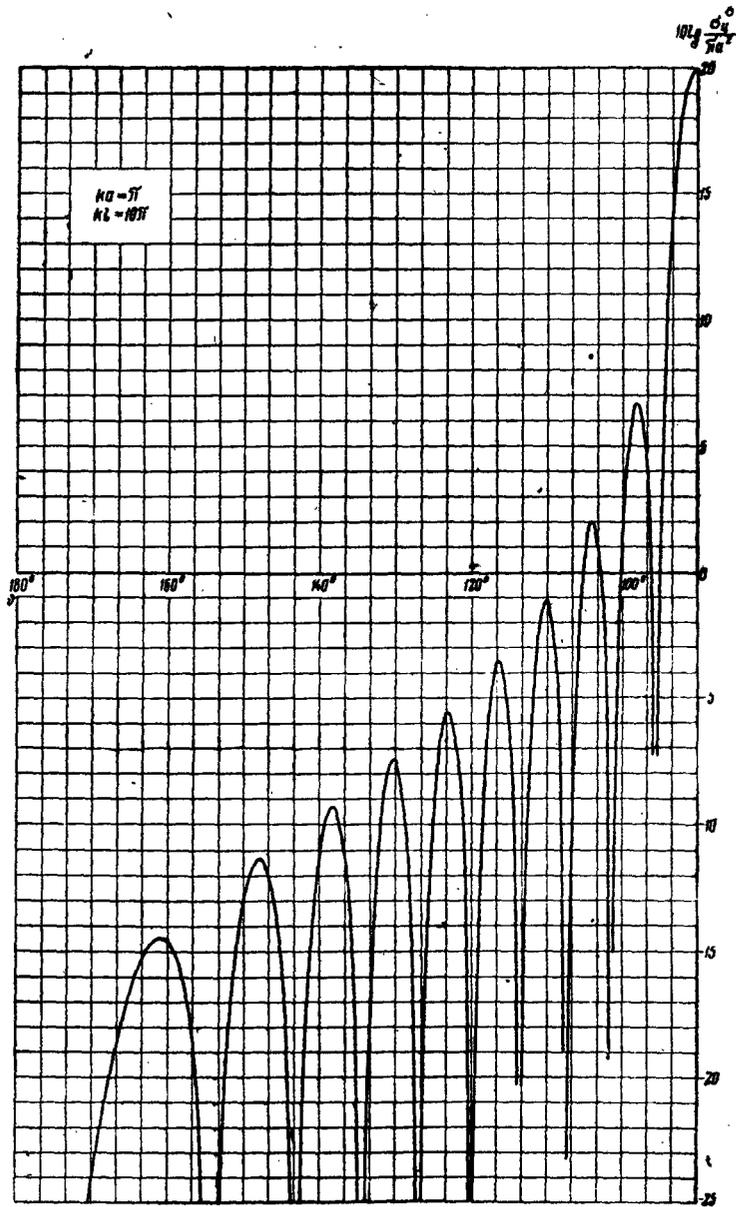


Рис. 27. Эффективная поверхность рассеяния боковой поверхности цилиндра в приближении физической оптики [см. (13.26)].

ГЛАВА IV

**ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ,  
ПАДАЮЩЕЙ НА КОНЕЧНЫЕ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ  
ВДОЛЬ ИХ ОСИ СИММЕТРИИ**

В данной главе мы уточним приближение физической оптики для некоторых других тел вращения, поверхность которых имеет круговые изломы. При этом ограничимся случаем, когда плоская электромагнитная волна падает на тела вдоль их оси симметрии.

Линейные размеры тел будем по-прежнему предполагать большими по сравнению с длиной волны. В этом случае токи вблизи кругового излома любой выпуклой поверхности вращения можно приближенно считать такими же, как и на соответствующем коническом теле. Следовательно, поле от неравномерной части тока, обусловленной круговым изломом поверхности, достаточно изучить на примере такого тела.

**§ 16. ПОЛЕ, СОЗДАВАЕМОЕ НЕРАВНОМЕРНОЙ  
ЧАСТЬЮ ТОКА**

Пусть плоская электромагнитная волна падает на коническое тело в положительном направлении оси  $z$  (рис. 28). Из соотношений

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{1}{ik} (\text{grad div } \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A}), \\ \mathbf{H} &= \text{rot } \mathbf{A} \end{aligned} \right\} \quad (16.01)$$

находим следующие выражения для рассеянного поля в волновой зоне:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= H_y = ikA_x, \\ E_y &= -H_x = ikA_y \end{aligned} \right\} \quad \text{при } \vartheta = 0 \quad (16.02)$$

и

$$\left. \begin{aligned} E_x &= -H_y = ikA_x, \\ E_y &= H_x = ikA_y \end{aligned} \right\} \quad \text{при } \vartheta = \pi. \quad (16.03)$$

При этом вектор-потенциал определяется формулой

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{1}{c} \frac{e^{ikr}}{r} \int_0^{2\pi} \int_0^{l_1} \mathbf{j}_1(\zeta) e^{\pm ik\zeta \cos \omega} (a - \zeta \sin \omega) d\zeta + \\ &+ \int_0^{l_2} \mathbf{j}_2(\zeta) e^{\mp ik\zeta \cos \Omega} (a - \zeta \sin \Omega) d\zeta d\psi. \end{aligned} \quad (16.04)$$

Здесь  $r$  — расстояние от излома до точки наблюдения,  $\mathbf{j}_1(\zeta)$  — плотность поверхностного тока, текущего на освещенной стороне тела,  $\mathbf{j}_2(\zeta)$  — плотность тока на теневой

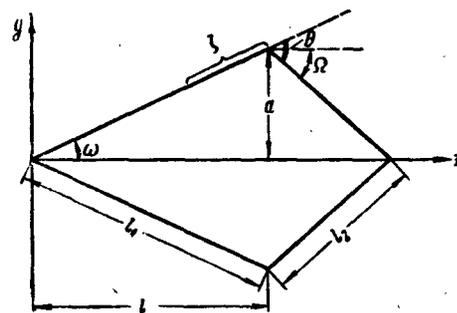


Рис. 28. Дифракция плоской волны на коническом теле. Плоская волна распространяется вдоль оси  $z$ .

стороне. Верхний знак в экспонентах относится к случаю  $\vartheta = 0$ , а нижний — к случаю  $\vartheta = \pi$ . Поскольку неравномерная часть тока сосредоточена в основном вблизи излома, то соответствующий ей вектор-потенциал можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{a}{c} \frac{e^{ikr}}{r} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\infty} \mathbf{j}_1^1(\zeta) e^{\pm ik\zeta \cos \omega} d\zeta + \right. \\ &+ \left. \int_0^{\infty} \mathbf{j}_2^1(\zeta) e^{\mp ik\zeta \cos \Omega} d\zeta \right) d\psi. \end{aligned} \quad (16.05)$$

Очевидно, что неравномерную часть тока вблизи излома конической поверхности приближенно можно считать такой же, как на соответствующем клине (рис. 29).

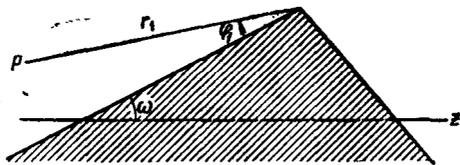


Рис. 29. Двугранный угол, соответствующий излому конической поверхности.

В местной цилиндрической системе координат  $r_1, \varphi_1, z_1$  поле от неравномерной части тока, текущего на таком клине, определяется в дальней зоне ( $kr_1 \gg 1$ ) следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} E_{z_1}(\psi) &= -H_{\varphi_1}(\psi) = ikA_{z_1}(\psi), \\ H_{z_1}(\psi) &= E_{\varphi_1}(\psi) = ikA_{\varphi_1}(\psi), \end{aligned} \right\} \quad (16.06)$$

где

$$A = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{2\pi}{k_1 r_1}} \left[ \int_0^\infty j_1^1(\zeta) e^{\pm ik\zeta \cos \omega} d\zeta + \int_0^\infty j_2^1(\zeta) e^{\mp ik\zeta \cos \omega} d\zeta \right] e^{i(kr_1 + \frac{\pi}{4})}. \quad (16.07)$$

Здесь верхний знак в экспонентах относится к случаю  $\varphi_1 = \pi + \omega$ , а нижний — к случаю  $\varphi_1 = \omega$ . С другой стороны, в § 4 было показано, что это поле равно

$$\left. \begin{aligned} E_{z_1}(\psi) &= E_{0z_1}(\psi) f^1 \frac{e^{i(kr_1 + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi k r_1}}, \\ H_{z_1}(\psi) &= H_{0z_1}(\psi) g^1 \frac{e^{i(kr_1 + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi k r_1}}, \end{aligned} \right\} \quad (16.08)$$

где  $E_{0z_1}(\psi), H_{0z_1}(\psi)$  — значения амплитуды падающей волны на ребре клина, а  $f^1$  и  $g^1$  — угловые функции, характеризующие диаграмму рассеяния.

Введем обозначение

$$J = \int_0^\infty j_1^1(\zeta) e^{\pm ik\zeta \cos \omega} d\zeta + \int_0^\infty j_2^1(\zeta) e^{\mp ik\zeta \cos \omega} d\zeta. \quad (16.09)$$

Приравняв выражения (16.06) и (16.08), находим

$$J_{z_1} = \frac{cE_{0z_1}(\psi)}{ik2\pi} f^1, \quad J_{\varphi_1} = \frac{cH_{0z_1}(\psi)}{ik2\pi} g^1. \quad (16.10)$$

Компоненты  $J_{z_1}$  и  $J_{\varphi_1}$  взаимно перпендикулярны и при  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = \pi$  параллельны плоскости  $xOy$  (рис. 30). Раз-

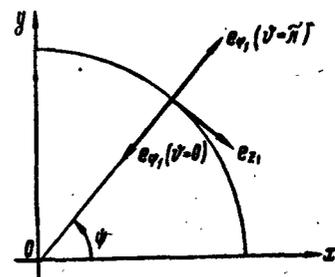


Рис. 30. Взаимная ориентация ортов  $e_{\varphi_1}, e_{z_1}$  в случаях  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = \pi$ .

личная ориентация орта  $e_{\varphi_1}$  при  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = \pi$  связана с тем, что угол  $\varphi_1$  отсчитывается от освещенной грани клина. В исходной системе координат  $x, y, z$  вектор  $J$  имеет компоненты

$$\left. \begin{aligned} J_x &= J_{z_1} \sin \psi - J_{\varphi_1} \cos \psi, \\ J_y &= -J_{z_1} \cos \psi - J_{\varphi_1} \sin \psi \end{aligned} \right\} \quad \text{при } \vartheta = 0 \quad (16.11)$$

и

$$\left. \begin{aligned} J_x &= J_{z_1} \sin \psi + J_{\varphi_1} \cos \psi, \\ J_y &= -J_{z_1} \cos \psi + J_{\varphi_1} \sin \psi \end{aligned} \right\} \quad \text{при } \vartheta = \pi. \quad (16.12)$$

Подставляя сюда выражения (16.10), получаем

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \frac{c}{ik2\pi} [f^1 E_{0z_1}(\psi) \sin \psi - g^1 H_{0z_1}(\psi) \cos \psi], \\ J_y &= \frac{-c}{ik2\pi} [f^1 E_{0z_1}(\psi) \cos \psi + g^1 H_{0z_1}(\psi) \sin \psi] \end{aligned} \right\} \quad \text{при } \vartheta = 0 \quad (16.13)$$

и

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \frac{c}{ik2\pi} [f^1 E_{0z_1}(\psi) \sin \psi + g^1 H_{0z_1}(\psi) \cos \psi], \\ J_y &= -\frac{c}{ik2\pi} [f^1 E_{0z_1}(\psi) \cos \psi - g^1 H_{0z_1}(\psi) \sin \psi] \end{aligned} \right\} \text{при } \vartheta = \pi. \quad (16.14)$$

Отождествляя теперь ток вблизи излома конической поверхности с током на клине, найдем компоненты вектор-потенциала (16.05)

$$\left. \begin{aligned} A_x &= \frac{a}{ik2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int_0^{2\pi} [f^1 E_{0z_1}(\psi) \sin \psi - \\ &\quad - g^1 H_{0z_1}(\psi) \cos \psi] d\psi, \\ A_y &= -\frac{a}{ik2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int_0^{2\pi} [f^1 E_{0z_1}(\psi) \cos \psi + \\ &\quad + g^1 H_{0z_1}(\psi) \sin \psi] d\psi \end{aligned} \right\} \text{при } \vartheta = 0 \quad (16.15)$$

и

$$\left. \begin{aligned} A_x &= \frac{a}{ik2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int_0^{2\pi} [f^1 E_{0z_1}(\psi) \sin \psi + \\ &\quad + g^1 H_{0z_1}(\psi) \cos \psi] d\psi, \\ A_y &= -\frac{a}{ik2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int_0^{2\pi} [f^1 E_{0z_1}(\psi) \cos \psi - \\ &\quad - g^1 H_{0z_1}(\psi) \sin \psi] d\psi. \end{aligned} \right\} \text{при } \vartheta = \pi. \quad (16.16)$$

Пусть далее плоская волна поляризована так, что  $E_0 \parallel 0x$ . Тогда

$$E_{0z_1}(\psi) = E_{0x} \sin \psi, \quad H_{0z_1}(\psi) = -E_{0x} \cos \psi. \quad (16.17)$$

Учитывая эти соотношения и подставляя выражения (16.15) и (16.16) в формулы (16.02) и (16.03), найдем поле от не-

равномерной части тока, обусловленной круговым изломом конической поверхности,

$$\left. \begin{aligned} E_x = H_y &= \frac{aE_{0x}}{2} (f^1 + g^1) \frac{e^{ikr}}{r} \\ E_y = H_x &= 0 \end{aligned} \right\} \text{при } \vartheta = 0 \quad (16.18)$$

и

$$\left. \begin{aligned} E_x = -H_y &= \frac{aE_{0x}}{2} (f^1 - g^1) \frac{e^{ikr}}{r} \\ E_y = H_x &= 0 \end{aligned} \right\} \text{при } \vartheta = \pi. \quad (16.19)$$

Формула (16.18) применима для значений  $0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $\omega < \theta \leq \pi$ , формула (16.19) — для значений  $0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ . В случае диска ( $\omega = \frac{\pi}{2}$ ,  $\theta = \pi$ ) поле от неравномерной части тока равно нулю на оси  $z$ , так как  $f^1 = -g^1 = -\frac{1}{2}$  при  $\vartheta = 0$  и  $f^1 = g^1 = -\frac{1}{2}$  при  $\vartheta = \pi$  [ср. (8.16)].

Пользуясь полученными соотношениями, мы в следующих параграфах вычислим эффективную поверхность рассеяния (в направлении  $\vartheta = \pi$ ) для конкретных тел. При этом будем предполагать, что они облучаются плоской волной

$$E_x = H_y = E_{0x} e^{ikhz}, \quad (16.20)$$

а их линейные размеры велики по сравнению с длиной волны.

### § 17. КОНУС

Пусть конус (рис. 28) облучается плоской электромагнитной волной (16.20). Равномерная часть тока, возбуждаемая при этом на его поверхности, имеет компоненты

$$\left. \begin{aligned} j_x^0 &= \frac{c}{2\pi} E_{0x} \sin \omega e^{ikhz}, \\ j_y^0 &= 0, \\ j_z^0 &= \frac{c}{2\pi} E_{0x} \cos \omega \cos \psi e^{ikhz} \end{aligned} \right\} \quad (17.01)$$

и создает в направлении  $\theta = \pi$  (при  $R \gg ka^2$ ,  $R \gg kl^2$ ) поле

$$\left. \begin{aligned} E_x = -H_y = -E_{0x} \frac{i}{4k} \operatorname{tg}^2 \omega \frac{e^{ikR}}{R} + \\ + E_{0x} \left( \frac{i}{4k} \operatorname{tg}^2 \omega + \frac{a}{2} \operatorname{tg} \omega \right) \frac{e^{ikR}}{R} e^{2ikh}, \\ E_y = H_x = 0. \end{aligned} \right\} (17.02)$$

Первое слагаемое здесь описывает сферическую волну, расходящуюся от вершины конуса, а остальные — сферическую волну от его основания.

Поле, обусловленное изломом поверхности у основания конуса, представляет собой сферическую волну и определяется согласно (16.19) выражением

$$\left. \begin{aligned} E_x = -H_y = -\frac{a}{2} E_{0x} \left( \operatorname{tg} \omega + \frac{\frac{2}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{2\omega}{n}} \right) \frac{e^{ikR}}{R} e^{2ikh}, \\ E_y = H_x = 0, \end{aligned} \right\} (17.03)$$

где

$$n = 1 + \frac{\omega + \varrho}{\pi}. \quad (17.04)$$

Асимптотическое вычисление строгих дифракционных рядов для полубесконечного конуса [38—40] показывает, что в направлении  $\theta = \pi$  можно пренебречь влиянием неравномерной частью тока, обусловленной коническим острием. Поэтому суммируя (17.02) и (17.03), мы получим следующее выражение для рассеянного поля:

$$\left. \begin{aligned} E_x = -H_y = -E_{0x} \left[ \frac{i}{2} \operatorname{tg}^2 \omega (1 - e^{2ikh}) + \right. \\ \left. + ka \frac{\frac{2}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{2\omega}{n}} e^{2ikh} \right] \frac{e^{ikR}}{2kR}, \\ E_y = H_x = 0. \end{aligned} \right\} (17.05)$$

Отметим следующую существенную особенность полученной формулы. В задачах, которые были рассмотрены в предыдущих главах, краевые волны рассеянного поля выражались только через функции  $f$  и  $g$ . Теперь же в формуле для сферической волны от основания конуса наряду с членом, зависящим от  $f$  и  $g$  [последнее слагаемое в квадратной скобке формулы (17.05)] имеется еще дополнительный член [слагаемое  $-i/2 \operatorname{tg}^2 \omega e^{2ikh}$  в формуле (17.05)], который не зависит от этих функций и определяется равномерной частью тока. Поэтому результирующую сферическую волну от основания конуса нельзя представить только через функции  $f$  и  $g$ , характеризующие диаграмму полной краевой волны от ребра соответствующего клина. Это существенное обстоятельство не учитывалось в работах [41, 44], вследствие чего их авторам не удалось получить правильных результатов для конуса с произвольным углом раствора  $\omega$  ( $0 \leq \omega \leq \pi/2$ ).

Эффективная поверхность рассеяния согласно (12.18) определяется формулой

$$\sigma = \pi a |\Sigma|^2, \quad (17.06)$$

где функция  $\Sigma$  связана с рассеянным полем соотношением

$$E_x = -H_y = -\frac{a}{2} E_{0x} \frac{e^{ikR}}{R} \Sigma \quad (17.07)$$

и равна

$$\Sigma = \frac{1}{ka} \operatorname{tg}^2 \omega \sin kl e^{ikh} + \frac{\frac{2}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{2\omega}{n}} e^{2ikh}. \quad (17.08)$$

Аналогичную функцию в приближении физической оптики можно записать согласно (17.02) в виде

$$\Sigma^0 = \frac{1}{ka} \operatorname{tg}^2 \omega \sin kl e^{ikh} - \operatorname{tg} \omega e^{2ikh}. \quad (17.09)$$

При деформировании передней части конуса в диск ( $\omega \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ,  $l \rightarrow 0$ ) формулы (17.08) и (17.09) преобразуются соответственно к виду

$$\left. \begin{aligned} \Sigma = -ika - \frac{1}{n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}, \\ \Sigma^0 = -ika. \end{aligned} \right\} (17.10)$$

Из (17.08) и (17.09) далее следует, что для больших значений параметра  $ka$  ( $ka \gg \text{tg}^2 \omega$ ) функции  $\Sigma$  и  $\Sigma^0$  можно представить в виде

$$\Sigma = \frac{\frac{2}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{2\omega}{n}} e^{2ikh}, \quad (17.11)$$

$$\Sigma^0 = \text{tg} \omega e^{2ikh}. \quad (17.12)$$

Таким образом, даже в случае коротких волн ( $ka \gg \text{tg}^2 \omega$ , но  $R \gg kl^2$ ) наше выражение (17.08) не переходит в формулу физической оптики и существенно от нее отличается, так как

$$\sigma = \pi a^2 \left| \frac{\frac{2}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{2\omega}{n}} \right|^2 \quad (17.13)$$

и

$$\sigma^0 = \pi a^2 \text{tg}^2 \omega. \quad (17.14)$$

При этом

$$\sigma = \sigma^0 \left| \frac{\frac{2}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\left( \cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{2\omega}{n} \right) \text{tg} \omega} \right|^2, \quad (17.15)$$

т. е. для достаточно коротких волн (или для достаточно больших размеров конуса) функция  $\sigma$  пропорциональна  $\sigma^0$ , причем коэффициент пропорциональности не зависит от размеров конуса, а определяется только его формой.

Этот результат наглядно иллюстрируется кривыми, дающими зависимость эффективной поверхности рассеяния конуса ( $\omega = 10^\circ 25'$ ,  $k = \pi$ ,  $\Omega = 90^\circ$ ) от его длины (рис. 31). В то время, как наша формула (непрерывная линия) находится в удовлетворительном согласии с результатами измерений (крестики)\*, приближение физической оптики (штрихованная линия) дает значения на 13—15 дБ меньше экспериментальных. Особенно большое значение неравномерная часть тока имеет для острых конусов. На рис. 32 построена кривая для эффективной поверхности конуса ( $ka = 2,75\pi$ ,  $\Omega = 90^\circ$ ) при де-

\* См. сноску на стр. 101.

формировании его в диск ( $\omega \rightarrow 90^\circ$ ). Расхождение между нашей кривой и приближением физической оптики достигает здесь при  $\omega = 2^\circ$  почти 30 дБ.

Полученное нами выражение (17.08) позволяет также, в отличие от приближения физической оптики (17.09), оценить роль формы теневой части тела и пока-

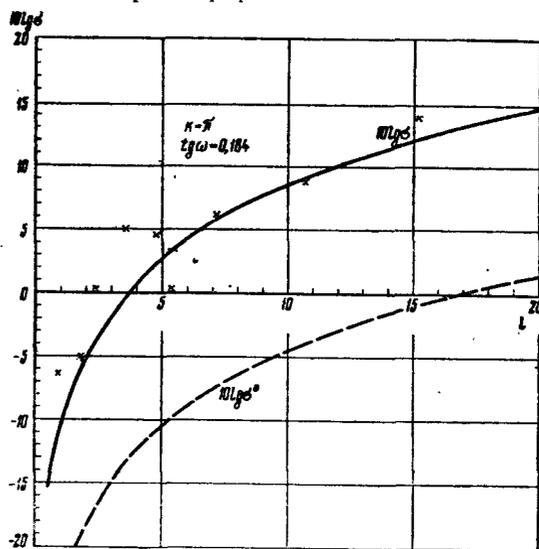


Рис. 31. Зависимость эффективной поверхности рассеяния конечного конуса от его длины. Функция  $\sigma$  (сплошная линия) вычислена по формуле (17.06), учитывающей неравномерную часть тока вблизи кругового излома. Функция  $\sigma^0$  (штриховая линия) соответствует приближению физической оптики.

зывает, что отраженный сигнал будет тем больше, чем ближе эта форма к воронкообразной ( $\Omega \approx \pi - \omega$ ). Так, например, в случае  $\omega = 10^\circ$ ,  $kl = 10\pi$  ( $k = \pi$ ) величина сигнала, отраженного конусом, может на 15 дБ превышать значение, соответствующее физической оптике (см. рис. 33), если  $\Omega \approx 170^\circ$ .

Заметим, что наше выражение (17.13) эквивалентно приведенному в упомянутых выше статьях [41, 44], однако последнее применимо лишь для острых конусов, тогда как у нас, помимо (17.13), имеется формула (17.08),

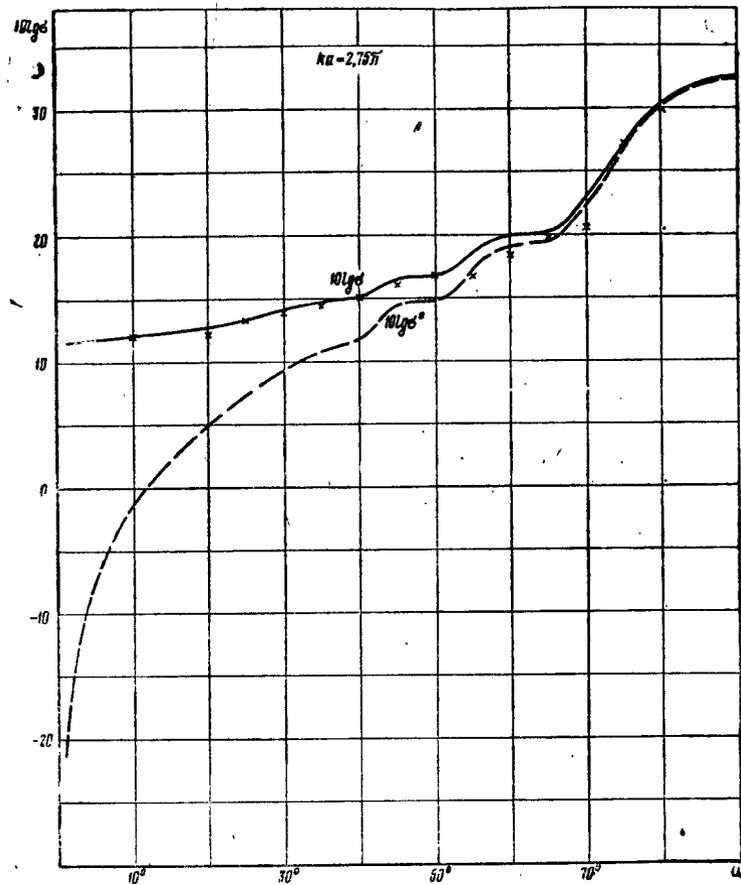


Рис. 32 Зависимость эффективной поверхности рассеяния конечного конуса от величины угла при вершине.

пригодная для конусов с любым углом раствора  $\omega$  ( $0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}$ ).

Изложенный метод расчета может быть обобщен на случай несимметричного облучения конуса. Однако при несимметричном облучении, вообще говоря, уже нужно принимать во внимание неравномерную часть тока, обусловленную острием конуса.

В заключение параграфа вычислим эффективную поверхность рассеяния для тела, образуемого вращением

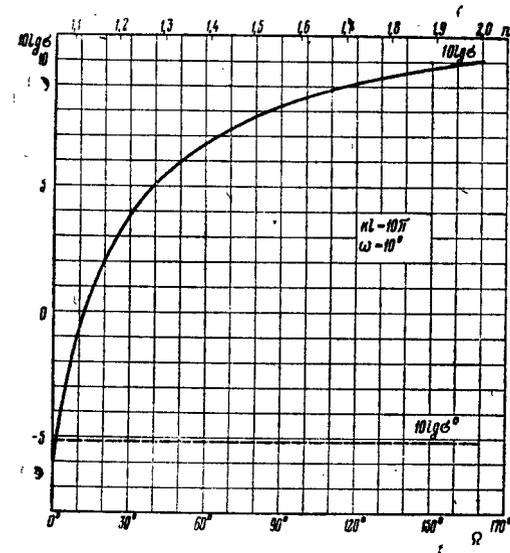


Рис. 33. Зависимость эффективной поверхности рассеяния конечного конуса от формы теневой части.

вокруг оси  $z$  плоской фигуры, изображенной на рис. 34. Интегрируя равномерную часть тока, нетрудно показать, что поле, рассеянное в направлении  $\theta = \pi$  боковой по-

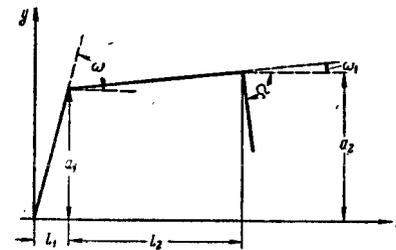


Рис. 34. Образующая поверхности вращения.

верхностью усеченного конуса (рис. 35), определяется формулой

$$E_x = -H_y = E_{0x} \cdot \left[ -\left( \frac{i}{4k} \operatorname{tg}^2 \omega_1 + \frac{a_1}{2} \operatorname{tg} \omega_1 \right) e^{2ikl_1} + \left( \frac{i}{4k} \operatorname{tg}^2 \omega_1 + \frac{a_2}{2} \operatorname{tg} \omega_1 \right) e^{2ik(l_1+l_2)} \right] \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (17.16)$$

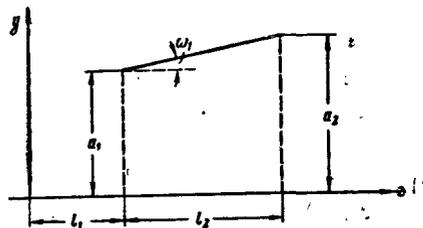


Рис. 35. Образующая усеченной конической поверхности.

Суммируя это выражение с (17.02), где величины  $l$  и  $a$  следует заменить на  $l_1$  и  $a_1$ , находим поле от равномерной части тока, текущего на всей освещенной стороне тела

$$E_x = -H_y = -\frac{a_1 E_{0x}}{2} \left\{ \frac{1}{ka_1} \operatorname{tg}^2 \omega \sin kl_1 e^{ikl_1} - \operatorname{tg} \omega e^{2ikl_1} + \left[ \frac{1}{ka_1} \operatorname{tg}^2 \omega_1 \sin kl_2 e^{ikl_2} + \left( 1 - \frac{a_2}{a_1} e^{2ikl_2} \right) \operatorname{tg} \omega_1 \right] e^{2ikl_1} \right\} \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (17.17)$$

Поле, излучаемое неравномерной частью тока, определяется согласно § 16 формулой

$$E_x = -H_y = -\frac{a_1 E_{0x}}{2} \left[ \left( \frac{\frac{2}{n_1} \sin \frac{\pi}{n_1}}{\cos \frac{\pi}{n_1} - \cos \frac{2\omega}{n_1}} + \operatorname{tg} \omega - \operatorname{tg} \omega_1 \right) e^{2ikl_1} + \frac{a_2}{a_1} \left( \frac{\frac{2}{n_2} \sin \frac{\pi}{n_2}}{\cos \frac{\pi}{n_2} - \cos \frac{2\omega_1}{n_2}} + \operatorname{tg} \omega_1 \right) e^{2ik(l_1+l_2)} \right] \frac{e^{ikR}}{R}, \quad (17.18)$$

где

$$n_1 = 1 + \frac{\omega - \omega_1}{\pi}, \quad n_2 = 1 + \frac{\omega_1 + \omega}{\pi}. \quad (17.19)$$

Суммируя теперь (17.17) и (17.18), получим уточненное выражение для поля, рассеянного в направлении  $\theta = \pi$

$$E_x = -H_y = -\frac{a_1 E_{0x}}{2} \left( \frac{1}{ka_1} \operatorname{tg}^2 \omega \sin kl_1 e^{ikl_1} + \frac{\frac{2}{n_1} \sin \frac{\pi}{n_1}}{\cos \frac{\pi}{n_1} - \cos \frac{2\omega}{n_1}} e^{2ikl_1} + \frac{1}{ka_1} \operatorname{tg}^2 \omega_1 \sin kl_2 e^{ikl_2 + 2ikl_1} + \frac{a_2}{a_1} \frac{\frac{2}{n_2} \sin \frac{\pi}{n_2}}{\cos \frac{\pi}{n_2} - \cos \frac{2\omega_1}{n_2}} e^{2ik(l_1+l_2)} \right) \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (17.20)$$

Следовательно, эффективная поверхность рассеяния будет равна

$$\sigma = \pi a_1^2 \left| \frac{1}{ka_1} \operatorname{tg}^2 \omega \sin kl_1 e^{ikl_1} + \frac{\frac{2}{n_1} \sin \frac{\pi}{n_1}}{\cos \frac{\pi}{n_1} - \cos \frac{2\omega}{n_1}} e^{2ikl_1} + \frac{1}{ka_1} \operatorname{tg}^2 \omega_1 \sin kl_2 e^{ikl_2 + 2ikl_1} + \frac{a_2}{a_1} \frac{\frac{2}{n_2} \sin \frac{\pi}{n_2}}{\cos \frac{\pi}{n_2} - \cos \frac{2\omega_1}{n_2}} e^{2ik(l_1+l_2)} \right|^2. \quad (17.21)$$

В приближении физической оптики аналогичная величина равна

$$\sigma^0 = \pi a_1^2 \left| \frac{1}{ka_1} \operatorname{tg}^2 \omega \sin kl_1 e^{ikl_1} - \operatorname{tg} \omega e^{2ikl_1} + \left[ \frac{1}{ka_1} \operatorname{tg}^2 \omega_1 \sin kl_2 e^{ikl_2} + \left( 1 - \frac{a_2}{a_1} e^{2ikl_2} \right) \operatorname{tg} \omega_1 \right] e^{2ikl_1} \right|^2. \quad (17.22)$$

При деформировании переднего конуса в диск ( $\omega \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ,  $l_1 \rightarrow 0$ ) формулы (17.21) и (17.22) принимают вид

$$\sigma = \pi a_1^2 \left| -ika_1 - \frac{1}{n_1} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n_1} + \frac{1}{ka_1} \operatorname{tg}^2 \omega_1 \sin kl_2 e^{ikl_2} + \frac{a_2}{a_1} \frac{\frac{2}{n_2} \sin \frac{\pi}{n_2}}{\cos \frac{\pi}{n_2} - \cos \frac{2\omega_1}{n_2}} e^{2ikl_2} \right|^2, \quad (17.23)$$

$$\sigma^0 = \pi a_1^2 \left| -ika_1 + \frac{1}{ka_1} \operatorname{tg}^2 \omega_1 \sin kl_2 e^{ikl_2} + \left(1 - \frac{a_2}{a_1} e^{2ikl_2}\right) \operatorname{tg} \omega_1 \right|^2. \quad (17.24)$$

Полагая в этих выражениях  $\omega_1 = 0$ , находим эффективную поверхность рассеяния для конечного цилиндра

$$\sigma = \pi a_1^2 \left| -ika_1 - \frac{1}{n_1} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n_1} + \frac{\frac{2}{n_2} \sin \frac{\pi}{n_2}}{\cos \frac{\pi}{n_2} - 1} e^{2ikl_2} \right|^2, \quad (17.25)$$

$$\sigma^0 = \pi a_1^2 (ka_1)^2, \quad (17.26)$$

причем

$$n_1 = \frac{3}{2}, \quad n_2 = 1 + \frac{\Omega}{\pi}. \quad (17.27)$$

Формула (17.25) является более точной, чем формула (15.06), выведенная в § 15, где величина поля в направлении  $\vartheta = \pi$  была взята в приближении физической оптики.

### § 18. ПАРАБОЛОИД ВРАЩЕНИЯ

Вычислим эффективную поверхность рассеяния параболоида вращения  $r^2 = 2pz$  (рис. 36), облучаемого плоской волной (16.20). Равномерная часть тока, возбуж-

даемая на поверхности параболоида, имеет компоненты

$$\left. \begin{aligned} j_x^0 &= \frac{c}{2\pi} E_{0x} \sin \alpha e^{ikz}, \\ j_y^0 &= 0, \\ j_z^0 &= \frac{c}{2\pi} E_{0x} \cdot \cos \alpha \cos \varphi e^{ikz}. \end{aligned} \right\} \quad (18.01)$$

Интегрируя этот ток, нетрудно показать, что в направлении  $\vartheta = \pi$  он излучает поле

$$\left. \begin{aligned} E_x = -H_y &= -E_{0x} \cdot \frac{a}{2} (1 - e^{2ikl}) \operatorname{tg} \omega \frac{e^{ikR}}{R}, \\ E_y = H_x &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18.02)$$

Здесь  $a$  — радиус основания параболоида;  $l = \frac{a^2}{2p} = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \omega$  — его длина;  $\alpha$  — угол между осью  $z$  и касательной к образующей параболоида ( $r^2 = 2pz$ ). В точке  $z = l$  угол  $\alpha$  принимает значение  $\alpha = \omega$  ( $\operatorname{tg} \omega = \frac{p}{a}$ ).

Поле от неравномерной части тока, обусловленной изломом поверхности параболоида, определяется формулой (17.03). Что касается

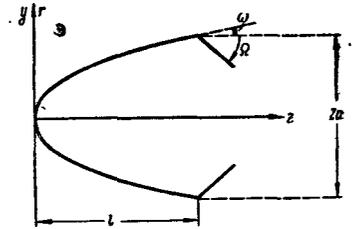


Рис. 36. К дифракции плоской волны на параболоиде вращения.

плавным искривлением поверхности параболоида, то при симметричном облучении оно равно нулю [45]. Поэтому, суммируя (18.02) и (17.03), мы находим выражение для результирующего рассеянного поля

$$\left. \begin{aligned} E_x = -H_y &= -\frac{aE_{0x}}{2} \left( \operatorname{tg} \omega + \frac{\frac{2}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{2\omega}{n}} e^{2ikl} \right) \frac{e^{ikR}}{R}, \\ E_y = H_x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \left( n = 1 + \frac{\omega + \Omega}{\pi} \right). \quad (18.03)$$

Следовательно, эффективная поверхность рассеяния параболоида будет определяться соотношением

$$\sigma = \pi a^2 \left| \operatorname{tg} \omega + \frac{\frac{2}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{2\omega}{n}} e^{2ikl} \right|^2, \quad (18.04)$$

которое при деформировании параболоида в диск ( $\omega \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ,  $l \rightarrow 0$ ,  $\Omega = \text{const}$ ) преобразуется к виду

$$\sigma = \pi a^2 \left| ika + \frac{1}{n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \right|^2. \quad (18.05)$$

Сравнивая выражение (18.04) с формулой

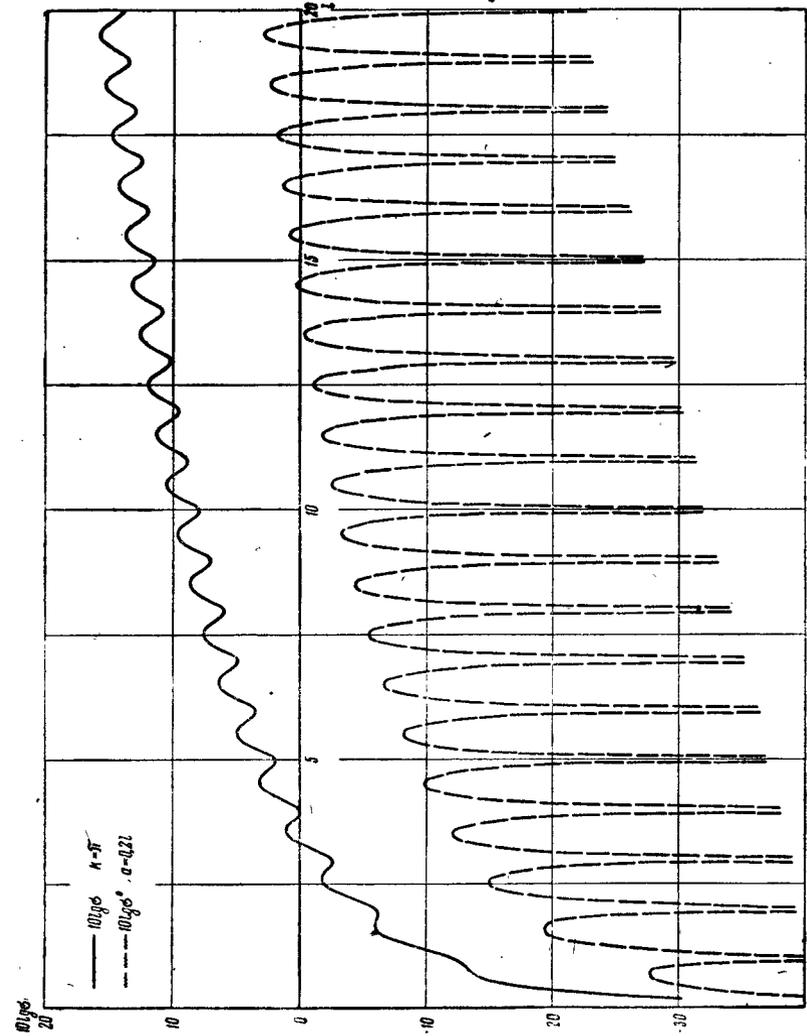
$$\sigma^0 = \pi a^2 \operatorname{tg}^2 \omega |1 - e^{2ikl}|^2, \quad (18.06)$$

которую дает для эффективной поверхности рассеяния физическая оптика, мы видим, что они существенно отличаются друг от друга. Действительно, прежде всего обращает на себя внимание осциллирующий характер функции  $\sigma^0$ : отраженный сигнал равен нулю, если по длине параболоида укладывается целое число полуволн ( $l = \frac{\lambda}{2} n$ ,  $n = 1, 2, 3 \dots$ ), и принимает максимальное значение, если содержит в себе полуцелое число полуволн ( $l = \frac{\lambda}{2} (n + \frac{1}{2})$ ,  $n = 1, 2, 3 \dots$ ).

