

**Б** ИБЛИОТЕКА  
**И** НЖЕНЕРА  
**П**О **Н** АДЕЖНОСТИ



И. А. Рябинин  
Г. Н. Черкесов

ЛОГИКО-  
ВЕРОЯТНОСТНЫЕ  
МЕТОДЫ  
ИССЛЕДОВАНИЯ  
НАДЕЖНОСТИ  
СТРУКТУРНО-  
СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

И. А. РЯБИНИН  
Г. Н. ЧЕРКЕСОВ

ЛОГИКО-  
ВЕРОЯТНОСТНЫЕ  
МЕТОДЫ  
ИССЛЕДОВАНИЯ  
НАДЕЖНОСТИ  
СТРУКТУРНО-  
СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

ББК 30.14  
Р98  
УДК 621.3.019.3

**Рябинин И. А., Черкесов Г. Н.**

**Р98**      **Логико-вероятностные методы исследования надежности структурно-сложных систем.**— М.: Радио и связь, 1981.— 264 с., ил. — (Б-ка инженера по надежности).

**65 к.**

Рассматриваются новые аналитические методы анализа надежности технических систем, структурная схема которых при формализации не сводится к последовательно-параллельной схеме. Впервые дается систематическое изложение основных вопросов исследования надежности структурно-сложных систем с помощью логико-вероятностных методов, использующих аппарат алгебры логики и теории вероятностей. Общие результаты иллюстрируются большим числом примеров.

Для инженеров, занятых проектированием и эксплуатацией высоконадежных систем, и работников служб надежности.

Р  $\frac{30405-178}{046(01)-81}$  21-81 (С. р.) 2107000000

ББК 30.14  
6Ф2.1

#### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

*Б. В. Гнеденко (отв. редактор), Б. Е. Бердичевский, В. А. Каштанов, И. Н. Коваленко, А. В. Майоров, В. В. Марченко, А. В. Михайлов, А. Н. Перроге, А. М. Половко, О. Ф. Пославский, Е. Я. Сварник, А. Д. Соловьев, Р. Б. Улинич, И. А. Ушаков*

Рецензенты: докт. техн. наук, профессор В. И. Нечипоренко,  
докт. физ.-мат. наук, профессор В. А. Каштанов.

**Редакция литературы по радиоэлектронике**

*Светлой памяти  
Соколова Тараса Николаевича,  
ученого и организатора,  
посвящается*

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В современной технике освоены многие эффективные приемы и методы повышения надежности. Среди них основную роль играют методы структурного и функционального резервирования. Сложность способов резервирования возрастает вместе со сложностью систем и требованиями к их надежности. Это обусловлено также широким использованием в технических системах монотонных структур наряду с последовательно-параллельными. Современная практика проектирования систем различного назначения предлагает структуры, содержащие многие десятки и даже сотни элементов, связанных и взаимодействующих между собой сложным образом. В отличие от последовательно-параллельных структур их называют сложными, а соответствующие системы структурно-сложными. Широкому распространению таких систем способствует постоянная и все более усиливающаяся тенденция к объединению многих автономных систем в большие системы с сетевой структурой. Примером могут служить информационные сети связи, сети ЭВМ, большие системы энергетики и т. д.

Большое значение таких систем и появление у них некоторых новых качеств по сравнению с локальными требует тщательного анализа их надежности и управления надежностью. Следует, однако, отметить, что современная теория надежности в ряде случаев отстает от запросов практики и не может предложить эффективных методов анализа надежности структурно-сложных систем. Поэтому в нашей стране и за рубежом интенсивно ведутся разработки новых методов, способов и алгоритмов, которые позволили бы преодолеть указанное отставание.

Одним из перспективных направлений является разработка логико-вероятностных методов (ЛВМ), математическая сущность которых заключается в использовании функций алгебры логики (ФАЛ) для аналитической записи условий работоспособности системы и в разработке строгих способов перехода от ФАЛ к вероятностным функциям (ВФ), объективно выражающим безотказность этой системы. Для сложных задач и структур, описываемых ФАЛ произвольной формы, непосредственный переход к вероятности истинности функции алгебры логики не прост.

Начало развития логико-вероятностных методов идет от работ П. С. Порецкого, С. Н. Бернштейна и М. А. Гаврилова. В начале 60-х годов эти методы получили развитие в работах Ю. В. Мерекина, С. В. Малюгина, Р. Барлоу, Дж. Эзари, Ф. Прошана, З. В. Бирнбаума, С. В. Маркова, С. Саундерса. В конце 60-х и в 70-е годы появились монографии В. И. Нечипоренко, в которых основное внимание уделяется топологическим методам, работы И. А. Ушакова, В. А. Гадасина, В. Е. Степанова, А. С. Смирнова и многих других авторов. Структурно-сложные системы анализируются в работах А. Д. Соловьева, А. К. Кельманса, С. К. Гурского, Дж. Б. Фасела.

Несмотря на большое число публикаций, посвященных ЛВМ и их применению при анализе надежности, до сих пор достижения этого направления в теории надежности не были систематически изложены. Авторы настоящей книги сделали попытку восполнить пробел и изложить основные результаты отечественных и зарубежных ученых, а также собственные результаты, полученные за последние годы.

Привлекательность ЛВМ для инженеров заключается в основном в их исключительной четкости, однозначности и больших возможностях при анализе влияния любого элемента на надежность всей системы. Однако существуют и трудности на пути активного овладения этими методами. Главная связана с необходимостью ознакомления с методами вероятностной логики и отсутствием соответствующих руководств. Этому мешает и неосведомленность специалистов в реальных возможностях ЛВМ и осторожность, вызванная преувеличением «недостатков», к которым, например, в [51] отнесены следующие:

1) рассмотрение лишь двух состояний у элементов системы,

2) несоблюдение условий монотонности для некоторых задач и структур,

3) отсутствие учета временной последовательности отказов элементов,

4) требование независимости отказов элементов системы. Кроме того, отпугивает трудоемкость ручных методов расчета, требующих исключительного внимания и аккуратности, а также отсутствие удобных и апробированных программ для расчетов на ЭВМ.

Указанные недостатки, по мнению авторов предлагаемой книги, не связаны с принципиальными особенностями ЛВМ, а являются характеристикой современного состояния теории и практики ее инженерного применения. Авторы надеются в некоторой степени восполнить пробел в этой области знаний и не только за счет определенной систематизации материала, но и с помощью большого числа примеров для информационных сетей, микропроцессорных и электроэнергетических систем.

В гл. 1 излагаются основные математические сведения, необходимые для решения задач надежности. В гл. 2 рассматривается начальный этап применения ЛВМ — составление условий работоспособности сложной системы. В гл. 3 приводятся основные методы анализа надежности невозстанавливаемых систем. В гл. 4 излагается теория анализа структурной надежности на основе «веса», «значимости» и «вклада» элементов. В гл. 5 рассматриваются применения ЛВМ для анализа надежности восстанавливаемых систем. В гл. 6—8 излагается модифицированный ЛВМ, использующий алгебру смешанных форм, и рассматривается его применение для анализа работоспособности двухполюсных систем (гл. 6), информационной нагрузки элементов сети при различных алгоритмах выбора маршрута сообщений (гл. 7) и систем с ветвящейся структурой (гл. 8).

Труд по написанию книги распределен между авторами следующим образом: § 1.1, 1.2, 2.1—2.3 и гл. 3—5 написаны Рябининым И. А., § 2.4, гл. 6—8 — Черкесовым Г. Н., § 1.3 и 1.4 подготовлены авторами совместно.

Авторы благодарны всем, кто способствовал изданию этой книги, и будут признательны читателям, которые пришлют свои замечания. Особую благодарность авторы выражают рецензентам книги профессорам В. И. Нечипоренко, В. А. Каштанову, чьи советы существенно помогли улучшить первоначальную редакцию, а в ряде случаев избежать неточностей и ошибок, а также профессорам Ю. А. Гогину и И. А. Ушакову за помощь в работе над книгой.

# НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ, НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ВОПРОСОВ НАДЕЖНОСТИ СТРУКТУРНО-СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

## 1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Для исследования и решения многих вопросов, возникающих в теории надежности, оказываются необходимыми методы теории множеств и алгебры логики, теории вероятностей и математической статистики. В теории множеств исследуются множества, образованные из элементов, которые обладают определенными свойствами и находятся между собой или с элементами других множеств в некоторых отношениях. Особый раздел общей теории множеств — алгебра множеств — рассматривает различные операции над множествами с произвольными элементами.

Если нужно указать, что какой-нибудь объект  $a$  есть один из элементов множества  $A$ , то употребляют знак включения  $\in$ :

$$a \in A \quad (1.1)$$

(читается:  $a$  включается (входит) или содержится в  $A$ ).

Если объект  $a$  не встречается среди элементов множества  $A$ , то пишут

$$a \notin A \quad (1.2)$$

(читается:  $a$  не включается (не входит) или не содержится в  $A$ ).

Пусть рассматриваются два множества  $A$  и  $B$ . Если каждый элемент множества  $A$  входит также и в множество  $B$ , то говорят, что  $A$  есть часть или подмножество множества  $B$ . Это записывают с помощью иного знака включения  $\subset$ :

$$A \subset B \quad (1.3)$$

(читается так же, как и запись (1.1)). Графически соотношение (1.3) иллюстрировано рис. 1.1,а.

Равными (пишут  $A=B$ ) называют одинаковые множества, т. е. множества, состоящие из одних и тех же элементов. Очевидно, что для равных множеств одновременно  $A \subset B$  и  $B \subset A$ .

Иногда, определяя какое-нибудь множество, можно еще не знать, содержит оно по крайней мере один элемент. В связи с этим вводится понятие пустого множества, не содержащего ни одного элемента, которое обозначается  $\emptyset$ . Пустое множество считается подмножеством любого множества, т. е. включение  $\emptyset \subset A$  справедливо, каково бы ни было множество  $A$ .

*Объединением* (или *соединением*) двух множеств  $A$  и  $B$  называется множество, обозначаемое

$$A \cup B, \quad (1.4)$$

которое состоит из всех элементов, входящих хотя бы в одно из множеств  $A$  или  $B$  (заштрихованная область на рис. 1.1,б).

*Пересечением* (или *общей частью*) двух множеств  $A$  и  $B$  называется множество, обозначаемое

$$A \cap B, \quad (1.5)$$

состоящее из всех элементов, которые входят и в  $A$  и в  $B$  (заштрихованная область на рис. 1.2,а).

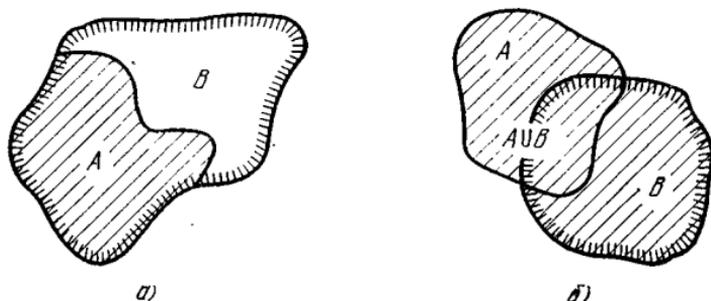


Рис. 1.1. Графическая иллюстрация формул:

а —  $A \subset B$ ; б —  $A \cup B$

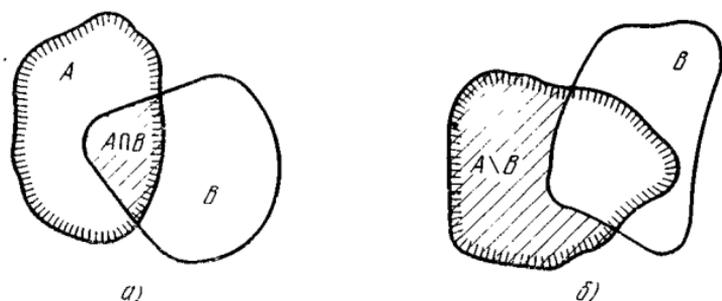


Рис. 1.2. Графическая иллюстрация формул:

а —  $A \cap B$ ; б —  $A \setminus B$

Два множества  $A$  и  $B$  называются *непересекающимися* (или *несовместимыми*), если у них нет общих элементов. Условие несовместимости (или ортогональности) множества  $A$  и  $B$  символически обозначается  $A \cap B = \emptyset$ .

*Разность*

$$A \setminus B \quad (1.6)$$

(иногда пишут  $A - B$ ) называется подмножеством множества  $A$ , состоящее из всех элементов  $A$ , не входящих в  $B$ . При этом в определении разности  $A \setminus B$  не требуется, чтобы  $B \subset A$ . Графически (1.6) можно представить заштрихованной областью на рис. 1.2,б.

Введем еще некоторые понятия. Пусть  $A$  — подмножество некоторого заданного множества  $X$ . *Дополнением* множества  $A$  в  $X$  на-

зывается множество всех тех элементов  $x \in X$ , которые не принадлежат  $A$ , т. е. множество, обладающее свойством  $x \notin A$ . Дополнение множества  $A$  обозначается  $A'$  или  $\bar{A}$ . Операция дополнения обладает следующими алгебраическими свойствами:

$$\begin{aligned} A \cap A' &= \emptyset; \quad A \cup A' = X; \\ (A')' &= A; \quad \emptyset' = X; \quad X' = \emptyset. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Если  $A$  и  $B$  — подмножества  $X$  и если  $A \subset B$ , то  $A' \supset B'$ .

Использование дополнений позволяет установить важную связь между объединениями и пересечениями, выражаемую следующими тождествами:

$$\left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right)' = \bigcap_{i=1}^n A_i'; \quad \left( \bigcap_{i=1}^n A_i \right)' = \bigcup_{i=1}^n A_i', \quad (1.8)$$

т. е. дополнение к объединению подмножеств равно пересечению их дополнений, а дополнение к пересечению подмножеств равно объединению их дополнений. Отсюда вытекает *принцип двойственности*.

Если верно некоторое соотношение между множествами, имеющее вид равенства или включения и выраженное в терминах объединений, пересечений и дополнений, то верно и соотношение, которое получается из исходного, если в нем знаки  $\cup$ ,  $\cap$ ,  $\subset$ ,  $\supset$  заменить соответственно знаками  $\cap$ ,  $\cup$ ,  $\supset$ ,  $\subset$ , равенства сохранить, а каждое множество заменить его дополнением.

Если  $A$  и  $B$  — подмножества  $X$ , то справедливо соотношение

$$A \setminus B = A \cap B'. \quad (1.9)$$

Разность  $A \setminus B$  иногда называют *относительным дополнением* множества  $B$  в множестве  $A$ , чтобы подчеркнуть отличие от обычного дополнения множества  $B$  в множестве  $X$ , равного

$$B' = X \setminus B. \quad (1.10)$$

Использование понятий и символов теории множеств позволяет дать более четкое и краткое математическое описание основ теории надежности.

*Алгебра логики*, включающая в себя исчисление высказываний, или *булеву алгебру* <sup>\*</sup>), представляет собой раздел математической логики. Несмотря на то, что еще в 1910 г. П. Эрнфест обратил внимание на возможность применения математической логики для описания работы релейно-контактных устройств, эффективное использование методов математической логики началось лишь с конца 30-х годов. Однако состояние релейной техники в то время еще не требовало широкого применения теории релейных устройств, и потому примерно в течение десяти лет эта теория находилась в зачаточном состоянии. Только с 1947—1950 гг. в связи с потребностями телемеханики и вычислительной техники начался современный этап развития релейных устройств. Оказалось, что для описания не только релейно-контактных, но и многих других устройств дискретного действия необходим аппарат математической логики. Теперь математи-

<sup>\*</sup> По имени Джорджа Буля, который более ста лет тому назад изложил математический подход к вопросам исчисления высказываний.

ческая логика уже прочно входит в арсенал средств, применяемых при исследовании и проектировании самых разнообразных технических устройств.

Математическая логика оперирует с высказываниями и изучает вопросы представления и преобразования двоичных функций от двоичных аргументов посредством некоторых логических операций, называемых логическими связями. Функция  $f(x_1, \dots, x_n)$ , определенная на наборах вида  $(x_1, \dots, x_n)$ , в которых переменные  $x_i$  могут принимать значения 0 или 1, и принимающая на этих наборах значения 0 или 1, называется *функцией алгебры логики* (ФАЛ) [49, с. 13]. Из простых высказываний при помощи логических связей могут быть составлены сложные высказывания, имеющие значения истинности: «истинно» (1) или «ложно» (0) — в зависимости от значений истинности составляющих простых высказываний. Логические связи между высказываниями можно представить как операции над двоичными переменными.

Определим теперь основные логические операции. Различные зависимости между высказываниями, рассматриваемые в математической логике, можно подразделить на две группы: элементарные и сложные логические функции. Вторые получаются из первых путем их многократного применения в самых разнообразных сочетаниях. Последовательность осуществления элементарных логических функций записывается обычно с помощью скобок.

В алгебре логики (точнее, в алгебре высказываний) рассматриваются три основные логические операции: отрицание, конъюнкция (умножение) и дизъюнкция (сложение). В обычной алгебре имеются аналоги последних двух операций алгебры логики, а аналога отрицания нет. Вычитание и деление в алгебре логики отсутствуют.

С помощью уравнений алгебры логики можно описать условия работоспособности технической системы, в том числе цифровых устройств. Уравнения показывают, из каких элементов и какими соединениями можно образовать заданное цифровое устройство или обеспечить выполнение заданного системе назначения. Очевидно, что последнее непосредственно связано с решением разнообразных задач из области надежности и живучести технических систем.

Рассмотрим отдельно каждую основную логическую операцию.

## 1.2. ОСНОВНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

**Отрицание.** Отрицание высказывания  $A$  обозначается  $A'$  (читается: не  $A$ ). Значение истинности высказывания  $A$  определяется следующими соотношениями:

$$1' = 0; 0' = 1. \quad (1.11)$$

Таким образом, отрицанием высказывания  $A$  является сложное высказывание  $A'$ , которое ложно, когда  $A$  истинно, и истинно, когда  $A$  ложно.

**Конъюнкция.** Конъюнкция, или логическое умножение, высказываний  $A$  и  $B$  обозначается  $A \wedge B$  (читается:  $A$  и  $B$ )<sup>\*</sup>. Значение

<sup>\*</sup> Иногда в качестве знака логического умножения используется символ  $\cdot$  или между перемножаемыми высказываниями знак вообще отсутствует.

истинности логического произведения  $A \wedge B$  определяется в зависимости от значений истинности высказываний  $A$  и  $B$  следующими соотношениями:

$$0 \wedge 0 = 0; 0 \wedge 1 = 0; 1 \wedge 0 = 0; 1 \wedge 1 = 1. \quad (1.12)$$

Конъюнкция  $A \wedge B$  двух высказываний представляет собой сложное высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда истинны составляющие его высказывания  $A$  и  $B$ .

**Дизъюнкция.** Дизъюнкция, или логическое сложение, двух высказываний  $A$  и  $B$  обозначается  $A \vee B$  (читается:  $A$  или  $B$ ). Значение истинности логической суммы  $A \vee B$  в зависимости от значений истинности составляющих высказываний  $A$  и  $B$  определяется следующими соотношениями:

$$0 \vee 0 = 0; 0 \vee 1 = 1; 1 \vee 0 = 1; 1 \vee 1 = 1. \quad (1.13)$$

Дизъюнкция двух высказываний  $A$  и  $B$  является сложным высказыванием, которое ложно тогда и только тогда, когда оба слагаемых  $A$  и  $B$  ложны.

Приведенные логические операции не являются независимыми и могут выражаться друг через друга. Преобразования логических выражений выполняются по определенным правилам, которые мы сейчас и рассмотрим.

### Правила для одной переменной

1. $A \wedge 1 = A;$	6. $A \vee 0 = A;$
2. $A \wedge 0 = 0;$	7. $A \vee A = A;$
3. $A \wedge A = A;$	8. $A \vee A' = 1;$
4. $A \wedge A' = 0;$	9. $A'' = A;$
5. $A \vee 1 = 1;$	10. $A''' = A'.$

(1.14)

Правила 1—10 доказываются простой подстановкой вместо  $A$  единицы и нуля. Как следствие из правил 3 и 7 имеем

$$A \wedge A \wedge \dots \wedge A = A;$$

$$A \vee A \vee \dots \vee A = A.$$

В отличие от обычной алгебры в алгебре логики умножение переменной самой на себя или приведение подобных членов осуществляется согласно перечисленным тождествам без появления показателей степени или коэффициентов.

### Правила для двух и трех переменных

Функции конъюнкции и дизъюнкции обладают свойствами, аналогичными свойствам операций умножения и сложения. Легко убедиться в том, что для этих функций имеет место *сочетательный* (или *ассоциативный*) закон:

$$11. A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C = A \wedge B \wedge C;$$

$$12. A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C = A \vee B \vee C, \quad (1.15)$$

а также *переместительный* (или *коммутативный*) закон:

$$\begin{aligned} 13. A \wedge B &= B \wedge A; \\ 14. A \vee B &= B \vee A. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Правила 11—14 определяют конъюнкцию и дизъюнкцию в отдельности.

В силу справедливости для логического умножения и логического сложения сочетательного и переместительного законов выражения, в которые входят конъюнкции и дизъюнкции, можно писать без скобок. При этом считают связь с помощью знака  $\wedge$  (конъюнкция) более тесной, чем с помощью знака  $\vee$  (дизъюнкция). Тем самым в алгебре логики устанавливается правило записи выражений, аналогичное принятому в обычной алгебре (в процессе вычислений «старшие» действия выполняются раньше «младших»). Это позволяет вместо  $(A \wedge B) \vee C$  писать просто  $A \wedge B \vee C$ .

Рассмотрим правила, выражающие связь между операциями логического умножения и сложения, взятыми совместно. Для этих функций имеет место *распределительный* (или *дистрибутивный*) закон конъюнкции относительно дизъюнкции:

$$15. A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \quad (1.17)$$

и распределительный закон дизъюнкции относительно конъюнкции:

$$16. A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C), \quad (1.18)$$

который в обычной алгебре не имеет места. Действительно,

$$a + bc \neq (a + b)(a + c).$$

Необходимо заметить, что все три названных закона обладают «симметрией» в том смысле, что из любого закона для дизъюнкции (конъюнкции) можно получить путем замены знаков дизъюнкции на знаки конъюнкции и наоборот соответствующий закон для конъюнкции (дизъюнкции). Действительно, произведя замену знаков, например, в выражении (1.17), получим

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C).$$

Следующий закон, известный под названием *закона двойственности* или *закона инверсий*, позволяет заменять отрицание конъюнкции дизъюнкцией отрицаний и отрицание дизъюнкции конъюнкцией отрицаний:

$$\begin{aligned} 17. (A \wedge B)' &= A' \vee B'; \\ 18. (A \vee B)' &= A' \wedge B'. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Если к выражениям (1.19) применить правило 9 (1.14), то получим,

$$\begin{aligned} 19. A \wedge B &= (A' \vee B')'; \\ 20. A \vee B &= (A' \wedge B')'. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Правила (1.20), названные в честь одного из основоположников математической логики формулами де Моргана, позволяют логиче-

ское умножение выразить через отрицание логической суммы из инверсных высказываний, а логическую сумму — через отрицание логического произведения из инверсных высказываний. Формулы (1.20) легко обобщаются на произвольное число логических переменных:

$$\bigwedge_{i=1}^n x_i = \left( \bigvee_{i=1}^n x'_i \right)'; \quad (1.21)$$

$$\bigvee_{i=1}^n x_i = \left( \bigwedge_{i=1}^n x'_i \right)', \quad (1.22)$$

где логические переменные обозначены буквой  $x$  с различными индексами  $i=1, 2, \dots, n$ , а знаки конъюнкции и дизъюнкции использованы аналогично знакам произведения  $\Pi$  и суммы  $\Sigma$  в обычной алгебре.

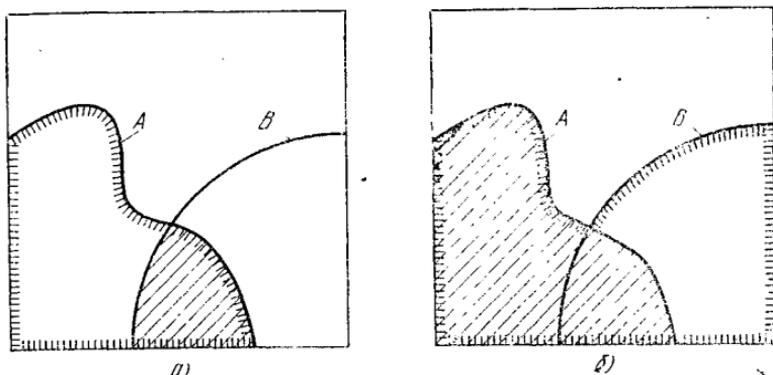


Рис. 1.3. Графическая иллюстрация операции поглощения

Используя перечисленные четыре основных закона, можно установить ряд других полезных соотношений, позволяющих существенно упростить сложные логические выражения.

Познакомимся прежде всего с операциями поглощения и склеивания.

Операция поглощения определяется соотношениями

$$21. (A \wedge B) \vee A = A; \quad (1.23)$$

$$22. A \wedge (B \vee A) = A.$$

Используя терминологию теории множеств, будем говорить, что подмножество  $A$  поглощается множеством  $B$ , если  $A \subset B$  (см. рис. 1.1): Как следует из (1.23), в первом случае  $(A \cap B) \subset A$ , а во втором  $A \subset (B \cup A)$ . На рис. 1.3, иллюстрирующем соотношения (1.23), поглощаемые подмножества заштрихованы, а поглощающие выделены контуром.

Операция склеивания определяется соотношениями

$$23. (A \wedge B) \vee (A \wedge B') = AB \vee AB' = A(B \vee B') = A1 = A; \quad (1.24)$$

$$24. (A \wedge B) \vee (A' \wedge B) = AB \vee A'B = B(A \vee A') = B1 = B,$$

где использована запись операции логического умножения без знака конъюнкции. Графическая иллюстрация соотношений (1.24) дана на рис. 1.4.

Упростим теперь выражение  $A \wedge (A' \vee B)$ . На основании распределительного закона конъюнкции относительно дизъюнкции (1.17) имеем

$$A \wedge (A' \vee B) = (A \wedge A') \vee (A \wedge B).$$

По правилу 4 (1.14)  $A \wedge A' = 0$ , следовательно,

$$A \wedge (A' \vee B) = 0 \vee (A \wedge B).$$

Используя правило 6 (1.14), окончательно получаем

$$25. A \wedge (A' \vee B) = A \wedge B. \quad (1.25)$$

На основании распределительного закона дизъюнкции относительно конъюнкции (1.18)

$$A \vee (A' \wedge B) = (A \vee A') \wedge (A \vee B).$$

По правилу 8 (1.14)  $A \vee A' = 1$ , следовательно,

$$A \vee (A' \wedge B) = 1 \wedge (A \vee B).$$

Используя правило 1 (1.14), окончательно получаем

$$26. A \vee (A' \wedge B) = A \vee B. \quad (1.26)$$

Операция *обобщенного склеивания* определяется соотношениями

$$27. AB \vee B'C = AC \vee AB \vee B'C;$$

$$28. (A \vee B)(B' \vee C) = (A \vee C)(A \vee B)(B' \vee C). \quad (1.27)$$

Доказательство (1.27) проводится в первом выражении путем умножения первого слагаемого на  $1 \vee C$ , а второго на  $1 \vee A$  и последующего применения правил 15 и 23, во втором выражении путем прибавления к первому сомножителю слагаемого  $0 \wedge A$ , а ко второму  $0 \wedge C$  и применения правил 16 и 24.

Рассмотрим определения и обозначения, которые потребуются далее.

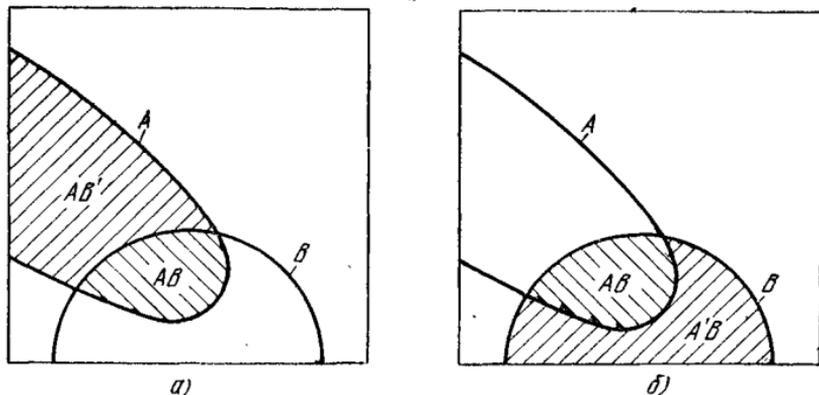


Рис. 1.4. Графическая иллюстрация операции склеивания

### 1.3. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Введем в рассмотрение *степень* аргумента  $x$ , которую будем обозначать  $x_i^{\alpha_i}$ , где  $\alpha_i$  — двоичная переменная величина. Положим, что

$$x_i^{\alpha_i} = \begin{cases} x_i, & \text{если } \alpha_i = 1, \\ x'_i, & \text{если } \alpha_i = 0. \end{cases} \quad (1.28)$$

Условимся переменные  $x_i$  и их отрицания  $x'_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) называть буквами, а  $i$  — номером или индексом переменной.

Определение 1. Выражение вида

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_r^{\alpha_r} \quad (1.29)$$

называется *элементарной конъюнкцией* ( $K$ ) ранга  $r$ . В силу того, что  $x_i x'_i = 0$  и  $x_i x_i \dots x_i = x_i$ , все буквы в элементарной конъюнкции различны.

Определение 2. Выражение вида

$$K_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_s, \quad (1.30)$$

где  $K_j$  — элементарные конъюнкции различных рангов, называется *дизъюнктивной нормальной формой* (ДНФ). Например, функция

$$f(x_1, \dots, x_4) = x_1 x_2 \vee x_1 x_2 x'_3 \vee x'_1 x_3 x_4$$

записана в ДНФ, так как все три слагаемых являются элементарными конъюнкциями.

Определение 3. Если функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  записана в ДНФ, причем ранг каждой элементарной конъюнкции равен  $n$ , то такая ДНФ называется *совершенной ДНФ* (СДНФ), а конъюнкции — членами СДНФ или *конституентами единицы*.

Определение 4. Выражение вида

$$x_1^{\alpha_1} \vee x_2^{\alpha_2} \vee \dots \vee x_r^{\alpha_r} \quad (1.31)$$

называется *элементарной дизъюнкцией* ( $D$ ) ранга  $r$ .

Определение 5. Две элементарные конъюнкции называются *ортогональными*, если их произведение равно нулю. Например, произведение элементарных конъюнкций  $x_1 x'_2$  и  $x_1 x_2 x_3 x_4$  равно нулю, так как одна из них содержит  $x'_2$ , а другая  $x_2$  и, следовательно, они ортогональны.

Определение 6. ДНФ называется *ортогональной ДНФ* (ОДНФ), если все ее члены попарно ортогональны.

В соответствии с этим определением СДНФ является ОДНФ, так как все ее члены попарно ортогональны. Но СДНФ является самой неэкономной из всех ОДНФ, так как она содержит максимальное количество букв.

Определение 7. *Бесповторной ДНФ* (БДНФ) называется такая ДНФ, в которой все буквы имеют разные номера. Буквы  $x_i$  и  $x'_i$  имеют один и тот же номер, поэтому они не могут одновременно входить в БДНФ.

Определение 8. *Бесповторной формой* ФАЛ называется такая форма, в которой все буквы имеют разные номера. Частным случаем бесповторной формы ФАЛ является БДНФ. Например, функция  $f(x_1, \dots, x_8) = x_1(x_2 \vee x_3 \vee x'_4) \vee x_5(x_6 \vee x_7 x'_8)$  записана в бесповторной форме, так как все буквы имеют разные номера.

Определение 9. *Вероятностной функцией* (ВФ) будем называть вероятность истинности ФАЛ

$$P\{f(x_1, \dots, x_n)=1\}. \quad (1.32)$$

Событийная теория вероятностей и математическая логика в случае исчисления высказываний являются нормированными дистрибутивными структурами [49, с. 301]. Именно этот математический факт позволяет перейти к концепции вероятностной логики в том виде, в каком она была сформулирована Дж. Нейманом [40].

Определение 10. Функции алгебры логики, допускающие непосредственный переход к ВФ заменой логических переменных вероятностями, а логических операций соответствующими арифметическими операциями, будем называть *формами перехода к замещению* (ФПЗ).

Определение 11. *Смешанной формой функции вероятностей* (СФФВ) будем называть форму функции, полученную в результате частичного замещения в ФАЛ логических переменных вероятностями и содержащую одновременно два типа переменных (логические переменные и вероятности) и две системы операций (логические и арифметические). Особенность СФФВ состоит в том, что в ней все зависимости от аргументов определены в явной форме через используемые элементарные операции (логические и арифметические). Она не может содержать операторов типа  $P(f=1)$ , если неизвестно явное выражение таких функций в виде ВФ или СФФВ. Смешанная форма имеет простой вероятностный смысл. Если в функции  $f$  после замещения некоторых логических переменных остались незамещенными переменные вектора  $X$ , то СФФВ записывается как функция векторного аргумента  $X$ , т. е.  $P(f=1)=P(X)$ . Это выражение имеет смысл условной вероятности того, что  $f=1$ , причем условия записаны с помощью незамещенных логических переменных. Эти условия переменны или случайны. После задания значения вектора  $X=X^0$  вероятность  $P(X)$  превращается в условную вероятность, записанную в обычной для теории вероятностей форме.

Определение 12. Форма ФАЛ, допускающая переход к СФФВ путем замены части логических переменных соответствующими вероятностями и логических операций арифметическими и перевода незамещенных логических переменных в показатели степени вероятностей, называется *формой перехода к частичному замещению* (ФПЧЗ).

ФПЧЗ является частным случаем ФПЗ наряду с формой перехода к полному замещению (ФППЗ), в котором производится замещение одновременно всех логических переменных.

Если ФАЛ представлена в ФПЗ, то переход к ВФ осуществляется по следующим правилам:

1) каждая буква в ФПЗ заменяется вероятностью ее равенства единице, причем

$$P\{x_i=1\}=R_i, \quad P\{x'_i=1\}=P\{x_i=0\}=1-R_i=Q_i; \quad (1.33)$$

2) отрицание функции заменяется разностью между единицей и вероятностью равенства этой функции единице, например

$$P\{f(x_1, \dots, x_7) = [(x_1 x_2)' (x_3 x_4)' (x_5 (x'_6 x'_7)')]'\} = 1 = 1 - (1 - R_1 R_2) (1 - R_3 R_4) [1 - R_5 (1 - Q_6 Q_7)]; \quad (1.34)$$

3) операции логического умножения и сложения заменяются операциями арифметического умножения и сложения.

В настоящее время известно несколько форм перехода к полному замещению. Так, ФАЛ, записанные в СДНФ, ОДНФ или в форме бесповторной ФАЛ в базе конъюнкция — отрицание, являются ФПЗ. Справедливость данного утверждения доказывается путем перехода от булевой алгебры к алгебре событий и теоремам сложения и умножения теории вероятностей [32, 34, 49].

ВФ для ФАЛ, представленной в произвольной бесповторной форме, можно находить по ее выражению в базе конъюнкция — отрицание, которое получается путем многократного применения правил де Моргана (1.20).

Пусть, например,

$$f(x_1, \dots, x_8) = x_1(x_2 \vee x_3 \vee x'_4) \vee x_5(x_6 \vee x_7 x'_8)$$

и требуется найти  $P\{f(x_1, \dots, x_8) = 1\}$ . Так как эта функция является бесповторной (хотя и не ДНФ), то

$$f(x_1, \dots, x_8) = \{x_1 [x'_2 x'_3 x_4]'\} \{x_5 [x'_6 (x_7 x'_8)]'\}' \quad (1.35)$$

$$P\{f(x_1, \dots, x_8) = 1\} = 1 - \{1 - R_1 [1 - Q_2 Q_3 R_4]\} \times \\ \times \{1 - R_5 [1 - Q_6 (1 - R_7 Q_8)]\}. \quad (1.36)$$

Существующие ФПЗ3 и правила перехода к смешанной форме будут рассмотрены далее.

Определение 13. *Равнозначность*, или *эквивалентность*, высказываний  $A$  и  $B$  обозначается символом  $\sim$ . Значение истинности эквивалентных высказываний  $A$  и  $B$  определяется в зависимости от значений истинности исходных высказываний по следующим соотношениям:

$$0 \sim 0 = 1; 0 \sim 1 = 0; 1 \sim 0 = 0; 1 \sim 1 = 1. \quad (1.37)$$

Определение 14. *Разноименность*, или *отрицание равнозначности* (чаще эту операцию называют *логическим сложением по модулю 2*), высказываний  $A$  и  $B$  обозначается символом  $\oplus$  или  $\oplus$ , (В дальнейшем будем называть эту операцию логическим сложением по модулю 2.) Значение истинности разноименных высказываний  $A$  и  $B$  определяется в зависимости от значений истинности исходных высказываний по следующим соотношениям:

$$0 \oplus 0 = 0; 0 \oplus 1 = 1; 1 \oplus 0 = 1; 1 \oplus 1 = 0. \quad (1.38)$$

Иногда [22] эту операцию называют еще *строгой дизъюнкцией* и обозначают  $\vee\vee$  (или  $\vee$ ). Связка, соединяющая высказывания  $A$  и  $B$ , в этом случае понимается в смысле «либо — либо». Из соотношений (1.38) видно, что строго разделительное суждение  $A \vee\vee B$  истинно лишь тогда, когда  $A$  ложно,  $B$  истинно и когда  $A$  истинно,  $B$  ложно.

Для логической операции сложения по модулю 2 имеют место переместительный и сочетательный законы, а также распределительный закон относительно операции конъюнкции:

$$29. A \oplus B = B \oplus A, \quad (1.39)$$

$$30. A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C, \quad (1.40)$$

$$31. A \wedge (B \oplus C) = (A \oplus B) \wedge (A \oplus C). \quad (1.41)$$

Имеют место также очевидные соотношения

$$32. A \oplus 1 = A'; \quad 33. A \oplus 0 = A; \quad (1.42)$$

$$34. A \oplus A = 0; \quad 35. A \oplus A' = 1.$$

Перечисленные основные логические операции связаны с операцией сложения по модулю 2 следующими формулами:

$$36. A \vee B = A \oplus B \oplus AB; \quad (1.43)$$

$$37. A \wedge B = A \oplus AB'; \quad (1.44)$$

$$38. A \oplus B = AB' \vee A'B. \quad (1.45)$$

Определение 15. Булевой разностью (или логической разностью) функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  по аргументу  $x_i$  называется результат логического сложения по модулю 2 исходной функции и функции, полученной из исходной путем замены аргумента  $x_i$  на его отрицание:

$$\Delta_{x_i} f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \oplus f(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n). \quad (1.46)$$

Определение 16. Функцию

$$f_{x'_i}(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n) \quad (1.47)$$

будем называть симметричной функцией по  $x_i$  по отношению к исходной  $f(x_1, \dots, x_n)$ .

Определение 17. Функции, полученные заменой в исходной ФАЛ аргумента  $x_i$  на 1 и 0, будем называть единичной и нулевой функцией по аргументу  $x_i$  и обозначать соответственно:

$$f_1^{(i)}(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, 1, \dots, x_n), \quad (1.48)$$

$$f_0^{(i)}(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, 0, \dots, x_n). \quad (1.49)$$

Определение 18. Функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  называется монотонной [76], если для любых наборов  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  и  $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ , таких, что  $\alpha_i \leq \beta_i$ , имеет место соотношение

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq f(\beta_1, \dots, \beta_n). \quad (1.50)$$

ФАЛ можно представить в табличной форме, в виде аналитической записи в строку (как приводилось), а также в виде логиче-

ских матриц. Для представления логических уравнений в виде логических матриц конъюнкции обозначаются расположением логических символов в строке, а дизъюнкции — их расположением в столбце [65].

К логическим матрицам применимы все известные преобразования алгебры логики. Так, переместительный закон конъюнкции допускает перестановку логических символов в строке, а переместительный закон дизъюнкции — перестановку строк логической матрицы.

Пусть ФАЛ имеет вид

$$f(x_1, \dots, x_8) = \{ \{ x_1 \wedge x_3 \wedge [x_5 \vee (x_4 \wedge x_6 \wedge x_8)] \} \vee \vee \{ x_2 \wedge x_4 \wedge [x_6 \vee (x_3 \wedge x_5 \wedge x_8)] \} \} \wedge x_7. \quad (1.51)$$

В матричной форме уравнение (1.51) можно представить в виде

$$f(x_1, \dots, x_8) = \left| \begin{array}{cc|c} x_1 x_3 & x_5 & x_7 \\ & x_4 x_6 x_8 & \\ x_2 x_4 & x_6 & \\ & x_3 x_5 x_8 & \end{array} \right| x_7 = \left| \begin{array}{c} x_1 x_3 x_5 x_7 \\ x_1 x_3 x_4 x_6 x_7 x_8 \\ x_2 x_4 x_6 x_7 \\ x_2 x_3 x_4 x_5 x_7 x_8 \end{array} \right|. \quad (1.52)$$

Вторая матрица уравнения (1.52) записана в ДНФ.

При приведении к нормальной форме логические матрицы упрощаются. Например, используя распределительный закон конъюнкции, получаем

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \wedge (x_2 \vee x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3) = \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_2 \\ & x_3 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} x_1 x_2 \\ x_1 x_3 \end{array} \right|, \quad (1.53)$$

а применяя закон инверсии, находим

$$\begin{aligned} [(x_1 \wedge x_2) \vee (x_3 \wedge x_4)]' &= (x_1' \vee x_2') \wedge (x_3' \vee x_4') = \\ &= \left| \begin{array}{c|c} x_1 x_2 \\ x_3 x_4 \end{array} \right|' = \left| \begin{array}{c} x_1' \\ x_2' \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} x_3' \\ x_4' \end{array} \right|. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Как видно из последнего примера, инверсия логических матриц осуществляется заменой конъюнктивных связей логических символов в строке на дизъюнктивные связи отрицаний этих символов, располагаемых в столбце, а дизъюнктивных связей между строками на конъюнктивные связи между столбцами, образованными из этих строк.

#### 1.4. НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ И ВЕРОЯТНОСТНОЙ ЛОГИКИ

Тесная связь между теорией вероятностей событий и математической логикой замечена уже давно. Еще в 1917 г. С. Н. Бернштейн использовал аксиоматику логики высказываний для аксиоматизации теории вероятностей [6]. В настоящее время математическая логика

и теория вероятностей объединяются на новой основе. Теория вероятностей количественно оценивает надежность систем, структура которых описывается средствами математической логики.

Основной трудностью в применении ЛВМ исследования надежности сложных структур является преобразование произвольных ФАЛ к ФППЗ. Чтобы сделать это преобразование направленным и стандартным, были разработаны специальные теоремы и алгоритмы. В математической логике теоремой называется предложение аксиоматической теории, выведенное на основе правил данной теории, или формула, для которой существует доказательство [22].

В работе [49] была доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** Любую ФАЛ, зависящую от  $n$  аргументов ( $n \geq 1$ ), можно представить в следующем виде:

$$f(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \bigvee x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_i^{\alpha_i} f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \dots, \alpha_i, x_{i+1}, \dots, x_n). \quad (1.55)$$

Эта теорема называется *теоремой разложения*, так как она позволяет производить разложение произвольной ФАЛ по любым  $i$  аргументам. Так, при разложении ФАЛ по одному аргументу  $x_i$  имеем

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_i f_1^{(i)}(x_1, \dots, x_n) \vee x_i' f_0^{(i)}(x_1, \dots, x_n), \quad (1.56)$$

а при разложении по всем  $n$  аргументам получим СДНФ исходной ФАЛ

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_1 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}. \quad (1.57)$$

Символ  $\bigvee_1$  означает, что дизъюнкция берется только по таким наборам  $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$ , на которых выполняется равенство

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 1. \quad (1.58)$$

Выражение (1.56) известно под названием формулы разложения Шеннона [21], которая оказывается справедливой и для алгебры по модулю 2 [56]. Применив правила (1.39)–(1.45) к правой части (1.56), получим

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= x_i f_1^{(i)}(x_1, \dots, x_n) \vee x_i' f_0^{(i)}(x_1, \dots, x_n) = \\ &= x_i f_1^{(i)}(x_1, \dots, x_n) \oplus x_i' f_0^{(i)}(x_1, \dots, x_n) \oplus \\ &\oplus x_i x_i' f_1^{(i)}(x_1, \dots, x_n) f_0^{(i)}(x_1, \dots, x_n) = \\ &= x_i f_1^{(i)}(x_1, \dots, x_n) \oplus x_i' f_0^{(i)}(x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (1.59)$$

**Свойство 1.**

$$\Delta_{x_i} f(x_1, \dots, x_n) = f_1^{(i)}(x_1, \dots, x_n) \oplus f_0^{(i)}(x_1, \dots, x_n). \quad (1.60)$$

Для доказательства эквивалентности выражений (1.46) и (1.60) используем формулу разложения (1.59) и правила (1.39)–(1.45).

В соответствии с (1.46) и (1.47) имеем

$$\begin{aligned} \Delta_{x_i} f(x_1, \dots, x_n) &= f(x_1, \dots, x_n) \oplus f_{x'_i}(x_1, \dots, x_n) = \\ &= [x_i f_1^{(i)}(x_1, \dots, x_n) \oplus x'_i f_0^{(i)}(x_1, \dots, x_n)] \oplus \\ &\oplus [x'_i f_1^{(i)}(x_1, \dots, x_n) \oplus x_i f_0^{(i)}(x_1, \dots, x_n)] = \\ &= (x_i \oplus x'_i) f_1^{(i)}(x_1, \dots, x_n) \oplus (x'_i \oplus x_i) f_0^{(i)}(x_1, \dots, x_n) = \\ &= f_1^{(i)}(x_1, \dots, x_n) \oplus f_0^{(i)}(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Свойство 2.

$$\begin{aligned} \Delta_{x_i} f(x_1, \dots, x_n) &= f_1^{(i)}(x_1, \dots, x_n) f_0^{\prime(i)}(x_1, \dots, x_n) \vee \\ &\vee f_1^{\prime(i)}(x_1, \dots, x_n) f_0^{(i)}(x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (1.61)$$

Данное свойство следует из (1.60) с учетом правила (1.45). Используя алгебру множеств, можно показать аналогию понятий булевой разности и разности множеств  $A$  и  $B$ , представленной на рис. 1.5, где функции  $f_1^{(i)}(x_1, \dots, x_n)$  и  $f_0^{(i)}(x_1, \dots, x_n)$  интерпретируются множеством клеток карты Карно [61], на которых они принимают значение, равное единице:

$$A = f_1^{(i)}(x_1, \dots, x_n) \vee f_0^{(i)}(x_1, \dots, x_n),$$

$$B = f_1^{(i)}(x_1, \dots, x_n) \wedge f_0^{(i)}(x_1, \dots, x_n),$$

$$\begin{aligned} A \setminus B &= A \cap B' = [f_1^{(i)}(x_1, \dots, x_n) \vee f_0^{(i)}(x_1, \dots, x_n)] \wedge \\ &\wedge [f_1^{(i)}(x_1, \dots, x_n) f_0^{(i)}(x_1, \dots, x_n)]' = \\ &= f_1^{(i)}(x_1, \dots, x_n) f_0^{\prime(i)}(x_1, \dots, x_n) \vee \\ &\vee f_1^{\prime(i)}(x_1, \dots, x_n) f_0^{(i)}(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Следствием теоремы 1 являются следующие две полезные формулы:

$$(fx)'x = f'x, (f'x)'x = x. \quad (1.61a)$$

Теорема 2. Для всех монотонных ФАЛ множество наборов, на которых нулевая функция по аргументу  $x_i$  принимает значение, равное единице, есть подмножество множества наборов, на которых единичная функция по тому же аргументу  $x_i$  равна единице, т. е.

$$\begin{aligned} \{(x_1, \dots, x_n) : f_0^{(i)}(x_1, \dots, x_n) = 1\} &\subset \\ &\subset \{(x_1, \dots, x_n) : f_1^{(i)}(x_1, \dots, x_n) = 1\}. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Доказательство этой теоремы дано в [56].

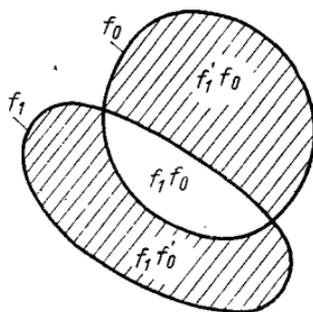


Рис. 1.5. Графическая иллюстрация понятия булевой разности

Из теоремы 2 следует пять следствий:

$$1) \{(x_1, \dots, x_n) : f_0^{(i)}(x_1, \dots, x_n) = 1\} \subset \{(x_1, \dots, x_n) : f(x_1, \dots, x_n) = 1\} \subset \{(x_1, \dots, x_n) : f_1^{(i)}(x_1, \dots, x_n) = 1\}; \quad (1.63)$$

$$2) f_1^{(i)}(x_1, \dots, x_n) \vee f_0^{(i)}(x_1, \dots, x_n) \equiv f_1^{(i)}(x_1, \dots, x_n); \quad (1.64)$$

$$3) f_1^{(i)}(x_1, \dots, x_n) \wedge f_0^{(i)}(x_1, \dots, x_n) \equiv f_0^{(i)}(x_1, \dots, x_n); \quad (1.65)$$

$$4) f_1^{(i)}(x_1, \dots, x_n) \wedge f_0^{(i)}(x_1, \dots, x_n) \equiv \Delta_{x_i} f(x_1, \dots, x_n), \quad (1.66)$$

$$5) f_1^{(i)}(x_1, \dots, x_n) \wedge f_0^{(i)}(x_1, \dots, x_n) \equiv 0. \quad (1.67)$$

Теорема 2 и следствия (1.63)—(1.66) графически иллюстрируются рис. 1.6,а, где булева разность показана заштрихованной

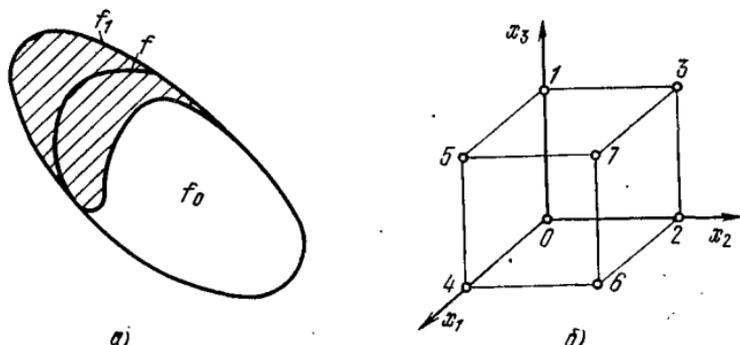


Рис. 1.6. Графическая иллюстрация:  
а — теоремы 2; б — примера 1.1.

областью, и примером 1.1, где наборы исходной ФАЛ представлены вершинами  $n$ -мерного куба ( $n=3$ ), показанного на рис. 1.6,б.

**Пример 1.1.** Имеем ФАЛ в ДНФ  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee x_2 x_3 = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ , показанную на рис. 1.6,б. Тогда

$$f_1^{(1)}(x_1, x_2, x_3) = 1 \vee x_2 x_3 = 1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$

$$f_0^{(1)}(x_1, x_2, x_3) = 0 \vee x_2 x_3 = x_2 x_3 = \{3, 7\}, \quad f_0^{(1)}(x_1, x_2, x_3) \subset f_1^{(1)}(x_1, x_2, x_3),$$

$$f_1^{(2)}(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee 1 x_3 = x_1 \vee x_3 = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\},$$

$$f_0^{(2)}(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee 0 x_3 = x_1 = \{4, 5, 6, 7\},$$

$$f_0^{(2)}(x_1, x_2, x_3) \subset f_1^{(2)}(x_1, x_2, x_3),$$

$$f_1^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee x_2 1 = x_1 \vee x_2 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$

$$f_0^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee x_2 0 = x_1 = \{4, 5, 6, 7\},$$

$$f_0^{(3)}(x_1, x_2, x_3) \subset f_1^{(3)}(x_1, x_2, x_3).$$

**Теорема 3.** Частная производная от вероятности истинности монотонной ФАЛ  $f(x_1, \dots, x_n)$  по вероятности истинности аргумента  $x_i$  численно равна вероятности истинности булевой разности этой функции по аргументу  $x_i$ :

$$\frac{\partial P \{f(x_1, \dots, x_n) = 1\}}{\partial P \{x_i = 1\}} = P \{\Delta_{x_i} f(x_1, \dots, x_n) = 1\}. \quad (1.68)$$

Доказательство этой теоремы дано в [56].

**Теорема 4.** Вероятность истинности произвольной ФАЛ, представленной в ОДНФ, равна сумме вероятностей истинности всех ортогональных членов этой ФАЛ:

$$P \left\{ f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{i=1}^s O_i = 1 \right\} = \sum_{i=1}^s P \{O_i = 1\}. \quad (1.69)$$

Данная теорема легко доказывается с помощью теоремы сложения вероятностей несовместных событий, каковыми и являются в совокупности все члены ОДНФ. Теорема будет справедлива и в том случае, если  $O_i$  не элементарные конъюнкции, а любые ФАЛ, попарно ортогональные.

**Теорема 5.** Дизъюнкция ортогональных бесповторных форм в базисе конъюнкция — отрицание является формой перехода к полному замещению.

Справедливость теоремы следует из теоремы 4 и того, что каждое слагаемое в исходной дизъюнктивной форме является ФППЗ.

**Пример 1.2.** Пусть задана функция  $f(x_1, \dots, x_5) = f$ :

$$f = x_1(x_3 \vee x_4 x_5) \vee x_2(x_4 \vee x_3 x_5). \quad (1.70)$$

**Решение.** Преобразуем ее к ортогональному виду, используя правило 26 и формулы (1.61а):

$$\begin{aligned} f &= x_1(x_3 \vee x_4 x_5) \vee (x_1(x_3 \vee x_4 x_5))' x_2(x_4 \vee x_3 x_5) = \\ &= x_1(x_3 \vee x_4 x_5) \vee x_2(x_4(x_1(x_3 \vee x_5))' \vee x_1' x_3 x_5). \end{aligned}$$

Перейдем в первом и втором слагаемых к базису конъюнкция — отрицание:

$$f = x_1(x_3'(x_4 x_5)')' \vee x_2 x_4'(x_1(x_3' x_5)')' \vee x_1' x_2 x_3 x_5'. \quad (1.71)$$

Это и есть дизъюнкция ортогональных бесповторных форм.

Замещение дает:

$$P(f=1) = R_1(1 - Q_3(1 - R_4 R_5)) + R_2 R_4(1 - R_1(1 - Q_3 Q_4)) + Q_1 R_2 R_3 Q_4 R_5.$$

**Теорема 6.** Пусть: 1) задана ФАЛ

$$f(X) = \left[ \bigvee_{i=1}^n \left( \bigwedge_{j \in M_i} x_j \right)^{\alpha_i} f_i(X_i) \right] \left( \bigwedge_{j \in M_0} x_j \right)^{\alpha_0} f_0(X_0), \quad (1.72)$$

где  $X$  и  $X_i$  — векторные аргументы функций  $f$  и  $f_i$  соответственно;  $\alpha_i$  — постоянные коэффициенты, равные нулю или единице;  $x^\alpha = x$  при  $\alpha = 1$  и  $x^\alpha = x'$  при  $\alpha = 0$ ;  $x_j$  — бесповторные логические переменные;  $j \in M = \bigcup_{i=0}^n M_i$ ;  $f_i$  — ФАЛ произвольного вида; события

$x_j = \alpha_j$ , где  $\alpha_j = 0$  или  $1$ , независимы в совокупности, причем  $P(x_j = 1) = R_j$ . Тогда  $f(X)$  есть форма перехода к частичному замещению и ей соответствует СФВ

$$P_f = P(f(X) = 1) = P(f_0, f_1, \dots, f_n) = (1 - a_0^{f_0}) \left( 1 - \prod_{i=1}^n a_i^{f_i} \right), \quad (1.73)$$

где

$$a_i = (1 - \alpha_i) \prod_{j \in M_i} R_j + \alpha_i \left( 1 - \prod_{j \in M_i} R_j \right). \quad (1.74)$$

В формуле (1.73) операция возведения в степень определена как обычно:  $a_i^{f_i} = a_i$  при  $f_i = 1$  и  $a_i^{f_i} = 1$  при  $f_i = 0$ .

**Пример 1.3.** Пусть

$$f(X) = x_4(x_{41}f_1 \vee x_{42}f_2 \vee x_{43}f_3), \quad (1.75)$$

где  $x_4, x_{41}, x_{42}, x_{43}$  — бесповторные переменные. Найти  $P(f=1)$ .

*Решение.* Согласно (1.73) бесповторные логические переменные заменяем соответствующими вероятностями  $R_i = P(x_i = 1)$ , а логические операции — арифметическими. Функции  $f_i$  переводим в показатели степени  $Q_{4i}^{f_i}$ . Поскольку здесь  $\alpha_i = 1$ , то  $a_i = Q_{4i} = 1 - R_{4i}$ , а поэтому

$$P(f=1) = R_4(1 - Q_{41}^{f_1} Q_{42}^{f_2} Q_{43}^{f_3}). \quad (1.76)$$

Дальнейшее преобразование (1.73) и (1.76) к ВФ проводится путем замещения переменных, входящих в функции, в соответствии с теоремой разложения. При этом если некоторая функция  $f_i$  содержит только бесповторные переменные, то их замещение проводится независимо от остальных  $f_j$ .

**Теорема 7** (первая теорема разложения). Пусть задана некоторая СФВ  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , зависящая от логических переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , и пусть события  $A_i: (x_i = \alpha_i)$  независимы в совокупности. Тогда

$$P(x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_n) = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)} P(x_i = \alpha_i, i = \overline{1, s}) \times \times P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, x_{s+1}, \dots, x_n). \quad (1.77)$$

Утверждение теоремы следует непосредственно из формулы полной вероятности.

**Теорема 8.** Пусть заданы две логические функции

$$G_1(x_1, x_2, \dots, x_n, X_1, X_2, \dots, X_n) = \bigvee_{i=1}^n x_i f_i(X_i),$$

$$G_2(x_1, x_2, \dots, x_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = \bigvee_{i=1}^n x_i g_i(Y_i), \quad (1.78)$$

где  $x_i$  — бесповторные логические переменные;  $X_i$  и  $Y_i$  — векторные аргументы логических функций  $f_i$  и  $g_i$  произвольного вида.

Составим третью функцию

$$\bar{f}(x_1, x_2, \dots, x_n, X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n) = G'_1 G_2. \quad (1.79)$$

Тогда, если  $\bar{f}_i$  и  $g_i$  ортогональны, т. е.  $\bar{f}_i g_i = 0$  для  $i=1, 2, \dots, n$ , то (1.79) является формой перехода к частичному замещению и ей соответствует СФФВ

$$P_f = P(f=1) = \prod_{i=1}^n Q_i^{f_i} \left( 1 - \prod_{i=1}^n Q_i^{g_i} \right). \quad (1.80)$$

Если  $\bar{f}_i$  и  $g_i$  неортогональны, то формой перехода к частичному замещению для функции (1.79) является выражение

$$\bar{f} = \left( \bigvee_{i=1}^n x_i \bar{f}_i \right)' \left( \bigvee_{i=1}^n x_i \bar{f}'_i g_i \right) \quad (1.81)$$

и ему соответствует СФФВ

$$P_f = P(f=1) = \prod_{i=1}^n Q_i^{f_i} \left( 1 - \prod_{i=1}^n Q_i^{f'_i g_i} \right). \quad (1.82)$$

**Пример 1.4.** Пусть задана функция

$$\bar{f}(X) = (x_1 x_4 \vee x_2 x_3 x'_4)' (x_1 x_3 \vee x_2 x_4). \quad (1.83)$$

Найти  $P(f=1)$ .

*Решение.* Здесь  $\bar{f}_1 = x_4$ ,  $\bar{f}_2 = x_3 x'_4$ ,  $g_1 = x_3$ ,  $g_2 = x_4$ . Функции  $\bar{f}_2$  и  $g_2$  ортогональны. Поэтому ортогонализация необходима лишь для  $\bar{f}_1$  и  $g_1$ . Используя (1.82), получаем

$$P(f=1) = Q_1^{x_4} Q_2^{x_3 x'_4} (1 - Q_1^{x_3} Q_2^{x_4}).$$

Проведем здесь замещение сначала  $x_4$ , а затем  $x_3$  и окончательно получим

$$P(f=1) = R_4 Q_1 R_2 + Q_4 R_3 Q_2 R_1. \quad (1.84)$$

**Теорема 9.** Дизъюнкция и конъюнкция ФАЛ

$$\bar{f}(X) = \bigvee_{(s)} \bar{f}_s(X), \quad (1.85)$$

$$\bar{f}(X) = \bigwedge_{(s)} \bar{f}_s(X), \quad (1.86)$$

где  $\bar{f}_s(X)$  — ФАЛ вида (1.72);  $x_j$  — неповторные переменные для всех  $j \in M \cup M_{s,i}$  являются формами перехода к частичному замещению и им соответствуют СФФВ

$$Q_f = P\left(\bigvee_{(s)} \bar{f}_s = 0\right) = \prod_{(s)} (1 - P(\bar{f}_s = 1)), \quad (1.87)$$

$$P_f = P\left(\bigwedge_{(s)} \bar{f}_s = 1\right) = \prod_{(s)} P(\bar{f}_s = 1). \quad (1.88)$$

Вероятности  $P(f_s=1)$  определяют по формуле (1.73). Если в (1.85) функции ортогональны, то достаточно бесповторность замещаемых переменных лишь в пределах одной функции  $f_s(X)$ , т. е. для  $j \in M_s = \bigcup_{(i)} M_{si}$ . В этом случае замещение переменных в различных

слагаемых проводится независимо друг от друга.

**Теорема 10.** Логическая функция

$$f(X) = \bigwedge_{j=1}^{k-1} f'_j(X) f_k(X), \quad (1.89)$$

где  $f_j(X) = \bigvee_{i=1}^n x_i f_{ij}$  ( $f_{ij}$  — ФАЛ произвольного вида), является формой перехода к частичному замещению и ей соответствует СФВ

$$P(f=1) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{k-1} Q_i^{f_{ij} g'_{i,j-1}} \left( 1 - \prod_{i=1}^n Q_i^{g'_{i,k-1} f_{ik}} \right), \quad g_{is} = \bigvee_{j=1}^s f_{ij}. \quad (1.90)$$

Эта теорема является обобщением теоремы 8 на случай  $k > 2$  и доказывается с помощью теоремы 8.

**Пример 1.2.** Пусть задана функция

$$f = (x_1 f_{11})' (x_2 f_{21})' (x_1 f_{12} \vee x_2 f_{22} \vee (x_1 f_{13})' (x_2 f_{23})' (x_1 f_{14} \vee x_2 f_{24})). \quad (1.91)$$

Необходимо найти смешанную форму, проведя замещение  $x_1$  и  $x_2$ .

*Решение.* Если раскрыть внешние скобки, то получаются два слагаемых вида (1.89). Выполняя их ортогонализацию с помощью правила 26, запишем

$$f = (x_1 f_{11})' (x_2 f_{21})' (x_1 f_{12} \vee x_2 f_{22}) \vee (x_1 f_{11} \vee x_2 f_{21})' (x_1 f_{12} \vee x_2 f_{22})' \times \\ \times (x_1 f_{13} \vee x_2 f_{23})' (x_1 f_{14} \vee x_2 f_{24}) = (x_1 f_{11})' (x_2 f_{21})' (x_1 f_{12} \vee x_2 f_{22}) \vee \\ \vee (x_1 (f_{11} \vee f_{12} \vee f_{13})' (x_2 (f_{21} \vee f_{22} \vee f_{23}))' (x_1 f_{14} \vee x_2 f_{24})).$$

Теперь можно провести замещение  $x_1$  и  $x_2$  отдельно в каждом слагаемом, используя теоремы 8 и 10:

$$P(f=1) = Q_1^{f_{11}} Q_2^{f_{21}} (1 - Q_1^{f'_{11} f'_{12} f'_{13}} Q_2^{f'_{21} f'_{22}} (1 - Q_1^{f'_{11} f'_{12} f'_{13}} Q_2^{f'_{21} f'_{22} f'_{23}} \times \\ \times (1 - Q_1^{f'_{11} f'_{12} f'_{13} f'_{14}} Q_2^{f'_{21} f'_{22} f'_{23} f'_{24}}))) \quad (1.92)$$

**Теорема 11** (вторая теорема разложения). Пусть

$$\Phi(z, x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^r P_i(x_1, x_2, \dots, x_n) z^i \quad (1.93)$$

— производящий полином некоторого дискретного распределения с коэффициентами, записанными в смешанной форме и зависящими от логических переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Тогда

$$\Phi(z, x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_n) = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)} P(x_i = \alpha_i, \\ i = \overline{1, s}) P_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, x_{s+1}, \dots, x_n). \quad (1.94)$$

**Пример 1.6.** Пусть дискретное распределение задано в виде вероятностей, представленных в смешанной форме,

$$\begin{aligned} P_0(x_1, x_2) &= Q^2(x_1 \vee x_2), \quad P_1(x_1, x_2) = Q^{x_1} R^{x_2}, \\ P_2(x_1, x_2) &= 1 - Q^{x_1 x_2}. \end{aligned} \quad (1.95)$$

Необходимо найти безусловные вероятности, образующие это распределение.

*Решение.* Составим полином

$$\Phi(z, x_1, x_2) = Q^2(x_1 \vee x_2) + zQ^{x_1} R^{x_2} + z^2(1 - Q^{x_1 x_2}). \quad (1.96)$$

Проведем сначала разрезание по  $x_1$ :

$$\Phi(z, x_2) = R_1[Q^2 + zQR^{x_2} + z^2(1 - Q^{x_2})] + Q_1(Q^{2x_2} + zR^{x_2}).$$

В каждом из слагаемых полиномов проведем разрезание по  $x_2$ :

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= R_1 R_2(Q^2 + zQR + z^2R) + R_1 Q_2(Q^2 + zQ) + Q_1 R_2(Q^2 + zR) + \\ &\quad + Q_1 Q_2(1 + z). \end{aligned} \quad (1.97)$$

Группируя здесь коэффициенты при  $z^i$ , получаем искомый полином. Тот же результат можно получить, если провести замещение логических переменных отдельно в каждом из исходных коэффициентов, а затем составить полином.

**Теорема 12** (третья теорема разложения). Пусть

$$\varphi(z, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^m p_i(x_1, \dots, x_n) z^i, \quad (1.98)$$

$$\varphi(z, \alpha_1, \dots, \alpha_s, x_{s+1}, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^m p_i(\alpha_1, \dots, \alpha_s, x_{s+1}, \dots, x_n) z^i, \quad (1.99)$$

$$\begin{aligned} \Phi(z, x_1, x_2, \dots, x_n) &= \varphi^r(z, x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ &= \sum_{i=0}^{mr} P_i(x_1, x_2, \dots, x_n) z^i. \end{aligned} \quad (1.100)$$

Тогда

$$\Phi(z, \alpha_1, \dots, \alpha_s, x_{s+1}, \dots, x_n) = [\varphi(z, \alpha_1, \dots, \alpha_s, x_{s+1}, \dots, x_n)]^r. \quad (1.101)$$

**Пример 1.7.** Пусть полином  $\varphi(z, x_1, x_2)$  определен формулой (1.96), а

$$\Phi(z, x_1, x_2) = \varphi^2(z, x_1, x_2).$$

Найти  $\Phi(z, 1, 1)$ .

*Решение.* Возведение в степень в формуле (1.96) дает

$$\begin{aligned} \Phi(z, x_1, x_2) = & (1 - Q^{x_1 x_2})^2 z^4 + 2Q^{x_1 R^{x_2}} (1 - Q^{x_1 x_2}) z^3 + \\ & + (Q^{2x_1 R^{2x_2}} + 2Q^{2(x_1 \vee x_2)} (1 - Q^{x_1 x_2})) z^2 + 2Q^{2(x_1 \vee x_2)} Q^{x_1 R^{x_2}} z + \\ & + Q^4 (x_1 \vee x_2). \end{aligned} \quad (1.102)$$

Непосредственно из (1.102) имеем

$$\Phi(z, 1, 1) = R^2 z^4 + 2QR^2 z^3 + (2+R)Q^2 R z^2 + 2Q^3 R z + Q^4. \quad (1.103)$$

С другой стороны, согласно теореме 12

$$\Phi(z, 1, 1) = (Q^2 + RQz + Rz^2)^2. \quad (1.104)$$

Нетрудно убедиться, что (1.103) и (1.104) совпадают.

**Теорема 13** (четвертая теорема разложения). Пусть

$$\Phi(z, x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{(j)} \Phi_j(z, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1.105)$$

$$\begin{aligned} \Phi_j(z, x_{s+1}, \dots, x_n) &= \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)} P(x_i = \\ &= \alpha_i, i = \overline{1, s}) \Phi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_s, x_{s+1}, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (1.106)$$

$$\begin{aligned} \Phi(z, x_{s+1}, \dots, x_n) &= \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)} P(x_i = \alpha_i, i = \\ &= \overline{1, s}) \Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_s, x_{s+1}, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (1.107)$$

Тогда

$$\Phi(z, x_{s+1}, \dots, x_n) = \sum_{(j)} \Phi_j(z, x_{s+1}, \dots, x_n). \quad (1.108)$$

Эта теорема устанавливает способ перехода от производящего полинома, записанного в смешанной форме, к полиному, не содержащему логических переменных, если исходный полином является суммой нескольких слагаемых полиномов. Согласно теореме допускается раздельное замещение переменных в каждом из слагаемых полиномов. В ряде случаев такой порядок замещения существенно упрощает преобразования и решение задачи надежности в целом, так как списки незамещенных переменных в слагаемых могут значительно отличаться. Доказательства теорем 6, 8—13 приведены в [72].

# МЕТОДЫ СОСТАВЛЕНИЯ УСЛОВИЙ РАБОТОСПОСОБНОСТИ СИСТЕМЫ

## 2.1. СПОСОБЫ ОПИСАНИЯ УСЛОВИЙ РАБОТОСПОСОБНОСТИ СИСТЕМЫ

Проблема обеспечения надежности технических систем чрезвычайно многогранна и охватывает все стадии «жизни» системы — от ее проектирования до эксплуатации. В настоящее время назрела необходимость связать исследование вопросов надежности с ее проектированием, чтобы иметь возможность уже на этом этапе использовать результаты расчетов надежности. Отсутствие соответствующих расчетов приводит на практике к появлению недостаточно обоснованных решений, в результате чего последующие усилия, предпринимаемые для устранения обнаруженных недостатков, оказываются, как правило, дорогостоящими и малоэффективными.

Можно назвать целый ряд технических вопросов, которые при проектировании судовых электроэнергетических систем до сих пор решаются лишь на основании логических рассуждений и приобретенного опыта, а не с помощью расчетов надежности. К ним относятся выбор числа и определение пропускной способности различных переключателей в системе генерирования и распределения электроэнергии, обоснование мест установки некоторых коммутационных аппаратов, выбор рационального варианта схемы распределения электроэнергии, определение эффективности восстановления и резервирования ряда элементов системы, обоснование целесообразных режимов использования элементов системы и другие аналогичные задачи, которые нужно решать на базе количественных оценок и апробированных расчетов надежности системы. Разнообразие практических задач приводит к необходимости использования различных методов расчета надежности технических систем.

Чтобы рассчитать надежность системы, нужно прежде всего описать *условия ее работоспособности*, т. е. условия, при которых она может выполнить стоящую перед ней задачу. Это можно сделать различными способами;

а) словесно,  
б) графически (с помощью структурной схемы системы),

в) аналитически (например, с помощью ФАЛ).

Словесное описание условий работоспособности системы является наиболее распространенным и простым, но, как правило, очень громоздким и недостаточно четким.

Графическое описание с помощью структурной схемы системы является очень наглядным, но, как правило, неполным и неоднозначным.

При построении моделей надежности двухполюсных структур и формализации процессов их функционирования создаются структурные схемы в виде ориентированного, полуориентированного или неориентированного графов. Во многих случаях структурная схема содержит полную информацию о логике возникновения отказов в системе. Тогда ее можно рассматривать как форму представления логических связей между событием «отказ системы» и событиями «отказы элементов», причем как форму, адекватную логической функции работоспособности. Такое соотношение между структурной схемой и ФАЛ характерно для многосвязных информационных систем с одним источником информации, одним получателем при полном оповещении о состоянии сети, для электроэнергетических систем с одной группой потребителей без ограничения мощности генераторов и пропускной способности коммутационной аппаратуры и ряда других систем. Во всех этих случаях система считается работоспособной при наличии хотя бы одного работоспособного пути в структуре между ее полюсами. В дальнейшем такие системы будут называться системами первого типа.

В системах второго типа структурная схема не может отразить полностью логику возникновения отказа в системе. Для этого есть несколько причин, которые могут быть приняты за основу дальнейшей классификации. Первая состоит в том, что работоспособность любого пути между полюсами может зависеть от работоспособности элементов, входящих в другой путь. Отразить эту зависимость в структурной схеме с бесповторным вхождением элементов не удастся. Поэтому структурная схема оказывается неадекватной логической функции работоспособности и является лишь вспомога-

тельным средством при описании математической модели надежности системы. Второй причиной, усложняющей логику работы системы, являются алгоритмы  $\mathcal{E}$  управления на сети. Учет  $\mathcal{E}$  может приводить к тому, что не все работоспособные пути можно использовать для связи входного и выходного полюсов. Это может происходить в свою очередь, по нескольким причинам: Первая группа причин обусловлена различного рода ограничениями на сложность алгоритма  $\mathcal{E}$  и время его работы, на время доставки информации от входного полюса к выходному, на допустимую нагрузку информационных путей и других элементов сети, а также ограничениями, связанными с категоричностью сообщений, правилами доступа к передаваемой информации и т. д. Вторая группа причин обусловлена полнотой информации в узлах о состоянии сети. При неполной информации оповещения передача по сети происходит в условиях некоторой неопределенности о наличии работоспособного пути, результатом чего может быть потеря работоспособности системы при наличии работоспособного пути.

Из приведенного описания систем второго типа следует, что условия работоспособности сложных технических систем не всегда сводятся к двухполюсной схеме функционирования. Структуры многих систем лишь частично выражают способ организации целого из составных частей и в общем случае требуют дополнительно аналитического описания условий работоспособности.

Формализованное (аналитическое) описание условий работоспособности системы является наиболее четким, полным, однозначным и экономным, но пока еще мало-распространенным и непростым.

При исследовании структурной надежности сложных систем целесообразно использовать все способы описания условий работоспособности, компенсируя их взаимные недостатки и дополняя одно описание другим. Следует обратить особое внимание на совершенствование формализованной записи условий работоспособности как наиболее удобной и четкой.

Слабым местом многих существующих методов исследования надежности технических систем является именно невысокая степень формализации и культура «озадачивания» объекта исследования. Условия работоспособности системы часто выглядят весьма расплывчато, неконкретно. В связи с многофункциональным харак-

тером сложных технических систем следует смелее дробить задачи, а не стремиться к описанию единой сверхзадачи.

Известны попытки, направленные на совершенствование именно графического описания условий работоспособности системы (УРС) путем создания своеобразного графического языка [15].

В [15], в частности, предлагаются специальные *надежностно-функциональные* схемы (НФС), под которыми понимают некоторые графические изображения (граф-схемы), отображающие элементы системы и ее функции и позволяющие с помощью набора формальных правил для произвольной совокупности состояний всех элементов однозначно определить состояние системы по каждой из выполняемых ею функций. НФС представляют в виде ориентированных однонаправленных графов. Узлами графа являются элементы системы (прямоугольники) и выполняемые ею функции (окружности), ребра (стрелки) отображают взаимодействие элементов в выполнении функции. В графах выделяются узлы высшего и низшего рангов. Однако, как отмечается в [15], образительные свойства предлагаемых НФС не шире возможностей алгебры логики, хотя НФС представляют свойства рассматриваемой системы наиболее наглядно.

## 2.2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ ФОРМАЛИЗАЦИИ УСЛОВИЙ РАБОТОСПОСОБНОСТИ СТРУКТУРНО-СЛОЖНЫХ СИСТЕМ НА ЯЗЫКЕ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

В литературе достаточно подробно описана модель функционирования системы, используемая для исследования надежности систем с разветвленной структурой, которая может находиться только в двух характерных состояниях: в состоянии полной работоспособности ( $y=1$ ) и в состоянии полного отказа ( $y=0$ ). При этом предполагается, что действие системы детерминировано зависит от действия ее элементов, т. е.  $y$  является функцией  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ , которые в свою очередь могут находиться также только в двух несовместных состояниях: полной работоспособности ( $x_i=1$ ) и полного отказа ( $x_i=0$ ). В целом это предположение является до некоторой степени условным и ограниченным, так как оно исключает (хотя и не полностью) возможность

частичного функционирования системы. Однако оно обладает тем бесспорным достоинством, что приводит к модели, которая имеет строгое аналитическое решение и к тому же является достаточно реальной.

Функцию алгебры логики

$$y(x_1, \dots, x_n), \quad (2.1)$$

связывающую состояние элементов с состоянием системы, будем называть *функцией работоспособности системы* (ФРС), которая и выражает условия ее работоспособности. Структуры, условия работоспособности которых удастся записать с помощью монотонных ФРС, будем называть монотонными (когерентными) [79].

Для монотонных структур функцию работоспособности можно записать с помощью так называемых кратчайших путей успешного функционирования и минимальных сечений отказов системы [52, 54, 55].

*Кратчайший путь успешного функционирования системы* (КПУФ) представляет собой такую конъюнкцию ее элементов, ни одну из компонент которой нельзя изъять, не нарушив функционирования системы. Такую конъюнкцию можно записать в виде следующей ФАЛ:

$$\mathcal{P}_i = \bigwedge_{i \in K_{\mathcal{P}_i}} x_i, \quad (2.2)$$

где  $K_{\mathcal{P}_i}$  означает множество номеров, соответствующих данному пути.

Иначе говоря, кратчайший путь успешного функционирования системы описывает один из возможных самостоятельных вариантов выполнения задачи, стоящей перед системой, с помощью минимального набора работоспособных элементов, абсолютно необходимых для осуществления данного варианта работы системы.

*Минимальное сечение отказов системы* (МСО) представляет собой такую конъюнкцию из отрицаний ее элементов, ни одну из компонент которой нельзя изъять, не нарушив условия неработоспособности системы. Такую конъюнкцию можно записать в виде следующей ФАЛ:

$$S_j = \bigwedge_{i \in K_{S_j}} x'_i, \quad (2.3)$$

где  $K_{S_j}$  означает множество номеров, соответствующих данному сечению.

Другими словами, МСО системы описывает один из возможных способов нарушения работоспособности системы с помощью минимального набора отказавших элементов.

Каждая избыточная система имеет конечное число кратчайших путей ( $l=1, 2, \dots, d$ ) и минимальных сечений ( $j=1, 2, \dots, m$ ). Используя эти понятия, можно поразному записать условия работоспособности системы:

- 1) в виде дизъюнкции всех имеющихся кратчайших путей успешного функционирования

$$y(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{l=1}^d \mathcal{P}_l = \bigvee_{l=1}^d \left[ \bigwedge_{i \in K \mathcal{P}_l} x_i \right]; \quad (2.4)$$

- 2) в виде конъюнкции отрицаний всех МСО

$$y(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{j=1}^m S'_j = \bigwedge_{j=1}^m \left[ \bigvee_{i \in K S'_j} x_i \right]. \quad (2.5)$$

Таким образом, условия работоспособности реальной системы можно представить в виде условий работоспособности некоторой эквивалентной (в смысле надежности) системы, структура которой представляет парал-

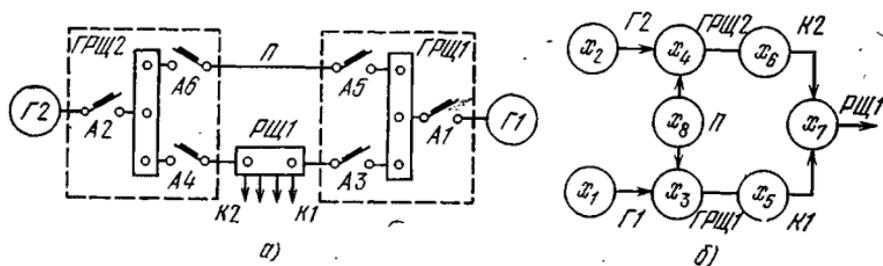


Рис. 2.1. Схема СЭС с переключкой П:  
а — принципиальная; б — структурная

ельное соединение кратчайших путей успешного функционирования, или другой эквивалентной системы, структура которой представляет последовательное соединение отрицаний минимальных сечений.

**Пример 2.1.** Составим УРС с помощью КПУФ и МСО для судовой электроэнергетической системы (СЭС), принципиальная схема которой изображена на рис. 2.1, а.

Пусть для этой системы необходимо оценить надежность обеспечения питанием ответственных потребителей, подключенных к распределительному щиту РЩ1.

Подставленную задачу можно выполнить с помощью различных комбинаций элементов системы. В самом деле, указанные потребители получают питание, если будут исправны: генератор Г1, главный распределительный щит ГРЩ1, кабель К1 и распределительный щит РЩ1, или Г1, ГРЩ1, перемычка (П), ГРЩ2, К2 и РЩ1, или Г2, ГРЩ2, К2 и РЩ1, или Г2, ГРЩ2, П, ГРЩ1, К1 и РЩ1.

Если это громоздкое словесное описание перевести на язык алгебры логики, то функция работоспособности данной системы с помощью КПУФ запишется следующим образом:

$$y(x_1, \dots, x_8) = \left| \begin{array}{l} \mathcal{P}_1 \\ \mathcal{P}_2 \\ \mathcal{P}_3 \\ \mathcal{P}_4 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} x_1 x_3 x_5 x_7 \\ x_1 x_3 x_8 x_4 x_6 x_7 \\ x_2 x_2 x_6 x_7 \\ x_2 x_4 x_8 x_3 x_5 x_7 \end{array} \right|. \quad (2.6)$$

Функцию работоспособности этой же системы через МСО можно записать в следующем виде:

$$y(x_1, \dots, x_8) = \left| \begin{array}{l} x_7 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_2 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_6 \\ x_6 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_5 \\ x_8 \\ x_8 \end{array} \right| = |S'_1 S'_2 \dots S'_{10}|. \quad (2.7)$$

Условия работоспособности (2.6) и (2.7) графически можно представить в виде двух схем (рис. 2.2), эквивалентных в смысле логики реальной системе, структурная схема которой приведена на рис. 2.1,б.

Действительно, из рис. 2.2 видно, что поставленная перед системой задача (питание потребителей от щита  $x_7$ ) будет выполнена, если сохранится хотя бы один из четырех путей успешного функционирования или при условии совместной исправности всех десяти сечений данной системы:

С помощью ЛВМ можно анализировать вероятностные характеристики и немонотонных структур. Однако методика такого анализа менее разработана, хотя и

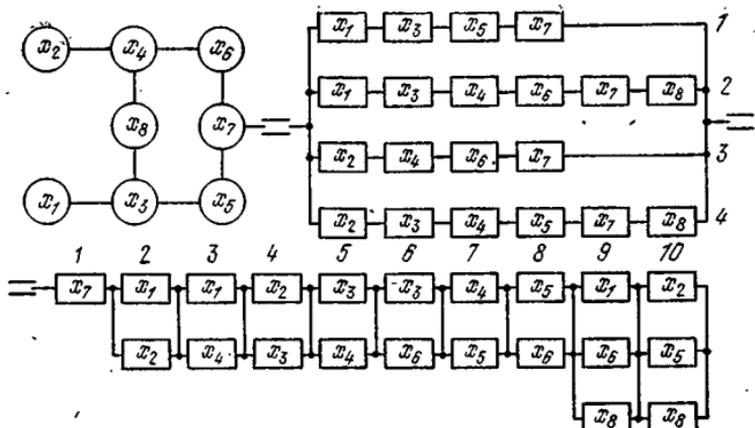


Рис. 2.2. Схемное представление условий работоспособности (2.6) и (2.7)

имеются отдельные обнадёживающие результаты. Именно этот класс структур рассматривается в § 6.4, гл. 7, § 8.3, 8.5.

### 2.3. ФОРМАЛИЗОВАННЫЙ МЕТОД СОСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИИ РАБОТОСПОСОБНОСТИ СИСТЕМЫ

В соответствии с этим методом вначале необходимо занумеровать на структурной схеме системы все вершины. Затем следует вычертить *граф переходов*, который представляет собой структуру, состоящую из вершин и ориентированных дуг, изображаемых в виде линий между парами вершин и снабженных стрелками, указывающими направление от одной вершины к другой. Обозначение дуг записывается в виде конъюнкции тех элементов, работа которых обеспечивает связь соответствующих вершин. *Матрица переходов* является алгебраическим образом графа переходов.

Пусть матрица переходов состоит из  $k$  строк и  $k$  столбцов (где  $k$  — число всех вершин). Обозначим матрицу переходов через  $\|C\|$ . Элемент  $(i, j)$ , т. е. содержимое клетки, расположенной на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца матрицы  $\|C\|$ , обозначается  $c_{ij}$  и определяется следующим образом:

$$c_{ij} = \begin{cases} b_{ij}, & \text{если вершина } i \text{ связана вершиной } j, \\ 0, & \text{если эта связь отсутствует,} \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases} \quad (2.8)$$

Затем с помощью ЭВМ формируется логическая функция работоспособности системы  $y(x_1, \dots, x_n)$  путем умножения булевой матрицы переходов саму на себя  $r$  раз ( $r \leq k$ ) и соответствующих преобразований логических переменных, входящих в элементы матрицы  $\|C\|$ . Указанные преобразования должны выполняться по правилам и законам алгебры логики. Каждый элемент мат-

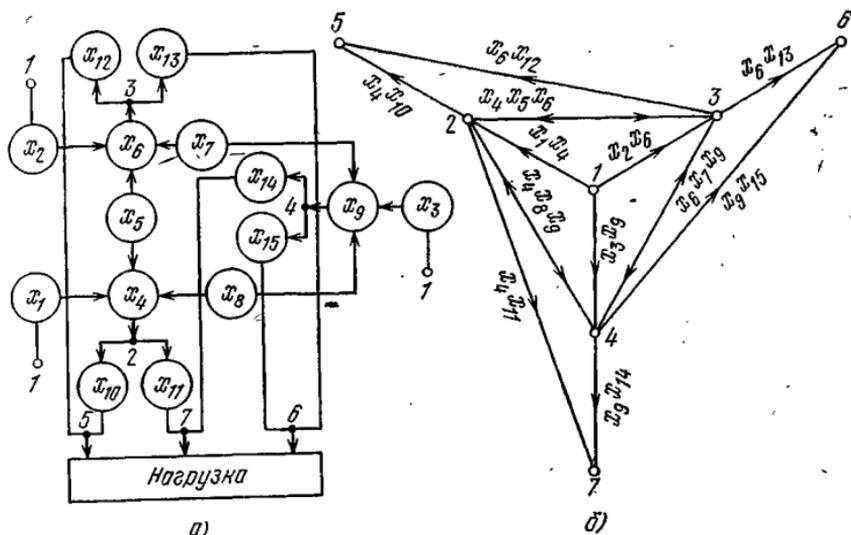


Рис. 2.3. Структурная схема электроэнергетической системы с тремя генераторами (а) и граф переходов (б)

рицы  $\|C\|$  в соответствии с условием (2.8) означает только непосредственные связи вершин. Опосредованные связи, состоящие из нескольких последовательных дуг, будем называть *путями*, а количество дуг, входящих в путь, — *длиной пути*. Возводя матрицу непосредственных связей, например, в квадрат, мы можем установить все связи длиной в одну и две дуги; возводя в куб, получим все связи длиной в одну, две и три дуги и так далее до  $r \leq k$ .

**Пример 2.2.** Рассмотрим на примере конкретной системы подготовительную (творческую) часть составления ФРС. Пусть это будет электроэнергетическая система, состоящая из трех генераторов ( $x_1, x_2, x_3$ ), трех ГРЩ ( $x_4, x_6, x_9$ ), трех переключателей ( $x_5, x_7, x_8$ ) и шести вторичных ВРЩ ( $x_{10}, \dots, x_{15}$ ), от которых осуществляется питание трех групп потребителей (рис. 2.3,а).

Задача состоит в том, чтобы обеспечить бесперебойное питание указанной нагрузки при отсутствии ограничений на мощности источников и пропускные способности ГРЩ и перемычек.

1. Занумеруем все вершины цифрами 1, 2, ..., 7, причем входные вершины (истоки, полюсы) в данной зада-

Таблица 2.1

Номер вершины	Номер вершины						
	1	2	3	4	5	6	7
1	1	$x_1 x_4$	$x_2 x_6$	$x_3 x_9$	0	0	0
2	0	1	$x_4 x_5 x_6$	$x_4 x_8 x_9$	$x_4 x_{10}$	0	$x_4 x_{11}$
3	0	$x_4 x_5 x_6$	1	$x_6 x_7 x_9$	$x_6 x_{12}$	$x_6 x_{13}$	0
4	0	$x_4 x_8 x_9$	$x_6 x_7 x_9$	1	0	$x_9 x_{15}$	$x_9 x_{14}$
5	0	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0
7	0	0	0	0	0	0	1

че целесообразно обозначать одной цифрой 1 и объединить.

2. Вычертим граф, как показано на рис. 2.3,б.

3. Составим матрицу переходов в виде табл. 2.1.

Длина пути r	Номер			
	1	2	3	4
1	1	$x_1 x_4$	$x_2 x_6$	$x_3 x_9$
2		$\left  \begin{array}{l} x_2 x_4 x_5 x_6 \\ x_3 x_4 x_8 x_9 \end{array} \right $	$\left  \begin{array}{l} x_1 x_4 x_5 x_6 \\ x_3 x_6 x_7 x_9 \end{array} \right $	$\left  \begin{array}{l} x_1 x_4 x_8 x_9 \\ x_2 x_6 x_7 x_9 \end{array} \right $
3		$\left  \begin{array}{l} x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_9 \\ x_2 x_4 x_6 x_7 x_8 x_9 \end{array} \right $	$\left  \begin{array}{l} x_3 x_4 x_5 x_6 x_8 x_9 \\ x_1 x_4 x_6 x_7 x_8 x_9 \end{array} \right $	$\left  \begin{array}{l} x_2 x_4 x_5 x_6 x_8 x_9 \\ x_1 x_4 x_5 x_6 x_7 x_9 \end{array} \right $
4				

4. Перемножим эту матрицу четыре раза саму на себя, тогда условия полной связи вершины 1 со всеми другими вершинами (2, ..., 7) с помощью путей разной длины  $r$  можно представить в виде табл. 2.2.

5. На основании табл. 2.2 и условий поставленной задачи (связь вершины 1 с вершинами 5, 6 и 7) запишем следующую ФРС:

$$y(x_1, \dots, x_{15}) = \begin{array}{|l} x_1 x_4 x_{10} \\ x_2 x_6 x_{12} \\ x_2 x_4 x_5 x_8 x_{10} \\ x_3 x_4 x_8 x_9 x_{10} \\ x_1 x_4 x_5 x_8 x_{12} \\ x_3 x_6 x_7 x_9 x_{12} \\ x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_9 x_{10} \\ x_2 x_4 x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10} \\ x_3 x_3 x_5 x_6 x_8 x_9 x_{12} \\ x_1 x_4 x_6 x_7 x_8 x_9 x_{12} \end{array} \begin{array}{|l} x_2 x_6 x_{13} \\ x_3 x_9 x_{15} \\ x_1 x_4 x_5 x_6 x_{13} \\ x_3 x_6 x_7 x_9 x_{13} \\ x_1 x_4 x_5 x_8 x_{15} \\ x_2 x_6 x_7 x_9 x_{15} \\ x_3 x_4 x_5 x_6 x_8 x_9 x_{13} \\ x_1 x_4 x_6 x_7 x_8 x_9 x_{13} \\ x_2 x_4 x_5 x_6 x_8 x_9 x_{15} \\ x_1 x_4 x_5 x_6 x_7 x_9 x_{15} \end{array} \begin{array}{|l} x_1 x_4 x_{11} \\ x_3 x_9 x_{14} \\ x_2 x_4 x_5 x_6 x_{11} \\ x_3 x_4 x_8 x_9 x_{11} \\ x_1 x_4 x_5 x_8 x_{14} \\ x_2 x_6 x_7 x_9 x_{14} \\ x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_9 x_{11} \\ x_2 x_4 x_6 x_7 x_8 x_9 x_{11} \\ x_2 x_4 x_5 x_6 x_8 x_9 x_{14} \\ x_1 x_4 x_5 x_6 x_7 x_9 x_{14} \end{array} \quad (2.9)$$

6. После логического перемножения трех матриц (состоящих из 10 дизъюнктивных членов каждая) и всех упрощающих преобразований получим ФРС следующего вида:

Таблица 2.2

Вершины		
5	6	7
0	0	0
$\begin{array}{ l} x_1 x_4 x_{10} \\ x_2 x_6 x_{12} \end{array}$	$\begin{array}{ l} x_2 x_6 x_{13} \\ x_3 x_9 x_{15} \end{array}$	$\begin{array}{ l} x_1 x_4 x_{11} \\ x_3 x_9 x_{14} \end{array}$
$\begin{array}{ l} x_2 x_4 x_5 x_8 x_{10} \\ x_3 x_4 x_8 x_9 x_{10} \\ x_1 x_4 x_5 x_6 x_{12} \\ x_3 x_6 x_7 x_9 x_{12} \end{array}$	$\begin{array}{ l} x_1 x_4 x_5 x_6 x_{13} \\ x_3 x_6 x_7 x_9 x_{13} \\ x_1 x_4 x_5 x_8 x_{15} \\ x_2 x_6 x_7 x_9 x_{15} \end{array}$	$\begin{array}{ l} x_2 x_4 x_5 x_6 x_{11} \\ x_3 x_4 x_8 x_9 x_{11} \\ x_1 x_4 x_5 x_8 x_{14} \\ x_2 x_6 x_7 x_9 x_{14} \end{array}$
$\begin{array}{ l} x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_9 x_{10} \\ x_2 x_4 x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10} \\ x_3 x_4 x_5 x_6 x_8 x_9 x_{12} \\ x_1 x_4 x_6 x_7 x_8 x_9 x_{12} \end{array}$	$\begin{array}{ l} x_3 x_4 x_5 x_6 x_8 x_9 x_{13} \\ x_1 x_4 x_6 x_7 x_8 x_9 x_{13} \\ x_2 x_4 x_5 x_6 x_8 x_9 x_{15} \\ x_1 x_4 x_5 x_6 x_7 x_9 x_{15} \end{array}$	$\begin{array}{ l} x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_9 x_{11} \\ x_2 x_4 x_6 x_7 x_8 x_9 x_{11} \\ x_2 x_4 x_5 x_6 x_8 x_9 x_{14} \\ x_1 x_4 x_5 x_6 x_7 x_9 x_{14} \end{array}$

$$y(x_1, \dots, x_{15}) = \left| \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x_4 x_6 & x_1 & x_2 & x_{11} & x_{13} & x_{10} \\ & x_1 & x_5 & & & x_{12} \\ & x_2 & & & & \\ \hline x_4 x_9 & x_1 & x_8 & x_{10} & x_{15} & x_{11} \\ & x_1 & x_8 & & & x_{14} \\ & x_3 & & & & \\ \hline x_6 x_9 & x_2 & x_3 & x_{12} & x_{14} & x_{13} \\ & x_2 & x_7 & & & x_{15} \\ & x_3 & & & & \\ \hline x_4 x_6 & x_9 & x_1 & x_5 & x_7 & x_{10} & x_{11} & x_{13} \\ & & x_2 & x_5 & x_8 & x_{12} & x_{14} & x_{15} \\ & & x_3 & x_7 & x_8 & & & \\ & & x_1 & x_2 & x_7 & & & \\ & & & & x_8 & & & \\ & & x_1 & x_3 & x_5 & & & \\ & & & & x_7 & & & \\ & & x_2 & x_3 & x_5 & & & \\ & & & & x_8 & & & \\ \hline & & x_1 & x_2 & x_8 & & & \end{array} \right|. \quad (2.10)$$

Таким образом, когда задана структурная схема системы и требуется установить условия полной связи какой-либо вершины со всеми другими указанным методом с помощью ЭВМ можно получить соответствующую ФРС.

#### 2.4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМ ЛОГИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПРИ СОСТАВЛЕНИИ ФРС

Для многих технических систем ФРС можно представить в виде зависимости от других ФАЛ, связанных системой логических уравнений

$$y = y(f_1, f_2, \dots, f_n), \quad (2.11)$$

$$f_i = a_i \vee a_{i1} f_1 \vee a_{i2} f_2 \vee \dots \vee a_{in} f_n, \quad \overline{i=1}, n, \quad (2.12)$$

где  $a_i$  — ФАЛ, выраженные через логические переменные. Форма записи ФРС (2.11), (2.12), во-первых, компактна, а во-вторых, удобна, так как учитывает обычно только непосредственные логические связи элементов в структуре системы, легко просматриваемые даже в весьма сложной системе. Очевидность логических связей и простота составления позволяют избежать многих

ошибок на этапе записи ФРС. Чтобы получить ФРС в явном виде как функцию логических переменных, можно использовать метод подстановок с последовательным исключением неизвестных функций или метод определителей. Рассмотрим последний более подробно. Для этого представим систему (2.12) в матричной форме

$$f = A_1 \vee A f, \quad (2.13)$$

где  $A_1$  — вектор-столбец свободных членов;  $A = \|a_{ij}\|$  — матрица коэффициентов уравнений,  $a_{ii} = 1$ . Составим определитель системы

$$\Delta = \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 1 & a_{3n} \\ \hline a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & 1 \end{array} \right|. \quad (2.14)$$

Неизвестные функции  $f_i$  получаются подстановкой в определитель  $\Delta$  на место  $i$ -го столбца вектора свободных членов  $A_1$  и последующим раскрытием определителя по правилам, аналогичным существующим в алгебре действительных чисел:

$$f_i = \left| \begin{array}{cccc|cccc} 1 & a_{12} & \dots & a_{1, i-1} & a_1 & a_{1, i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & \dots & a_{2, i-1} & a_2 & a_{2, i+1} & \dots & a_{2n} \\ \hline a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{i, i-1} & a_i & a_{i, i+1} & \dots & 1 \end{array} \right|. \quad (2.15)$$

**Пример 2.3.** Для системы, рассмотренной в примере 2.2, необходимо составить ФРС с помощью логических уравнений.

*Решение.* Обозначим через  $f_i$  логическую функцию — индикатор события, состоящего в том, что от элемента  $i$  есть работоспособный путь хотя бы к одному из трех генераторов. Тогда ФРС системы можно выразить с помощью  $f_i$ :

$$y(x_1, \dots, x_{15}) = (x_{10}f_4 \vee x_{12}f_6) (x_{11}f_4 \vee x_{14}f_9) (x_{13}f_6 \vee x_{15}f_9). \quad (2.16)$$

Нетрудно проверить, что  $f_i$  удовлетворяют следующей системе логических уравнений:

$$\begin{aligned} f_4 &= x_4 (x_1 \vee x_5 f_6 \vee x_8 f_9), \\ f_6 &= x_6 (x_2 \vee x_5 f_4 \vee x_7 f_9), \\ f_9 &= x_9 (x_3 \vee x_8 f_4 \vee x_7 f_6). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Отсюда решение системы

$$\begin{aligned}
 f_4 &= \begin{vmatrix} x_1x_4 & x_4x_5 & x_4x_8 \\ x_2x_6 & 1 & x_6x_7 \\ x_3x_8 & x_7x_9 & 1 \end{vmatrix}, & f_6 &= \begin{vmatrix} 1 & x_1x_4 & x_4x_8 \\ x_5x_6 & x_2x_6 & x_6x_7 \\ x_8x_9 & x_3x_9 & 1 \end{vmatrix}, \\
 f_9 &= \begin{vmatrix} 1 & x_4x_5 & x_1x_4 \\ x_5x_6 & 1 & x_2x_6 \\ x_8x_9 & x_7x_9 & x_3x_9 \end{vmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Раскрывая определители, получаем

$$\begin{aligned}
 f_4 &= x_4 [x_1 \vee x_5x_6 (x_2 \vee x_3x_7x_9) \vee x_8x_9 (x_3 \vee x_2x_6x_7)], \\
 f_6 &= x_6 [x_2 \vee x_4x_5 (x_1 \vee x_3x_8x_9) \vee x_7x_9 (x_3 \vee x_1x_4x_8)], \\
 f_9 &= x_9 [x_3 \vee x_4x_8 (x_1 \vee x_2x_5x_6) \vee x_6x_7 (x_2 \vee x_1x_4x_5)].
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Проверкой значений функции на одних и тех же наборах значений аргументов можно убедиться, что функция, получаемая из (2.16) и (2.19), полностью совпадает с (2.10).

## Глава 3

### ЛОГИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА СТРУКТУРНОЙ НАДЕЖНОСТИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ БЕЗ УЧЕТА ВОССТАНОВЛЕНИЯ

#### 3.1. МЕТОД РАСЧЕТА СТРУКТУРНОЙ НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ АЛГОРИТМА РАЗРЕЗАНИЯ

Покажем, как можно практически осуществить переход от некоторой ФРС, записанной в виде повторной ФАЛ, к ее вероятностной функции, т. е. рассмотрим алгоритм вычисления вероятности истинности такой ФАЛ с помощью формулы полной вероятности.

Алгоритм разрезания основан на теореме разложения ФАЛ (1.56), согласно которой ФАЛ путем вынесе-

для какой-либо переменной и ее отрицания можно представить в виде

$$y(x_1, \dots, x_n) = x_i y_1^{(i)}(x_1, \dots, 1, \dots, x_n) \vee \vee x'_i y_0^{(i)}(x_1, \dots, 0, \dots, x_n). \quad (3.1)$$

Таким образом, если аргумент  $x_i$  функции  $y$  является совместной двоичной переменной, то, преобразуя (3.1), мы переходим к дизъюнкции двух несовместных высказываний, причем в первое высказывание аргумент  $x_i$  входит своим утверждением, а во второе — отрицанием  $x'_i$ . Функции  $y_1$  и  $y_0$  отличаются от функции  $y$  тем, что в них везде вместо аргумента  $x_i$  поставлены соответственно 1 и 0 (в соответствии с этим выбраны и индексы функций  $y_1$  и  $y_0$ ).