Проведенный нами по формуле (18.04) расчет для параболоидов с параметрами  $\Omega = 90^\circ$ ,  $\operatorname{tg} \omega = 0,1$  ( $k = \pi$ ) показывает (рис. 37), что, хотя осциллирующий характер эффективной поверхности рассеяния сохраняется, амплитуда осцилляций составляет всего лишь около 2 дб, а максимальные значения функции  $\sigma$  превышают соответствующие значения в приближении физической оптики почти на 13 дб. Еще более сильное расхождение между результатами нашей теории и физической оптики обнаруживается при деформировании параболоида в диск (рис. 38,  $ka = 3\pi$ ,  $k = \pi$ ,  $\Omega = 90^\circ$ ,  $\omega \rightarrow 90^\circ$ ).

Как и в случае конуса, существенное влияние на величину отраженного сигнала оказывает форма теневых

Рис. 37. Зависимость эффективной поверхности рассеяния конического параболоида от его длины при постоянном значении угла  $\omega$  ( $\operatorname{tg} \omega = 0,1$ ). Диаметр основания меняется.



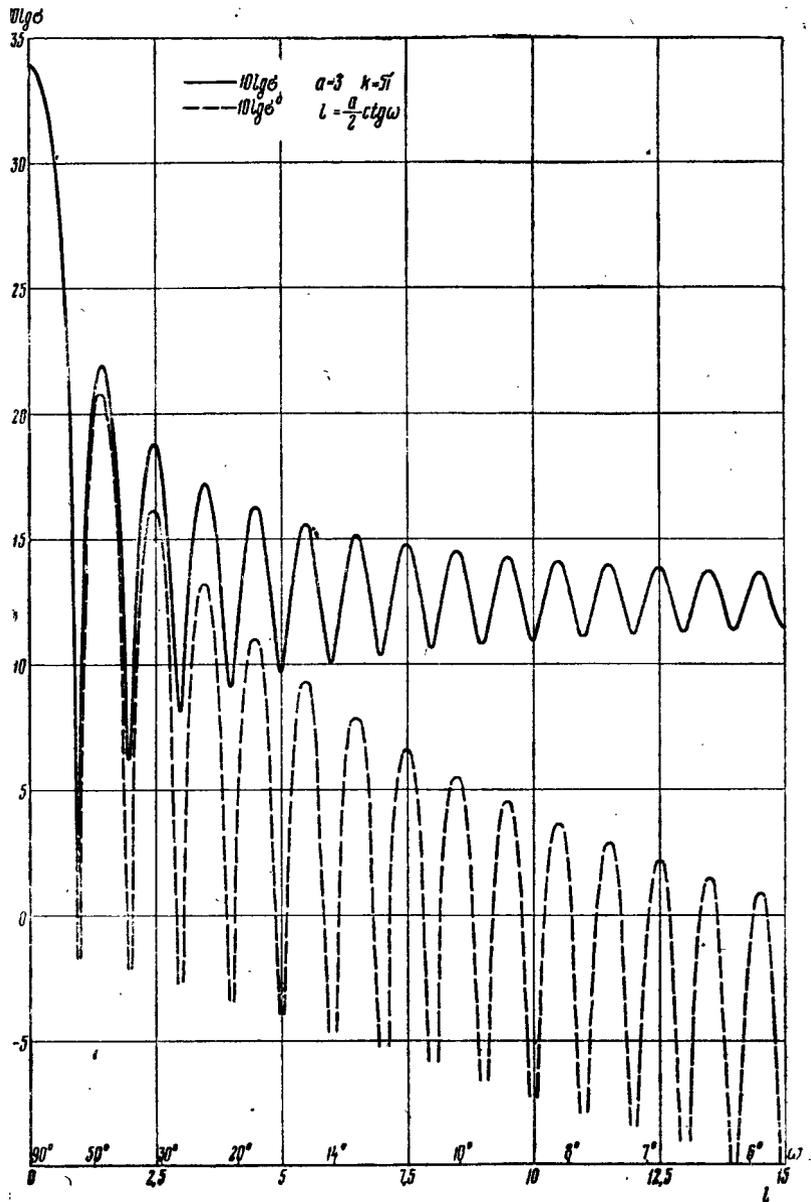


Рис. 38. Зависимость эффективной поверхности рассеяния конечного параболоида от его длины при постоянном радиусе основания.

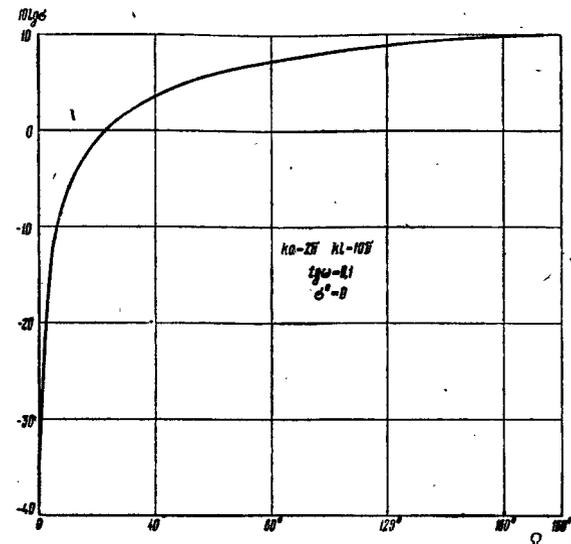


Рис. 39. Зависимость эффективной поверхности рассеяния конечного параболоида от формы теневой части.

части. Например, для параболоида с параметрами  $ka = 2\pi$ ,  $kl = 10\pi$ ,  $\text{tg } \omega = 0,1$  ( $k = \pi$ ) величина отраженного сигнала возрастает при увеличении  $\Omega$  ( $\omega < \Omega < \pi - \omega$ ) на 44 дБ (рис. 39).

В заключение параграфа остановимся на вопросе о вычислении эффективной поверхности рассеяния для тел вращения сложной формы, элементом которых является боковая поверхность усеченного параболоида. Поле от неравномерной части тока, возникающего вблизи круговых изломов, может быть без труда определено с помощью формулы (17.03). Поле от равномерной части тока находится квадратурами. При этом поле, создаваемое в направлении  $\vartheta = \pi$  равномерной частью тока, которая течет на боковой поверхности усеченного параболоида  $r^2 = 2pz$  ( $p = a_1 \text{tg } \omega_1 = a_2 \text{tg } \omega_2$ ; см. рис. 40), определяется формулой

$$\left. \begin{aligned} E_x = -H_y = -\frac{1}{2} E_{0x} (a_1 \text{tg } \omega_1 - a_2 \text{tg } \omega_2 e^{2ikl_2}) e^{2ikl_1} \frac{e^{ikR}}{R}, \\ E_y = H_x = 0. \end{aligned} \right\} (18.07)$$

Здесь

$$l_2 = \frac{1}{2} (a_2 \text{ctg } \omega_2 - a_1 \text{ctg } \omega_1) \quad (18.08)$$

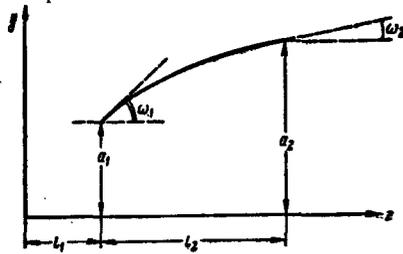


Рис. 40. Образующая боковой поверхности усеченного параболоида вращения.

есть высота усеченного параболоида (расстояние между его основаниями). Заметим, что формула (18.07) является простым алгебраическим следствием выражения (18.02): она представляет собой разность полей, рассеянных соответственно параболоидом с высотой  $l_1 + l_2 = \frac{a_2^2}{2\rho}$  и параболоидом с высотой  $l_1 = \frac{a_1^2}{2\rho}$ .

### § 19. СФЕРИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ

На поверхности идеально проводящей сферы (радиуса  $\rho$  и с центром на оси  $z$  в точке  $z = \rho$ ) падающая волна (16.20) возбуждает поверхностный ток, равномерная часть которого имеет компоненты

$$\left. \begin{aligned} j_x^0 &= -\frac{c}{2\pi} E_{0x} \cos \theta e^{ikz}, \\ j_y^0 &= 0, \\ j_z^0 &= \frac{c}{2\pi} E_{0x} \sin \theta \cos \varphi e^{ikz}. \end{aligned} \right\} \quad (19.01)$$

Такие токи, текущие на сферическом кольце, вырезанном из поверхности сферы плоскостями  $z = l_1$  и  $z = l_1 + l_2$  (рис. 41), создают в направлении  $\vartheta = \pi$  поле

$$\left. \begin{aligned} E_x = -H_y &= E_{0x} \left[ -\left(\frac{a_1}{2} \operatorname{tg} \omega_1 - \frac{i}{4k}\right) e^{2ikl_1} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{a_2}{2} \operatorname{tg} \omega_2 - \frac{i}{4k}\right) e^{2ik(l_1 + l_2)} \right] \frac{e^{ikR}}{R}, \\ E_y = H_x &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (19.02)$$

где

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= \rho(1 - \sin \omega_1), \\ l_2 &= \rho(\sin \omega_1 - \sin \omega_2); \end{aligned} \right\} \quad (19.03)$$

$$\rho = \frac{a_1}{\cos \omega_1} = \frac{a_2}{\cos \omega_2}. \quad (19.04)$$

Здесь  $a_1$  — радиус первого сечения;  $a_2$  — радиус второго сечения;  $\omega_1$  ( $\omega_2$ ) — угол между осью  $z$  и касательной к меридиану в точке  $z = l_1$  ( $z = l_1 + l_2$ ).

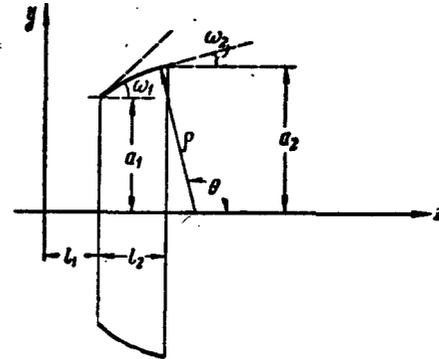


Рис. 41. Кольцо, вырезанное из поверхности сферы плоскостями  $z = l_1$  и  $z = l_1 + l_2$ .

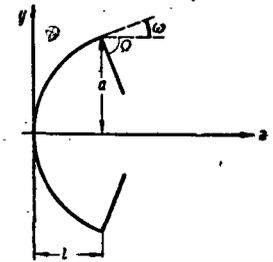


Рис. 42. Сферический сегмент с основанием конической формы.

Полагая далее в формуле (19.02)  $\omega_1 = \frac{\pi}{2}$  ( $\omega_2 = \text{const}$ ), получаем в приближении физической оптики выражение для поля, рассеянного сферическим сегментом (рис. 42),

$$\begin{aligned} E_x = -H_y &= E_{0x} \left[ -\frac{a}{2 \cos \omega} + \frac{i}{4k} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{a}{2} \operatorname{tg} \omega - \frac{i}{4k}\right) e^{2ikl} \right] \frac{e^{ikR}}{R}. \end{aligned} \quad (19.05)$$

Здесь мы использовали новые обозначения

$$\left. \begin{aligned} a &= a_2, \quad \omega = \omega_2, \\ l &= l_2 = \rho(1 - \sin \omega). \end{aligned} \right\} \quad (19.06)$$

Формулы (19.02) и (19.05) упрощаются, если  $ka_1 \gg 1$  и  $ka_2 \gg 1$ . При этом поле от сферического кольца будет равно

$$E_x = -H_y = -E_{0x} \left( \frac{a_1}{2} \operatorname{tg} \omega_1 - \frac{a_2}{2} \operatorname{tg} \omega_2 e^{2ikl_2} \right) e^{2ikl_1} \frac{e^{ikR}}{R}, \quad (19.07)$$

а поле от сферического сегмента

$$E_x = -H_y = -\frac{aE_{0x}}{2} (\sec \omega - \operatorname{tg} \omega e^{2ikl}) \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (19.08)$$

Если здесь положить  $\omega = 0$ , то формула

$$E_x = -H_y = -\frac{aE_{0x}}{2} \frac{e^{ikR}}{R} \quad (19.09)$$

даст нам величину поля, рассеянного полусферой. Соответствующее ей значение эффективной поверхности рассеяния будет согласно (17.06) равно

$$\sigma^0 = \pi a^2. \quad (19.10)$$

Найдем теперь поле, рассеянное сферическим сегментом, учитывая излом поверхности; возмущением тока вследствие гладкого искривления поверхности можно пренебречь, если  $ka \gg 1$  [74]. Неравномерная часть тока, обусловленная изломом, создает в направлении  $\vartheta = \pi$  поле (17.03). Суммируя последнее с полем (19.08), находим величину искомого поля

$$E_x = -H_y = -\frac{aE_{0x}}{2} \left( \frac{1}{\cos \omega} + \frac{\frac{2}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{2\omega}{n}} e^{2ikl} \right) \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (19.11)$$

Следовательно, эффективная поверхность рассеяния сферического сегмента будет равна

$$\sigma = \pi a^2 \left| \frac{1}{\cos \omega} + \frac{\frac{2}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{2\omega}{n}} e^{2ikl} \right|^2, \quad (19.12)$$

$$n = 1 + \frac{\omega + \Omega}{\pi}.$$

В приближении физической оптики аналогичная величина определяется полем (19.08) и равна

$$\sigma^0 = \pi a^2 \left| \frac{1}{\cos \omega} - \operatorname{tg} \omega e^{2ikl} \right|^2. \quad (19.13)$$

При деформировании сферической поверхности в диск ( $\omega \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ,  $l \rightarrow 0$ ,  $\Omega = \text{const}$ ) формулы (19.12) и (19.13) преобразуются соответственно к виду

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \pi a^2 \left| ika + \frac{1}{n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \right|^2, \\ \sigma^0 &= \pi a^2 (ka)^2. \end{aligned} \right\} \quad (19.14)$$

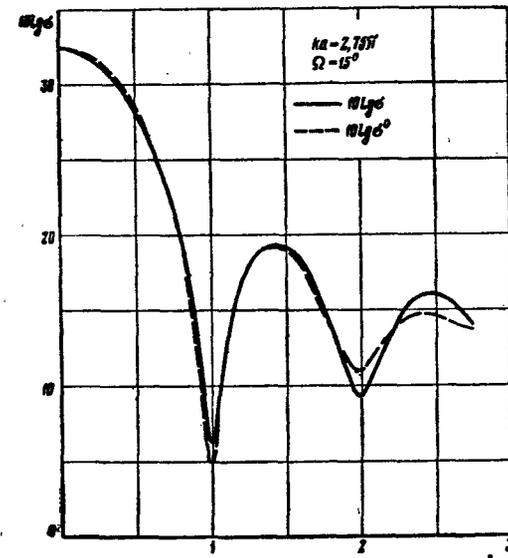


Рис. 43. Зависимость эффективной поверхности рассеяния сферического сегмента от его длины при постоянном радиусе основания. Функция  $\sigma$  (сплошная линия) вычислена по формуле (19.12), учитывая ошей неравномерную часть тока вблизи излома. Функция  $\sigma^0$  (штриховая линия) вычислена по формуле (19.13) и соответствует приближению физической оптики.

Из формул (19.12) и (19.13) следует, что эффективная поверхность рассеяния сферического сегмента является осциллирующей функцией его длины. Период осцилляций равен  $\frac{\lambda}{2}$ . Численные расчеты, проведенные по этим формулам, показали (рис. 43), что при малых углах излома ( $\Omega = 15^\circ$ ) полем от неравномерной части тока еще можно пренебречь. На рис. 44 построены гра-

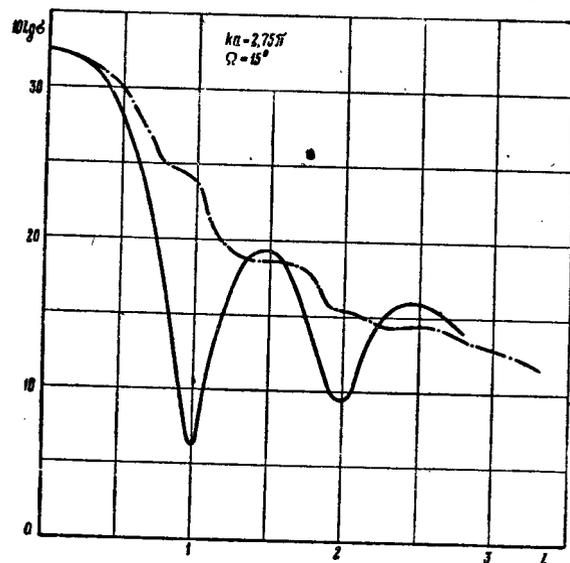


Рис. 44. Сравнение эффективной поверхности рассеяния сферического сегмента (сплошная линия) и конечного конуса (штрихпунктирная линия), имеющих одинаковые основания.

фики для эффективной поверхности рассеяния сферического сегмента и конечного конуса (штрихпунктирная кривая), имеющих одинаковые диаметр и форму основания.

\*  
\* \*

Результаты, полученные в данной главе, показывают, что величина отраженного сигнала существенно зависит от формы теневой части тела и возрастает с увеличением ее вогнутости. Однако поскольку неравномерная часть

тока сосредоточена в основном вблизи излома, то та часть затененной поверхности, которая удалена от излома на несколько длин волн, по-видимому, не будет заметно влиять на величину отраженного сигнала и может быть произвольной.

Интересно, что наши выражения, находящиеся в удовлетворительном согласии с экспериментом, даже при больших (по сравнению с длиной волны) размерах тел не переходят в формулы физической оптики и существенно от них отличаются. В то же время физическая оптика, вопреки распространённому мнению о ее надежности в таких случаях, приводит к значительному расхождению с экспериментом.

Метод, примененный в этой главе, позволяет рассчитать эффективную поверхность рассеяния при симметричном облучении для любого выпуклого тела вращения, поверхность которого имеет круговые изломы. Он может быть также обобщен на случай несимметричного облучения, однако при этом необходимо принимать во внимание неравномерную часть тока, обусловленную острием и плавным искривлением поверхности.

## ГЛАВА V ВТОРИЧНАЯ ДИФРАКЦИЯ

В предыдущих главах было проведено приближенное решение дифракционных задач, основанное на представлении рассеянного поля в виде суммы полей от равномерной и неравномерной частей поверхностного тока. Первое поле находилось квадратурами; второе — приближенно; предполагалось, что неравномерная часть тока вблизи излома (ребра) поверхности такая же, как на соответствующем клине.

Однако найденные таким способом поля являются фактически полями от токов, текущих не только на плоских или искривленных участках поверхности тела, но и в какой-то мере на геометрическом продолжении этих участков. Ошибка в выражениях для рассеянного поля, вносимая этим обстоятельством, наиболее существенна при скользящем падении волны, когда краевая зона, занятая неравномерной частью тока, значительно расширяется, а также при скользящем излучении, когда направление в точку наблюдения составляет малый угол с данным участком поверхности. В этих случаях полученные ранее результаты нуждаются в существенных поправках, о чем уже кратко говорилось в § 6 и 12.

Для уточнения найденных выше решений необходимо учесть, что в действительности токи текут только на поверхности тела, и что волна, идущая от одного ребра к другому, будет испытывать на последнем возмущение. Процесс формирования рассеянного поля при этом можно рассматривать следующим образом. Краевая волна, распространяясь от одного из ребер, дифрагирует на других ребрах; возникающие при этом волны в свою очередь дифрагируют на соседних ребрах и т. д. В этой главе мы рассмотрим случай, когда размеры граней ве-

лики по сравнению с длиной волны настолько, что достаточно ограничиться учетом дифракции только первичных краевых волн. Это явление мы называем вторичной дифракцией.

В данной главе исследуется вторичная дифракция на бесконечно длинной ленте (§ 20—23) и круговом диске (§ 24). Решение этих задач может быть получено с помощью принципа двойственности из решения дифракционных задач для бесконечной щели и круглого отверстия в плоском идеально проводящем экране. Оказывается, что в последнем случае физическая трактовка дифракции краевых волн значительно проще; именно поэтому почти все исследования дифракции краевых волн относятся к отверстиям в плоском экране. Однако мы не пойдем таким путем, а рассмотрим ленту и диск непосредственно. Соответствующий подход обладает тем преимуществом, что его легко обобщить на случай объемных тел.

### § 20. ВТОРИЧНАЯ ДИФРАКЦИЯ НА ЛЕНТЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть бесконечно тонкая идеально проводящая лента ширины  $2a$  и неограниченной длины ориентирована в пространстве так, как показано на рис. 45. Падающая нормально к краям ленты плоская электромагнитная волна

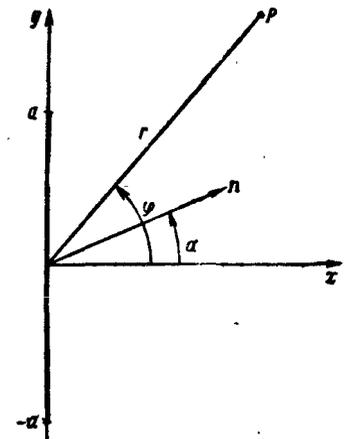


Рис. 45. Поперечное сечение ленты плоскостью  $xoy$ ,  $x = 0$ ,  $y = a$  и  $x = 0$ ,  $y = -a$  — координаты ребер ленты,  $n$  — нормаль к фронту падающей плоской волны.

направлена под углом  $\alpha$  к плоскости  $xOz$  и имеет следующий вид:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}. \quad (20.01)$$

В § 6 были найдены приближенные выражения для рассеянного поля в дальней зоне, которые не учитывают взаимодействия краев. В случае  $E$ -поляризации падающей волны ( $\mathbf{E}_0 \parallel Oz$ ) эти выражения можно представить в форме

$$\left. \begin{aligned} E_z = -H_\varphi = E_{0z} \left[ f(1) e^{ika(\sin \alpha - \sin \varphi)} + \right. \\ \left. + f(2) e^{-ika(\sin \alpha - \sin \varphi)} \right] \frac{e^{i\left(kr + \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi kr}}, \\ E_\varphi = H_z = 0, \end{aligned} \right\} (20.02)$$

и в случае  $H$ -поляризации ( $\mathbf{H}_0 \parallel Oz$ )

$$\left. \begin{aligned} H_z = E_\varphi = H_{0z} \left[ g(1) e^{ika(\sin \alpha - \sin \varphi)} + \right. \\ \left. + g(2) e^{-ika(\sin \alpha - \sin \varphi)} \right] \frac{e^{i\left(kr + \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi kr}}, \\ H_\varphi = E_z = 0. \end{aligned} \right\} (20.03)$$

Напомним, что входящие сюда функции  $f$  и  $g$  определяются в области  $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$  (при  $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$ ) следующими соотношениями:

$$f(1) = \frac{\cos \frac{\alpha + \varphi}{2} - \sin \frac{\alpha - \varphi}{2}}{\sin \alpha - \sin \varphi}, \quad f(2) = -\frac{\cos \frac{\alpha + \varphi}{2} + \sin \frac{\alpha - \varphi}{2}}{\sin \alpha - \sin \varphi}, \quad (20.04)$$

$$g(1) = -f(2), \quad g(2) = -f(1). \quad (20.05)$$

Первые члены в формулах (20.02) и (20.03) описывают цилиндрические волны, расходящиеся от края 1 ( $y=a$ ), а вторые — цилиндрические волны, расходящиеся от края 2 ( $y=-a$ ). Неравномерная часть тока на каждой стороне ленты также имеет вид волн, которые

расходятся от краев 1 и 2 и являются «аналитическим продолжением» соответствующих слагаемых в формулах (20.02) и (20.03). Набегая на противоположный край, волна тока отражается от него. Иначе можно сказать, что каждая из цилиндрических волн, распространяющихся от края 1 или 2, претерпевает дифракцию на противоположном крае (вторичная дифракция).

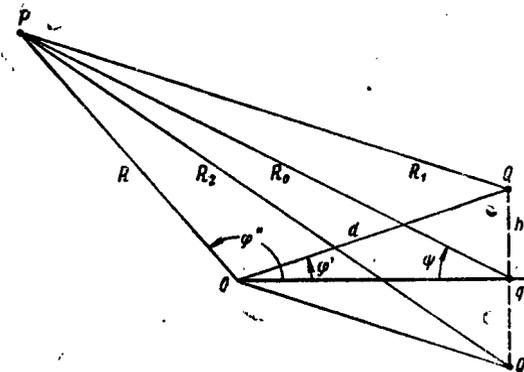


Рис. 46. Дифракция цилиндрической волны на полуплоскости.  $Q$  — источник,  $Q^*$  — зеркальное изображение источника,  $P$  — точка наблюдения.

Если ширина ленты достаточно велика по сравнению с длиной волны, то приближенно можно считать, что набегая волна тока вблизи края ленты будет такой же, как на соответствующей полуплоскости, возбуждаемой линейным источником, момент которого выбран определенным образом. Очевидно также, что отраженные от края волны тока тогда тоже будут совпадать. Следовательно, задача о вторичной дифракции на ленте может быть сведена к задаче о дифракции цилиндрической волны на полуплоскости.

Поле, создаваемое в точке  $P$  нитью тока, параллельной краю полуплоскости и проходящей через точку  $Q$  (рис. 46), можно найти с помощью принципа взаимности. В случае  $E$ -поляризации оно определяется соотношением

$$E_z = \frac{P_z}{P_{0z}} E_z(Q), \quad (20.06)$$

и в случае  $H$ -поляризации

$$H_z = \frac{m_z}{m_{0z}} H_z(Q). \quad (20.07)$$

Здесь  $p_z$  ( $m_z$ ) — электрический (магнитный) момент нити тока, проходящей через точку  $Q$ ;  $p_{0z}$  ( $m_{0z}$ ) — момент вспомогательной нити тока, проходящей через точку  $P$  с координатами  $(\varphi'', R)$ ,  $H_z(Q)$  или  $E_z(Q)$  — поле, создаваемое вспомогательной нитью в точке  $Q$ .

Удалим теперь вспомогательную нить тока настолько, чтобы приходящую от нее цилиндрическую волну можно было считать плоской на участке от края полуплоскости до точки  $Q$ . В этом случае согласно § 1 и 2 создаваемое ею поле в точке  $Q$  будет равно

$$\left. \begin{aligned} E_z(Q) &= E_{0z}(0) [u(d, \varphi' - \varphi'') - u(d, \varphi' + \varphi'')], \\ H_z(Q) &= H_{0z}(0) [u(d, \varphi' - \varphi'') + u(d, \varphi' + \varphi'')]. \end{aligned} \right\} \quad (20.08)$$

Входящие сюда функции  $u$  определяются (для значений  $0 \leq \varphi'' \leq \pi$ ) формулами

$$\left. \begin{aligned} u(d, \varphi' - \varphi'') &= e^{-ikd \cos(\varphi' - \varphi'')} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2kd} \cos \frac{\varphi' - \varphi''}{2}}{\sqrt{\pi}} \times \int_{\infty \cos \frac{\varphi' - \varphi''}{2}}^{\infty} e^{iq^2} dq + \\ &+ \begin{cases} e^{-ikd \cos(\varphi' - \varphi'')} & \text{при } 0 \leq \varphi' \leq \pi + \varphi'' \\ 0 & \text{при } \pi + \varphi'' \leq \varphi' \leq 2\pi, \end{cases} \\ u(d, \varphi' + \varphi'') &= e^{-ikd \cos(\varphi' + \varphi'')} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2kd} \cos \frac{\varphi' + \varphi''}{2}}{\sqrt{\pi}} \times \int_{\infty \cos \frac{\varphi' + \varphi''}{2}}^{\infty} e^{iq^2} dq + \\ &+ \begin{cases} e^{-ikd \cos(\varphi' + \varphi'')} & \text{при } 0 \leq \varphi' \leq \pi - \varphi'' \\ 0 & \text{при } \pi - \varphi'' \leq \varphi' \leq 2\pi, \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (20.09)$$

а величины  $E_z(0)$ ,  $H_z(0)$  суть значения первичного поля, создаваемого вспомогательной нитью в точках, соответствующих краю полуплоскости. Согласно формулам (1.21)

и (1.22) это поле может быть представлено при  $kR \gg 1$  в виде

$$\left. \begin{aligned} E_{0z}(0) &= ik^2 p_{0z} \sqrt{\frac{2\pi}{kR}} e^{i(kR - \frac{\pi}{4})}, \\ H_{0z}(0) &= ik^2 m_{0z} \sqrt{\frac{2\pi}{kR}} e^{i(kR - \frac{\pi}{4})}. \end{aligned} \right\} \quad (20.10)$$

Следовательно, нить электрического тока, расположенная над идеально проводящей полуплоскостью, возбуждает в точке  $P$  поле

$$E_z = ik^2 p_z [u(d, \varphi' - \varphi'') - u(d, \varphi' + \varphi'')] \sqrt{\frac{2\pi}{kR}} e^{i(kR - \frac{\pi}{4})}, \quad (20.11)$$

а нить магнитного тока возбуждает в точке  $P$  поле

$$H_z = ik^2 m_z [u(d, \varphi' - \varphi'') + u(d, \varphi' + \varphi'')] \sqrt{\frac{2\pi}{kR}} e^{i(kR - \frac{\pi}{4})}. \quad (20.12)$$

Легко видеть, что входящая в эти выражения экспонента  $e^{ik[R - d \cos(\varphi' - \varphi'')]}$  соответствует первичной цилиндрической волне, приходящей в точку наблюдения  $P$ , а экспонента  $e^{ik[R - d \cos(\varphi' + \varphi'')]}$  — отраженной цилиндрической волне.

Моменты  $m_z$  и  $p_z$  нужно выбирать так, чтобы в направлении  $\varphi'' = \pi$  (рис. 46) нить создавала над бесконечной идеально проводящей плоскостью поле, равное полю первичной краевой волны. Мы закончим эти вычисления в следующих параграфах, а сейчас сделаем еще одно замечание о постановке задачи.

В предыдущих главах было показано, что рассеивающий объект можно аппроксимировать рядом источников — «светящихся» линий и точек. Поэтому задачу о вторичной дифракции можно формулировать как задачу об отыскании функций, которые описывают непрерывное изменение поля каждого такого источника при переходе через соответствующую ему границу света и тени.

§ 21. ВТОРИЧНАЯ ДИФРАКЦИЯ НА ЛЕНТЕ  
(H-ПОЛЯРИЗАЦИЯ)

Нить тока с моментом  $m_z$ , расположенная над идеально проводящей плоскостью ( $h=0$ , рис. 46), создает в пространстве поле

$$H_z = ik^2 m_z 2\pi H_0^{(1)}(kR_1). \quad (21.01)$$

Вдали от нити (при  $kR_1 \gg 1$ ) это поле описывается асимптотическим выражением

$$H_z = 4\pi k^2 m_z \frac{e^{i(kR_1 + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi k R_1}}. \quad (21.02)$$

Первичная же краевая волна принимает в направлении  $\varphi'' = \pi$  значение

$$H_z = H_{0z}(Q) g(Q) \frac{e^{i(kR_1 + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi k R_1}}, \quad (21.03)$$

где  $H_{0z}(Q)$  — поле падающей плоской волны в точке  $Q$ ,  $g(Q)$  — значение угловой функции первичной цилиндрической волны в направлении к противоположному краю ленты. Приравнивая выражения (21.02) и (21.03), находим момент нити, полем которой мы аппроксимируем первичную краевую волну, в виде

$$m_z = \frac{1}{4\pi k^2} H_{0z}(Q) g(Q). \quad (21.04)$$

В результате поле, создаваемое нитями, расположенными над полуплоскостью  $-a \leq y \leq \infty$  и соответствующими краю 1 (рис. 47), можно представить для области  $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$  в виде

$$H_z(1) = H_z^+(1) + H_z^-(1). \quad (21.05)$$

Функция

$$H_z^+(1) = \frac{1}{\pi} H_{0z} \tilde{g}(1) \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{iq^2} dq \frac{e^{ikr}}{\sqrt{2kr}} e^{ika(\sin \alpha - \sin \varphi)} \quad (21.06)$$

описывает волну, излучаемую источником  $m_{1z}^+$ , а функция

$$H_z^-(1) = \frac{1}{\pi} H_{0z} \tilde{g}(1) \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{iq^2} dq \frac{e^{ikr}}{\sqrt{2kr}} e^{ika(\sin \alpha - \sin \varphi)} + H_{0z} \tilde{g}(1) \frac{e^{i(kr + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi kr}} e^{ika(\sin \alpha - \sin \varphi)} \quad (21.07)$$

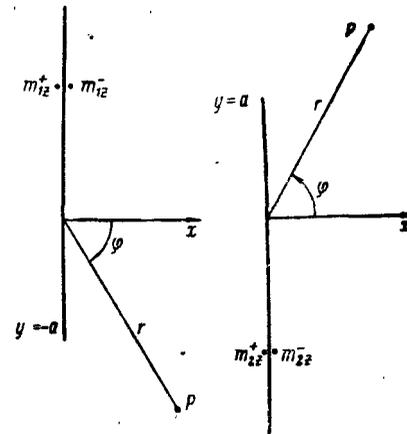


Рис. 47. К задаче о вторичной дифракции на ленте.  $m_{1z}^+$  и  $m_{1z}^-$  — источники, полем которых аппроксимируется первичная краевая волна, расходящаяся от края 1 ( $y = a$ ),  $m_{2z}^+$  и  $m_{2z}^-$  — источники, полем которых аппроксимируется первичная волна от края 2 ( $y = -a$ ).

— волну, излучаемую источником  $m_{1z}^-$ . Сумма этих волн равна

$$H_z(1) = \frac{2}{\pi} H_{0z} \bar{g}(1) \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{iq^2} dq \frac{e^{ikr}}{\sqrt{2kr}} e^{ika(\sin \alpha - \sin \varphi)} + H_{0z} \bar{g}(1) \frac{e^{i(kr + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi kr}} e^{ika(\sin \alpha - \sin \varphi)} \quad (21.08)$$

Первое слагаемое в этом выражении представляет собой искомую вторичную волну от края 2, а второе — поле, излучаемое нитью, которая расположена над идеально проводящей плоскостью  $x=0$  и обладает моментом

$$m_{1z}^- = \frac{1}{4\pi k^2} H_{0z} \bar{g}(1) e^{ika \sin \alpha}, \quad (21.09)$$

где

$$\bar{g}(1) = g(1) \Big|_{\varphi = -\frac{\pi}{2} + 0}. \quad (21.10)$$

Складывая найденную вторичную волну с невозмущенной первичной волной от края 1, получаем

$$H_z(1-2) = H_{0z} \frac{2}{\pi} \bar{g}(1) \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{iq^2} dq \frac{e^{ikr}}{\sqrt{2kr}} e^{ika(\sin \alpha - \sin \varphi)} + H_{0z} g(1) \frac{e^{i(kr + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi kr}} e^{ika(\sin \alpha - \sin \varphi)} \quad (21.11)$$

Это выражение обращается в нуль, если в нем положить  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ ; следовательно, вторичная дифракция ликвидирует имевшийся в прежнем приближении скачок поля при  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ . Однако в направлении  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  поле (21.11) от-

лично от нуля. Поскольку  $H_z$  является нечетной функцией координаты  $x$ , то соотношение  $H_z \Big|_{\varphi = \frac{\pi}{2} - 0} \neq 0$  оз-

начает, что компоненты рассеянного поля  $H_z$  и  $E_\varphi$  будут претерпевать скачок при переходе через направление  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Причина такого скачка по-прежнему заключается в том, что в наших расчетах плоскость  $x=0$  является плоскостью токов. Действительно, находя вторичную волну от края 2, мы фактически считали, что дифракция происходит не на ребре ленты конечной ширины, а на краю идеально проводящей полуплоскости  $-a \leq y \leq \infty$ .

Вновь полученный скачок имеет величину порядка  $\frac{1}{\sqrt{ka\sqrt{kr}}}$ . Совершенно ясно, что полностью скачок поля может быть устранен лишь при учете многократной дифракции. Однако вычисление полей, возникающих при многократной дифракции, требует корректного учета следующих по порядку малости членов в разложении первичной краевой волны по обратным степеням  $1/\bar{k}r$  (см., например, [46]). Все это чрезвычайно усложняет расчеты, поэтому мы, пользуясь условием  $ka \gg 1$ , ограничимся рассмотрением вторичной дифракции, а для ликвидации скачков в плоскости  $x=0$  поступим следующим образом.

Будем считать величину  $\bar{g}(1)$  в выражении (21.11) функцией угла  $\varphi$  (см. формулы 20.05), т. е. заменим  $\bar{g}(1)$  функцией  $g(1)$ . В этом случае формула

$$H_z(1-2) = H_{0z} \frac{2}{\pi} g(1) \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{iq^2} dq \frac{e^{ikr}}{\sqrt{2kr}} e^{ika(\sin \alpha - \sin \varphi)} + H_{0z} g(1) \frac{e^{i(kr + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi kr}} e^{ika(\sin \alpha - \sin \varphi)} \quad (21.12)$$

будет давать качественно правильные результаты не только при  $\varphi \approx -\frac{\pi}{2}$ , но и при всех других значениях  $\varphi$ .