Теорема разложения позволяет, например, свести мостиковую структуру к последовательно-параллельной. Действительно, если условие работоспособности системы описывается уравнением

$$y(x_1, \dots, x_5) = \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_3 \\ & x_5 x_4 \\ \hline x_2 & x_4 \\ & x_5 x_3 \end{array} \right|, \quad (3.2)$$

что соответствует мостиковой схеме, изображенной в левой части рис. 3.1, то, вынося аргумент  $x_5$  по формуле (3.1), получаем

$$y = x_5 \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_3 \\ & 1 \cdot x_4 \\ \hline x_2 & x_4 \\ & 1 \cdot x_3 \end{array} \right| \vee x'_5 \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_3 \\ & 0 \cdot x_4 \\ \hline x_2 & x_4 \\ & 0 \cdot x_3 \end{array} \right|. \quad (3.3)$$

Упростим теперь функции  $y_1$  и  $y_0$  с помощью правил 1 и 2 (1.14):

$$y_1 = \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_3 \\ & 1 \cdot x_4 \\ \hline x_2 & x_4 \\ & 1 \cdot x_3 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_3 \\ & x_4 \\ \hline x_2 & x_4 \\ & x_3 \end{array} \right|, \quad y_0 = \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_3 \\ & 0 \cdot x_4 \\ \hline x_2 & x_4 \\ & 0 \cdot x_3 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_3 \\ & 0 \\ \hline x_2 & x_4 \\ & 0 \end{array} \right|. \quad (3.4)$$

Вынося за скобки  $(x_3 \vee x_4)$  в выражении (3.4) для  $y_1$  и применяя правило 6 (1.14) в выражении для  $y_0$ , окончательно получаем

$$y_1 = \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_3 \\ \hline x_2 & x_4 \end{array} \right|, \quad y_0 = \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_3 \\ \hline x_2 & x_4 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_3 \\ \hline x_2 & x_4 \end{array} \right|, \quad (3.5)$$

откуда

$$y = \left| \begin{array}{c|c|c} x_5 & x_1 & x_3 \\ \hline & x_2 & x_4 \\ \hline x'_5 & x_1 & x_3 \\ \hline & x_2 & x_4 \end{array} \right|. \quad (3.6)$$

Правая часть рис. 3.1 иллюстрирует уравнение (3.6). Из рисунка видно, что мостиковая структура эквивалентна дизъюнкции двух последовательно-параллельных

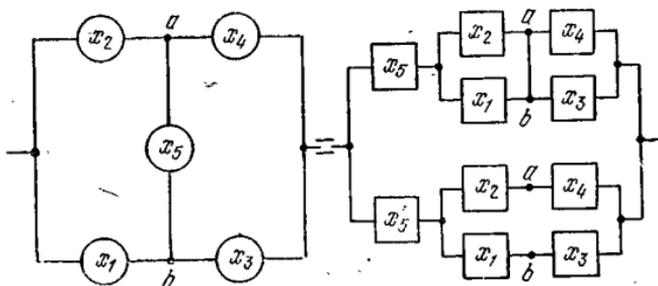


Рис. 3.1. Графическая иллюстрация алгоритма разрезания на примере простой мостиковой структуры

схем, в которых в одном случае точки  $a$  и  $b$  замкнуты накоротко, а в другом — разомкнуты.

Чтобы не ошибаться при таких преобразованиях и выполнять их формально (не задумываясь над физической стороной вопроса), применяем алгоритм разрезания [32], который заключается в следующем.

1. Подсчитаем число вхождений каждой буквы  $x_i$  в уравнение функции  $y(x_1, \dots, x_n)$ :

$$(m_1, m_2, \dots, m_n) = \{m_i\}. \quad (3.7)$$

2. Среди чисел  $m_i$  находим максимальное и соответствующую букву (не ограничивая общности, можно считать, что это будет  $x_1$ ) полагаем равной сначала 0, затем 1 и для каждого случая отдельно выписываем ре-

зультат подстановки соответствующей константы в  $y(x_1, \dots, x_n)$ :

$$x_1=0, \quad y_0=y(0, x_2, \dots, x_n)=y_0(x_2, \dots, x_n), \quad (3.8)$$

$$x_1=1, \quad y_1=y(1, x_2, \dots, x_n)=y_1(x_2, \dots, x_n). \quad (3.9)$$

Эту операцию назовем разрезанием по переменной  $x_1$ .

3. Преобразуем  $y_0$  и  $y_1$  с помощью уравнений, представленных в § 1.2.

4. После применения указанных преобразований и упрощения функций  $y_0$  и  $y_1$  может оказаться, что любая из них либо превращается в константу, либо принимает такой вид, при котором каждая из оставшихся букв будет входить в выражение не более одного раза или при котором хотя бы одна из букв входит в выражение функции более одного раза. Проверим, какой из трех случаев имеет место для  $y_0$  и  $y_1$ .

5. Если имеет место третий случай, то для соответствующей функции опять вычислим  $m_i$  для всех оставшихся в явном виде букв и опять произведем разрезание функции по переменной, соответствующей максимуму  $m_i$ . Не ограничивая общности, полагаем, что такой переменной окажется  $x_2$ . Вновь полученные функции обозначим

$$y_{00}=y_0(0, x_3, \dots, x_n)=y_{00}(x_3, \dots, x_n), \quad (3.10)$$

$$y_{01}=y_0(1, x_3, \dots, x_n)=y_{01}(x_3, \dots, x_n), \quad (3.11)$$

если разрезанию подвергалась функция  $y_0$ , или

$$y_{10}=y_1(0, x_3, \dots, x_n)=y_{10}(x_3, \dots, x_n), \quad (3.12)$$

$$y_{11}=y_1(1, x_3, \dots, x_n)=y_{11}(x_3, \dots, x_n), \quad (3.13)$$

если разрезанию подвергалась функция  $y_1$  (может случиться, что разрезаются обе функции).

К полученной таким образом системе функций применим преобразования, приведенные в § 1.2, а затем выполним действия, указанные в пп. 4 и 5 до тех пор, пока на очередном шаге не окажется, что ни для одной функции не имеет места третий случай, указанный в п. 4.

Рассмотренный процесс не бесконечен, ибо если произвести разрезание сразу по всем переменным, то получим только константы.

**Пример 3.1.** Применим алгоритм разрезания к ФРС

$$y(x_1, \dots, x_7) = \left| \begin{array}{cc|cc} x_1 & x_3 & x_5 & \\ & & x_7 & x_4 \quad x_6 \\ & & & \\ x_2 & x_4 & x_6 & \\ & & x_7 & x_3 \quad x_5 \end{array} \right|. \quad (3.14)$$

*Решение.* 1. В уравнение (3.14)  $x_1$  и  $x_2$  входят по одному, а остальные — по два раза.

2. Среди чисел  $m_i$  максимальным является число два, но букв, входящих в (3.14) по два раза, пять. Поэтому для первого разрезания можно взять любую из них. Возьмем букву  $x_7$  и разобьем сложное событие  $y$  на два несовместных события:

$$y = \left| \begin{array}{cc|cc} x_1 x_3 & x_5 & & \\ & x_7 x_4 x_6 & & \\ x_2 x_4 & x_6 & & \\ & x_7 x_3 x_5 & & \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc|cc} x_7 & x_1 x_3 & x_5 & \\ & 0 & x_4 x_6 & \\ & x_2 x_4 & x_6 & \\ & 0 & x_3 x_5 & \end{array} \right| = x_7 y_0 \vee x_7 y_1. \quad (3.15)$$

3. Преобразуем  $y_0$  и  $y_1$ :

$$y_0 = \left| \begin{array}{cc|cc} x_1 x_3 & x_5 & & \\ & 0 & x_4 x_6 & \\ x_2 x_4 & x_6 & & \\ & 0 & x_3 x_5 & \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc|cc} x_1 x_3 & x_5 & & \\ & 0 & & \\ x_2 x_4 & x_6 & & \\ & 0 & & \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc|cc} x_1 x_3 x_5 & & & \\ & & & \\ x_2 x_4 x_6 & & & \end{array} \right|, \quad (3.16)$$

$$y_1 = \left| \begin{array}{cc|cc} x_1 x_3 & x_5 & & \\ & 1 & x_4 x_6 & \\ x_2 x_4 & x_6 & & \\ & 1 & x_3 x_5 & \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc|cc} x_1 x_3 & x_5 & & \\ & x_4 & x_6 & \\ x_2 x_4 & x_6 & & \\ & x_3 & x_5 & \end{array} \right|. \quad (3.17)$$

4. В уравнение (3.16) все буквы входят только по одному разу, поэтому функция  $y_0$  будет неповторной. В уравнение (3.17) буквы  $x_3$ ,  $x_4$ ,  $x_5$  и  $x_6$  все еще входят по два раза, поэтому следует продолжить преобразование  $y_1$ , произведя разрезание, например, по  $x_3$ .

5. Разрезаем функцию  $y_1$  по аргументу  $x_3$ :

$$y_1 = x_3 \left| \begin{array}{cc|cc} x_1 & 0 & x_5 & \\ & & x_4 & x_6 \\ x_2 & x_4 & x_6 & \\ & & 0 & x_5 \end{array} \right| \vee x_3 \left| \begin{array}{cc|cc} x_1 & 1 & x_5 & \\ & & x_4 & x_6 \\ x_2 & x_4 & x_6 & \\ & & 1 & x_5 \end{array} \right| = x_3 y_{10} \vee x_3 y_{11}. \quad (3.18)$$

6. Преобразуем  $y_{10}$  и  $y_{11}$ :

$$y_{10} = \left| \begin{array}{c|c} x_1 & 0 \\ \hline x_2 & x_4 \\ \hline x_2 & x_4 \\ \hline 0 & x_5 \end{array} \right| \begin{array}{c} x_5 \\ x_4 x_6 \\ x_6 \\ x_5 \end{array} = \left| \begin{array}{c|c} 0 & x_5 \\ \hline x_2 & x_4 \\ \hline x_2 & x_4 \\ \hline x_6 & 0 \end{array} \right| = |x_2 x_4 x_6|, \quad (3.19)$$

$$y_{11} = \left| \begin{array}{c|c} x_1 & 1 \\ \hline x_2 & x_4 \\ \hline x_2 & x_4 \\ \hline 1 & x_5 \end{array} \right| \begin{array}{c} x_5 \\ x_4 x_6 \\ x_6 \\ x_5 \end{array} = \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_5 \\ \hline x_2 & x_4 \\ \hline x_2 & x_4 \\ \hline x_5 & x_6 \end{array} \right|. \quad (3.20)$$

7. Функция  $y_{10}$  будет бесповторной, а функция  $y_{11}$  требует дополнительного разрезания по какой-нибудь из следующих букв:  $x_4, x_5, x_6$ .

8. Произведем разрезание по  $x_4$ :

$$y_{11} = \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_5 \\ \hline x_2 & x_4 \\ \hline x_2 & x_4 \\ \hline x_5 & x_6 \end{array} \right| =$$

$$= x'_4 \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_5 \\ \hline 0 & x_6 \\ \hline x_2 & 0 \\ \hline x_5 & x_6 \end{array} \right| \vee x_4 \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_5 \\ \hline 1 & x_6 \\ \hline x_2 & 1 \\ \hline x_5 & x_6 \end{array} \right| = x'_4 y_{110} \vee x_4 y_{111}. \quad (3.21)$$

9. Преобразуем  $y_{110}$  и  $y_{111}$ :

$$y_{110} = \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_5 \\ \hline 0 & x_6 \\ \hline x_2 & 0 \\ \hline x_5 & x_6 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_5 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & x_6 \\ \hline x_5 & x_6 \end{array} \right| = |x_1 x_5|, \quad (3.22)$$

$$y_{111} = \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_5 \\ \hline 1 & x_6 \\ \hline x_2 & 1 \\ \hline x_5 & x_6 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_5 \\ \hline x_2 & x_6 \\ \hline x_2 & x_6 \\ \hline x_5 & x_6 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_5 \\ \hline x_2 & x_6 \\ \hline x_2 & x_6 \\ \hline x_5 & x_6 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_5 \\ \hline x_2 & x_6 \\ \hline x_2 & x_6 \\ \hline x_5 & x_6 \end{array} \right|. \quad (3.23)$$

Теперь все функции стали бесповторными, не подлежащими дальнейшему преобразованию.

10. Подставим все найденные функции в уравнение (3.15), последовательно раскрывая значения аргументов:

$$\begin{aligned}
 y &= \left| \begin{array}{c} x'_7 y_0 \\ x_7 y_1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} x'_7 y_0 \\ x_7 \left| \begin{array}{c} x'_3 y_{10} \\ x_3 y_{11} \end{array} \right. \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} x'_7 y_0 \\ x_7 \left| \begin{array}{c} x'_3 y_{10} \\ x_3 \left| \begin{array}{c} y_{10} \\ x'_4 y_{110} \\ x_4 y_{111} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right| = \\
 &= \left| \begin{array}{c} x'_7 \\ x_7 \left| \begin{array}{c} x'_3 \\ x_3 \left| \begin{array}{c} x_4 \left| \begin{array}{c} x_1 \quad x_3 \quad x_5 \\ x_2 \quad x_4 \quad x_6 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right|. \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

Это уравнение полезно представить в виде

$$y = \left| \begin{array}{c} x'_7 \\ x_7 \quad x'_3 \\ x_7 \quad x_3 \quad x'_4 \\ x_7 \quad x_3 \quad x_4 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} x_1 \quad x_3 \quad x_5 \\ x_2 \quad x_4 \quad x_6 \\ x_2 \quad x_4 \quad x_6 \\ x_1 \quad x_5 \\ x_1 \quad x_5 \\ x_2 \quad x_6 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} x_1 \quad x_3 \quad x_5 \\ x_2 \quad x_4 \quad x_6 \\ x_2 \quad x_4 \quad x_6 \\ x_1 \quad x_5 \\ x_1 \quad x_5 \\ x_2 \quad x_6 \end{array} \right|, \quad (3.25)$$

где буквами  $H_i$  обозначены несовместные гипотезы, т. е.

$$H_1 = x'_7, \quad H_2 = x_7 x'_3, \quad H_3 = x_7 x_3 x'_4, \quad H_4 = x_7 x_3 x_4. \quad (3.26)$$

Расчеты надежности системы с помощью алгоритма разрезания целесообразно сопровождать построением графа состояний системы (рис. 3.2). Это особенно по-

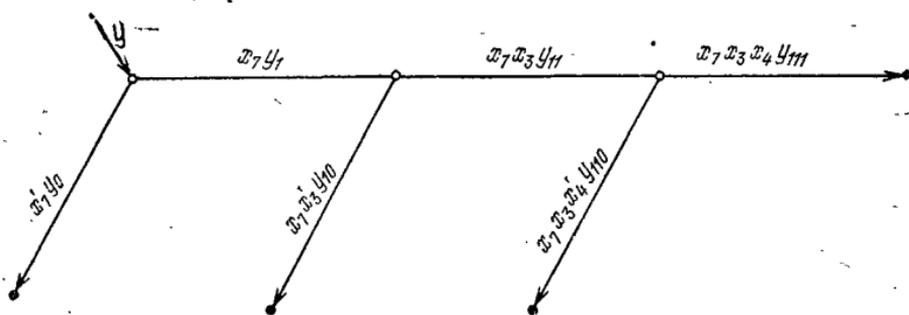


Рис. 3.2. Последовательность применения алгоритма разрезания для функции, заданной уравнением (3.14)

лезно делать при большом числе разрезов, что обеспечивает наглядность и упорядоченность последующих вероятностных вычислений по формуле полной вероятности

$$P\{y(x_1, \dots, x_n) = 1\} = R_c = \sum_{i=1}^m P(H_i) P(y/H_i), \quad (3.27)$$

где события  $H_i$  образуют полную группу несовместных гипотез, а  $P(y/H_i)$  — условные вероятности исправного состояния системы при каждой гипотезе  $H_i$ .

Для данных примера 3.1 формулу (3.27) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} P\{y=1\} &= P(H_1)P(y/H_1) + P(H_2)P(y/H_2) + \\ &+ P(H_3)P(y/H_3) + P(H_4)P(y/H_4) = \\ &= P(x'_7)P(y_0) + P(x_7x'_3)P(y_{10}) + \\ &+ P(x_7x_3x'_4)P(y_{110}) + P(x_7x_3x_4)P(y_{111}). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Если отказы элементов можно считать независимыми событиями, то отдельные вероятности в (3.28) равны

$$\begin{aligned} P(x'_7) &= Q_7, \quad P(y_0) = 1 - (1 - R_1R_3R_5)(1 - R_2R_4R_6), \\ P(x_7x'_3) &= R_7Q_3, \quad P(y_{10}) = R_2R_3R_6, \\ P(x_7x_3x'_4) &= R_7R_3Q_4, \quad P(y_{110}) = R_1R_5; \\ P(x_7x_3x_4) &= R_7R_3R_4, \quad P(y_{111}) = \\ &= (1 - Q_1Q_2)(1 - Q_5Q_6). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Приняв допущение о равной надежности всех элементов ( $R_1 = R_2 = \dots = R_7 = R$ ), определим вероятность безотказной работы системы в виде следующего полинома:

$$\begin{aligned} P(y=1) &= R_c = \{(1-R)[1 - (1-R^3)(1-R^3)] + \\ &+ R(1-R)R^3 + R^2(1-R)R^2 + R^3[1 - (1-R)^2]^2\} = \\ &= 2R^3 + 2R^5 - 5R^6 + 2R^7. \end{aligned} \quad (3.30)$$

В заключение следует сказать, что решение данной задачи методом разрезания можно было бы выполнить несколько экономнее (т. е. при меньшем числе гипотез),

если бы первое разрезание было произведено не по  $x_7$ , а по  $x_5$  или  $x_6$ . Действительно, тогда функция  $y$  имела бы вид

$$y = \left| \begin{array}{c|c|c} x'_5 x_4 x_6 & x_1 x_3 x_4 & \\ \hline & x_2 & \\ \hline x_5 x'_3 & x_2 & x_4 x_6 \\ \hline x_5 x_3 & x_1 & \\ \hline & x_2 x_2 & x_6 \\ \hline & & x_7 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c|c} H_1 & x_4 x_6 & x_1 x_3 x_7 \\ \hline & & x_2 \\ \hline H_4 & x_2 x_4 & x_6 \\ \hline H_3 & x_1 & \\ \hline & x_2 x_4 & x_6 \\ \hline & & x_7 \end{array} \right|, \quad (3.31)$$

т. е. число гипотез уменьшилось бы на единицу [см. (3.25)], однако общие затраты времени в обоих случаях примерно одинаковы.

### 3.2. МЕТОД РАСЧЕТА НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ АЛГОРИТМА ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ

В некоторых случаях переход от повторной ФАЛ к ВФ удобнее реализовать (например, с помощью ЭВМ) не по формуле полной вероятности, а с помощью теоремы сложения вероятностей несовместных событий. С этой целью был разработан [37] специальный алгоритм, основанный на преобразовании произвольной ФАЛ в ОДНФ. Для описания алгоритма ортогонализации сформулируем два утверждения.

**Утверждение 1.** Отрицание элементарной конъюнкции ранга  $r$   $K_i = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_r^{\alpha_r}$  эквивалентно дизъюнкции

$$K'_i = x_1^{\alpha'_1} \vee x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha'_2} \vee \dots \vee x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_{r-1}^{\alpha_{r-1}} x_r^{\alpha'_r}, \quad (3.32)$$

члены которой попарно ортогональны.

Преобразование (3.32) в частном случае (когда в элементарной конъюнкции отсутствуют отрицания) имеет вид

$$(x_1 x_2 \dots x_r)' = \left| \begin{array}{c} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x'_r \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} x'_1 \\ x_1 x'_2 \\ x_1 x_2 x'_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_1 x_2 x_3 x_4 \dots x_{r-1} x'_r \end{array} \right|. \quad (3.33)$$

Справедливость преобразования (3.32) нетрудно доказать с помощью теоремы разложения (3.1), применив ее последовательно для букв  $x_1, x_2, \dots, x_{r-1}$  к элементарной дизъюнкции ранга  $r$

$$D_i = x_1^{\alpha'_1} \vee x_2^{\alpha'_2} \vee \dots \vee x_r^{\alpha'_r}, \quad (3.34)$$

получаемой по правилу де Моргана из элементарной конъюнкции  $K_i$ .

Действительно, разлагая (3.34) по  $x_1$ , имеем

$$\begin{aligned} x_1^{\alpha'_1} \vee x_2^{\alpha'_2} \vee \dots \vee x_r^{\alpha'_r} &= x_1^{\alpha'_1} (1 \vee x_2^{\alpha'_2} \vee \dots \vee x_r^{\alpha'_r}) \vee \\ \vee x_1^{\alpha_1} (0 \vee x_2^{\alpha'_2} \vee \dots \vee x_r^{\alpha'_r}) &= x_1^{\alpha'_1} \vee x_1^{\alpha_1} (x_2^{\alpha'_2} \vee x_3^{\alpha'_3} \vee \dots \\ &\dots \vee x_r^{\alpha'_r}). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Разлагая далее (3.35) по переменным  $x_2, x_3, \dots, x_{r-1}$ , получаем уравнение (3.32).

Утверждение 2. Булева функция  $f(x_1, \dots, x_n)$ , представленная в ДНФ в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{i=1}^m K_i, \quad i \leq 2^n, \quad (3.36)$$

эквивалентна функции

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= K_1 \vee K'_1 K_2 \vee K'_1 K'_2 K_3 \vee \dots \\ &\dots \vee K'_1 K'_2 \dots K'_{m-1} K_m. \end{aligned} \quad (3.37)$$

В матричной форме записи уравнения (3.36) и (3.37) будут иметь следующий вид:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ K_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K_1 \\ K'_1 K_2 \\ K'_1 K'_2 K_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ K'_1 K'_2 K'_3 \dots K'_{m-1} K_m \end{vmatrix}. \quad (3.38)$$

Справедливость данного преобразования также легко доказать с помощью теоремы разложения (1.56).

Если вместо каждого выражения  $K'_i$  ( $i \leq m$ ) подставить его представление согласно (3.32), то в результате приведения дизъюнкции (3.38) к ДНФ (раскрытием скобок) получим ОДНФ булевой функции  $f(x_1, \dots, x_n)$ .

Теперь дадим краткое описание алгоритма преобразования функции  $y(x_1, \dots, x_n)$  к ОДНФ:

1. Преобразуем сначала функцию  $y(x_1, \dots, x_n)$  к ДНФ.

2. Произведем нумерацию членов ДНФ от 1 до  $m$  ( $m \leq 2^n$ ), причем членам низшего ранга присвоим меньшие номера.

3. Определим ОДНФ функции  $y(x_1, \dots, x_n)$  с помощью преобразования (3.38).

Для уменьшения количества операций в конъюнкции  $K'_1 K'_2 \dots K'_{i-1} K_i$  целесообразно выполнить следующие упрощения:

а) приравнять нулю те члены ДНФ  $K_j$  ( $j \leq i-1$ ), которые ортогональны члену  $K_i$ ;

б) приравнять нулю те элементарные конъюнкции отрицаний  $K'_j$  ( $j \leq i-1$ ), которые ортогональны  $K_i$ .

Преобразовав условия работоспособности системы к ОДНФ, можно приступить к вычислению вероятности безотказной работы системы по теореме 4 (1.69)

$$P\{y(x_1, \dots, x_n) = 1\} = R_c = \sum_{i=1}^s P(O_i), \quad (3.39)$$

где  $O_i$  — ортогональные члены функции  $y(x_1, \dots, x_n)$ , записанной в ОДНФ:

$$y(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{i=1}^m K_i = \bigvee_{i=1}^s O_i. \quad (3.40)$$

**Пример 3.2.** Применим алгоритм ортогонализации к функции (3.14), которая рассматривалась в предыдущем примере.

**Решение.** 1. Преобразуем функцию  $y(x_1, \dots, x_7)$  к ДНФ:

$$y = \left| \begin{array}{c|c} x_1 x_3 & x_5 \\ \hline x_2 x_4 & x_6 \\ \hline & x_7 x_3 x_5 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} x_1 x_3 x_5 & \\ \hline x_1 x_3 x_4 x_6 x_7 & \\ \hline x_2 x_4 x_6 & \\ \hline x_2 x_3 x_4 x_5 x_7 & \end{array} \right| \quad (3.41)$$

2. Пронумеруем члены ДНФ (3.41) следующим образом:

$$K_1 = x_1 x_3 x_5,$$

$$K_2 = x_2 x_4 x_6,$$

$$K_3 = x_1 x_3 x_4 x_6 x_7,$$

$$K_4 = x_2 x_3 x_4 x_5 x_7. \quad (3.42)$$

3. Преобразуем уравнение (3.41) с учетом (3.42) к ОДНФ:

$$y = \bigvee_{i=1}^4 K_i' = \left| \begin{array}{l} K_1 \\ K'_1 K_2 \\ K'_1 K'_2 K_3 \\ K'_1 K'_2 K'_3 K_4 \end{array} \right|. \quad (3.43)$$

4. Отрицания элементарных конъюнкций  $K'_i$  выразим с помощью преобразования (3.33):

$$K'_1 = \left| \begin{array}{l} x'_1 \\ x'_3 \\ x'_5 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} x'_1 \\ x_1 x'_3 \\ x_1 x_3 x'_5 \end{array} \right|, \quad (3.44)$$

$$K'_2 = \left| \begin{array}{l} x'_2 \\ x'_4 \\ x'_6 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} x'_2 \\ x_2 x'_4 \\ x_2 x_4 x'_6 \end{array} \right|, \quad (3.45)$$

$$K'_3 = \left| \begin{array}{l} x'_1 \\ x'_3 \\ x'_4 \\ x'_6 \\ x'_7 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} x'_1 \\ x_1 x'_3 \\ x_1 x_3 x'_4 \\ x_1 x_3 x_2 x'_6 \\ x_1 x_3 x_4 x_6 x'_7 \end{array} \right|. \quad (3.46)$$

5. Определим следующие конъюнкции:

$$K'_1 K_2 = \left| \begin{array}{l} x'_1 \\ x_1 x'_3 \\ x_1 x_3 x'_5 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} x_2 x_4 x_6 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} x'_1 x_2 x_4 x_6 \\ x_1 x_2 x'_3 x_4 x_6 \\ x_1 x_2 x_3 x_4 x'_5 x_6 \end{array} \right|. \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} K'_1 K'_2 K_3 &= \left| \begin{array}{l} x'_1 \\ x_1 x'_3 \\ x_1 x_3 x'_5 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} x'_2 \\ x_2 x'_4 \\ x_2 x_4 x'_6 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} x_1 x_2 x_4 x_6 x_7 \end{array} \right| = \\ &= \left| \begin{array}{l} x_1 x'_2 x_3 x_4 x'_5 x_6 x_7 \end{array} \right|, \end{aligned} \quad (3.48)$$



вания очень громоздки, а число слагаемых в формулах (3.27) и (3.39) нередко превышает 100. При небольшом числе ( $n < 10$ ) членов ДНФ функции  $y$  эти затруднения удастся преодолеть с помощью табличного метода расчета надежности системы. Он основан на использовании теоремы сложения вероятностей совместных событий, в качестве которых здесь непосредственно выступают элементарные конъюнкции условий работоспособности (или неработоспособности) системы, записанных в ДНФ с помощью КПУФ (2.4).

$$y(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{i=1}^d \mathcal{P}_i \quad (3.53)$$

или МСО (2.5)

$$y'(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{j=1}^m S_j. \quad (3.54)$$

Согласно этой теореме и выражениям (3.53) и (3.54) вероятность безотказной работы системы (или вероятность ее отказа) можно вычислить по формулам

$$\begin{aligned} P\{y(x_1, \dots, x_n) = 1\} &= R_c = P\left\{\bigvee_{i=1}^d \mathcal{P}_i\right\} = \\ &= \sum_i P(\mathcal{P}_i) - \sum_j \sum_i P(\mathcal{P}_i \wedge \mathcal{P}_j) + \sum_k \sum_j \sum_i P(\mathcal{P}_i \wedge \mathcal{P}_j \wedge \\ &\wedge \mathcal{P}_k) - \dots + (-1)^{d-1} P(\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{P}_d), \quad (3.55) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{y(x_1, \dots, x_n) = 0\} &= Q_c = P\left\{\bigvee_{j=1}^m S_j\right\} = \\ &= \sum_i P(S_i) - \sum_j \sum_i P(S_i \wedge S_j) + \sum_k \sum_j \sum_i P(S_i \wedge S_j \wedge S_k) - \dots \\ &\dots + (-1)^{m-1} P(S_1 \wedge S_2 \wedge \dots \wedge S_m). \quad (3.56) \end{aligned}$$

Несмотря на кажущуюся громоздкость формул (3.55) и (3.56), расчеты надежности с их помощью оказываются достаточно простыми и легко контролируемые. Для этого предлагается производить расчеты в табличной форме, что и объясняет название данного метода расчета.

Согласно этому методу в соответствии с (3.55) и (3.56) необходимо составить специальную таблицу, в которой нужно разместить  $n$  строк (по числу элемен-

тов в системе) и  $C_1=2^d-1$  или  $C_2=2^m-1$  столбцов, причем

$$\begin{aligned} C_1 &= C^1_d + C^2_d + \dots + C^i_d + \dots + C^d_d, \\ C_2 &= C^1_m + C^2_m + \dots + C^i_m + \dots + C^m_m, \end{aligned} \quad (3.57)$$

где  $C^i_d$  — число сочетаний из  $d$  по  $i$ .

В названиях строк указываются вероятности безотказной работы элементов  $R_i$  (или вероятности их отказов  $Q_i$ ), а в названиях столбцов все возможные сочетания конъюнкции  $\mathcal{P}_i$  (или  $S_j$ ), взятых по одной, по две, по три и т. д. Кроме того, указываются знаки вероятностей этих конъюнкций («+» или «-»), чередующиеся в соответствии с формулой (3.55) или (3.56). Указанную таблицу следует заполнить крестиками и черточками, причем крестиками отмечаются вероятности тех событий, которые входят в данную конъюнкцию, а черточками — вероятности событий, отсутствующих в ней.

Табличный способ вычисления удобен по двум причинам:

1) автоматически осуществляется умножение логических переменных самих на себя согласно тождеству

$$x_i \wedge x_i \wedge \dots \wedge x_i \equiv x_i; \quad (3.58)$$

2) взаимно уничтожаются многие одинаковые конъюнкции, вероятности которых имеют различные знаки.

Для сравнительной иллюстрации затрат времени на вычисление вероятности  $P\{y(x_1, \dots, x_{16})=1\}$  для ФАЛ вида

$$y(x_1, \dots, x_{16}) = \left| \begin{array}{l} x_1 x_3 x_5 x_7 \\ x_2 x_4 x_6 x_8 \\ x_7 x_9 x_{11} x_{13} x_{15} \\ x_8 x_{10} x_{12} x_{14} x_{16} \\ x_1 x_3 x_4 x_6 x_8 x_{16} \\ x_2 x_3 x_4 x_5 x_7 x_{16} \end{array} \right|. \quad (3.59)$$

приведем данные о затратах времени одним и тем же специалистом при использовании трех рассмотренных методов: 40 ч (алгоритм разрезания), 25 ч (алгоритм ортогонализации), 5 ч (табличный метод) [53].

**Пример 3.3.** Решим ту же самую задачу, которая уже рассматривалась в предыдущих примерах 3.1 и 3.2, причем за исходное условие работоспособности примем

ФРС (3.14), записанную в повторной ДНФ. Будем считать для простоты надежность всех элементов одинаковой и равной  $R=0,9$ :

*Решение.* Составим табл. 3.1, как описано выше, и заполним ее в такой последовательности. Сначала поставим крестики в столбцах, соответствующих кратчайшим путям успешного функционирования системы по уравнению (3.14). Затем последовательно заполним столбцы, например пятый, согласно функции

$$P_1 P_2 = (x_1 x_3 x_5) \wedge (x_1 x_3 x_4 x_6 x_7) = x_1 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7.$$

Заполнив всю таблицу крестиками и черточками, вычеркнем те одинаковые конъюнкции, которые вошли в нее с разными знаками (например, столбцы 9, 11, 14 и 15).

Теперь можно приступить к вычислению вероятности безотказной работы системы, перемножая в каждом столбце те вероятности  $R_i$ , которые отмечены крестиками.

При одинаковой надежности элементов расчет существенно упрощается, так как сводится к непосредственному подсчету степеней  $R$  в полиноме

$$R_c = 2R^3 + 2R^5 - 5R^6 + 2R^7, \quad (3.60)$$

который тождествен (3.30) и (3.52).

#### 3.4. СХЕМНО-ЛОГИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМЫ

Этот метод расчета надежности систем основан на обобщенной теореме разложения произвольной ФАЛ по любым  $i$  аргументам (1.55) и использовании специальной релейно-контактной схемы (РКС), являющейся наглядной графической моделью условий работоспособности исследуемой системы. Впервые метод был опубликован в [53].

Использование схемно-логического метода преобразования ФАЛ для расчета надежности сложных систем позволяет найти вероятность безотказной работы системы значительно быстрее, чем применение изложенных методов. Это объясняется тем, что в данном методе используется разложение повторной ФАЛ не по одному,

$R_1 = 0,9$	$\mathcal{P}_1$	$\mathcal{P}_2$	$\mathcal{P}_3$	$\mathcal{P}_4$	$\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$	$\mathcal{P}_1\mathcal{P}_3$	$\mathcal{P}_1\mathcal{P}_4$	$\mathcal{P}_2\mathcal{P}_3$	$\mathcal{P}_2\mathcal{P}_4$	$\mathcal{P}_3\mathcal{P}_4$	$\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2\mathcal{P}_3$	$\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2\mathcal{P}_4$	$\mathcal{P}_1\mathcal{P}_3\mathcal{P}_4$	$\mathcal{P}_2\mathcal{P}_3\mathcal{P}_4$	$\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2\mathcal{P}_3\mathcal{P}_4$
	„+“				„-“						„+“				„-“
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$R_1$	×	×	-	-	×	×	×	×	×	-	×	×	×	×	×
$R_2$	-	-	×	×	-	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
$R_3$	×	×	-	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
$R_4$	-	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
$R_5$	×	-	-	×	×	×	×	-	×	×	×	×	×	×	×
$R_6$	-	×	×	-	×	×	-	×	×	×	×	×	×	×	×
$R_7$	-	×	-	×	×	-	×	×	×	×	×	×	×	×	×
$R_c$	$0,9^3$	$0,9^5$	$0,9^3$	$0,9^5$	$0,9^6$	$0,9^6$	$0,9^6$	$0,9^6$		$0,9^6$		$0,9^7$	$0,9^7$		

а сразу по целой комбинации повторяющихся аргументов и, кроме того, все преобразования проводятся по РКС, что дает возможность избежать многих промежуточных преобразований, необходимых при других методах ортогонализации.

На РКС каждый элемент изображается электрическим контактом, а провода, связывающие элементы, заменяют логические операции И ( $\wedge$ ) и ИЛИ ( $\vee$ ). При таком изображении РКС всегда получается в виде последовательно-параллельных контактных цепей (а не мостиковых структур) с многими повторяющимися контактами.

РКС дает наглядное представление о комбинации «выгодных» переменных, по которым следует делать разложение ФАЛ, и о наиболее целесообразной последовательности преобразований, которая приводит схему к простейшему виду.

Для упрощения графической части работы условимся контакты на схемах не изображать и обозначать не буквами  $x_i$  (закрывающий) и  $x'_i$  (размыкающий), а просто их номерами:  $i$  (закрывающий) и  $i'$  (размыкающий), как это показано на рис. 3.3,а.

На рис. 3.3,б—и дана графическая иллюстрация некоторых соотношений алгебры логики с помощью РКС. Например, на рис. 3.3,б показано преобразование РКС, соответствующее операции склеивания, которая записана справа от схемы. Преобразования РКС, показанные на рис. 3.3,в, г, соответствуют операциям поглощения и вынесения за скобки. Преобразования РКС на рис. 3.3,д,е позволяют заменить группу последовательно или параллельно соединенных контактов, имеющих один и тот же номер, одним контактом. Смысл преобразований на рис. 3.3,ж—и понятен без пояснений. Следует только отметить, что постоянно разомкнутая цепь обозначена на рис. 3.3,ж нулем, а постоянно замкнутые цепи на рис. 3.3,з, и — цифрой 1, чтобы отличать такую цепь от контакта с номером 1.

После этих замечаний сформулируем алгоритм схемно-логического метода преобразования ФАЛ для расчета надежности системы.

1. По условиям работоспособности системы, записанным в ДНФ, изобразим РКС. При этом контакты, входящие одновременно в несколько параллельных цепей, вынесем в общую для них последовательную цепь.

2. Выберем для вынесения в последовательную цепь такую комбинацию контактов, которая обеспечивает размыкание всех или большей части параллельных цепей РКС. Опыт расчета надежности технических систем показывает, что при числе параллельных цепей не бо-

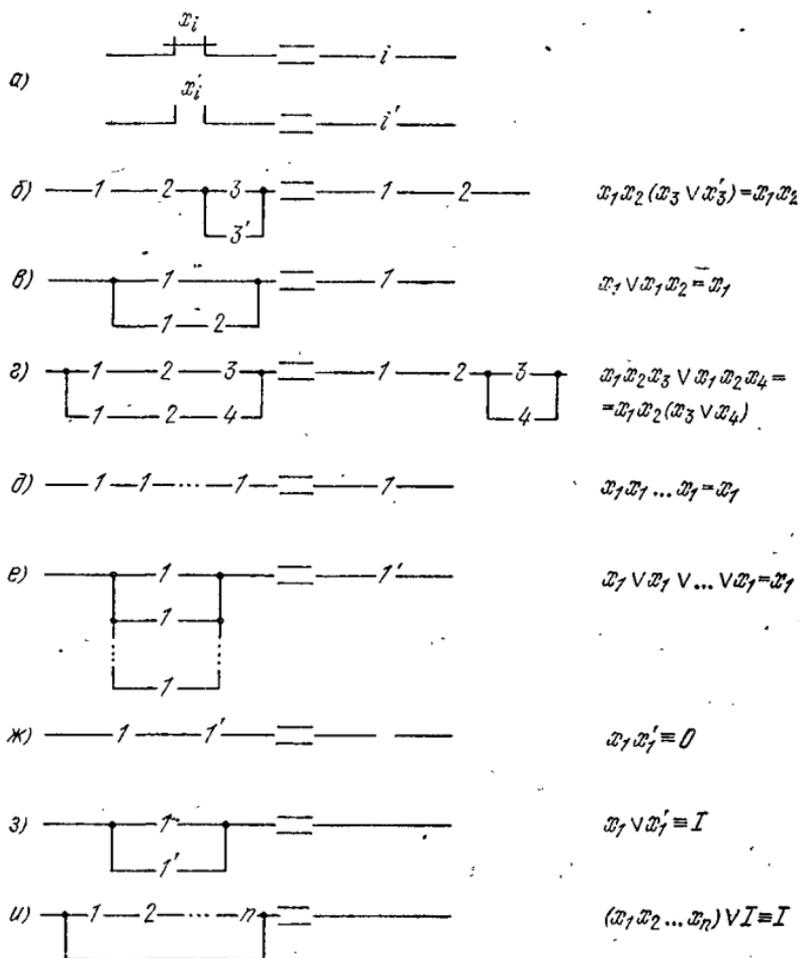


Рис. 3.3. Графическая иллюстрация некоторых соотношений алгебры логики с помощью РКС

лее 20 для их одновременного размыкания обычно достаточно комбинации, состоящей из двух-пяти контактов. После вынесения группы из  $r$  контактов РКС распадается на  $2^r$  параллельных схем.

3. В каждой из  $2^r$  полученных параллельных схем произведем преобразования, вытекающие из теоремы разложения; замыкаем контакты, одинаковые с вынесен-

ными элементами, и размыкаем контакты, соответствующие отрицаниям вынесенных элементов.

4. В схемах, полученных в результате преобразований, удалим все разомкнутые цепи и заменим все группы контактов, оказавшиеся короткозамкнутыми, проводом (линией). Кроме того, контакты, имеющиеся во всех параллельных цепях, вынесем в общую последовательную цепь, а цепи, поглощаемые другими параллельными им цепями, удалим.

5. Изучим каждую из  $2^r$  преобразованных, как указано в п. 4, схем (последовательная цепь, состоящая из  $r$  контактов и контактов, вынесенных в эту цепь дополнительно, не рассматривается). Если схема постоянно разомкнута, то она из дальнейшего рассмотрения исключается. Если схема постоянно замкнута, то она дальнейшим преобразованиям не подвергается. Если схема неповторная, то на этом процесс ее преобразования также заканчивается. Бесповторную функцию, соответствующую данной схеме, запишем в конъюнктивной форме. Если схема не является неповторной, то перейдем к п. 2 и произведем дальнейшие преобразования в соответствии с пп. 2—5.

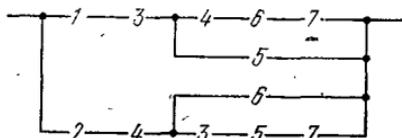


Рис. 3.4. РКС функции (3.14)

6. По полученным в результате преобразований схемам запишем ФАЛ.

7. От ФАЛ перейдем к вероятностной функции и по ней вычислим вероятность безотказной работы системы как вероятность равенства ФАЛ единице.

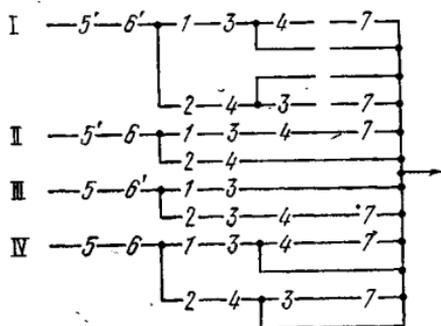
Переход от ФАЛ, полученной в результате преобразований (пп. 4—6), к вероятностной функции осуществляется по правилам (1.35), (1.36).

**Пример 3.4.** Решим задачу, рассмотренную в примерах 3.1—3.3, схемно-логическим методом.

По ФАЛ (3.14) на рис. 3.4 построена РКС, в которой контакты 1—4 вынесены в последовательную цепь.

В соответствии с алгоритмом преобразования применим разложение схемы по контактам (переменным) 5 и 6, которые входят во все параллельные цепи. Так как число  $r$  выносимых контактов равно двум, то можно составить четыре ортогональные конъюнкции:  $x'_5x'_6$ ,  $x'_5x_6$ ,  $x_5x'_6$ ,  $x_5x_6$ .

Результат разложения схемы, представленной на рис. 3.4, показан на рис. 3.5. При вынесении контактов 5 и 6 и размыкании в схеме на рис. 3.4 контактов 5 и 6 схема превращается в постоянно разомкнутую цепь (схема I). Схемы II и III после вынесения контактов 4 и 3 в общую последовательность цепь с контактами 5', 6 и 5, 6' соответственно становятся бесповторными.



В схеме IV контакты 4, 7 и 3, 7 оказались короткозамкнутыми, и оставшаяся часть схемы после удаления этих контактов будет также бесповторной.

Рис. 3.5. Графическая иллюстрация разложения схемы, приведенной на рис. 3.4, по аргументам  $x_5, x_6$

Используя схемы II—IV на рис. 3.5, записываем ФАЛ (3.14) в виде суммы трех ортогональных слагаемых, заменив цифры соответствующими переменными:

$$y(x_1, \dots, x_7) = \begin{vmatrix} x'_5 x_6 x_4 & x_1 x_3 x_7 \\ & x_2 \\ x_5 x'_6 x_3 & x_1 \\ & x_2 x_4 x_7 \\ x_5 x_6 & x_1 x_3 \\ & x_2 x_4 \end{vmatrix}. \quad (3.61)$$

Теперь бесповторные ДНФ в каждом слагаемом запишем в конъюнктивной форме

$$y(x_1, \dots, x_7) = \begin{vmatrix} x'_5 x_6 x_4 [(x_1 x_3 x_7)' x'_2]' \\ x_5 x'_6 x_3 [x'_1 (x_2 x_4 x_7)'] \\ x_5 x_6 [(x_1 x_3)' (x_2 x_4)'] \end{vmatrix}, \quad (3.62)$$

откуда имеем

$$P\{y(x_1, \dots, x_7) = 1\} = R_c = Q_5 R_6 R_4 [1 - (1 - R_1 R_3 R_7) Q_2] + R_5 Q_6 R_3 [1 - Q_1 (1 - R_2 R_4 R_7)] + R_5 R_6 [1 - (1 - R_1 R_3) (1 - R_2 R_4)]. \quad (3.63)$$

При  $R_1 = R_2 = \dots = R_7 = R$  получим

$$P\{y(x_1, \dots, x_7) = 1\} = R_c = 2R^3 + 2R^5 - 5R^6 + 2R^7, \quad (3.64)$$

что совпадает с (3.30), (3.52) и (3.60).

**Пример 3.5.** Решим теперь более сложную задачу, записанную с помощью ФАЛ (3.59).

*Решение.* Изучая функцию  $y(x_1, \dots, x_{16})$ , нетрудно заметить, что конъюнкции  $x_9x_{11}x_{13}$  и  $x_{10}x_{12}x_{14}$  входят в третье и четвертое слагаемые логической суммы. Поэтому целесообразно ввести следующие обозначения:  $x_9x_{11}x_{13}=z_9$ ,  $x_{10}x_{12}x_{14}=z_{10}$ ,  $x_{15}=z_{11}$ ,  $x_{16}=z_{12}$ .

В новых обозначениях функция (3.59) имеет вид

$$y(x_1, \dots, x_8, z_9, \dots, z_{12}) = \left| \begin{array}{l} x_1x_3x_5x_7 \\ x_2x_4x_6x_8 \\ x_7z_9z_{11} \\ x_8z_{10}z_{11} \\ x_1x_3x_4x_6x_8z_{12} \\ x_2x_3x_4x_5x_7z_{12} \end{array} \right|. \quad (3.65)$$

РКС, соответствующая функции (3.65), приведена на рис. 3.6. Нетрудно видеть, что в данном случае целесообразно применить разрезание функции  $y(x_1, \dots, z_{12})$  сразу по четырем переменным  $x_5, x_6, x_7$  и  $x_8$ . Во всех параллельных цепях обязательно содержатся какие-то из этих переменных, причем в четырех цепях имеется по две переменных из четырех, а в двух нижних цепях — по одной.

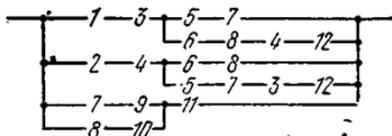


Рис. 3.6. РКС функции (3.65)

Преобразования РКС, полученные в результате этого разрезания функции  $y(x_1, \dots, z_{12})$ , приведены на рис. 3.7. Схемы, полученные при разложении по переменным  $x_5, x_6, x_7$  и  $x_8$ , пронумерованы десятичными числами, соответствующими номерам конъюнкций этих переменных

$$K_i = K_{\alpha_j \alpha_k \alpha_l} = x_j^{\alpha_j} x_k^{\alpha_k} x_l^{\alpha_l}, \quad (3.66)$$

где  $i$  — десятичный номер конъюнкции (3.66), соответствующий двоичному номеру, образованному  $i$ -м набором значений двоичных переменных  $\alpha_j \alpha_k \alpha_l$ .

На рис. 3.7 нет схем с номерами 0 ( $K_{0000}$ ), 4 ( $K_{0100}$ ), 8 ( $K_{1000}$ ) и 12 ( $K_{1100}$ ), так как им соответствуют постоян-

но разомкнутые цепи. Рассматривая рис. 3.7, нетрудно установить, что дальнейшее преобразование схем уже не требуется, так как все они соответствуют неповторным ФАЛ. Кроме того, схемы 1 и 9, 2 и 6, 5 и 13, 10

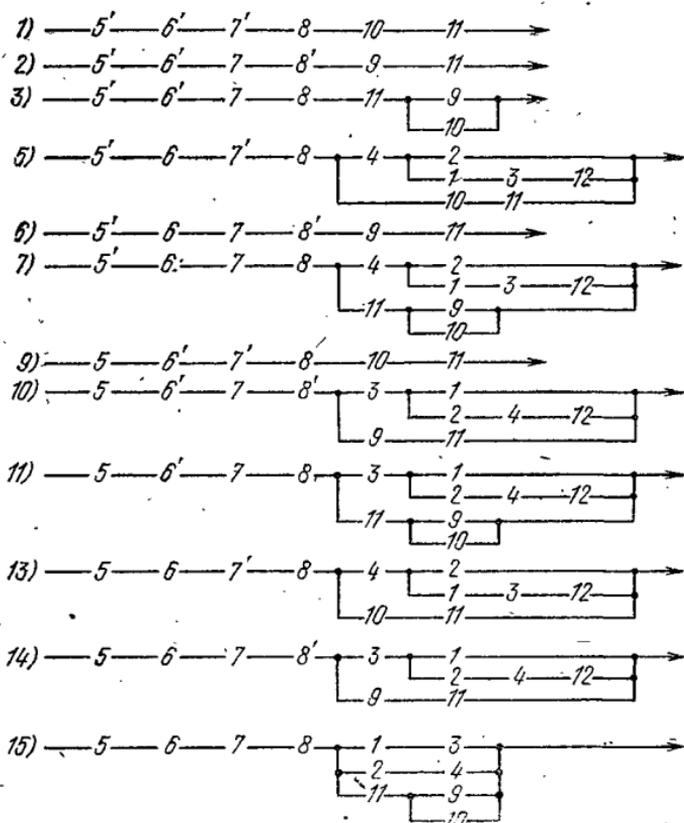


Рис. 3.7. Графическая иллюстрация преобразований РКС, приведенной на рис. 3.6, по аргументам  $x_5, x_6, x_7, x_8$

и 14 можно объединить, так как они отличаются друг от друга только одним контактом. При таком объединении схем, например 1 и 9, происходит склеивание конъюнкций  $x'_5 x'_6 x'_7 x_8 z_{10} z_{11}$  и  $x_5 x'_6 x'_7 x_8 z_{10} z_{11}$  по переменной  $x_5$  в соответствии с формулой (1.24):

$$\begin{aligned} & x'_5 x'_6 x'_7 x_8 z_{10} z_{11} \vee x_5 x'_6 x'_7 x_8 z_{10} z_{11} = \\ & = (x'_5 \vee x_5) x'_6 x'_7 x_8 z_{10} z_{11} = x'_6 x'_7 x_8 z_{10} z_{11}. \end{aligned}$$

По схемам на рис. 3.7 составим преобразованные условия работоспособности (3.65) в виде функции

$$y(x_1, \dots, z_{12}) = \left| \begin{array}{l} x'_6 x'_7 x_8 z_{10} z_{11} \\ x'_5 x_7 x'_8 z_9 z_{11} \\ x'_5 x'_6 x_7 x_8 z_{11} \left| \begin{array}{l} z_9 \\ z_{10} \end{array} \right. \\ x_6 x'_7 x_8 \left| \begin{array}{l} x_4 \quad x_2 \\ \hline x_1 x_3 z_{12} \end{array} \right. \\ \hline z_{10} \quad z_{11} \\ x'_5 x_6 x_7 x_8 \left| \begin{array}{l} x_4 \quad x_2 \\ \hline x_1 \quad x_3 z_{12} \end{array} \right. \\ \hline z_{11} \left| \begin{array}{l} z_9 \\ \hline z_{10} \end{array} \right. \\ x_5 x_7 x'_8 \left| \begin{array}{l} x_3 \quad x_1 \\ \hline x_2 x_4 z_{12} \end{array} \right. \\ \hline z_9 \quad z_{11} \\ x_5 x'_6 x_7 x_8 \left| \begin{array}{l} x_3 \quad x_1 \\ \hline x_2 x_4 z_{12} \end{array} \right. \\ \hline z_{11} \left| \begin{array}{l} z_9 \\ \hline z_{10} \end{array} \right. \\ x_5 x_6 x_7 x_8 \left| \begin{array}{l} x_1 \quad x_3 \\ \hline x_2 \quad x_4 \\ \hline z_{11} \quad z_9 \\ \hline z_{10} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3.67)$$

Применяя закон отрицания к отдельным слагаемым функции (3.67), окончательно получаем

$$y(x_1, \dots, z_{12}) = \left| \begin{array}{l} x'_6 x'_7 x_8 z_{10} z_{11} \\ x'_5 x_7 x'_8 z_9 z_{11} \\ x'_5 x'_6 x_7 x_8 (z'_9 z'_{10})' \\ x_6 x'_7 x_8 \{ \{ x_4 [x'_2 (x_1 x_3 z_{12})]' \}' \{ z_{10} z_{11} \}' \}' \\ x'_5 x_6 x_7 x_8 \{ \{ x_4 [x'_2 (x_1 x_3 z_{12})]' \}' \{ z_{11} [z'_9 z'_{10}]' \}' \}' \\ x_5 x_7 x'_8 \{ \{ x_3 [x'_1 (x_2 x_4 z_{12})]' \}' \{ z_9 z_{11} \}' \}' \\ x_5 x'_6 x_7 x_8 \{ \{ x_3 [x'_1 (x_2 x_4 z_{12})]' \}' \{ z_{11} [z'_9 z'_{10}]' \}' \}' \\ x_5 x_6 x_7 x_8 \{ [x_1 x_3]' [x_2 x_4]' [z_{11} (z'_9 z'_{10})]' \}' \end{array} \right. \quad (3.68)$$

Такая запись ФАЛ позволяет найти вероятность безотказной работы системы без каких-либо дальнейших

преобразований. При одинаковой надежности всех 16 элементов исходной логической функции (3.59), переходя к ВФ, получаем следующий полином:

$$P\{y(x_1, \dots, x_{16})=1\} = R_c = 2R^4 + 2R^5 + 2R^6 - 2R^7 - 5R^8 - R^9 - 2R^{10} + 10R^{12} - 4R^{13} + 2R^{14} - 5R^{15} + 2R^{16}. \quad (3.69)$$

**Пример 3.6.** Сравнивая примеры 3.4 и 3.5, можно заметить, насколько возросла трудоемкость расчетов на-

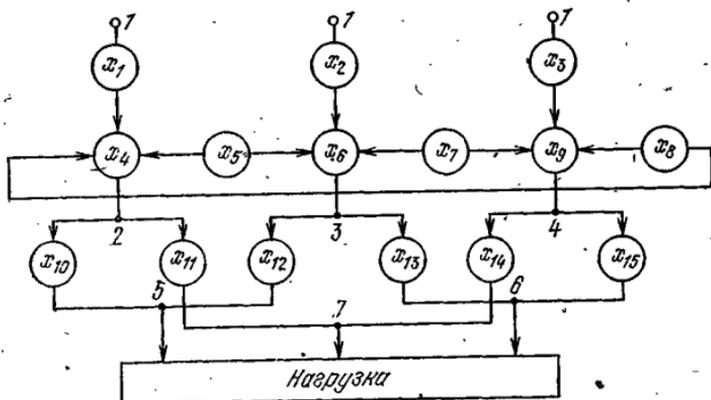


Рис. 3.8. Структурная схема СЭС с тремя генераторами

дежности этих сравнительно простых систем (первая состояла всего из 7 элементов, вторая, по существу, из 12 структурных элементов). В данном примере сделаем еще один небольшой шаг в направлении усложнения задачи: увеличим число структурных элементов до 15.