Действительно, интеграл Френеля близок к нулю, если  $\sqrt{ka} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \gg 1$ , и в формуле (21.12) остается лишь второй член, как это и должно быть. Поэтому формулу (21.12) можно рассматривать как интерполяционную и применять при любых значениях  $\varphi$  ( $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$ ). Легко видеть, что теперь рассеянное поле не претерпевает разрыва при переходе через плоскость  $x=0$ , поскольку выражение (21.12) обращается в нуль при  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ .

Интересно отметить, что формула (21.12) автоматически вытекает из формулы (21.08), если в последней заменить  $\tilde{g}(1)$  на  $g(1)$ . По существу эта замена эквивалентна предположению, что моменты нитей, полем которых мы аппроксимируем первичные краевые волны, зависят от направления излучения (т. е. от азимута  $\varphi$  точки наблюдения)

$$m_{1z}^- = -m_{1z}^+ = \frac{1}{4\pi k^2} H_{0z} g(1) e^{ika \sin \alpha}. \quad (21.13)$$

Такое определение моментов вспомогательных линейных источников используется, например, в работе Миллара [47].

Точно так же, как были получены формулы (21.06) и (21.07), мы находим (при  $x > 0$ )

$$H_z^+(2) = \frac{1}{\pi} H_{0z} \tilde{g}(2) \int_{-\infty}^{2\sqrt{ka} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} e^{iq^2} dq \frac{e^{ikr}}{\sqrt{2kr}} e^{-ika(\sin \alpha - \sin \varphi)}, \quad (21.14)$$

$$H_z^-(2) = \frac{1}{\pi} H_{0z} \tilde{g}(2) \int_{-\infty}^{2\sqrt{ka} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} e^{iq^2} dq \frac{e^{ikr}}{\sqrt{2kr}} e^{-ika(\sin \alpha - \sin \varphi)} + H_{0z} \tilde{g}(2) \frac{e^{i\left(kr + \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi kr}} e^{-ika(\sin \alpha - \sin \varphi)}. \quad (21.15)$$

Эти выражения дают поле, создаваемое нитями, которые расположены над идеально проводящей полуплоскостью  $-\infty < y \leq a$  и обладают моментами

$$m_{2z}^- = -m_{2z}^+ = \frac{1}{4\pi k^2} H_{0z} \tilde{g}(2) e^{-ika \sin \alpha}. \quad (21.16)$$

В соответствии с формулой (21.04) здесь

$$\tilde{g}_1(2) = g(2) \Big|_{\varphi = \frac{\pi}{2} - 0}. \quad (21.17)$$

Суммируя далее (21.14) и (21.15), получаем

$$H_z(2) = H_{0z} \frac{2}{\pi} \tilde{g}(2) \int_{-\infty}^{2\sqrt{ka} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} e^{iq^2} dq \frac{e^{ikr}}{\sqrt{2kr}} e^{-ika(\sin \alpha - \sin \varphi)} + H_{0z} \tilde{g}(2) \frac{e^{i\left(kr + \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi kr}} e^{-ika(\sin \alpha - \sin \varphi)}. \quad (21.18)$$

Первое слагаемое здесь представляет собой искомого вторичную волну от края 1, а второе — поле, излучаемое нитью, которая расположена над идеально проводящей плоскостью  $x=0$  и обладает моментом  $m_{2z}^-$ . Складывая найденную вторичную волну с невозмущенной первичной волной от края 2, имеем

$$H_z(2-1) = H_{0z} \frac{2}{\pi} \tilde{g}(2) \int_{-\infty}^{2\sqrt{ka} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} e^{iq^2} dq \frac{e^{ikr}}{\sqrt{2kr}} e^{-ika(\sin \alpha - \sin \varphi)} + H_{0z} g(2) \frac{e^{i\left(kr + \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi kr}} e^{-ika(\sin \alpha - \sin \varphi)}. \quad (21.19)$$

Нетрудно видеть, что полученное выражение обращается в нуль, если в нем положить  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Следовательно, вторичная дифракция устраняет имевшийся ранее (§ 6) скачок поля при  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , но вместе с тем она же при-

водит к скачку поля при  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ . Вновь полученный скачок поля можно ликвидировать указанным выше приемом, заменяя величину  $\tilde{g}(2)$  на  $g(2)$ , т. е. полагая моменты  $m_{zz}^-$  и  $m_{zz}^+$  зависящими от угла наблюдения  $\varphi$ . Действительно, в результате такой замены мы получаем из (21.19) выражение

$$H_z(2-1) = H_{oz} \frac{2}{\pi} g(2) \int_{\infty}^{\frac{2\sqrt{ka} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{2kr}}} e^{iq^2} dq \frac{e^{ikr}}{\sqrt{2kr}} e^{-ika(\sin\alpha - \sin\varphi)} + H_{oz} g(2) \frac{e^{i\left(kr + \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi kr}} e^{-ika(\sin\alpha - \sin\varphi)}, \quad (21.20)$$

которое уже обращается в нуль при  $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ . Это выражение можно рассматривать как интерполяционную формулу, которая описывает поле, создаваемое в области  $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$  первичной волной от края 2 с учетом ее дифракции на крае 1.

Складывая теперь (21.12) и (21.20), получаем следующее выражение для полного поля, рассеянного лентой:

$$H_z = H_{oz} [G(1, \varphi) g(1) e^{ika(\sin\alpha - \sin\varphi)} + G(2, \varphi) g(2) e^{-ika(\sin\alpha - \sin\varphi)}] \frac{e^{i\left(kr + \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi kr}}. \quad (21.21)$$

Здесь

$$G(1, \varphi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\sqrt{ka} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} e^{iq^2} dq \quad (21.22)$$

есть функция затенения первичной волны, идущей от края 1, а

$$G(2, \varphi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\sqrt{ka} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} e^{iq^2} dq \quad (21.23)$$

— функция затенения первичной волны, идущей от края 2. Эти функции показывают, что первичная волна от края 1 испытывает наибольшее возмущение при  $\varphi \approx -\frac{\pi}{2}$ , а волна от края 2 — при  $\varphi \approx \frac{\pi}{2}$ .

Важным свойством формулы (21.21) является то, что она обращается в нуль при  $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ , т. е. имевшийся ранее скачок поля в плоскости  $x=0$  полностью ликвидируется.

В заключение параграфа вернемся к выражениям (21.11) и (21.19), которые приводят к скачкам рассеянного поля в плоскости ленты ( $x=0$ ). Можно показать, что сумма этих выражений

$$H_z = H_{oz} \frac{2}{\pi} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{2kr}} \left[ \tilde{g}(1) \int_{\infty}^{\frac{2\sqrt{ka} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{2kr}}} e^{iq^2} dq e^{ika(\sin\alpha - \sin\varphi)} + \tilde{g}(2) \int_{\infty}^{\frac{2\sqrt{ka} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{2kr}}} e^{iq^2} dq e^{-ika(\sin\alpha - \sin\varphi)} \right] + H_{oz} [g(1) e^{ika(\sin\alpha - \sin\varphi)} + g(2) e^{-ika(\sin\alpha - \sin\varphi)}] \frac{e^{i\left(kr + \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi kr}} \quad (21.24)$$

согласуется при  $\sqrt{ka} \cos\left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{\varphi}{2}\right) \gg 1$  с асимптотическим решением, полученным в книге [50] с помощью интегральных уравнений. Решение, найденное в [50], имеет наибольшую точность при  $\alpha \approx 0$ ,  $\varphi \approx 0$  и совершенно непригодно, если  $\alpha \approx \pm\frac{\pi}{2}$  или  $\varphi \approx \pm\frac{\pi}{2}$ .

§ 22. ВТОРИЧНАЯ ДИФРАКЦИЯ НА ЛЕНТЕ  
(Е-ПОЛЯРИЗАЦИЯ)

Известно, что нить тока с электрическим моментом  $p_z$ , находящаяся на расстоянии  $h$  от бесконечной идеально проводящей плоскости (см. рис. 46), создает в пространстве поле

$$E_z = ik^2 p_z \pi [H_0^{(1)}(kR_1) - H_0^{(1)}(kR_2)]. \quad (22.01)$$

При малых значениях  $h$  (и  $R_{1,2} \gg kh^2$ ) это выражение преобразуется к виду

$$E_z = -i2p_z k^3 h \sin \psi \sqrt{\frac{2\pi}{kR_0}} e^{i(kR_0 + \frac{\pi}{4})}. \quad (22.02)$$

Первичная краевая волна определяется соотношением

$$E_z = E_{oz}(q) f(q) \frac{e^{i(kR_0 + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi kR_0}}, \quad (22.03)$$

где  $E_{oz}(q)$  есть значение поля падающей плоской волны в точке  $q$  ( $R_0=0$ ). Следовательно, первичную краевую волну в направлении  $\psi=0$  можно рассматривать как волну от нити тока, расположенной над идеально проводящей плоскостью, если считать момент нити равным

$$p_z = \frac{i}{4\pi k^3 h} E_{oz}(q) \frac{f(q)}{\sin \psi} \Big|_{\psi=0}. \quad (22.04)$$

Поле, создаваемое в точке  $P$  нитью тока с моментом  $p_z$ , параллельной краю полуплоскости и проходящей через точку  $Q$ , определяется выражением (20.11). Разлагая правую часть этого выражения в ряд по малой величине  $h$  ( $h \rightarrow 0$ ) и ограничиваясь первым отличным от нуля членом, получаем

$$E_z = ik^2 p_z \frac{\partial}{\partial h} [u(d, \varphi' - \varphi'') - u(d, \varphi' + \varphi'')] \Big|_{h=0} \sqrt{\frac{2\pi}{kR}} e^{i(kR - \frac{\pi}{4})}. \quad (22.05)$$

С помощью соотношений (22.04) и (22.05) можно показать, что нити тока с моментами  $p_{1z}^-$  и  $p_{1z}^+$ , расположен-

ные на идеально проводящей полуплоскости— $a \leq y < \infty$  и соответствующие краю 1 (см. рис. 47), создают в области  $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$  поле

$$E_z = E_{oz} \frac{2}{\pi} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{2kr}} \left[ \cos \varphi \int_{\infty}^{2\sqrt{ka} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} e^{iq^2} dq + \right. \\ \left. + \frac{i}{2\sqrt{ka}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) e^{2ika(1+\sin\varphi)} \right] \tilde{f}(1) e^{ika(\sin\alpha - \sin\varphi)} + \\ + E_{oz} \tilde{f}(1) \cos \varphi \frac{e^{i\left(kr + \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi kr}} e^{ika(\sin\alpha - \sin\varphi)}. \quad (22.06)$$

Нити тока с моментами  $p_{2z}^-$  и  $p_{2z}^+$ , расположенные над идеально проводящей полуплоскостью— $-\infty \leq y < a$  и соответствующие краю 2, создают в той же области поле

$$E_z = E_{oz} \frac{2}{\pi} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{2kr}} \left[ \cos \varphi \int_{\infty}^{2\sqrt{ka} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} e^{iq^2} dq + \right. \\ \left. + \frac{i}{2\sqrt{ka}} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) e^{2ika(1-\sin\varphi)} \right] \tilde{f}(2) e^{-ika(\sin\alpha - \sin\varphi)} + \\ + E_{oz} \tilde{f}(2) \cos \varphi \frac{e^{i\left(kr + \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi kr}} e^{-ika(\sin\alpha - \sin\varphi)}. \quad (22.07)$$

Первые слагаемые в выражениях (22.06) и (22.07) представляют собой искомые вторичные волны, а последние слагаемые — поля от нитей тока, расположенных над

идеально проводящей плоскостью  $x=0$  и обладающих моментами

$$p_{1z}^- = \frac{i}{4\pi k^3 h} E_{0z} \tilde{f}(1) e^{ika \sin \alpha}, \quad p_{2z}^- = \frac{i}{4\pi k^3 h} E_{0z} \tilde{f}(2) e^{-ika \sin \alpha}, \quad (22.08)$$

где

$$\tilde{f}(1) = \frac{f(1)}{\cos \varphi} \Big|_{\varphi = -\frac{\pi}{2} + 0}; \quad \tilde{f}(2) = \frac{f(2)}{\cos \varphi} \Big|_{\varphi = \frac{\pi}{2} - 0}. \quad (22.09)$$

Суммируя найденные вторичные волны с невозмущенными первичными волнами, мы получаем полное поле, рассеянное лентой,

$$\begin{aligned} E_z = -H_\varphi = E_{0z} \frac{2}{\pi} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{2kr}} & \left\{ \tilde{f}(1) \left[ \cos \varphi \times \int_0^{2\sqrt{ka} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} e^{iq^2} dq + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{i}{2\sqrt{ka}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) e^{2ika(1 + \sin \varphi)} \right] e^{ika(\sin \alpha - \sin \varphi)} + \right. \\ & \left. + \tilde{f}(2) \left[ \cos \varphi \times \int_0^{2\sqrt{ka} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} e^{iq^2} dq + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{i}{2\sqrt{ka}} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) e^{2ika(1 - \sin \varphi)} \right] e^{-ika(\sin \alpha - \sin \varphi)} \right\} + \\ & + E_{0z} [f(1) e^{ika(\sin \alpha - \sin \varphi)} + f(2) e^{-ika(\sin \alpha - \sin \varphi)}] \times \\ & \times \frac{e^{i\left(kr + \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi kr}}. \quad (22.10) \end{aligned}$$

Полагая теперь, как и в случае  $H$ -поляризации, моменты  $p_{1z}^\pm$  и  $p_{2z}^\pm$  зависящими от угла  $\varphi$ , т. е. заменяя

$$\tilde{f}(1) \text{ на } \frac{f(1)}{\cos \varphi} \text{ и } \tilde{f}(2) \text{ на } \frac{f(2)}{\cos \varphi}, \quad (22.11)$$

получаем

$$\begin{aligned} E_z = -H_\varphi = E_{0z} [F(1, \varphi) f(1) e^{ika(\sin \alpha - \sin \varphi)} + \\ + F(2, \varphi) f(2) e^{-ika(\sin \alpha - \sin \varphi)}] \frac{e^{i\left(kr + \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi kr}}, \quad (22.12) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} F(1, \varphi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}} & \left[ \int_0^{2\sqrt{ka} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} e^{iq^2} dq + \right. \\ & \left. + \frac{i}{4\sqrt{ka}} \frac{e^{2ika(1 + \sin \varphi)}}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \right], \\ F(2, \varphi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}} & \left[ \int_0^{2\sqrt{ka} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} e^{iq^2} dq + \right. \\ & \left. + \frac{i}{4\sqrt{ka}} \frac{e^{2ika(1 - \sin \varphi)}}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \right]. \quad (22.13) \end{aligned}$$

суть функции затенения. Они показывают, что первичная волна от края 1 испытывает наибольшее возмущение вблизи  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ , а волна от края 2 — вблизи  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ .

### § 23. ХАРАКТЕРИСТИКИ РАССЕЯНИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ЛЕНТЕ

Полученные выше выражения (21.21) и (22.12) для поля, рассеянного лентой, приближенно учитывают взаимодействие краев и справедливы при  $|\varphi| \ll \frac{\pi}{2}$ . Однако они неприменимы при скользющем падении плоской волны на ленту (при  $\alpha \approx \pm \frac{\pi}{2}$ ).

Чтобы найти формулы, пригодные в этом случае, поступим следующим образом. Напишем выражения для поля, излучаемого лентой в направлении  $\alpha$  при падении плоской волны в направлении  $\varphi$  (рис. 45)

$$\left. \begin{aligned}
 E_z = -H_\varphi = E_{oz} [ F(2, \alpha) f(1) e^{ika(\sin\alpha - \sin\varphi)} + \\
 + F(1, \alpha) f(2) e^{-ika(\sin\alpha - \sin\varphi)} ] \frac{e^{i\left(kr + \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi kr}}, \\
 H_z = E_\varphi = H_{oz} [ G(2, \alpha) g(1) e^{ika(\sin\alpha - \sin\varphi)} + \\
 + G(1, \alpha) g(2) e^{-ika(\sin\alpha - \sin\varphi)} ] \frac{e^{i\left(kr + \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi kr}}.
 \end{aligned} \right\} (23.01)$$

Здесь уже  $|\alpha| \leq \frac{\pi}{2}$ , но  $\varphi$  не может приближаться к  $\pm \frac{\pi}{2}$ .

Заметим теперь, что выражения для рассеянного поля должны удовлетворять принципу взаимности, т. е. не должны меняться при одновременной замене  $\alpha$  на  $\varphi$  и  $\varphi$  на  $\alpha$ . Сравнивая формулы (21.21), (22.12) и (23.01), трудно получить выражения

$$\left. \begin{aligned}
 E_z = -H_\varphi = E_{oz} [ F(1, \varphi) F(2, \alpha) f(1) e^{ika(\sin\alpha - \sin\varphi)} + \\
 + F(2, \varphi) F(1, \alpha) f(2) e^{-ika(\sin\alpha - \sin\varphi)} ] \frac{e^{i\left(kr + \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi kr}}, \\
 H_z = E_\varphi = H_{oz} [ G(1, \varphi) G(2, \alpha) g(1) e^{ika(\sin\alpha - \sin\varphi)} + \\
 + G(2, \varphi) G(1, \alpha) g(2) e^{-ika(\sin\alpha - \sin\varphi)} ] \frac{e^{i\left(kr + \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi kr}},
 \end{aligned} \right\} (23.02)$$

которые удовлетворяют принципу взаимности, нигде не имеют разрывов и пригодны для расчетов при любых значениях  $\alpha$  и  $\varphi$  ( $|\alpha| \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$ ). Из второй формулы (23.02) вытекает, что  $H_z = E_\varphi = 0$  при  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ , т. е. рассеянное поле не претерпевает скачков в плоскости  $x=0$ . Кроме того,  $H_z = E_\varphi = 0$  при любых значениях  $\varphi$ , если  $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ , т. е. плоская волна, поляризованная перпендикулярно ленте, не испытывает дифракции при сколь угодно падении.

Полученные формулы (23.02) можно рассматривать как интерполяционные. Действительно, при  $|\alpha| \ll \frac{\pi}{2}$ , когда  $\sqrt{ka} \cos\left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{\alpha}{2}\right) \gg 1$ , функции  $F(1, \alpha)$ ,  $F(2, \alpha)$ ,  $G(1, \alpha)$  и  $G(2, \alpha)$  близки к единице и формулы (23.02) переходят в прежние выражения (21.21) и (22.12). Если же  $|\varphi| \ll \frac{\pi}{2}$  и  $\sqrt{ka} \cos\left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{\varphi}{2}\right) \gg 1$ , то функции  $F(1, \varphi)$ ,  $F(2, \varphi)$ ,  $G(1, \varphi)$  и  $G(2, \varphi)$  близки к единице, и формулы (23.02) переходят в формулы (23.01). Напомним, что функции  $F$  и  $G$  определяются соотношениями (21.22), (21.23) и (22.13). В направлении главного максимума диаграммы рассеяния ( $\varphi = \alpha$ ) формулы (23.02) принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned}
 H_z = H_{oz} \left[ \left( 2ika \cos\alpha + \frac{1}{\cos\alpha} \right) G(1, \alpha) G(2, \alpha) + \right. \\
 \left. + G(1, \alpha) \frac{\partial G(2, \alpha)}{\partial \alpha} - G(2, \alpha) \frac{\partial G(1, \alpha)}{\partial \alpha} \right] \frac{e^{i\left(kr + \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi kr}}, \\
 E_z = E_{oz} \left[ \left( 2ika \cos\alpha - \frac{1}{\cos\alpha} \right) F(1, \alpha) F(2, \alpha) + \right. \\
 \left. + F(1, \alpha) \frac{\partial F(2, \alpha)}{\partial \alpha} - F(2, \alpha) \frac{\partial F(1, \alpha)}{\partial \alpha} \right] \frac{e^{i\left(kr + \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi kr}}.
 \end{aligned} \right\} (23.03)$$

Отсюда при  $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$  имеем

$$H_z = 0,$$

$$\begin{aligned}
 E_z = E_{oz} \left( \frac{2}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{3\pi}{4}} \left[ 2\sqrt{ka} \left( \int_0^{2\sqrt{ka}} e^{iq^2} dq + \frac{i}{4\sqrt{ka}} e^{ika} \right) + \right. \\
 \left. + \frac{i}{8\sqrt{ka}} \int_0^{2\sqrt{ka}} e^{iq^2} dq \right] \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}.
 \end{aligned} \quad (23.04)$$

Интересно отметить, что выражения (23.02) помимо вторичной дифракции учитывают в какой-то мере и третичную. Действительно, для значений  $|\alpha| \ll \frac{\pi}{2}$  и  $|\varphi| \ll \frac{\pi}{2}$  имеем

$$G(1, \varphi) G(2, \alpha) e^{ika(\sin \alpha - \sin \varphi)} \approx e^{ika(\sin \alpha - \sin \varphi)} - \frac{e^{ika(2 + \sin \alpha + \sin \varphi)}}{2\sqrt{\pi ka} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} e^{i\frac{\pi}{4}} - \frac{e^{ika(2 - \sin \alpha - \sin \varphi)}}{2\sqrt{\pi ka} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)} e^{i\frac{\pi}{4}} + \frac{i}{4\pi ka} \frac{e^{ika(4 - \sin \alpha + \sin \varphi)}}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}. \quad (23.05)$$

Физический смысл четырех членов в правой части этой формулы пояснен на рис. 48 (рис. 48,а соответствует первому члену, рис. 48,б — второму и т. д.).

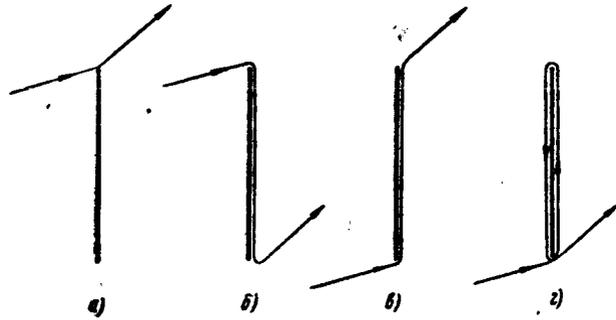


Рис. 48. Схематическое изображение волн, соответствующих разным членам в формуле (23.05).

Принимая во внимание условие (6.15), можно написать формулы для рассеянного поля в левом полупространстве  $\left(\frac{\pi}{2} \leq |\varphi| \leq \pi, \text{ но } |\alpha| \leq \frac{\pi}{2}\right)$  в том же виде (23.02).

При этом функции  $G(1, \alpha)$ ,  $G(2, \alpha)$  и  $F(1, \alpha)$ ,  $F(2, \alpha)$  будут по-прежнему описываться соотношениями (21.22), (21.23) и (22.13). Остальные же функции, входящие в

выражения (23.02), будут определяться при  $\frac{\pi}{2} \leq |\varphi| \leq \pi$  следующими формулами:

$$G(1, \varphi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_0^{\pm 2\sqrt{ka} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} e^{iq^2} dq, \quad (23.06)$$

$$G(2, \varphi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_0^{\mp 2\sqrt{ka} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} e^{iq^2} dq,$$

$$F(1, \varphi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \left[ \int_0^{\pm 2\sqrt{ka} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} e^{iq^2} dq \pm \frac{i}{4\sqrt{ka}} \frac{e^{2ika(1 + \sin \varphi)}}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \right], \quad (23.07)$$

$$F(2, \varphi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \left[ \int_0^{\mp 2\sqrt{ka} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} e^{iq^2} dq \mp \frac{i}{4\sqrt{ka}} \frac{e^{2ika(1 - \sin \varphi)}}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \right],$$

$$g(1) = \pm \frac{\cos \frac{\alpha + \varphi}{2} + \sin \frac{\alpha - \varphi}{2}}{\sin \alpha - \sin \varphi}, \quad g(2) = \pm \frac{\cos \frac{\alpha + \varphi}{2} - \sin \frac{\alpha - \varphi}{2}}{\sin \alpha - \sin \varphi}, \quad (23.08)$$

$$f(1) = g(2), \quad f(2) = g(1). \quad (23.09)$$

Верхний знак в выражениях (23.06 — 23.09) нужно брать при  $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$ , а нижний — при  $-\pi \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{2}$ .

Подставив в формулах (23.02) и (23.06—23.09)  $\varphi = -\pi + \alpha$  (при  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ ), найдем поле, излучаемое лентой в направлении на источник,

$$\begin{aligned}
 N_z = & N_{oz} [G^2(2, \alpha) g(1) e^{i2ka \sin \alpha} + \\
 & + G^2(1, \alpha) g(2) e^{-i2ka \sin \alpha}] e^{i\left(kr + \frac{\pi}{4}\right)} \sqrt{2\pi kr}, \\
 E_z = & E_{oz} [F^2(2, \alpha) f(1) e^{i2ka \sin \alpha} + \\
 & + F^2(1, \alpha) f(2) e^{-i2ka \sin \alpha}] e^{i\left(kr + \frac{\pi}{4}\right)} \sqrt{2\pi kr},
 \end{aligned} \quad (23.10)$$

где

$$g(1) = f(2) = -\frac{1 + \sin \alpha}{2 \sin \alpha}, \quad g(2) = f(1) = \frac{1 - \sin \alpha}{2 \sin \alpha}. \quad (23.11)$$

При  $\alpha = 0$  имеем

$$\begin{aligned}
 N_z = & -N_{oz} \left[ (2ika + 1) G(1, 0) - 2\sqrt{\frac{2ka}{\pi}} e^{i\left(2ka - \frac{\pi}{4}\right)} \right] \times \\
 & \times G(1, 0) e^{i\left(kr + \frac{\pi}{4}\right)} \sqrt{2\pi kr}, \\
 E_z = & E_{oz} \left[ (2ika - 1) F(1, 0) + \frac{1}{\sqrt{2\pi ka}} e^{i\left(2ka + \frac{\pi}{4}\right)} \right] \times \\
 & \times F(1, 0) e^{i\left(kr + \frac{\pi}{4}\right)} \sqrt{2\pi kr}.
 \end{aligned} \quad (23.12)$$

По введенным выше формулам были проведены расчеты характеристик рассеяния — функций  $h(\alpha, \varphi)$  и  $e(\alpha, \varphi)$ , определяющих рассеянное поле с помощью соотношений

$$\begin{aligned}
 E_z = & E_{oz} k a e(\alpha, \varphi) \sqrt{\frac{-2}{\pi k r}} e^{i\left(kr + \frac{3\pi}{4}\right)}, \\
 N_z = & N_{oz} k a h(\alpha, \varphi) \sqrt{\frac{-2}{\pi k r}} e^{i\left(kr + \frac{3\pi}{4}\right)}.
 \end{aligned} \quad (23.13)$$

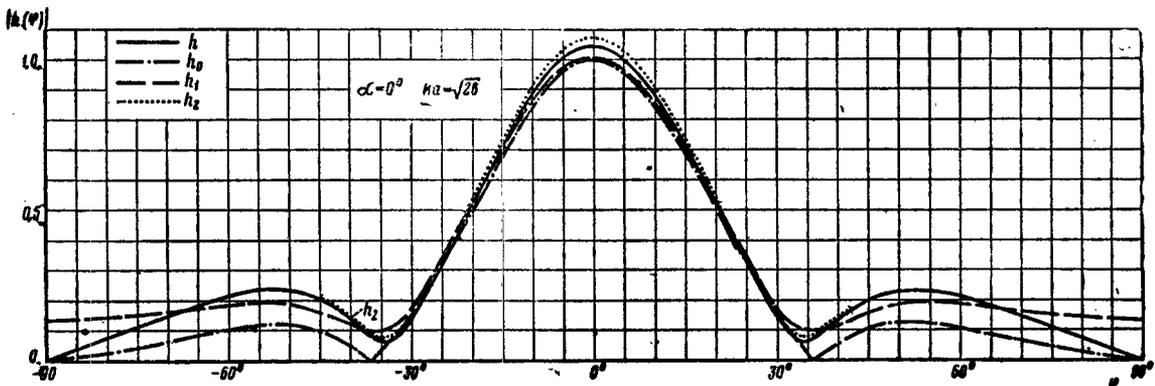


Рис. 49. Диаграмма рассеянного лентой поля в зависимости от угла падения плоской волны ( $\alpha$ ) и параметра  $ka$ . Различные кривые соответствуют разным приближениям.

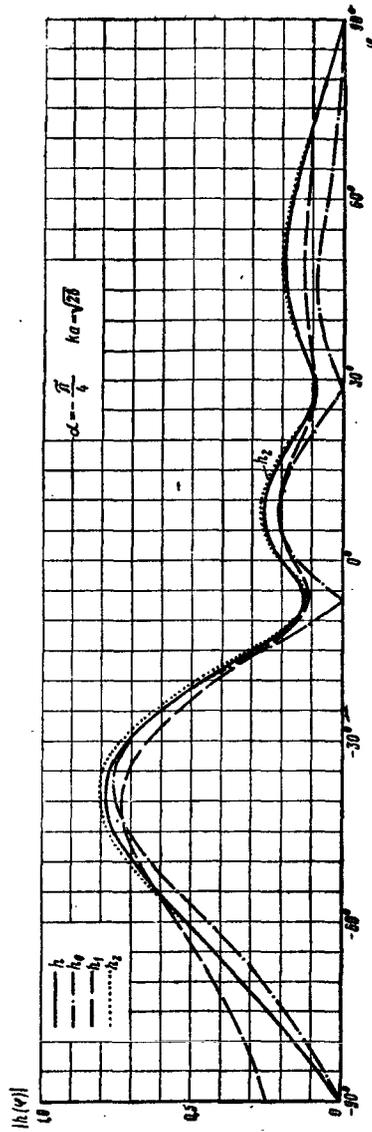


Рис. 50. То же, что и на рис. 49, при  $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ .

Расчеты проводились для значений  $ka = \sqrt{28}$  и  $ka = \sqrt{80}$ . На рис. 49—62 приняты следующие обозначения: 1) функции  $h$  и  $e$  соответствуют строгой теории, 2) функции  $h_0$  и  $e_0$  — полю от равномерной части

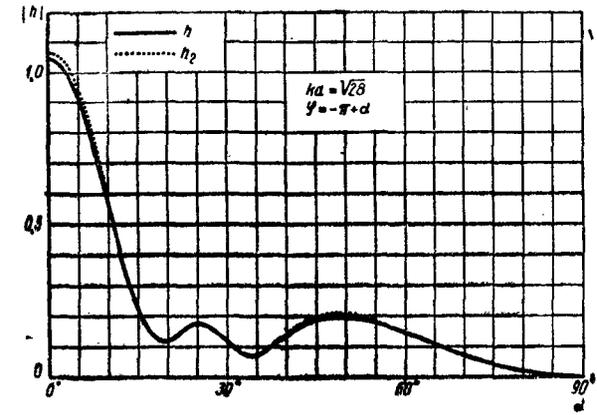


Рис. 51. То же, что и на рис. 49, при  $\varphi = -\pi + \alpha$ .

тока (приближению физической оптики); 3) функции  $h_1$  и  $e_1$  — полю от равномерной и неравномерной части тока, но без учета взаимодействия краев; 4) функции  $h_2$  и  $e_2$  — рассеянному полю с учетом вторичной дифракции, вычисленному по формулам (23.13), (23.02) и (23.10). При этом согласно § 6

$$\left. \begin{aligned} e_0 &= \cos \alpha \frac{\sin [ka (\sin \alpha - \sin \varphi)]}{ka (\sin \alpha - \sin \varphi)}, \\ h_0 &= \cos \varphi \frac{\sin [ka (\sin \alpha - \sin \varphi)]}{ka (\sin \alpha - \sin \varphi)} \end{aligned} \right\} \quad (23.14)$$

и

$$\left. \begin{aligned} e_1 \\ h_1 \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2ka} \left\{ \frac{\sin [ka (\sin \alpha - \sin \varphi)]}{\sin \frac{\alpha - \varphi}{2}} + i \frac{\cos [ka (\sin \alpha - \sin \varphi)]}{\cos \frac{\alpha + \varphi}{2}} \right\}, \quad (23.15)$$

где  $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$ ,  $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$ .

Полученные результаты показывают, что наши приближенные формулы удовлетворительно согласуются

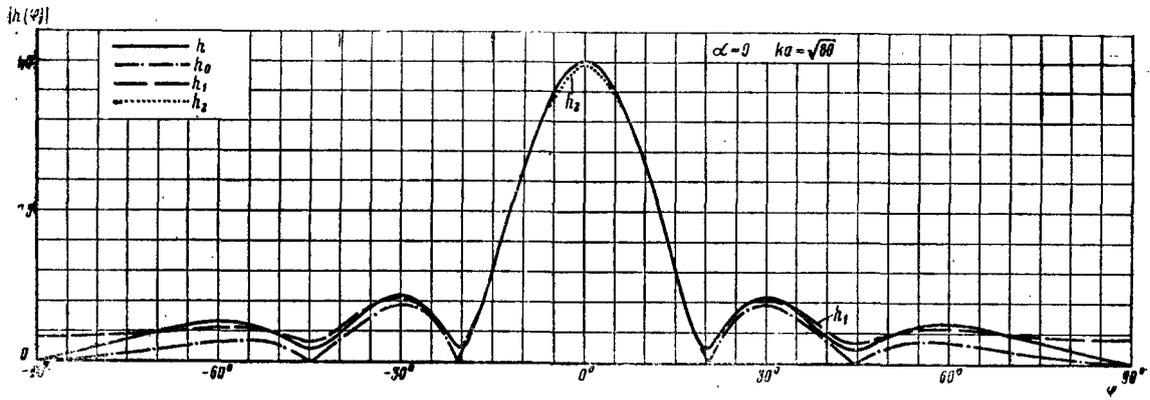


Рис. 52. Функция  $h(\alpha, \varphi)$  для ленты ( $\alpha = 0$ ,  $ka = \sqrt{80}$ )

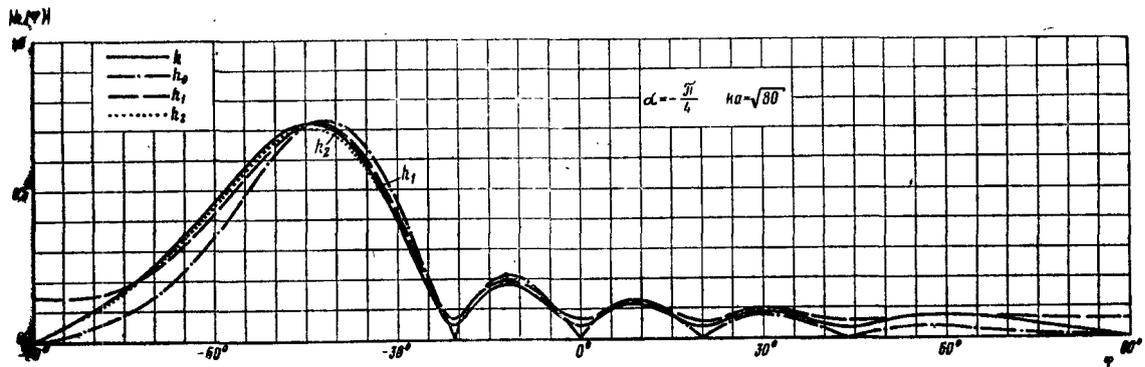


Рис. 53. То же, что и на рис. 52, при  $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ .

со строгой теорией уже при  $ka = \sqrt{28}$ , хотя в данном случае на ширине ленты укладывается примерно полторы длины волны. В направлении на источник ( $\varphi = -\pi + \alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ ), а также при скользящем облучении ленты ( $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ ), когда функции  $e_0$ ,  $h_0$  и  $e_1$ ,  $h_1$  приводят к качественно неверным результатам, функции  $e_2$  и  $h_2$  дают, как и в остальных случаях, вполне удовлетворительный результат. Действи-

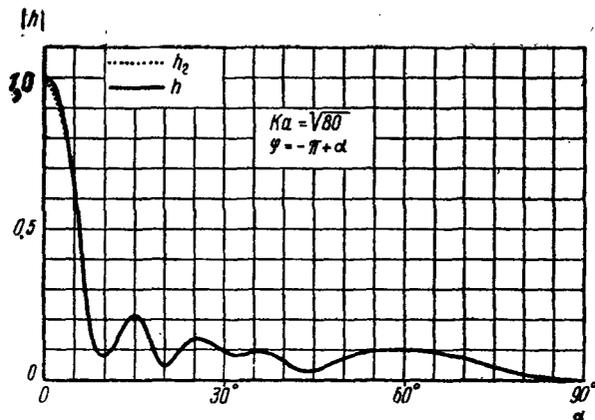


Рис. 54. То же, что и на рис. 52, при  $\varphi = -\pi + \alpha$ .

тельно, кривая  $|h_2|$  почти всюду совпадает с кривой  $|h|$  (рис. 49—54) в пределах графической точности. Рассчитанные же значения функции  $|e_2|$  отличаются от соответствующих значений функции  $|e|$  лишь на сотые доли процента (рис. 55—62). Лучшее совпадение со строгой теорией при  $E$ -поляризации объясняется более слабым взаимодействием краев в этом случае, а некоторое расхождение кривых  $|h_2|$  и  $|h|$  вблизи главного максимума рассеяния—интерполяционным характером наших формул.

Вследствие интерполяционного характера формул (23.02) интегральный поперечник рассеяния, получаемый из выражений (23.03) при  $\alpha=0$ , не совпадает с интегральным поперечником, найденным Клеммовым [46] в виде первых членов асимптотического разложения по обратным степеням  $\sqrt{ka}$ . Однако наши формулы в отличие от аналогичных формул, полученных другими ав-

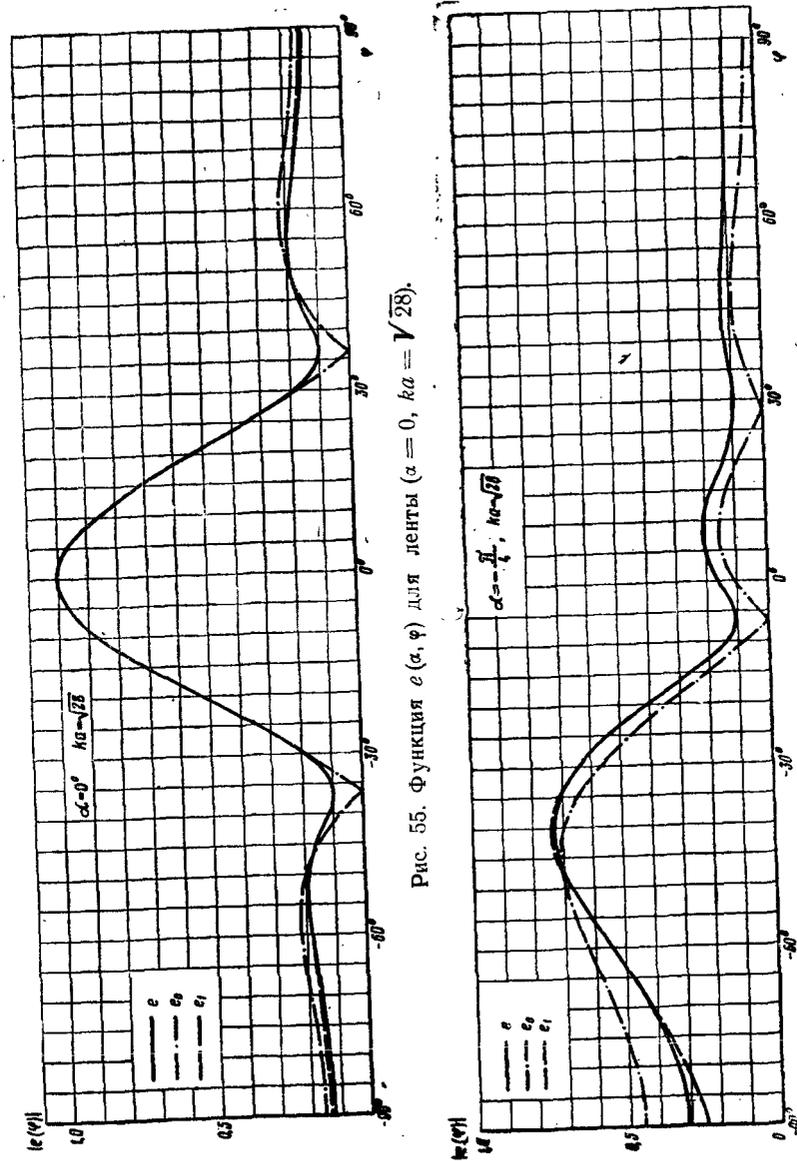


Рис. 55. Функция  $e(\alpha, \varphi)$  для ленты ( $\alpha = 0$ ,  $ka = \sqrt{28}$ ).