Рассмотрим вполне реальную СЭС (рис. 3.8), состоящую из трех генераторов одинаковой мощности ( $x_1, x_2, x_3$ ), трех ГРЩ ( $x_4, x_6, x_9$ ), трех связей между ними ( $x_5, x_7, x_8$ ) и шести ВРЩ ( $x_{10} \dots x_{15}$ ).

Задача состоит в том, чтобы обеспечить бесперебойное одновременное питание трех групп ответственных потребителей, каждая из которых может быть включена на один из двух ВРЩ (правого или левого борта). Известно также, что для одновременного питания всех трех групп потребителей достаточно мощности одного генератора, причем нет никаких ограничений по пропускной способности ни ГРЩ, ни перемычек между ними.

*Решение.* Функцию работоспособности данной системы, как показано в § 2.3, можно записать в виде ФАЛ (2.10). При наложении ограничений на источники (например, при условии необходимости работы двух любых генераторов из трех) ФРС примет вид

$$y(x_1, \dots, x_{15}) = \left| \begin{array}{ccc|cc} x_4 x_6 x_1 & x_2 & x_{11} x_{13} & x_{10} & \\ & & & x_{12} & \\ x_4 x_9 x_1 & x_3 & x_{10} x_{15} & x_{11} & \\ & & & x_{14} & \\ x_6 x_9 x_2 & x_3 & x_{12} x_{14} & x_{13} & \\ & & & x_{15} & \\ \\ x_4 x_6 x_9 & x_1 & & x_{13} x_{14} & x_{10} \\ & & x_2 x_8 & & x_{12} \\ & & x_3 x_5 & x_{12} x_{15} & x_{11} \\ & & & & x_{14} \\ \\ & x_2 & x_1 x_7 & x_{10} x_{14} & x_{13} \\ & & x_3 x_6 & & x_{15} \\ & & & & x_{10} \\ & & & & x_{12} \\ \\ & x_3 & x_1 x_7 & x_{10} x_{13} & x_{11} \\ & & x_2 x_8 & & x_{14} \\ & & & & x_{13} \\ & & & & x_{15} \\ \\ & x_{11} & x_2 x_3 & x_{10} x_{13} & x_{14} \\ & & & & x_{15} \end{array} \right|. \quad (3.70)$$

В ФРС (2.10) содержится 146 различных путей успешного функционирования этой системы, причем 54 не являются кратчайшими. Следует сказать, что при раскрытии скобок в матрице (2.10) (их роль выполняют вертикальные линии) и выполнении операции поглощения не кратчайших путей кратчайшими (в соответствии с правилом 21 (1.23)) функция работоспособности  $y(x_1, \dots, x_{15})$  будет иметь ровно 92 дизъюнктивных члена, каждый из которых и будет представлять один из кратчайших путей успешного функционирования исследуемой системы. Попутно заметим, что полный набор всех путей, выраженных в СДНФ, в данной задаче 2410, из которых только 92 пути являются кратчайшими.



точно контролировать все множество  $R$  или  $Q$ . Это подтверждает высокую эффективность такого способа описания условий работоспособности сложных систем, несмотря на все трудности, связанные с первоначальным составлением функций типа (2.10), (3.70) или (3.71).

Кроме того, из рассмотренного примера совершенно очевидно, что данный метод расчета не требует перебора всех интересующих нас состояний или гипотез, как думают многие, незнакомые с логико-вероятностными методами расчета надежности.

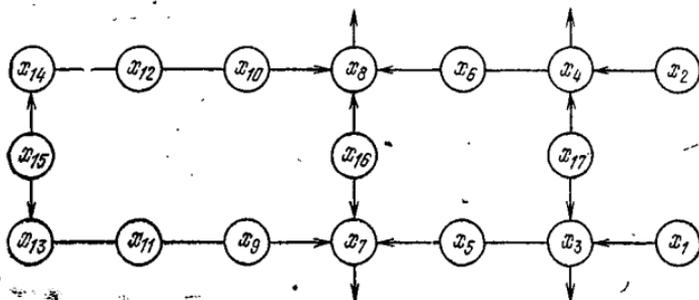


Рис. 3.9. Структурная схема ЭС, используемая для проведения сравнительных расчетов надежности

Разложение повторных функций (2.10) и (3.71) целесообразно проводить в несколько этапов. Опустив промежуточные выкладки, аналогичные рассмотренным в предыдущих примерах (но более громоздкие), приведем окончательные полиномы в предположении одинаковой надежности всех 15 элементов:

$$R_c = 18R^7 - 21R^8 + 80R^9 - 339R^{10} + 585R^{11} - 511R^{12} + 243R^{13} - 60R^{14} + 6R^{15}, \quad (3.72)$$

$$Q_c = 12Q^2 - 13Q^3 - 30Q^4 + 51Q^5 - 12Q^6 + 66Q^7 - 195Q^8 + 100Q^9 + 174Q^{10} - 243Q^{11} + 82Q^{12} + 33Q^{13} - 30Q^{14} + 6Q^{15}. \quad (3.73)$$

**Пример 3.7.** Рассмотрим широкие возможности исследования надежности с помощью ЛВМ на примере ЭС (рис. 3.9). На схеме приняты следующие обозначения:  $x_1, x_2$  — основные генераторы системы, каждый из которых способен обеспечить питанием всю судовую нагрузку;  $x_3, x_4, x_7, x_8$  — главные распределительные щиты;  $x_5, x_6, x_9 - x_{14}, x_{16}, x_{17}$  — элементы продольных и

поперечных перемычек системы;  $x_{15}$  — резервный генератор ограниченной мощности. Стрелками на рис. 3.9 показаны возможные направления передачи электрической энергии. Резервный генератор может обеспечить питанием потребителей только одного из щитов ( $x_7$  либо  $x_8$ ).

Рассмотрим два варианта структуры (первый — без поперечной перемычки  $x_{16}$ , второй — с перемычкой  $x_{16}$ ) и ряд задач, связанных с питанием потребителей от отдельных конкретных щитов и от нескольких щитов в различном сочетании. Некоторые из этих задач имеют непосредственное практическое значение, другие интересны с научно-методической точки зрения. Подробные решения двадцати задач приведены в [55, 91].

## Глава 4

### ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРНОЙ НАДЕЖНОСТИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

#### 4.1. «ВЕС», «ЗНАЧИМОСТЬ» И «ВКЛАД» ЭЛЕМЕНТА В НАДЕЖНОСТЬ СИСТЕМЫ

Одним из важнейших этапов проектирования технической системы является рациональное построение ее структуры. Для этого необходимо иметь аппарат, позволяющий получать количественные характеристики структуры системы. Это дает возможность определять ее «слабые места», выбрать оптимальное резервирование и рационально воздействовать на надежность сложной системы.

ЛВМ позволяют не только количественно оценивать надежность структурно-сложных систем, но и выяснять роль конкретных элементов (и их различных комбинаций) в обеспечении надежности всей системы. С этой целью были предложены специальные характеристики, названные в работах [56, 57, 91] «весом», «значимостью» и «вкладом» элемента в надежность системы.

При отсутствии количественной информации о надежности элементов структурно-сложной системы их влияние на надежность всей системы можно определить с помощью понятия «вес» элемента в структуре. В [91] было введено понятие «вес» булевой разности. Обобщим его для любых ФАЛ.

Определение 1. «Вес» функции  $n$  переменных есть число наборов (вершин  $n$ -мерного куба, клеток карты Карно), на которых данная ФАЛ принимает значение, равное единице.

Если функция представлена в ОДНФ, то «вес» исходной, симметричной, единичной и нулевой функций, а также «вес» булевой разности можно представить в следующем виде [56]:

$$G\{y(x_1, \dots, x_n)\} = G\{y_{x_i}(x_1, \dots, x_n)\} = \sum_f 2^{n-r_f} + \sum_l 2^{n-r_l} + \sum_q 2^{n-r_q}, \quad (4.1)$$

$$G\{y_1^{(i)}(x_1, \dots, x_n)\} = \sum_f 2^{n-(r_f-1)} + \sum_q 2^{n-r_q}, \quad (4.2)$$

$$G\{y_0^{(i)}(x_1, \dots, x_n)\} = \sum_f 2^{n-(r_f-1)} + \sum_q 2^{n-r_q}, \quad (4.3)$$

$$G\{\Delta_{x_i} y(x_1, \dots, x_n)\} = G\{y_1^{(i)}(x_1, \dots, x_n)\} - G\{y_0^{(i)}(x_1, \dots, x_n)\} = \sum_f 2^{n-(r_f-1)} - \sum_f 2^{n-(r_f-1)}, \quad (4.4)$$

где  $f=1, \dots, k$ ;  $j=1, \dots, l$ ;  $q=1, \dots, p$ ;  $k+l+p=m$ ;  $r_f, r_j, r_q$  — ранги элементарных конъюнкций;  $k, l, p$  — число конъюнкций, содержащих  $x_i$ ,  $x_i$  и не содержащих  $i$ -й аргумент;  $m$  — общее число конъюнкций в исходной ФАЛ, представленной в ОДНФ;  $n$  — число независимых переменных исходной функции. Выражение (4.4) следует из (1.46), (1.60) и (1.62).

«Вес» булевой разности (4.4) уже характеризует важность элемента  $x_i$  для надежности системы. Однако для систем с различным числом элементов один и тот же «вес» булевой разности не будет объективно характеризовать данный элемент. Целесообразно перейти к относительным единицам и измерять «вес» элемента числом от 0 до 1.

Определение 2. «Вес» элемента  $x_i$  в системе, состоящей из  $n$  элементов, есть отношение «веса» булевой разности по аргументу  $x_i$  к числу всех наборов  $n$ -мерного логического пространства, т. е.

$$g_{x_i} = \frac{G \{ \Delta_{x_i} y(x_1, \dots, x_n) \}}{2^n} = \sum_{j=1}^l 2^{-(r_j-1)} - \sum_{f=1}^k 2^{-(r_f-1)}, \quad (4.5)$$

где  $l, k$  — число конъюнкций исходной ФРС, представленной в ОДНФ, содержащих  $x_i$  и  $x'_i$  соответственно;  $r_j, r_f$  — ранги этих конъюнкций.

«Вес» элемента характеризует относительное число таких критических работоспособных состояний системы, в которых отказ данного элемента приводит к отказу системы (и, наоборот, его восстановление приводит к восстановлению системы), среди всех состояний системы с  $x_i=1$ .

Алгоритм определения «веса» элемента на основании (4.5):

- 1) найти ОДНФ исходной функции работоспособности системы;
- 2) вычеркнуть конъюнкции, не содержащие аргумент  $x_i$  или его отрицание  $x'_i$ ;
- 3) найти суммарный «вес» конъюнкций, содержащих  $x_i$  по их рангу, уменьшенному на единицу;
- 4) повторить п. 3 для конъюнкций с  $x'_i$ ;
- 5) из результата п. 3 вычесть результат п. 4 (определить «вес» булевой разности);
- 6) разделить результат п. 5 на  $2^n$ , где  $n$  — число элементов в системе (определить «вес» элемента).

**Пример 4.1.** Имеем ФРС в ДНФ для системы мостиковой структуры из пяти элементов, изображенной на рис. 3.1, в виде ФАЛ (3.2). Требуется определить «вес» элементов  $x_1$  и  $x_5$ .

**Решение.** 1. С помощью алгоритма ортогонализации определим ОДНФ ФАЛ (3.2):

$$y(x_1, \dots, x_5) = \left| \begin{array}{l} x_1 x_2 \\ x x'_3 x_4 \\ x'_1 x_2 x_3 x_4 \\ x'_1 x_2 x_3 x'_4 x_5 \\ x_1 x'_2 x'_3 x_4 x_5 \end{array} \right|. \quad (4.6)$$

2. Для элемента  $x_1$  вычеркнем вторую конъюнкцию.

3. Найдем суммарный «вес» конъюнкций, содержащих  $x_1$ ,

$$G \left\{ \left\{ \begin{array}{l} x_1 x_3 \\ x_1 x'_2 x'_3 x_4 x_5 \end{array} \right\} \right\} = 2^{5-(2-1)} + 2^{5-(5-1)} = 18.$$

4. Найдем суммарный «вес» конъюнкций, содержащих  $x'_1$ ,

$$G \left\{ \left\{ \begin{array}{l} x'_1 x_2 x_3 x_4 \\ x'_1 x_2 x_3 x'_4 x_5 \end{array} \right\} \right\} = 2^{5-(4-1)} + 2^{5-(5-1)} = 6.$$

5. Определим «вес» булевой разности по аргументу  $x_1$  (4.4)

$$G \{ \Delta_{x_1} y(x_1, \dots, x_5) \} = 18 - 6 = 12.$$

6. Определим «вес» элемента  $x_1$

$$g_{x_1} = G \{ \Delta_{x_1} y(x_1, \dots, x_5) \} / 2^5 = 12/32 = 0,375.$$

Для элемента  $x_5$  в (4.6) следует вычеркнуть первые три конъюнкции. Затем получим:

$$G \left\{ \left\{ \begin{array}{l} x'_1 x_2 x_3 x'_4 x_5 \\ x_1 x'_2 x'_3 x_4 x_5 \end{array} \right\} \right\} = 2^{5-(5-1)} + 2^{5-(5-1)} = 4,$$

$$G \{ \emptyset \} = 0, \quad G \{ \Delta_{x_5} y(x_1, \dots, x_5) \} = 4 - 0 = 4,$$

$$g_{x_5} = 4/32 = 0,125.$$

Из примера видно, что «вес» элемента  $x_1$  ровно в три раза превышает «вес» элемента  $x_5$ , а значит, и его важность для надежности системы (3.2).

При наличии информации о надежности элементов их влияние на надежность системы можно оценить с помощью понятия «значимость» элемента в структуре [56, 91].

Определение 3. «Значимость» элемента  $x_i$  в системе  $y(x_1, \dots, x_n)$  есть частная производная от вероятности безотказной работы системы  $R_c$  по вероятности безотказной работы элемента  $R_i$ , т. е.

$$z_{x_i} = \frac{\partial P \{ y(x_1, \dots, x_n) = 1 \}}{\partial P \{ x_i = 1 \}} = \frac{\partial R_c}{\partial R_i}. \quad (4.7)$$

На основании теоремы 3 гл. 1 и выражения (1.68) «значимость» элемента  $x_i$  численно равна вероятности равен-

ства единице булевой разности ФРС по аргументу  $x_i$ :

$$\zeta_{x_i} = P\{\Delta_{x_i} y(x_1, \dots, x_n) = 1\}. \quad (4.8)$$

Как показано в [56], для монотонных структур

$$\zeta_{x_i} = \frac{\partial R_c}{\partial R_i} = R_{c_i}^{(i)} - R_{c_0}^{(i)}, \quad (4.9)$$

$$R_{c_i}^{(i)} = P\{y_i^{(i)}(x_1, \dots, x_n) = 1\}, \quad (4.10)$$

$$R_{c_0}^{(i)} = P\{y_0^{(i)}(x_1, \dots, x_n) = 1\}, \quad (4.11)$$

где  $R_{c_i}^{(i)}$  и  $R_{c_0}^{(i)}$  — вероятность безотказной работы системы при абсолютной надежности и абсолютном отказе элемента  $x_i$  соответственно.

На основании (4.8) — (4.11) сформулируем пять следствий:

$$1) \frac{\partial R_c}{\partial Q_i} = R_{c_0}^{(i)} - R_{c_i}^{(i)}, \quad (4.12)$$

$$2) \frac{\partial R_c}{\partial R_i} = -\frac{\partial R_c}{\partial Q_i}, \quad (4.13)$$

$$3) R_c = R_{c_0}^{(i)} + R_i \frac{\partial R_c}{\partial R_i} = R_{c_i}^{(i)} + Q_i \frac{\partial R_c}{\partial Q_i}, \quad (4.14)$$

$$4) \frac{\partial R_c}{\partial R_i} = \frac{R_c - R_{c_0}^{(i)}}{R_i} = \frac{R_{c_i}^{(i)} - R_c}{Q_i}, \quad (4.15)$$

$$5) \frac{\partial R_c}{\partial Q_i} = \frac{R_c - R_{c_i}^{(i)}}{Q_i} = \frac{R_{c_0}^{(i)} - R_c}{R_i}. \quad (4.16)$$

«Вес» элемента (4.5) есть частный случай его «значимости» (4.9) при одинаковой надежности всех элементов и вероятности безотказной работы равной 0,5.

Выражение (4.9) является основой для ручных и машинных способов вычисления «значимости» элементов сложных структур.

В качестве примера сформулируем алгоритм определения «значимости» элемента  $x_i$ , базирующийся на табличном методе расчета надежности системы (см. § 3.3):

- 1) построить таблицу расчета надежности (табл. 3.1);
- 2) вычеркнуть в ней строку, соответствующую элементу  $x_i$ ;

3) вычеркнуть в ней столбцы, в которых элемент  $x_i$  отсутствует;

4) перемножить во всех оставшихся столбцах вероятности безотказной работы тех элементов, которые оказались отмеченными крестиками;

5) сложить результаты п. 4 с учетом знаков «+» и «-» в таблице.

**Пример 4.2.** Определим «значимость» элементов  $x_1$  и  $x_5$  системы из примера 4.1 с помощью табличного алгоритма в предположении равной надежности всех элементов при  $R_i=0,5$ .

*Решение.* 1. Построим табл. 4.1, в которой через  $\mathcal{P}$  обозначены кратчайшие пути успешного функционирования системы (3.2).

$$y(x_1, \dots, x_5) = \begin{vmatrix} x_1 x_3 \\ x_2 x_4 \\ x_1 x_4 x_5 \\ x_2 x_3 x_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathcal{P}_1 \\ \mathcal{P}_2 \\ \mathcal{P}_3 \\ \mathcal{P}_4 \end{vmatrix}, \quad (4.17)$$

2. Вычеркнем в табл. 4.1 строку 1 для  $x_1$ .
3. Вычеркнем в табл. 4.1 столбцы 2, 4, 9.
4. Выполним пп. 4 и 5 алгоритма и получим

$$\zeta_{x_1} = \frac{\partial R_c}{\partial R_1} = R + R^2 - 4R^2 + 2R^4 = 0,375.$$

Аналогичные действия для элемента  $x_5$  дают

$$\zeta_{x_5} = \frac{\partial R_c}{\partial R_5} = 2R^2 - 4R^2 + 2R^4 = 0,125.$$

Критерий «значимость» элемента  $x_i$  в виде (4.9), характеризующий скорость изменения надежности системы, можно интерпретировать как условную вероятность безотказной работы системы при условии работоспособности элемента  $x_i$ .

**Определение 4.** «Вклад» элемента  $x_i$  в надежность системы  $y(x_1, \dots, x_n)$  есть произведение вероятности безотказной работы элемента  $R_i$  на его «значимость», т. е.

$$B_{x_i} = R_i \frac{\partial R_c}{\partial R_i}. \quad (4.18)$$

$-R_i$	$\mathcal{P}_1$	$\mathcal{P}_2$	$\mathcal{P}_3$	$\mathcal{P}_4$	$\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$	$\mathcal{P}_1\mathcal{P}_3$	$\mathcal{P}_1\mathcal{P}_4$	$\mathcal{P}_2\mathcal{P}_3$	$\mathcal{P}_2\mathcal{P}_4$	$\mathcal{P}_3\mathcal{P}_4$	$\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2\mathcal{P}_3$	$\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2\mathcal{P}_4$	$\mathcal{P}_1\mathcal{P}_3\mathcal{P}_4$	$\mathcal{P}_2\mathcal{P}_3\mathcal{P}_4$	$\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2\mathcal{P}_3\mathcal{P}_4$
	" + "				" - "						" + "				" - "
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$R_1$	×	-	×	-	×	×	×	×	-	×	×	×	×	×	×
$R_2$	-	×	-	×	×	-	×	×	×	×	×	×	×	×	×
$R_3$	×	-	-	×	×	×	×	-	×	×	×	×	×	×	×
$R_4$	-	×	×	-	×	×	-	×	×	×	×	×	×	×	×
$R_5$	-	-	×	×	-	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
$\partial R_c / \partial R_1$	$R$	-	$R^2$	-	$R^3$	$R^3$	$R^3$	$R^3$	-	-	-	$R^4$	$R^4$	-	-
$\partial R_c / \partial R_5$	-	-	$R^2$	$R^2$	-	$R^3$	$R^3$	$R^3$	$R^3$	-	-	$R^4$	$R^4$	-	-

Подставляя выражение (4.15) в формулу (4.18), получаем

$$B_{x_i} = R_i \frac{R_c - R_{c0}^{(i)}}{R_i} = R_c - R_{c0}^{(i)}. \quad (4.19)$$

Критерий «вклад»  $B_{x_i}$  характеризует приращение надежности системы после восстановления элемента  $x_i$  из неработоспособного состояния в работоспособное с фактической вероятностью его безотказной работы, равной  $R_i$ .

Как следует из (4.18),

$$B_{x_i} \leq \zeta_{x_i}. \quad (4.20)$$

Определение 5. «Удельный вклад» элемента  $x_i$  в надежность системы  $y(x_1, \dots, x_n)$  есть нормированный «вклад» этого элемента, т. е.

$$b_{x_i} = B_{x_i} / \sum_{i=1}^n B_{x_i}. \quad (4.21)$$

Все приведенные в этом параграфе критерии оценки важности элемента для надежности системы имеют различную «чувствительность» и информационную сущность. Так, например, критерий «вес» элемента  $g_{x_i}$  характеризует только местоположение данного элемента  $x_i$  в структуре  $y(x_1, \dots, x_n)$ . Критерий «значимость» элемента  $\zeta_{x_i}$  характеризует не только местоположение элемента  $x_i$  в структуре системы  $y(x_1, \dots, x_n)$ , но и зависимость от вероятностей безотказной работы всех других элементов системы (кроме самого  $i$ -го элемента). Критерий «вклад» элемента  $B_{x_i}$  характеризует местоположение элемента  $x_i$  в структуре системы  $y(x_1, \dots, x_n)$ , условия ее функционирования и связь с вероятностью безотказной работы всех  $n$  элементов этой системы, включая  $i$ -й элемент.

#### 4.2. КАЧЕСТВЕННОЕ И КОЛИЧЕСТВЕННОЕ ПРИРАЩЕНИЯ НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМЫ

ЛВМ расчета надежности системы позволяют вырабатывать новые подходы к синтезу структур сложных систем с заданной надежностью.

Вероятностная функция надежности

$$R_c = f(R_1, \dots, R_n) \quad (4.22)$$

в общем виде есть выражение

$$R_c = \sum_{i \in M_1} a_i R_i^{\alpha_{i1}} + \sum_{i, j \in M_2} a_2 R_i^{\alpha_{i2}} R_j^{\alpha_{j2}} + \dots + \\ + \sum_{i, j, k \in M_l} a_l R_i^{\alpha_{il}} R_j^{\alpha_{jl}} \dots R_k^{\alpha_{kl}} + \dots + a_n R_1^{\alpha_{1n}} R_2^{\alpha_{2n}} \dots R_n^{\alpha_{nn}}, \quad (4.23)$$

где для сокращения записи опущен аргумент времени  $t$ , а запись  $i \in M_1; i, j \in M_2, \dots, i, j, \dots, k \in M_l$  следует понимать так, что суммирование производится по всем наборам указанных индексов из множества числа сочетаний из  $n$  по одному, по два и по  $l$ , а двоичный показатель степени, например, при члене  $R_i^{\alpha_{il}}$  означает

$$\alpha_{il} = \begin{cases} 1, & \text{если } R_i \text{ входит в одночлен с номером } l, \\ 0, & \text{если } R_i \text{ отсутствует в этом одночлене.} \end{cases} \quad (4.24)$$

Для монотонных структур функция надежности  $R_c$  обладает следующими свойствами:

$$1) \quad \sum_{i=1}^n a_i = 1, \quad (4.25)$$

$$2) \quad R_c \text{ есть линейная функция от аргумента } R_i. \quad (4.26)$$

Эти свойства становятся очевидными, если положить, что все  $R_i = 1$ , тогда и  $R_c = 1$ , а следовательно, и сумма коэффициентов в правой части выражения (4.23) будет также равна единице.

На основании теоремы разложения

$$R_c = P \{y(X) = 1\} = P \{x_i y_1^{(i)}(X) \vee x'_i y_0^{(i)}(X) = \\ = 1\} = P \{x_i = 1\} P \{y_1^{(i)}(X) = 1\} + \\ + P \{x'_i = 1\} P \{y_0^{(i)}(X) = 1\} = R_i R_{c_1}^{(i)} + Q_i R_{c_0}^{(i)}, \quad (4.27)$$

где

$$R_{c_1}^{(i)} = P \{y_1^{(i)}(X) = 1\} \quad (4.28)$$

— вероятность безотказной работы системы при абсолютной надежности выделенного  $i$ -го элемента;

$$R_{c_0}^{(i)} = P \{y_0^{(i)}(X) = 1\} \quad (4.29)$$

— вероятность безотказной работы системы при абсолютном отказе элемента  $x_i$ .

Возьмем частную производную от (4.27):

$$\frac{\partial R_c}{\partial R_i} = \frac{\partial}{\partial R_i} [R_i R_{c_1}^{(i)} + (1 - R_i) R_{c_0}^{(i)}] = R_{c_1}^{(i)} - R_{c_0}^{(i)}. \quad (4.30)$$

Поскольку функции  $R_{c_1}^{(i)}$  и  $R_{c_0}^{(i)}$  имеют те же свойства [(4.25) и (4.26)], что и функция надежности системы  $R_c$ , то сумма всех коэффициентов в выражении для «значимости» элемента  $x_i$  будет равна единице, если он соединен последовательно с оставшейся частью системы (из-за  $R_{c_0}^{(i)} = 0$ ), и нулю, если он соединен с ней параллельно.

В обоих случаях

$$\frac{\partial R_c}{\partial R_i} = \text{const при } R_j = \text{const}, i \neq j, j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.31)$$

В силу линейности функции надежности  $R_c$  от аргумента  $R_i$  для монотонных структур «значимость» элемента  $x_i$  оказывается численно равной приращению надежности системы (4.9) при изменении  $R_i$  от нуля до единицы. В общем случае приращение надежности системы

$$\Delta R_c = \frac{\partial R_c}{\partial R_i} \Delta R_i. \quad (4.32)$$

Самая простая структура есть последовательная цепочка минимально необходимых элементов, т. е. один КПУФ. В пределе (при абсолютной надежности всех элементов) можно было бы обойтись без всякой избыточности. Однако при реальных характеристиках надежности элементов надежность системы может быть существенно меньше заданной  $R_c$  зд.

Существуют два пути повышения требуемой вероятности безотказной работы системы (без учета восстановления):

— качественное повышение надежности элементов (лучшие материалы, современная технология, новые конструкции и т. д.), в результате чего получим некоторое приращение надежности системы, которое условно назовем *качественным* и обозначим  $\Delta R_{с\text{ кач}}$ ;

— введение структурной избыточности (например, путем резервирования элементов), в результате чего также получим приращение надежности системы, которое условно назовем *количественным* и обозначим  $\Delta R_{с\text{ кол}}$ .

За нулевой уровень и начало отсчета  $\Delta R_{с\text{ кач}}$  примем структуру одного КПУФ при равнонадежных элементах с  $R_i = Q_i = 0,5$ . Для реальных элементов, как правило,  $R_i > 0,5$ , а

$$\begin{aligned} \Delta R_{с\text{ кач}} = & \sum_{i \in M_1} 2^{-n+1} \Delta R_i + \sum_{i, j \in M_2} 2^{-n+2} \Delta R_i \Delta R_j + \dots \\ & \dots + \sum_{i, j, \dots, k \in M_l} 2^{-n+l} \Delta R_i \Delta R_j \dots \Delta R_k + \dots + \Delta R_1 \Delta R_2 \dots \Delta R_n. \end{aligned} \quad (4.33)$$

При одинаковой надежности всех элементов выражение (4.33) примет вид

$$\Delta R_{с\text{ кач}} = \sum_{i=1}^n C_i^n 2^{-n+i} (\Delta R_i)^i. \quad (4.34)$$

Если за нулевой уровень качественного приращения надежности системы взять произвольный уровень, то справедливость рассуждений от этого не изменится и соответствующие выражения примут вид

$$\begin{aligned} \Delta R_{с\text{ кач}} = & \sum_{i \in M_1} \frac{\partial R_c}{\partial R_i} \Delta R_i + \sum_{i, j \in M_2} \frac{\partial^2 R_c}{\partial R_i \partial R_j} \Delta R_i \Delta R_j + \dots \\ & \dots + \sum_{i, j, \dots, k \in M_l} \frac{\partial^l R_c}{\partial R_i \partial R_j \dots \partial R_k} \Delta R_i \Delta R_j \dots \Delta R_k + \dots \\ & \dots + \Delta R_1 \Delta R_2 \dots \Delta R_n, \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\Delta R_{с\text{ кач}} = \sum_{j=1}^n C_j^n \frac{\partial^j R_c}{\partial R_1 \dots \partial R_j} (\Delta R_j)^j, \quad (4.36)$$

где  $i, \dots, k \in M_j$ ,  $M_j$  — множество чисел сочетаний из  $n$  по  $j$ . В приведенных выражениях смешанные частные производные определяются по правилам обычного дифференцирования.

При дублировании  $i$ -го элемента однотипным элементом  $x_i$  надежность такого звена возрастет на

$$\Delta R_{зв} = (2R_i - R_i^2) - R_i = R_i Q_i, \quad (4.37)$$

а надежность всей системы возрастет на

$$\Delta R_{с\text{кол}} = \frac{\partial R_c}{\partial R_i} \Delta R_{зв} = \frac{\partial R_c}{\partial R_i} R_i Q_i. \quad (4.38)$$

Из (4.38) видно, что количественное приращение надежности системы зависит не только от «значимости», но и от надежности дублирующего элемента. Причем наибольший эффект резервирования при одинаковых «значимостях» будет именно при  $R_i = Q_i = 0,5$ . Принятие  $R_i = 0,5$  за нулевой уровень удобно обеспечивает однозначность кривой (4.37), так как используется только правая ветвь параболы на участке  $R_i$  от 0,5 до 1.

В общем случае при дублировании нескольких элементов вплоть до максимально возможного их числа  $n$  получим

$$\begin{aligned} \Delta R_{с\text{кол}} = & \sum_{i \in M_1} R_i Q_i \frac{\partial R_c}{\partial R_i} + \sum_{i, j \in M_2} R_i R_j Q_i \times \\ & \times Q_j \frac{\partial^2 R_c}{\partial R_i \partial R_j} + \dots + \sum_{i, j, \dots, k \in M_1} R_i R_j \dots R_k Q_i Q_j \dots \\ & \dots Q_k \frac{\partial^k R_c}{\partial R_i \partial R_j \dots \partial R_k} + \dots + R_1 R_2 \dots R_n Q_1 Q_2 \dots Q_n. \end{aligned} \quad (4.39)$$

**Пример 4.3.** Пусть структура системы будет простейшей (последовательной) и ФРС  $y_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$ . Пусть  $R_1 = 0,7$ ,  $R_2 = 0,8$  и  $R_3 = 0,9$ .

*Решение.* Определим сначала нулевой уровень надежности этой системы, т. е.  $R_{с\text{нач}}$ , при  $R_1 = R_2 = R_3 = R = 0,5$ :

$$R_{с\text{нач}} = 0,5^3 = 2^{-3} = 0,125.$$

Найдем теперь качественное приращение надежности системы по формуле (4.33), учитывая, что  $\Delta R_1 = 0,2$ ,

$$\Delta \bar{R}_2 = 0,3, \Delta \bar{R}_3 = 0,4,$$

$$\begin{aligned} \Delta R_{\text{сикач}} &= 2^{-3+1} \sum_{i=1}^3 \Delta R_i + 2^{-3+2} \sum_{i, j \in C_2} \Delta R_i \Delta R_j + \\ &+ \Delta R_1 \Delta R_2 \Delta R_3 = 2^{-2} (0,2 + 0,3 + 0,4) + 2^{-1} (0,2 \cdot 0,3 + \\ &+ 0,2 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,4) + 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,4 = 0,379. \end{aligned}$$

Определим общую надежность системы для этого простейшего случая в виде суммы

$$R_{c1} = R_{\text{сикач}} + \Delta R_{\text{сикач}} = 0,125 + 0,379 = 0,504,$$

что совершенно точно соответствует произведению

$$\bar{R}_{c1} = R_1 R_2 R_3 = 0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = 0,504.$$

«Веса» и «значимости» элементов данной структуры будут соответственно равны

$$g_{x_1} = g_{x_2} = g_{x_3} = 2^{-n+1} = 2^{-3+1} = 0,25,$$

$$\zeta_{x_1} = R_2 R_3 = 0,72, \zeta_{x_2} = R_1 R_3 = 0,63, \zeta_{x_3} = R_1 R_2 = 0,56.$$

Количественные приращения надежности системы при дублировании элементов по одному

$$\Delta R_{\text{с кол}} = \frac{\partial R_{c1}}{\partial R_1} R_1 Q_1 = 0,72 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 0,1512,$$

$$\Delta R_{\text{с кол}} = \frac{\partial R_{c1}}{\partial R_2} R_2 Q_2 = 0,63 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,1008,$$

$$\Delta R_{\text{с кол}} = \frac{\partial R_{c1}}{\partial R_3} R_3 Q_3 = 0,56 \cdot 0,9 \cdot 0,1 = 0,0504.$$

Отсюда хорошо видно, что если есть возможность резервировать только один элемент, то им должен быть именно первый, обеспечивающий максимальное приращение надежности.

В итоге система с дублированным элементом  $x_1$  (пусть номер дублирующего элемента будет 4) имеет ФРС

$$y_2(x_1, \dots, x_4) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 x_3 \\ x_4 & 1 \end{vmatrix},$$

а

$$R_{c2} = R_{c1нач} + \Delta R_{c1нач} + \Delta R_{c кол} = \\ = 0,125 + 0,379 + 0,1512 = 0,6552.$$

Легко убедиться, что

$$R_{c2} = (1 - Q_1^2) R_2 R_3 = (1 - 0,3^2) 0,8 \times \\ \times 0,9 = 0,6552.$$

При возможности дублирования сразу двух элементов, такими элементами должны быть 1-й и 2-й, что обеспечивает максимальное приращение надежности системы

$$\Delta R_{c кол} = \frac{\partial R_{c1}}{\partial R_1} R_1 Q_1 + \frac{\partial R_{c1}}{\partial R_2} R_2 Q_2 + \frac{\partial R_{c1}}{\partial R_1 \partial R_2} R_1 R_2 Q_1 Q_2 = \\ = 0,1512 + 0,1008 + 0,03024 = 0,28224.$$

Система с дублированными элементами  $x_1$  и  $x_2$  будет описываться ФРС, содержащей уже пять элементов,

$$y_3(x_1, \dots, x_5) = \left| \begin{array}{c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline & & \\ \hline x_4 & x_5 & \end{array} \right|,$$

а

$$R_{c3} = R_{c1нач} + \Delta R_{c1нач} + \Delta R_{c кол} = \\ = 0,125 + 0,379 + 0,28224 = 0,78624.$$

Действительно,

$$R_{c3} = (1 - Q_1^2) (1 - Q_2^2) R_3 = \\ = (1 - 0,3^2) (1 - 0,2^2) \cdot 0,9 = 0,78624.$$

Таким образом, надежность системы можно представить в виде суммы начальной надежности и составляющих ее качественного и количественного приращений, что весьма наглядно показывает роль каждой компоненты.

**Пример 4.4.** Пусть имеются три структуры и их ФРС соответственно равны

$$y_1(x_1, x_2) = x_1 x_2, \quad y_2(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2,$$

$$y_3(x_1, x_2, x_3) = x_1 \left| \begin{array}{c} x_2 \\ \hline x_3 \end{array} \right|,$$

Определим все рассмотренные выше критерии надежности для различных исходных данных. Результаты расчетов представлены в табл. 4.2 и 4.3.

Таблица 4.2

Вариант исходных данных $j$	Номер элемента $i$	$R_i$	Характеристики элементов системы со структурой									
			последовательной $y_1$					параллельной $y_2$				
			$g_{x_i}$	$\zeta_{x_i}$	$B_{x_i}$	$\Delta R_{C \text{ кол}}$	$R_{C1}$	$g_{x_i}$	$\zeta_{x_i}$	$B_{x_i}$	$\Delta R_{C \text{ кол}}$	$R_{C2}$
1	1	0,1	0,5	0,9	0,09	0,081	0,09	0,5	0,1	0,01	0,009	0,91
	2	0,9	0,5	0,1	0,09	0,009		0,5	0,9	0,81	0,081	
2	1	0,5	0,5	0,9	0,45	0,225	0,45	0,5	0,1	0,05	0,025	0,95
	2	0,9	0,5	0,5	0,45	0,045		0,5	0,5	0,45	0,045	

Таблица 4.3

Вариант исходных данных $j$	Номер элемента $i$	$R_i$	Характеристики элементов системы с последовательно-параллельной структурой $y_2$				
			$g_{x_i}$	$\zeta_{x_i}$	$B_{x_i}$	$\Delta R_{C \text{ кол}}$	$R_{C2}$
1	1	0,1	0,75	0,95	0,095	0,0855	0,095
	2	0,9	0,25	0,05	0,045	0,0045	
	3	0,5	0,25	0,01	0,005	0,0025	
2	1	0,9	0,75	0,94	0,846	0,0846	0,846
	2	0,7	0,25	0,28	0,126	0,0378	
	3	0,8	0,25	0,27	0,216	0,0432	
3	1	0,9	0,75	0,84	0,756	0,0756	0,756
	2	0,6	0,25	0,36	0,216	0,0864	
	3	0,6	0,25	0,36	0,216	0,0864	

Как видно из табл. 4.2, в последовательной структуре критерии «вес» и «вклад» неинформативны, а критерий «значимость» элемента четко указывает на необходимость дублирования именно «слабого» элемента ( $x_1$ ), что подтверждает и значение количественного приращения надежности системы. В параллельной структуре информативными критериями являются «значимость» и «вклад», которые указывают на целесообразность дублирования более надежного элемента, что обеспечивает больший выигрыш в надежности системы.

Из табл. 4.3 видно, что «веса» элементов остаются постоянными для всех трех вариантов исходных данных. «Значимость» элемента  $x_1$  для первого и второго варианта исходных данных практически одинакова, а «вклады» резко отличаются. Действительно, повышение вероятности безотказной работы элемента  $x_1$  от 0,1 до 0,9 вносит больший вклад в надежность системы, чем простое дублирование этого же элемента идентичным (дает  $\Delta R_c$  как одного и того же порядка). Последовательный элемент  $x_1$  обладает наибольшей «значимостью» и «вкладом», но тем не менее в третьем варианте исходных данных выгоднее дублировать именно элемент  $x_2$  или  $x_3$ , чтобы получить наибольшее приращение надежности всей системы.

**Пример 4.5.** Усложним несколько структуру исследуемой системы и оценим количественные эффекты изменения надежности этой системы. Пусть это будет простейшая мостиковая структура, показанная на рис. 3.1. Для такой структуры можно сформулировать уже несколько ФРС.

*Решение.* Пусть

$$y_1(x_1, \dots, x_5) = \begin{vmatrix} x_3 & x_1 & & & \\ & x_2 & x_5 & & \\ & x_4 & & & \\ & & x_4 & & \\ & & & x_1 & x_5 \end{vmatrix}, \quad (4.40)$$

$$y_2(x_1, \dots, x_5) = \begin{vmatrix} x_3 & x_4 & & & \\ & & x_1 & x_2 & \\ & & & x_5 & x_1 \\ & & & & x_2 \end{vmatrix}. \quad (4.41)$$

Применив алгоритм ортогонализации к повторным ФАЛ (4.40) и (4.41), получим

$$y_1(x_1, \dots, x_5) = \begin{vmatrix} x_1 & x_3 & & & \\ x_2 & x'_3 & x_4 & & \\ x'_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ x'_1 & x_2 & x_3 & x'_4 & x_5 \\ x_1 & x'_2 & x'_3 & x_4 & x_5 \end{vmatrix}, \quad (4.42)$$

$$y_2(x_1, \dots, x_5) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ x'_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1 & x'_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{vmatrix}.$$

На основании теоремы 4 гл. 1 и формулы (1.69) имеем

$$R_{c1} = R_1 R_3 + R_2 (1 - R_3) R_4 + (1 - R_1) R_2 R_3 R_4 + \\ + (1 - R_1) R_2 R_3 (1 - R_4) R_5 + R_1 (1 - R_2) (1 - R_3) R_4 R_5, \quad (4.43)$$

$$R_{c2} = R_3 R_4 [R_1 R_2 + (1 - R_1) R_2 R_5 + R_1 (1 - R_2) R_5]. \quad (4.44)$$

Найдем значения всех частных производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{c1}}{\partial R_1} &= R_3 - R_2 R_3 R_4 - R_2 R_3 (1 - R_4) R_5 + \\ &\quad + (1 - R_2) (1 - R_3) R_4 R_5, \\ \frac{\partial R_{c1}}{\partial R_2} &= (1 - R_3) R_4 + (1 - R_1) R_3 R_4 + (1 - R_1) R_3 (1 - \\ &\quad - R_4) R_5 - R_1 (1 - R_3) R_4 R_5, \\ \frac{\partial R_{c1}}{\partial R_3} &= R_1 - R_2 R_4 + (1 - R_1) R_2 R_4 + (1 - R_1) R_2 (1 - R_4) R_5 - \\ &\quad - R_1 (1 - R_2) R_4 R_5, \\ \frac{\partial R_{c1}}{\partial R_4} &= R_2 (1 - R_3) + (1 - R_1) R_2 R_3 - (1 - R_1) R_2 R_3 R_5 + \\ &\quad + R_1 (1 - R_2) (1 - R_3) R_5, \\ \frac{\partial R_{c1}}{\partial R_5} &= (1 - R_1) R_2 R_3 (1 - R_4) + R_1 (1 - R_2) (1 - R_3) R_4; \quad (4.45) \\ \frac{\partial R_{c2}}{\partial R_1} &= R_3 R_4 [R_2 - R_2 R_3 + (1 - R_2) R_5], \\ \frac{\partial R_{c2}}{\partial R_2} &= R_3 R_4 [R_1 + (1 - R_1) R_5 - R_1 R_5], \\ \frac{\partial R_{c2}}{\partial R_3} &= R_4 [R_1 R_2 + (1 - R_1) R_2 R_5 + R_1 (1 - R_2) R_5], \\ \frac{\partial R_{c2}}{\partial R_4} &= R_3 [R_1 R_2 + (1 - R_1) R_2 R_5 + R_1 (1 - R_2) R_5], \\ \frac{\partial R_{c2}}{\partial R_5} &= R_3 R_4 [(1 - R_1) R_2 + R_1 (1 - R_2)]. \quad (4.46) \end{aligned}$$

Результаты расчетов представлены в табл. 4.4, из которой видно, что при изменении ФРС становится информативным и критерий «вес» элемента.

Для ФРС  $y_2(x_1, \dots, x_5)$  элемент  $x_5$  становится равным по «весу» элементам  $x_1$  и  $x_2$ . По «значимости» и

«вкладу» элемент  $x_5$  в этих условиях равноценен элементу  $x_1$  и даже лучше элемента  $x_2$  при первом варианте исходных данных. Для второго варианта исходных данных эффект сравнения по «значимости» и «вкладу» элемента  $x_5$  с элементами  $x_1$  и  $x_2$  для ФРС  $y_2$  еще больший, но дублировать элемент  $x_5$  тем не менее не рационально, так как он вносит очень малое количественное приращение надежности всей системы (0,0017).

Интересно отметить, что изменение надежностных характеристик элементов во втором варианте исходных данных повысило надежность системы для первой ФРС и уменьшило для второй.

Указанное влияние надежности элементов на надежность систем можно приближенно оценить по формуле (4.35), опустив в первом приближении для простоты расчетов члены со смешанными частными производными. Действительно, качественное приращение надежности системы  $y_1$  с изменением исходных данных от первого ко второму варианту будет в целом положительным:

$$\begin{aligned} \Delta R_{c1 \text{ кач}} &\approx \frac{\partial R_{c1}^{(1)}}{\partial R_1} \Delta R_1 + \frac{\partial R_{c1}^{(1)}}{\partial R_2} \Delta R_2 + \frac{\partial R_{c1}^{(1)}}{\partial R_3} \Delta R_3 + \\ &+ \frac{\partial R_{c1}^{(1)}}{\partial R_4} \Delta R_4 + \frac{\partial R_{c1}^{(1)}}{\partial R_5} \Delta R_5 = \\ &= 0,1988 \cdot 0 + 0,1134 \cdot 0 + 0,1134(-0,1) + 0,1988 \cdot 0,05 + \\ &+ 0,0388 \cdot 0,09 \approx 0,0021, \end{aligned}$$

а качественное приращение надежности системы  $y_2$  при тех же изменениях исходных данных будет уже отрицательным:

$$\begin{aligned} \Delta R_{c2 \text{ кач}} &\approx 0,1872 \cdot 0 + 0,1296 \cdot 0 + 0,8586(-0,1) + \\ &+ 0,7632 \cdot 0,05 + 0,1872 \cdot 0,09 = -0,0309. \end{aligned}$$

Степень приближенности такой оценки можно определить, сравнив величины

$$R_{c1}^{(2)} \approx R_{c1}^{(1)} + \Delta R_{c1 \text{ кач}} = 0,9565 + 0,0021 = 0,9586,$$

$$R_{c2}^{(2)} \approx R_{c2}^{(1)} + \Delta R_{c2 \text{ кач}} = 0,6869 - 0,0309 = 0,6560$$

с точными значениями  $R_{c1}^{(1)}$  и  $R_{c2}^{(2)}$ , указанными в табл. 4.4 (индексы в скобках обозначают номер  $j$  варианта исход-

Вариант исходных данных $j$	Номер элемента $i$	$R_i$	Характеристики элементов и системы при условии				
			$y_1(x_1, \dots, x_n)$				
			$g_{x_i}$	$\zeta_{x_i}$	$B_{x_i}$	$\Delta R_{c1}$ кол	$R_{c1}$
1	1	0,9	0,375	0,1988	0,1789	0,0179	0,9566
	2	0,8	0,375	0,1134	0,0907	0,0181	
	3	0,8	0,375	0,1134	0,0907	0,0181	
	4	0,9	0,375	0,1988	0,1789	0,0179	
	5	0,9	0,125	0,0388	0,0349	0,0035	
2	1	0,9	0,375	0,1967	0,1770	0,0177	0,9648
	2	0,8	0,375	0,1010	0,0808	0,0162	
	3	0,7	0,375	0,0507	0,0355	0,0106	
	4	0,95	0,375	0,2940	0,2793	0,0140	
	5	0,99	0,125	0,0541	0,0536	0,0005	

ных данных). Ценность такой приближенной оценки будет возрастать с ростом сложности системы и уменьшением числа элементов, надежность которых мы собираемся варьировать.

Подводя итоги, можно отметить:

1) критерий «значимость» элемента в монотонных структурах позволяет определять элементы, обеспечивающие максимальное приращение надежности всей системы;

2) качественное и количественное приращения надежности системы при одновременном изменении надежности любого числа элементов необходимо определять по формулам (4.35) и (4.39);

3) при введении дублирования элементов следует руководствоваться значением количественного приращения надежности системы;

4) критерий «вклад» элемента позволяет рационально определять очередность восстановления элементов в системе.

Таблица 4.4

ее работоспособности				
$y_2(x_1, \dots, x_5)$				
$g_{x_i}$	$c_{x_i}$	$B_{x_i}$	$\Delta R_{c_2 \text{ кол}}$	$R_{c_2}$
0,125	0,1872	0,1685	0,0168	0,6869
0,125	0,1296	0,1037	0,0207	
0,250	0,8586	0,6869	0,1374	
0,250	0,7632	0,6869	0,0687	
0,125	0,1872	0,1685	0,0168	
0,125	0,1370	0,1233	0,0123	0,6500
0,125	0,0718	0,0575	0,0115	
0,250	0,9285	0,6500	0,1950	
0,250	0,6842	0,6500	0,0374	
0,125	0,1729	0,1712	0,0017	

На основании принципа двойственности можно показать возможность оценки «веса» элемента в структуре не только через его утверждение  $x_i$ , но и через его отрицание  $x'_i$ . Это дает некоторые удобства при представлении ФРС с помощью МСО. При этом следует на основании правила де Моргана перейти от ФРС к ее отрицанию, т. е. к функции неработоспособности системы (ФНС):

$$y'(x'_1, \dots, x'_n) = \bigvee_{j=1}^m S_j = \bigvee_{j=1}^m \left[ \bigwedge_{k \in K_{S_j}} x'_k \right], \quad (4.47)$$

где  $K_{S_j}$  означает множество номеров, соответствующих данному МСО ( $S_j$ ).