Рис. 56. То же, что и на рис. 55, при  $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ .

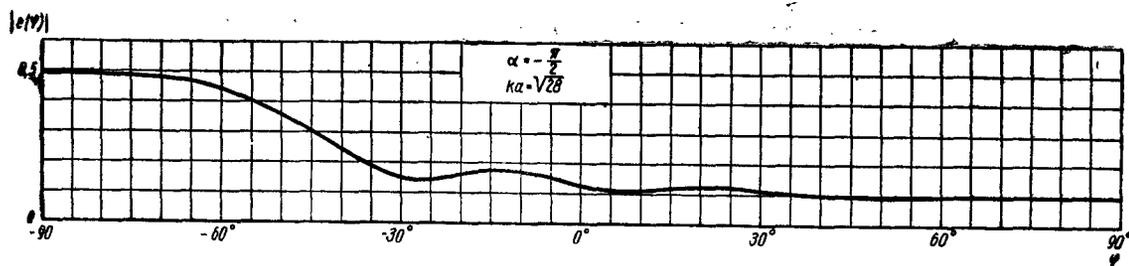


Рис. 57. То же, что и на рис. 55, при  $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ .

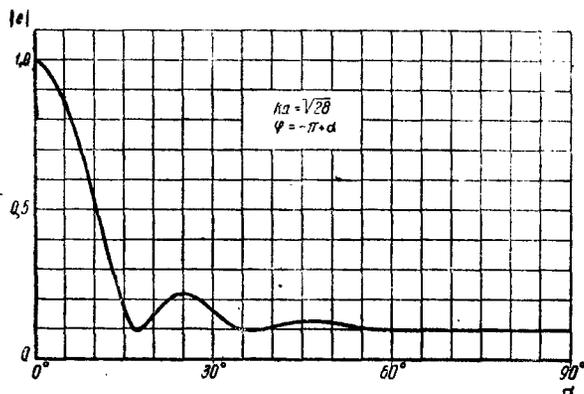


Рис. 58. То же, что и на рис. 55, при  $\varphi = -\pi + \alpha$ .

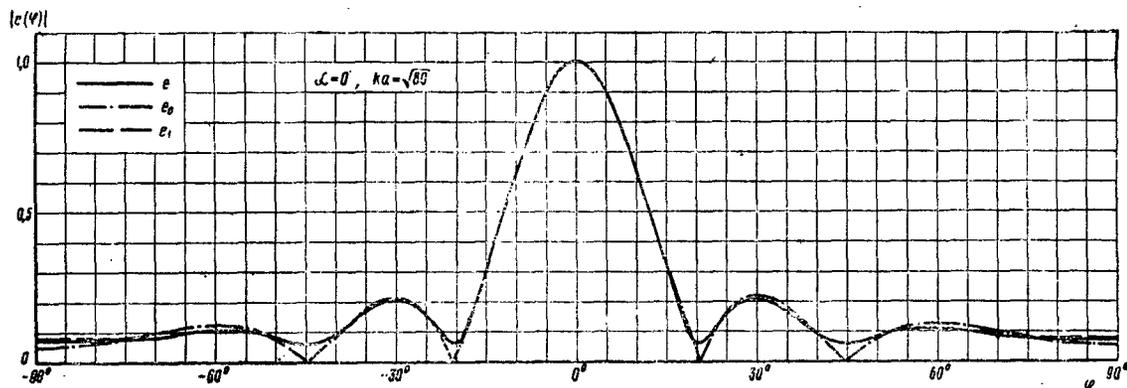


Рис. 59. Функция  $e(\alpha, \varphi)$  для ленты ( $\alpha = 0, ka = \sqrt{80}$ ). Электрический вектор параллелен ребрам ленты.

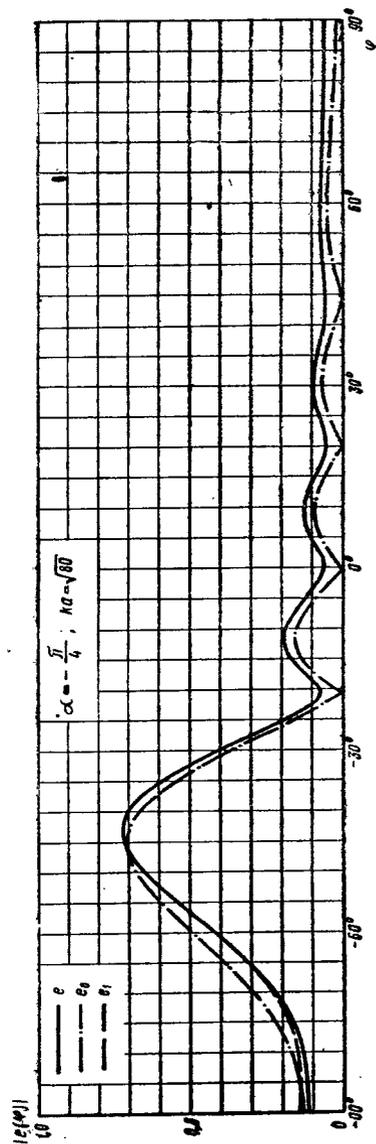


Рис. 60. То же, что и на рис. 59, при  $\alpha = \frac{\pi}{4}$

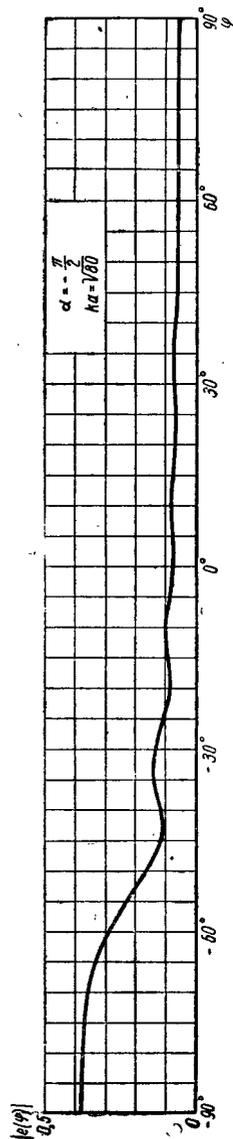


Рис. 61. То же, что и на рис. 59, при  $\alpha = \frac{\pi}{2}$

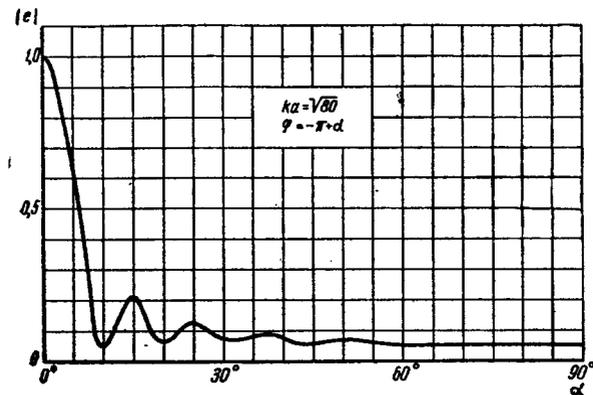


Рис. 62. То же, что и на рис. 59, при  $\varphi = -\pi + \alpha$ .

торами, позволяют рассчитывать характеристики рассеяния при любых углах падения плоской волны.

Заметим, что функции  $e(\alpha, \varphi)$  и  $h(\alpha, \varphi)$  для рис. 49—62 вычислялись по строгим рядам, полученным методом разделения переменных в эллиптической системе координат (ср. [23])<sup>\*</sup>.

#### § 24. ВТОРИЧНАЯ ДИФРАКЦИЯ НА ДИСКЕ

Уточним приближенное решение дифракционной задачи для диска, найденное в гл. II.

Пусть в свободном пространстве находится бесконечно тонкий идеально проводящий диск радиуса  $a$ . Ориентируем сферическую систему координат так, чтобы нормаль  $\mathbf{n}$  к фронту падающей волны лежала в плоскости  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  и составляла угол  $\gamma$  ( $0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}$ ) с осью  $z$  (рис. 63). Поле падающей плоской волны зададим в виде

$$\mathbf{E} = E_0 e^{ik(y \sin \gamma + z \cos \gamma)}, \quad \mathbf{H} = H_0 e^{ik(y \sin \gamma + z \cos \gamma)}. \quad (24.01)$$

<sup>\*</sup> Эти вычисления были выполнены под руководством П. С. Миказана.

Согласно § 12 рассеянное поле в плоскости  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$  описывается (при  $R \gg ka^2$ ) формулами

$$\left. \begin{aligned} E_{\varphi} = -H_{\delta} &= \frac{iaE_{0\varphi}}{2} \left\{ [f(2, \delta) - f(1, \delta)] J_1(\zeta) + \right. \\ &\quad \left. + i [f(2, \delta) + f(1, \delta)] J_2(\zeta) \right\} \frac{e^{ikR}}{R}, \\ H_{\varphi} = E_{\delta} &= \frac{iaH_{0\varphi}}{2} \left\{ [g(2, \delta) - g(1, \delta)] J_1(\zeta) + \right. \\ &\quad \left. + i [g(2, \delta) + g(1, \delta)] J_2(\zeta) \right\} \frac{e^{ikR}}{R}. \end{aligned} \right\} (24.02)$$

Эти выражения справедливы при  $\vartheta \leq \frac{\pi}{2}$  и  $\gamma < \frac{\pi}{2}$ . Входящие в них величины определяются соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} f(1, \delta) &= \frac{\cos \frac{\delta + \vartheta}{2} - \sin \frac{\delta - \vartheta}{2}}{\sin \delta - \sin \vartheta}, \\ f(2, \delta) &= -\frac{\cos \frac{\delta + \vartheta}{2} + \sin \frac{\delta - \vartheta}{2}}{\sin \delta - \sin \vartheta}, \\ g(1, \delta) &= -f(2, \delta), \quad g(2, \delta) = -f(1, \delta), \end{aligned} \right\} (24.03)$$

$$\zeta = ka(\sin \vartheta - \sin \delta), \quad (24.04)$$

$$\sigma = \begin{cases} \gamma & \text{при } \varphi = \frac{\pi}{2} \\ -\gamma & \text{при } \varphi = -\frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (24.05)$$

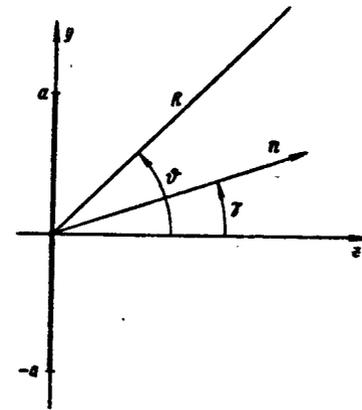


Рис. 63. Сечение диска плоскостью  $yoz$ ,  $n$  — нормаль к фронту падающей волны.

Заметим, что здесь

$$\left. \begin{aligned} f(1, \delta) &= \begin{cases} f(1) & \text{при } \varphi = \frac{\pi}{2} \\ f(2) & \text{при } \varphi = -\frac{\pi}{2} \end{cases}, \\ f(2, \delta) &= \begin{cases} f(2) & \text{при } \varphi = \frac{\pi}{2} \\ f(1) & \text{при } \varphi = -\frac{\pi}{2} \end{cases}, \\ g(1, \delta) &= \begin{cases} g(1) & \text{при } \varphi = \frac{\pi}{2} \\ g(2) & \text{при } \varphi = -\frac{\pi}{2} \end{cases}, \\ g(2, \delta) &= \begin{cases} g(2) & \text{при } \varphi = \frac{\pi}{2} \\ g(1) & \text{при } \varphi = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \end{aligned} \right\} (24.06)$$

а функции  $f(1)$ ,  $f(2)$ ,  $g(1)$  и  $g(2)$  определяются формулами (12.03) и (12.04).

При  $\zeta \gg 1$  выражения (24.02) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} E_{\varphi} = -H_{\vartheta} &= \frac{iaE_{0\varphi}}{\sqrt{2\pi\zeta}} \left[ f(2, \delta) e^{i\left(\zeta - \frac{3\pi}{4}\right)} - \right. \\ &\quad \left. - f(1, \delta) e^{-i\left(\zeta - \frac{3\pi}{4}\right)} \right] \frac{e^{ikR}}{R}, \\ H_{\varphi} = E_{\vartheta} &= \frac{iaH_{0\varphi}}{\sqrt{2\pi\zeta}} \left[ g(2, \delta) e^{i\left(\zeta - \frac{3\pi}{4}\right)} - \right. \\ &\quad \left. - g(1, \delta) e^{-i\left(\zeta - \frac{3\pi}{4}\right)} \right] \frac{e^{ikR}}{R}. \end{aligned} \right\} (24.07)$$

Они показывают, что рассеянное поле в этой области можно рассматривать как сумму сферических волн от двух светящихся точек на ободу диска с полярным углом  $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$ . Дифракцию на диске каждой из этих

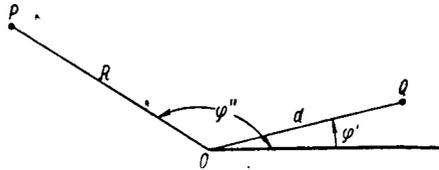


Рис. 64. Возбуждение полуплоскости элементарным диполем, находящимся в точке  $Q$ .

волн можно изучить так же, как и в случае ленты, но мы поступим иначе.

Сравним затенение сферической и цилиндрической волн полуплоскостью. Пусть в свободном пространстве находится идеально проводящая полуплоскость и в точке  $Q$  — элементарный диполь (рис. 64). Найдем поле в плоскости, перпендикулярной к ребру полуплоскости и проходящей через точку  $Q$ .

В соответствии с принципом взаимности оно определяется для электрического диполя соотношением

$$E_z = \frac{p_z}{p_{0z}} E_z(Q), \quad (24.08)$$

а для магнитного диполя

$$H_z = \frac{m_z}{m_{0z}} H_z(Q). \quad (24.09)$$

Здесь  $p_z(m_z)$  — момент электрического (магнитного) диполя, находящегося в точке  $Q$ ;  $p_{0z}$ ,  $m_{0z}$  — моменты вспомогательных диполей, помещаемых в точку  $P$ ;  $E_z(Q)$  и  $H_z(Q)$  — поля, создаваемые вспомогательными диполями в точке  $Q$ .

Удалим теперь вспомогательные диполи настолько, чтобы приходящую от них сферическую волну можно было считать плоской на участке от края полуплоскости до точки  $Q$ . В этом случае согласно формуле (20.08) поле, создаваемое волной в точке  $Q$ , будет равно

$$\left. \begin{aligned} E_z(Q) &= E_{0z}(0) [u(d, \varphi' - \varphi'') - u(d, \varphi' + \varphi'')], \\ H_z(Q) &= H_{0z}(0) [u(d, \varphi' - \varphi'') + u(d, \varphi' + \varphi'')]. \end{aligned} \right\} (24.10)$$

Выражения

$$E_{0z}(0) = k^2 p_{0z} \frac{e^{ikR}}{R}, \quad H_{0z}(0) = k^2 m_{0z} \frac{e^{ikR}}{R} \quad (24.11)$$

определяют поля, создаваемые вспомогательными диполями в свободном пространстве (при отсутствии полуплоскости) в точке  $Q$ .

Следовательно, поля, возбуждаемые в точке  $P$  электрическим и магнитным диполями, находящимися в точке  $Q$  над полуплоскостью, соответственно равны

$$\left. \begin{aligned} E_z &= k^2 p_z [u(d, \varphi' - \varphi'') - u(d, \varphi' + \varphi'')] \frac{e^{ikR}}{R}, \\ H_z &= k^2 m_z [u(d, \varphi' - \varphi'') + u(d, \varphi' + \varphi'')] \frac{e^{ikR}}{R}. \end{aligned} \right\} (24.12)$$

При отсутствии полуплоскости эти диполи создают в точке  $P$  поле

$$\left. \begin{aligned} E_z &= k^2 p_z \frac{e^{ikR}}{R} e^{-ikd \cos(\varphi' - \varphi'')}, \\ H_z &= k^2 m_z \frac{e^{ikR}}{R} e^{-ikd \cos(\varphi' - \varphi'')}. \end{aligned} \right\} (24.13)$$

Сравнивая выражения (24.12) и (24.13), находим функции затенения

$$\left. \begin{aligned} \bar{F} &= [u(d, \varphi' - \varphi'') - u(d, \varphi' + \varphi'')] e^{ikd \cos(\varphi' - \varphi'')}, \\ \bar{G} &= [u(d, \varphi' - \varphi'') + u(d, \varphi' + \varphi'')] e^{ikd \cos(\varphi' - \varphi'')}. \end{aligned} \right\} (24.14)$$

В случае, когда через точку  $Q$  проходит параллельно краю полуплоскости нить тока, поле в точке  $P$  определяется согласно (20.11) и (20.12) формулами

$$\left. \begin{aligned} E_z &= ik^2 p_z [u(d, \varphi' - \varphi'') - u(d, \varphi' + \varphi'')] \sqrt{\frac{2\pi}{kR}} e^{i(kR - \frac{\pi}{4})}, \\ H_z &= ik^2 m_z [u(d, \varphi' - \varphi'') + u(d, \varphi' + \varphi'')] \sqrt{\frac{2\pi}{kR}} e^{i(kR - \frac{\pi}{4})}. \end{aligned} \right\} (24.15)$$

При отсутствии полуплоскости эти источники создают в точке  $P$  поле

$$\left. \begin{aligned} E_z &= ik^2 p_z \sqrt{\frac{2\pi}{kR}} e^{i(kR - \frac{\pi}{4})} e^{-ikd \cos(\varphi' - \varphi'')}, \\ H_z &= ik^2 m_z \sqrt{\frac{2\pi}{kR}} e^{i(kR - \frac{\pi}{4})} e^{-ikd \cos(\varphi' - \varphi'')}. \end{aligned} \right\} (24.16)$$

Сравнивая формулы (24.15) и (24.16), получаем для функций затенения те же выражения (24.14). Следовательно, сферическая волна в направлении, перпендикулярном к идеально проводящей полуплоскости, затеняется так же, как цилиндрическая волна.

Заметим, однако, что выражения (24.14) не эквиваленты выражениям (21.22), (21.23) и (22.13), так как первые представляют функцию затенения полуплоскостью волны от одного источника, а последние — функцию затенения краевой волны, которую мы аппроксимируем волнами от двух источников, расположенных с обеих сторон соответствующей полуплоскости. Поскольку функции затенения сферических и цилиндрических волн одинаковы, то и функции затенения краевых волн на ленте и диске также будут совпадать.

Поэтому приближенные выражения для рассеянного диском поля, учитывающие вторичную дифракцию, могут быть представлены в области  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$  (при  $\zeta \gg 1$ ) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} E_\varphi &= -H_\vartheta = \frac{iaE_{0c}}{\sqrt{2\pi\zeta}} \left\{ F(2, \vartheta) f(2, \delta) e^{i(\zeta - \frac{3\pi}{4})} - \right. \\ &\quad \left. - F(1, \vartheta) f(1, \delta) e^{-i(\zeta - \frac{3\pi}{4})} \right\} \frac{e^{ikR}}{R}, \\ H_\varphi &= E_\vartheta = \frac{iaH_{0c}}{\sqrt{2\pi\zeta}} \left\{ G(2, \vartheta) g(2, \delta) e^{i(\zeta - \frac{3\pi}{4})} - \right. \\ &\quad \left. - G(1, \vartheta) g(1, \delta) e^{-i(\zeta - \frac{3\pi}{4})} \right\} \frac{e^{ikR}}{R}, \end{aligned} \right\} (24.17)$$

где функции  $F$  и  $G$  получаются из формул (21.22), (21.23) и (22.13) заменой  $\varphi$  на  $\vartheta$ . Формулы (24.17) можно рассматривать как асимптотическое представление (при  $\zeta \gg 1$ ) следующих выражений:

$$\begin{aligned} E_\varphi &= -H_\vartheta = \frac{iaE_{0c}}{2} \left\{ [F(2, \vartheta) f(2, \delta) - F(1, \vartheta) f(1, \delta)] J_1(\zeta) + \right. \\ &\quad \left. + i[F(2, \vartheta) f(2, \delta) + F(1, \vartheta) f(1, \delta)] J_2(\zeta) \right\} \frac{e^{ikR}}{R}, \end{aligned} \quad (24.18)$$

$$\begin{aligned} H_\varphi &= E_\vartheta = \frac{iaH_{0c}}{2} \left\{ [G(2, \vartheta) g(2, \delta) - G(1, \vartheta) g(1, \delta)] J_1(\zeta) + \right. \\ &\quad \left. + i[G(2, \vartheta) g(2, \delta) + G(1, \vartheta) g(1, \delta)] J_2(\zeta) \right\} \frac{e^{ikR}}{R}. \end{aligned}$$

Эти выражения имеют место в области  $\vartheta \leq \frac{\pi}{2}$  для значений  $\vartheta \approx \frac{\pi}{2}$  и  $\gamma \ll \frac{\pi}{2}$ . Пользуясь формулой (24.18), напишем выражения для поля, излучаемого диском в на-

правлении  $\gamma$  при падении на него плоской волны (слева направо) под углом  $\vartheta$ ,

$$\left. \begin{aligned} E_{\varphi} = -H_{\vartheta} &= \frac{iaE_{0\varphi}}{2} \left\{ -[F(2, \vartheta) f(1, \delta)] - \right. \\ &- F(1, \vartheta) f(2, \delta)] J_1(\zeta) + i[F(2, \vartheta) f(1, \delta) + \\ &+ F(1, \vartheta) f(2, \delta)] J_2(\zeta) \left. \right\} \frac{e^{ikR}}{R}, \\ H_{\varphi} = E_{\vartheta} &= \frac{iaH_{0\varphi}}{2} \left\{ -[G(2, \vartheta) g(1, \delta) - \right. \\ &- G(1, \vartheta) g(2, \delta)] J_1(\zeta) + i[G(2, \vartheta) g(1, \delta) + \\ &+ G(1, \vartheta) g(2, \delta)] J_2(\zeta) \left. \right\} \frac{e^{ikR}}{R}. \end{aligned} \right\} (24.19)$$

Здесь уже  $\gamma \approx \frac{\pi}{2}$  ( $\gamma \leq \frac{\pi}{2}$ ) и  $\vartheta \ll \frac{\pi}{2}$ .

Исходя из выражений (24.18) и (24.19), нетрудно написать интерполяционные формулы для рассеянного поля, пригодные для любых значений  $\gamma$  и  $\vartheta$  в интервале  $(0; \frac{\pi}{2})$ , но при  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ ;

$$\begin{aligned} E_{\varphi} = -H_{\vartheta} &= \frac{iaE_{0\varphi}}{2} \left\{ [F(2, \vartheta) F(1, \vartheta) f(2, \delta) - \right. \\ &- F(1, \vartheta) F(2, \vartheta) f(1, \delta)] J_1(\zeta) + i[F(2, \vartheta) F(1, \vartheta) f(2, \delta) + \\ &+ F(1, \vartheta) F(2, \vartheta) f(1, \delta)] J_2(\zeta) \left. \right\} \frac{e^{ikR}}{R}, \end{aligned} \quad (24.20)$$

$$\begin{aligned} E_{\vartheta} = H_{\varphi} &= \frac{iaH_{0\varphi}}{2} \left\{ [G(2, \vartheta) G(1, \vartheta) g(2, \delta) - \right. \\ &- G(1, \vartheta) G(2, \delta) g(1, \delta)] J_1(\zeta) + i[G(2, \vartheta) G(1, \vartheta) g(2, \delta) + \\ &+ G(1, \vartheta) G(2, \delta) g(1, \delta)] J_2(\zeta) \left. \right\} \frac{e^{ikR}}{R}. \end{aligned} \quad (24.21)$$

Заметим, что при  $\gamma=0$  эти выражения будут справедливы для любых значений азимута  $\varphi$ , так как тогда любую точку пространства можно считать расположенной в плоскости падения.

В направлении главного максимума диаграммы рассеяния, т. е. при  $\vartheta = \gamma$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , рассеянное поле (24.20) и (24.21) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} E_{\varphi} = -H_{\vartheta} &= \frac{ika^2}{2} E_{0\varphi} \cdot F(2, \gamma) F(1, \gamma) \frac{e^{ikR}}{R} \cos \gamma, \\ E_{\vartheta} = H_{\varphi} &= \frac{ika^2}{2} H_{0\varphi} \cdot G(2, \gamma) G(1, \gamma) \frac{e^{ikR}}{R} \cos \gamma. \end{aligned} \right\} (24.22)$$

Однако эти выражения имеют интерполяционный характер и при малых значениях угла  $\gamma$  их нельзя считать более точными, чем простые формулы § 9 и 12. В частности, при  $\gamma=0$ , когда рассеянное поле не должно зависеть от поляризации падающей волны, они дают значения, отличающиеся при  $E$ - и  $H$ -поляризации на малые величины порядка  $\frac{1}{\sqrt{ka}}$ . Поэтому в данном случае (при  $\gamma=0$ ) выражениями (24.20) и (24.21) имеет смысл пользоваться лишь вдали от оси  $z$ , переходя вблизи нее к формулам (24.02).

Формулы (24.20) и (24.21) обладают следующими важными свойствами. Они не имеют разрывов, охватывают случай скользящего падения плоской волны и удовлетворяют принципу взаимности. Из них следует, что  $E_{\varphi} = H_{\vartheta} = 0$  при  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ , т. е. рассеянное поле не претерпевает разрыва в плоскости  $z=0$ . Кроме того,  $E_{\vartheta} = H_{\varphi} = 0$  при любых значениях  $\vartheta$ , если  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ , т. е. плоская волна, поляризованная перпендикулярно к плоскости диска, не испытывает дифракцию при скользящем облучении диска.

Как и в случае дифракции на ленте, новые приближенные выражения учитывают в какой-то мере и третичную дифракцию [см. формулы (23.05) и рис. 48].

Пользуясь условием (9.04), нетрудно написать формулы для рассеянного поля в левом полупространстве  $(\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \pi; \varphi = \pm \frac{\pi}{2})$

$$\begin{aligned} E_{\varphi} = -H_{\vartheta} &= \frac{iaE_{0\varphi}}{2} \left\{ [F(2, \pi - \vartheta) F(1, \delta) f(2, \delta) - \right. \\ &- F(1, \pi - \vartheta) F(2, \delta) f(1, \delta)] J_1(\zeta) + \\ &+ i[F(2, \pi - \vartheta) F(1, \delta) f(2, \delta) + \\ &+ F(1, \pi - \vartheta) F(2, \delta) f(1, \delta)] J_2(\zeta) \left. \right\} \frac{e^{ikR}}{R}, \end{aligned} \quad (24.23)$$

$$E_{\varphi} = H_{\varphi} = \frac{iaH_{0\varphi}}{2} \left\{ [G(2, \pi - \vartheta)G(1, \delta)g(2, \delta) - G(1, \pi - \vartheta)G(2, \delta)g(1, \delta)]J_1(\zeta) + i[G(2, \pi - \vartheta)G(1, \delta)g(2, \delta) + G(1, \pi - \vartheta)G(2, \delta)g(1, \delta)]J_2(\zeta) \right\} \frac{e^{ikR}}{R}, \quad (24.23)$$

где функции  $f$  и  $g$  определяются формулами

$$g(1, \delta) = f(2, \delta) = \frac{\cos \frac{\delta + \vartheta}{2} + \sin \frac{\delta - \vartheta}{2}}{\sin \delta - \sin \vartheta}, \quad (24.24)$$

$$f(1, \delta) = g(2, \delta) = \frac{\cos \frac{\delta + \vartheta}{2} - \sin \frac{\delta - \vartheta}{2}}{\sin \delta - \sin \vartheta}.$$

В направлении на источник ( $\vartheta = \pi - \gamma$ ,  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ ) рассеянное поле равно

$$E_{\varphi} = -H_{\varphi} = \frac{iaE_{0\varphi}}{2} \left\{ [F^2(1, \delta)f(2, \delta) - F^2(2, \delta)f(1, \delta)]J_1(\zeta) + i[F^2(1, \delta)f(2, \delta) + F^2(2, \delta)f(1, \delta)]J_2(\zeta) \right\} \frac{e^{ikR}}{R}, \quad (24.25)$$

$$E_{\varphi} = H_{\varphi} = \frac{iaH_{0\varphi}}{2} \left\{ [G^2(1, \delta)g(2, \delta) - G^2(2, \delta)g(1, \delta)]J_1(\zeta) + i[G^2(1, \delta)g(2, \delta) + G^2(2, \delta)g(1, \delta)]J_2(\zeta) \right\} \frac{e^{ikR}}{R},$$

где

$$\delta = -\gamma; \quad (24.26)$$

$$f(1, \delta) = g(2, \delta) = -\frac{1 + \sin \gamma}{2 \sin \gamma};$$

$$f(2, \delta) = g(1, \delta) = \frac{1 - \sin \gamma}{2 \sin \gamma}.$$

Как уже отмечалось, формулами (24.25) имеет смысл пользоваться лишь вдали от оси  $z$ , переходя вблизи нее к выражению (12.15) прежнего приближения. По этим

формулам при  $ka = 5$  выполнен расчет функций  $\Sigma(\pi - \gamma)$  и  $\Sigma(\pi - \gamma)$  (рис. 65 и 66), определяющих эффективную поверхность рассеяния [см. выражения (12.17)], и прове-

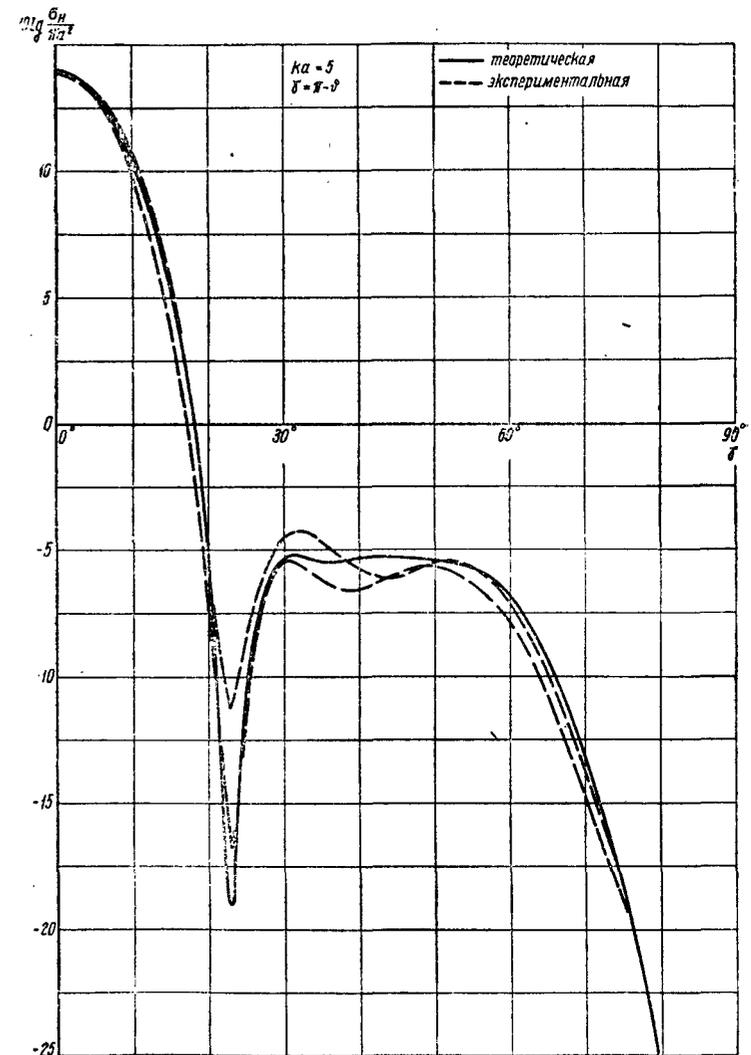


Рис. 65. Диаграмма эффективной поверхности рассеяния диска в случае, когда магнитный вектор плоской волны перпендикулярен плоскости падения.

дено сравнение с результатами измерений. Изображенные на рис. 65 две экспериментальные диаграммы (штриховые линии)\* характеризуют точность эксперимента. В отличие от прежних приближений, приводящих в данном

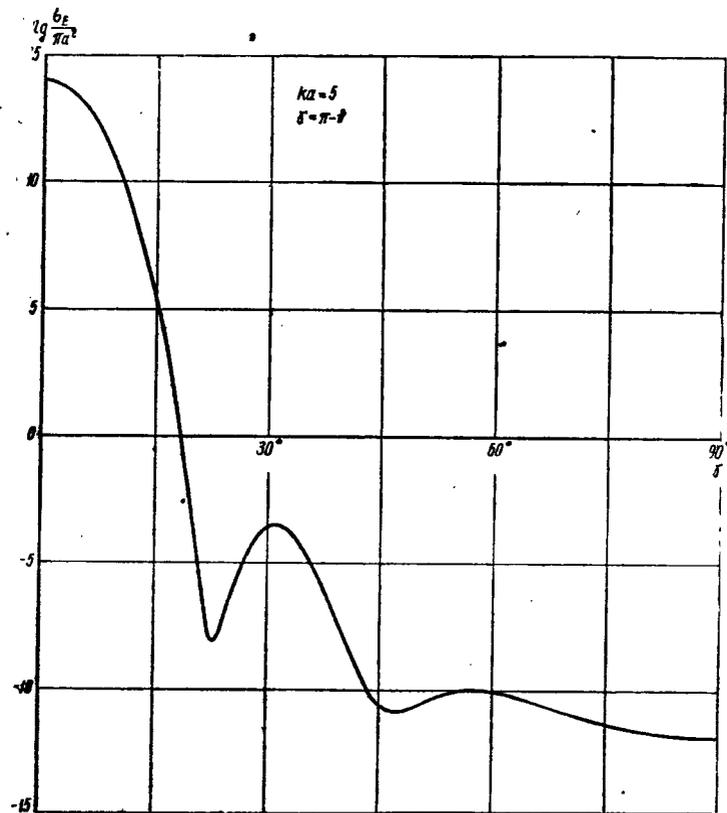


Рис. 66. Расчетная диаграмма эффективной поверхности рассеяния диска для случая, когда электрический вектор плоской волны перпендикулярен плоскости падения.

случае к качественно неверным результатам [см. формулы (10.06), (10.07) и (12.15)], мы наблюдаем удовлетворительное согласие теории с экспериментом.

Для проверки полученных результатов был проведен также расчет функций  $V^{(1)}(\vartheta)$  и  $V^{(2)}(\vartheta)$  [см. формулы (9.07)] при  $ka=5$  (рис. 67 и 68) при нормальном облу-

\* См. сноску на стр. 101.

чении диска плоской волной. Кривая 1 соответствует полю, вычисленному по строгой теории [34]; кривая 2 — полю от равномерной части тока (приближению физической оптики); кривая 3 — полю от равномерной и нерав-

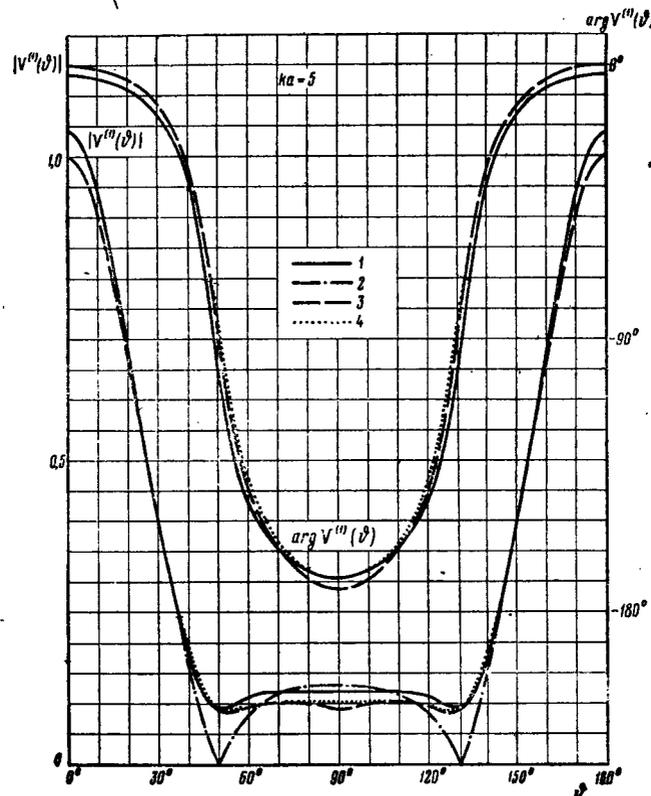


Рис. 67. Функция  $V^{(1)}(\vartheta)$  для диска при нормальном падении плоской волны (кривая 4). Для сравнения нанесены кривые 1, 2, 3 с рис. 20.

номерной частей тока, но без учета взаимодействия краев; кривая 4 — полю с учетом вторичной дифракции. Как видно из приведенных графиков, учет взаимодействия краев уточняет прежнее приближение и обеспечивает лучшее согласие с результатами строгой теории.

Аналогичным методом может быть решена задача о вторичной дифракции на цилиндре. Однако, принимая,

во внимание, что поправки, обусловленные вторичной дифракцией, оказываются здесь небольшими (порядка  $1 \text{ дб}$ ) уже при  $ka = \pi$ ,  $kl = 10\pi$ , а формулы существенно усложняются, мы их здесь не приводим.

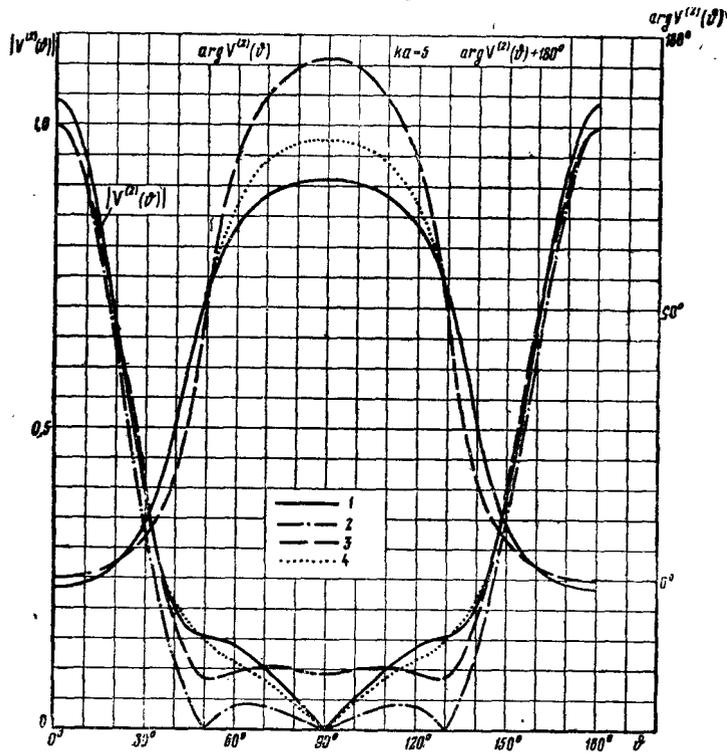


Рис. 68. Функция  $V_{(8)}^{(2)}$  для диска при нормальном падении плоской волны (кривая 4). Для сравнения нанесены кривые 1, 2, 3 с рис. 21.

В рассмотренных выше задачах краевые волны имели характер цилиндрических или сферических волн, т. е. убывали с удалением от края достаточно быстро. Поэтому уже в случае, когда линейные размеры граней составляли примерно две длины волны, достаточно было ограничиться учетом только вторичных волн. В гл. VII мы рассмотрим задачу о вибраторе, на котором краевые волны убывают настолько медленно, что необходимо учитывать многократную дифракцию

В этой и предыдущих главах были получены приближенные выражения для характеристик рассеяния плоской волны на различных телах. Эти выражения выведены с помощью физических соображений, не претендующих на математическую строгость, и пригодны для достаточно коротких волн. В литературе имеется ряд работ, в которых получены аналогичные результаты. Большинство этих работ также не отличается математической строгостью и основано на тех или иных физических допущениях, поэтому их можно отнести к физической теории дифракции. Лишь в немногих работах (относящихся к более простым дифракционным задачам) удалось получить конкретные результаты на более высоком уровне математической строгости, а именно, развивая асимптотические методы математической теории дифракции.

Мы перечислим кратко важнейшие результаты, полученные в ряде статей и книг, группируя материал в следующей последовательности:

1. Дифракция на плоских бесконечно тонких пластинах (бесконечная лента, круговой диск) и дифракция на дополнительных отверстиях в плоском экране (бесконечная щель, круговое отверстие).
2. Дифракция на объемных телах с ребрами (конечный цилиндр, конечный конус и т. д.).
3. Другие дифракционные задачи.

При рассмотрении дифракционных задач первой группы нужно иметь в виду принцип двойственности [4], который позволяет легко переходить от ленты к щели, от диска к круговому отверстию и т. д. В литературе, как правило, предпочитают рассматривать отверстия в бесконечном плоском экране, в то время как в нашей книге исследована дифракция на ленте и диске, что облегчает переход к объемным телам (см. замечание в начале данной главы).

По времени появления (если не считать работы Шварцшильда [15], о которой мы говорили во введении) следует прежде всего отметить работы Браунбека [28—30], посвященные дифракции скалярной волны на круглом отверстии в плоском экране. Предполагая, что плоская волна падает нормально к экрану, автор получает приближенное решение в виде поверхностного интеграла. Граничные значения подынтегральной функции взаимство-

ваны из строгого решения задачи о дифракции на полуплоскости, найденного Зоммерфельдом. Вычисляется поле в дальней зоне на оси отверстия и вдали от нее, а также на оси вблизи экрана. В том же приближении Браунбеком недавно решена задача о дифракции скалярной волны на отверстии в экране конической формы [31].

В статьях Франа [32, 33] этот метод применен к дифракции электромагнитных волн. Рассмотрена дифракция плоской волны, падающей нормально на идеально проводящий экран с круговым отверстием. Вычислено поле в отверстии и на оси, а также поле в дальней зоне и коэффициент прохождения (отношение энергии, проходящей через отверстие, к падающей на него).

В перечисленных работах Браунбека и Франа не учитывалась вторичная дифракция. Полученные ими выражения для интенсивности рассеянного поля в дальней зоне совпадают с аналогичными выражениями, вытекающими из наших формул (§ 9).

Карп и Рассек [51] исследовали дифракцию на щели в случае, когда электрический вектор падающей волны параллелен краю щели. При этом каждую полубесконечную часть экрана они рассматривали как полуплоскость, возбуждаемую полем падающей волны и «виртуально» источника, который локализован на краю противоположной полуплоскости. Моменты этих источников определялись из системы двух алгебраических уравнений, получаемых путем использования асимптотических выражений, вытекающих из строгого решения для полуплоскости. Учтена вторичная дифракция и частично общее взаимодействие. Особое внимание уделено вычислению коэффициента прохождения, но отсутствуют формулы для характеристик рассеяния, пригодные при любых направлениях распространения падающей волны.

Клеммов [46] и Миллар [47—49] вычисляют в своих работах коэффициенты прохождения при нормальном облучении щели и отверстия, а также поле на отверстии. Решение ищется с помощью криволинейных интегралов по краям отверстия от фиктивных линейных токов. Учитывается взаимодействие краев. Случай наклонного облучения не рассмотрен, так как оказался слишком сложным для исследования этим методом.

Особый интерес представляет «геометрическая тео-

рия дифракции» Келлера [42—44], оперирующая с дифракционными лучами. Фаза и амплитуда, соответствующие каждому дифракционному лучу, определяются в каждой точке луча на основании геометрических соображений и закона сохранения энергии. Начальная амплитуда дифракционного луча предполагается пропорциональной амплитуде падающего луча в точке его дифракции. Неизвестный коэффициент пропорциональности между амплитудами и начальная разность фаз определяются из сравнения с результатами известных решений дифракционных задач. Таким путем находятся поля, рассеянные при нормальном падении плоской волны на щель и отверстие в плоском экране. Эти поля получены с учетом многократной дифракции, но не являются точными решениями волнового уравнения, так как при их расчете исходят из приближенных соотношений. Кроме того, геометрическая теория дифракции не применима вблизи каустик, а также вблизи главного максимума диаграммы рассеяния.

В недавно опубликованной статье Бухала и Келлера [52] предложен новый метод решения дифракционных задач для отверстий в плоском экране. Каустики и границы тени рассматриваются здесь как тонкие пограничные слои, внутри которых происходит быстрое изменение поля. Этот метод дополняет геометрическую теорию дифракции и позволяет, в частности, найти поле в каустиках и на границе тени.

В последнее время для решения задач о дифракции на отверстиях в плоском экране применяется метод интегральных уравнений. В частности, Гринберг [53, 54] сводит решение данной задачи к интегральному уравнению для «теневого» тока, который является по нашей терминологии половиной неравномерной части тока. Полученные интегральные уравнения могут быть решены (при любых соотношениях между размерами отверстия и длиной волны) методом последовательных приближений. Кроме того, они позволяют получить асимптотические выражения, пригодные для коротких волн. В статье [55] Гринберг нашел асимптотическое выражение для тока на ленте при  $ka \gg 1$  ( $2a$  — ширина ленты). Гринберг и Пименов [56] получили аналогичное решение в случае нормального падения плоской волны на круглое отверстие. Таким же методом найдено асимптотическое выра-

жение для тока на плоском кольце [57], ширина и внутренний диаметр которого много больше длины волны.

Перечисленные выше работы [53—57] относятся уже к математической теории дифракции: в них получены первые члены асимптотических разложений для тока, при желании можно, по-видимому, вычислить и следующие члены. К сожалению, найденные до сих пор асимптотические выражения относятся только к токам, а характеристики рассеяния приходится вычислять с помощью численных квадратур [56]. Вследствие быстрой осцилляции подынтегральных функций такой путь ведет к довольно громоздким вычислениям и не позволяет составить наглядного представления о формировании рассеянного поля, а также исследовать это поле надлежащим образом.

Миллар [58] рассмотрел задачу о дифракции электромагнитных волн на щели в плоском экране. Полученная им система интегральных уравнений для тока решается методом последовательных приближений. По найденным токам вычислено поле в отверстии, а затем по полю в отверстии рассчитано поле в дальней зоне и коэффициент прохождения. Все указанные величины представлены в виде асимптотического разложения по обратным степеням параметра  $\sqrt{ka}$ . Получено также решение в случае скользящего падения плоской волны.

Заметим, что асимптотические выражения, полученные методом интегральных уравнений, отличаются значительной сложностью и часто требуют табулирования новых специальных функций, входящих в эти выражения.

В недавно вышедшем томе *Handbuch der Physik* [50], посвященном теории дифракции, комплексная характеристика рассеяния плоской волны на ленте исследована непосредственно, минуя вычисление токов. Для этой характеристики составлено сингулярное интегральное уравнение, решение которого ищется в виде асимптотического ряда по обратным степеням  $\sqrt{ka}$ . Первый член этого ряда соответствует формулам (6.14) и (6.16), следующий член учитывает взаимодействие краев и обращается в бесконечность при скользящем падении плоской волны, а также для точек наблюдения, лежащих в плоскости ленты. Поэтому простые выражения, полученные в [50], не позволяют построить полной характеристики рассея-

ния. В [50] рассмотрена дифракция на диске, сфере, бесконечном круглом цилиндре, а также дан обзор общих методов теории дифракции и библиография, охватывающая большое число работ (главным образом немецких и американских).

В книге Кинга и У [59] приведен (как правило, без вывода) ряд асимптотических выражений, относящихся к щели и круговому отверстию, а также к другим дифракционным объектам. Однако и здесь отсутствуют формулы, по которым можно было бы построить характеристики рассеяния на ленте и диске при любом падении плоской волны.

Работы по дифракции на объемных телах, имеющих ребра, сравнительно немногочисленны. В статье Сигеля и других [41] с помощью элементарных рассуждений вычислена эффективная поверхность рассеяния для конечного конуса при падении на него плоской волны вдоль оси симметрии. Полученные здесь выражения не полностью характеризуют рассеянное поле и пригодны лишь для острых конусов, о чем мы уже упоминали в § 17. В статьях Келлера [44] концепция дифракционных лучей применяется к расчету рассеяния скалярной и электромагнитной плоских волн на конечном круговом конусе с плоским основанием, а также на конусе, имеющем вместо плоского основания сферическое закругление. Полученные выражения неприменимы вблизи некоторых направлений облучения и наблюдения. В § 17 мы показали, что поле, рассеянное конусом и некоторыми другими телами вращения, не выражается только через функции  $f$  и  $g$ , относящиеся к дифракционным лучам, которые расходятся от ребра клина. Этот результат, по-видимому, свидетельствует о невозможности полного вычисления характеристики рассеяния с помощью концепции дифракционных лучей.

Дифракционные задачи, возникающие в теории антенн, отличаются обычно большой сложностью, поскольку соответствующие металлические тела (зеркала, рупоры и т. д.) имеют сложную форму. Так как размеры этих тел и размеры излучающих отверстий значительно больше длины волны, то применение физической теории дифракции к антенным задачам представляется весьма перспективным. В этом направлении сделаны лишь первые шаги. Так, Кинбер [60, 61] произвел расчет развязки

и бокового излучения зеркальных антенн. Специфика зеркальных антенн заключается в том, что дифракционные лучи, возникающие на крае зеркала, испытывают многократное отражение на его вогнутой поверхности. Более детально это многократное отражение исследовано Кинбером применительно к вогнутой поверхности цилиндра и сферы [62, 63].

Дифракционные задачи, относящиеся к антенному вибратору — тонкому цилиндрическому проводнику — рассмотрены в гл. VII, там же даны ссылки на литературу.

В заключение скажем несколько слов о дифракции коротких волн на гладких телах. Основные закономерности, относящиеся к таким задачам, выяснены в фундаментальных работах Фока и Леонтовича. Эти закономерности установлены следующими методами математической теории дифракции:

1. Методом интегрального уравнения для тока на поверхности хорошо проводящего тела (локальный характер поля в области полутени, см. [17]);

2. Методом асимптотического суммирования дифракционных рядов (ток на параболоиде [64, 65]; распространение радиоволн над сферической землей [18, 66]).

3. Методом параболического уравнения (распространение радиоволн над плоской [67] и сферической [68, 69] землей; поле плоской электромагнитной волны в области полутени для любого выпуклого тела [70]).

Келлер [42], опираясь на концепцию дифракционных лучей, получил выражение для поля в глубокой тени при дифракции на выпуклом цилиндре с переменной кривизной. В частных случаях эллиптического и параболического цилиндра, как показано в работах Вайнштейна и Федорова [71] и Иванова [35], формулы Келлера согласуются с результатами более строгого математического исследования, которое позволяет точнее изучить (см. [71]) превращение дифракционных лучей в обычные и наоборот.

Более общий подход к дифракции на выпуклых телах дает метод параболического уравнения, записанного в так называемых лучевых координатах. Этот метод позволяет получить общее выражение для функции Грина в случае кругового цилиндра [72, 73]. По-видимому, данный метод в дальнейшем удастся применить и к другим, в том числе к трехмерным дифракционным задачам.

## ГЛАВА VI

### НЕКОТОРЫЕ ЯВЛЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С НЕРАВНОМЕРНОЙ ЧАСТЬЮ ПОВЕРХНОСТНОГО ТОКА

В предыдущих главах было проведено теоретическое исследование поля, излучаемого неравномерной частью тока. В данной главе мы изложим метод измерения этого поля (§ 26) и рассмотрим явление деполяризации отраженного сигнала (§ 27).

Экспериментальный метод измерения поля от неравномерной части тока был предложен впервые для тел вращения в статье Е. Н. Майзельса и автора [12]. Впоследствии было показано, что этот метод имеет универсальный характер и пригоден для измерения поля от неравномерной части тока, возбуждаемого плоской волной на любых металлических телах [13].

#### § 26. ИЗМЕРЕНИЕ ПОЛЯ, ИЗЛУЧАЕМОГО НЕРАВНОМЕРНОЙ ЧАСТЬЮ ТОКА

Пусть в свободном пространстве находится идеально проводящее тело произвольной формы, элемент поверхности которого изображен на рис. 69. Систему координат выберем так, чтобы ее начало лежало вблизи тела, а источник  $Q$  был расположен в плоскости  $x=0$ . Если расстояние между телом и источником много больше размеров тела, то падающую волну можно рассматривать вблизи тела как плоскую. Представим ее в виде

$$E_x = E_{0x} e^{ik(y \sin \gamma + z \cos \gamma)}, \quad E_y = 0. \quad (26.01)$$

Здесь  $\gamma$  — угол между нормалью  $N$  к фронту волны и осью  $z$ .

Поместим теперь перед источником параллельно фронту излучаемой волны поляризатор  $P$ , преобразующий линейно поляризованное излучение в волну круговой поляризации. Пусть прошедшая через поляризатор

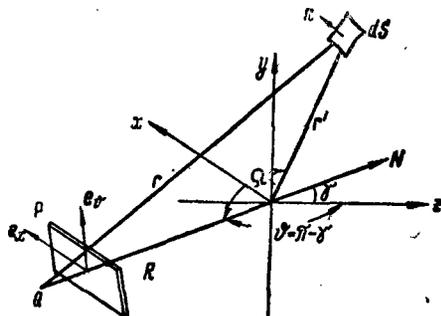


Рис. 69. К задаче о дифракции электромагнитных волн на произвольном металлическом теле.  $dS$  — элемент поверхности тела,  $N$  — нормаль к фронту падающей волны,  $Q$  — источник,  $P$  — поляризатор, преобразующий линейно поляризованное излучение в волну с вращающейся поляризацией.

волна с электрическим вектором  $E_n$  отстает по фазе на  $90^\circ$  от волны с электрическим вектором  $E_\tau$  (рис. 70). В этом случае поляризатор осуществляет правое вращение\*. В результате поле падающей волны в начале координат будет равно

$$E_x = \frac{e}{\sqrt{2}} E_{0x} e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad H_x = \frac{e}{\sqrt{2}} E_{0x} e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad (26.02)$$

Поле, рассеянное телом, можно представить в волновой зоне следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} E_\varphi = -H_\vartheta &= \frac{iaE_{0x}}{2} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \sum (\vartheta, \varphi) \frac{e^{ikR}}{R}, \\ E_\vartheta = H_\varphi &= \frac{iaE_{0x}}{2} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \sum (\vartheta, \varphi) \frac{e^{ikR}}{R}, \end{aligned} \right\} \quad (26.03)$$

\* Простейшим примером такого поляризатора может служить система металлических пластин, параллельных вектору  $e_\tau$ .

где  $a$  — есть некоторая длина, характеризующая размер тела, а  $\bar{\Sigma}(\vartheta, \varphi)$  и  $\Sigma(\vartheta, \varphi)$  — неизвестные угловые функции. Поле (26.03) представляет собой в общем случае

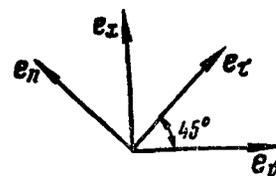


Рис. 70.

эллиптически поляризованную волну. В направлении на источник ( $\vartheta = \pi - \gamma$ ,  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ ) эта волна проходит через поляризатор и создает за ним поле

$$\left. \begin{aligned} E_x = -H_\vartheta &= \frac{iaE_{0x}}{2} \sum_+ \frac{e^{ikR}}{R} e^{i\frac{\pi}{2}}, \\ E_\vartheta = H_x &= \frac{iaE_{0x}}{2} \sum_- \frac{e^{ikR}}{R}, \end{aligned} \right\} \quad (26.04)$$

где

$$\sum_\pm = \frac{1}{2} (\Sigma \pm \bar{\Sigma}). \quad (26.05)$$

Если источник излучает волну другой поляризации ( $H_0 \perp yoz$ ), то волна, отраженная телом и прошедшая через поляризатор, описывается в точке  $Q$  аналогичными соотношениями

$$\left. \begin{aligned} H_x = E_\vartheta &= \frac{iaH_{0x}}{2} \sum_+ \frac{e^{ikR}}{R} e^{i\frac{\pi}{2}}, \\ H_\vartheta = -E_x &= \frac{iaH_{0x}}{2} \sum_- \frac{e^{ikR}}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (26.06)$$

Рассмотрим теперь в приближении физической оптики дифракцию плоской линейно поляризованной волны на том же теле. Согласно определению (3.01) равномерная часть тока, возбуждаемого на поверхности тела пло-

ской волной, при  $E$ -поляризации падающей волны ( $E_0 \perp yoz$ ) равна

$$\left. \begin{aligned} j_x^0 &= -\frac{c}{2\pi} E_{0x} (n_y \sin \gamma + n_z \cos \gamma) e^{i\psi}, \\ j_y^0 &= \frac{c}{2\pi} E_{0x} \cdot n_x \cdot \sin \gamma \cdot e^{i\psi}, \\ j_z^0 &= \frac{c}{2\pi} E_{0x} \cdot n_x \cos \gamma e^{i\psi}, \end{aligned} \right\} (26.07)$$

а при  $H$ -поляризации ( $H_0 \perp yoz$ )

$$\left. \begin{aligned} j_x^0 &= 0, \\ j_y^0 &= \frac{c}{2\pi} H_{0x} \cdot n_z e^{i\psi}, \\ j_z^0 &= -\frac{c}{2\pi} H_{0x} \cdot n_y \cdot e^{i\psi}. \end{aligned} \right\} (26.08)$$

Здесь  $E_{0x}$  и  $H_{0x}$  — амплитуды электрического и магнитного поля падающей волны соответственно при  $E$ - и  $H$ -поляризации,  $\psi = k(y' \sin \gamma + z' \cos \gamma)$  — фаза падающей волны в точке  $(x', y', z')$  на поверхности тела;  $n_x, n_y, n_z$  — компоненты нормали к поверхности в той же точке.

Вычисляя далее по этому току вектор-потенциал в дальней зоне и подставляя его значения в формулы

$$\left. \begin{aligned} E_\varphi &= -H_\vartheta = ikA_\varphi, \\ E_\vartheta &= H_\varphi = ikA_\vartheta, \end{aligned} \right\} (26.09)$$

найдем рассеянное поле. При  $E$ -поляризации оно равно

$$\begin{aligned} E_\varphi &= -H_\vartheta = \frac{ik}{2\pi} E_{0x} \frac{e^{ikR}}{R} \cdot \int [n_x \sin \gamma \cos \varphi + \\ &+ (n_y \sin \gamma + n_z \cos \gamma) \sin \varphi] e^{i\psi} dS, \end{aligned} \quad (26.10)$$

$$\begin{aligned} E_\vartheta &= H_\varphi = \frac{ik}{2\pi} E_{0x} \frac{e^{ikR}}{R} \cdot \int [n_x (\sin \gamma \cos \vartheta \sin \varphi - \cos \gamma \sin \vartheta) - \\ &- (n_y \sin \gamma + n_z \cos \gamma) \cos \varphi \cos \vartheta] e^{i\psi} dS, \end{aligned} \quad (26.10)$$

а при  $H$ -поляризации

$$E_\varphi = -H_\vartheta = \frac{ik}{2\pi} H_{0x} \cos \varphi \frac{e^{ikR}}{R} \int n_z e^{i\psi} dS, \quad (26.11)$$

Здесь  $R, \vartheta, \varphi$  — сферические координаты точки наблюдения,  $\Phi = \psi - kr' \cos \Omega$ , а интегрирование осуществляется по освещенным элементам поверхности тела. В радиолокационном случае, когда направления наблюдения и облучения совпадают ( $\vartheta = \pi - \gamma, \varphi = -\frac{\pi}{2}$ ), из формул (26.10) и (26.11) соответственно следует

$$\left. \begin{aligned} E_x &= -H_\vartheta = -\frac{ik}{2\pi} E_{0x} \frac{e^{ikR}}{R} \int (n_y \sin \gamma + \\ &+ n_z \cos \gamma) e^{i\psi} dS, \\ E_\vartheta &= H_x = 0 \end{aligned} \right\} (26.12)$$

и

$$\left. \begin{aligned} E_\vartheta &= H_x = \frac{ik}{2\pi} H_{0x} \frac{e^{ikR}}{R} \int (n_y \sin \gamma + \\ &+ n_z \cos \gamma) e^{i\psi} dS, \\ E_x &= H_\vartheta = 0. \end{aligned} \right\} (26.13)$$

Полагая далее амплитуды падающих волн заданными формулой (26.02), запишем выражения (26.12) и (26.13) следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= -H_\vartheta = \frac{iaE_{0x}}{2} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \frac{e^{ikR}}{R} \bar{\Sigma}^0, \\ E_\vartheta &= H_x = \frac{iaE_{0x}}{2} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \frac{e^{ikR}}{R} \Sigma^0, \end{aligned} \right\} (26.14)$$

где

$$\Sigma^0 = -\bar{\Sigma}^0 = \frac{k}{\pi a} \int (n_y \sin \gamma + n_z \cos \gamma) e^{i\psi} dS. \quad (26.15)$$

Представим теперь угловые функции рассеянного поля (26.03) в виде

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Sigma} &= \bar{\Sigma}^0 + \bar{\Sigma}^1, \\ \Sigma &= \Sigma^0 + \Sigma^1, \end{aligned} \right\} \quad (26.16)$$

где функции  $\Sigma^0$ ,  $\bar{\Sigma}^0$  и  $\Sigma^1$ ,  $\bar{\Sigma}^1$  относятся к полю, излучаемому соответственно равномерной и неравномерной частью тока. Подставляя эти выражения в формулы (26.04) и (26.06) и учитывая соотношение (26.15), найдем рассеянное поле, прошедшее через поляризатор  $P$  к источнику  $Q$ . В случае  $E$ -поляризации оно равно

$$\left. \begin{aligned} E_x &= -H_y = \frac{iaE_{0x}}{4} (\Sigma^1 + \bar{\Sigma}^1) \frac{e^{ikR}}{R} e^{i\frac{\pi}{2}}, \\ E_y &= H_x = \frac{iaE_{0x}}{4} (2\Sigma^0 + \Sigma^1 - \bar{\Sigma}^1) \frac{e^{ikR}}{R}, \end{aligned} \right\} \quad (26.17)$$

а в случае  $H$ -поляризации

$$\left. \begin{aligned} H_x &= E_y = \frac{iaH_{0x}}{4} (\Sigma^1 + \bar{\Sigma}^1) \frac{e^{ikR}}{R} e^{i\frac{\pi}{2}}, \\ H_y &= -E_x = \frac{iaH_{0x}}{4} (2\Sigma^0 + \Sigma^1 - \bar{\Sigma}^1) \frac{e^{ikR}}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (26.18)$$

Физический смысл полученного результата заключается в следующем. Рассеянное телом поле в точке  $Q$  является суммой двух волн, поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях. Отраженная волна, поляризованная так же, как и первичное излучение источника, определяется функцией  $\Sigma_+ = \frac{1}{2}(\Sigma^1 + \bar{\Sigma}^1)$  и создано только неравномерной частью тока. Отраженная волна с перпендикулярной поляризацией описывается функцией  $\Sigma_- = 2\Sigma^0 + \Sigma^1 - \bar{\Sigma}^1$  и представляет собой поле, излучаемое обеими частями тока. Заметим, что функции  $\Sigma^1$  и  $\bar{\Sigma}^1$  в общем случае не совпадают и поэтому в выражении для  $\Sigma_-$  не компенсируются. Другими словами, поле, излучаемое равномерной частью тока, не может быть выделено в данном случае из рассеянного поля.

Таким образом, рассмотренный способ позволяет выделить из полного поля, рассеянного любыми металлическими телами конечных размеров, ту его часть, которая обусловлена искривлением поверхности (изгибом, изломом, острием, выступом, отверстием и т. д.). Следует отметить, что в случае рассеяния электромагнитных волн на системе разрозненных тел выделяемая часть поля обусловлена не только искривлением поверхности, но и дифракционным взаимодействием тел.

Нужно, однако, иметь в виду, что указанное разделение рассеянного поля может быть осуществлено не в произвольном направлении наблюдения, а лишь в на-

правлении, для которого выполняется условие  $\Sigma^0 = -\bar{\Sigma}^0$ , например, в направлении на источник.

Учет неравномерной части тока позволяет также объяснить деполяризацию отраженной волны, которую мы рассмотрим в следующем параграфе.

На рис. 71 представлены результаты измерений\* и расчетов эффективной поверхности рассеяния

$$\sigma^+ = \pi a^2 |\Sigma_+|^2 = \frac{1}{4} \pi a^2 |\Sigma^1 + \bar{\Sigma}^1|^2, \quad (26.19)$$

которая обусловлена неравномерной частью тока, возбуждаемого плоской электромагнитной волной на диске.

Диаметр диска равен  $2a = \frac{5\lambda}{\pi}$  ( $\lambda$  — длина волны). Расчеты выполнены с учетом вторичной дифракции по приближенным формулам для функций  $\Sigma$  и  $\bar{\Sigma}$ , выведенным в § 24. Поскольку изготовить тонкий диск с достаточно плоской поверхностью трудно, измерения проводились с тупым конусом, близким по форме к диску и имеющим высоту, равную примерно одной десятой диаметра.

Как видно из рис. 71, теоретическая и экспериментальная кривые достаточно близки друг к другу. Некоторое расхождение между ними, особенно в области значений  $\gamma$ , близких к  $90^\circ$ , можно, по-видимому, объяснить как конической формой образца, так и приближенным характером расчетных формул. Значение  $\gamma = 90^\circ$  соответствует направлению вдоль поверхности диска, а значение  $\gamma = 0^\circ$  — направлению, нормальному к диску.

\* См. сноски на стр. 101.

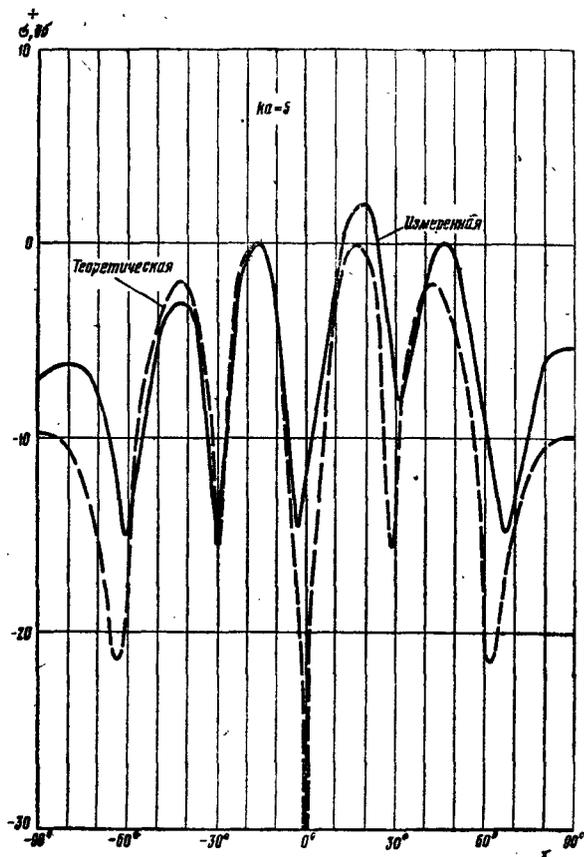


Рис. 71. Диаграмма излучения от неравномерной части тока, текущего на диске.

## § 27. ДЕПОЛЯРИЗАЦИЯ ОТРАЖЕННОЙ ВОЛНЫ

Вернемся опять к задаче о рассеянии электромагнитной волны на произвольном металлическом теле. Взаимное расположение источника  $Q$ , элемента поверхности облучаемого тела и системы координат показано на рис. 69. Напомним, что источник  $Q$  находится в плоскости  $yOz$  и излучает линейно поляризованную волну. Будем далее считать, что поляризатор  $P$ , изображенный на рис. 69, теперь отсутствует.

Обозначим через  $\alpha$  угол между плоскостью  $yOz$  и электрическим вектором  $E_0$  падающей волны (рис. 72). Поле этой волны представим в виде

$$\begin{aligned} E_x = H_{0y} &= E_{0x} e^{ik(y \sin \alpha + z \cos \alpha)}, \\ H_x = -E_{0y} &= H_{0x} e^{ik(y \sin \alpha + z \cos \alpha)}, \end{aligned} \quad (27.01)$$

где

$$E_{0x} = E_0 \sin \alpha, \quad H_{0x} = -E_0 \cos \alpha, \quad \frac{E_{0x}}{E_{0y}} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (27.02)$$

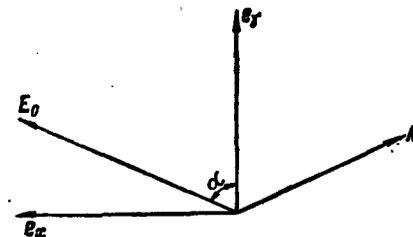


Рис. 72.

Рассеянное телом поле определяется в волновой зоне формулами

$$\left. \begin{aligned} E_\varphi = -H_\theta &= \frac{ia}{2} [E_{0x} \bar{\Sigma}_1(\gamma, \vartheta, \varphi) + \\ &+ H_{0x} \Sigma_1(\gamma, \vartheta, \varphi)] \frac{e^{ikR}}{R}, \\ E_\theta = H_\varphi &= \frac{ia}{2} [E_{0x} \bar{\Sigma}_2(\gamma, \vartheta, \varphi) + \\ &+ H_{0x} \Sigma_2(\gamma, \vartheta, \varphi)] \frac{e^{ikR}}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (27.03)$$

Здесь  $a$  — некоторая длина, характеризующая размер тела,  $R, \vartheta, \varphi$  — сферические координаты точки наблюдения,  $\bar{\Sigma}_{1,2}(\gamma, \vartheta, \varphi)$  и  $\Sigma_{1,2}(\gamma, \vartheta, \varphi)$  — неизвестные угловые функции.

Очевидно, что поляризация рассеянного поля, т. е. ориентация в пространстве его электрического вектора, зависит сложным образом от направлений наблюдения и облучения. В направлении на источник она может не

совпадать с поляризацией волны, излучаемой источником. Такое явление называется деполяризацией отраженной волны.

Причину деполяризации легко установить, если рассеянное поле рассматривать как сумму полей, излучаемых равномерной и неравномерной частями тока. В самом деле, согласно § 26 равномерная часть тока излучает в направлении на источник ( $\vartheta = \pi - \gamma$ ,  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ ) поле

$$\left. \begin{aligned} E_x &= -H_\varphi = \frac{iaE_{0x}}{2} \frac{e^{ikR}}{R} \bar{\Sigma}^0, \\ E_\varphi &= H_x = \frac{iaH_{0x}}{2} \frac{e^{ikR}}{R} \Sigma^0. \end{aligned} \right\} \quad (27.04)$$

Функции  $\bar{\Sigma}^0$  и  $\Sigma^0$  удовлетворяют условию  $\Sigma^0 = -\bar{\Sigma}^0$  и описываются формулой (26.15). Из формулы (27.04) немедленно получаем равенство

$$\frac{E_x}{E_\varphi} = \operatorname{tg} \alpha, \quad (27.05)$$

которое означает, что в приближении физической оптики отраженная волна не испытывает деполяризации. Следовательно, деполяризация отраженной волны обусловлена только *неравномерной частью* тока или, иначе говоря, искривлением поверхности.

Выведем формулу для величины угла  $\delta$ , на который поворачивается вектор электрического поля отраженной волны по отношению к электрическому вектору волны, излучаемой источником. С этой целью представим функции  $\bar{\Sigma}_{1(2)}$  и  $\Sigma_{1(2)}$  в виде

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Sigma}_{1(2)} &= \bar{\Sigma}_{1(2)}^0 + \bar{\Sigma}_{1(2)}^1, \\ \Sigma_{1(2)} &= \Sigma_{1(2)}^0 + \Sigma_{1(2)}^1, \end{aligned} \right\} \quad (27.06)$$

где слагаемые  $\bar{\Sigma}_{1(2)}^0$  и  $\Sigma_{1(2)}^0$  соответствуют полю, излучаемому равномерной частью тока, а слагаемые  $\bar{\Sigma}_{1(2)}^1$  и  $\Sigma_{1(2)}^1$  — полю, излучаемому неравномерной частью тока. Сравнивая выражения (27.04) и (27.03), находим, что

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Sigma}_1^0 &= \bar{\Sigma}^0, & \Sigma_1^0 &= 0, \\ \bar{\Sigma}_2^0 &= 0, & \Sigma_2^0 &= -\bar{\Sigma}^0. \end{aligned} \right\} \quad (27.07)$$

Поэтому поле, рассеянное в направлении на источник ( $\vartheta = \pi - \gamma$ ,  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ ), будет равно

$$\left. \begin{aligned} E_x &= -H_\varphi = \frac{ia}{2} [E_{0x}(\bar{\Sigma}^0 + \bar{\Sigma}_1^1) + H_{0x}\Sigma_1^1] \frac{e^{ikR}}{R}, \\ E_\varphi &= H_x = \frac{ia}{2} [E_{0x}\bar{\Sigma}_2^1 - H_{0x}(\bar{\Sigma}^0 - \Sigma_2^1)] \frac{e^{ikR}}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (27.08)$$

Электрический вектор этого поля образует с плоскостью *воз* угол  $\beta$ , который определяется формулой

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{E_x}{E_\varphi} = \frac{\bar{\Sigma}^0 + \bar{\Sigma}_1^1 - \Sigma_1^1 \operatorname{ctg} \alpha}{\bar{\Sigma}^0 - \Sigma_2^1 + \bar{\Sigma}_2^1 \operatorname{tg} \alpha} \operatorname{tg} \alpha. \quad (27.09)$$

В результате искомым углом  $\delta$ , который характеризует величину деполяризации, будет равен

$$\delta = \alpha - \beta. \quad (27.10)$$

Таким образом, поле от неравномерной части тока, выделяемое «в чистом виде» с помощью поляризатора (§ 26), приводит к деполяризации рассеянного излучения.

Конкретные результаты по расчету деполяризации волн, отраженных от некоторых тел, можно найти, например, в работах Хитила [75—77] и Бекмана [78]. В частности, в статье [77] показано, что влиянием деполяризации на эффективную поверхность рассеяния выпуклых тел можно практически пренебречь только при условии  $ka \gtrsim 4$ .

## ГЛАВА VII ДИФРАКЦИЯ НА ТОНКОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ПРОВОДНИКЕ

Почти во всех работах, посвященных дифракции плоских электромагнитных волн на тонком цилиндрическом проводнике, исследуют наводимый в проводе ток, а затем, интегрируя последний, вычисляют рассеянное поле в дальней зоне. Однако в силу сложности этой задачи, сравнительно простые формулы удается получить лишь в частном случае, когда направление наблюдения и направление на источник совпадают и перпендикулярны к оси проводника. В общем случае, когда указанные направления не совпадают и произвольны, выражения для рассеянного поля становятся весьма сложными и неудобными для расчетов. Поскольку их получают интегрированием приближенных выражений для тока, то оказывается, что они обладают еще одним существенным недостатком — не удовлетворяют принципу взаимности.

В данной главе получены явные выражения для рассеянного поля, пригодные для расчетов при любых направлениях облучения и наблюдения. При этом мы учитываем как первичные краевые волны, возбуждаемые падающей плоской волной, так и вторичные, третичные и т. п. краевые волны. Полное рассеянное поле находится суммированием всех дифракционных волн.

### § 28. ВОЛНЫ ТОКА В ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕМ ВИБРАТОРЕ

Электродинамическая задача об определении тока в тонких цилиндрических проводниках (вибраторах) обычно сводится к интегрированию дифференциального уравнения

нию. Последнее выводится с помощью граничных условий на поверхности проводника и существенно упрощается в случае тонких проводов, когда выполняются неравенства

$$\frac{a}{L} \ll 1 \text{ и } ka \ll 1, \quad (28.01)$$

где  $a$  — радиус,  $L$  — длина провода,  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$ .

Его решение может быть найдено, например, методом последовательных приближений [79, 80] или методом возмущений [85]. Недавно Вайнштейн [81, 82] предложил новое решение этого уравнения. Поскольку в дальнейшем мы будем опираться на результаты работ [81, 82], остановимся на них более подробно.