Тогда

$$g_{x'_i} = \frac{G\{\Delta_{x'_i}, y'(x'_1, \dots, x'_n)\}}{2^n}, \quad (4.48)$$

где

$$\Delta_{x'_i} y'(x'_1, \dots, x'_n) = y_0^{(i)}(x'_1, \dots, x'_n) \oplus y_1^{(i)}(x'_1, \dots, x'_n), \quad (4.49)$$

$$y_0^{(i)} = y'(x'_1, \dots, 0, \dots, x'_n), \quad (4.50)$$

$$y_1^{(i)} = y'(x'_1, \dots, 1, \dots, x'_n). \quad (4.51)$$

Формула (4.5) преобразуется к виду

$$g_{x'_i} = \sum_{f=1}^k 2^{-(r_f-1)} - \sum_{j=1}^l 2^{-(r_j-1)}, \quad (4.52)$$

где  $k, l$  — число конъюнкций исходной ФНС, представленной в ОДНФ, содержащих  $x'_i$  и  $x_i$  соответственно;  $r_f, r_j$  — ранги этих конъюнкций.

**Пример 4.6.** Определим «вес» элемента  $x'_1$  для данных в примере 4.1.

*Решение.* 1. Запишем ФРС (3.2) через отрицания МСО:

$$y(x_1, \dots, x_5) = \left| \begin{array}{cc|cc} x_1 & x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_4 & x_4 & x_3 \\ & & x_5 & x_5 \end{array} \right|. \quad (4.53)$$

2. Перейдем от ФРС (4.53) к ФНС

$$y'(x'_1, \dots, x'_5) = \left| \begin{array}{cc} x'_1 & x'_2 \\ x'_3 & x'_4 \\ x'_1 & x'_4 & x'_5 \\ x'_2 & x'_3 & x'_5 \end{array} \right|. \quad (4.54)$$

3. После ортогонализации выражения (4.54) получим ОДНФ

$$y'(x'_1, \dots, x'_5) = \left| \begin{array}{cc} x'_1 & x'_2 \\ x_1 & x'_3 & x'_4 \\ x'_1 & x_2 & x'_3 & x'_4 \\ x'_1 & x_2 & x_3 & x'_4 & x'_5 \\ x_1 & x'_2 & x'_3 & x_4 & x'_5 \end{array} \right|. \quad (4.55)$$

4. По формуле (4.52) имеем

$$\begin{aligned} \bar{g}_{x'_1} &= \frac{1}{2^5} \left[ G \left\{ \begin{array}{c} x'_1 \ x'_2 \\ x'_1 \ x_2 \ x'_3 \ x'_4 \\ x'_1 \ x_2 \ x_3 \ x'_4 \ x'_5 \end{array} \right\} - \right. \\ &- G \left\{ \begin{array}{c} x_1 \ x'_3 \ x'_4 \\ x_1 \ x'_2 \ x'_3 \ x_4 \ x'_5 \end{array} \right\} \left. \right] = \frac{1}{32} [(2^{-(2-1)} + 2^{-(4-1)} + \\ &+ 2^{-(5-1)}) - (2^{-(3-1)} + 2^{-(5-1)})] = \frac{1}{32} [(2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-4}) - \\ &- (2^{-2} + 2^{-4})] = 0,375. \end{aligned}$$

Таким образом, оказалось, что

$$g_{x'_1} = g_{x_1}.$$

#### 4.3. ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРНОЙ НАДЕЖНОСТИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ ЛОГИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫМИ МЕТОДАМИ

В гл. 3 при изложении методов расчета надежности сложных систем приводились примеры, попутно иллюстрирующие некоторые возможности исследования структурной надежности этих систем. Рассмотрим этот вопрос более детально и покажем конкретные результаты, которые удастся получить, используя ЛВМ.

Для всестороннего исследования системы необходимо сформулировать какое-то множество вариантов задач, поставленных перед ней, а также выдвинуть другие возможные альтернативы ее использования, чтобы затем можно было количественно оценить их эффективность. Решив поставленные задачи, можно вполне объективно судить о важности той или иной связи в системе, о рациональной пропускной способности перемычек, о роли резервных средств и т. д.

Введенные дифференциальные характеристики элементов  $g_{x_i}$ ,  $\zeta_{x_i}$  и  $b_{x_i}^i$  позволяют наглядно увидеть распределение роли всех элементов на заданной структуре при решении конкретных задач.

Приведенные далее примеры убедительно свидетельствуют о том, как полезно знать количественные харак-

теристики структурной надежности, которые можно использовать как при проектировании, так и при эксплуатации технических систем.

Эти характеристики будут еще более полезными, если их можно получить на ЭВМ в диалоговом режиме с машиной. Тогда графики, подобные тем, которые представлены на рис. 4.1—4.4, а также таблицы будут оперативно высвечиваться на экранах дисплеев, а специалисты, даже плохо подготовленные в области теории надежности, будут иметь возможность объективно судить о результатах своего вмешательства (при конструировании систем).

Покажем пример исследования структурной надежности для системы, рассмотренной в § 3.4, структурная схема которой приведена на рис. 3.9.

Таблица 4.5

$x_i$	„Значимость“ элементов системы при ппгании потребителей					
	от шпта $x_7(x_8)$			от шпта $x_7Vx_8$		
	без $x_{16}$	без $x_{17}$	с $x_{16}$ и $x_{17}$	без $x_{16}$	без $x_{17}$	с $x_{16}$ и $x_{17}$
1	0,067941	0,074213	0,033133	0,031296	0,054603	0,031296
2	0,020307	0,026579	0,024082	0,031296	0,054603	0,031296
3	0,271010	0,074213	0,079660	0,060430	0,054603	0,060430
4	0,020307	0,026579	0,032026	0,060430	0,054603	0,060430
5	0,271010	0,074213	0,071716	0,049572	0,054603	0,049572
6	0,000000	0,026579	0,020224	0,049572	0,054603	0,049572
7	0,927110	0,972412	0,977859	0,149099	0,163579	0,149099
8	0,000000	0,065609	0,050749	0,149099	0,163579	0,149099
9	0,139061	0,044360	0,035298	0,023769	0,029533	0,023769
10	0,000000	0,010577	0,008876	0,023769	0,029533	0,023769
15	0,139061	0,083389	0,068051	0,074067	0,090679	0,074067
16	0,000000	0,065609	0,050749	0,000000	0,000000	0,000000
17	0,020307	0,000000	0,005447	0,005827	0,000000	0,005827
$R_c$	0,834399	0,875171	0,880073	0,968588	0,963344	0,968588

В табл. 4.5—4.9 представлены «значимости» всех элементов СЭС, изображенной на рис. 3.9, причем элементы 9 и 10 обозначают конъюнктивно связанные элементы  $x_9$ ,  $x_{11}$ ,  $x_{13}$  и  $x_{10}$ ,  $x_{12}$ ,  $x_{14}$ , имеющие всегда одинаковые «значимости» при равенстве их вероятностей безотказной работы.

В качестве возможных альтернатив здесь приведены некоторые структурные изменения в системе (нет переключки  $x_{16}$  или  $x_{17}$ ), а также ограничения, наложенные

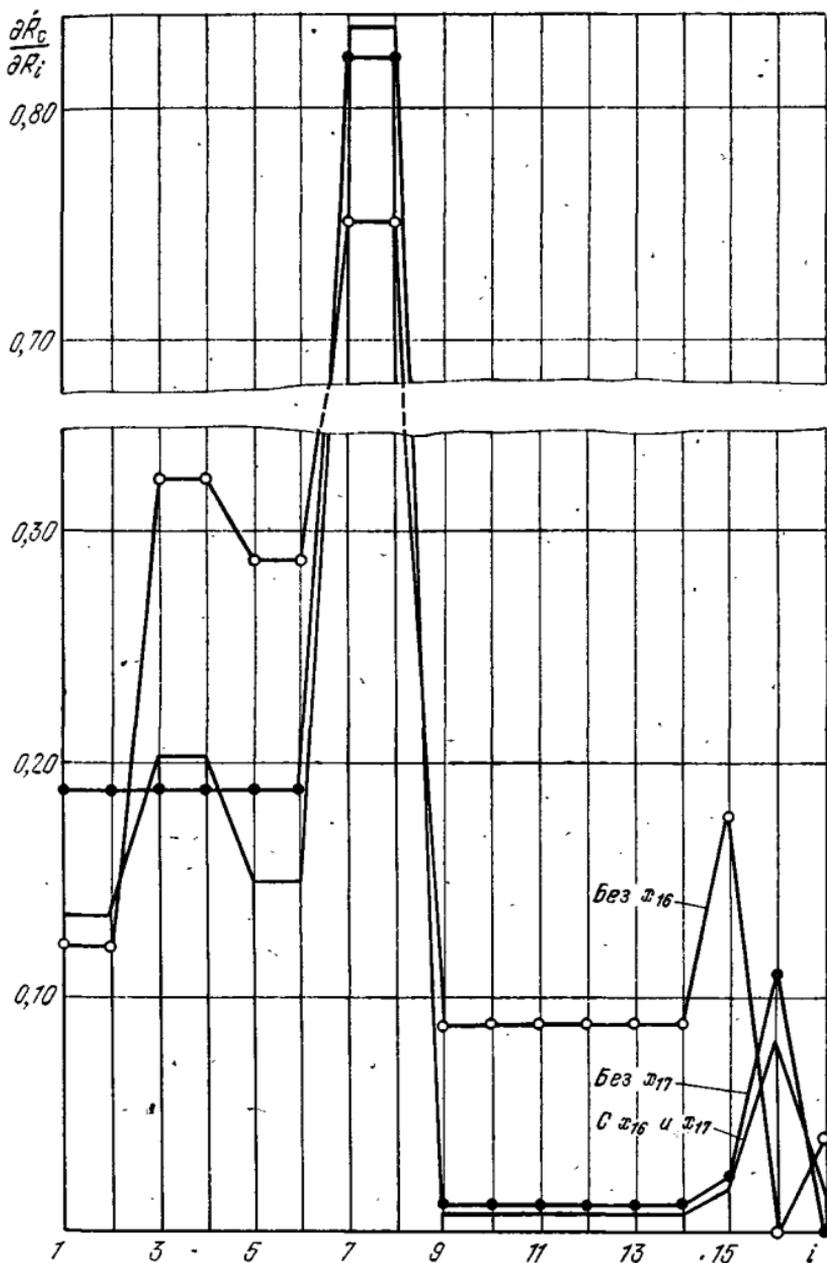


Рис. 4.1. Распределение «значимостей» элементов системы, изображенной на рис. 3.9, при обеспечении бесперебойным питанием потребителей от щитов  $x_7$  и  $x_8$ , ограниченной мощности резервного генератора  $x_{15}$  и некоторых изменениях структуры системы

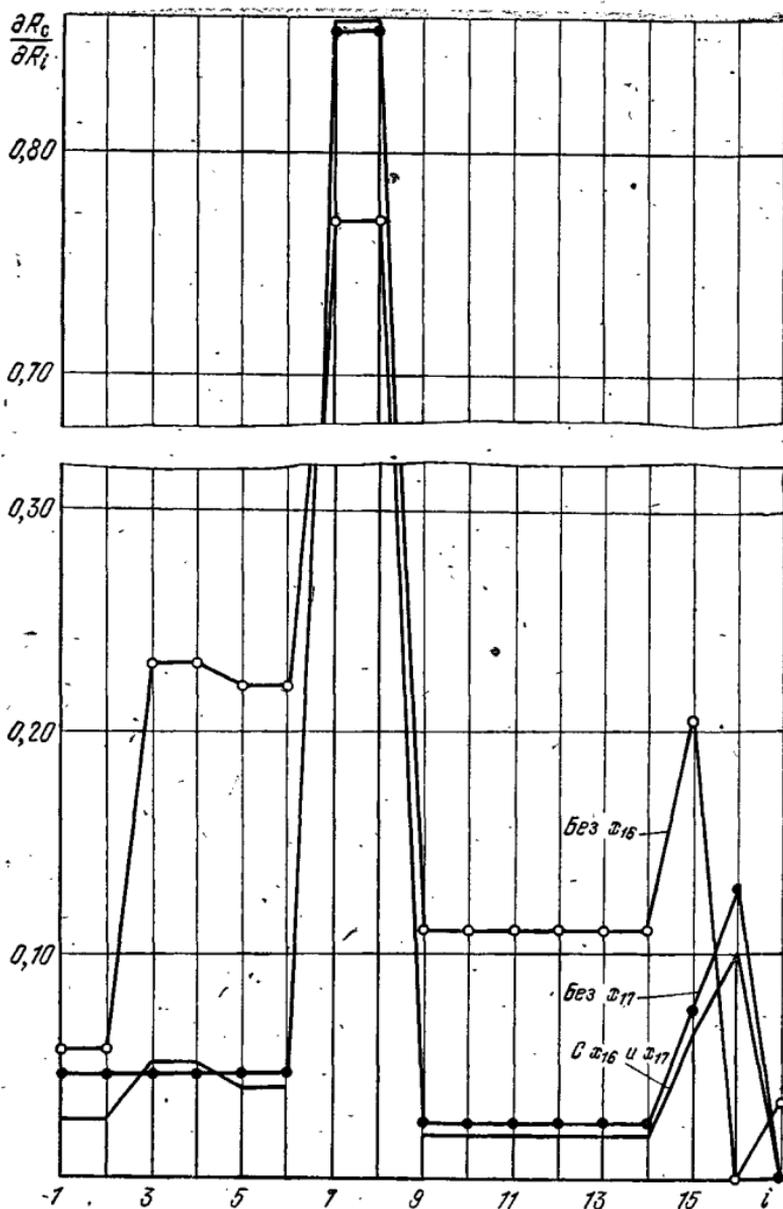


Рис. 4.2. Распределение «значимостей» элементов системы, изображенной на рис. 3.9, при обеспечении бесперебойным питанием потребителей от щитов  $x_7$  и  $x_8$ , достаточной мощности резервного генератора  $x_{15}$  и тех же изменениях структуры системы, что на рис. 4.1

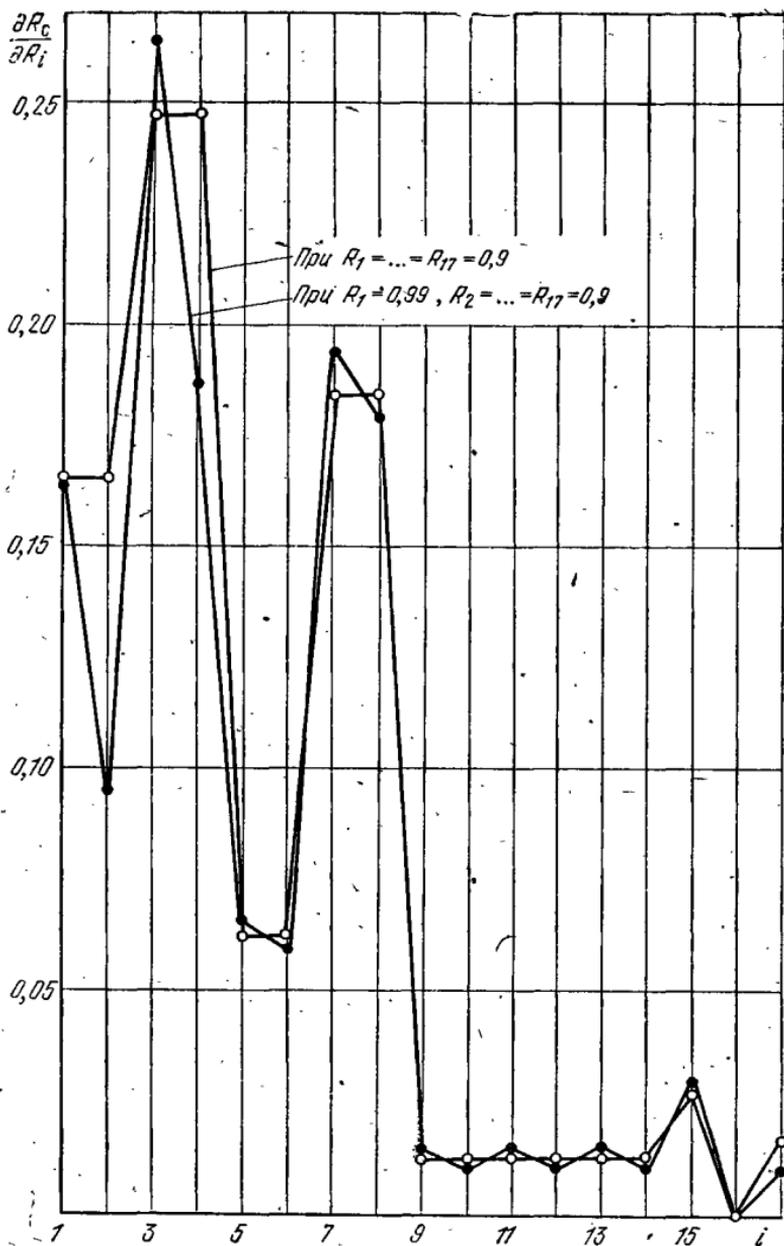


Рис. 4.3. Распределение «значимостей» элементов системы, изображенной на рис. 3.9, при обеспечении бесперебойным питанием потребителей от щитов  $\chi_3\chi_7$  или  $\chi_4\chi_8$  для двух вариантов исходных данных

$x_i$	„Значимость“ элементов системы при питании потребителей от щитов $x_7$ и $x_8$					
	при ограниченной мощности $x_{15}$			при достаточной мощности $x_{15}$		
	без $x_{16}$	без $x_{17}$	с $x_{16}$ и $x_{17}$	без $x_{16}$	без $x_{17}$	с $x_{16}$ и $x_{17}$
1	0,121660	0,188137	0,133925	0,056952	0,046189	0,025919
2	0,121660	0,188137	0,133925	0,056952	0,046189	0,025919
3	0,321014	0,188137	0,201690	0,230887	0,046189	0,051257
4	0,321014	0,188137	0,201690	0,230887	0,046189	0,051257
5	0,286146	0,188137	0,150374	0,221438	0,046189	0,042368
6	0,286146	0,188137	0,150374	0,221438	0,046189	0,042368
7	0,751481	0,821674	0,835227	0,778011	0,874442	0,879509
8	0,751481	0,821674	0,835227	0,778011	0,874442	0,879509
9	0,088762	0,011666	0,008876	0,115293	0,025404	0,020405
10	0,088762	0,011666	0,008876	0,115293	0,025404	0,020405
15	0,177525	0,023331	0,017752	0,204055	0,076099	0,062035
16	0,000000	0,110064	0,083746	0,000000	0,131218	0,101498
17	0,039871	0,000000	0,013553	0,034787	0,000000	0,005068
$R_c$	0,676333	0,739606	0,751704	0,700210	0,786998	0,791558

на элемент  $x_{15}$  (вариант с резервным генератором  $x_{15}$  мощностью, достаточной для одновременного питания потребителей от щитов  $x_7$  и  $x_8$  и вариант с генератором  $x_{15}$  ограниченной мощности, достаточной только для питания потребителей от щита  $x_7$  либо  $x_8$ ).

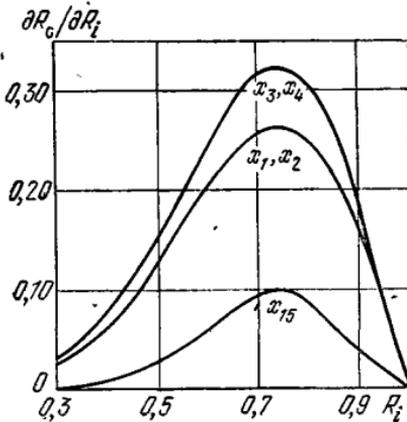


Рис. 4.4. Зависимость «значимостей» по элементам  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$  и  $x_{15}$  в функции от  $R_i$  для системы, изображенной на рис. 3.9, при обеспечении питанием потребителей от щитов  $x_3, x_7 \vee x_4, x_8 \vee x_3, x_8 \vee x_4, x_7$ , ограниченной мощности резервного генератора  $x_{15}$ , равной надежности всех элементов

Анализируя данные табл. 4.5, видим, например, что при обеспечении питанием потребителей от щита  $x_7$  и ограниченной мощности резервного генератора  $x_{15}$  в структуре без переключки  $x_{16}$  нулевую «значимость» имеют не только элемент  $x_{16}$ , но и  $x_6$ ,  $x_8$ ,  $x_{10}$ ,  $x_{12}$ ,  $x_{14}$ . В структуре без переключки  $x_{17}$  значимыми оказались уже все элементы (кроме, естественно,  $x_{17}$ ).

Интересно сравнить «значимость» одних и тех же

„Значимость“ элементов системы при питании потребителей

$x_i$	от щитов $x_3x_7$ ( $x_4x_8$ )			от щитов $x_3x_7x_4x_8$			от щитов $x_3x_7$ или $x_4x_8$		
	без $x_{16}$	без $x_{17}$	с $x_{16}$ и $x_{17}$	без $x_{16}$	без $x_{17}$	с $x_{16}$ и $x_{17}$	без $x_{16}$	без $x_{17}$	с $x_{16}$ и $x_{17}$
	1	0,211961	0,801754	0,216711	0,109607	0,580930	0,129345	0,165143	0,231287
2	0,063354	0,007944	0,065887	0,109607	0,580930	0,129345	0,165143	0,231287	0,165143
3	0,845498	0,801754	0,867642	0,657639	0,580930	0,693826	0,247823	0,231287	0,247823
4	0,063354	0,007944	0,073832	0,657639	0,580930	0,693826	0,247823	0,231287	0,247823
5	0,271010	0,074213	0,071716	0,239225	0,067765	0,094477	0,062287	0,076768	0,062287
6	0,000000	0,007944	0,009533	0,239225	0,067765	0,094477	0,062287	0,076768	0,062287
7	0,845498	0,801754	0,867642	0,657639	0,580930	0,693826	0,184470	0,231287	0,184470
8	0,000000	0,019610	0,022144	0,657639	0,580930	0,693826	0,184470	0,231287	0,184470
9	0,057449	0,013259	0,013321	0,041841	0,003487	0,007322	0,012218	0,015452	0,012218
10	0,000000	0,003161	0,002405	0,041841	0,003487	0,007322	0,012218	0,015452	0,012218
15	0,057449	0,024924	0,022197	0,083683	0,006974	0,014644	0,027826	0,033728	0,027826
16	0,000000	0,019610	0,022144	0,000000	0,032897	0,036187	0,000000	0,000000	0,000000
17	0,063354	0,000000	0,065887	0,109607	0,000000	0,112896	0,016536	0,000000	0,016536
$R_c$	0,760948	0,721579	0,780877	0,591875	0,522837	0,624443	0,926971	0,912088	0,926971

Таблица 4.8

$x_i$	„Значимость“ элементов системы при питании потребителей от щитов $x_3, x_7$ или $x_4, x_8$ и наличии всех элементов в структуре		
	$R_1 = R_2 = 0,9$	$R_1 = 0,99, R_2 = 0,9$	$R_1 = R_2 = 0,99$
1	0,165143	0,165143	0,095175
2	0,165143	0,095175	0,095175
3	0,247823	0,264338	0,195641
4	0,247823	0,186123	0,195641
5	0,062287	0,065603	0,063719
6	0,062287	0,060839	0,063719
7	0,184470	0,194648	0,188672
8	0,184470	0,179788	0,188672
9	0,012218	0,012905	0,012495
10	0,012218	0,011895	0,012495
15	0,027826	0,028245	0,028470
16	0,000000	0,000000	0,000000
17	0,016536	0,009922	0,001819
$R_c$	0,926971	0,941833	0,950399

Таблица 4.9

$x_i$	„Значимость“ элементов системы при питании потребителей от щитов $x_3, x_7, \sqrt{x_4, x_8}, \sqrt{x_3, x_8}, \sqrt{x_4, x_7}$ и ограниченной мощности $x_{15}$		
	без $x_{16}$	без $x_{17}$	с $x_{16}$ и $x_{17}$
1	0,166994	0,190302	0,166994
2	0,166994	0,190302	0,166994
3	0,196128	0,190302	0,196128
4	0,196128	0,190302	0,196128
5	0,049572	0,054603	0,049572
6	0,049572	0,054603	0,049572
7	0,140954	0,155434	0,140954
8	0,140954	0,155434	0,140954
9	0,015623	0,021387	0,015623
10	0,015623	0,021387	0,015623
15	0,042237	0,058848	0,042237
16	0,000000	0,000000	0,000000
17	0,005827	0,000000	0,005827
$R_c$	0,939941	0,934696	0,939941

элементов и по строкам таблицы. Так, в зависимости от структуры существенно (в 2 раза и более) изменяется «значимость», например, элементов  $x_1, x_3, x_5, x_9, x_{11}, x_{13}, x_{15}$  (т. е. нечетных номеров правого борта СЭС). Это соответствует и простому здравому смыслу в условиях данной задачи (питание потребителей от щита  $x_7$ ).

Следует заметить, что «значимость» самого выходного элемента  $x_7$ , т. е.  $\zeta_{x_7}$ , максимальна и в пределе стремится к 1 (при увеличении  $R_i$  до единицы). «Значимость» всех других (так или иначе дублированных) элементов при возрастании  $R_i$  до единицы снижается до нуля. Это и понятно, ибо при абсолютной надежности элементов теряет смысл и само резервирование.

В правой части табл. 4.5 представлены «значимости» при тех же условиях, но для другой задачи: питание потребителей от щита  $x_7$  или  $x_8$ . Здесь и выходные элементы являются зарезервированными, поэтому общая надежность системы  $R_c$  превышает надежность входящих в нее элементов  $R_i$ , а  $\zeta_{x_7} = \zeta_{x_8}$  при возрастании  $R_i$  до единицы стремятся к нулю. Любопытно отметить, что  $\zeta_{x_{16}} = 0$  при всех варьируемых структурах и ограничениях, наложенных на элемент  $x_{15}$ . Отсюда следует, что здесь перемычка  $x_{16}$  не нужна.

При отсутствии перемычки  $x_{17}$  оказываются равными «значимости»  $\zeta_{x_1} = \zeta_{x_2} = \zeta_{x_3} = \zeta_{x_4} = \zeta_{x_5} = \zeta_{x_6} = 0,054603$ , а также  $\zeta_{x_9} = \zeta_{x_{10}} = \zeta_{x_{11}} = \zeta_{x_{12}} = \zeta_{x_{13}} = \zeta_{x_{14}} = 0,029533$ , что объясняется симметрией структуры, исходных условий и задачи.

Из табл. 4.5 можно получить и другие полезные сведения о свойствах анализируемой системы.

Для дальнейшего углубления исследования этой системы рассмотрим противоположную формулировку задачи (питание потребителей от щитов  $x_7$  и  $x_8$  одновременно).

В табл. 4.6 представлены «значимости» всех элементов той же системы при вариациях не только структуры, но и ограничений, наложенных на элемент  $x_{15}$  (при  $R_i = 0,9$ ). Здесь особенно полезно обратить внимание на количественную оценку изменения «значимостей» основных ( $x_1 - x_8$ ) и резервных ( $x_9 - x_{16}$ ) элементов. Так, в структуре без перемычки  $x_{16}$   $\zeta_{x_{15}} > \zeta_{x_1}$  (особенно при повышенной мощности резервного источника  $x_{15}$ ), а с перемычкой  $x_{16}$   $\zeta_{x_{15}} \ll \zeta_{x_1} = \zeta_{x_2}$ . При достаточной мощности генератора  $x_{15}$   $\zeta_{x_{15}} > \zeta_{x_1} = \zeta_{x_2}$  при всех структурах.

В условиях этой задачи самым незначимым элементом является перемычка  $x_{17}$ . Указанные изменения «значимостей» удобно представить графически в виде своеобраз-

разного распределения «значимостей». Рис. 4.1 и 4.2 наглядно иллюстрируют самые разнообразные флуктуации, которые объективно характеризуют надежность каждого элемента исследуемой системы при фиксированной задаче.

В табл. 4.7 представлены «значимости» элементов той же системы на примере трех других задач, каждая из которых является практически реальной для исследуемой СЭС. Так, например, третья задача формулируется на практике в форме обеспечения питанием всех потребителей судна с правого ( $x_3x_7$ ) или левого ( $x_4x_8$ ) борта. В табл. 4.8 приведены результаты расчета «значимостей» элементов именно для такой задачи при вариации исходных данных только одного ( $x_1$ ) и двух ( $x_1$  и  $x_2$ ) элементов. На рис. 4.3 наглядно представлены те «деформации» (перекосы) в «значимостях», которые при этом возникают, и высокая чувствительность модели к малейшим изменениям входной информации.

Самым надежным режимом исследуемой системы является тот, при котором обеспечивается питание потребителей судна от любой пары щитов  $x_3x_7 \vee x_4x_8 \vee x_3x_8 \vee x_4x_7$  (табл. 4.9 и рис. 4.4).

## Глава 5

### ЛОГИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА СТРУКТУРНОЙ НАДЕЖНОСТИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

#### 5.1. ОСНОВЫ ЛОГИКО-ВЕРОЯТНОСТНОГО МЕТОДА РАСЧЕТА НАДЕЖНОСТИ ВОССТАНАВЛИВАЕМЫХ СИСТЕМ

Восстановление, как и резервирование, является одним из средств повышения надежности систем длительного использования. В настоящее время многие технические системы относятся к восстанавливаемым, поэтому необходимо знать методы расчета надежности сложных систем с учетом восстановления.

Количественный учет восстановления отказавших элементов при расчетах надежности систем существенно усложняет как задачу исследования, так и модель явления. Все это требует привлечения более сложного математического аппарата, способного описать такие модели с разной степенью точности и достоверности. Проблеме количественного описания надежности восстанавливаемых систем посвящено много работ, например [2, 3, 11, 45]. Однако трудно указать хотя бы одну работу, в которой надежность восстанавливаемых систем рассчитывалась бы с помощью ЛВМ. Скорее, наоборот, имеется распространенное мнение о принципиальной непригодности ЛВМ для расчета надежности этих систем.

Как известно, математической основой для подавляющего большинства методов расчета надежности восстанавливаемых систем является теория массового обслуживания: При построении математической модели структурно-сложной системы получаются весьма общие схемы массового обслуживания, трудно поддающиеся аналитическому исследованию и требующие применения численных методов и средств вычислительной техники.

Рассмотрим некоторые другие возможности учета восстановления в структурно-сложных системах, базирующиеся на использовании аппарата алгебры логики и теории случайных импульсных потоков [59]. Логическая часть указанного метода, впервые опубликованного в 1969 г. [52], имеет самостоятельное значение и позволяет не только рассчитать надежность восстанавливаемых систем, но и оценить надежность невозстанавливаемых монотонных структур, а также их живучесть и безопасность.

Прежде всего необходимо составить условия работоспособности исследуемой системы, выраженные через конъюнкцию отрицаний всех МСО:

$$y(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{j=1}^m S'_j = \bigwedge_{j=1}^m \left[ \bigvee_{i \in K_{S_j}} x_i \right]. \quad (5.1)$$

Затем следует упростить ФАЛ (5.1) с помощью операции вынесения за скобки одинаковых членов в некоторых конъюнкциях. При вынесении за скобки общих аргументов необходимо сохранить конъюнктивную форму записи функции  $y$ . Иначе говоря, при этом преобразовании ФАЛ следует от конъюнкции элементарных

дизъюнкций ( $S'_j$ ) перейти к конъюнкции некоторых ДНФ ( $Z_i$ ), которые будем называть звеньями схемы ненадежности системы:

$$y(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{j=1}^m S'_j = \bigwedge_{i=1}^r Z_i, \quad (5.2)$$

где  $r$  — число таких звеньев ( $r \leq m$ ).

Последовательно-параллельную структурную схему, соответствующую функции  $\bigwedge_{i=1}^r Z_i$ , назовем *схемой ненадежности системы*.

Отличительной особенностью схемы ненадежности системы является последовательное соединение звеньев, составленных из всевозможных минимальных наборов элементов, одновременный отказ которых приводит к отказу системы в целом. При этом структура самого звена представляет параллельное соединение цепей, состоящих из строго последовательно соединенных элементов.

Функция  $y(x_1, \dots, x_n)$  в форме (5.2) является, как правило, повторной ФАЛ, и для точного решения задачи без учета восстановления необходимо было бы воспользоваться одним из методов расчета, рассмотренных в гл. 3.

Пренебрегая зависимостью отказов звеньев схемы ненадежности (из-за повторности ФАЛ), можно определить вероятность ее безотказной работы  $R_{сн}$ :

$$\begin{aligned} R_{сн} &= P\{y(x_1, \dots, x_n) = 1\} = P\left\{\bigwedge_{i=1}^r Z_i = 1\right\} = \\ &= \prod_{i=1}^r P\{Z_i = 1\} = \prod_{i=1}^r R_{Z_i}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где  $R_{Z_i}$  — вероятность безотказной работы звена  $Z_i$ .

Расчет надежности системы по формуле (5.3) несколько занижает вероятность безотказной работы системы по сравнению с точным значением этой вероятности, и ошибка расчета идет в запас надежности. Следует отметить также, что переход от ФАЛ (5.1) к ФРС (5.2) приводит, как правило, к существенному уменьшению числа конъюнктивных членов, совершенно не иска-

жая логического смысла условий работоспособности системы. Этим, по существу, и объясняется большая точность оценки надежности системы по формуле (5.3) по сравнению с известной нижней оценкой через МСО [3]

$$R_{c \min} = \prod_{j=1}^m \left[ 1 - \prod_{i \in K_{S_j}} Q_i \right]. \quad (5.4)$$

**Пример 5.1.** Преобразуем функцию работоспособности (2.7) системы, изображенной на рис. 2:1, к виду (5.2):

$$y(x_1, \dots, x_8) = \left| \begin{array}{c|cc|cc|cc|cc} x_7 & x_1 & & x_3 & & x_5 & x_1 & x_2 \\ & x_2 & x_4 & x_2 & x_4 & x_6 & x_6 & x_5 \\ & & & & & & x_3 & x_8 \end{array} \right| = \\ = |3_1 3_2 \dots 3_6|. \quad (5.5)$$

Из (5.5) видно, что число звеньев  $r=6$ , а число всех МСО  $m=10$ . При  $R_1=R_2=\dots=R_8=0,9$  по формулам (5.3) и (5.5) находим

$$R_{сн} = \prod_{i=1}^6 R_{3_i} = 0,9 [1 - (1 - 0,9)(1 - 0,9^2)]^2 \times \\ \times [1 - (1 - 0,9)(1 - 0,9^3)] [1 - (1 - 0,9)^3]^2 \approx 0,841,$$

а оценка по формуле (5.4)

$$R_{c \min} = \prod_{j=1}^m \left[ 1 - \prod_{i \in K_{S_j}} Q_i \right] = (1 - Q_7)(1 - Q_1 Q_2)(1 - \\ - Q_1 Q_4)(1 - Q_2 Q_3)(1 - Q_3 Q_4)(1 - Q_3 Q_6)(1 - Q_4 Q_5) \times \\ \times (1 - Q_5 Q_6)(1 - Q_1 Q_6 Q_3)(1 - Q_2 Q_5 Q_8) = \\ = (1 - 0,1)(1 - 0,01)^7 (1 - 0,001)^2 \approx 0,837.$$

Точное решение равно

$$R_c = 2 \cdot 0,9^4 + 2 \cdot 0,9^6 - 5 \cdot 0,9^7 + 2 \cdot 0,9^8 = 0,84453.$$

В примере 5.1 нам удалось достаточно точно оценить надежность невозстанавливаемой системы, используя вероятности безотказной работы звеньев схемы ненадежности. Далее задача состоит в том, чтобы получить расчетные формулы для  $R_{3_i}$  с учетом восстановления элементов системы.

## 5.2. НАДЕЖНОСТЬ ВОССТАНАВЛИВАЕМЫХ СТРУКТУРНО-СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Как нетрудно заметить, функции  $Z_i$ , записанные в ДНФ, представляют собой простые параллельные структуры, соответствующие нагруженному резервированию, а в последовательных цепях (членах дизъюнкции  $Z_i$ ) находятся, как правило, разнотипные элементы.

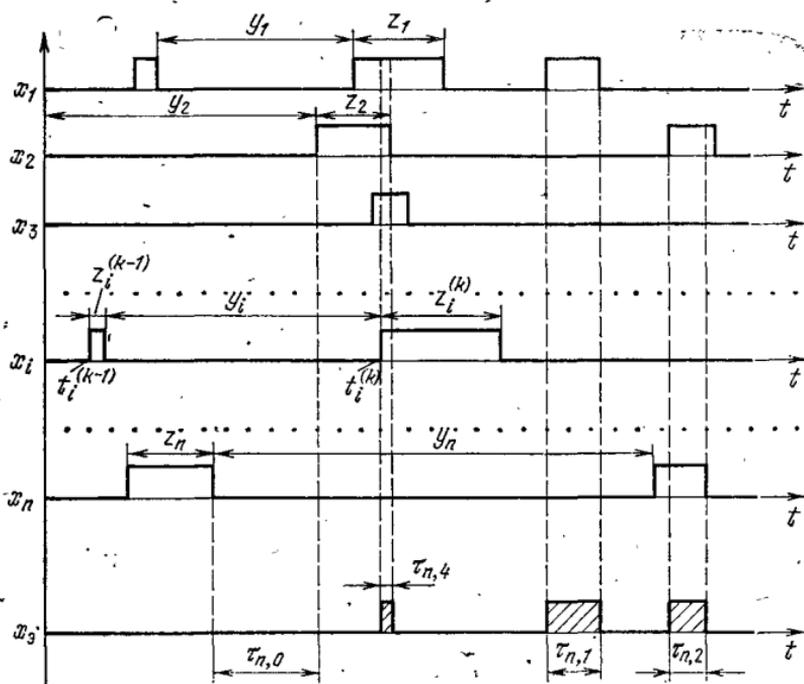


Рис. 5.1. Потoki прямоугольных импульсов

Указанная задача делится, таким образом, на две частные:

1) по известным характеристикам безотказности и восстанавливаемости элементов, находящихся в последовательной цепи звена, оценить соответствующие характеристики этой цепи:

2) по найденным характеристикам последовательных цепей оценить надежность всего звена.

Эти задачи при некоторых общепринятых допущениях можно решить с помощью теории совпадения импульсов независимых потоков [59].

На рис. 5.1 процесс функционирования каждого элемента  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) представлен в виде потока пря-

прямоугольных импульсов, причем продолжительность безотказной работы элемента поставлена в соответствие с длительностью паузы  $y_i$ , а время восстановления — с длительностью импульса  $z_i$ .

Поток взаимно не перекрывающихся во времени импульсов, когда

$$T_i^{(k)} = t_i^{(k)} - t_i^{(k-1)} > z_i^{(k-1)}, \quad (5.6)$$

где  $t_i^{(k)}$  и  $z_i^{(k)}$  — момент появления и длительность  $k$ -го импульса для  $i$ -го элемента (рис. 5.1), называют *стационарным в широком смысле* [59], если математическое ожидание и конечная дисперсия случайной величины  $T_i$  не зависят от  $t$ , а коэффициент корреляции случайных величин  $T_i(t+t_1)$  и  $T_i(t+t_2)$  является функцией  $t_2-t_1$ .

Примем следующие допущения:

- 1) процесс восстановления элементов является стационарным в широком смысле;
- 2) отказ и восстановление элементов независимы;
- 3) все исправные элементы находятся в режиме нагруженного резервирования, а все неисправные неограниченно восстанавливаются.

Совпадение двух и более импульсов будем считать состоявшимся, если их длительности перекрываются хотя бы частично (см. рис. 5.1). Импульс, образованный в результате перекрытия во времени заданного числа  $s$  импульсов, будем называть *импульсом совпадения*. Длительность такого импульса будем обозначать  $\tau_{n,s}$ . На рис. 5.1 заштрихованы импульсы совпадения, образованные в результате перекрытия четырех ( $\tau_{n,4}$ ) и двух ( $\tau_{n,2}$ ) импульсов из  $n$ , а также импульс длительностью  $\tau_{n,1}$ , который условно тоже будем считать импульсом совпадения. Через  $\tau_{n,0}$  обозначена длительность совпадающих пауз.

Процесс совпадения импульсов характеризуется только временными параметрами. Это позволяет форму импульсов каждого потока считать прямоугольной, а их амплитуду равной единице. Длительность  $T_{n,s}$  импульса совпадений, образованного в результате перекрытия во времени заданного числа  $s$  импульсов независимых потоков, является случайной величиной.

В [59] доказана следующая теорема.

Если в процессе совпадения участвуют импульсы  $n$  стационарных и независимых потоков, то распределение

длительности импульсов потока совпадений, образованных в результате перекрытия во времени  $s$  из  $n$  импульсов, определяется плотностью вероятностей

$$\dot{f}_{n,s}(\tau) = \frac{1}{\mu_{n,s}} \frac{d^2}{d\tau^2} P_{n,s}(\tau), \quad (5.7)$$

где  $\mu_{n,s}$  — средняя частота следования импульсов совпадения;  $P_{n,s}(\tau)$  — вероятность нахождения случайной величины  $T_{n,s}$  в пределах импульса потока совпадений, образованного в результате перекрытия во времени  $s$  из  $n$  импульсов.

Математическое ожидание длительности импульса потока совпадений, образованного в результате перекрытия во времени  $s$  из  $n$  импульсов, согласно определению равно

$$\bar{T}_{n,s} = \int_0^{\infty} \tau \dot{f}_{n,s}(\tau) d\tau. \quad (5.8)$$

Подставив в данное уравнение (5.7) и выполнив интегрирование по частям, получим

$$\bar{T}_{n,s} = P_{n,s} / \mu_{n,s}. \quad (5.9)$$

Таким образом, имеется принципиальная возможность вычислить математические ожидания  $\bar{T}_{n,s}$  для любых  $n$  и  $0 \leq s \leq n$ .

Напомним содержание стоящих перед нами задач:

1) зная средние времена безотказной работы  $\bar{Y}_i$  и восстановления  $\bar{Z}_i$  элементов, входящих в цепь звена схемы ненадежности системы, требуется определить эти параметры  $\bar{Y}_s$  и  $\bar{Z}_s$  для одного элемента  $x_s$ , являющегося эквивалентным (в смысле равенства математических ожиданий) последовательной цепочке из  $n$  различных элементов (рис. 5.2,а);

2) зная средние времена  $\bar{Y}_s$  и  $\bar{Z}_s$  для  $m$  параллельных ветвей звена схемы ненадежности системы, требуется определить эти параметры для всего звена  $\bar{Y}_s$  и  $\bar{Z}_s$ , являющегося эквивалентным (в смысле равенства математических ожиданий) параллельному соединению из  $m$  различных элементов (рис. 5.2,б) и оценить вероятность его безотказной работы.

На основании анализа модели совпадения импульсов можно утверждать, что решениями этих задач по экви-

валентированию последовательных цепей и параллельных ветвей звена схемы ненадежности будут [54, 55, 91]

$$\bar{Y}_3 = \bar{T}_{n,0}, \quad (5.10)$$

$$\bar{Z}_3 = \sum_{i=1}^n \bar{T}_{n,i} \quad (5.11)$$

$$\bar{Z}_3 = \bar{T}_{m,m}, \quad (5.12)$$

$$\bar{Y}_3 = \bar{T}_{Mo} - \bar{Z}_3, \quad (5.13)$$

где  $\bar{T}_{Mo}$  — среднее время между отказами звена.

Действительно, математическое ожидание времени безотказной работы  $n$  элементов последовательной цепи

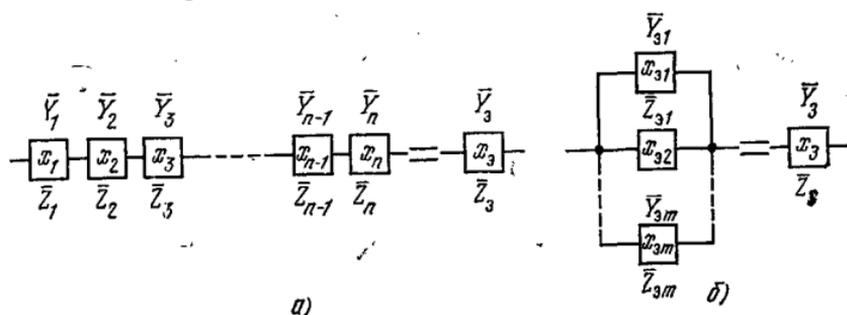


Рис. 5.2 Условия эквивалентирования:

а — последовательной цепи; б — параллельных ветвей звена схемы ненадежности

звена  $\bar{Y}_3$  равно средней длительности совпадения пауз  $\bar{T}_{n,0}$ , а математическое ожидание времени восстановления этой же цепи  $\bar{Z}_3$  в зависимости от принятой модели обслуживания определяется суммой различного числа длительностей импульсов совпадений  $\bar{T}_{n,i}$ . Если в период ремонта одного элемента возможны отказы других, т. е. возможны совпадения ремонтов по два, по три и т. д., то среднее время восстановления цепи (обозначим в этом случае  $\bar{Z}_3^{(1)}$ ) будет определяться суммой всех  $\bar{T}_{n,i}$ .

Как доказано в [59], функция  $f_{n,s}(\tau)$  при  $n \rightarrow \infty$  и соблюдении некоторых нежестких условий приближается к экспоненциальному распределению:

$$f_{n,s}(\tau) = \frac{1}{\bar{T}_{n,s}} \exp\left(-\frac{\tau}{\bar{T}_{n,s}}\right). \quad (5.14)$$

Даже при конечных  $n$ , если стационарные потоки восстановления элементов независимы и выполняется условие

$$\sum_{i=1}^n v_i^2 / \left( \sum_{i=1}^n v_i \right)^2 \leq 0,1, \quad (5.15)$$

суммарный поток восстановлений является практически экспоненциальным независимо от вида функций  $q_i(y)$ ,  $v_i(z)$ . В условии (5.15)  $v_i = 1/Z_i$  — интенсивность восстановления  $i$ -го элемента,  $q_i(y)$ ,  $v_i(z)$  — плотности вероятностей отказа и восстановления  $i$ -го элемента.

Если же плотности распределения случайных величин  $Y_i$  и  $Z_i$  подчиняются экспоненциальному закону, то суммарный поток восстановлений будет простейшим даже при нарушении условия (5.15), т. е. при любом числе  $n$ .

С учетом сказанного получим расчетную формулу для определения

$$\bar{Y}_s = 1 / \sum_{i=1}^n \frac{1}{\bar{Y}_i} = 1 / \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad (5.16)$$

а соответствующая интенсивность отказов элемента  $\lambda_s$  равна

$$\lambda_s = \frac{1}{\bar{Y}_s} = \sum_{i=1}^n \lambda_i. \quad (5.17)$$

Расчетное выражение для определения  $\bar{Z}_s$  при произвольном  $n$  очень громоздко, поэтому запишем формулу только для  $n=2$  и 3:

$$\bar{Z}_{s2}^{(1)} = \bar{T}_{2,1} + \bar{T}_{2,2} = \frac{\bar{Z}_1 \bar{Y}_2 + \bar{Z}_2 \bar{Y}_1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2} + \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}, \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \bar{Z}_{s3}^{(1)} &= \bar{T}_{3,1} + \bar{T}_{3,2} + \bar{T}_{3,3} = \\ &= \frac{\bar{Z}_1 \bar{Y}_2 \bar{Y}_3 + \bar{Z}_2 \bar{Y}_1 \bar{Y}_3 +}{\bar{Z}_1 (\bar{Y}_2 + \bar{Y}_3) + \bar{Z}_2 (\bar{Y}_1 + \bar{Y}_3) + \bar{Z}_3 (\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2) +} \\ &\rightarrow \frac{+ \bar{Z}_3 \bar{Y}_1 \bar{Y}_2}{+ \bar{Y}_2 \bar{Y}_3 + \bar{Y}_1 \bar{Y}_3 + \bar{Y}_1 \bar{Y}_2} + \frac{\bar{Y}_1 \bar{Z}_2 \bar{Z}_3 + \bar{Y}_2 \bar{Z}_1 \bar{Z}_3 +}{\bar{Y}_1 (\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3) + \bar{Y}_2 (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_3) +} \\ &\rightarrow \frac{+ \bar{Y}_3 \bar{Z}_1 \bar{Z}_2}{\bar{Y}_3 (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2) + \bar{Z}_2 \bar{Z}_3 + \bar{Z}_1 \bar{Z}_3 + \bar{Z}_1 \bar{Z}_2} + \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 \bar{Z}_3}{\bar{Z}_2 \bar{Z}_3 + \bar{Z}_1 \bar{Z}_3 + \bar{Z}_1 \bar{Z}_2}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Если при ремонте одного элемента цепи отказы других невозможны (случай, весьма распространенный на практике), то все расчеты существенно упрощаются, так как среднее время восстановления такой цепи будет равно математическому ожиданию длительности только одного импульса совпадений  $\bar{T}_{n,1}$ :

$$\begin{aligned} \bar{Z}_s^{(2)} &= \bar{T}_{n,1} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \left( \bar{Z}_i \prod_{k=1}^n \bar{Y}_k / \bar{Y}_i \right)}{\sum_{i=1}^n \bar{Z}_i \left[ \sum_1^{n-1} \bar{Y}_k \bar{Y}_j \dots \bar{Y}_l \right]_{\substack{k, j, l \in \{n\} \\ k, j, l \neq i}} + \sum_{i=1}^n \left( \prod_{k=1}^n \bar{Y}_k / \bar{Y}_i \right)}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Соответствующая интенсивность восстановления элемента  $x_0$  будет равна

$$v_0 = \frac{1}{\bar{Z}_s^{(2)}} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i + \sum_{i=1}^n \rho_i \left( \sum_{k=1}^n \lambda_k - \lambda_i \right)}{\sum_{i=1}^n \rho_i}, \quad (5.21)$$

где  $\rho_i = \bar{Z}_i / \bar{Y}_i$ .

Исходя из понятия коэффициента готовности (или простоя) последовательной цепи из  $n$  элементов и допуская совпадение ремонтов, можно получить следующее простое выражение для определения математического ожидания времени восстановления цепи:

$$\bar{Z}_s^{(3)} = \left[ \prod_{i=1}^n (1 + \rho_i) - 1 \right] / \sum_{i=1}^n \lambda_i. \quad (5.22)$$

Можно доказать [55], что

$$\bar{Z}_s^{(1)} > \bar{Z}_s^{(3)} > \bar{Z}_s^{(2)}. \quad (5.23)$$

Математическое ожидание времени восстановления звена  $\bar{Z}_3$ , состоящего из  $m$  элементов, равно средней длительности импульса совпадения  $\bar{T}_{m,m}$ , т. е. средней длительности совпадения ремонтов во всех  $m$  ветвях одновременно (ибо в противном случае нашлись бы ветви «без ремонтов», а это означало бы, что звено исправно).