Предположим, что ось симметрии вибратора совмещена с осью  $z$ , а его концы имеют координаты  $z = z_1$  и  $z = z_2$  ( $L = z_2 - z_1$ ). В случае возбуждения вибратора сосредоточенным сторонним полем

$$E_z^e = \mathcal{E} \delta(z) \quad (28.02)$$

ток  $J(z)$  в проводе можно очевидно записать в виде суммы волн, бегущих по проводу со скоростью  $c$  от точки возбуждения  $z = 0$  и концов  $z = z_1$  и  $z = z_2$ . В работе [81] показано, что комплексные амплитуды этих волн суть медленно меняющиеся функции координаты  $z$ , которые можно приближенно выразить через функцию  $\psi(z)$ , так что для тока  $J(z)$  получим следующее выражение:

$$J(z) = J_0 [\psi(|z|) e^{ik|z|} + A_1 \psi(z - z_1) e^{ik(z - z_1)} + A_2 \psi(z_2 - z) e^{ik(z_2 - z)}]. \quad (28.03)$$

Здесь величина

$$J_0 = \frac{c\mathcal{E}}{4 \ln \frac{i}{\gamma ka}}, \quad \gamma = 1,781 \dots \quad (28.04)$$

определяет начальное значение волны тока, распространяющейся от точки возбуждения  $*$ , а функция  $\psi(z)$  яв-

\* Заметим, что формулу (28.04) можно уточнить, умножая ее правую часть на множитель  $\Theta_0$  (обычно  $\Theta_0 \approx 1$ ), вычисленный в работе [84].

ляется решением интегрального уравнения и, кроме переменной  $z$ , зависит также от параметров  $k$  и  $a$ . Мы не будем здесь перечислять всех свойств функции  $\psi(z)$ , отметим лишь, что она удовлетворяет условиям

$$\psi(0) = 1, \quad \psi(\infty) = 0, \quad (28.05)$$

а ее абсолютная величина монотонно убывает с ростом  $z$ . Это убывание — довольно медленное и не имеющее экспоненциального характера — обусловлено излучением.

Постоянные  $A_1$  и  $A_2$  определяют начальные значения волн тока, начинающихся соответственно в точках  $z = z_1$  и  $z = z_2$  и распространяющихся по направлению к противоположному концу провода. Эти постоянные находятся из условий на концах провода

$$J(z_1) = J(z_2) = 0 \quad (28.06)$$

и равны

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -\frac{1}{D} [\psi(-z_1) - \psi(z_2) \psi(L) e^{2ikz_2}] e^{-ikz_1}, \\ A_2 &= -\frac{1}{D} [\psi(z_2) - \psi(-z_1) \psi(L) e^{-2ikz_1}] e^{ikz_2}, \end{aligned} \right\} \quad (28.07)$$

$$\text{где} \quad D = 1 - \psi^2(L) e^{2ikL}. \quad (28.08)$$

Принимая во внимание, что величина  $\frac{1}{D}$  равна бесконечной геометрической прогрессии

$$\frac{1}{D} = 1 + \psi^2(L) e^{2ikL} + \psi^4(L) e^{4ikL} + \dots, \quad (28.09)$$

выражение (28.03) можно записать в развернутом виде

$$\begin{aligned} J(z) &= J_0 \{ \psi(|z|) e^{ik|z|} - \psi(-z_1) e^{-ikz_1} [\psi(z-z_1) e^{ik(z-z_1)} - \\ &\quad - \psi(L) e^{ikL} \psi(z_2-z) e^{ik(z_2-z)} + \psi^2(L) e^{2ikL} \psi(z-z_1) e^{ik(z-z_1)} - \\ &\quad - \psi(z_2) e^{ikz_2} [\psi(z_2-z) e^{ik(z_2-z)} - \\ &\quad - \psi(L) e^{ikL} \psi(z-z_1) e^{ik(z-z_1)} + \\ &\quad + \psi^2(L) e^{2ikL} \psi(z_2-z) e^{ik(z_2-z)} - \dots] \}. \quad (28.10) \end{aligned}$$

Отсюда виден физический смысл выражения (28.03). Первое слагаемое в формуле (28.10) представляет собой первичную волну тока, совпадающую с волной, которая

возбуждается сосредоточенной э. д. с. в бесконечно длинном проводе. Второе слагаемое (со всей квадратной скобкой) соответствует току, полученному при отражении первичной волны тока от конца провода  $z = z_1$  и в результате последующих отражений от концов провода возникшей при этом волны  $-J_0 \psi(-z_1) e^{-ikz_1} \psi(z - z_1) e^{ik(z-z_1)}$ . Третье слагаемое (со всей квадратной скобкой) соответствует току, полученному при отражении первичной волны от конца  $z = z_2$  и в результате последующих отражений от концов провода возникшей при этом волны  $-J_0 \psi(z_2) e^{ikz_2} \psi(z_2 - z) e^{ik(z_2-z)}$ .

Из формулы (28.03) также следует, что стороннее поле (28.02) возбуждает в полубесконечном проводе ( $z_1 \leq z \leq \infty$ ) ток

$$J(z) = J_0 [\psi(|z|) e^{ik|z|} - \psi(-z_1) e^{-ikz_1} \psi(z-z_1) e^{ik(z-z_1)}], \quad (28.11)$$

а на полубесконечном проводе ( $-\infty \leq z \leq z_2$ ) — ток

$$J(z) = J_0 [\psi(|z|) e^{ik|z|} - \psi(z_2) e^{ikz_2} \psi(z_2 - z) e^{ik(z_2-z)}]. \quad (28.12)$$

Сравнивая эти выражения с надлежащими членами в (28.10), мы видим, что отражение всех волн тока на конце вибратора конечной длины происходит так же, как на конце полубесконечного провода.

В случае пассивного вибратора ( $z_1 \leq z \leq z_2$ ), возбуждаемого плоской волной

$$E_z^e = E_0 z e^{i\omega z}, \quad \omega = -k \cos \theta, \quad (28.13)$$

ток также представляется в виде суммы волн (см. работу [82])

$$\begin{aligned} J(z) &= S [e^{i\omega z} - \psi_-(z-z_1) e^{i\omega z_1 + ik(z-z_1)} - \\ &\quad - \psi_+(z_2-z) e^{i\omega z_2 + ik(z_2-z)} + \bar{A}_1 \psi(z-z_1) e^{ik(z-z_1)} + \\ &\quad + \bar{A}_2 \psi(z_2-z) e^{ik(z_2-z)}], \quad (28.14) \end{aligned}$$

где первый член соответствует току, возбуждаемому плоской волной в бесконечно длинном проводе. Его комплексная амплитуда  $S$  равна

$$S = \frac{i\omega E_0 z}{2k^2 \sin^2 \theta \ln \frac{2i}{\gamma k a \sin \theta}}. \quad (28.15)$$

Второй и третий члены суть первичные краевые волны, возникающие вследствие обрывания тока  $Se^{i\omega z}$ ; они выражаются через функции  $\psi_+(z)$  и  $\psi_-(z)$ , которые зависят, кроме переменной  $z$  и параметров  $k$  и  $a$ , еще от угла  $\vartheta$  и удовлетворяют соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \psi_{\pm}(0) = 1, \quad \psi_{\pm}(\infty) = 0, \\ \psi_+(z)|_{\vartheta=\pi} = \psi_-(z)|_{\vartheta=0} = \psi(z), \\ \psi_+(z)|_{\vartheta=0} = \psi_-(z)|_{\vartheta=\pi} = 1. \end{aligned} \right\} \quad (28.16)$$

Начальные значения первичных краевых волн таковы, что в сумме с волной  $Se^{i\omega z}$  они дают на концах провода ток, равный нулю.

Два последних члена в формуле (28.14) соответствуют вторичным, третичным и т. д. краевым волнам и имеют тот же вид, что и для передающего вибратора [ср. формулу (28.03)]. Неизвестные коэффициенты

$\bar{A}_1$  и  $\bar{A}_2$  находятся из условий (28.06) и равны

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_1 = \frac{1}{D} e^{i(k+\omega)z_2} [\psi_+(L) - \\ - \psi_-(L)\psi(L)e^{i(k-\omega)L}] e^{-ikz_1}, \\ \bar{A}_2 = \frac{1}{D} e^{-i(k-\omega)z_1} [\psi_-(L) - \\ - \psi_+(L)\psi(L)e^{i(k+\omega)L}] e^{ikz_2}. \end{aligned} \right\} \quad (28.17)$$

С помощью равенства (28.09) выражение (28.14) можно записать в более наглядной форме

$$\left. \begin{aligned} J(z) = S \{ & e^{i\omega z} - \psi_-(z-z_1) e^{i\omega z_1 + ik(z-z_1)} + \\ & + \psi_-(L) e^{i\omega z_1 + ikL} [\psi(z_2-z) e^{ik(z_2-z)} - \\ & - \psi(L) e^{ikL} \psi(z-z_1) e^{ik(z-z_1)} + \\ & + \psi^2(L) e^{2ikL} \psi(z_2-z) e^{ik(z_2-z)} - \dots] - \\ & - \psi_+(z_2-z) e^{i\omega z_2 + ik(z_2-z)} + \\ & + \psi_+(L) e^{i\omega z_2 + ikL} [\psi(z-z_1) e^{ik(z-z_1)} - \\ & - \psi(L) e^{ikL} \psi(z_2-z) e^{ik(z_2-z)} + \\ & + \psi^2(L) e^{2ikL} \psi(z-z_1) e^{ik(z-z_1)} - \dots] \}. \end{aligned} \right\} \quad (28.18)$$

Здесь наряду с волной  $Se^{i\omega z}$  и первичными краевыми волнами, о которых мы говорили в связи с формулой (28.14), явно выписаны вторичные, третичные и т. п. волны, расходящиеся от концов  $z=z_1$  и  $z=z_2$ ; они соответствуют первому, второму и т. д. члену в квадратных скобках.

Переходя в формуле (28.14) к пределу при  $z_2 \rightarrow \infty$ , найдем ток в полубесконечном проводе  $(z_1, \infty)$

$$J(z) = S \cdot [e^{i\omega z} - \psi_-(z-z_1) e^{i\omega z_1 + ik(z-z_1)}] \quad (28.19)$$

и аналогично—ток в полубесконечном проводе  $(-\infty, z_2)$

$$J(z) = S \cdot [e^{i\omega z} - \psi_+(z_2-z) e^{i\omega z_2 + ik(z_2-z)}]. \quad (28.20)$$

Нетрудно видеть, что и в случае пассивного вибратора отражение волн тока на его концах происходит так же, как на конце полубесконечного провода.

Таким образом, комплексные амплитуды волн тока в тонком проводе конечной длины пропорциональны функциям  $\psi(z)$  и  $\psi_{\pm}(z)$ , монотонно убывающим с ростом  $z$  вследствие излучения. Отметим еще некоторые свойства волн тока в вибраторе. Каждая набегающая волна в сумме с возбужденной ею отраженной волной дает нуль тока на конце провода. В случае  $L = z_2 - z_1 \approx n \frac{\lambda}{2}$  ( $n = 1, 2, 3 \dots$ ) и  $D \approx 0$  в вибраторе наступает резонанс тока.

Точность выражений (28.03) и (28.14), полученных методом медленно меняющихся функций, различна на разных участках провода. Она сравнительно мала вблизи концов провода (и вблизи точки  $z=0$  передающего вибратора), где возникают волны тока и, где их комплексная амплитуда меняется довольно быстро. С удалением от указанных элементов вибратора точность этих формул неограниченно растет.

Следует сказать, что при более строгом подходе [79, 90] амплитуды у всех отраженных волн будут определяться разными функциями, однако различие между ними быстро уменьшается с ростом номера отражения. Функции  $\psi(z)$  и  $\psi_{\pm}(z)$  лишь приближенно описывают эти волны тока, но зато позволяют эффективно их просуммировать и получить замкнутые формулы.

С помощью вариационного метода для функций  $\psi(z)$  и  $\psi_{\pm}(z)$  получены приближенные, но зато простые формулы (см. [83])

$$\left. \begin{aligned} \psi(z) &= \frac{\ln \frac{-1}{\gamma^2 q}}{\ln \frac{2ix}{\gamma} - E(2qx)e^{-2iqx}}, \\ \psi_{\pm}(z) &= \frac{\ln \frac{-1}{\gamma^2 q_{\pm}}}{\ln \frac{2ix}{\gamma} - E(2q_{\pm}x)e^{-2iq_{\pm}x}}, \end{aligned} \right\} (28.21)$$

где

$$\ln(-1) = i\pi, \quad \ln i = i\frac{\pi}{2}, \quad (28.22)$$

$$x = \frac{kz}{q}, \quad q = (ka)^2, \quad q_{\pm} = q \frac{1 \mp \cos \vartheta}{2} \quad (28.23)$$

и

$$E(y) = Ci y + i si y = - \int_y^{\infty} \frac{e^{it}}{t} dt. \quad (28.24)$$

Интегральный косинус  $Ci y$  и интегральный синус  $si y$  определяются соотношениями

$$Ci y = \int_y^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt, \quad si y = - \int_y^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt \quad (28.25)$$

и являются хорошо табулированными функциями.

Выписанные выше формулы для тока в конечном проводе отличаются наглядностью и позволяют уподобить провод отрезку передающей линии, в которой, однако, затухание волн тока происходит не по экспоненциальному закону, а по более сложному, определяемому формулами (28.21). Вместе с тем в указанных формулах отображен дифракционный характер задачи, причем специфика провода как дифракционного объекта заключается в весьма медленном затухании волн тока, вследствие чего нельзя ограничиваться учетом только вторичной и третичной дифракции, а необходимо суммировать

все отраженные волны. В результате такого суммирования и появляется «резонансный знаменатель»  $D$ , учитывающий резонансные свойства тонкого провода конечной длины.

## § 29. ИЗЛУЧЕНИЕ ПЕРЕДАЮЩЕГО ВИБРАТОРА

Характеристика излучения передающего вибратора может быть вычислена по известной формуле путем интегрирования тока в нем. Однако так поступать нецелесообразно, потому что, как указывалось выше, точность формул (28.03) различна на разных участках провода и мала вблизи его концов ( $z=z_1$  и  $z=z_2$ ) и точки  $z=0$ . Более точные результаты дает принцип взаимности, который приводит к следующему выражению для поля излучения в дальней зоне [82]:

$$\left. \begin{aligned} E_{\vartheta} = H_{\varphi} &= \frac{\mathcal{E}}{2 \sin \vartheta \ln \frac{2i}{\gamma ka \sin \vartheta}} \frac{e^{ikR}}{R} f(\vartheta), \\ E_{\varphi} = H_{\vartheta} &= 0. \end{aligned} \right\} (29.01)$$

Функция

$$f(\vartheta) = 1 - \psi_{+}(z_2) e^{ikz_2(1-\cos \vartheta)} - \psi_{-}(-z_1) e^{-ikz_1(1+\cos \vartheta)} + B_1 \psi_{+}(L) e^{ikz_2(1-\cos \vartheta)} + B_2 \psi_{-}(L) e^{-ikz_1(1+\cos \vartheta)} \quad (29.02)$$

связана с током (28.14), возбуждаемым в вибраторе плоской волной (28.13), соотношением

$$J(0) = Sf(\vartheta), \quad (29.03)$$

причем коэффициенты  $B_1$  и  $B_2$  не зависят от угла  $\vartheta$ .

Выражение (29.02) позволяет проследить за формированием излучения. Первое слагаемое (единица) представляет собой поле излучения бесконечно длинного провода, возбуждаемого сосредоточенной э. д. с. Распространяясь в направлении  $\vartheta=0$ , это поле доходит до конца провода  $z=z_2$  и, дифрагируя на нем, порождает первичную краевую волну (второе слагаемое). Аналогичным образом возбуждается первичная краевая волна, расходящаяся от конца провода  $z=z_1$  (третье слагаемое). Последние два члена в формуле (29.02) определяют волны, возникшие в результате последующей ди

фракции (вторичной, третичной и т. д.). Амплитуды  $B_1$  и  $B_2$  этих волн могут быть найдены из условий

$$f(0) = f(\pi) = 0, \quad (29.04)$$

которые означают, что излучение конечного провода в направлении его геометрического продолжения должно быть равно нулю. Эти условия с учетом соотношений (28.05) и (28.16) приводят к системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} B_1 + B_2 \psi(L) e^{-2ikz_1} = \psi(-z_1) e^{-2ikz_1}, \\ B_1 \psi(L) e^{2ikz_2} + B_2 = \psi(z_2) e^{2ikz_2}, \end{aligned} \right\} \quad (29.05)$$

откуда без труда находим

$$\left. \begin{aligned} B_1 = \frac{1}{D} [\psi(-z_1) - \psi(L) \psi(z_2) e^{2ikz_2}] e^{-2ikz_1}, \\ B_2 = \frac{1}{D} [\psi(z_2) - \psi(L) \psi(-z_1) e^{-2ikz_1}] e^{2ikz_2}. \end{aligned} \right\} \quad (29.06)$$

Принимая во внимание равенство (28.09), представим функцию  $f(\theta)$  в более наглядном виде

$$\begin{aligned} f(\theta) = & 1 - \psi_+(z_2) e^{ikz_2(1-\cos\theta)} + \psi_+(z_2) e^{ik(L+z_2)} \times \\ & \times [\psi_-(L) e^{-ikz_1 \cos\theta} - \psi(L) e^{ikL} \psi_+(L) e^{-ikz_2 \cos\theta} + \\ & + \psi^2(L) e^{2ikL} \psi_-(L) e^{-ikz_1 \cos\theta} - \dots] - \\ & - \psi_-(z_1) e^{-ikz_1(1+\cos\theta)} + \psi_-(z_1) e^{ik(L-z_1)} \times \\ & \times [\psi_+(L) e^{-ikz_2 \cos\theta} - \psi(L) e^{ikL} \psi_-(L) e^{-ikz_1 \cos\theta} + \\ & + \psi^2(L) e^{2ikL} \psi_+(L) e^{-ikz_2 \cos\theta} - \dots], \quad (29.07) \end{aligned}$$

где явно выписаны вторичные, третичные и т. д. волны, соответствующие первому, второму и следующим членам в квадратных скобках.

Таким образом, поле, излучаемое передающим вибратором, возникает в результате многократной дифракции краевых волн на концах вибратора. Заметим при этом, что краевая волна дифрагирует на противоположном конце вибратора так же, как на конце соответствующего полубесконечного провода. В этом нетрудно убедиться, рассматривая излучение полубесконечного провода, возбуждаемого сосредоточенной э. д. с.

### § 30. ПЕРВИЧНАЯ И ВТОРИЧНАЯ ДИФРАКЦИЯ НА ПАССИВНОМ ВИБРАТОРЕ

Пусть плоская электромагнитная волна падает под углом  $\theta_0$  на тонкий цилиндрический проводник длины  $L = z_2 - z_1$  и радиуса  $a$  (рис. 73). Для общности будем считать, что электрическое поле  $E_0$  падающей волны составляет угол  $\alpha$  с плоскостью рисунка. Тогда его тангенциальная компонента на поверхности проводника будет равна

$$E_z^e = E_{0z} \cdot e^{i\omega_0 z}, \quad (30.01)$$

где

$$E_{0z} = E \sin \theta_0, \quad E_x^e = E_0 \cos \alpha, \quad \omega_0 = -k \cos \theta_0. \quad (30.02)$$

Ток, наводимый в вибраторе этим полем, рассмотрен нами в § 28. Как уже указывалось выше, полученное для него выражение (28.14) обладает сравнительно малой точностью вблизи концов провода, поэтому искать рассеянное поле путем интегрирования тока нецелесообразно. Заметим еще, что найденное таким способом рассеянное поле не удовлетворяет принципу взаимности.

Мы будем искать характеристику рассеяния пассивного вибратора, исходя из следующей картины рассеяния, которая естественно вытекает из предыдущих результатов. Падающая плоская волна, дифрагируя на концах провода, возбуждает первичные краевые волны, излучающиеся в окружающее пространство. Распространяясь вдоль провода, каждая из этих волн испытывает дифракцию на противоположном конце провода и возбуждает вторичные краевые волны. Последние, в свою очередь, порождают третичные краевые волны и т. д. Полное рассеянное поле складывается из суммы всех краевых волн, образующихся при последовательной (многократной) дифракции на концах провода.

В § 28 и 29 мы отмечали, что волны тока отражаются от концов провода конечной длины так же, как от конца полубесконечного провода, и что дифракция этих

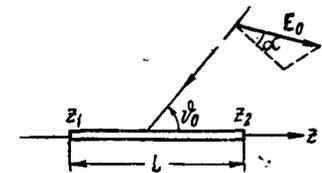


Рис. 73. Падение плоской волны на тонкий цилиндрический проводник,  $\theta_0$  — угол падения.

волн на каждом конце происходит так же, как на конце полубесконечного провода. Поэтому первичные краевые волны можно найти из задачи о рассеянии плоской волны на полубесконечном проводе  $(z_1, \infty)$  и проводе  $(-\infty, z_2)$ . Сумма таких волн дает первичное дифракционное поле

$$E_z^{(1)} = H_z^{(1)} = -E \frac{e^{ikR}}{kR} \cdot F^{(1)}(\vartheta, \vartheta_0), \quad (30.03)$$

где

$$F^{(1)}(\vartheta, \vartheta_0) = \frac{i}{2} \frac{\operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta_0}{2}}{(\cos \vartheta + \cos \vartheta_0) \Phi(-k \cos \vartheta, -k \cos \vartheta_0)} e^{-ikz_1(\cos \vartheta + \cos \vartheta_0)} - \frac{i}{2} \frac{\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \operatorname{tg} \frac{\vartheta_0}{2}}{(\cos \vartheta + \cos \vartheta_0) \Phi(k \cos \vartheta, k \cos \vartheta_0)} e^{-ikz_2(\cos \vartheta + \cos \vartheta_0)}. \quad (30.04)$$

Функция  $\Phi(w, \omega_0)$  может быть вычислена путем строгого решения задачи о полубесконечном вибраторе (см. [82] § 3 и [83] § 4) и в этом случае удовлетворяет соотношению

$$\left. \begin{aligned} \Phi(w, \omega_0) \Phi(-w, -\omega_0) &= \ln \frac{2i}{\gamma v a} \ln \frac{2i}{\gamma v_0 a}, \\ v &= \sqrt{k^2 - w^2}, \quad v_0 = \sqrt{k^2 - \omega_0^2}. \end{aligned} \right\} \quad (30.05)$$

Однако в строгом выражении для функции  $\Phi$  в дальнейшем не будет необходимости. Заметим, что формулы (30.03) и (30.04) аналогичны выражениям (6.13) для ленты, не учитывающим вторичную дифракцию.

Вторичная краевая волна, распространяющаяся от конца  $z = z_2$ , возбуждается при дифракции на последнем первичной волны тока

$$-S\psi_-^0(z - z_1) e^{i\omega_0 z_1 + ik(z - z_1)}, \quad (30.06)$$

где через  $\psi_{\pm}^0(z)$  мы обозначаем функции, получающиеся из функций  $\psi_{\pm}(z)$  заменой  $\vartheta$  на  $\vartheta_0$ . Для вычисления искомой вторичной волны нам нужно предварительно найти такое стороннее поле, приложенное к бесконечному про-

воду  $(-\infty \leq z \leq \infty)$ , которое возбуждает на его участке  $(z_1 \leq z \leq \infty)$  ток (30.06).

С этой целью изучим ток, наводимый в бесконечном проводе сторонним полем

$$E_z^e = \hat{E}_{0z} e^{i\omega_0 z} \cdot \varepsilon(z - z_1), \quad \varepsilon(z - z_1) = \begin{cases} 1 & \text{при } z < z_1 \\ 0 & \text{при } z > z_1. \end{cases} \quad (30.07)$$

Считаем, что  $\omega_0$  имеет небольшую отрицательную мнимую часть ( $\operatorname{Im} \omega_0 \leq 0$ ). Величину  $\hat{E}_{0z} e^{i\omega_0 \zeta} d\zeta$  можно рассматривать как сосредоточенную э. д. с., которая согласно формуле (28.03) создает в бесконечном проводе ток

$$\frac{c\hat{E}_{0z}}{4 \ln \frac{i}{\gamma ka}} \psi(|z - \zeta|) e^{i\omega_0 \zeta + ik|z - \zeta|} d\zeta. \quad (30.08)$$

Поэтому в соответствии с принципом суперпозиции полный ток, создаваемый в области  $z_1 \leq z \leq \infty$  сторонним полем (30.07), будет равен

$$\begin{aligned} J(z) &= \frac{c\hat{E}_{0z}}{4 \ln \frac{i}{\gamma ka}} \int_{-\infty}^{z_1} \psi(z - \zeta) e^{i\omega_0 \zeta + ik(z - \zeta)} d\zeta = \\ &= \frac{c\hat{E}_{0z}}{4 \ln \frac{i}{\gamma ka}} e^{i\omega_0 z} \int_{z - z_1}^{\infty} \psi(\xi) e^{i(k - \omega_0)\xi} d\xi. \end{aligned} \quad (30.09)$$

Полученный интеграл можно выразить через функции  $\psi(z - z_1)$  и  $\psi_-^0(z - z_1)$ , соответствующие соотношения выведены в § 2 работы [82]. В результате находим

$$\begin{aligned} J(z) &= \frac{c\hat{E}_{0z} e^{i\omega_0 z_1}}{8ik \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} \ln \frac{i}{\gamma ka}} \psi(z - z_1) e^{i(z - z_1)} - \\ &- \frac{c\hat{E}_{0z} e^{i\omega_0 z_1}}{2ik \sin^2 \vartheta_0 \ln \frac{i}{\gamma ka \cos \frac{\vartheta_0}{2}}} \psi_-^0(z - z_1) e^{ik(z - z_1)}. \end{aligned} \quad (30.10)$$

Таким образом, оказывается, что стороннее поле (30.07) возбуждает, помимо волны  $\psi_-^0$ , также и волну  $\psi$ . Для возбуждения "чистой" волны  $\psi_-^0$  нужно, очевидно, приложить дополнительное стороннее поле

$$E_z^e = \mathcal{E}_1 \delta(z - z_1), \quad (30.11)$$

такое, что

$$\frac{c\hat{E}_{0z}e^{i\omega_0 z_1}}{8ik \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} \ln \frac{i}{\gamma ka}} \psi(z - z_1) e^{ik(z - z_1)} + \frac{c\mathcal{E}_1}{4 \ln \frac{i}{\gamma ka}} \psi(z - z_1) e^{ik(z - z_1)} = 0. \quad (30.12)$$

Отсюда

$$\mathcal{E}_1 = - \frac{\hat{E}_{0z} e^{i\omega_0 z_1}}{2ik \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2}}. \quad (30.13)$$

Для того чтобы сумма сторонних полей (30.07) и (30.11) создавала ток (30.06), должно еще выполняться равенство

$$\frac{c\hat{E}_{0z}}{2ik \sin^2 \vartheta_0 \ln \frac{i}{\gamma ka \cos \frac{\vartheta_0}{2}}} = S = \frac{i\omega E_{0z}}{2k^2 \sin^2 \vartheta_0 \ln \frac{2i}{\gamma ka \sin \vartheta_0}}, \quad (30.14)$$

которое определяет величину

$$\hat{E}_{0z} = - E_{0z} \frac{\ln \frac{i}{\gamma ka \cos \frac{\vartheta_0}{2}}}{\ln \frac{2i}{\gamma ka \sin \vartheta_0}}. \quad (30.15)$$

Следовательно, для возбуждения в бесконечном проводе (при  $z > z_1$ ) волны тока (30.06) необходимо приложить стороннее поле

$$E_z^e = E_{0z} \frac{\ln \frac{i}{\gamma ka \cos \frac{\vartheta_0}{2}}}{\ln \frac{2i}{\gamma ka \sin \vartheta_0}} \left[ \frac{e^{i\omega_0 z_1}}{2ik \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2}} \delta(z - z_1) - e^{i\omega_0 z} \varepsilon(z - z_1) \right],$$

$$\varepsilon(z - z_1) = \begin{cases} 1 & \text{при } z < z_1 \\ 0 & \text{при } z > z_1. \end{cases} \quad (30.16)$$

Совершенно аналогично можно показать, что стороннее поле

$$E_z^e = E_{0z} \frac{\ln \frac{i}{\gamma ka \sin \frac{\vartheta_0}{2}}}{\ln \frac{2i}{\gamma ka \sin \vartheta_0}} \left[ \frac{e^{i\omega_0 z_2}}{2ik \cos^2 \frac{\vartheta_0}{2}} \delta(z_2 - z) - e^{i\omega_0 z} \varepsilon(z_2 - z) \right],$$

$$\varepsilon(z_2 - z) = \begin{cases} 1 & \text{при } z > z_2 \\ 0 & \text{при } z < z_2 \end{cases} \quad (30.17)$$

возбуждает в бесконечной однопроводной линии (при  $z < z_2$ ) ток

$$- S e^{i\omega_0 z_2} \cdot \psi_+^0(z_2 - z) e^{ik(z_2 - z)}. \quad (30.18)$$

Изучим теперь дифракцию волны тока (30.06) на полубесконечном проводе  $(-\infty, z_2)$ , для чего воспользуемся леммой Лоренца [4]

$$\int (j_1^e E_2 + j_2^m H_1) dV = 0. \quad (30.19)$$

Здесь  $j_1^e = -i\omega \mathbf{p}_1 \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}')$  есть ток вспомогательного диполя с моментом  $\mathbf{p}_1$ , находящимся в точке  $l$  с координатами  $(R, \vartheta)$ ,  $\mathbf{H}_1$  — его поле на поверхности провода, где заданы сторонние токи  $j_2^m$ ;  $E_2$  — поле, создаваемое этими токами в точке  $l$  (рис. 74).

Сторонний ток  $j_2^m$  определяется известной формулой

$$j_2^m = - \frac{c}{4\pi} [\mathbf{nE}] \quad (30.20)$$

через электрическое поле  $E$  на поверхности проводника. В силу граничного условия

$$E_z + E_z^e = 0 \quad (30.21)$$

имеем

$$j_{2\varphi}^m = - \frac{c}{4\pi} E_z^e. \quad (30.22)$$

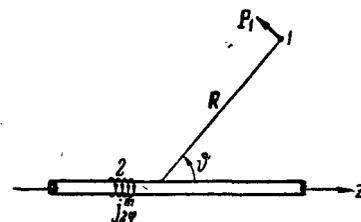


Рис. 74.

Определяя далее момент диполя  $\mathbf{p}_1$  через его поле в свободном пространстве (в точке  $x=y=z=0$ )

$$E'_{0z} = -k^2 p_1 \frac{e^{ikR}}{R} \sin \vartheta \quad (30.23)$$

и переходя от магнитной напряженности  $H_{1\varphi}$  к полному току

$$J = \frac{ca}{2} H_{1\varphi}, \quad (30.24)$$

наводимому диполем в проводе, получим из леммы Лоренца следующее соотношение:

$$E_{2z} = H_{2\varphi} = \frac{k^2 \sin \vartheta}{i\omega E'_{0z}} \cdot \frac{e^{ikR}}{R} \cdot \int_{-\infty}^{z_2} E_z^e J(z) dz. \quad (30.25)$$

Если диполь  $\mathbf{p}_1$  удалить на расстояние  $R \gg z_2 - z_0$ , то излучаемое им поле можно рассматривать на участке  $z_2 - z_0$  полубесконечного провода  $(-\infty, z_2)$  как плоскую волну. Тогда ток, наводимый на этом отрезке провода, будет определяться формулой

$$J(z) = S' [e^{i\omega z} - e^{i\omega z_2} \psi_+(z_2 - z) e^{ik(z_2 - z)}], \quad (30.26)$$

где 
$$S' = \frac{i\omega E'_{0z}}{2k^2 \sin^2 \vartheta \ln \frac{2i}{\gamma ka \sin \vartheta}}, \quad \omega = -k \cos \vartheta. \quad (30.27)$$

Величину  $z_0$  мы возьмем такой, чтобы на расстоянии  $z_2 - z_0$  от конца провода отраженная волна тока была практически равна нулю ( $\psi_+(z_2 - z_0) \approx 0$ ). Подставляя функцию (30.26) в правую часть равенства (30.25) и принимая за величину  $E_z^e$  стороннее поле (30.16), получим

$$\begin{aligned} E_{2z} = H_{2\varphi} &= \frac{1}{2 \sin \vartheta \ln \frac{2i}{\gamma ka \sin \vartheta}} \times \\ &\times \frac{e^{ikR}}{R} \int_{-\infty}^{z_2} E_z^e [e^{i\omega z} - \psi_+(z_2 - z) e^{i\omega z_2 + ik(z_2 - z)}] dz = \\ &= \frac{1}{2 \sin \vartheta \ln \frac{2i}{\gamma ka \sin \vartheta}} \frac{e^{ikR}}{R} \left\{ \mathcal{G}_1 [e^{i\omega z_2} - \psi_+(L) e^{i\omega z_2 + ikL}] + \right. \\ &\left. + \hat{E}_{0z} \frac{e^{i(\omega + \omega_0)z_1}}{i(\omega + \omega_0)} - \hat{E}_{0z} e^{i(k + \omega)z_2} \int_{-\infty}^{z_1} e^{-i(k - \omega_0)z} \psi_+(z_2 - z) dz \right\} \end{aligned} \quad (30.28)$$

Важной особенностью этого соотношения является то, что интегрирование здесь проводится не по всему проводу  $(-\infty, z_2)$ , а лишь по его части  $(-\infty, z_1)$ , где функция  $\psi_+(z_2 - z)$  описывает ток уже с хорошей точностью. Интегралы, входящие сюда, вычисляются так же, как в формуле (30.09). В результате поле, излучаемое полубесконечным проводом  $(-\infty, z_2)$ , будет равно

$$\begin{aligned} E_{2z} = H_{2\varphi} &= \frac{1}{2 \sin \vartheta \ln \frac{2i}{\gamma ka \sin \vartheta}} \frac{e^{ikR}}{R} \times \\ &\times \left\{ \mathcal{G}_1 [e^{i\omega z_1} - \psi_+(L) e^{i\omega z_1 + ikL}] - \frac{\hat{E}_{0z} e^{i(\omega + \omega_0)z_1}}{ik(\cos \vartheta + \cos \vartheta_0)} + \right. \\ &\left. + \frac{\hat{E}_{0z} e^{ikL + i(\omega_0 z_1 + \omega z_2)}}{ik(\cos \vartheta + \cos \vartheta_0)} \left[ \psi_+(L) - \frac{\sin^2 \frac{\vartheta}{2} \ln \frac{i}{\gamma ka \sin \frac{\vartheta}{2}}}{\cos^2 \frac{\vartheta_0}{2} \ln \frac{i}{\gamma ka \cos \frac{\vartheta_0}{2}}} \psi_-(L) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (30.29)$$

Слагаемые в фигурных скобках, имеющие фазовый множитель  $e^{i\omega z_2}$ , соответствуют искомой вторичной волне, расходящейся от конца провода  $z = z_2$ . С помощью формул (30.13) и (30.15) эту волну можно представить в виде

$$E_{\vartheta}^{(2)}(z_2) = H_{\varphi}^{(2)}(z_2) = \frac{\mathcal{G}^{(2)}(z_2)}{2 \sin \vartheta \ln \frac{2i}{\gamma ka \sin \vartheta}} \frac{e^{ikR}}{R} e^{-ikz_2 \cos \vartheta}, \quad (30.30)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{(2)}(z_2) &= \frac{4i E e^{i\omega_0 z_1 + ikL}}{k \sin \vartheta_0 (\cos \vartheta + \cos \vartheta_0) \ln \frac{2i}{\gamma ka \sin \vartheta_0}} \times \\ &\times \left[ \cos^2 \frac{\vartheta_0}{2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \ln \frac{i}{\gamma ka \cos \frac{\vartheta_0}{2}} \psi_+(L) - \right. \\ &\left. - \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \ln \frac{i}{\gamma ka \sin \frac{\vartheta}{2}} \psi_-(L) \right]. \end{aligned} \quad (30.31)$$

Аналогичным путем находим вторичную дифракционную волну, распространяющуюся от конца  $z = z_1$ . Для этого нужно рассмотреть дифракцию первичной волны (30.18) на конце  $z = z_1$  полубесконечного провода ( $z_1 \leq z \leq \infty$ ). Принцип взаимности приводит в этом случае к соотношению

$$E_{2\theta} = H_{2\varphi} = \frac{k^2 \sin \theta}{i\omega E'_{0z}} \frac{e^{ikR}}{R} \int_{z_1}^{\infty} E_z^e J(z) dz, \quad (30.32)$$

которое после подстановки в него функции (30.17) и тока

$$J(z) = \frac{i\omega E'_{0z}}{2k^2 \sin^2 \theta \ln \frac{2i}{\gamma ka \sin \theta}} [e^{i\omega z} - \psi_-(z - z_1) e^{i\omega z_1 + ik(z - z_1)}] \quad (30.33)$$

дает нам поле, излучаемое полубесконечным проводом ( $z_1, \infty$ ). Волна, излучаемая концом провода, является искомой вторичной краевой волной и может быть представлена в виде

$$E_{\theta}^{(2)}(z_1) = H_{\varphi}^{(2)}(z_1) = \frac{\mathcal{G}^{(2)}(z_1)}{2 \sin \theta \ln \frac{2i}{\gamma ka \sin \theta}} \frac{e^{ikR}}{R} e^{-ikz_1 \cos \theta}, \quad (30.34)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{(2)}(z_1) = & - \frac{4iEe^{i\omega_0 z_1 + ikL}}{k \sin \theta_0 (\cos \theta + \cos \theta_0) \ln \frac{2i}{\gamma ka \sin \theta_0}} \times \\ & \times \left[ \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \ln \frac{i}{\gamma ka \sin \frac{\theta_0}{2}} \psi_-(L) - \right. \\ & \left. - \cos^2 \frac{\theta_0}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \ln \frac{i}{\gamma ka \cos \frac{\theta}{2}} \psi_+(L) \right]. \quad (30.35) \end{aligned}$$

Впрочем, это выражение можно написать сразу, заменяя в формулах (30.30) и (30.31)  $z_2$  на  $z_1$ ,  $\theta$  на  $\pi - \theta$  и  $\theta_0$  на  $\pi - \theta_0$ .