Расчетная формула для определения  $\bar{Z}_3$

$$\bar{Z}_3 = 1 \left/ \sum_{j=1}^m \frac{1}{\bar{Z}_{3j}} \right. = 1 \left/ \sum_{j=1}^m \nu_{3j}, \right. \quad (5.24)$$

а соответствующей интенсивности восстановления элемента  $\lambda_3$

$$\lambda_3 = \sum_{j=1}^m \nu_{3j}. \quad (5.25)$$

Математическое ожидание времени безотказной работы звена  $\bar{Y}_3$  вычисляется с помощью среднего времени между отказами звена  $\bar{T}_{\text{МО}} = \bar{Z}_3 + \bar{Y}_3$ , обратно пропорционального средней частоте следования импульсов совпадения  $\bar{\mu}_{m,m}$ :

$$\bar{T}_{\text{МО}} = \frac{1}{\bar{\mu}_{m,m}} = \frac{\prod_{j=1}^m (\bar{Y}_{3j} + \bar{Z}_{3j})}{\sum_{j=1}^m \frac{\prod_{i=1}^m \bar{Z}_{3i}}{\bar{Z}_{3j}}} = \frac{\prod_{j=1}^m \frac{1 + \rho_{3j}}{\rho_{3j}}}{\sum_{j=1}^m \nu_{3j}}, \quad (5.26)$$

где  $\rho_{3j} = \bar{Z}_{3j} / \bar{Y}_{3j}$ .

Интенсивность отказа звена

$$\lambda_3 = \frac{1}{\bar{Y}_3} = \frac{\sum_{j=1}^m \nu_{3j}}{\prod_{j=1}^m \frac{1 + \rho_{3j}}{\rho_{3j}} - 1}, \quad (5.27)$$

а коэффициент  $\rho_3$  звена определяется выражением

$$\rho_3 = \frac{\bar{Z}_3}{\bar{Y}_3} = \frac{\lambda_3}{\nu_3} = \frac{1}{\prod_{j=1}^m \frac{1 + \rho_{3j}}{\rho_{3j}} - 1}. \quad (5.28)$$

Если плотности распределения случайных величин  $Y_i$  и  $Z_i$  подчиняются экспоненциальному закону (обычно

принимаемое допущение в теории массового обслуживания), то вероятность безотказной работы  $i$ -го звена схемы ненадежности

$$R_{zi}(t) = \exp(-\lambda_{zi}t). \quad (5.29)$$

Для всей схемы ненадежности в соответствии с (5.3) получаем

$$R_{\text{сн}}(t) = \prod_{i=1}^r e^{-\lambda_{zi}t}. \quad (5.30)$$

Последнюю вероятность удобнее вычислять из соотношения

$$\ln R_{\text{сн}}(t) = -t \sum_{i=1}^r \lambda_{zi}. \quad (5.31)$$

Коэффициент готовности можно определить по формуле

$$\begin{aligned} K_r &= \prod_{i=1}^r \frac{\bar{Y}_{zi}}{\bar{T}_{\text{Мот}}} = \prod_{i=1}^r \frac{\bar{Y}_{zi}}{\bar{Y}_{zi} + \bar{Z}_{zi}} = \prod_{i=1}^r \frac{\nu_{zi}}{\lambda_{zi} + \nu_{zi}} = \\ &= \frac{1}{\sum_{i=1}^r (1 + \rho_{zi})} \approx \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^r \rho_{zi}}, \end{aligned} \quad (5.32)$$

которую при малой  $\sum_{i=1}^r \rho_{zi}$  можно упростить:

$$K_r \approx 1 - \sum_{i=1}^r \rho_{zi}. \quad (5.33)$$

**Пример 5.2.** Оценим надежность рассмотренной выше системы (пример 5.1) с учетом восстановления, приняв следующие параметры для элементов  $\bar{Y}_i = 10\,000$  ч,  $\bar{Z}_i = 100$  ч,  $\rho_i = 0,01$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$ . Чтобы в дальнейшем можно было сравнить надежность восстанавливаемой системы с надежностью системы без учета восстановления (для элементов которой ранее принималась вероятность  $R = 0,9$ ), расчет произведем для времени  $t = 1050$  ч, так как

$$R(1050) = \exp(-1050/10\,000) = 0,9003.$$

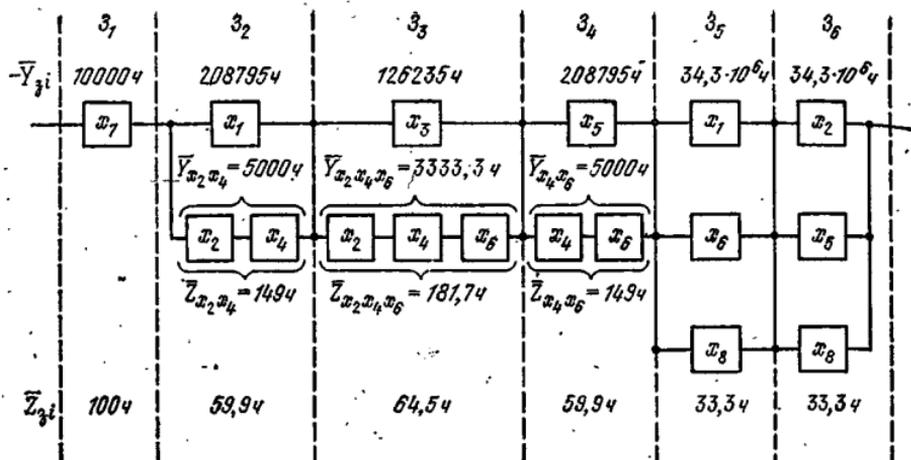


Рис. 5.3. Схема ненадежности системы (5.5)

В соответствии с рис. 5.3 и формулой (5.17) находим

$$\lambda_{x_2 x_4} = \lambda_{x_4 x_6} = 2\lambda_i = 0,0002 \text{ 1/ч}; \quad Y_{x_2 x_4}^- = \bar{Y}_{x_4 x_6} = 5000 \text{ ч},$$

$$\lambda_{x_2 x_4 x_6} = 3\lambda_i = 0,0003 \text{ 1/ч}; \quad \bar{Y}_{x_2 x_4 x_6} = 3333,34 \text{ ч}.$$

По формуле (5.18) определяем

$$\begin{aligned} \bar{Z}_{x_2 x_4}^{(1)} = \bar{Z}_{x_4 x_6}^{(1)} &= \frac{2\bar{Z}_i \bar{Y}_i}{2\bar{Z}_i + 2\bar{Y}_i} + \frac{\bar{Z}_i^2}{2\bar{Z}_i} = \frac{\bar{Z}_i \bar{Y}_i}{\bar{Z}_i + \bar{Y}_i} + 0,5\bar{Z}_i = \\ &= \frac{100 \cdot 10\,000}{100 + 10\,000} + 0,5 \cdot 100 = \frac{1\,000\,000}{10\,100} + 50 = 99 + 50 = 149 \text{ ч}. \end{aligned}$$

Для цепочки из трех элементов по формуле (5.19) имеем

$$\begin{aligned} \bar{Z}_{x_2 x_4 x_6}^{(1)} &= \frac{3 \cdot 100 \cdot 10\,000 \cdot 10\,000}{3 \cdot 100 \cdot (10\,000 + 10\,000) + 3 \cdot 10\,000 \cdot 10\,000} + \\ &+ \frac{3 \cdot 10\,000 \cdot 100 \cdot 100}{3 \cdot 10\,000 \cdot (100 + 100) + 3 \cdot 100 \cdot 100} + \\ &+ \frac{100 \cdot 100 \cdot 100}{3 \cdot 100 \cdot 100} = 98,1 + 49,7 + 33,3 = 181,1 \text{ ч}. \end{aligned}$$

Зная параметры всех эквивалентных цепей, перейдем к расчету звеньев. По формуле (5.24) находим

$$\begin{aligned} \bar{Z}_{3_2} = \bar{Z}_{3_4} &= \frac{1}{1/\bar{Z}_{x_1} + 1/\bar{Z}_{x_2 x_4}} = \frac{1}{1/100 + 1/149} = \\ &= \frac{1}{0,01 + 0,0067} = 59,9 \text{ ч}; \end{aligned}$$

$$\bar{Z}_{33} = \frac{1}{1/\bar{Z}_{x_3} + 1/\bar{Z}_{x_2x_4x_6}} = \frac{1}{1/100 + 1/181,1} = 64,5\text{ч},$$

$$\begin{aligned}\bar{Z}_{35} &= \bar{Z}_{36} = \frac{1}{1/\bar{Z}_{x_1} + 1/\bar{Z}_{x_6} + 1/\bar{Z}_{x_9}} = \\ &= \frac{1}{1/100 + 1/100 + 1/100} = 33,3\text{ч}.\end{aligned}$$

По формуле (5.26) определяем

$$\begin{aligned}\bar{T}_{\text{МОЗ2}} &= \bar{T}_{\text{МОЗ4}} = \frac{(\bar{Y}_{x_1} + \bar{Z}_{x_1})(\bar{Y}_{x_2x_4} + \bar{Z}_{x_2x_4})}{\bar{Z}_{x_1} + \bar{Z}_{x_2x_4}} = \\ &= \frac{(10\,000 + 100)(5000 + 149)}{100 + 149} = \frac{10\,100 \cdot 5149}{249} = 208\,855\text{ч},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{T}_{\text{МОЗ3}} &= \frac{(\bar{Y}_{x_3} + \bar{Z}_{x_3})(\bar{Y}_{x_2x_4x_6} + \bar{Z}_{x_2x_4x_6})}{\bar{Z}_{x_3} + \bar{Z}_{x_2x_4x_6}} = \\ &= \frac{(10\,000 + 100)(3333,3 + 181,1)}{100 + 181,1} = \frac{10\,100 \cdot 3514,4}{281,1} = 126\,300\text{ч},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{T}_{\text{МОЗ5}} &= \bar{T}_{\text{МОЗ6}} = \frac{(\bar{Y}_{x_1} + \bar{Z}_{x_1})(\bar{Y}_{x_6} + \bar{Z}_{x_6})(\bar{Y}_{x_9} + \bar{Z}_{x_9})}{\bar{Z}_{x_6}\bar{Z}_{x_9} + \bar{Z}_{x_1}\bar{Z}_{x_9} + \bar{Z}_{x_1}\bar{Z}_{x_6}} = \\ &= 10\,100^3 / 3 \cdot 100^2 = 34\,300\,000\text{ч}.\end{aligned}$$

Таким образом, интенсивности отказов звеньев исследуемой схемы ненадежности

$$\lambda_{32} = \lambda_{34} = 1 / (208\,855 - 59,9) = 0,0470 \cdot 10^{-4} \text{ 1/ч},$$

$$\lambda_{33} = 1 / (126\,300 - 64,5) = 0,0798 \cdot 10^{-4} \text{ 1/ч},$$

$$\lambda_{35} = \lambda_{36} = 1 / (34\,300\,000 - 33,3) = 0,00029 \cdot 10^{-4} \text{ 1/ч}.$$

По формуле (5.31) получаем

$$\ln R_{\text{сн}}(1050) = -1050(1 + 2 \cdot 0,0470 + 0,0798 + 2 \cdot 0,00029) \cdot 10^{-4} = -0,1336,$$

откуда

$$R_{\text{сн}}(1050) = 0,875.$$

На рис. 5.3 изображена схема ненадежности системы (5.5) и указаны значения вычисленных математических ожиданий для последовательных цепей и звеньев ( $\bar{Y}_{z_i}$ ,  $\bar{Z}_{z_i}$ ). Эти характеристики дают наглядное представление о тех звеньях схемы ненадежности, которые в первую очередь и определяют вероятность ее отказа. Такими звеньями являются  $Z_1$ ,  $Z_3$ , а также  $Z_2$  и  $Z_4$ . Звенья  $Z_5$

и  $Z_6$  практически не снижают надежности системы, и их можно было бы не учитывать. Надежность данной системы в основном определяет элемент  $x_7$  (звено  $Z_1$ ), который не имеет резервирования.

Схема ненадежности дает наглядное представление о «слабых местах» системы, которые в основном и определяют ее надежность. В самом деле, вероятности отказов в различных звеньях схемы ненадежности будут существенно отличаться друг от друга, причем, очевидно, отказы в звеньях, состоящих из большого числа параллельных цепей, будут весьма маловероятны (особенно с учетом восстановления отказавших элементов). На этом, по существу, и строится приближенная методика расчета надежности восстанавливаемых систем, а схема ненадежности помогает обнаружить именно те комбинации элементов, которые определяют надежность системы.

Вероятность безотказной работы резервированной части системы достаточно высока

$$R_c(1050) = R_{\text{сн}}(1050)/R_{x_7}(1050) = 0,972.$$

Без учета восстановления она равна 0,939.

Ввиду того что на практике  $Z_3 \ll \bar{Y}_3$ , формулу (5.27) можно еще несколько упростить, приняв  $\bar{Y}_3 \approx \bar{T}_{\text{мо}}$ , и, следовательно,

$$\lambda_3 \approx v_3 \prod_{j=1}^m \rho_{3j} / \prod_{j=1}^m (1 + \rho_{3j}). \quad (5.34)$$

Для вычисления коэффициента готовности системы определим сначала по формуле (5.28) коэффициенты  $\rho$  всех звеньев:

$$\begin{aligned} \rho_{31} &= 100/10\,000 = 0,01; \quad \rho_{32} = \rho_{34} = \\ &= 59,9/208\,795 = 0,000\,287; \\ \rho_{33} &= 64,5/126\,235 = 0,000\,516; \\ \rho_{35} = \rho_{36} &= 33,3/34,3 \cdot 10^6 = 0,96 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

По формуле (5.32) определим  $K_r$ :

$$\begin{aligned} K_r &= \frac{1}{1 + (10\,000 + 2 \cdot 287 + 516 + 2 \cdot 0,96) \cdot 10^{-6}} = \\ &= \frac{1}{1 + 0,011\,092} = \frac{1}{1,011\,092} \approx 0,989. \end{aligned}$$

Таким образом, мы оценим надежность восстанавливаемой системы монотонной структуры.

## АНАЛИЗ РАБОТОСПОСОБНОСТИ ДВУХПОЛЮСНЫХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ МОДИФИЦИРОВАННОГО ЛОГИКО-ВЕРОЯТНОСТНОГО МЕТОДА

### 6.1. СУЩНОСТЬ МОДИФИЦИРОВАННОГО ЛОГИКО-ВЕРОЯТНОСТНОГО МЕТОДА. ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ АНАЛИЗА НАДЕЖНОСТИ

В данной и следующих главах для анализа надежности двухполюсных и ветвящихся систем используется модифицированный ЛВМ. Сущность модификации и основная особенность метода заключается в том, что в нем используется СФФВ, представляющая собой компактную форму записи некоторого множества условных вероятностей. В ней условия учтены с помощью логических переменных и функций в показателях степени вероятностей некоторых событий. Пусть, например, ФРС имеет вид (1.70). В ней только  $x_1$  и  $x_2$  бесповторные. Заменяя их с помощью теоремы 6 § 1.4, получаем смешанную форму

$$R_c = P(f = 1) = 1 - Q_1^{x_3 \vee x_4 x_5} Q_2^{x_2 \vee x_3 x_5}.$$

В этой записи выражены восемь условных вероятностей, получаемых при восьми различных фиксированных значениях вектора  $(x_3, x_4, x_5)$ .

Применение смешанной формы дает в ряде случаев определенные преимущества. Во-первых, СФФВ позволяет не доводить до конца преобразование исходной формы ФРС до формы перехода к полному замещению, а начать замещение раньше, упростив работу на стадии преобразования ФАЛ. Во-вторых, СФФВ можно вычислить на любой стадии замещения и оценить порядок всех слагаемых, входящих в нее. Если допускается приближенный расчет с заданной погрешностью, то на некоторой стадии замещения можно отбросить малые члены еще до того, как в них закончено замещение. При этом удается значительно сократить трудоемкость преобразований и упростить расчетную формулу без ощутимой потери точности. Важной особенностью модифицированно-

го ЛВМ является возможность использовать систему логических уравнений при переходе к СФФВ непосредственно в виде (2.12), т. е. без записи функций  $f_i$  в явной форме. Это делает ненужным решение (2.12) на первой стадии анализа надежности.

Запись вероятности в смешанной форме, где все зависимости между аргументами представлены с помощью системы арифметических и логических операций и не содержится операторов типа  $P(f=1)$ , очень удобна при программировании задач надежности на известных алгоритмических языках для расчетов на ЭВМ. Наконец, смешанная форма оказывается единственной формой представления функции вероятностей, приспособленной к компактной записи распределения числа работоспособных ветвей в ветвящейся структуре. Об этом подробнее будет сказано в гл. 8. Рассмотрим основные этапы анализа надежности сложных систем с помощью модифицированного ЛВМ.

Составление ФРС. Для однофункциональных систем первого типа функция работоспособности отыскивается в виде

$$f = f(X) = x_n \left( \bigvee_{j \in M_n} x_{nj} f_j \right), \quad f_j = x_j \left( \bigvee_{i \in M_j} x_{ji} f_i \right), \quad (6.1)$$

где  $x_n$  — переменная для элемента, расположенного во входном полюсе;  $x_{nj}$  — переменные для элементов, соединенных непосредственно со входным элементом;  $f_j$  — ФРС в предположении, что элемент  $e_j$  является входным полюсом системы;  $M_j$  — множество элементов, имеющих непосредственные связи с элементом  $e_j$ .

Формула (6.1) имеет следующий смысл: для существования хотя бы одного пути между полюсами необходимо, чтобы были работоспособны входной элемент и элемент связи входного элемента по крайней мере с одним из узлов  $j$  структурной схемы и был хотя бы один работоспособный путь между узлом  $j$  и выходным полюсом. Аналогичный смысл имеет и формула для  $f_j$ . Совокупность формул (6.1) образует систему логических уравнений. Конкретный вид системы логических уравнений и результаты ее преобразования будут рассмотрены далее. Здесь лишь можно заметить, что наиболее простой вид система (6.1) имеет для структур, представленных ориентированными графами без петель и замкнутых путей. Как отмечено ранее, применение модифицирован-

ного ЛВМ позволяет начинать замещение логических переменных исходя непосредственно из (6.1).

Для однофункциональных систем второго типа общая форма записи ФРС

$$f=f(X, \mathcal{E}), \quad (6.2)$$

где  $X$  — вектор логических переменных для элементов системы;  $\mathcal{E}$  — алгоритм управления на сети.

В общем случае функция (6.2) может быть как монотонной, так и немонотонной ФАЛ. Ее конкретный вид и правила составления в различных ситуациях рассматриваются в § 6.3.

В многофункциональных системах для выполнения каждой функции организуется подсистема, в которой можно выделить входной и выходной полюса и для каждой функции можно составить ФРС типа (6.1) или (6.2). Обозначим ее через  $f^{(i)}$ . Если удастся установить логическую связь между надежностью системы и надежностью выполнения каждой функции, то задача сводится к определению надежности двухполюсной сети с ФРС вида

$$f=f(f^{(i)}(X, \mathcal{E}), i \in M). \quad (6.3)$$

Логическая функция  $f$  может быть конъюнкцией  $f^{(i)}$ , когда надо обеспечить одновременное выполнение всех предусмотренных функций, или дизъюнкцией, когда надо обеспечить выполнение хотя бы одной функции:

$$f=f^{(1)} \wedge f^{(2)} \wedge \dots \wedge f^{(m)}, \quad (6.4)$$

$$f=f^{(1)} \vee f^{(2)} \vee \dots \vee f^{(m)}. \quad (6.5)$$

Указанные ситуации возникают в информационных системах при передаче многоадресных сообщений одним узлом в несколько адресов, от нескольких узлов в один адрес, наконец, от нескольких узлов в различные адреса. Аналогичная ситуация возникает и в электроэнергетических системах, когда необходимо обеспечить питанием несколько групп потребителей по определенной логической схеме. Функция  $f$  может иметь и более сложный вид, чем (6.4) и (6.5). Часто используется мажоритарная схема « $k$  из  $m$ »:

$$f=f_{(i_1, i_2, \dots, i_k)} = f^{(i_1)} \wedge f^{(i_2)} \wedge \dots \wedge f^{(i_k)}. \quad (6.6)$$

Преобразование ФРС к ФПЧЗ. В качестве ФПЧЗ используются формы логических функций, приведенные в теоремах 6,8—10 гл. 1. Их необходимо применять тогда, когда не удастся из-за большой сложности преобразований привести ФРС ни кодной из известных форм перехода к полному замещению. Согласно теореме 6 гл. 1 ФРС представляется в виде (форма 1)

$$f = g_0 f_0 \left( \bigvee_{i=1}^n g_i f_i \right), \quad (6.7)$$

где  $g_i$  — элементарные конъюнкции или их отрицания, состоящие из неповторных переменных. Функции  $f_i$  могут быть произвольного вида и содержать повторяющиеся переменные. В общем случае в качестве  $g_i$  может быть не только элементарная конъюнкция, но и любая ФПЧЗ, рассмотренная ранее. При этом сохраняется требование о неповторности переменных, входящих во все функции  $g_i$  в совокупности.

Опыт использования формы 1 при решении задач надежности показывает, что представление ФРС в виде (6.7) не вызывает затруднений. Поэтому может возникать лишь вопрос о целесообразности такого представления при наличии других ФПЧЗ.

Форма 2 (см. теорему 8) допускает полное отсутствие неповторных переменных в логической функции. Все замещаемые на третьем этапе переменные  $x_i$  могут входить в нее дважды:

$$f = \left( \bigvee_{i=1}^n x_i f_i \right)' \left( \bigvee_{i=1}^n x_i g_i \right). \quad (6.8)$$

Функции  $f_i$  и  $g_i$  могут быть произвольного вида, в частности равными тождественно нулю.

Формы 3 и 4 (см. теоремы 9 и 10) являются обобщением форм 1 и 2 соответственно.

Запись СФФВ. СФФВ получается из ФРС в результате частичного замещения логических переменных вероятностями  $R_i$  или  $Q_i$  и перевода остальных переменных в показатели степени вероятностей. Если после первого шага замещения остались незамещенными переменные векторы  $X$ , то СФФВ записывается в виде

$$P(f=1) = P(X). \quad (6.9)$$

Для ФПЧЗ (6.7) и (6.8) смешанная форма согласно (1.73) и (1.82) имеет вид

$$P(f_0, f_1, \dots, f_n) = (1 - a_0^{f_0}) \left( 1 - \prod_{i=1}^n a_i^{f_i} \right), \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} P(f_1, f_2, \dots, f_n, g_1, g_2, \dots, g_n) = \\ = \prod_{i=1}^n Q_i^{f_i} \left( 1 - \prod_{i=1}^n Q_i^{f_i g_i} \right). \end{aligned} \quad (6.11)$$

СФФВ можно преобразовать и упростить с помощью соотношений из алгебры смешанных форм, приведенных в [71—73].

Получение ВФ. Искомая вероятность получается из СФФВ на основе соотношения

$$P = M\{P(X)\}. \quad (6.12)$$

Здесь  $X$  рассматривается как векторная случайная величина с двоичными компонентами. Математическое ожидание  $P(X)$  вычисляется путем многоступенчатого замещения логических переменных с помощью первой теоремы разложения (теорема 7 гл. 1). В самом неблагоприятном случае число шагов замещения совпадает с числом незамещенных переменных. В каждом конкретном случае число шагов обычно значительно меньше, так как обычно удается на одном шаге заместить сразу несколько переменных. Кроме того, в результате упрощения СФФВ на промежуточных шагах число переменных также может уменьшиться, соответственно уменьшается число шагов замещения. Значительно укорачивается процедура получения расчетной формулы и тогда, когда при записи СФФВ используется теорема 9.

При ортогональных слагаемых замещение проводится в различных слагаемых независимо друг от друга. Число шагов уменьшается, так как число переменных в каждом слагаемом обычно меньше, чем во всей СФФВ, а суммарное количество переменных, замещаемых за один шаг, напротив, больше. Иногда независимое замещение удается провести и в каждом сомножителе формулы (1.73). Упрощение процесса перехода от СФФВ к ВФ можно получить за счет удаления на промежуточных шагах малых членов, содержащих сложные логиче-

ские условия с большим числом переменных. Такая возможность предоставляется только в модифицированном методе, где все вероятности после частичного замещения могут быть вычислены на любом шаге и может быть оценен порядок их малости. Рассмотрим применение модифицированного ЛВМ для анализа надежности некоторых классов систем и конкретные технические примеры.

## 6.2. НАДЕЖНОСТЬ МНОГОСВЯЗНЫХ СИСТЕМ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ТИПОВ С ОРИЕНТИРОВАННОЙ СТРУКТУРОЙ ПРИ ПОЛНОМ ОПОВЕЩЕНИИ О СОСТОЯНИИ СЕТИ

Пусть двухполюсная система имеет структуру в виде произвольного ориентированного графа, в котором все элементы (узлы и линии связи) могут отказывать с ненулевыми и, вообще говоря, различными вероятностями. Введем для этой структуры одно ограничение: ориентированный граф должен быть ациклическим, т. е. в нем должны отсутствовать замкнутые ориентированные маршруты (контур), а все пути должны быть простыми [4]. В графе отсутствуют нестрогие параллельные дуги, однако могут быть строго параллельные дуги. Проведем упорядочение вершин графа таким образом, чтобы для всех дуг соблюдалось соотношение: каждая дуга исходит из вершины с большим номером и входит в вершину с меньшим. Ясно, что такое упорядочение всегда возможно, так как в противном случае граф содержал бы контур, которых по предположению в графе нет. При таком упорядочении выходной полюс системы имеет номер 1, а входной — максимальный номер  $n$ .

Для нумерации вершин можно использовать как одну из возможных следующую процедуру. Для каждой вершины определяется число входящих  $\delta^+(e)$  и выходящих  $\delta^-(e)$  дуг. В рассматриваемой системе существует только одна вершина, для которой  $\delta^-(e)=0$ . Это выходной полюс, имеющий номер 1. Затем находятся все вершины, имеющие только одну исходящую дугу, инцидентную выходному полюсу; им присваивается ранг 2. Затем находятся все вершины, имеющие исходящие дуги, инцидентные только вершинам первого и второго рангов и т. д. На последнем шаге находится единственная вершина, имеющая  $\delta^+(e)=0$ . Это входной полюс. Теперь можно провести нумерацию вершин в следующем по-

рядке. Если в графе имеется только по одной вершине каждого ранга, то номер вершины совпадает с ее рангом. Если имеется несколько вершин одного ранга, то в его пределах вершины нумеруются в произвольном порядке или для их нумерации вводится второй индекс. Рассмотрим пример.

**Пример 6.1.** Пусть задана структура, изображенная на рис. 6.1,а. Необходимо упорядочить вершины графа.

**Решение.** Применение правила упорядочения приводит к нумерации, показанной на рисунке. В скобках

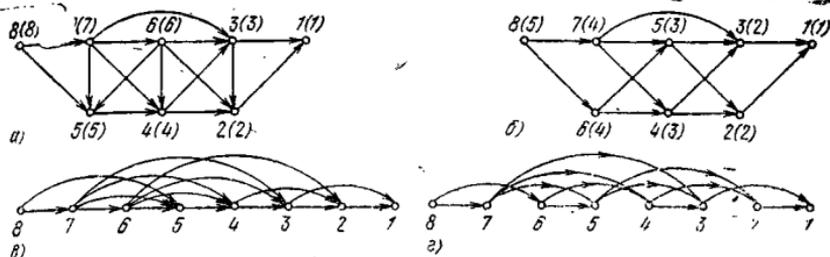


Рис. 6.1. Упорядочение узлов в ориентированной структуре без контуров:

а — вариант 1; б — вариант 2; в, г — изображение структур 1 и 2 после упорядочения

отмечены ранги вершин. Если убрать в этом графе три вертикальные линии связи и изменить направление только одной связи между вершинами, то число рангов уменьшается от восьми до пяти и номера вершин изменяются так, как показано на рис. 6.1,б. После упорядочения вершин графы могут быть изображены так, как показано на рис. 6.1,в и г. Правильность нумерации проверяется по отсутствию дуг, идущих справа налево.

Для обобщения процедуры вывода расчетных формул каждый ориентированный граф может быть дополнен до  $s$ -связного или полностью связного введением дополнительных дуг, вероятность работоспособного состояния которых  $R_{ij}$  в дальнейшем полагается равной нулю. Параметр  $s$  определяется как максимальная разность номеров вершин, инцидентных одной дуге. В примере 6.1 в обоих случаях  $s=4$  (рис. 6.1,в, г). Если есть прямая связь между полюсами, то необходимо рассматривать полностью связный граф с  $s=n-1$ . После дополнения любой частный граф может быть заменен  $s$ -связным.

Рассмотрим теперь некоторые классы структур и примеры. Сначала будет проанализирована надежность  $s$ -

связной системы, условие работоспособности которой определяется как условие существования хотя бы одного пути между полюсами. Эта система относится к системам первого типа. Далее будут рассмотрены варианты типовой структуры технических средств АСУ ТП, в которых работоспособность некоторых путей зависит от состояния элементов, входящих в другие пути. Они являются системами второго типа. Наконец, будет рассмотрен вариант структуры центра коммутации сообщений на базе микро-ЭВМ, который также является системой второго типа, но с более сложными условиями работоспособности основных путей передачи информации. В этой структуре работоспособность каждого пути зависит от состояния аппаратуры, не входящей ни в один из основных путей передачи информации.

### **s-связная система первого типа**

Рассмотрим систему, структурная схема которой имеет вид ориентированного графа без контуров (рис. 6.2). Не уточняя на данном этапе назначения системы, определим условие ее работоспособности следующим образом: система работоспособна, если существует хотя бы один работоспособный путь из узла  $n$  в узел  $1$ . В свою

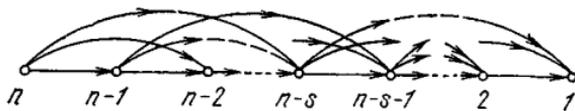


Рис. 6.2.  $s$ -связная ориентированная структура

очередь путь считается работоспособным, если работоспособны все его элементы (узлы и линии связи). Поставим в соответствие каждому узлу логическую переменную  $x_i$ , а линии связи между узлами  $i$  и  $j$  — переменную  $x_{ij}$ . Переменные принимают значение единица, если соответствующие элементы работоспособны, и значение нуль в противоположном случае. Вероятности  $R_i = 1 - Q_i = P(x_i = 1)$  и  $R_{ij} = 1 - Q_{ij} = P(x_{ij} = 1)$  считаем известными. Найдем расчетную формулу для вероятности работоспособного состояния системы, пройдя последовательно все четыре этапа, изложенные в § 6.1.

Составление ФРС. Пусть  $f_n$  — логическая функция работоспособности рассматриваемой системы, а  $f_i$  — функция работоспособности подсистемы, получаемой после переноса входного полюса в узел  $i$ . Тогда формула (6.1) приобретает вид

$$y = f_n = x_n (x_{n, n-1} f_{n-1} \vee x_{n, n-2} f_{n-2} \vee \dots \vee x_{n, n-s} f_{n-s}). \quad (6.13)$$

Отсюда видно, что для работоспособности системы необходимо, чтобы был работоспособен входной узел — источник информации — и было выполнено хотя бы для одного узла  $i = \overline{1, s}$  условие: работоспособны линия связи между входным полюсом  $n$  и узлом  $n-i$  и хотя бы один путь от узла  $n-i$  до выходного полюса. Для каждого транзитного узла составляются аналогичные соотношения:

$$f_i = x_i (x_{i, i-1} f_{i-1} \vee \dots \vee x_{i, i-s} f_{i-s}), \quad i = \overline{s+1, n-1}, \quad (6.14)$$

$$f_i = x_i (x_{i, i-1} f_{i-1} \vee \dots \vee x_{i2} f_2 \vee x_{i1} f_1), \quad i = \overline{2, s}, \quad f_1 = x_1.$$

Общее число переменных, входящих в формулу (6.13) и (6.14),  $N = n + s(n-s-1) + s(s+1)/2$ . Значения  $N$  при различных  $n$  и  $s$  приведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Преобразование к ФПЧЗ. Сравнение (6.13) и (6.14) с формулой (1.72) показывает, что исходная запись ФРС есть ФПЧЗ. В функции  $f_n$  неповторными являются  $x_n$  и  $x_{ni}$  ( $i = \overline{n-s, n-1}$ ), а в функциях  $f_i$  неповторны все переменные, имеющие в индексе номер  $i$ . Поэтому можно переходить к СФФВ, используя теорему 6 гл. 1.

Запись СФФВ. Согласно формуле (1.73) замещение неповторных переменных в (6.13) и (6.14) дает

n	N при s, равном							
	2	3	4	5	6	7	8	9
5	12	14	15	—	—	—	—	—
6	15	18	20	21	—	—	—	—
7	18	22	25	27	28	—	—	—
8	21	26	30	33	35	36	—	—
9	24	30	35	39	42	44	45	—
10	27	34	40	45	49	52	54	55

следующие смешанные формы:

$$P(f_n = 1) = P_n^{(n-1)}(f_{n-1}, \dots, f_{n-s}) = \\ = R_1 R_n \left( 1 - \prod_{i=n-s}^{n-1} Q_{ni}^{f_i} \right),$$

(6.15)

$$P(f_i = 1) = P_i^{(i-1)}(f_{i-1}, \dots, f_{i-s}) = \\ = R_i \left( 1 - \prod_{j=m}^{i-1} Q_{ij}^{f_j} \right), m = \max(1, i-s), i = \overline{2, n-1}.$$

Каждое выражение в (6.15) имеет смысл условной вероятности работоспособности при условии, что  $f_i$  и  $f_j$  принимают определенные значения.

Получение ВФ. Учитывая, что в  $P_n^{(n-1)}(f_{n-1}, \dots, f_{n-s})$  бесповторными являются лишь переменные  $x_{n-1}$  и  $x_{n-1, i}$ , проведем их замещение, выполнив разрезание по функции  $f_{n-1}$ .

В соответствии с теоремой 7 гл. 1

$$P_n^{(n-2)}(f_{n-2}, \dots, f_{n-s}) = P(f_{n-1} = 1) P_n^{(n-1)}(1, f_{n-1}, \dots, f_{n-s}) + \\ + P(f_{n-1} = 0) P_n^{(n-1)}(0, f_{n-1}, \dots, f_{n-s}).$$

Подставляя сюда выражения из (6.15) и перегруппировав слагаемые, получаем

$$P_n^{(n-2)}(f_{n-2}, \dots, f_{n-s}) = R_n \left[ 1 - \prod_{i=n-s}^{n-2} Q_{ni}^{f_i} + \right. \\ \left. + R_{n-1} R_{n, n-1} \prod_{i=n-s}^{n-2} Q_{ni}^{f_i} \left( 1 - \prod_{j=n-1-s}^{n-2} Q_{n-1, j}^{f_j} \right) \right] \quad (6.16)$$

Для упрощения записи введем обозначения:  $B_{ij} = \prod_{j=m}^{i-1} Q_{ij}^{f_j}$ . Тогда вместо (6.16) запишем

$$P_n^{(n-2)}(f_{n-2}, \dots, f_{n-s}) = R_n (1 - B_{n2} + R_{n, n-1} R_{n-1} B_{n2} \times \\ \times (1 - B_{n-1, 1})). \quad (6.17)$$

После третьего шага замещения

$$P_n^{(n-3)}(f_{n-3}, \dots, f_{n-s}) = R_n \{ R_{n-2} (1 - B_{n-2,1}) [1 - Q_{n,n-2} B_{n3} + R_{n,n-1} R_{n-1} Q_{n,n-2} (1 - Q_{n-1,n-2} B_{n-1,2}) B_{n3}] + (Q_{n-2} + R_{n-2} B_{n-2,1}) [1 - B_{n3} + R_{n,n-1} R_{n-1} B_{n3} (1 - B_{n-1,2})] \}.$$

Перегруппировав слагаемые, получаем

$$P_n^{(n-3)}(f_{n-3}, \dots, f_{n-s}) = R_n \{ 1 - B_{n3} + R_{n,n-1} R_{n-1} \times \\ \times B_{n3} (1 - B_{n-1,2}) + R_{n-2} B_{n3} (1 - B_{n-2,1}) [R_{n,n-2} + \\ + R_{n,n-1} R_{n-1} (B_{n-1,2} (1 - Q_{n,n-2} Q_{n-1,n-2}) - R_{n,n-2})] \}. \quad (6.18)$$

Дальнейшее замещение проводится с помощью рекуррентного соотношения:

$$P_n^{(n-k-1)}(f_{n-k-1}, \dots, f_{n-s}) = P_{n-k}^{(n-k-1)}(f_{n-k-1}, \dots, f_m) \times \\ \times [P_n^{(n-k)}(1, f_{n-k-1}, \dots, f_{n-s}) - P_n^{(n-k)}(0, f_{n-k-1}, \dots, f_{n-s})] + \\ + P_n^{(n-k)}(0, f_{n-k-1}, \dots, f_{n-s}).$$

Максимальное число шагов замещения на третьем и четвертом этапах  $M=n-1$  при общем числе замещаемых переменных  $N$ . С помощью табл. 6.1 устанавливаем, что отношение  $\alpha=M/N$  изменяется в зависимости от  $s$ : при  $n=5$  от 0,2679 до 0,333, при  $n=8$  от 0,194 до 0,333, а при  $n=10$  от 0,164 до 0,33. Это означает, что в среднем за один шаг замещается от 3 до 3,75 переменных при  $n=5$ , от 3 до 5,14 при  $n=8$  и от 3 до 6,1 при  $n=10$ . Рассмотрим примеры.

**Пример 6.2.** Пусть в полностью связанной системе с пятью узлами передается информация из узла 5 в узел 1. Необходимо найти вероятность работоспособного состояния системы и проанализировать влияние избыточности связей на показатели надежности.

*Решение.* Согласно исходным данным  $n=5$ , и поэтому логическая функция работоспособности

$$f_5 = x_1 x_5 (x_{51} \vee x_{52} f_2 \vee \\ \vee x_{53} f_3 \vee x_{54} f_4), \quad f_2 = x_2 x_{21}, \\ f_3 = x_3 (x_{31} \vee x_{32} f_2), \quad f_4 = \\ = x_4 (x_{41} \vee x_{42} f_2 \vee x_{43} f_3). \quad (6.19)$$

Проведем замещение  $x_5$  и  $x_{5i}$  в соответствии с формулой (6.15):

$$P_5^{(4)} = R_1 R_5 (1 - Q_{51} Q_{52}^{f_2} Q_{53}^{f_3} Q_{54}^{f_4}), \quad P_4^{(3)} = R_4 (1 - Q_{41} Q_{42}^{f_2} Q_{43}^{f_3}),$$

$$P_3^{(2)} = R_3 (1 - Q_{31} Q_{32}^{f_2}), \quad P_2^{(1)} = R_2 R_{21}.$$

После двух дополнительных шагов замещения

$$P_5^{(2)}(f_2) = R_1 R_5 \{1 - Q_{51} Q_{52}^{f_2} + Q_{51} Q_{52}^{f_2} R_{54} R_4 (1 - Q_{41} Q_{42}^{f_2}) + R_3 Q_{51} Q_{52}^{f_2} (1 - Q_{31} Q_{32}^{f_2}) [R_{53} + R_{54} R_4 (Q_{41} Q_{42}^{f_2} (1 - Q_{53} Q_{43}) - R_{53})]\}. \quad (6.20)$$

Здесь осталось заместить  $f_2$  по формуле полной вероятности:

$$R_c = P_5^{(1)} = R_2 R_{21} P_5^{(2)}(1) + (1 - R_2 R_{21}) P_5^{(2)}(0).$$

В частности, при  $R_i = p_1$ ,  $R_{ij} = p_2 = 1 - q_2$

$$R_c = p_2^2 p_1 \times \{p_1 (1 - q_2^2) [1 + p_1 p_2 q_2^2 (2 + p_1 q_2^2 (1 - q_2^2) - p_1 p_2)] + (1 - p_1 p_2) [1 + q_2 p_1 p_2 (2 - p_1 p_2 (p_2 + q_2^2))]\}. \quad (6.21)$$

При  $p_2 = 1$  вероятность  $R_c = p_2^2$ , а при  $p_1 = 1$

$$R_c = p_2 \{1 + p_2 q_2 + p_2 q_2^2 (1 + q_2) [1 + p_2 q_2 + (1 - q_2^2) (1 + p_2 q_2^2)]\}. \quad (6.22)$$

Из (6.20) можно получить выражения для трех- и двухсвязной структуры. Для этого надо положить в первом случае  $Q_{51} = 1$ , а во втором  $R_{51} = R_{52} = R_{11} = 0$ .

Выражение для  $R_c$  при  $n=4$  получим из (6.20), если положим  $R_{51} = 0$ ,  $R_5 = Q_{54} = 1$ .

Результаты расчетов по формулам (6.21), (6.22) отражены на рис. 6.3. Из рисунка видно, что увеличение связности структуры существенно влияет на надежность системы при малонадежных линиях связи и значительно меньше при малонадежных узлах. Так, при  $q_2 = 0$  увеличение  $s$  от двух до четырех (введение линий связи 51, 52 и 41) практически не меняет вероятности работоспособного состояния системы. При увеличении ранга пол-

носвязной системы надежность повышается, несмотря на увеличение общего числа элементов. Это объясняется одновременным ростом связности. При постоянной связности (например, при  $s=2$ ) увеличение  $n$  сопровождается уменьшением вероятности  $R_c$ .

Рассмотрим теперь возможные способы передачи информации по сети, позволяющие использовать любые

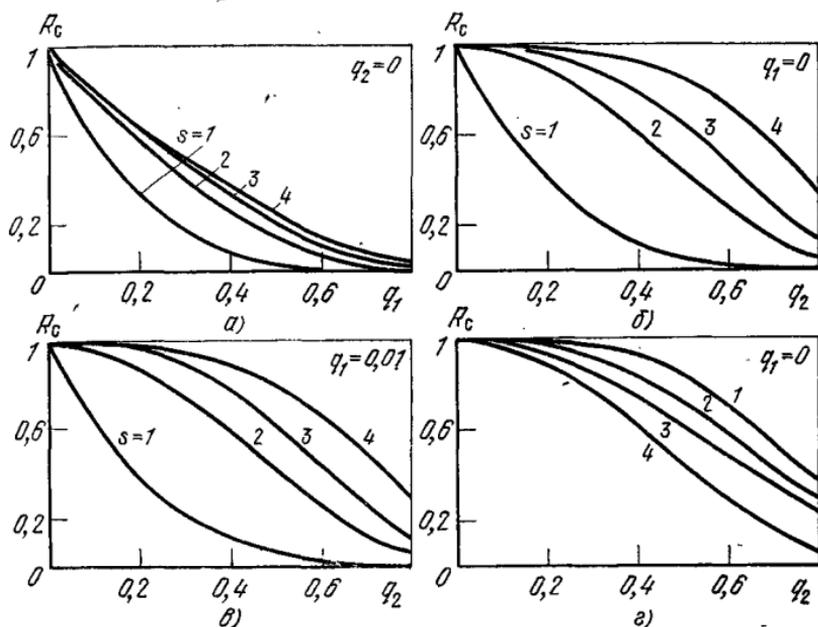


Рис. 6.3. Зависимость вероятности работоспособного состояния  $s$ -связной системы от надежности узлов ( $q_1$ ) и линий связи ( $q_2$ ) при полном оповещении о состоянии сети:

а, б и в)  $n=5$ ; г)  $(n, s)=5, 4 (1); 4, 3 (2); 3, 2 (3); 5, 2 (4)$

пути между узлами — отправителем и получателем. Одним из способов является так называемая «волна», при которой каждый узел транслирует каждое поступившее новое сообщение во всех возможных направлениях, а все повторяющиеся отбрасывает. Способ «волна» не требует предварительного оповещения узлов о состоянии сети и обеспечивает успешную передачу сообщений при наличии хотя бы одного работоспособного пути между узлами, однако это вызывает значительную дополнительную нагрузку сети. Возможны и другие способы, при которых каждый узел передает сообщение только в одном направлении, выбранном в соответствии с некоторым алгоритмом выбора маршрута. Чтобы быть уве-

ренным, что направление выбрано правильно и что в выбранном направлении есть хотя бы один работоспособный путь к узлу-получателю, на каждом узле-отправителе должна быть информация о состоянии сети. Эта информация является служебной, необходимой для управления потоками сообщений, и она появляется и сохраняется в узлах благодаря оповещению узлов о всех изменениях в структуре сети — отказах и восстановлении ее элементов. В дальнейшем эту служебную информацию будем называть *информацией оповещения*. Если оповещение полное и за время, прошедшее с момента формирования информации до ее использования при выборе маршрута, а также за время передачи сообщения по сети не произошло никаких изменений в структуре системы, то сообщение будет доведено до адресата. При этих условиях вероятность успешной передачи сообщений совпадает с вероятностью связности полюсов. При одноадресной передаче в двухполюсной системе вероятность связности полюсов есть одновременно вероятность работоспособного состояния системы.

Алгоритм выбора маршрута можно построить на основе ряда приоритетности путей: в каждой конкретной ситуации из работоспособных путей выбирается путь, обладающий наивысшим приоритетом. Ясно, что в этом классе может существовать много различных алгоритмов, соответствующих различным рядам приоритетности путей. Поэтому маршрут движения сообщения зависит не только от состояния сети, но и от алгоритма выбора маршрута. Важной особенностью организации передачи сообщений по сети при полном оповещении является то, что вероятность доставки (или потери) сообщений не зависит от алгоритма выбора маршрута. От алгоритма зависит лишь распределение потоков по сети. Это достаточно очевидное свойство легко обосновывается с помощью алгебры логики. В самом деле, пусть между двумя узлами есть всего  $m$  путей, которым поставлены в соответствие конъюнкции  $K_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ), и пусть есть два различных ряда приоритетности путей:  $(i_1, i_2, \dots, i_m)$  и  $(j_1, j_2, \dots, j_m)$ . Тогда ФРС в первом случае

$$f_n = K_{i_1} \vee [K'_{i_1} (K_{i_2} \vee [K'_{i_2} (K_{i_3} \vee \dots \vee K'_{i_{m-2}}) (K_{i_{m-1}} \vee \vee K'_{i_{m-1}} K_{i_m} \dots))], \quad (6.23)$$

а во втором

$$f_n = K_{j_1} \vee K'_{j_1} (K_{j_2} \vee K'_{j_2} (K_{j_3} \vee \dots \vee K'_{j_{m-2}}) \times \\ \times (K_{j_{m-1}} \vee K'_{j_{m-1}} K_{j_m} \dots)). \quad (6.24)$$

Применение в обеих формулах правила обобщенного склеивания позволяет свести обе функции к следующей монотонной ФАЛ:

$$f_n = K_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_m, \quad (6.25)$$

что доказывает правильность утверждения. В § 6.3 мы вернемся к этому вопросу и установим, что при неполном оповещении аналогичного равенства уже не наблюдается. Свойство независимости вероятности  $R_c$  от алгоритма выбора маршрута при полном оповещении полезно иметь в виду, когда функция (6.23) или (6.24) используется в качестве исходной при записи расчетной формулы. Согласно теореме 10 гл. 1 обе функции являются ФПЧЗ, и нужно выбрать ту из них, которая позволит получить более простое выражение для вероятности  $R_c$ . Проиллюстрируем это на примере.

**Пример 6.3.** В системе, рассмотренной в примере 6.2, выбран такой ряд приоритетности путей: 51, 521, 531, 541, 5321, 5421, 5431, 54321. Необходимо составить расчетную формулу для вероятности доставки информации и сравнить ее с расчетной формулой для ряда приоритетности путей 51, 541, 531, 521, 5432, 5421, 5321, 54321.

*Решение.* Составим ФРС типа (6.23), исходя из первого ряда приоритетности, и упростим ее с помощью формул (1.61а). Тогда

$$f_5 = x_1 x_5 (x_{51} \vee x'_{51} (x_{52} x_2 x_{21} \vee (x_{52} x_2 x_{21})' \times \\ \times (x_{53} x_3 x_{31} \vee (x_{53} x_3 x_{31})' x_{54} x_4 x_{41}) \vee \\ \times x'_{31} x'_{52} x_{53} x_3 x_{32} x_2 x_{21} \vee x'_{52} x'_{41} (x_3 (x_{31} \vee x_{32}) \times \\ \times x_{53})' x_{54} x_4 x_{42} x_2 x_{21} \vee x'_{41} x'_{53} ((x_{42} \vee x_{52}) \times \\ \times x_2 x_{21})' x_{54} x_4 x_{43} x_3 x_{31} \vee \\ \vee x'_{52} x'_{53} x'_{42} x'_{31} x_{54} x_4 x_{43} x_3 x_{32} x_2 x_{21})). \quad (6.26)$$

В этом выражении все слагаемые ортогональны, а переменные в каждом слагаемом неповторны. Поэтому про-

ВОДИМ полное замещение:

$$\begin{aligned}
 R_c = P_5 = R_1 R_5 [ & R_{51} + Q_{51} (R_{52} R_2 R_{21} + \\
 + (1 - R_{52} R_2 R_{21}) & (R_{53} R_3 R_{31} + (1 - R_{53} R_3 R_{31}) \times \\
 \times R_{54} R_4 R_{41}) + & Q_{31} Q_{52} R_3 R_{32} R_2 R_{21} (R_{53} + \\
 + Q_{53} Q_{42} R_{54} R_{43}) + & Q_{41} Q_{52} (1 - R_{53} R_3 (1 - \\
 - Q_{31} Q_{32})) R_{54} R_4 R_{42} R_2 R_{21} & + Q_{41} Q_{53} (1 - \\
 - R_2 R_{21} (1 - Q_{42} Q_{52})) R_{54} R_4 R_{43} R_3 R_{31} & ]. \quad (6.27)
 \end{aligned}$$

Для второго ряда приоритетности получаем аналогично

$$\begin{aligned}
 f_5 = x_1 x_5 (x_{51} \vee x'_{51} (x_{54} x_4 x_{41} \vee & (x_{54} x_4 x_{41})' \times \\
 \times (x_{53} x_3 x_{31} \vee (x_{53} x_3 x_{31})' x_{52} x_2 x_{21}) \vee & \\
 x'_{41} x'_{53} (x_{52} x_2 x_{21})' x_{54} x_4 x_{43} x_3 x_{31} \vee & \\
 \vee x_{54} x_4 x_{42} x_2 x_{21} x'_{41} x'_{52} ((x_{43} \vee x_{53}) x_3 x_{31})' \vee & \\
 \vee x'_{31} x'_{52} ((x_{54} x_4 (x_{41} \vee x_{42}))' x_{53} \vee & \\
 \vee x'_{41} x'_{42} x'_{53} x_{54} x_4 x_{43}) x_3 x_{32} x_2 x_{21} & ), \quad (6.28)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_c = P_5 = R_1 R_5 [ & R_{51} + Q_{51} (R_{54} R_4 R_{41} + \\
 + (1 - R_{54} R_4 R_{41}) & (R_{53} R_3 R_{31} + R_{52} R_2 R_{21} (1 - \\
 - R_{53} R_3 R_{31})) + & Q_{41} Q_{53} (1 - R_{52} R_2 R_{21}) R_{54} R_4 R_{43} \times \\
 \times R_3 R_{31} + Q_{41} Q_{52} & (1 - R_3 R_{31} (1 - Q_{43} Q_{53})) R_{54} R_4 R_{42} R_2 \times \\
 \times R_{21} + Q_{31} Q_{52} R_3 R_{32} R_2 R_{21} & (R_{53} (1 - R_{54} R_4 (1 - \\
 - Q_{41} Q_{42})) + & Q_{41} Q_{42} Q_{53} R_{54} R_4 R_{43}) ]. \quad (6.29)
 \end{aligned}$$

С помощью пробных численных расчетов можно убедиться, что формула (6.27) эквивалентна (6.29) и (6.20). Формула (6.27) несколько проще, чем (6.29), но сложнее, чем (6.20): у нее 54 вхождения букв против 59 в (6.29) и 48 в (6.20).

## Многосвязные системы второго типа

Структурная схема систем второго типа не содержит полной информации о взаимодействии элементов и их логических связях. Поэтому она дополняется словесным описанием, позволяющим на основе структурной схемы составить логическую функцию работоспособности. В информационных сетях и системах необходимость в дополнительной информации возникает по двум при-

чинам. Во-первых, для организации информационного пути часто требуется адресное переключение коммутаторов в точках разветвления системы, а путь доставки адреса из места его формирования к коммутатору не всегда совпадает с заданным информационным путем и использует элементы других путей. В результате появляется зависимость работоспособности информационного пути от состояния элементов других путей. В логической функции работоспособности она отражается с помощью дополнительных сомножителей в дизъюнктивных членах. Поэтому вместо (6.13), (6.14) получаем

$$y = f_n = x_n \left( \bigvee_{(j)} x_{n, n-1}^{(j)} f_{n-1}^{(j)} \varphi_{n-1}^{(j)} \right);$$

$$f_i = x_i \left( \bigvee_{(j)} x_{i, i-1}^{(j)} f_{i-1}^{(j)} \varphi_{i-1}^{(j)} \right), \quad i = \overline{2, n-1}. \quad (6.30)$$

Здесь  $\varphi_i$  — логическая функция, выражающая условие использования направления  $x_i = x_{i, i-1}^{(j)}$ . При  $\varphi_i = 1$  из (6.30) после изменения некоторых обозначений можем получить (6.14).

Второй причиной является существование в некоторых информационных системах подсистем передачи и обработки управляющей информации, используемой для организации информационных потоков в сети. Как правило, основная и управляющая подсистемы имеют много общего оборудования, и поэтому ФРС разыскивается также в форме (6.30). В частности, если удастся выделить в системе несколько последовательных участков, таких, что в каждом из них оборудование подсистем полностью совпадает или полностью автономно, то (6.30) приобретает вид

$$y = f_n(\mathbf{X}) \varphi_n(\mathbf{X}), \quad (6.31)$$

где  $f_n$  и  $\varphi_n$  — функции работоспособности основной и управляющей подсистем, составляемые по правилам для систем первого типа.

Заметим, что наличие взаимозависимости состояний различных путей, даже не имеющих общих элементов, не является свойством только информационных систем. Это характерно и для электроэнергетических, технологических и других систем вследствие зависимостей по «рабочему телу», по механическим, гидравлическим и про-

чим связям. Во всех случаях, кроме требования работоспособности элементов, существуют и другие условия успешного применения каждого элемента при выполнении поставленных перед системой задач. Рассмотрим два типичных примера.

**Типовая ветвь структуры технических средств АСУ ТП.** Рассмотрим несколько вариантов построения системы, которая, являясь представителем весьма распространенного в настоящее время класса технических систем, обладает особенностями систем второго типа. Для нее ФРС нельзя составить на основании только структурной схемы, так как работоспособность путей определяется состоянием некоторых элементов вне рассмотренного пути.

Для построения АСУ ТП используются два класса структур: централизованные (одно- и многомашинные) и децентрализованные (многомашинные). Рассмотрим сначала несколько вариантов централизованной структуры (ЦС). Неизбыточный вариант одной ветви ЦС показан на рис. 6.4,а. В него входят центральная ЭВМ, устройство связи с объектом (УСО), центральный согласующий блок (ЦСБ), цифровой канал связи с периферийным оборудованием (КС), периферийный согласующий блок (ПСБ), аналого-цифровой преобразователь (АЦП), коммутаторы аналоговых сигналов (КАС1 и КАС2), адресные блоки коммутаторов (АБ1 и АБ2), датчики (Д). Типовая ветвь системы, соединяющая ЭВМ с дискретными датчиками, содержит те же элементы, кроме АЦП. Ветвь, соединяющая ЭВМ с исполнительными органами непрерывного типа, содержит вместо АЦП цифроаналоговый преобразователь. Эти различия не влияют на методику анализа надежности. Поэтому далее рассматривается ветвь только одного типа. Для повышения надежности системы используется структурная избыточность: дублирование ЭВМ, резервирование УСО, ЦСБ, ПСБ, КС и комплекта периферийной аппаратуры, организация перекрестных связей ЦСБ, КАС1 и КАС2.

Два варианта ветви со структурной избыточностью и их модификации, показаны на рис. 6.4,б и в. В варианте 1 организованы две параллельные ветви из ЭВМ, УСО, ЦСБ, ПСБ и периферийной аппаратуры. Кроме того, в каждой ветви резервируются КС и ЦСБ, ПСБ. Между КАС одной ступени введены перекрестные связи.

Взаимодействие КАС1 и КАС2 различных ветвей происходит следующим образом. Если отказал АЦП, АБ2 или КАС2 одной ветви, то для организации пути через КАС2 другой ветви необходимо, чтобы в первой ветви работали все устройства от ЭВМ до ПСБ, АБ1 и КАС1,

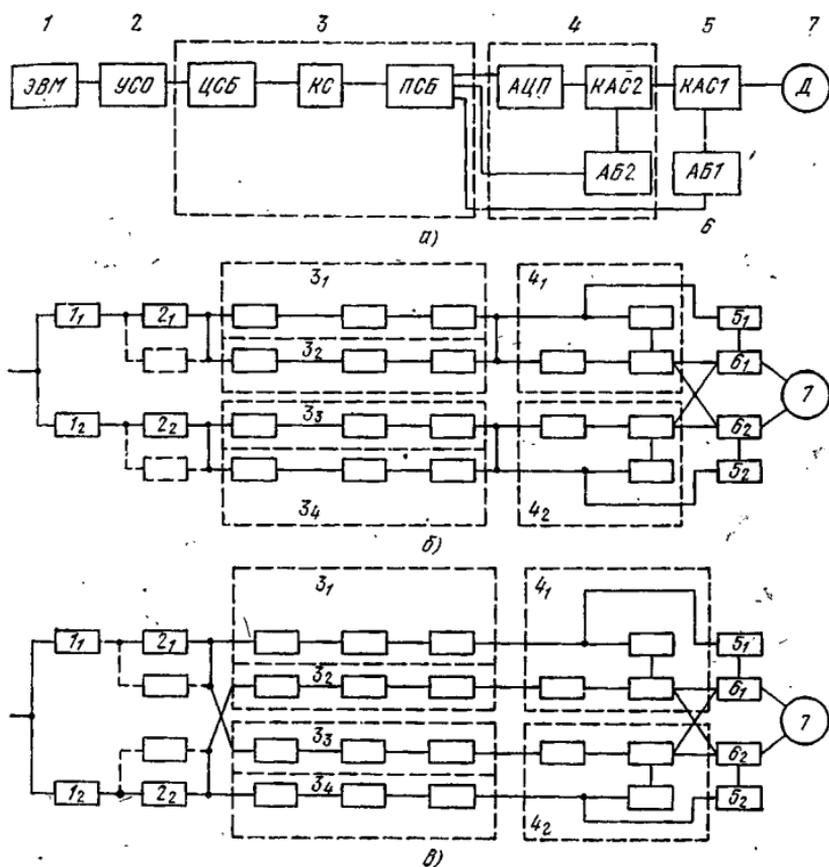


Рис. 6.4. Типовая ветвь централизованной структуры технических средств АСУ ТП:

а — неизбыточный вариант; б и в — варианты 1 и 2

а во второй — все устройства до АБ2 и КАС2. Из описания ясно, что структурно-надежностная схема системы не сводится к последовательно-параллельному соединению и необходимо использовать ЛВМ. Вариант 1м отличается от варианта 1 наличием двух УСО в каждой ветви (на рис. 6.4,б дополнительные УСО показаны пунктиром). Вариант 2 отличается от варианта 1 перекрестными связями между УСО и ЦСБ. В варианте 2м дополнительно введены еще два УСО.

Составим расчетные формулы для вероятности работоспособного состояния системы в варианте 1. Предварительно заметим, что между полюсами в системе существует восемь различных путей. Причем для успешного использования каждого пути требуется его работоспособность и успешная передача адресов в модули АБ1 (4) и АБ2 (5) по одному из работоспособных путей для обеспечения необходимых переключений в КАС1 и КАС2. Поэтому ФРС имеет вид

$$y = x_7 (x_4 g_1 (x_5 x_6 \vee x_5 x_6 g_2) \vee x_4 g_2 (x_5 x_6 \vee x_5 x_6 g_1)),$$

$$g_1 = f_3 \vee f_3, \quad g_2 = f_3 \vee f_3,$$

$$f_{3_i} = x_{3_i} x_{2_i} x_{1_i}, \quad i = 1, 2, \quad f_{3_i} = x_{3_i} x_{2_i} x_{1_i}, \quad i = 3, 4. \quad (6.32)$$

Раскрывая внутренние скобки, получаем четыре слагаемых. Первое и третье выражают условия, когда адреса в АБ поступают по тому же пути, по которому проходит информация о технологических параметрах. Второе и четвертое слагаемые предполагают, что информация от датчиков идет по одному пути (например, 7624131211), а адрес — по другому (1222334252). Перегруппируем члены в (6.32):

$$y = x_7 (x_5 x_6 y_1 (x_3 \vee x_3) (x_4 \vee x_4 y_2 (x_3 \vee x_3)) \vee$$

$$\vee x_5 x_6 y_2 (x_3 \vee x_3) (x_4 \vee x_4 y_1 (x_3 \vee x_3))),$$

$$y_i = x_{1_i} x_{2_i}, \quad i = 1, 2. \quad (6.33)$$

Проведем замещение неповторных переменных:

$$R_c = R_7 [1 - (1 - R_5 R_6)^{y_1 (x_{3_1} \vee x_{3_2})} (x_{4_1} \vee x_{4_2} y_2 (x_{3_3} \vee x_{3_4})) \times$$

$$\times (1 - R_5 R_6)^{y_2 (x_{3_3} \vee x_{3_4})} (x_{4_3} \vee x_{4_4} y_1 (x_{3_1} \vee x_{3_2}))].$$

Проведем теперь замещение  $x_{4_i}$ , используя при этом свойство симметрии в структуре:

$$R_c = R_7 [R_4^2 (1 - (1 - R_5 R_6)^{y_1 (x_{3_1} \vee x_{3_2})} (1 - R_5 R_6)^{y_2 (x_{3_3} \vee x_{3_4})}) +$$

$$+ 2Q_4 R_4 (1 - (1 - R_5 R_6)^{y_2 (x_{3_3} \vee x_{3_4})} y_1 (x_{3_1} \vee x_{3_2})) \times$$

$$\times (1 - R_5 R_6)^{y_1 (x_{3_1} \vee x_{3_2})}].$$

Здесь два слагаемых, полученных путем замещения переменных в ортогональных функциях. Согласно теореме 9 гл. 1 дальнейшее замещение в них может проводиться независимо. Поскольку оставшиеся переменные в каждом слагаемом неповторны, то окончательно получаем

$$R_c = R_7 [R_4^2 (R_1^2 R_2^2 (1 - Q_3^2)^2 (1 - (1 - R_5 R_6)^2) + 2R_1 R_2 (1 - Q_3) (1 - R_1 R_2 (1 - Q_3)) R_5 R_6 + 2R_4 Q_4 R_1 R_2 (1 - Q_3) (R_1 R_2 (1 - Q_3) (1 - (1 - R_5 R_6)^2) + (1 - R_1 R_2 (1 - Q_3)) R_5 R_6)]. \quad (6.34)$$

Возможен и другой порядок замещения: сначала  $y_i$ , затем  $x_{4_i}$  и  $x_{3_i}$ . Тогда после замещения  $y_i$

$$R_c = R_7 [R_1^2 R_2^2 (1 - (1 - R_5 R_6)^{(x_{3_1} \vee x_{3_2}) (x_{4_1} \vee x_{4_2} (x_{3_3} \vee x_{3_4}))} \times \\ \times (1 - R_5 R_6)^{(x_{3_3} \vee x_{3_4}) (x_{4_2} \vee x_{4_1} (x_{3_1} \vee x_{3_2}))} + 2R_1 R_2 (1 - R_1 R_2) (1 - (1 - R_5 R_6)^{x_{4_1} (x_{3_1} \vee x_{3_2})})].$$

Окончательный результат после замещения остальных переменных:

$$R_c = R_7 [R_1^2 R_2^2 ((1 - Q_3^2)^2 (1 - Q_4) (1 - (1 - R_5 R_6)^2) + 2Q_3 R_4 R_5 R_6 (1 - Q_3)) + 2R_1 R_2 R_4 R_5 R_6 (1 - R_1 R_2) (1 - Q_3)]. \quad (6.35)$$

С помощью расчетов нетрудно убедиться, что обе формулы эквивалентны. В варианте 1м  $f_{3_i}$  отличаются от (6.32):

$$f_{3_i} = x_{3_i} x_{2_i} x_{1_i}, \quad i = 1, 2; \quad f_{3_i} = x_{3_i} x_{2_{i-1}} x_{1_{i-2}}, \quad i = 3, 4. \quad (6.36)$$

Вероятность  $R_c$  получается из (6.34) или (6.35) заменой  $R_3$  на  $R_2 R_3$  и  $R_1 R_2$  на  $R_1$ .

В варианте 2 логическая функция работоспособности  $f$  имеет вид (6.32), но функции  $f_{3_i}$  определяются иначе:

$$f_{3_i} = x_{3_i} x_{2_i} x_{1_i}, \quad i = 1, 2; \quad f_{3_i} = x_{3_i} x_{2_{i-2}} x_{1_{i-2}}, \quad i = 3, 4. \quad (6.37)$$

Подставим (6.37) в (6.32) и перегруппируем слагаемые:

$$f = x_7 (x_{5_1} x_{6_1} (y_1 x_{3_1} \vee y_2 x_{3_2}) (x_{4_1} \vee x_{4_2} (y_1 x_{3_3} \vee y_2 x_{3_4})) \vee \\ \vee x_{5_2} x_{6_2} (y_1 x_{3_3} \vee y_2 x_{3_4}) (x_{4_2} \vee x_{4_1} (y_1 x_{3_1} \vee y_2 x_{3_2}))). \quad (6.38)$$

Проведем здесь замещение  $x_{5_i} x_{6_i}$ , а затем  $y_i$ :

$$R_c = R_7 [R_1^2 R_2^2 (1 - (1 - R_5 R_6)^{(x_{3_1} \vee x_{3_2}) (x_{4_1} \vee x_{4_2} (x_{3_3} \vee x_{3_4}))}) \times \\ \times (1 - R_5 R_6)^{(x_{3_3} \vee x_{3_4}) (x_{4_3} \vee x_{4_4} (x_{3_1} \vee x_{3_2}))}) + \\ + 2R_1 R_2 (1 - R_1 R_2) (1 - (1 - R_5 R_6)^{x_{3_1} (x_{4_1} \vee x_{4_2} x_{3_3})}) \times \\ \times (1 - R_5 R_6)^{x_{3_3} (x_{4_3} \vee x_{4_4} x_{3_1})} ]]. \quad (6.39)$$

Замещаем здесь сначала  $x_{3_i}$ , а затем  $x_{4_i}$  и получаем окончательно

$$R_c = R_7 [R_1^2 R_2^2 ((1 - Q^2_3)^2 (1 - Q^2_4) (1 - (1 - R_5 R_6)^2) + \\ + 2Q^2_3 R_4 R_5 R_6 (1 - Q^2_3)) + 2R_1 R_2 (1 - R_1 R_2) \times \\ \times ((1 - Q^2_4) (1 - (1 - R_5 R_6)^2) R^2_3 + \\ + 2Q_3 R_3 R_4 R_5 R_6)]. \quad (6.40)$$

Для варианта 2м вместо (6.37) надо использовать выражения

$$f_{3_i} = x_{3_i} x_{2_i} x_{1_i}, \quad i = 1, 2; \quad f_{3_i} = x_{3_i} x_{2_i} x_{1_{i-2}}, \quad i = 3, 4. \quad (6.41)$$

Вероятность  $R_c$  получается из (6.40) заменой  $R_1 R_2$  на  $R_1$  и  $R_3$  на  $R_2 R_3$ .

Рассмотрим теперь вариант многомашинной децентрализованной системы (рис. 6.5). В отличие от ЦС здесь каждая группа периферийной аппаратуры снабжается собственным периферийным вычислителем (ПВ), выполняющим функции сбора и первичной обработки информации, уплотнения и повышения достоверности передачи информации активным терминалам (АТ) по радиальным связям и центральной ЭВМ через общую шину. Адресное управление КАС обеспечивается ПВ через интерфейсные модули ввода-вывода (ИМ). Для повышения надежности кроме дублирования КАС и АЦП используется функциональное резервирование ПВ и АЦП. Для этого введены дополнительные модули КАС<sub>2</sub> и по два ИМ на каждой ПВ для адресного управления КАС. В режиме децентрализованного сбора и отображения информации на АТ в каждой ветви могут использоваться устройства, указанные на рис. 6.6. Нумерация элементов на схеме соответствует нумерации устройств на рис. 6.5. В режиме децентрализованного сбора и пе-

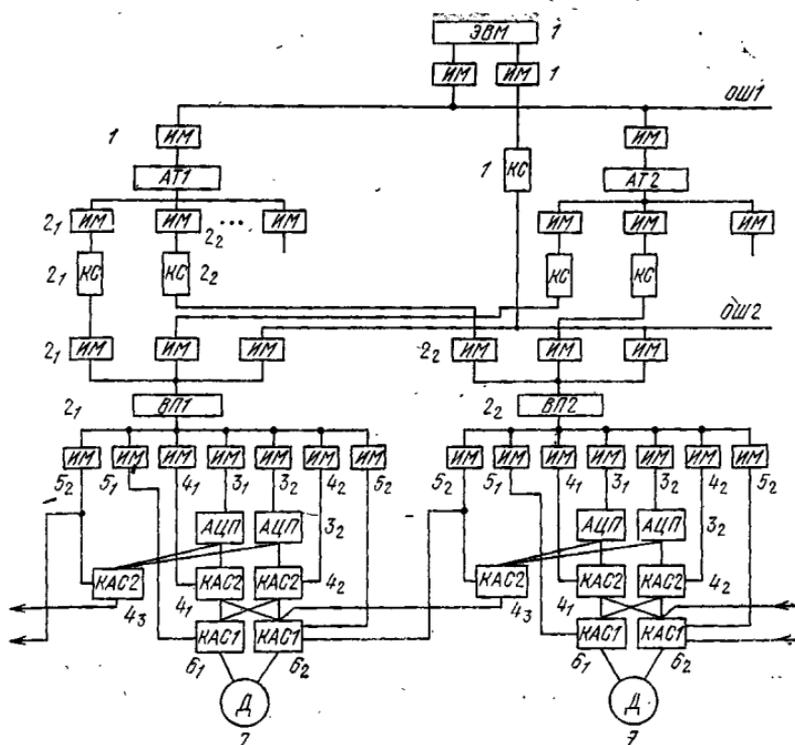


Рис. 6.5. Многомашинная децентрализованная структура технических средств АСУ ТП

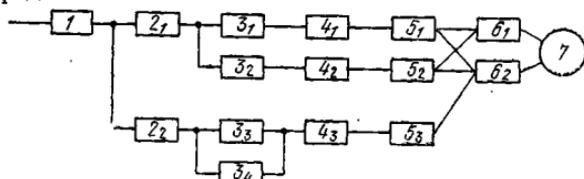


Рис. 6.6. Структура одной ветви системы в режиме сбора и отображения информации

редачи информации центральной ЭВМ также верна схема на рис. 6.6. Только в ней элемент 2 изображает ИМ, соединяющий ПВ с общей шиной, а элемент 1 — центральную ЭВМ, ИМ и общую шину.

Составим логическую функцию работоспособности ветви, используя логические уравнения типа (6.1):

$$f = x_1 x_7 (x_5 x_6 (x_4 \vee x_2) \vee x_6 (x_5 (f_1 \vee f_2) \vee x_5 f_3)),$$

$$f_{1i} = x_{4i} x_{3i} x_{2i}, \quad i = 1, 2, \quad f_{3i} = (x_{3i} \vee x_3) x_{4i} x_{2i}. \quad (6.42)$$

В (6.42) дважды повторяются все переменные, входящие в функции  $f_{4_1}$  и  $f_{4_2}$ .

Преобразуем  $f$ :

$$f = x_1 x_7 ((f_{4_1} \vee f_{4_2}) (x_{5_1} x_{6_1} \vee x_{5_2} x_{6_2}) \vee x_{6_2} x_{5_1} f_{4_1}).$$

Здесь только  $x_{6_2}$  повторяется дважды. После разрезания по этой переменной можно провести полное замещение:

$$R_c = R_1 R_7 [R_6 (1 - (1 - R_2 R_4 R_5 (1 - Q_2^2))) \times \\ \times (1 - R_2 (1 - Q_5 (1 - R_5 R_6)) (1 - (1 - R_3 R_4)^2))] + \\ + Q_6 R_2 R_5 R_6 (1 - (1 - R_3 R_4)^2)]. \quad (6.43)$$

Проследим, как изменится ФРС и вероятность  $R_c$ , если адресное управление модулем  $b_2$  при использовании обходного пути через элементы  $3_3$  и  $4_3$  будет проводиться от модуля  $5_2$ , а модуль  $5_3$  будет удален. Тогда

$$f = x_1 x_7 (x_{6_1} x_{5_1} (f_{4_1} \vee f_{4_2}) \vee x_{6_2} x_{5_2} (f_{4_1} \vee f_{4_2} \vee x_{2_1} f_{4_1})), \\ f_{4_i} = x_{4_i} x_{3_i} x_{2_i}, \quad i = 1, 2, \quad f_{4_3} = x_{4_3} x_{2_3} (x_{3_3} \vee x_{3_2}). \quad (6.44)$$

Для уменьшения числа повторяющихся переменных преобразуем (6.44):

$$f = x_1 x_7 ((x_{3_1} x_{4_1} \vee x_{3_2} x_{4_2}) (x_{5_1} x_{6_1} \vee x_{5_2} x_{6_2}) \vee \\ \vee x_{5_2} x_{6_2} x_{4_3} (x_{3_3} \vee x_{3_2}) x_{2_1}).$$

Здесь дважды повторяются лишь  $x_{5_2}$  и  $x_{6_2}$ . После разрезания и полного замещения получаем

$$R_c = R_1 R_2 R_7 [R_5 R_6 (1 - (1 - R_3 R_4)^2 (1 - \\ - R_2 R_4 (1 - Q_2^2))) + R_5 R_6 (1 - R_5 R_6) (1 - \\ - (1 - R_3 R_4)^2)]. \quad (6.45)$$

Некоторые результаты расчетов по формулам (6.35), (6.40), (6.43) и (6.45) представлены на рис. 6.7. Графики на рис. 6.7,а получены в предположении равной надежности всех устройств, приведенных на рис. 6.4,а, а графики на рис. 6.7,б получены для следующих данных:  $Q_i = a^0_i Q$ ,  $a^0_1 = 100$ ,  $a^0_2 = 5$ ,  $a^0_3 = 14$ ,  $a^0_4 = 28$ ,  $a^0_5 = a^0_6 = 4$ ,  $a^0_7 = 1$ .

В варианте, представленном на рис. 6.7,в надежность ЭВМ улучшена в 10 раз ( $a_1=10$ ), а в варианте на рис. 6.7,г улучшена надежность КАС и АБ:  $a_4=21$ ,  $a_5=a_6=1$ . Остальные  $a^0_i$  такие же, как в варианте на

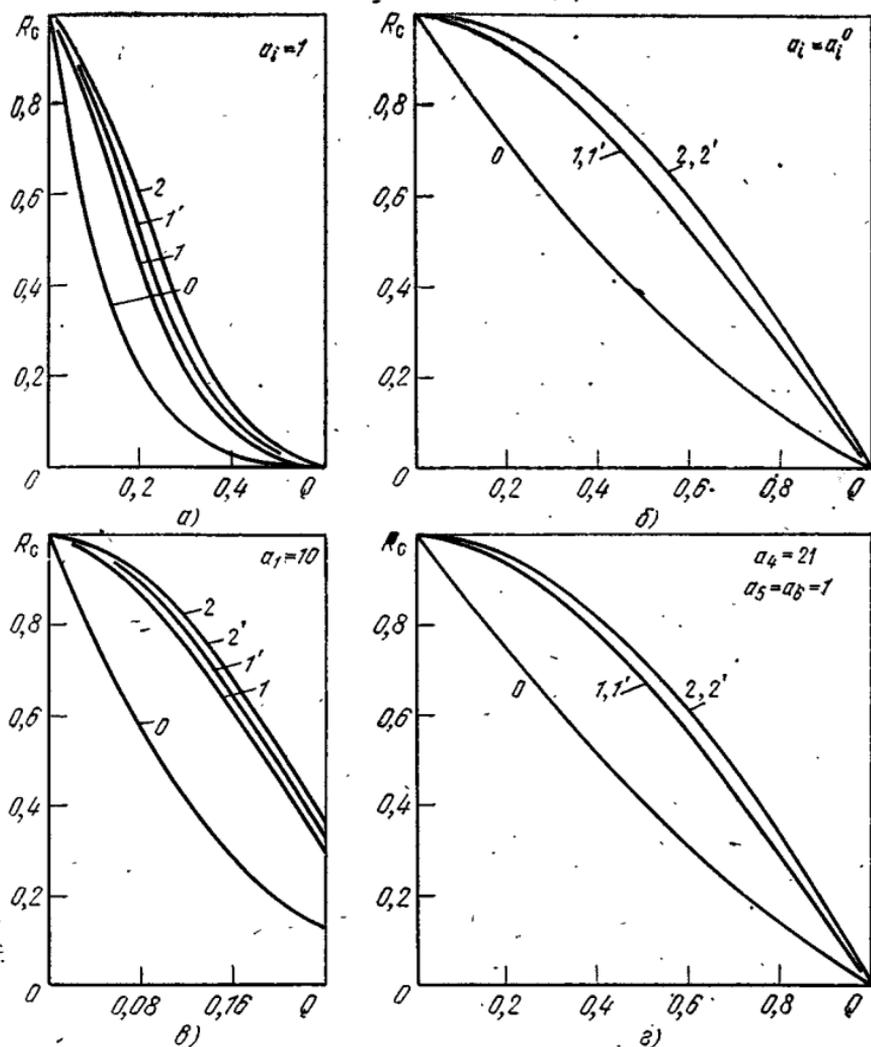


Рис. 6.7. Зависимость вероятности работоспособного состояния одной ветви централизованной структуры от надежности элементов

рис. 6.7,б. Кривая 0 соответствует неизбыточному варианту, кривые 1 и 1' — вариантам 1 и 1м, кривые 2 и 2' — вариантам 2 и 2м. Кривая 3 соответствует варианту системы, полученному из варианта 2 без дублирования периферийных устройств (АЦП, КАС, АБ). Логическая функция и соответствующая ей расчетная формула на-

ходят из (6.38) и (6.39) при  $x_4 = x_5 = x_6 = 0$ . Из графиков видно, что наиболее надежным оказывается вариант 2м. Однако при всех рассмотренных исходных данных различия в значениях  $R_c$  для вариантов структуры 1, 1м, 2 и 2м небольшие.

**Центр коммутации сообщений на базе микро-ЭВМ.**  
 Центр коммутации сообщений (ЦКС) предназначен для

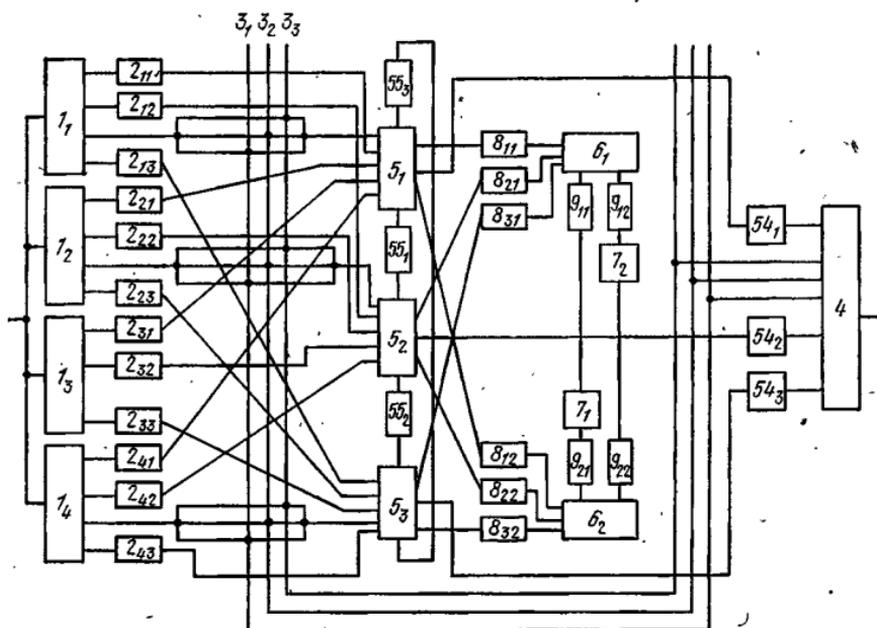


Рис. 6.8. Структурная схема центра коммутации сообщений на базе микро-ЭВМ

приема сообщений из входного пучка каналов, распределения сообщений по выходным каналам и передачи их в выбранных направлениях. На рис. 6.8 показан типовой состав одной ветви ЦКС, в котором в тракт движения сообщений от входного канала к выходному входят приемопередающее устройство (ППУ), интерфейсный модуль (ИМ) и устройство защиты от ошибок (УЗО) (все три модуля образуют на схеме элемент 1), общие информационные шины (элемент 3), процессоры анализа сообщений (ПАС) (элемент 5) и выходные модули УЗО, ИМ и ППУ (элемент 4). Для обработки служебной информации и коммутации сообщений используются процессоры выбора маршрута (ПВМ) (элемент 6), память коллективного доступа (элемент 7) и модули связи

(элементы 2, 8, 9, 54 и 55). Для повышения надежности используется структурная избыточность. Постепенное увеличение избыточности показано в табл. 6.2.

С позиции методики расчета надежности данная система интересна тем, что в ней работоспособность основных путей движения сообщений через элементы 1, 3 и 4 весьма сложным образом зависит от состояния элементов вне этих путей: 2, 6, 7, 8, 9, 54, 55, 5.

При выводе расчетных формул для  $R_c$  можно учесть сразу несколько вариантов структуры, считая, что в ней есть  $n_1$  элементов 1,  $n_3$  элементов 3 в соответствии с табл. 6.2. Логическая функция работоспособности имеет вид

$$f = x_4 \left( \bigvee_{i=1}^{n_3} x_{3_i} \right) \left( \bigvee_{i=1}^{n_1} x_{1_i} f_i \right),$$

$$f_i = x_{2_{i1}} f_{5_1} \vee x_{2_{i2}} f_{5_2} \vee x_{2_{i3}} f_{5_3}, \quad i = \overline{1, n_1}, \quad (6.46)$$

$$f_{5_i} = x_{5_i} (x_{8_{i1}} f_{6_1} \vee x_{8_{i2}} f_{6_2}) B_i, \quad i = \overline{1, 3},$$

$$B_1 = x_{54_1} \vee x_{54_2} x_{5_2} x_{55_1} \vee x_{54_3} x_{5_3} x_{55_3},$$

$$B_2 = x_{54_2} \vee x_{54_1} x_{5_1} x_{55_1} \vee x_{54_3} x_{5_3} x_{55_3},$$

$$B_3 = x_{54_3} \vee x_{54_1} x_{5_1} x_{55_3} \vee x_{54_2} x_{5_2} x_{55_2},$$

$$f_{6_1} = x_{6_1} (x_{7_1} x_{9_{11}} \vee x_{7_2} x_{9_{12}}), \quad f_{6_2} = x_{6_2} (x_{7_1} x_{9_{21}} \vee x_{7_2} x_{9_{22}}). \quad (6.47)$$

Из этих формул следует, что для работоспособности системы необходимо, чтобы был работоспособен выходной элемент ( $x_4$ ), один из входных  $x$  — общая шина ( $x_3$ ), ПАС ( $x_5$ ) и ПВМ ( $x_6$ ), память ( $x_7$ ) с модулем связи ( $x_9$ ) и соответствующие радиальные связи ( $x_2$  и  $x_{54}$ ). Если неработоспособен основной комплект устройств, то используются возможные обходные пути к выходному и резервным элементам.

Проведем замещение  $x_{1_i}$ ,  $x_4$ ,  $x_{3_i}$  и запишем СФФВ

$$R_c = P(f_i) = R_4 (1 - Q_3^{n_3}) \left( 1 - \prod_{i=1}^{n_1} Q_1^{f_i} \right).$$

Таблица 6,2

Варианты	Число $n_i$ устройств типа									Всего устройств	$R_0$		
	1	2	3	4	5	5A	55	6	7			8	9
1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	10	0,900655
2	1	1	2	1	1	1	0	1	1	1	1	11	0,909662
3	1	1	3	1	1	1	0	1	1	1	1	12	0,909752
4	2	2	1	1	1	1	0	1	1	1	1	12	0,952655
5	2	2	2	1	1	1	0	1	1	1	1	13	0,962181
6	3	3	1	1	1	1	0	1	1	1	1	14	0,955657
7	2	2	3	1	1	1	0	1	1	1	1	14	0,962276
8	3	3	2	1	1	1	0	1	1	1	1	15	0,965213
9	4	4	1	1	1	1	0	1	1	1	1	16	0,955657
10	3	3	3	1	1	1	0	1	1	1	1	16	0,965309
11	4	4	2	1	1	1	0	1	1	1	1	17	0,965213
12	4	4	3	1	1	1	0	1	1	1	1	18	0,965309
13	2	4	2	1	1	1	0	1	1	2	1	18	0,977037
14	2	4	2	1	2	2	1	1	1	2	1	19	0,977189
15	3	6	2	1	2	2	0	1	1	2	1	21	0,979661
16	3	6	2	1	2	2	1	1	1	2	1	22	0,9797093
17	2	4	2	1	2	2	0	2	1	4	2	22	0,991768
18	2	6	2	1	3	3	0	1	1	3	1	23	0,977027
19	4	8	2	1	2	2	0	1	1	2	1	24	0,9798006
20	4	8	2	1	2	2	1	1	1	2	1	25	0,9798484
21	3	6	2	1	2	2	0	2	1	4	2	25	0,994421
22	2	4	2	1	2	2	0	2	2	4	4	25	0,996846
23	2	6	2	1	3	3	3	1	1	3	1	26	0,977272
24	3	9	2	1	3	3	0	1	1	3	1	27	0,979877
25	3	6	2	1	2	2	0	2	2	4	4	28	0,999521
26	3	9	2	1	3	3	3	1	1	3	1	30	0,979879
27	3	6	3	1	2	2	1	2	2	4	4	30	0,9996705
28	3	9	2	1	3	3	0	2	1	6	2	32	0,994529
29	4	8	3	1	2	2	1	2	2	4	4	33	0,9998121
30	3	9	2	1	3	3	3	2	1	6	2	35	0,994528
31	3	9	2	1	3	3	0	2	2	6	4	35	0,999608
32	4	12	2	1	3	3	0	2	2	6	4	39	0,999571
33	4	12	3	1	3	3	0	2	2	6	4	40	0,999863
34	4	12	2	1	3	3	3	2	2	6	4	42	0,9997651
35	4	12	3	1	3	3	3	2	2	6	4	43	0,9998641

Используя симметрию структуры и одинаковую надежность ИМ  $2_{ij}$ , проведем замещение  $f_i$ :

$$P(f_{5_1}, f_{5_2}, f_{5_3}) = R_4 (1 - Q_1^{n_1}) \sum_{i=1}^{n_1} C^i_{n_1} (1 - Q^i_1) \times \\ \times (1 - Q_2^{f_{5_1}} Q_2^{f_{5_2}} Q_2^{f_{5_3}})^i (Q_2^{f_{5_1}} Q_2^{f_{5_2}} Q_2^{f_{5_3}})^{4-i} \quad (6.48)$$

Проведем замещение  $f_{5_i}$  по формуле полной вероятности:

$$P(f_{6_1}, f_{6_2}) = \left\{ P(f_{5_1} f_{5_2} f_{5_3} = 1) \sum_{i=1}^{n_1} C^i_{n_1} (1 - Q^i_1) (1 - Q_2^3)^i Q_2^{3(n_1-i)} + 3P(f_{5_1} f_{5_2} f'_{5_3} = 1) \sum_{i=1}^{n_1} C^i_{n_1} (1 - Q^i_1) (1 - Q_2^2)^i Q_2^{2(n_1-i)} + 3P(f_{5_1} f'_{5_2} f'_{5_3} = 1) \sum_{i=1}^{n_1} C^i_{n_1} (1 - Q^i_1) \times \right. \\ \left. \times Q_2^{n_1-i} R^i_2 \right\} R_4 (1 - Q_3^{n_3}) \quad (6.49)$$

Перемножая  $f_{5_i}$  из (6.46) и замещая неповторные переменные, получаем

$$P(f_{5_1} f_{5_2} f_{5_3} = 1) = P_5^{(0)}(f_{6_1}, f_{6_2}) = B (1 - Q_8^{f_{6_1}} Q_8^{f_{6_2}})^3, \quad (6.50) \\ B = R_5^3 (R_{5_4}^3 + 3Q_{5_4} R_{5_4}^2 (1 - Q_{5_5}^2) + 3Q_{5_4}^2 R_{5_4} R_{5_5}^2).$$

Аналогично

$$P_5^{(1)}(f_{6_1}, f_{6_2}) = P(f_{5_1} f_{5_2} f'_{5_3} = 1) = R_5^2 (1 - Q_8^{f_{6_1}} Q_8^{f_{6_2}})^2 P(x_{5_4_1} \vee x_{5_5_1} x_{5_4_2} \vee x_{5_4_2} x_{5_5_1} x_{5_5_2} = 1) P(x_{5_4_1} \vee x_{5_4_2} x_{5_5_1} \vee x_{5_5_2} x_{5_5_1} x_{5_4_2} = 1) [1 - (1 - Q_8^{f_{6_1}} Q_8^{f_{6_2}}) \times \\ \times P(x_{5_3} (x_{5_4_1} \vee x_{5_4_2} x_{5_5_1} \vee x_{5_4_2} x_{5_5_2}) = 1)].$$

Проведем здесь разрезание сначала по  $x_{5_3}$ , затем по  $x_{5_4}$ :

$$\begin{aligned}
 P_5^{(1)}(f_{6_1}, f_{6_2}) &= R_5^2 (1 - Q_8^{f_{6_1}} Q_8^{f_{6_2}})^2 \{ Q_5 (R_{5_4}^2 + 2R_{5_4} Q_{5_4} R_{5_5}) + \\
 &+ R_5 [(R_{5_4}^3 + 2Q_{5_4} R_{5_4}^2 (1 - Q_{5_5}^2) + Q_{5_4}^2 R_{5_4} R_{5_5}) \times \\
 &\times Q_8^{f_{6_1}} Q_8^{f_{6_2}} + Q_{5_4} R_{5_4}^2 [1 - (1 - Q_8^{f_{6_1}} Q_8^{f_{6_2}}) (1 - Q_{5_5}^2)] + \\
 &+ 2Q_{5_4}^2 R_{5_4} R_{5_5} (1 - (1 - Q_8^{f_{6_1}} Q_8^{f_{6_2}}) R_{5_5}) \} = \\
 &= R_5^2 (1 - Q_8^{f_{6_1}} Q_8^{f_{6_2}})^2 B(f_{6_1}, f_{6_2}). \quad (6.51)
 \end{aligned}$$

Частичное замещение в функции  $P_5^{(2)}(f_{6_1}, f_{6_2})$  дает

$$\begin{aligned}
 P_5^{(2)}(f_{6_1}, f_{6_2}) &= R_5 (1 - Q_8^{f_{6_1}} Q_8^{f_{6_2}}) P(x_{5_4_1} \vee x_{5_4_2} x_{5_2} x_{5_5_1} \vee \\
 \vee x_{5_4_3} x_{5_3} x_{5_5_2} = 1) [1 - (1 - Q_8^{f_{6_1}} Q_8^{f_{6_2}}) P(x_{5_2} (x_{5_4_2} \vee x_{5_4_1} x_{5_5_1} \vee \\
 \vee x_{5_4_3} x_{5_3} x_{5_5_2}) = 1)] [1 - (1 - Q_8^{f_{6_1}} Q_8^{f_{6_2}}) P(x_{5_3} (x_{5_4_3} \vee \\
 \vee x_{5_4_1} x_{5_5_2} \vee h_{5_4_2} x_{5_2} x_{5_5_2}) = 1)].
 \end{aligned}$$

Проведем здесь разрезание сначала по  $x_{5_2}$  и  $x_{5_3}$ , а затем по  $x_{5_4}$ :

$$\begin{aligned}
 P_5^{(2)}(f_{6_1}, f_{6_2}) &= R_5 (1 - Q_8^{f_{6_1}} Q_8^{f_{6_2}}) \{ Q_5^2 R_{5_4} + 2Q_5 R_5 ((R_{5_4}^2 + \\
 &+ Q_{5_4} R_{5_4} R_{5_5}) Q_8^{f_{6_1}} Q_8^{f_{6_2}} + Q_{5_4} R_{5_4} (1 - R_{5_5} (1 - Q_8^{f_{6_1}} Q_8^{f_{6_2}})) \} + \\
 &+ R_5^2 [R_{5_4}^2 (1 - Q_{5_4} Q_{5_5}^2) (Q_8^{f_{6_1}} Q_8^{f_{6_2}})^2 + 2Q_{5_4} R_{5_4}^2 Q_8^{f_{6_1}} Q_8^{f_{6_2}} (1 - (1 - \\
 &- Q_{5_5}^2) (1 - Q_8^{f_{6_1}} Q_8^{f_{6_2}})) + 2Q_{5_4}^2 R_{5_4} Q_8^{f_{6_1}} Q_8^{f_{6_2}} (Q_{5_5} + \\
 &+ R_{5_5} Q_8^{f_{6_1}} Q_8^{f_{6_2}}) + Q_{5_4}^2 R_{5_4} (Q_{5_5} + R_{5_5} Q_8^{f_{6_1}} Q_8^{f_{6_2}})^2 \}. \quad (6.52)
 \end{aligned}$$

Теперь необходимо подставить (6.50) — (6.52) в (6.49) и провести замещение  $f_{6_1}$  и  $f_{6_2}$ . Окончательно получаем

$$\begin{aligned}
 R_c &= R_4 (1 - Q_3^{n_3}) \sum_{k=0}^2 C_3^k \sum_{i=1}^{n_1} (1 - Q_1^i) C_{n_1}^i (1 - \\
 &- Q_2^{3-k})^i Q_2^{(3-k)(4-i)} (P_6^{(0)} P_5^{(k)}(1, 1) + 2P_6^{(1)} P_5^{(k)}(0, 1)), \quad (6.53)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 P_6^{(0)} &= R_6^2 (R_7^2 (1 - Q_5^2) + 2Q_7 R_7 R_6^2), \\
 P_6^{(1)} &= R_6^2 R_6 (1 - Q_5^2) (Q_6 + R_6 Q_5^2) + \\
 &\quad + 2Q_7 R_7 R_6 R_6 (1 - R_6 R_6).
 \end{aligned}
 \tag{6.54}$$

Формула (6.53) при  $n_1=4$ ,  $n_3=3$  дает  $R_6$  для наиболее избыточного в табл. 6.2 варианта 35, изображенного

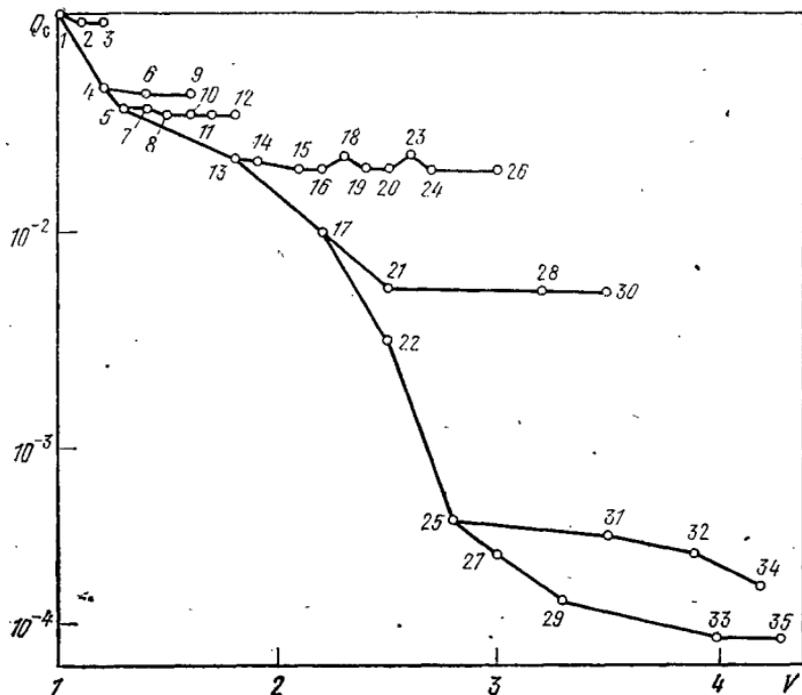


Рис. 6.9. Зависимость вероятности неработоспособного состояния центра коммутации сообщений от количества оборудования

на рис. 6.8. Однако из нее можно получить формулы и для многих других вариантов. Например, вариант 34 получается при  $n_3=2$ ,  $n_1=4$ , вариант 33 при  $n_1=4$ ,  $n_3=3$ ,  $Q_{55}=1$ , вариант 32 при  $n_1=4$ ,  $n_3=2$ ,  $Q_{55}=1$ , вариант 31 при  $n_1=3$ ,  $n_3=2$ ,  $Q_{55}=1$ . Если  $n_7=1$ , то вместо (6.54) имеем

$$P_6^{(0)} = R_7 R_6^2 R_6^2, \quad P_6^{(1)} = R_6 R_7 R_6 (1 - R_6 R_6). \tag{6.55}$$

Если  $n_6=n_7=1$ , то  $P_6^{(0)} = R_6 R_7 R_6$ ,  $P_6^{(1)} = 0$ . При  $n_5=2$  вместо (6.50) — (6.52) необходимо использовать фор-

Мулы

$$P_5^{(0)}(f_{6_1}, f_{6_2}) = 0, \quad P_5^{(1)}(f_{6_1}, f_{6_2}) = R_5^2 (1 - Q_8^{f_{6_1}} Q_8^{f_{6_2}})^2,$$

$$P_5^{(2)}(f_{6_1}, f_{6_2}) = R_5 (1 - Q_8^{f_{6_1}} Q_8^{f_{6_2}}) \{Q_5 R_{54} + R_5 [(1 - Q_{54} \times$$

$$\times Q_{55}) R_{54} Q_8^{f_{6_1}} R_8^{f_{6_2}} + Q_{54} R_{54} (Q_{55} + R_{55} Q_8^{f_{6_1}} Q_8^{f_{6_2}})]\}. \quad (6.55a)$$

Эти формулы используются в вариантах 13—17, 19—22, 25. Приведенных формул достаточно, чтобы провести расчеты для всех вариантов, указанных в табл. 6.2. В последней колонке этой таблицы приведены результа-

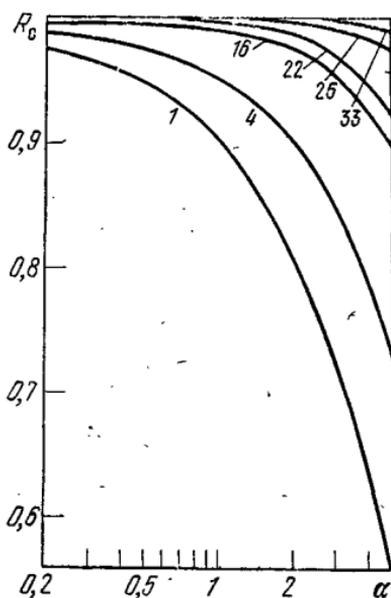


Рис. 6.10. Зависимость вероятности работоспособного состояния центра коммутации сообщений от надежности его устройств

ты для следующих исходных данных:  $R_1 = 0,947$ ,  $R_4 = 1$ ,  $R_3 = R_6 = 0,99$ ,  $R_2 = R_5 = R_7 = R_8 = R_9 = R_{54} = R_{55} = 0,995$ .

На рис. 6.9 показана зависимость  $Q_c$  от количества оборудования в условных единицах, отражающих количество больших интегральных микросхем (БИС), необходимых для реализации вариантов, указанных в табл. 6.2. На рис. 6.10 показана зависимость  $R_c$  для нескольких вариантов структуры системы от надежности элементов при пропорциональном изменении  $Q_i$  в  $\alpha$  раз по сравнению с приведенными выше значениями. Из данных следует, что увеличение избыточности не всегда эффективно. (Иногда при наличии большего числа

устройств можно получить худшие показатели надежности, что видно из сравнения вариантов 5 и 9, 17 и 26, 25 и 30.) Этот пример иллюстрирует высокую эффективность ЛВМ при расчете надежности. Он также позволяет строго и компактно описать логику возникновения отказов в системе. Кроме того, он достаточно быстро приводит к компактной расчетной формуле, несмотря на большое число элементов. Общее число элементов в ва-

рианте 33, находящихся в той ее части системы, которая не сводится к последовательно-параллельному соединению, составляет  $N=40$ . Простой перебор состояний этих элементов включает около  $5 \cdot 10^{11}$  ситуаций.

### 6.3. НАДЕЖНОСТЬ МНОГОСВЯЗНЫХ СИСТЕМ С ОРИЕНТИРОВАННОЙ СТРУКТУРОЙ ПРИ НЕПОЛНОМ ОПОВЕЩЕНИИ О СОСТОЯНИИ СЕТИ

Оповещение о состоянии сети может быть неполным по различным причинам: из-за ограничений на число разрядов, выделяемых для служебной информации, и на объем памяти для хранения этой информации, из-за отказа системы контроля и оповещения и т. д. Тогда на каждом узле обычно имеется информация о состоянии лишь ближайших участков сети, а при отсутствии оповещения — информация о состоянии лишь входящих линий связи, поступающая от собственной системы контроля. В этих условиях состояние некоторых маршрутов установить не удастся из-за отсутствия информации о состоянии части его элементов. В результате при выборе маршрута возникает неопределенность, состоящая в том, что из нескольких возможных путей передачи сообщений нет ни одного, работоспособность которого в момент выбора была бы гарантирована. Неопределенность является причиной возможных ошибок, так как может быть выбран путь, который в действительности оказался неработоспособным, в то время как среди других возможных путей есть по крайней мере один работоспособный: Объем информации оповещения не влияет на вероятность доставки сообщений лишь при передаче методом «волна». При избирательной передаче возможности сети используются не полностью, так как нельзя гарантировать, что сообщение будет доставлено адресату при наличии в сети по крайней мере одного работоспособного пути. Отсюда следует, что вероятность успешной доставки информации, вообще говоря, не совпадает с вероятностью связности и зависит от алгоритма выбора маршрута, чего не было при полном оповещении. Это существенно усложняет задачу надежности, так как приходится учитывать конкретный вид алгоритма. Комбинаторные рассуждения становятся еще более сложными,

чем при полном оповещении. И здесь существенно помогает использование аппарата алгебры логики. Заметим, что в сетях с неполным оповещением кроме основной задачи — определения вероятности  $R_c(\mathcal{E}(V))$  доставки сообщения при заданном объеме  $V$  информации оповещения и заданном алгоритме выбора маршрута  $\mathcal{E}$  — самостоятельный интерес представляют еще две задачи: нахождение оптимального алгоритма  $\mathcal{E}^o(V)$  при заданном объеме  $V$  информации оповещения по критерию

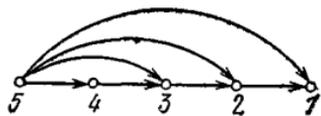


Рис. 6.11. Структурная схема сети с однозначным выбором маршрута

максимума вероятности  $R_c$  и определение влияния  $V$  на вероятностные характеристики сети. В последней задаче важно установить, до какого уровня увеличение  $V$  заметно увеличивает надежность и от какого уровня главными при увеличении  $V$  становятся соображения о живучести сети.