### § 31. МНОГОКРАТНАЯ ДИФРАКЦИЯ КРАЕВЫХ ВОЛН

Найденные вторичные волны (30.30) и (30.34) суть волны, расходящиеся от концов полубесконечных проводов ( $-\infty, z_2$ ) и ( $z_1, \infty$ ). Если бесконечную однопроводную линию возбуждать сторонним полем

$$E_z^e = \mathcal{G}_2^{(2)} \delta(z - z_2), \quad (31.01)$$

где

$$\mathcal{G}_2^{(2)} = \mathcal{G}^{(2)}(z_2) \Big|_{\theta=\pi} = E \frac{2i \ln \frac{i}{\gamma ka} \psi_-^{(0)}(L)}{k \sin \theta_0 \ln \frac{2i}{\gamma ka \sin \theta_0}} e^{ikL - ikz_2 \cos \theta_0}, \quad (31.02)$$

то возникает сферическая волна, которая при  $\theta \approx \pi$  совпадает с волной (30.30). При возбуждении бесконечной линии сосредоточенной э. д. с.

$$E_z^e = \mathcal{G}_1^{(2)} \delta(z - z_1), \quad (31.03)$$

где

$$\mathcal{G}_1^{(2)} = \mathcal{G}^{(2)}(z_1) \Big|_{\theta=0} = E \frac{2i \ln \frac{i}{\gamma ka} \psi_+^{(0)}(L)}{k \sin \theta_0 \ln \frac{2i}{\gamma ka \sin \theta_0}} e^{ikL - ikz_1 \cos \theta_0}, \quad (31.04)$$

возникает волна, совпадающая с волной (30.34) при  $\theta \approx 0$ . Нетрудно видеть, что эти сторонние поля действительно возбуждают в бесконечной однопроводной линии волны тока, эквивалентные вторичным волнам тока в пассивном вибраторе (т. е. тем волнам, которые выражаются первым слагаемым в квадратных скобках формулы (28.18)). Поэтому третичные волны можно рассматривать как краевые волны, излучаемые полубесконечными проводами ( $z_1, \infty$ ) и ( $-\infty, z_2$ ) при возбуждении их соответственно сторонними полями (31.01) и (31.03). Из формул (30.25) и (30.32) без труда находим

полное поле, излучаемое при указанном возбуждении проводом  $(z_1, \infty)$ ,

$$E_{\vartheta} = H_{\varphi} = \frac{\mathcal{G}_2^{(2)}}{2 \sin \vartheta \ln \frac{2i}{\gamma ka \sin \vartheta}} \frac{e^{ikR}}{R} [e^{i\omega z_1} - \psi_-(L) e^{i\omega z_1 + ikL}] \quad (31.05)$$

и полное поле, излучаемое проводом  $(-\infty, z_2)$ ,

$$E_{\vartheta} = H_{\varphi} = \frac{\mathcal{G}_1^{(2)}}{2 \sin \vartheta \ln \frac{2i}{\gamma ka \sin \vartheta}} \frac{e^{ikR}}{R} [e^{i\omega z_1} - \psi_+(L) e^{i\omega z_1 + ikL}]. \quad (31.06)$$

В результате для третичных волн, расходящихся от концов  $z_1$  и  $z_2$ , мы получаем следующие выражения:

$$E_{\vartheta}^{(3)}(z_1) = H_{\varphi}^{(3)}(z_1) = \frac{\mathcal{G}^{(3)}(z_1)}{2 \sin \vartheta \ln \frac{2i}{\gamma ka \sin \vartheta}} \frac{e^{ikR}}{R} e^{-ikz_1 \cos \vartheta}, \quad (31.07)$$

$$E_{\vartheta}^{(3)}(z_2) = H_{\varphi}^{(3)}(z_2) = \frac{\mathcal{G}^{(3)}(z_2)}{2 \sin \vartheta \ln \frac{2i}{\gamma ka \sin \vartheta}} \frac{e^{ikR}}{R} e^{-ikz_2 \cos \vartheta}, \quad (31.08)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{G}^{(3)}(z_1) &= -\mathcal{G}_2^{(2)} \cdot \psi_-(L) e^{ikL}, \\ \mathcal{G}^{(3)}(z_2) &= -\mathcal{G}_1^{(2)} \cdot \psi_+(L) e^{ikL}. \end{aligned} \right\} \quad (31.09)$$

В направлениях к противоположному концу провода эти волны эквивалентны излучению бесконечной однопроводной линии, возбуждаемой сторонними полями

$$E_z = \mathcal{G}_1^{(3)} \cdot \delta(z - z_1), \quad \mathcal{G}_1^{(3)} = \mathcal{G}^{(3)}(z_1) \Big|_{\vartheta=0}, \quad (31.10)$$

$$E_z = \mathcal{G}_2^{(3)} \cdot \delta(z_2 - z), \quad \mathcal{G}_2^{(3)} = \mathcal{G}^{(3)}(z_2) \Big|_{\vartheta=\pi}. \quad (31.11)$$

Следовательно, четвертичные волны опять можно рассматривать как краевые волны, излучаемые полубеско-

212

нечными проводами  $(-\infty, z_2)$  и  $(z_1, \infty)$ , при возбуждении их сторонними полями (31.10) и (31.11). С помощью принципа взаимности легко получаем

$$\left. \begin{aligned} E_{\vartheta}^{(4)}(z_1) = H_{\varphi}^{(4)}(z_1) &= \frac{\mathcal{G}^{(4)}(z_1)}{2 \sin \vartheta \ln \frac{2i}{\gamma ka \sin \vartheta}} \frac{e^{ikR}}{R} e^{-ikz_1 \cos \vartheta}, \\ E_{\vartheta}^{(4)}(z_2) = H_{\varphi}^{(4)}(z_2) &= \frac{\mathcal{G}^{(4)}(z_2)}{2 \sin \vartheta \ln \frac{2i}{\gamma ka \sin \vartheta}} \frac{e^{ikR}}{R} e^{-ikz_2 \cos \vartheta}, \end{aligned} \right\} \quad (31.12)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{G}^{(4)}(z_1) &= -\mathcal{G}_2^{(3)} \cdot \psi_-(L) e^{ikL}, \\ \mathcal{G}^{(4)}(z_2) &= -\mathcal{G}_1^{(3)} \cdot \psi_+(L) e^{ikL}, \end{aligned} \right\} \quad (31.13)$$

Совершенно аналогично находятся краевые волны  $n$ -го порядка

$$\left. \begin{aligned} E_{\vartheta}^{(n)}(z_1) = H_{\varphi}^{(n)}(z_1) &= \frac{\mathcal{G}^{(n)}(z_1)}{2 \sin \vartheta \ln \frac{2i}{\gamma ka \sin \vartheta}} \frac{e^{ikR}}{R} e^{-ikz_1 \cos \vartheta}, \\ E_{\vartheta}^{(n)}(z_2) = H_{\varphi}^{(n)}(z_2) &= \frac{\mathcal{G}^{(n)}(z_2)}{2 \sin \vartheta \ln \frac{2i}{\gamma ka \sin \vartheta}} \frac{e^{ikR}}{R} e^{-ikz_2 \cos \vartheta}. \end{aligned} \right\} \quad (31.14)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{G}^{(n)}(z_1) &= -\mathcal{G}_2^{(n-1)} \cdot \psi_-(L) e^{ikL}, \\ \mathcal{G}^{(n)}(z_2) &= -\mathcal{G}_1^{(n-1)} \cdot \psi_+(L) e^{ikL} \end{aligned} \right\} \quad (31.15)$$

и

$$\mathcal{G}_1^{(n)} = \mathcal{G}^{(n)}(z_1) \Big|_{\vartheta=0}, \quad \mathcal{G}_2^{(n)} = \mathcal{G}^{(n)}(z_2) \Big|_{\vartheta=\pi}. \quad (31.16)$$

Таким образом, поле, возникающее при многократной дифракции (начиная со вторичной), может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{\infty} [E_{\vartheta}^{(n)}(z_1) + E_{\vartheta}^{(n)}(z_2)] = \\ & = \frac{1}{2 \sin \vartheta \ln \frac{2i}{\gamma k a \sin \vartheta}} \frac{e^{ikR}}{R} \left[ \sum_{n=2}^{\infty} \mathcal{E}^{(n)}(z_1) e^{-ikz_1 \cos \vartheta} + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \mathcal{E}^{(n)}(z_2) e^{-ikz_2 \cos \vartheta} \right], \quad (31.17) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{\infty} \mathcal{E}^{(n)}(z_1) = \\ & = \mathcal{E}^{(2)}(z_1) + [\mathcal{E}_1^{(2)} \cdot \psi(L) e^{ikL} - \mathcal{E}_2^{(2)}] \frac{\psi_-(L)}{D} e^{ikL}, \quad (31.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{\infty} \mathcal{E}^{(n)}(z_2) = \\ & = \mathcal{E}^{(2)}(z_2) + [\mathcal{E}_2^{(2)} \cdot \psi(L) e^{ikL} - \mathcal{E}_1^{(2)}] \frac{\psi_+(L)}{D} e^{ikL}, \quad (31.19) \end{aligned}$$

а функции  $\mathcal{E}^{(2)}(z_{1,2})$  и  $\mathcal{E}_{1,2}^{(2)}$  определяются формулами (30.31), (30.35), (31.02) и (31.04). Мы не будем выписывать здесь довольно громоздкое окончательное выражение для этого поля и перейдем к вычислению полного поля, рассеянного вибратором.

### § 32. ПОЛНОЕ РАССЕЯННОЕ ПОЛЕ

Прежде чем приступить к выводу выражения для характеристики рассеяния, сделаем следующее замечание. В формулу (30.04) входят функции  $\Phi$ , которые удовлетворяют соотношениями (30.05) и могут быть найдены путем факторизации. Однако наше рассмотрение последовательных волн, возникающих при дифракции на концах провода, было приближенным, поэтому нет смысла пользоваться точным выражением (30.04) для первич-

ного поля. Мы используем приближенные выражения для функции  $\Phi$

$$\begin{aligned} \Phi(-k \cos \vartheta, -k \cos \vartheta_0) &= \ln \frac{i}{\gamma k a \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\vartheta_0}{2}}, \\ \Phi(k \cos \vartheta, k \cos \vartheta_0) &= \ln \frac{i}{\gamma k a \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta_0}{2}}, \end{aligned} \quad (32.01)$$

полученные с помощью вариационного метода и обладающие достаточной для нас точностью (см. [83]). Точнее говоря, мы воспользуемся приближенными формулами (32.01) в сочетании со строгим выражением (30.05) и положим

$$\begin{aligned} \Phi(-k \cos \vartheta, -k \cos \vartheta_0) &= \frac{1}{\ln \frac{i}{\gamma k a \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta_0}{2}}} = \frac{\ln \frac{i}{\gamma k a \sin \vartheta} \ln \frac{2i}{\gamma k a \sin \vartheta_0}}{2i}, \\ \Phi(k \cos \vartheta, k \cos \vartheta_0) &= \frac{1}{\ln \frac{i}{\gamma k a \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\vartheta_0}{2}}} = \frac{\ln \frac{i}{\gamma k a \sin \vartheta} \ln \frac{2i}{\gamma k a \sin \vartheta_0}}{2i}. \end{aligned} \quad (32.02)$$

Тогда первичное поле будет равно

$$\begin{aligned} E_{\vartheta}^{(1)} = H_{\varphi}^{(1)} &= - \frac{iE}{2(\cos \vartheta + \cos \vartheta_0) \ln \frac{2i}{\gamma k a \sin \vartheta} \ln \frac{2i}{\gamma k a \sin \vartheta_0}} \cdot \frac{e^{ikR}}{kR} \times \\ & \times \left[ \operatorname{ctg} \frac{\vartheta_0}{2} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} \ln \frac{i}{\gamma k a \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta_0}{2}} e^{-ikz_1 (\cos \vartheta + \cos \vartheta_0)} - \right. \\ & \quad \left. - \operatorname{tg} \frac{\vartheta_0}{2} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \ln \frac{i}{\gamma k a \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\vartheta_0}{2}} e^{-ikz_2 (\cos \vartheta + \cos \vartheta_0)} \right]. \end{aligned} \quad (32.03)$$

Суммируя теперь выражения (31.17) и (32.03), находим полное поле, рассеянное пассивным вибратором, в виде

$$E_{\vartheta} = H_{\varphi} = -E \cdot \frac{e^{ikR}}{kR} \cdot F(\vartheta, \vartheta_0), \quad (32.04)$$

где

$$\begin{aligned}
 F(\vartheta, \vartheta_0) = & \frac{2i}{(\cos \vartheta + \cos \vartheta_0) \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \ln \frac{2i}{\gamma ka \sin \vartheta} \ln \frac{2i}{\gamma ka \sin \vartheta_0}} \times \\
 & \times \left\{ \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cos^2 \frac{\vartheta_0}{2} \ln \frac{i}{\gamma ka \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta_0}{2}} e^{-ikz_1(\cos \vartheta + \cos \vartheta_0)} - \right. \\
 & - \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} \ln \frac{i}{\gamma ka \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\vartheta_0}{2}} e^{-ikz_2(\cos \vartheta + \cos \vartheta_0)} + \\
 & + e^{ikL} \left[ \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} \ln \frac{i}{\gamma ka \sin \frac{\vartheta_0}{2}} \psi_- - \right. \\
 & \left. - \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cos^2 \frac{\vartheta_0}{2} \ln \frac{i}{\gamma ka \cos \frac{\vartheta}{2}} \psi_+ \right] e^{-ik(z_2 \cos \vartheta_0 + z_1 \cos \vartheta_0)} + \\
 & + e^{ikL} \left[ \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} \ln \frac{i}{\gamma ka \sin \frac{\vartheta}{2}} \psi_-^0 - \right. \\
 & \left. - \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cos^2 \frac{\vartheta_0}{2} \ln \frac{i}{\gamma ka \cos \frac{\vartheta_0}{2}} \psi_+ \right] e^{-ik(z_2 \cos \vartheta + z_1 \cos \vartheta_0)} - \\
 & - \frac{(\cos \vartheta + \cos \vartheta_0) \ln \frac{i}{\gamma ka}}{2D} e^{2ikL} [\psi_+^0 \psi_- e^{ikL - ikz_2 \cos \vartheta_0} - \\
 & - \psi_-^0 e^{-ikz_1 \cos \vartheta_0}] \psi_+ e^{-ikz_1 \cos \vartheta} - \\
 & - \frac{(\cos \vartheta + \cos \vartheta_0) \ln \frac{i}{\gamma ka}}{2D} e^{2ikL} [\psi_-^0 \psi_+ e^{ikL - ikz_1 \cos \vartheta_0} - \\
 & - \psi_+^0 e^{-ikz_2 \cos \vartheta_0}] \psi_- e^{-ikz_2 \cos \vartheta} \left. \right\}, \quad (32.05)
 \end{aligned}$$

причем все функции  $\psi_{\pm}$  и  $\psi_{\pm}^0$  имеют аргумент  $L$ . Полученное выражение, несмотря на свою сложность, имеет четкий физический смысл. Действительно, первое слагаемое в фигурных скобках соответствует первичной краевой волне, излучаемой концом провода  $z = z_1$ , второе — первичной волне, излучаемой концом провода  $z = z_2$ . Слагаемые, заключенные в первые квадратные скобки, относятся ко вторичной волне, уходящей от кон-

ца  $z = z_1$ , а слагаемые во вторых квадратных скобках — ко вторичной волне, уходящей от конца  $z = z_2$ . Остальные члены описывают сумму всех последующих волн, возникающих при многократной дифракции, и имеют резонансный характер. Резонанс наступает при  $L = z_2 - z_1 \approx n \frac{\lambda}{2}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), когда  $D \approx 0$ .

Другая важная особенность характеристики рассеяния заключается в том, что она удовлетворяет принципу взаимности, т. е. не изменяет своей величины при взаимной перестановке  $\vartheta$  и  $\vartheta_0$ . Можно также показать, что вибратор не излучает в направлениях вдоль своей оси и не рассеивает электромагнитные волны при скользящем облучении, т. е.

$$F(0, \vartheta_0) = F(\pi, \vartheta_0) = F(\vartheta, 0) = F(\vartheta, \pi) = 0. \quad (32.06)$$

Пользуясь далее для функций  $\psi$  и  $\psi_{\pm}$  представлением (28.25), получим следующее выражение для характеристики рассеяния (32.05) в направлении зеркально отраженного луча ( $\vartheta = \pi - \vartheta_0$ ):

$$\begin{aligned}
 F(\pi - \vartheta_0, \vartheta_0) = & - \frac{kL}{2i \ln \frac{2i}{\gamma ka \sin \vartheta_0}} + \\
 & + kL \frac{(\psi_+^0)^2 E \left( 2kL \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} \right) + (\psi_-^0)^2 E \left( 2kL \cos^2 \frac{\vartheta_0}{2} \right)}{4 \left( \ln \frac{2i}{\gamma ka \sin \vartheta_0} \right)^2} + \\
 & + \frac{i}{\left( \sin \vartheta_0 \ln \frac{2i}{\gamma ka \sin \vartheta_0} \right)^2} \left\{ \ln \frac{2i}{\gamma ka \sin \vartheta_0} - \frac{1}{2} + \right. \\
 & + \left( \frac{1}{2} \psi_+^0 \cos^2 \frac{\vartheta_0}{2} - \ln \frac{i}{\gamma ka \sin \frac{\vartheta_0}{2}} \right) \psi_+^0 e^{ikL(1 - \cos \vartheta_0)} + \\
 & + \left( \frac{1}{2} \psi_-^0 \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} - \ln \frac{i}{\gamma ka \cos \frac{\vartheta_0}{2}} \right) \psi_-^0 e^{ikL(1 + \cos \vartheta_0)} - \\
 & - \frac{\ln \frac{i}{\gamma ka}}{D} e^{2ikL} [\psi_+^0 \psi_- e^{ikL(1 - \cos \vartheta_0)} - \psi_-^0] \psi_+^0 - \\
 & \left. - \frac{\ln \frac{i}{\gamma ka}}{D} e^{2ikL} [\psi_-^0 \psi_+ e^{ikL(1 + \cos \vartheta_0)} - \psi_+^0] \psi_-^0 \right\}. \quad (32.07)
 \end{aligned}$$

При скользющем облучении вибратора, когда  $\vartheta_0 = 0$  или  $\vartheta_0 = \pi$ , отсюда следует, что  $F(\pi, 0) = F(0, \pi) = 0$ .

Полагая теперь в формуле (32.07)  $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$ , получим соотношение

$$F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{kL}{2 \ln \frac{2i}{\gamma ka}} + kL \frac{\bar{\psi}^2 \cdot E(kL)}{2 \left(\ln \frac{2i}{\gamma ka}\right)^2} +$$

$$+ \frac{i}{\left(\ln \frac{2i}{\gamma ka}\right)^2} \left[ \ln \frac{2i}{\gamma ka} - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \bar{\psi} - 2 \ln \frac{\sqrt{2}i}{\gamma ka}\right) \bar{\psi} e^{ikL} + \right.$$

$$\left. + 2 \bar{\psi}^2 \frac{\ln \frac{i}{\gamma ka}}{1 + \psi e^{ikL} e^{2ikL}} \right], \quad (32.08)$$

$$\bar{\psi} = \psi_{\pm}^0 \Big|_{\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}},$$

которое характеризует величину отраженного поля при нормальном облучении.

Напишем также выражение для функции  $F(\vartheta, \vartheta_0)$ , соответствующее радиолокационному случаю, когда направление наблюдения и облучения совпадают ( $\vartheta = \vartheta_0$ )

$$F(\vartheta, \vartheta) =$$

$$= \frac{i}{\left(\sin \vartheta \ln \frac{2i}{\gamma ka \sin \vartheta}\right)^2 \cos \vartheta} \left\{ \cos^4 \frac{\vartheta}{2} \ln \frac{i}{\gamma ka \cos^2 \frac{\vartheta}{2}} e^{-2ikz_2 \cos \vartheta} - \right.$$

$$\left. - \sin^4 \frac{\vartheta}{2} \ln \frac{i}{\gamma ka \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} e^{-2ikz_2 \cos \vartheta} + \right.$$

$$\left. + 2 \left[ \sin^4 \frac{\vartheta}{2} \ln \frac{i}{\gamma ka \sin \frac{\vartheta}{2}} \psi_-(L) - \right. \right.$$

$$\left. - \cos^4 \frac{\vartheta}{2} \ln \frac{i}{\gamma ka \cos \frac{\vartheta}{2}} \psi_+(L) \right] e^{-ik(z_1+z_2) \cos \vartheta + ikL} -$$

$$- 2 \frac{\cos \vartheta}{D} \ln \frac{i}{\gamma ka} \psi_+(L) \psi_+(L) \psi_-(L) e^{-ik(z_1+z_2) \cos \vartheta + 3ikL} +$$

$$+ \frac{\cos \vartheta}{D} \ln \frac{i}{\gamma ka} \cdot [\psi_-^2(L) e^{-2ikz_2 \cos \vartheta} +$$

$$+ \psi_+^2(L) e^{-2ikz_2 \cos \vartheta}] e^{2ikL} \Big\}. \quad (32.09)$$

Можно показать, что при  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  формула (32.09) приводит к выражению (32.08).

Найденная выше характеристика рассеяния (32.05) была получена суммированием всех волн, образующихся при многократной дифракции. Такой путь очень нагляден, но несколько длинен. К этому же результату можно прийти скорее, если учесть, что процесс дифракции краевых волн на концах пассивного вибратора происходит, начиная с третичной дифракции, так же, как на концах передающего вибратора. Поэтому диаграмму рассеяния пассивного вибратора можно сразу искать в виде

$$F(\vartheta, \vartheta_0) = \frac{2i}{\sin \vartheta \sin \vartheta_0 \ln \frac{2i}{\gamma ka \sin \vartheta}} \cdot \frac{2i}{\ln \frac{2i}{\gamma ka \sin \vartheta_0}} \cdot f(\vartheta, \vartheta_0), \quad (32.10)$$

где

$$f(\vartheta, \vartheta_0) = \frac{1}{\cos \vartheta + \cos \vartheta_0} \times$$

$$\times \left\{ \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cos^2 \frac{\vartheta_0}{2} \ln \frac{i}{\gamma ka \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta_0}{2}} e^{-ikz_2(\cos \vartheta + \cos \vartheta_0)} - \right.$$

$$\left. - \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} \ln \frac{i}{\gamma ka \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\vartheta_0}{2}} e^{-ikz_2(\cos \vartheta + \cos \vartheta_0)} + \right.$$

$$\left. + e^{ikL} \left[ \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} \ln \frac{i}{\gamma ka \sin \frac{\vartheta_0}{2}} \psi_-(L) - \right. \right.$$

$$\left. - \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cos^2 \frac{\vartheta_0}{2} \ln \frac{i}{\gamma ka \cos \frac{\vartheta_0}{2}} \psi_+(L) \right] e^{-ik(z_2 \cos \vartheta_0 + z_1 \cos \vartheta)} +$$

$$+ e^{ikL} \cdot \left[ \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} \ln \frac{i}{\gamma ka \sin \frac{\vartheta}{2}} \psi_-(L) - \right.$$

$$\left. - \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cos^2 \frac{\vartheta_0}{2} \ln \frac{i}{\gamma ka \cos \frac{\vartheta_0}{2}} \psi_+(L) \right] e^{-ik(z_2 \cos \vartheta + z_1 \cos \vartheta_0)} \Big\} +$$

$$+ C_1 \psi_-(L) e^{-ikz_1 \cos \vartheta} + C_2 \psi_+(L) e^{-ikz_2 \cos \vartheta}. \quad (32.11)$$

Два последних члена в формуле (32.11) представляют собой сумму всех краевых волн, начиная с третичных, распространяющихся соответственно от концов провода  $z=z_1$  и  $z=z_2$ . Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются из условия

$$f(0, \vartheta_0) = f(\pi, \vartheta_0) = 0, \quad (32.12)$$

которое приводит к системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} C_1 \psi(L) e^{ikL} + C_2 &= \frac{1}{2} \ln \frac{i}{\gamma ka} \psi_+^0(L) e^{2ikL - ikz_1 \cos \vartheta_0}, \\ C_1 + C_2 \psi(L) e^{ikL} &= \frac{1}{2} \ln \frac{i}{\gamma ka} \psi_-^0(L) e^{2ikL - ikz_2 \cos \vartheta_0}, \end{aligned} \right\} \quad (32.13)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -\frac{1}{2D} e^{2ikL} \cdot \ln \frac{i}{\gamma ka} \cdot [\psi_+^0 \psi e^{ikL - ikz_1 \cos \vartheta_0} - \\ &\quad - \psi_-^0 e^{-ikz_1 \cos \vartheta_0}], \\ C_2 &= -\frac{1}{2D} e^{2ikL} \cdot \ln \frac{i}{\gamma ka} \cdot [\psi_-^0 \psi e^{ikL - ikz_2 \cos \vartheta_0} - \\ &\quad - \psi_+^0 e^{-ikz_2 \cos \vartheta_0}]. \end{aligned} \right\} \quad (32.14)$$

### § 33. ВИБРАТОР, КОРОТКИЙ ПО СРАВНЕНИЮ С ДЛИНОЙ ВОЛНЫ (ПАССИВНЫЙ ДИПОЛЬ)

Изложенная в этой главе теория рассеяния плоской волны на тонком цилиндрическом вибраторе основана на ряде физических соображений. Сильной стороной этой теории является то обстоятельство, что ее точность увеличивается с длиной вибратора, поскольку волны тока, дифракцию которых мы рассматривали, выражены тем более четко, чем длиннее вибратор. Однако можно показать, что и для коротких вибраторов, длина которых мала по сравнению с длиной волны, введенные нами формулы обладают хорошей точностью.

Ясно, что вибратор, короткий по сравнению с длиной волны, действует как диполь, создавая рассеянное поле

$$E_\vartheta = H_\varphi = -k^3 p_z \frac{e^{ikR}}{kR} \sin \vartheta, \quad (33.01)$$

где дипольный момент  $p_z$  может быть вычислен путем решения электростатической задачи и зависит от разме-

ров и формы вибратора. Согласно работе [92] дипольный момент цилиндра в однородном электростатическом поле  $E_z$  равен

$$p_z = D(l) \left(\frac{L}{2}\right)^3 \cdot E_z, \quad (33.02)$$

где  $D(l)$  есть безразмерная функция  $l = \frac{L}{2a}$ , изображенная на рис. 75 сплошной кривой. При  $l \gg 1$  функцию  $D(l)$  можно вычислять с помощью асимптотического разложения

$$D(l) = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{\Omega_2} + \frac{0,977}{\Omega_2^3} + \dots \right), \quad \Omega_2 = 2 \left( \ln 4l - \frac{7}{3} \right). \quad (33.03)$$

Если в этом разложении ограничиться первым членом, то

$$D(l) = \frac{1}{3 \left( \ln^2 4l - \frac{7}{3} \right)}. \quad (33.04)$$

Результаты численных расчетов по формуле (33.04) изображены на рис. 75 штриховой кривой: мы видим, что последняя формула дает хорошую точность уже при  $l \geq 9$ .

Таким образом, дипольный момент вибратора, короткого по сравнению с длиной волны, равен

$$p_z = E \frac{L^3}{24} \frac{\sin \vartheta_0}{\ln \frac{2L}{a} - \frac{7}{3}} \left\{ 1 + O \left[ \left( \ln \frac{L}{a} \right)^{-2} \right] \right\}, \quad (33.05)$$

а его характеристика рассеяния должна иметь вид

$$F(\vartheta, \vartheta_0) = \frac{k^3 L^3}{24} \frac{\sin \vartheta \sin \vartheta_0}{\ln \frac{2L}{a} - \frac{7}{3}} \left\{ 1 + O \left[ \left( \ln \frac{L}{a} \right)^{-2} \right] \right\}. \quad (33.06)$$

В данном параграфе мы найдем первые два члена разложения характеристики рассеяния вибратора  $F$  по обратным степеням большого параметра  $\ln \frac{L}{a}$  (при  $\lambda \rightarrow \infty$ ) и сравним их с выражением (33.06). При этом мы ограни-

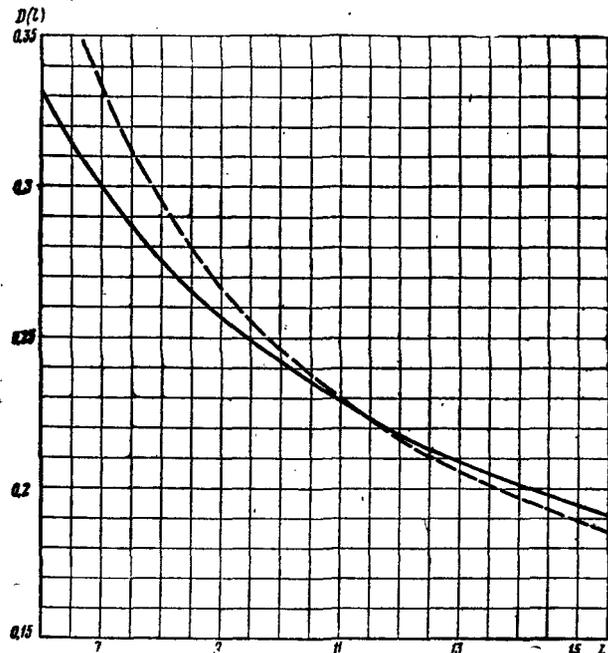


Рис. 75. График функции  $D(l)$ , определяющей дипольный момент цилиндра.

чимся случаю  $\vartheta = \vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$ , когда функция  $F$  описывается более простой формулой (32.08).

При малых значениях аргумента  $z$  функции  $\psi(z)$  и  $\bar{\psi}(z) = \psi_{+\vartheta=\frac{\pi}{2}} = \psi_{-\vartheta=\frac{\pi}{2}}$  (см. формулы (28.21)) могут быть представлены в виде

$$\left. \begin{aligned} \psi(z) &= 1 - \frac{g(z) - g(0)}{2g(0)} + O\left(\frac{1}{g^2(0)}\right), \\ \bar{\psi}(z) &= 1 - \frac{\bar{g}(z) - \bar{g}(0)}{2\bar{g}(0)} + O\left(\frac{1}{\bar{g}^2(0)}\right). \end{aligned} \right\} \quad (33.07)$$

Входящие сюда функции  $g$  и  $\bar{g}$  определяются формулами:

$$g(z) - g(0) = \ln \frac{2\gamma kz}{i} + e^{-ikz} \int_z^{\infty} \frac{e^{2i k \sigma}}{\sigma} d\sigma, \quad g(0) = \ln \frac{i}{\gamma ka} \quad (33.08)$$

и

$$\bar{g}(z) - \bar{g}(0) = \ln \frac{\gamma kz}{i} + e^{-ikz} \int_z^{\infty} \frac{e^{i k \sigma}}{\sigma} d\sigma, \quad \bar{g}(0) = \ln \frac{2i}{\gamma ka}. \quad (33.09)$$

Заметим, что выражения (33.07) полностью совпадают с соответствующими членами асимптотического разложения для функций  $\psi$  и  $\bar{\psi}$ , которое может быть получено из исходных интегральных уравнений, определяющих эти функции (см., например, [81], § 4).

Ограничиваясь в разложении для функций  $\psi(z)$  и  $\bar{\psi}(z)$  членами порядка  $(kz)^3$ , имеем

$$\begin{aligned} \psi(z) &= 1 - \frac{1}{\ln \frac{i}{\gamma ka}} \left[ ikz \left( \ln \frac{2\gamma kz}{i} - 1 \right) + \right. \\ &\left. + k^2 z^2 \left( \ln \frac{2\gamma kz}{i} - \frac{3}{2} \right) - i \frac{2}{3} k^3 z^3 \left( \ln \frac{2\gamma kz}{i} - \frac{11}{6} \right) \right] \end{aligned} \quad (33.10)$$

и

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(z) &= 1 - \frac{1}{2 \ln \frac{i}{\gamma ka}} \left[ ikz \left( \ln \frac{\gamma kz}{i} - 1 \right) + \right. \\ &\left. + \frac{k^2 z^2}{2} \left( \ln \frac{\gamma kz}{i} - \frac{3}{2} \right) - i \frac{k^3 z^3}{6} \left( \ln \frac{\gamma kz}{i} - \frac{11}{6} \right) \right]. \end{aligned} \quad (33.11)$$

В выражениях (33.10) и (33.11) опущены, кроме того, члены порядка  $\left( \ln \frac{i}{\gamma ka} \right)^{-2}$ . Если теперь мы будем подставлять эти выражения в формулу (32.08), то в ней следует опустить члены порядка  $\left( \ln \frac{i}{\gamma ka} \right)^{-3}$ . Поэтому функцию

$F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{i}{\left( \ln \frac{2i}{\gamma ka} \right)^2} \left\{ \frac{ikL}{2} \left[ \ln \frac{2i}{\gamma ka} - E(kL) \right] + \right. \\ &\left. + \ln \frac{2i}{\gamma ka} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{ikL} - 2\bar{\psi}(L) \ln \frac{\sqrt{2i}}{\gamma ka} e^{ikL} + \right. \\ &\left. + \frac{2 \ln \frac{i}{\gamma ka}}{1 + \psi(L) e^{ikL}} \bar{\psi}^2(L) e^{2ikL} \right\}. \end{aligned} \quad (33.12)$$

Принимая далее во внимание формулы (33.10) и (33.11), находим

$$\begin{aligned} & \frac{ikL}{2} \left[ \ln \frac{2i}{\gamma ka} - E(kL) \right] = \\ & = \frac{ikL}{2} \left( \ln \frac{2i}{\gamma ka} - \ln \frac{\gamma kL}{i} - ikL + \frac{k^2 L^2}{4} \right), \end{aligned} \quad (33.13)$$

$$\begin{aligned} & \ln \frac{2i}{\gamma ka} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{ikL} = \\ & = \ln \frac{2i}{\gamma ka} + \frac{ikL}{2} - \frac{k^2 L^2}{4} - i \frac{k^3 L^3}{12}, \end{aligned} \quad (33.14)$$

$$\begin{aligned} 2\bar{\psi}(L) \ln \frac{\sqrt{2i}}{\gamma ka} e^{ikL} &= 2 \left( 1 + ikL - \frac{k^2 L^2}{2} - i \frac{k^3 L^3}{6} \right) \ln \frac{\sqrt{2i}}{\gamma ka} - \\ & - ikL \left( \ln \frac{\gamma kL}{i} - 1 \right) + k^2 L^2 \left( \frac{1}{2} \ln \frac{\gamma kL}{i} - \frac{1}{4} \right) + \\ & + ik^3 L^3 \left( \frac{1}{6} \ln \frac{\gamma kL}{i} - \frac{1}{18} \right), \end{aligned} \quad (33.15)$$

и, наконец,

$$\begin{aligned} & \frac{2 \ln \frac{i}{\gamma ka}}{1 + \psi(L) e^{ikL}} \bar{\psi}^2(L) e^{2ikL} = \\ & = \left( 1 + i \frac{3}{2} kL - k^2 L^2 - i \frac{9}{24} k^3 L^3 \right) \ln \frac{i}{\gamma ka} - \\ & - \frac{ikL}{2} \ln \frac{\gamma kL}{i} + \frac{ikL}{2} (1 + \ln 2) + \frac{k^2 L^2}{2} \ln \frac{\gamma kL}{i} - \frac{k^2 L^2}{2} (1 + \ln 2) + \\ & + i \frac{5}{24} k^3 L^3 \ln \frac{\gamma kL}{i} - ik^3 L^3 \left( \frac{14}{72} + \frac{5 \ln 2}{24} \right). \end{aligned} \quad (33.16)$$

С помощью этих соотношений нетрудно показать, что

$$F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{k^3 L^3}{24} \left\{ \frac{1}{\ln \frac{L}{a}} + \frac{\frac{7}{3} - \ln 2}{\left(\ln \frac{L}{a}\right)^2} + O\left[\left(\ln \frac{L}{a}\right)^{-3}\right] \right\}. \quad (33.17)$$

Найденная формула может быть переписана в виде

$$F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{k^3 L^3}{24 \left(\ln \frac{2L}{a} - \frac{7}{3}\right)} \left\{ 1 + O\left[\left(\ln \frac{L}{a}\right)^{-2}\right] \right\}. \quad (33.18)$$

Она полностью согласуется с формулой (33.06), следующей из [92].

Полученный результат подтверждает правильность вычисленной нами характеристики рассеяния (32.05) и показывает, что она применима для вибраторов любой длины.

#### § 34. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Функция  $F(\vartheta, \vartheta_0)$  позволяет вычислить интегральный поперечник рассеяния  $S$  и эффективную поверхность рассеяния  $\sigma$  пассивного вибратора. Интегральный поперечник рассеяния определяется соотношением

$$S = \frac{P}{p}, \quad (34.01)$$

где

$$p = \frac{c}{8\pi^2} E_0^2 \quad (34.02)$$

есть усредненная за период колебаний плотность потока энергии в падающей волне, а

$$P = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \int_{\mathbf{n}} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*] dS = \frac{1}{2} E \sin \vartheta_0 \operatorname{Re} \int_{z_1}^{z_2} J(z) e^{ikz \cos \vartheta_0} dz \quad (34.03)$$

— среднее за период значение энергии, рассеиваемой вибратором в окружающее пространство. Так как рассеянное поле в дальней зоне можно представить в направлении  $\vartheta = \pi - \vartheta_0$  формулами

$$E_{\vartheta} = H_{\varphi} = -\frac{ik}{c} \sin \vartheta_0 \frac{e^{ikR}}{R} \int_{z_1}^{z_2} J(z) e^{ikz \cos \vartheta_0} dz \quad (34.04)$$

и

$$E_{\vartheta} = H_{\varphi} = -E \frac{e^{ikR}}{kR} \cdot F(\pi - \vartheta_0, \vartheta_0), \quad (34.05)$$

то, определив отсюда интеграл

$$\int_{z_1}^{z_2} J(z) e^{ikz \cos \vartheta_0} dz = \frac{cE}{ik^2 \sin \vartheta_0} F(\pi - \vartheta_0, \vartheta_0) \quad (34.06)$$

получим

$$S = \frac{\lambda^2}{\pi} \cos^2 \alpha \cdot \text{Im} F(\pi - \vartheta_0, \vartheta_0). \quad (34.07)$$

Расчеты величины  $\frac{S}{L^2}$  (при  $\alpha = 0$ ,  $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$ ), проведенные нами для вибраторов с параметром  $\chi = \frac{1}{2 \ln ka}$ , принимающим значения  $\chi = -0,05$  и  $\chi = -0,1$ , находятся в согласии с результатами Леонтовича и Левина [85]. При  $\chi = -0,1$  наша кривая (пунктирная линия на рис. 76) лишь слегка смещена в сторону более длинных волн и дает несколько более высокие резонансные пики.

Эффективная поверхность рассеяния  $\sigma$  по определению равна \*

$$\sigma(\vartheta, \vartheta_0) = \frac{P_r \cdot 4\pi R^2}{p}, \quad (34.08)$$

где  $p$  есть уже известная величина (34.02), а

$$P_r = \frac{c}{8\pi} |E_\vartheta|^2 = \frac{c}{8\pi} \frac{|F(\vartheta, \vartheta_0)|^2}{k^2 R^2} E^2 \quad (34.09)$$

представляет среднее значение плотности потока энергии, рассеиваемой вибратором в направлении  $\vartheta$ . Следовательно)

$$\sigma(\vartheta, \vartheta_0) = \frac{\lambda^2}{\pi} \cos^2 \alpha \cdot |F(\vartheta, \vartheta_0)|^2. \quad (34.10)$$

Если приемная антенна работает на той же поляризации, что и передающая, то соответствующее значение эффективной поверхности будет равно

$$\sigma_\alpha(\vartheta, \vartheta_0) = \frac{\lambda^2}{\pi} \cos^4 \alpha \cdot |F(\vartheta, \vartheta_0)|^2 \quad (34.11)$$

В радиолокационном случае, когда приемная и передающая антенны совмещены, а поляризация произвольна.

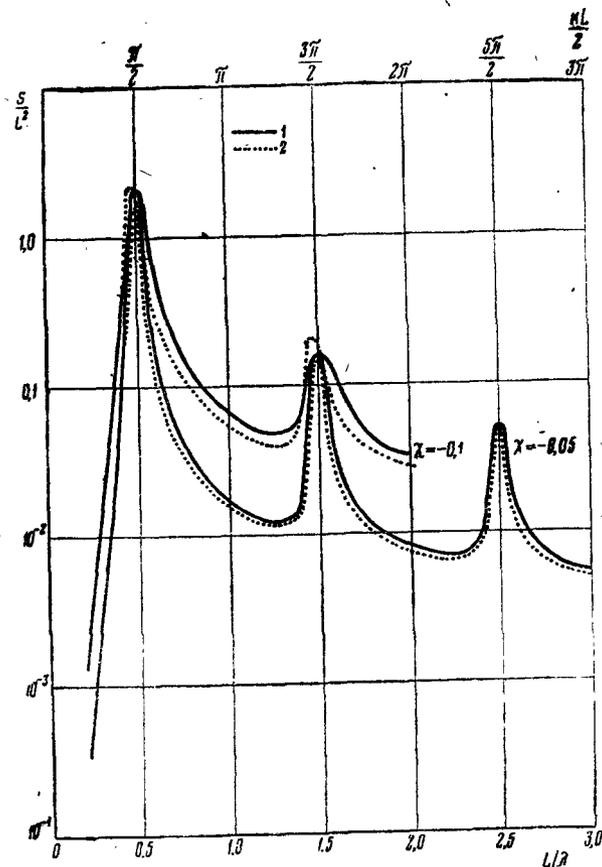


Рис. 76. Зависимость интегрального поперечника рассеяния вибратора от его длины (при нормальном падении плоской волны). Кривые 1 вычислены Леонтовичем и Левиным [85]. Кривые 2 рассчитаны по формуле (34.07).

рассеивающие свойства вибратора характеризуют усредненной величиной

$$\bar{\sigma}(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_\alpha(\vartheta, \vartheta_0) d\alpha = \frac{3\lambda^2}{8\pi} |F(\vartheta, \vartheta_0)|^2. \quad (34.12)$$

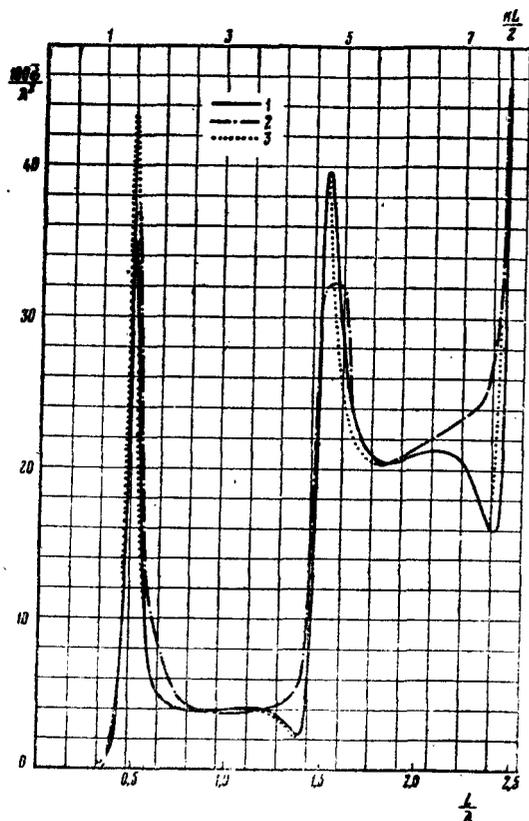


Рис. 77. Зависимость эффективной поверхности рассеяния вибратора от его длины при нормальном падении плоской волны. Кривая 1 вычислена Линдротом [79], кривая 2 — Ван-Флеком [86] с помощью метода интегральных уравнений, кривая 3 — по формуле (34.12).

На рис. 77 и 78 пунктирными линиями представлены результаты расчетов, выполненных по формулам (34.12) и (32.08) для случая нормального облучения ( $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ).

Рис. 77 иллюстрирует зависимость функции  $\bar{\sigma}$  от величины  $kL$  при заданном значении  $\Omega_p = 2 \ln \frac{2L}{a} = 15$ , т. е. при отношении длины вибратора к его диаметру, равном

$\frac{L}{2a} = 452$ . На рис. 78 построен график функции  $\bar{\sigma}$  в зависимости от частоты  $f = \frac{c}{\lambda} 10^{-6}$  (в мегагерцах) для заданных параметров  $L = 5$  см и  $\Omega_p = 15$ . Сплошной линией здесь проведены кривые, построенные Линдротом [79], штрих-пунктирная кривая на рис. 77 вычислена Ван-Флеком и др. [86].

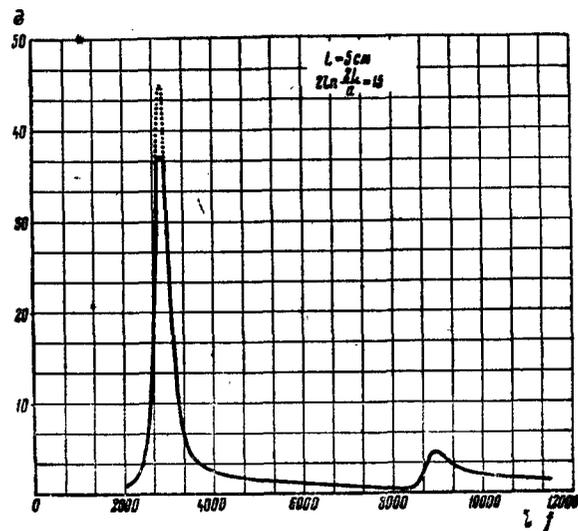


Рис. 78. Зависимость эффективной поверхности рассеяния вибратора от частоты  $f = \frac{c}{\lambda} 10^{-6}$  (в мегагерцах) при нормальном падении плоской волны. Обозначения те же, что и на рис. 77.

Кривые Линдрота и Ван-Флека рассчитаны путем интегрирования тока, который найден в результате приближенного решения интегрального уравнения. Однако указанная процедура проведена в работах [79] и [86] различным образом. Линдрот получил выражение для рассеянного поля в виде разложения по обратным степеням параметра  $\Omega_p$ , которое включает члены порядка  $\Omega_p^{-3}$ . В работе [86] использованы различного рода аппроксимации, что приводит, как это следует из рис. 77, к довольно грубым результатам, особенно в резонансной об-

ласти. Наша кривая (пунктирная) почти всюду совпадает в пределах графической точности с кривой Линдрота. Значительное расхождение наблюдается лишь в величине первого резонансного пика.

На рис. 79 и 80 построены радиолокационные диаграммы вибраторов длиной  $L=0,5\lambda$  и  $L=2\lambda$  при заданном значении  $\frac{L}{a}=900$ . Кривые 1 вычислены Гаем с помощью вариационного метода [87], кривые 3 получены методом наведенных э. д. с. [86], кривые 4 — указанным выше методом Ван-Флека. Результаты расчетов по нашим формулам (34.12), (32.08) и (32.09) изображены кривыми 2.

В цитированных работах рассеянное поле вычисляют непосредственным интегрированием тока, для определения которого используют различные приближенные ме-

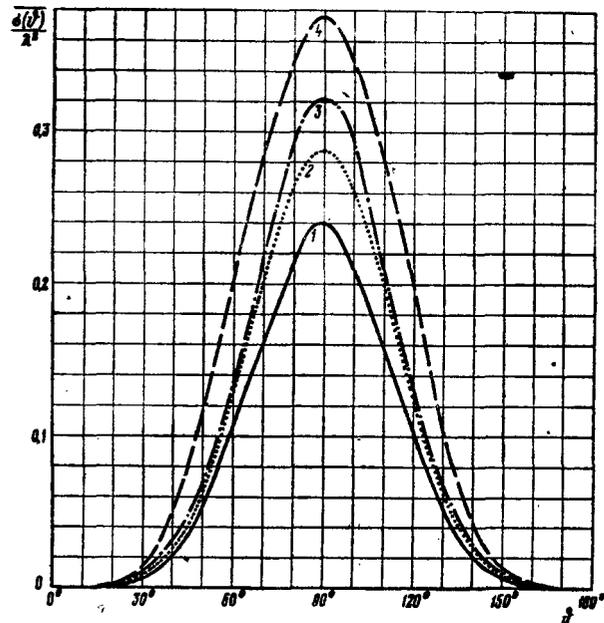


Рис. 79. Сравнение диаграмм для эффективной поверхности рассеяния полуволнового вибратора, вычисленных различными методами.

Кривая 1 вычислена Гаем [87] с помощью вариационного метода, кривая 2 — по формуле (34.12), кривая 3 — методом наведенных э. д. с. (в работе Ван-Флека [86]); кривая 4 — Ван-Флеком [86] с помощью метода интегральных уравнений.

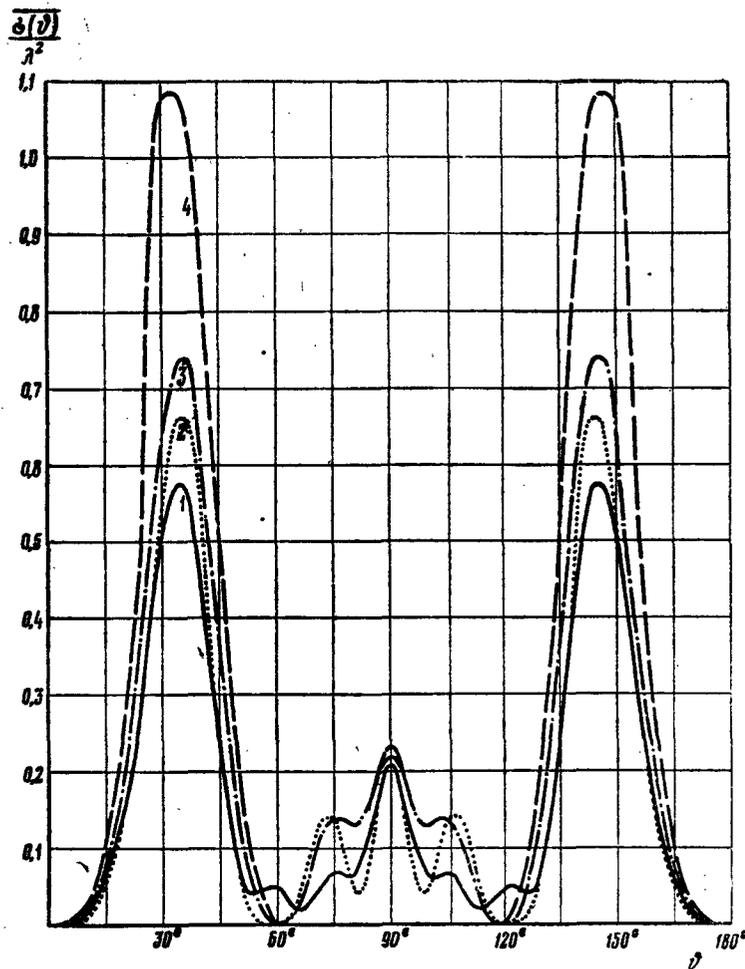


Рис. 80. Диаграммы для эффективной поверхности рассеяния вибратора, вычисленные различными методами. Обозначения те же, что и на рис. 79.  $L=2\lambda$ .

тоды. В вариационном методе [87] с этой целью строится функционал, стационарный относительно малых вариаций тока. Затем ток ищется в виде некоторой функции, содержащей неопределенные постоянные, находимые из условия стационарности функционала. Этот метод по-

зволяет довольно легко получить первое приближение, однако его результаты, особенно для длинных проводов, могут существенно зависеть от вида пробной функции. В методе наведенных э. д. с. [86] ток ищется в виде комбинации тригонометрических функций с неизвестными коэффициентами, которые определяются с помощью закона сохранения энергии. Этот метод наиболее прост, но обладает рядом серьезных недостатков. Так, вследствие некорректного учета компоненты тока, имеющей фазу падающего поля, он приводит к неправильным результатам в случае нечетных резонансов (особенно для длинных проводов) и не дает смещения резонансных пиков от значений  $\lambda = \frac{2L}{n}$  ( $n=1, 3, 5 \dots$ ) в сторону более длинных волн.

Полученные нами результаты также являются приближенными. Однако наша формула (32.05) удовлетворяет принципу взаимности и применима для вибраторов любой длины. При этом для очень коротких вибраторов  $L \ll \lambda$  она переходит в асимптотическое выражение для характеристики рассеяния диполя (см. § 33). Для вибраторов длиной в несколько длин волн ( $L \approx n\lambda$ ,  $n=1, 2, 3, 4$ ) формула (32.05) дает удовлетворительные результаты. Расчеты, проведенные по ней для радиолокационного отражения при нормальном облучении, согласуются с результатами Линдрота. Хорошее согласие наблюдается также с результатами Леонтовича и Левина для интегральной характеристики рассеяния. С увеличением длины вибратора точность указанной формулы растет, этим она выгодно отличается от формул, предложенных для характеристики рассеяния другими авторами.

Вместе с тем, расхождение между различными приближенными методами свидетельствует о необходимости проведения достаточно подробных расчетов по точным методам с целью оценки действительной погрешности приближенных методов. Такие расчеты можно выполнить, например, с помощью методики, изложенной в работах [88, 89] или [91].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной книге получено решение ряда дифракционных задач, основанное на приближенном учете возмущения поля вблизи излома поверхности или острого края. Выведены формулы для характеристик рассеяния или, в некоторых случаях (гл. IV), для радиолокационных поперечников отражения при определенном направлении облучения. Найденные выражения имеют четкий физический смысл, удовлетворяют принципу взаимности и удобны для расчетов.

Полученные результаты позволяют составить более полное представление о границах применимости приближения физической оптики. Обычно принято считать, что это приближение дает надежные результаты, если только размеры тела велики по сравнению с длиной волны. Такое мнение основано на следующем рассуждении. Приближение физической оптики учитывает излучение только от равномерной части тока и не принимает в расчет неравномерную часть тока, которая концентрируется вблизи изломов и острых краев. Поэтому, когда размеры тела значительно больше длины волны, неравномерная часть тока занимает относительно небольшую долю поверхности тела, и можно думать, что ее влияние будет мало.

В действительности же оказывается, что надежность результатов физической оптики существенным образом зависит не только от размеров тела, но также от формы тела, направлений облучения и наблюдения. Например, при скользящем падении волны на плоскую грань тела краевая зона, занятая неравномерной частью тока, значительно расширяется, и влияние этого тока становится существенным. Поэтому физическая оптика дает качественно неверные результаты для поля, рассеянного пло-

скими пластинами при скользящем облучении, независимо от соотношения между их размерами и длиной волны. Влияние неравномерной части тока становится заметным также в тех направлениях, где согласно физической оптике рассеянное поле должно быть равно нулю или имеет малую величину.

Ярким примером того, насколько большое значение имеют указанные выше факторы, служит задача о дифракции плоской волны при падении на конус вдоль его оси (§ 17). Хотя в этом случае неравномерная часть тока, сосредоточенная вблизи вершины конуса, практически не влияет на рассеяние, тем не менее приближение физической оптики дает для величины радиолокационного поперечника значения, которые на десятки децибел меньше экспериментальных даже при больших размерах конуса. Решающая роль здесь принадлежит неравномерной части тока, текущей вблизи кругового излома конической поверхности; особенно большое значение неравномерная часть тока имеет для острых конусов.

Другим интересным примером подобного рода является рассеяние плоской волны на конечном параболоиде вращения (§ 18), когда приближение физической оптики приводит к качественно неверным результатам. Вычисленная в этом приближении эффективная поверхность рассеяния оказывается периодической функцией длины параболоида и при некоторых длинах обращается в нуль, что совершенно не соответствует действительности.

Исследование дифракции краевых волн показало (гл. V), что для плоских пластин можно ограничиться учетом вторичной дифракции, если их линейные размеры всего в полтора-два раза больше длины волны.

Заметим, что мы стремились получить формулы для характеристик рассеяния, которые обладали бы физической наглядностью и были бы удобны для расчетов. При этом нам пришлось пойти на введение различного рода интерполяционных и упрощенных формул, которые удовлетворяют сформулированным требованиям, но зато не являются в общем случае главными членами строгого асимптотического разложения по степеням малого пара-

метра  $\frac{\lambda}{a}$ .

Мы не ставили своей целью вычислить токи на поверхности тела, поле в ближней зоне или интегральный поперечник рассеяния. Эти вопросы рассматриваются в ряде других работ по физической теории дифракции, которые уже были перечислены в § 25. В них, в частности, получены первые члены асимптотических разложений по степеням  $\frac{\lambda}{a}$  для интегрального поперечника, ха-

рактеризующего полную мощность, рассеянную телом. Однако в этих работах, как правило, отсутствуют формулы для характеристик рассеяния, справедливые при любых направлениях облучения и наблюдения. Поэтому результаты данной книги и указанных работ как бы взаимно дополняют друг друга.

В настоящее время теоретическому изучению поддается лишь ограниченное число дифракционных задач, в связи с этим большое значение имеет экспериментальное исследование дифракции на различных телах. В гл. VI изложен экспериментальный способ, позволяющий выделить в «чистом виде» и измерить поле от неравномерной части тока, возбуждаемого плоской волной на металлических телах любой формы. В той же главе показано, что известное явление деполяризации волны, отраженной от находящегося в свободном пространстве тела, вызывается неравномерной частью тока, или, иначе говоря, искривлением поверхности.

Проведенное в гл. VII исследование задачи о дифракции на тонком цилиндрическом проводнике конечной длины представляет естественное развитие и завершение методики учета многократной дифракции краевых волн, которая была применена в гл. V. В гл. VII выведены формулы для диаграммы рассеяния, пригодные для вибраторов произвольной длины при любых направлениях облучения и наблюдения.

Полученные в книге результаты показывают плодотворность физической теории дифракции и позволяют подойти к решению других, более сложных задач. Такие задачи можно разделить на два класса. К первому классу относятся задачи, которые могут быть решены уже сейчас на базе известных результатов теории дифракции; в качестве примера можно указать задачу о дифракции плоской волны на усеченном конусе или на бесконечно длинном цилиндре с многоугольным поперечным сече-

нием. Ко второму классу следует отнести те задачи, для решения которых необходимо сначала получить (с помощью методов математической теории дифракции) целый ряд новых результатов. В частности, для того, чтобы дать полное решение дифракционной задачи о конечном конусе, надо лучше знать законы дифракции на полубесконечном конусе.

Подводя итоги, можно сказать, что физическая теория дифракции помогает разобраться в дифракционных явлениях для сложных тел, ставит проблемы перед математической теорией дифракции и позволяет эффективно применять строгие результаты математической теории дифракции для решения новых задач.

В заключение выражаю глубокую благодарность Л. А. Вайнштейну за ценные советы и регулярное обсуждение вопросов, которым посвящена эта книга, а также за внимательное прочтение рукописи и ряд полезных замечаний. Пользуюсь также случаем выразить искреннюю благодарность М. Л. Левину за внимание к работе и ценные замечания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Фок В. А. Обобщение отражательных формул на случай отражения произвольной волны от поверхности произвольной формы. ЖЭТФ, 20, 961, 1950.
2. Антенны сантиметровых волн, ч. I. Пер. с англ. под ред. Я. Н. Фельда. Изд-во «Советское радио», 1950.
3. Менцер Дж. Р. Дифракция и рассеяние радиоволн. Пер. с англ. под ред. Л. А. Вайнштейна. Изд-во «Советское радио», 1958.
4. Вайнштейн Л. А., Электромагнитные волны. Изд-во «Советское радио», 1957.
5. Потехин А. И. Некоторые задачи дифракции электромагнитных волн. Изд-во «Советское радио», 1948.
6. Baker V. B. and Copson E. T. The mathematical theory of Huygens' principle. Oxford, 1939.
7. Уфимцев П. Я. Приближенный расчет дифракции плоских электромагнитных волн на некоторых металлических телах, ч. I. Дифракция на клине и ленте. ЖТФ, 27, № 8, 1840—1849, 1957.
8. Уфимцев П. Я. Приближенный расчет дифракции плоских электромагнитных волн на некоторых металлических телах, ч. II. Дифракция на диске и конечном цилиндре. ЖТФ, 28, № 11, 2604—2616, 1958.
9. Уфимцев П. Я. Вторичная дифракция на ленте. ЖТФ, 28, № 3, 569—582, 1958.
10. Уфимцев П. Я. Вторичная дифракция на диске. ЖТФ, 28, № 3, 583—591, 1958.
11. Уфимцев П. Я. Симметричное облучение конечных тел вращения. «Радиотехника и электроника», 6, № 4, 559—567, 1961.
12. Майзельс Е. Н., Уфимцев П. Я. Отражение электромагнитных волн круговой поляризации от металлических тел. «Радиотехника и электроника», 5, № 12, 1925—1928, 1960.
13. Уфимцев П. Я. Об отражении металлическими телами радиоволн круговой поляризации. «Радиотехника и электроника», № 12, 2094, 1961.
14. Уфимцев П. Я. Дифракция плоских электромагнитных волн на тонком цилиндрическом проводнике. «Радиотехника и электроника», 7, № 2, 260—269, 1962.
15. Schwarzschild K. Beugung und Polarisation des Lichts. Mathematische Annalen, 55, 177, 1902.
16. Франк Ф. и Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. ОНТИ, 1937.

17. Фок В. А. Распределение токов, возбуждаемых плоской волной на поверхности проводника. ЖЭТФ, 15, № 12, 693—702, 1945.
18. Фок В. А. Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности. М.-Л. Изд-во АН СССР, 1946.
19. Вайнштейн Л. А. Дифракция электромагнитных и звуковых волн на открытом конце волновода. Изд-во «Советское радио», 1953.
20. Oberhettinger F. On the diffraction and reflection on waves and pulses by wedges and corners. Journ. Research NBS, 61, № 5, 343—365, 1958.
21. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Часть первая. И. Л., 1949.
22. Pauli W. On asymptotic series for functions in the theory of diffraction of light. Physical Review, 54, № 11, 924—931, 1938.
23. Мак-Лаклан Н. В. Теория и приложение функций Матве. И. Л., 1953.
24. Meixner J. and Andrejewski W. Strenge Theorie der Beugung ebener elektromagnetischer Wellen an der vollkommen leitenden Kreisscheibe und an der kreisförmigen Öffnung im vollkommen leitenden ebenen Schirm. Annalen der Physik, 7, № 3—4, 157, 1950.
25. Andrejewski W. Die Beugung elektromagnetischer Wellen an der leitenden Kreisscheibe und an der kreisförmigen Öffnung im leitenden ebenen Schirm. Zeits. für angewandte Physik, 5, № 5, 178, 1953.
26. Meixner J., und Schäfer F. W. Mathieu'sche Funktionen und Sphäroidfunktionen. Springer-Verlag, 1954.
27. Ландсберг Г. С. Оптика. ГИТТЛ, 1954.
28. Браунбек В. Neue Näherungsmethode für die Beugung am ebenen Schirm. Zeits. für Physik, 127, 4, 381—390, 1950.
29. Браунбек В. Zur Beugung an der Kreisscheibe. Zeits. für Phys., 127, 4, 405—415, 1950.
30. Браунбек В. Zur Beugung an der kreisförmigen Öffnung. Zeits. für Physik, 138, 1, 80—88, 1954.
31. Браунбек В. Zur Beugung an Öffnungen in nichtebenen Schirmen. Zeits. für Physik, 156, 1, 66, 1959.
32. Фраhn W. E. Beugung elektromagnetischer Wellen in Braunbek'scher Näherung. I. Zeits. für Physik, 156, 1, 78, 1959.
33. Фраhn W. E. Beugung elektromagnetischer Wellen in Braunbek'scher Näherung. II. Zeits. für Phys., 156, № 2, 99, 1959.
34. Белкина М. Г. Дифракция электромагнитных волн на диске. В сб. «Дифракция электромагнитных волн на некоторых телах вращения». Изд-во «Советское радио», 1957, (стр. 148—174).
35. Иванов В. И. Коротковолновая асимптотика дифракционного поля в тени идеально проводящего параболического цилиндра. «Радиотехника и электроника», 5, № 3, 393—402, 1960.
36. Иванов В. И. Дифракция коротких плоских электромагнитных волн на гладком выпуклом цилиндре при наклонном падении. «Радиотехника и электроника», 5, № 3, 524—528, 1960.
37. Горяинов А. С. Асимптотическое решение задач о дифракции плоской электромагнитной волны на проводящем цилиндре. «Радиотехника и электроника», 3, № 5, 603—614, 1958.
38. Felsen L. B. Backscattering from wide-angle and narrow-angle cones. Journ. Appl. Phys. 26, № 3, 138—151, 1955.
39. Siegel K. M., Crispin J. W. and Schensted C. E. Electromagnetic and acoustical scattering from a semi-infinite cone. Journ. Appl. Phys., 26, № 3, 309—313, 1955.
40. Горяинов А. С. Дифракция плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси конуса. «Радиотехника и электроника», 6, № 1, 47—57, 1961.
41. Siegel K. M., Goodrich R. F., Weston V. H. Comments on far field scattering from bodies of revolution. Appl. Sci. Res., Section B, volume 8, p. 8, 1959.
42. Keller J. B. Diffraction by a convex cylinder. Trans. IRE, AP-4, № 3, 312—321, 1956.
43. Keller J. B. Diffraction by an aperture, I. Journal of Appl. Phys., 28, № 4, 426—444, 1957. Diffraction by an aperture, II. Journ. Appl. Phys., 28, № 5, 570—579, 1957.
44. Keller J. B. Backscattering from a finite cone. Trans. IRE, AP-8, № 2, 175—182, 1960. Backscattering from a finite cone—comparison of theory and experiment, Trans. IRE, AP-9, № 4, 411, 1961.
45. Schensted C. E. Electromagnetic and acoustic scattering by a semi-infinite body of revolution. Journ. Appl. Phys., 26, № 3, 306—308, 1955.
46. Clemmow P. C. Edge currents in diffraction Theory. Transactions IRE, Antennas and Propagation, AP-4, № 3, 282—287, 1956.
47. Millar R. F. An approximate theory of the diffraction of an electromagnetic wave by an aperture in a plane screen. Proc. Inst. Electrical Engs., Part C, 103, № 3, 177, 1956.
48. Millar R. F. The diffraction of an electromagnetic wave by a circular aperture. Proc. Inst. Electrical Engs., Part C, 104, № 5, 1957.
49. Millar R. F. The diffraction of an electromagnetic wave by a large aperture. Proc. Inst. Electrical Engs., Part C, 104, № 6, 1957.
50. Handbuch der Physik. Bd. 25/1. Kristallographie. Beugung. Berlin, Springer, 1961. H. Hönl, A. W. Maue, K. Westphal. Theorie der Beugung (S. 218—592).
51. Karp S. N. and Russek A. Diffraction by a wide slit, Journal of Applied Physics, 27, № 8, 886—894, 1956.
52. Buchal R. N. and Keller J. B. Boundary Layer Problems in Diffraction Theory. Commun. Pure and Appl. Mathem., 13, № 1, 85—114, 1960.
53. Гринберг Г. А. Новый метод решения задачи дифракции электромагнитных волн на плоскости с безграничной прямолинейной щелью и родственными ей проблем. ЖТФ, 27, № 11, 2595—2605, 1957.
54. Гринберг Г. А. Метод решения дифракционных задач для плоских идеально проводящих экранов, основанный на изучении наводимых на экранах теневых токов. ЖТФ, 28, № 3, 542—554, 555—568, 1958.
55. Гринберг Г. А. О дифракции электромагнитных волн на полосе конечной ширины. ДАН СССР, 129, № 2, 295—298, 1959.
56. Гринберг Г. А. и Пименов Ю. В. К вопросу о дифракции электромагнитных волн на идеально проводящей плоскости с круглым отверстием. Ж. Т. Ф. 29, № 10, 1206—1211, 1959.

57. Гринберг Г. А. и Колесникова Э. М. К вопросу о дифракции электромагнитных волн на идеально проводящем плоском кольце. ЖТФ, 31, № 1, 13—17, 1961.

58. Millar R. F. Diffraction by a wide slit and complementary strip. Proc. Cambridge Philosophical Society, 54, 4, 479—496, 497—511, 1958.

59. Кинг Р. и У Тай - Цзунь. Рассеяние и дифракция электромагнитных волн. Перевод с английского под редакцией Э. Л. Бурштейна. Изд-во иностранной литературы, 1962.

60. Кинбер Б. Е. О боковом излучении зеркальных антенн. «Радиотехника и электроника», № 4, 545—558, 1961.

61. Кинбер Б. Е. Развязки между близко расположенными зеркальными антеннами. «Радиотехника и электроника», 6 № 6, 907—916, 1961.

62. Кинбер Б. Е. О дифракции электромагнитных волн на вогнутой поверхности кругового цилиндра. «Радиотехника и электроника», 6, № 8, 1273—1283, 1961.

63. Кинбер Б. Е. О дифракции электромагнитных волн на вогнутой поверхности сферы. «Радиотехника и электроника», 6, № 10, 1652—1657, 1961.

64. Фок В. А. Теория дифракции от параболоида вращения. Сборник «Дифракция электромагнитных волн на некоторых телах вращения». Изд-во «Советское радио», 1957.

65. Фок В. А. и Федоров А. А. Дифракция плоской электромагнитной волны на идеально проводящем параболоиде вращения. ЖТФ, 28, № 11, 2548—2566, 1958.

66. Фок В. А. Поле от вертикального и горизонтального диполя, приподнятого над поверхностью земли. ЖЭТФ, 19, № 10, 916—929, 1949.

67. Леонтович М. А. Об одном методе решения задач о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности земли. Изв. АН СССР, сер. физ. 8, 16—22, 1944.

68. Леонтович М. А. и Фок В. А. Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности земли по методу параболического уравнения. ЖЭТФ, 16, № 7, 557—573, 1946.

69. Фок В. А. Теория распространения радиоволн в неоднородной атмосфере для приподнятого источника. Изв. АН СССР, 14, № 1, 70—94, 1950.

70. Фок В. А. Поле плоской волны вблизи поверхности проводящего тела. Изв. АН СССР, сер. физ. 10, № 2, 171—186, 1946.

71. Вайнштейн Л. А., Федоров А. А. Рассеяние плоских и цилиндрических волн на эллиптическом цилиндре и концепция дифракционных лучей. «Радиотехника и электроника», 6, № 1, 31—46, 1961.

72. Малюжинец Г. Д. и Вайнштейн Л. А. Поперечная диффузия при дифракции на импедансном цилиндре большого радиуса. ч. I. Параболическое уравнение в лучевых координатах. «Радиотехника и электроника», 6, № 8, 1247—1258, 1961.

73. Вайнштейн Л. А., Малюжинец Г. Д. Поперечная диффузия при дифракции на импедансном цилиндре большого радиуса. ч. II. Асимптотические законы дифракции в полярных координатах. «Радиотехника и электроника», 6, № 9, 1489—1495, 1961.

74. Федоров А. А. Асимптотическое решение задачи о дифракции плоской электромагнитной волны на идеально проводящей

сфере. «Радиотехника и электроника», 3, № 12, 1451—1462, 1958.

75. Chytil B. The depolarisation of electromagnetic waves backscattering from certain bodies. Práce UŘE—CSAV, № 17, Praha, 1961.

76. Chytil B. Depolarisation by randomly spaced scatterers. Práce UŘE—CSAV, № 20, Praha, 1961.

77. Chytil B. Polarisation-dependent scattering cross-sections. Práce UŘE—CSAV, № 21, Praha, 1961.

78. Beckmann P. The depolarisation of electromagnetic waves by inclined planes. Práce UŘE—CSAV, № 19, Praha, 1961.

79. Lindroth K. Reflection of electromagnetic waves from thin metal strips. Trans. Roy. Inst. of Technol., Stockholm, Sweden, № 91, 1955.

80. Hallén E. Theoretical investigations into the transmitting and receiving qualities of antennae. Nova Acta Roy. Soc. Sci., Upsala (4), vol. 11, Ser. IV, 1938.

81. Вайнштейн Л. А. Волны тока в тонком цилиндрическом проводнике. I. Ток и импеданс передающего вибратора. ЖТФ, 29, № 6, 673—688, 1959.

82. Вайнштейн Л. А. Волны тока в тонком цилиндрическом проводнике. II. Ток в пассивном вибраторе и излучение передающего вибратора. ЖТФ, 29, № 6, 689—699, 1959.

83. Вайнштейн Л. А. Волны тока в тонком цилиндрическом проводнике. III. Вариационный метод и его применение к теории идеального и импедансного проводов. ЖТФ, 31, № 1, 29—44, 1961.

84. Вайнштейн Л. А. Волны тока в тонком цилиндрическом проводнике. IV. Входной импеданс вибратора и точность формул. ЖТФ, 31, № 1, 45—50, 1961.

85. Леонтович М. А. и Левин М. Л. К теории возбуждения колебаний в вибраторах антенн. ЖТФ, 14, № 9, 481—506, 1944.

86. Van Vleck J. H., Bloch F. and Hamermesh M. Theory of radar reflection from wires or thin metallic strips. Journ. Appl. Phys., 18, № 3, 274—294, 1947.

87. Tai C. T. Electromagnetic back-scattering from cylindrical wires. Journ. Appl. Phys., 23, № 8, 903—916, 1952.

88. Капица П. Л., Фок В. А. и Вайнштейн Л. А. Симметричные колебания идеально проводящего полого цилиндра конечной длины. ЖТФ, 29, № 10, 1188—1205, 1959.

89. Говорун Н. Н. Численное решение интегрального уравнения первого рода для плотности тока в антенне — теле вращения. «Журнал вычислительной математики и математической физики», 1, № 4, 664—679, 1961.

90. Hallén E. Exact Solution of the Antenna Equation. Transactions of the Poyal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, Nr 183, 1961.

91. Duncan R. H. and Hinchey F. A. Cylindrical Antenna Theory. J. Research Nat. Bur. Standards 64D, 569, 1960.

92. Вайнштейн Л. А. Статические задачи для полого цилиндра конечной длины (II. Численные результаты; III. Приближенные формулы). ЖТФ, 32, № 10, 1962.

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие . . . . .	3
Введение . . . . .	7
<b>Глава I. Дифракция на клине . . . . .</b>	<b>13</b>
§ 1. Строгое решение . . . . .	13
§ 2. Асимптотические выражения . . . . .	24
§ 3. Приближение физической оптики . . . . .	29
§ 4. Поле, излучаемое неравномерной частью тока . . . . .	37
§ 5. Наклонное падение плоской волны на клин . . . . .	44
§ 6. Дифракция на ленте . . . . .	48
<b>Глава II. Дифракция на диске . . . . .</b>	<b>54</b>
Нормальное облучение . . . . .	54
§ 7. Приближение физической оптики . . . . .	54
§ 8. Поле от неравномерной части тока . . . . .	58
§ 9. Полное поле, рассеиваемое диском при нормальном облучении . . . . .	63
Наклонное облучение . . . . .	68
§ 10. Приближение физической оптики . . . . .	68
§ 11. Поле, излучаемое неравномерной частью тока . . . . .	69
§ 12. Характеристики рассеяния при произвольном облучении . . . . .	79
<b>Глава III. Дифракция на цилиндре конечной длины . . . . .</b>	<b>86</b>
§ 13. Приближение физической оптики . . . . .	86
§ 14. Поле, создаваемое неравномерной частью тока . . . . .	93
§ 15. Полное рассеянное поле . . . . .	97
<b>Глава IV. Дифракция плоской волны, падающей на конечные тела вращения вдоль их оси симметрии . . . . .</b>	<b>104</b>
§ 16. Поле, создаваемое неравномерной частью тока . . . . .	104
§ 17. Конус . . . . .	109
§ 18. Параболоид вращения . . . . .	118
§ 19. Сферическая поверхность . . . . .	124

<b>Глава V. Вторичная дифракция . . . . .</b>	<b>130</b>
§ 20. Вторичная дифракция на ленте. Постановка задачи . . . . .	131
§ 21. Вторичная дифракция на ленте ( <i>H</i> -поляризация) . . . . .	136
§ 22. Вторичная дифракция на ленте ( <i>E</i> -поляризация) . . . . .	144
§ 23. Характеристики рассеяния плоской волны на ленте . . . . .	147
§ 24. Вторичная дифракция на диске . . . . .	163
§ 25. Краткий обзор литературы . . . . .	177
<b>Глава VI. Некоторые явления, связанные с неравномерной частью поверхностного тока . . . . .</b>	<b>183</b>
§ 26. Измерение поля, излучаемого неравномерной частью тока . . . . .	183
§ 27. Деполяризация отраженной волны . . . . .	190
<b>Глава VII. Дифракция на тонком цилиндрическом проводнике . . . . .</b>	<b>194</b>
§ 28. Волны тока в идеально проводящем вибраторе . . . . .	194
§ 29. Излучение передающего вибратора . . . . .	201
§ 30. Первичная и вторичная дифракция на пассивном вибраторе . . . . .	203
§ 31. Многократная дифракция краевых волн . . . . .	211
§ 32. Полное рассеянное поле . . . . .	214
§ 33. Вибратор короткий по сравнению с длиной волны (пассивный диполь) . . . . .	220
§ 34. Результаты численных расчетов . . . . .	225
Заключение . . . . .	233
Литература . . . . .	237

### ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
35	ф-ла (3.28)	$\sin(\xi + \varphi)$	$\sin(\xi \pm \varphi)$
61	4 сверху	$j \frac{1}{x_1}$	$j_{x_1}^1$
76	7-я сверху	$\sqrt{2 \pi k \alpha_1 \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}$	$\sqrt{2 \pi k \alpha \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}$
139	17 сверху (в некоторых экземплярах)	$ \overline{kr}$	$\sqrt{\overline{kr}}$
216	6 сверху	$e^{-ik(x_2 \cos \vartheta_0 + z_1 \cos \vartheta_0)}$	$e^{-ik(z_2 \cos \vartheta_0 + z_1 \cos \vartheta_0)}$
218, 223, 224	всюду	$\ln \frac{\sqrt{2} i}{\gamma ka}$	$\ln \frac{\sqrt{2} i}{\gamma ka}$

К зак. 2190

ПЕТР ЯКОВЛЕВИЧ УФИМЦЕВ

### МЕТОД КРАЕВЫХ ВОЛН В ФИЗИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ

Редактор *Н. Д. Иванушко*      Техн. редактор *А. А. Свешников*  
Обложка художника *В. Т. Сидоренко*

Сдано в набор 6.6.1962 г.	Подп. к печати 11.10.1962 г.
Г-84682      Формат 84×108 <sub>1/32</sub>	Объем 12,5 п. л.      Уч.-изд. л. 12,075
Тираж 6 500 экз.	Цена в перепл. № 5 — 70 коп.      Заказ 2190.

Набор изготовлен в типографии Госэнергоиздата.  
Отпечатано в типографии изд-ва „Советское радио“