Рассмотрим сначала основную задачу. Предварительно заметим, что не всегда в условиях неполного оповещения возникают неопределенность в выборе маршрутов и возможность ошибки. В некоторых случаях структура самой сети помогает устранить неопределенность и полностью использовать избыточность сети. Такая ситуация иллюстрируется рис. 6.11. Нетрудно убедиться, что даже в отсутствие оповещения потери сообщений не будет при наличии хотя бы одного работоспособного пути, если в каждом узле передача будет вестись в направлении узла с наименьшим номером. Если добавить в этой сети линию 31, то без оповещения неопределенность не устраняется и может привести к ошибке: при неисправной линии 21 передача сообщения в узел 2 приводит к его потере для узла 1, в то время как существует работоспособный путь 531. Однако эта неопределенность устраняется, если узлу 5 сообщать лишь о состоянии линий 21 и 31, а остальные узлы оставить без оповещения. Тогда при отказе линии 31 имеем предыдущий случай, а если 31 исправна, то передача идет по исходящим линиям связи в следующей приоритетности: 51, 52, 53, 54 при исправной линии 21 и 51, 53, 54 при неисправной. Во всех случаях гарантируется доставка информации узла 1 при наличии хотя бы одного работоспособного пути к нему.

Рассмотрим теперь задачу расчета  $R_c(\mathcal{E})$  для  $s$ -связной сети при различных составах информации оповещения.

### Надежность $s$ -связной сети без оповещения

Структура сети изображена на рис. 6.2. На всех узлах заданы ряды приоритетности линий связи:  $ki_{k1}, ki_{k2}, \dots, ki_{ks}$ , ( $k > s$ ),  $ki_{k1}, ki_{k2}, \dots, ki_{k, k-1}$  ( $k \leq s$ ). Далее для определенности будем считать, что на всех узлах передача ведется по исправной линии связи в направлении узла с наименьшим номером. Тогда ряды приоритетности имеют вид:  $(k, k-s), (k, k-s+1), \dots, (k, k-1)$  при  $k > s$  и  $k1, k2, \dots, (k, k-1)$  при  $k \leq s$ . Передача по выбранному направлению ведется в условиях неопределенности о состоянии дальнейшего пути, в том числе и узла, принимающего сообщение. Поэтому сообщение может быть потеряно, если отказал приемный узел или все исходящие из него линии связи. Найдем расчетную формулу для вероятности  $R_c$  доставки информации при заданном алгоритме выбора маршрута. Обозначим через  $f_k$  логическую функцию успешности связи узлов  $k$  и  $l$  при алгоритме выбора маршрута  $\mathcal{E}_k$ . Тогда можно составить следующие рекуррентные соотношения:

$$f_k = x_k (x_{k, k-s} f_{k-s} \vee x'_{k, k-s} (x_{k, k-s+1} f_{k-s+1} \vee \dots \vee x'_{k, k-s} (x_{k, k-2} f_{k-2} \vee x'_{k, k-2} x_{k, k-1} f_{k-1} \dots))),$$

$$s+1 \leq k \leq n, n > s;$$

$$f_k = x_k (x_{k1} f_1 \vee x'_{k1} (x_{k2} f_2 \vee \dots \vee x'_{k, k-s} (x_{k, k-2} f_{k-2} \vee x'_{k, k-2} x_{k, k-1} f_{k-1} \dots))), \quad 2 \leq k \leq s. \quad (6.56)$$

В силу ортогональности слагаемых в (6.56) можно проводить замещение переменных в каждом слагаемом отдельно. Поэтому СФФВ

$$P_n^{(n-1)}(f_{n-1}, \dots, f_{n-s}) = R_n \left( 1 - Q_{n, n-s}^{f_{n-s}} + \right. \\ \left. + \sum_{i=n-1}^{n-1} \prod_{j=1}^{i-n+s} Q_{n, i-j} (1 - Q_{ni}^{f_i}) \right), \quad n > s; \quad (6.57)$$

$$\begin{aligned}
P_k^{(k-1)}(f_{k-1}, \dots, f_{k-s}) &= R_k \left( 1 - Q_{k, k-s}^{f_{k-s}} + \right. \\
&+ \left. \sum_{l=k-s+1}^{k-1} \prod_{j=1}^{l-k+s} Q_{k, l-j} (1 - Q_{kl}^{f_l}) \right), \quad s+1 \leq k \leq n-1; \\
P_k^{(k-1)}(f_{k-1}, \dots, f_1) &= R_k \left( 1 - Q_{k1}^{f_1} + \right. \\
&+ \left. \sum_{i=2}^{k-1} \prod_{j=1}^{i-1} Q_{k, i-j} (1 - Q_{ki}^{f_i}) \right), \quad 2 \leq k \leq s. \quad (6.58)
\end{aligned}$$

В дальнейшем замещение также проводится независимо в каждом слагаемом. При этом удобно начинать замещение в функциях с малыми  $k$ . Для  $k=2, 3$  и 4

$$\begin{aligned}
P_2 &= R_2 R_{21} R_1, \quad P_3 = R_3 (R_{31} R_1 + Q_{31} R_{32} P_2), \\
P_4 &= R_4 (R_{41} R_1 + Q_{41} (R_{42} P_2 + Q_{42} R_{43} P_3)).
\end{aligned}$$

Согласно (6.58) для произвольного номера  $k \leq s$  получаем

$$\begin{aligned}
P_k &= R_k (R_{k1} R_1 + Q_{k1} (P_2 R_{k2} + Q_{k2} (R_{k3} P_3 + \\
&+ \dots + Q_{k, k-2} R_{k, k-1} P_{k-1}))). \quad (6.59)
\end{aligned}$$

Аналогично для  $k > s$

$$\begin{aligned}
P_k &= R_k (R_{k, k-s} P_{k-s} + Q_{k, k-s} \times \\
&\times (R_{k, k-s+1} P_{k-s+1} + \dots + Q_{k, k-2} R_{k, k-1} P_{k-1})). \quad (6.60)
\end{aligned}$$

Проиллюстрируем общие формулы на примере.

**Пример 6.4.** Пусть в полносвязной ориентированной сети без оповещения алгоритм выбора маршрута базируется на рядах приоритетности линий связи 51, 52, 53, 54, 41, 42, 43, 31, 32. Необходимо найти вероятность доставки сообщений из узлов 5 и 4 в узел 1 и оценить, как изменятся эти вероятности, если заменить в них ряды приоритетности следующими: 51, 54, 53, 52, 41, 43, 42. Оценить также, как влияет параметр  $s$  на надежность передачи сообщений при заданном алгоритме выбора маршрута.

Решение. Для алгоритма 1 согласно (6.59) при  $s=4$  имеем

$$\begin{aligned}
 P_2 &= R_2 R_{21} R_1, \\
 P_3 &= R_3 R_1 (R_{31} + Q_{31} R_{32} R_2 R_{21}), \\
 P_4 &= R_4 R_1 (R_{41} + Q_{41} (R_{42} R_2 R_{21} + \\
 &+ Q_{42} R_{43} R_3 (R_{31} + Q_{31} R_{32} R_2 R_{21}))), \\
 P_5 &= R_5 R_1 (R_{51} + Q_{51} (R_{52} R_2 R_{21} + \\
 &+ Q_{52} (R_{53} R_3 (R_{31} + Q_{31} R_{32} R_2 R_{21}) + \\
 &+ Q_{53} R_{54} P_4 / R_1))).
 \end{aligned} \tag{6.61}$$

При  $R_i = p_1$ ,  $R_{ij} = p_2 = 1 - q_2$  из (6.61) получаем

$$\begin{aligned}
 P_3 &= p_1^2 p_2 (1 + q_2 p_1 p_2), \quad a = q_2 p_1 p_2, \\
 P_4 &= p_1^2 p_2 (1 + a (1 + q_2 (1 + a))), \\
 P_5 &= p_1^2 p_2 (1 + a (1 + q_2 (1 + a + q_2 (1 + \\
 &+ a (1 + q_2 (1 + a)))))).
 \end{aligned} \tag{6.62}$$

Чтобы получить выражение при  $s=3$ , надо в формуле для  $P_5$  положить  $R_{51} = 1 - Q_{51} = 0$ , а при  $s=2$   $R_{41} = R_{51} = R_{52} = 0$ .

При алгоритме 2 расчетные формулы для  $P_2$  и  $P_3$  не изменятся. Остальные две формулы приобретают вид

$$P_4 = R_4 (R_{41} R_1 + Q_{41} (R_{43} P_3 + Q_{43} R_{42} R_2 R_{21} R_1)), \tag{6.63}$$

$$P_5 = R_5 (R_{51} R_1 + Q_{51} (R_{54} P_4 + Q_{54} \times (Q_{53} P_3 + Q_{53} R_{52} R_2 R_{21} R_1))). \tag{6.64}$$

В частности, при  $R_i = p_1$  и  $R_{ij} = p_2 = 1 - q_2$

$$\begin{aligned}
 P_4 &= p_1^2 p_2 [1 + a (1 + q_2 + a)], \\
 P_5 &= p_1^2 p_2 [1 + (a + q_2) (1 + a + q_2)].
 \end{aligned} \tag{6.65}$$

Результаты расчетов по формулам (6.61) — (6.65) представлены на рис. 6.12. Из формул и графиков можно сделать следующие выводы.

1. При  $s=3$  и 4,  $n=4$  и 5, а также при  $s=2$  и  $n=4$  алгоритм 2 обеспечивает лучшую надежность передачи сообщений, чем алгоритм 1, а при  $s=2$ ,  $n=5$ , наоборот,

вероятность  $P_5$  большая в системе с алгоритмом 1. Это имеет качественное объяснение: в алгоритме 2 при  $s=3$  и 4 сообщение имеет возможность использовать большее число прямых связей с узлом 1. При  $s=2$  и  $n=5$  число прямых связей с узлом 1 в маршруте сообщения одинаково при обоих алгоритмах, но в алгоритме 2 со-

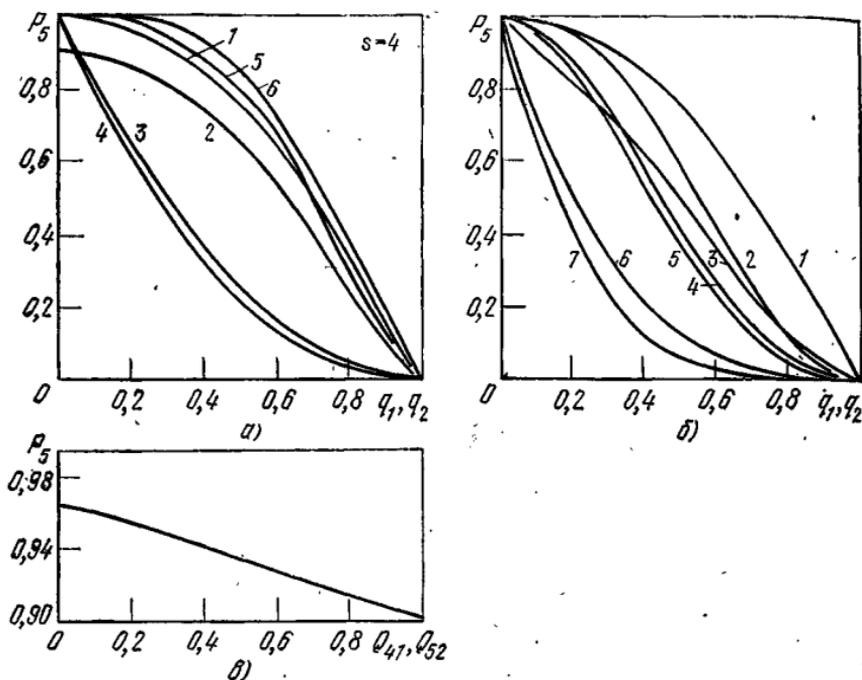


Рис. 6.12. Зависимость вероятности работоспособного состояния полностью ориентированной сети без оповещения о надежности узлов и линий связи:

- а) 1 —  $p_1=1$ , алгоритм 1(a1); 2 —  $p_1=0,95$ , a1; 3 —  $p_2=1$ , a1; 4 —  $p_2=0,8$ , a1; 5 —  $p_1=1$ , a2; 6 —  $p_1=1$ , полное оповещение;  
 б) 1 —  $p_1=1$ ,  $s=4$ , a1; 2 —  $p_1=1$ ,  $s=3$ , a2; 3 —  $p_1=1$ ,  $s=3$ , a1; 4 —  $p_1=1$ ,  $s=2$ , a1; 5 —  $p_1=1$ ,  $s=2$ , a2; 6 —  $p_2=1$ ,  $s=3$ , a1/a2; 7 —  $p_2=1$ ,  $s=2$ , a2;  
 в)  $p_1=1$ ,  $p_2=0,9$

общение вынуждено проходить один дополнительный транзитный узел (узел 4).

2. Сравнение графиков  $P_5$  при  $s=2$  и  $s=3$  в системе с алгоритмом 1 выявляет «парадокс»: увеличение избыточности снижает надежность (по крайней мере при  $q_2 < 0,48$ ). Тщательный анализ причин этого парадокса показывает, что он мнимый. Никакого нарушения общих закономерностей нет. Дело в том, что вероятность  $R_c$  определяется не только глубиной избыточности, но и алгоритмом ее использования. В данном случае введе-

ние дополнительных связей 41 и 52 в систему с алгоритмом 1 приводит к уменьшению числа используемых прямых связей с 1 в маршруте сообщения. Отсюда следует и еще один полезный вывод: развитие системы и введение дополнительных линий связи должно сопровождаться обновлением алгоритмов выбора маршрутов и их согласованием с новой структурой сети.

3. Сравнение систем без оповещения и с полным оповещением (см. пример 6.2) показывает, что при оптимальном выборе приоритетов система без оповещения обеспечивает характеристики, незначительно уступающие характеристикам системы с полным оповещением. Так, при  $q_2=0,1$  и  $p_1=1$  вероятности доведения сообщений равны соответственно 0,999314 и 0,99970, при  $q_2=0,2$ —0,99066 и 0,99535, а при  $q_3=0,3$ —0,96020 и 0,97735. Это подтверждает то, что обеспечение надежности не является единственным основанием для введения оповещения сети.

### Надежность $s$ -связной сети с оповещением о прямой линии связи с адресатом

Алгоритм выбора маршрутов в каждом узле использует два ряда приоритетности: ряд приоритетности путей, состояние которых известно, и ряд приоритетности направлений связи, используемый, когда все указанные в первом ряде пути оказались неработоспособными.

Обозначим множество путей, входящих в ряд приоритетности  $k$ -го узла, через  $M_k$ . По структурной схеме (рис. 6.2) нетрудно установить, что при  $k > 2s + 1$  множество  $M_k$  пусто и этот случай не отличается от предыдущего. Поэтому далее рассмотрим лишь систему с  $n \leq 2s + 1$ . Здесь выделим два случая:  $n \leq s + 1$  и  $s + 2 \leq n \leq 2s + 1$ .

При  $n \leq s + 1$  система и все ее подсистемы  $k$ -го ранга полносвязные. На узле  $k$  задаются ряды приоритетности:  $(ki_{k1}, ki_{k2}, \dots, ki_{k, k-1})$  и  $(kj_{k1}, kj_{k2}, \dots, kj_{k, k-3})$ . Тогда логическая ФРС

$$y = x_1 f_n, \quad f_k = x_k (B_k \vee B'_k (x_{ki_{k1}} f_{i_{k1}} \vee \vee (x_{kj_{k1}} x_{i_{k1}})' (x_{kj_{k2}} \vee \dots \vee \vee (x_{kj_{k, k-4}} x_{i_{k, k-4}})' x_{kj_{k, k-3}} f_{i_{k, k-3}}) \dots)), \quad k \leq n, \quad (6.66)$$

где

$$B_k = x_{k1} \vee x_{k2} x_2 x_{21} \vee \dots \vee x_{k, k-1} x_{k-1} x_{k-1, 1}. \quad (6.67)$$

Смешанная форма получается замещением в каждом слагаемом функций  $f_n$  и  $f_k$  переменных  $x_{ni}$  и  $x_{ki}$ :

$$P_n^{(n-1)} = R_n R_1 \left[ 1 - Q_{n1} \prod_{i=2}^{n-1} (1 - R_{ni} R_i R_{i1}) + \right. \\ \left. + Q_{n1} \sum_{v=1}^{n-3} (1 - Q_{n1jnv}^{g_{nv}}) \prod_{i=1}^{v-1} Q_{njni}^{x_{ni}} \prod_{i=v}^{n-1} Q_{njni}^{x_{ni} x_{ni}^1} \right], \quad (6.68)$$

$$P_k^{(k-1)} = R_k \left[ 1 - Q_{k1} \prod_{i=2}^{k-1} (1 - R_{ki} R_i R_{i1}) + \right. \\ \left. + Q_{k1} \sum_{v=1}^{k-3} (1 - Q_{kjkv}^{g_{kv}}) \prod_{i=1}^{v-1} Q_{kjk_i}^{x_{ki}} \prod_{i=v}^{k-1} Q_{kjk_i}^{x_{ki} x_{ki}^1} \right], \quad (6.69)$$

$$g_{kv} = (x_{j_{kv}} x_{j_{kv}^1})' f_{j_{kv}}, \quad k \leq n.$$

Дальнейшее замещение происходит, как и при полном оповещении, последовательным разрезанием сначала по функции  $f_{n-1}$  и  $x_{n-1}$ , затем  $f_{n-2}$  и т. д.

Пусть теперь для определенности ряд приоритетности направлений связи имеет вид  $(k, k-1; k, k-2; \dots \dots; k4; k3)$ . Тогда из (6.66) и (6.69) получим

$$f_k = x_1 x_k (B_k \vee B'_k (x_{k, k-1} f_{k-1} \vee (x_{k, k-1} \times \\ \times x_{k-1})' (x_{k, k-2} f_{k-2} \vee \dots \vee (x_{k4} x_4)' x_{k3} f_3))), \quad k \leq n; \quad (6.70)$$

$$P_n^{(n-1)} = R_n R_1 \left[ 1 - Q_{n1} \prod_{i=2}^{n-1} (1 - R_{ni} R_i R_{i1}) + \right. \\ \left. + Q_{n1} \sum_{i=3}^{n-1} (1 - Q_{ni}^{(x_i x_{i1})' f_i}) \prod_{j=i+1}^{n-1} Q_{nj}^{x_j} \prod_{j=2}^i Q_{nj}^{x_j x_{j1}} \right]; \quad (6.71)$$

$$P_k^{(k-1)} = R_k \left[ 1 - Q_{k1} \prod_{i=2}^{k-1} (1 - R_{ki} R_i R_{i1}) + \right. \\ \left. + Q_{k1} \sum_{i=3}^{k-1} (1 - Q_{ki}^{(x_i x_{i1})' f_i}) \prod_{j=i+1}^{k-1} Q_{kj}^{x_j} \prod_{j=2}^i Q_{kj}^{x_j x_{j1}} \right], \quad k < n. \quad (6.72)$$

При  $s+2 \leq n \leq 2s+1$  для  $k \leq s+1$  вероятности  $P_k$  определяются по формулам (6.69) и (6.72). Для  $n \geq k \geq s+2$  возникает особенность, состоящая в том, что первый ряд приоритетности на узлах содержит ровно  $2s+2-k$  путей, а второй ряд — ровно  $s$  направлений связи. Поэтому

$$B_k = x_{k,h-s} x_{h-s} x_{h-s,1} \vee x_{k,h-s+1} x_{h-s+1} \times \\ \times x_{k-s+1,1} \vee \dots \vee x_{k,s+1} x_{s+1} x_{s+1,1}. \quad (6.73)$$

Формулы (6.66) и (6.67) сохраняют структуру, изменяется лишь число слагаемых: вместо  $k-3$  их будет ровно  $s$  с индексами функций  $f_i$  от  $j_{k1}$  до  $j_{ks}$ . Замещение переменных и запись СФФВ происходит по общим правилам. Рассмотрим пример.

**Пример 6.5.** Пусть в системе с параметрами  $n=5$ ,  $s=4$  каждый узел оповещается смежными узлами о наличии у них работоспособной линии связи с узлом 1. Сигнал оповещения о состоянии прямой линии связи одновременно служит признаком работоспособности передающего узла. Отсутствие сигнала означает, что сам узел неработоспособен. Необходимо найти вероятности  $R_c$  при двух вариантах приоритетности исходящих линий связи на узле 5: 1) 53, 54, 2) 54, 53. Вероятности работоспособного состояния узлов  $p_1$ , линий связи  $p_2$ .

*Решение.* Для первого варианта приоритетности

$$y = f_5 = x_1 x_5 (x_{51} \vee x_{52} x_2 x_{21} \vee x_{53} x_3 x_{31} \vee \\ \vee x_{54} x_4 x_{41} \vee x'_{51} (x_{52} x_2 x_{21})' (x_{53} f_3 \vee \\ \vee (x_{53} x_3)' x_{54} f_4) (x_{53} x_3 x_{31})' (x_{54} x_4 x_{41})'), \quad (6.74) \\ f_4 = x_4 (x_{41} \vee x_{42} x_2 x_{21} \vee x_{43} f_3), \\ f_3 = x_3 (x_{31} \vee x_{32} x_2 x_{21}), \\ B_5 = x_{51} \vee x_{52} x_2 x_{21} \vee x_{53} x_3 x_{31} \vee x_{54} x_4 x_{41}.$$

Преобразуем (6.74) к виду

$$f_5 = x_1 x_5 (B_5 \vee x'_{51} (x'_{31} x'_{52} (x_{54} x_4 x_{41})' \wedge \\ \wedge x_{53} x_3 x_{32} x_2 x_{21} \vee x'_{41} (x_{53} x_3)' \wedge \\ \wedge (x_{52} x_2 x_{21})' x_{54} x_4 (x_{42} x_2 x_{21} \vee x_{43} f_3))).$$

Здесь три слагаемых ортогональные. Поэтому замещение проведем в них независимо, используя фор-

мулу (1.73):

$$R_c = P_5(x_i) = \bar{R}_1 \bar{R}_5 \left( 1 - Q_{51} \prod_{i=2}^4 (1 - \bar{R}_{5i} R_i \bar{R}_{i1}) + \right. \\ \left. + Q_{51} (Q_{52} Q_{31} R_{53} R_3 R_{32} R_2 R_{21} (1 - R_{54} R_4 R_{41}) + \right. \\ \left. + Q_{41} R_4 R_{54} Q_{53}^2 Q_{52}^{x_2 x_{21}} (1 - Q_{42}^{x_2 x_{21}} Q_{43}^{f_3})) \right) = \\ = R_1 R_5 (1 - C_1 + C_2 Q_{53}^2 Q_{52}^{x_2 x_{21}} (1 - Q_{42}^{x_2 x_{21}} Q_{43}^{f_3})).$$

Замещение остальных переменных проводим в следующем порядке: сначала  $x_2 x_{21}$ , затем  $x_3$ ,  $x_{31}$  и  $x_{32}$ . Окончательно имеем

$$R_c = R_1 R_5 (1 - C_1 + C_2 (R_2 R_{21} Q_{52} (R_3 Q_{53} \times \\ \times ((1 - Q_{31} Q_{32}) (1 - Q_{42} Q_{43}) + Q_{31} Q_{32} R_{42}) + \\ + Q_3 R_{42}) + (1 - R_2 R_{21}) R_3 R_{31} R_{43} Q_{53})). \quad (6.75)$$

Для второго варианта приоритетности согласно (6.70)

$$f_5 = x_1 x_5 (B_5 \vee B'_5 (x_{54} f_4 \vee (x_{54} x_4)' x_{53} f_3)).$$

После несложных преобразований

$$f_5 = x_1 x_5 (B_5 \vee x'_{51} (x'_{31} x'_{52} (x_{54} x_4)' \times \\ \times x_{53} x_3 x_{32} x_2 x_{21} \vee x'_{41} (x_{52} x_2 x_{21})' (x_{53} \times \\ \times x_3 x_{31})' x_{54} x_4 (x_{42} x_2 x_{21} \vee x_{43} f_3))).$$

После замещения неповторяющихся переменных

$$R_c = P_5(x_i) = R_1 R_5 (1 - C_3 + \\ + C_2 Q_{52}^{x_2 x_{21}} Q_{53}^{x_3 x_{31}} (1 - Q_{42}^{x_2 x_{21}} Q_{43}^{f_3})),$$

где

$$C_3 = Q_{51} \left( \prod_{i=2}^4 R_{5i} R_i \bar{R}_{i1} - Q_{31} Q_{52} (1 - R_{54} R_4) R_3 R_{53} R_{32} R_{21} \right).$$

После замещения остальных переменных окончательно имеем

$$R_c = R_1 R_5 (1 - C_3 + C_2 (Q_{52} R_2 R_{21} (R_3 R_{31} Q_{53} (1 - \\ - Q_{42} Q_{43}) + R_3 Q_{31} (R_{32} (1 - Q_{42} Q_{43}) + \\ + Q_{32} R_{42}) + Q_3 R_{42}) + (1 - R_2 R_{21}) R_3 R_{31} Q_{53} R_{43})). \quad (6.76)$$

В частности, при  $R_i = p_1$  и  $R_{ij} = p_2$  из (6.75) и (6.76) получим

$$R_c(1) = p_1^2 [1 - q_2(1 - p_1 p_2^2)^3 + q_2^3 p_2^2 p_1^3 (1 - p_1 p_2^2) + q_2^3 p_2^2 p_2^2 (p_2(1 - p_1 p_2) + p_1 q_2(1 - q_2^2)^2 + p_1 p_2 q_2^3 + q_1 p_2)], \quad (6.77)$$

$$R_c(2) = p_1^2 [1 - q_2(1 - p_1 p_2^2)^3 + q_2^3 p_2^2 p_1^3 [2(1 - p_1 p_2) + q_1 + p_1 q_2(1 + p_2 + 2p_2 q_2)]]]. \quad (6.78)$$

Результаты расчетов по формулам (6.75) — (6.78) приведены на рис. 6.13. Из рисунка следует, что система с частичным оповещением занимает промежуточное положение между системами с полным оповещением и без оповещения. Причем минимальная информация опо-

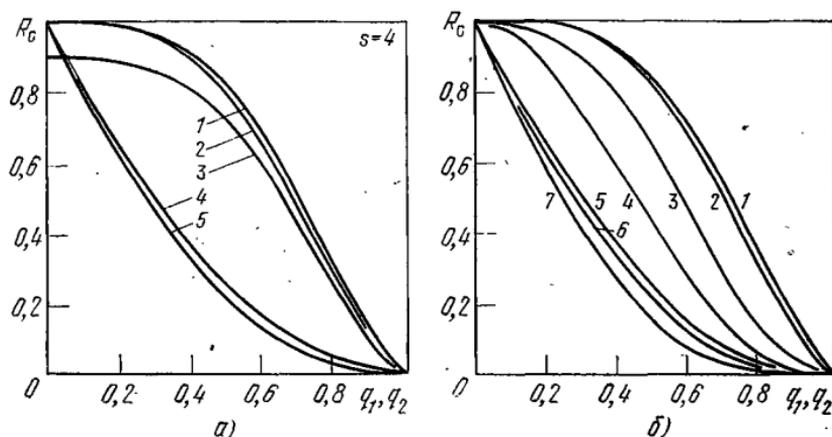


Рис. 6.13. Зависимость вероятности работоспособного состояния полностью связанной сети от надежности узлов и линий связи при оповещении о прямой линии связи с адресатом:

а) 1 —  $p_1=1$ ,  $a_2$ ; 2 —  $p_1=1$ ,  $a_1$ ; 3 —  $p_1=0,95$ ,  $a_1$ ; 4 —  $p_2=1$ ,  $a_1 \vee a_2$ ; 5 —  $p_2=0,8$ ,  $a_1$ ; б) 1 —  $p_1=1$ ,  $a_2$ ,  $s=4$ ; 2 —  $p_1=1$ ,  $a_1$ ,  $s=4$ ; 3 —  $p_1=1$ ,  $a_1$ ,  $s=3$ ; 4 —  $p_1=1$ ,  $a_1$ ,  $s=2$ ; 5 —  $p_2=1$ ,  $a_1 \vee a_2$ ,  $s=4$ ; 6 —  $p_2=1$ ,  $a_1 \vee a_2$ ,  $s=3$ ; 7 —  $p_2=1$ ,  $a_1 \vee a_2$ ,  $s=2$

вещения позволила значительно повысить вероятность доставки сообщений. При  $q_1=0$  и  $q_2=0,1$  вероятность потери уменьшилась от 0,000686 до 0,000388, а при  $q_2=0,2$  — от 0,00933 до 0,00596, т. е. примерно на 60%. Для сравнения отметим, что при полном оповещении вероятности потери при тех же условиях составили 0,0003 и 0,00465. Отсюда следует, что оповещение только о прямой линии связи позволило устранить соответ-

ственно 77 и 72% разности в вероятностях потерь для систем без оповещения и с полным оповещением. В табл. 6.3 приведены результаты расчетов вероятности  $R_c$  при различных приоритетах. В отличие от системы без оповещения здесь изменение приоритетов практически не влияет на вероятность доставки сообщений.

Возможен еще один способ оповещения с минимальным объемом информации — оповещение смежных узлов

Таблица 6.3

$q$		0,1	0,2	0,3	0,4	
$R_c$	a1	0,999606	0,99394	0,97124	0,91691	
	a2	0,999611	0,99404	0,97165	0,91771	
$q$		0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$R_c$	a1	0,81933	0,67576	0,49621	0,30364	0,12888
	a2	0,82030	0,67656	0,49662	0,30373	0,12886

о наличии хотя бы одного работоспособного пути к адресату. Каждый узел обобщает поступившие к нему сведения от узлов с меньшими номерами и от собственной системы контроля и направляет обобщенный сигнал всем смежным узлам с большими номерами. При таком оповещении вероятность доставки сообщений такая же, как и в системе с полным оповещением. Однако эти способы оповещения не эквивалентны. Системы отличаются (и иногда весьма существенно) распределениями потоков сообщений по сети и информационной нагрузкой элементов сети. Этот вопрос будет рассмотрен в гл. 7. А теперь вернемся ко второй задаче, сформулированной для систем с полным оповещением.

### Оптимальный алгоритм выбора маршрута

Оптимальным алгоритмом будем считать такой, который обеспечивает при заданном объеме и составе информации оповещения максимальную вероятность до-

ставки сообщения. Расчеты оптимальных приоритетов проводятся последовательно вдоль системы, начиная с узлов, наиболее близких к адресату. Причем в расчетах приоритетов для некоторого узла используются уже ранее рассчитанные оптимальные приоритеты всех транзитных узлов, которые могут входить в маршрут передачи сообщений. Существенно, то, что оптимальность приоритетов гарантируется лишь для тех же значений вероятностей  $R_i$ , которые участвовали в расчетах при поиске оптимального алгоритма. Однако обычно оказывается, что приоритеты, найденные для конкретных значений  $R_i$ , оказываются оптимальными в достаточно широкой области вокруг расчетной точки. Поиск этой области представляет самостоятельный интерес, так как позволяет установить устойчивость полученного решения к точности задания вероятностей  $R_i$ .

Следует обратить внимание на то, что задача оптимизации алгоритма выбора маршрута возникает лишь при наличии в узлах неопределенной ситуации во время принятия решения о направлении передачи сообщений. Это означает, что в системах без оповещения расчету подлежат приоритетности линий связи на всех узлах, начиная с четвертого, а в системах с частичным оповещением из двух рядов приоритетности расчету подлежит лишь ряд приоритетности линий связи.

Принцип оптимизации заключается в том, что из всех работоспособных направлений связи выбирается такое, которое обеспечивает максимальную априорную вероятность доставки сообщений. При этом расчет оптимальных приоритетов сводится к упорядочению вероятностей доставки сообщений от смежных узлов до адресата.

Рассмотрим задачу оптимизации алгоритма выбора маршрута для  $s$ -связной ориентированной сети без оповещения (рис. 6.2).

Пусть в этой сети узлы идеально надежны, а вероятности  $R_{i,i-j} = 1 - q_j$ ,  $j = \overline{1, s}$ . Прежде чем перейти к анализу вероятностей доставки сообщений, докажем вспомогательное утверждение.

**Лемма.** Пусть в системе без оповещения для узлов  $k$  и  $k+1$ ,  $k > 5$ , оптимальные ряды приоритетности имеют вид  $(i, i-s)$ ,  $(i, i-s+1)$ , ...,  $(i, i-1)$ ,  $i = k, k+1$ . Тогда этот же ряд приоритетности будет оптимальным и для всех  $i > k+1$ ,

**Доказательство.** Из того, что заданный ряд приоритетности является оптимальным, следуют неравенства

$$P_{k-s} > P_{k-s+1} > \dots > P_{k-1} > P_k, \quad P_k = P(f_k=1). \quad (6.79)$$

Для доказательства леммы достаточно показать, что в этом случае справедливо и неравенство  $P_k > P_{k+1}$ . Для этого составим в соответствии с оптимальными приоритетами ФРС для узлов  $k$  и  $k+1$

$$\begin{aligned} f_k &= x_{k,k-s} f_{k-s} \vee x'_{k,k-s} (x_{k,k-s+1} \times \\ &\times f_{k-s+1} \vee \dots \vee x'_{k,k-2} x_{k,k-1} f_{k-1}), \\ f_{k+1} &= x_{k+1,k+1-s} f_{k+1-s} \vee x'_{k+1,k+1-s} \times \\ &\times (x_{k+1,k+2-s} f_{k+2-s} \vee \dots \vee x'_{k+1,k-1} x_{k+1,k} f_k). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} P_k &= (1-q_s) P_{k-s} + \sum_{i=0}^{s-2} \prod_{j=i+2}^s q_j (1-q_{i+1}) P_{k-i-1}, \\ P_{k+1} &= (1-q_s) P_{k-s+1} + \sum_{i=0}^{s-2} \prod_{j=i+2}^s q_j (1-q_{i+1}) P_{k-i}. \end{aligned} \quad (6.80)$$

Составим разность

$$\begin{aligned} \Delta P_k &= P_k - P_{k+1} = (1-q_s) (P_{k-s} - P_{k-s+1}) + \\ &+ \sum_{i=0}^{s-2} (1-q_{i+1}) \prod_{j=i+2}^s q_j (P_{k-i-1} - P_{k-i}). \end{aligned}$$

По условиям леммы  $P_{k-i} > P_{k-i+1}$  для  $i=0, s+1$ . Поэтому  $\Delta P_k > 0$ . Лемма доказана.

Рассмотрим далее два частных класса систем — двухсвязные и трехсвязные.

**Двухсвязная система.** Пусть в двухсвязной системе  $R_i = p$ . Тогда для узлов 2 и 3 вероятности доставки сообщений определяются по формулам (6.61):

$$P_2 = p, \quad P_3 = p(1+pq).$$

Ясно, что при всех  $p < 1$ ,  $P_3 > P_2$ . Поэтому в узле 4 ряд приоритетности имеет вид: 43, 42. Тогда для узла 4

$$P_4 = p(P_3 + qP_2) = p^2(1+q+pq).$$

Разность  $\Delta P_4 = P_4 - P_3 = -pq^2(1+p) < 0$  для всех  $p < 1$ . Поэтому в узле 5 ряд приоритетности 53, 54. Продолжая рассуждения, получаем результаты, приведенные в табл. 6.4.

Таблица 6.4

Номер узла	Ряд приоритетности	Область оптимальности	Расчетная формула
4	43, 42	$0 < q < 1$	$p^2(1+q+pq)$
5	53, 54	$0 < q < 1$	$p^2[pq^2 + (1+pq)^2]$
6	65, 64	$0 < q < 0,382$	$p^3[(1+pq)^2 + q(1+q+2pq)]$
7	75, 76	$0 < q < 1$	$p^3[(1+pq)^3 + pq^2(2+2pq+q)]$
8	86, 87	$0 < q < 1$	$p^4[(1+pq)^2(1+q+pq^2) + q(1+q+2pq)(1+pq^2) + pq^3]$

Для узлов 7 и 8 впервые выполняются условия леммы. Поэтому для всех  $i > 8$  оптимальный ряд приоритетности  $(i, i-2)$ ,  $(i, i-1)$ . Пусть теперь  $q_1 = 0,5q_2 = q < 0,5$ . В этом случае

$$P_2 = p, P_3 = 1 - 2q^2(1+p); \Delta P_3 = q(2p^2 - 1).$$

Разность  $\Delta P_3 > 0$  при  $q < 1 - (\sqrt{2})^{-1} = 0,293$ .

Поэтому в узле 4 ряд 43, 42, а расчетная формула

$$P_4 = p[(1-2q)(1+q) + 2qp^2].$$

Разность  $\Delta P_4 = -q^2(2p^2 + 2p - 1) < 0$  при  $q < 0,5$ . Поэтому в узле 5 ряд 53, 54 и расчетная формула

$$P_5 = (p - q + 2qp^2)^2 + (p - q)2p^2q^2.$$

Разность  $\Delta P_5 = -q^2(1 - 12q^2 + 12q^3 - 4q^4) < 0$  при  $q < 0,346$ . Поэтому в узле 6 ряд приоритетности 64, 65. Для узлов 5 и 6, выполняются условия леммы. Поэтому далее оптимальные приоритеты  $(i, i-2)$ ,  $(i, i-1)$ ,  $i \geq 6$ .

**Трехсвязная система.** Пусть  $q_1 = q_2 = q_3 = q$ . Повторяя рассуждения, приведенные для двухсвязной системы, найдем оптимальные приоритеты, приведенные в табл. 6.5.

Для узлов 12 и 13 выполняются условия леммы. Поэтому далее всюду ряд приоритетности  $(i, i-3)$ ,  $(i, i-2)$ ,  $(i, i-1)$ . На рис. 6.14 показаны наиболее приоритетные направления связи. Некоторые результаты расчетов по формулам табл. 6.4 и 6.5 приведены на рис. 6.15 и 6.16.

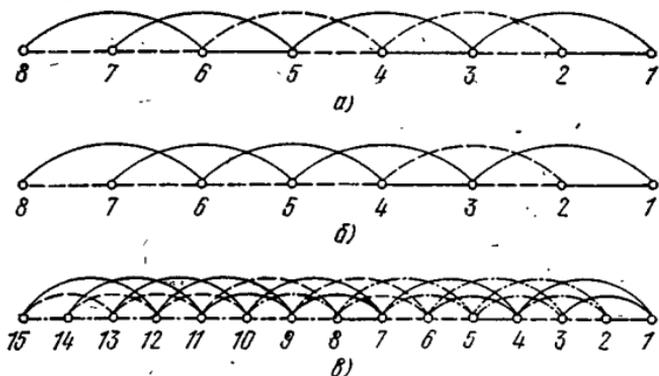


Рис. 6.14. Распределение оптимальных приоритетов в двух- и трехсвязной системах без оповещения:  
 а)  $s=2$ ,  $q_1=q_2$ ; б)  $s=2$ ,  $q_1=0,5q_2$ ; в)  $s=3$ ,  $q_1=q$ . ——— первый, - - - второй - · - · - третий приоритеты

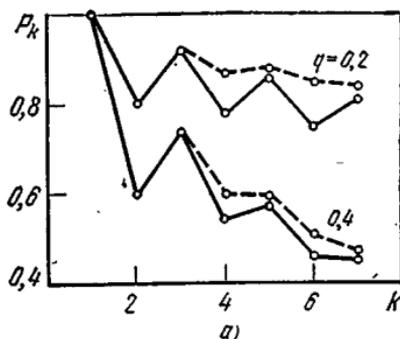
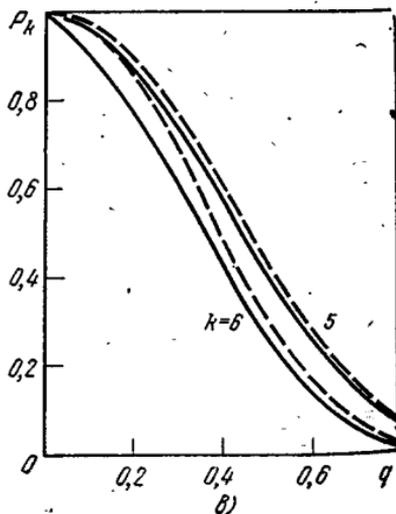
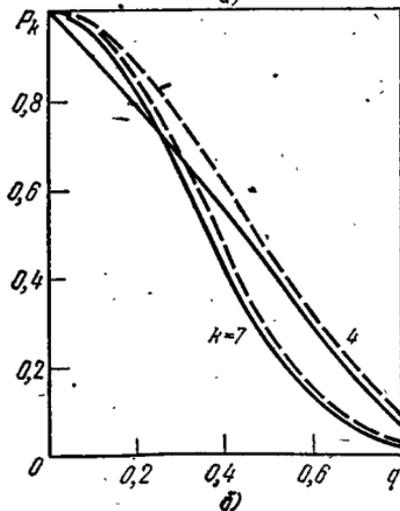


Рис. 6.15. Зависимость вероятности работоспособного состояния двухсвязной системы без оповещения от ранга системы и надежности линий связи:  
 ——— приоритеты  $i$ ,  $i-2$ ,  $i-1$ ;  
 - - - оптимальные приоритеты



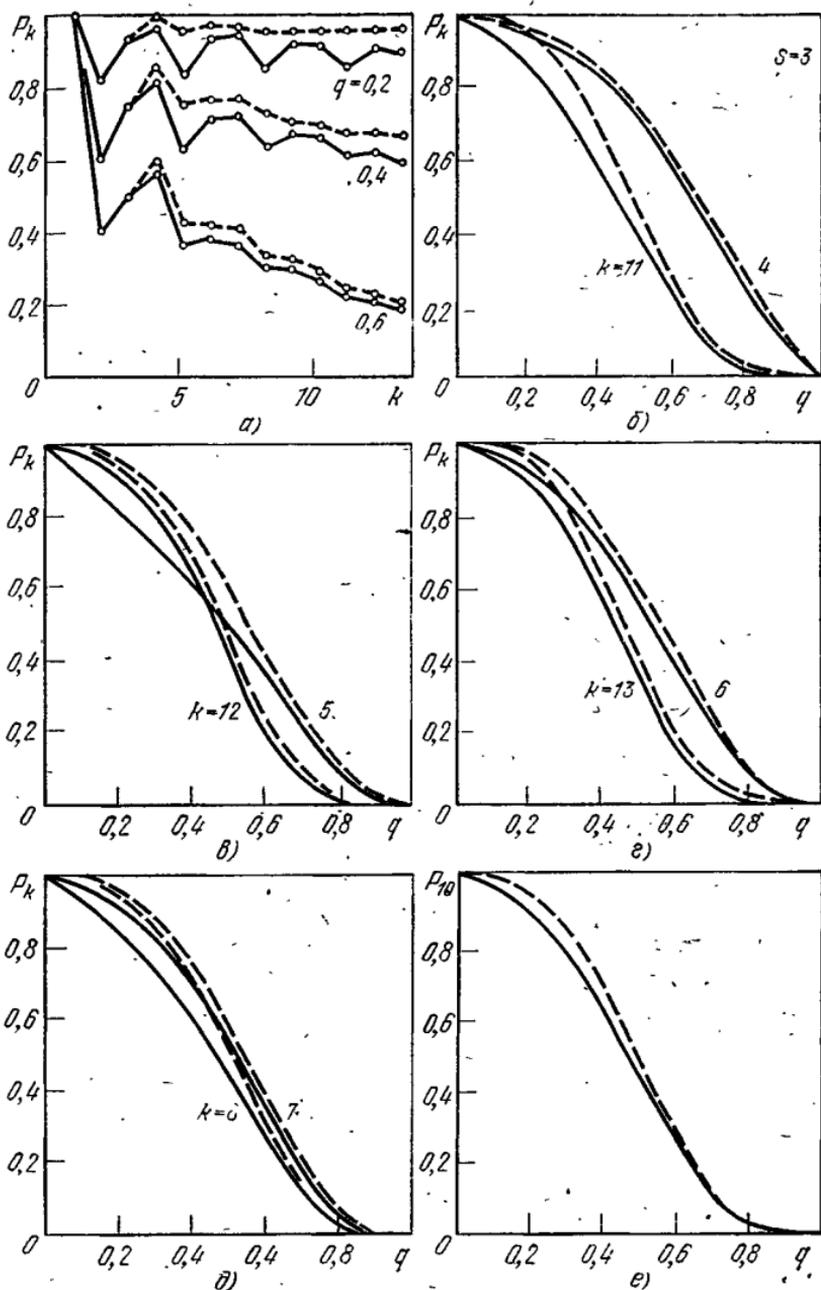


Рис. 6.16. Зависимость вероятности работоспособного состояния трехсвязной системы без оповещения от ранга системы и надежности линий связи:

— приоритеты  $i, i-3$ ;  $i, i-2$ ;  $i, i-1$ ; — — — оптимальные приоритеты

Номер узла	Ряд приоритетности	Область оптимальности	Расчетная формула
4	41, 43, 42	$0 < q < 1$	$p(1 + pq(1 + q + pq))$
5	54, 53, 52	$0 < q < 1$	$p^2(1 + q(1 + p)(1 + q + pq))$
6	64, 65, 63	$0 < q < 0,382$	$p^2((1 + q^2)(1 + pq) + pq(1 + q + pq^2)^2)$
7	74, 76, 75	$0 < q < 0,61$	$p^2((1 + pq(1 + q + pq))^2 + pq^3(q(1 + p) + (1 + pq)(2 + p)))$
8	87, 86, 85	$0 < q < 0,41$	$p^2(1 + q + pq)(1 + 2q^3(1 + p)^2) + p^3q(1 + q + pq)^2 + pq^2(1 + p) \times (1 + p + pq^2)$
9	97, 96, 98	$0 < q < 0,41$	$p(qP_7 + qP_6 + q^2P_8)$
10	10, 7; 10, 9; 10, 8	$0 < q < 0,23$	$p(P_7 + qP_9 + q^2P_8)$
11	11, 9; 11, 8; 11, 10	$0 < q < 0,23$	$p(P_9 + qP_8 + q^2P_{10})$
12	12, 9; 12, 10; 12, 11	$0 < q < 1$	$p(P_9 + qP_{10} + q^2P_{11})$
13	13, 10; 13, 11; 13, 12	$0 < q < 1$	$p(P_{10} + qP_{11} + q^2P_{12})$
14	14, 11; 14, 12; 14, 13	$0 < q < 1$	$p(P_{11} + qP_{12} + q^2P_{13})$

#### 6.4. НАДЕЖНОСТЬ ПЕРЕДАЧИ МНОГОАДРЕСНЫХ СООБЩЕНИЙ В ОРИЕНТИРОВАННЫХ СЕТЯХ

До сих пор в данной главе рассматривалась либо задача связности двух узлов в двухполюсной структуре, либо задача надежности передачи сообщений из единственного источника одному адресату (одноадресных сообщений). В реальных информационных сетях существуют режимы функционирования, когда группа узлов ведет передачу сообщений в направлении нескольких узлов, причем каждое сообщение адресуется

не одному, а нескольким узлам. Такие сообщения называются многоадресными, а режим работы сети — передачей многоадресных сообщений. Сеть считается работоспособной, если все сообщения доведены до всех предусмотренных адресатов. Задача описания условий работоспособности сети очень трудна в словесной ее формулировке, так как возникает большое число состояний, требующих перебора. Поэтому для формализации задачи надежности необходимо применить аппарат алгебры логики. В общем случае эта задача формулируется так.

Пусть известно множество  $M_1$  узлов — источников информации, каждый из которых ведет передачу многоадресных сообщений в направлении узлов множества  $M_{2i}$ ,  $i \in M_1$ . Обозначим логическую функцию связности узлов  $i$  и  $j$  (или логическую функцию успешности передачи сообщений между узлами  $i$  и  $j$ ) через  $f_{ij}$ . Тогда условие успешности доведения многоадресного сообщения до всех адресатов описывается функцией  $f_i = \bigwedge_{j \in M_i} f_{ij}$ . Логическая ФРС

$$f = \bigwedge_{(i)} f_i = \bigwedge_{i \in M_1} \bigwedge_{j \in M_{2i}} f_{ij}. \quad (6.81)$$

В частности, в системе из  $n$  узлов может проводиться передача сообщений из всех узлов в направлении узла 1, тогда  $M_1 = e_1$  и вместо (6.81) имеем

$$f_n = \bigwedge_{i=2}^n f_{i1}. \quad (6.82)$$

Если же полюс  $n$  ведет передачу в направлении всех узлов, с которыми имеет связь, то  $M_1 = e_n$  и ФРС имеет вид

$$f_n = \bigwedge_{j=1}^{n-1} f_{nj}. \quad (6.83)$$

Система работоспособна, если  $f=1$ , а вероятность доставки информации (вероятность работоспособного состояния)  $R_c = P(f=1)$ . Рассмотрим теперь три частных случая.

### Сбор информации в полносвязной сети

Полносвязная система из  $n$  узлов работает в режиме сбора информации от узлов  $2-n$  в узел 1 в условиях полного оповещения о состоянии сети. Логическая

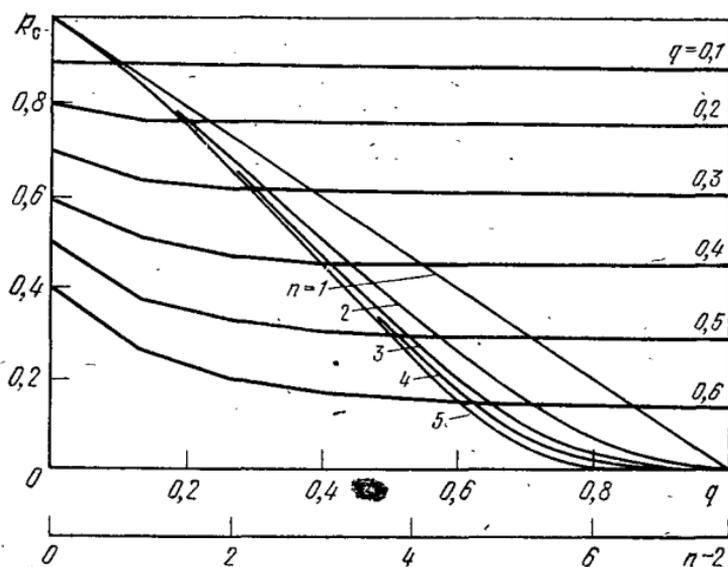


Рис. 6.17. Зависимость вероятности работоспособного состояния полностью связанной системы при передаче многоадресных сообщений от ранга системы и надежности линий связи

функция работоспособности сети определяется по формуле (6.82), а функции  $f_{i1}$  имеют вид

$$f_{i1} = x_i (x_{i1} f_{11} \vee x_{i2} f_{21} \vee \dots \vee x_{i, i-1} f_{i-1, 1}), \quad i = \overline{2, n}; \quad f_{11} = x_1. \quad (6.84)$$

Подставим выражение для  $f_{i1}$  в (6.82) и проведем поглощение:

$$f_n = x_n (x_{n1} x_1 \vee x_{n2} f_{21} \vee \dots \vee x_{n, n-1} f_{n-1, 1}) f_{21} f_{31} \dots f_{n-1, 1} = \\ = x_n x_n \left( \bigvee_{i=1}^{n-1} x_{ni} \right) f_{n-1}. \quad (6.85)$$

Используя (6.85) как рекуррентное выражение, получаем зависимость  $f_n$  от логических переменных

$$f_n = \bigwedge_{i=1}^n x_i \bigwedge_{i=2}^n \left( \bigvee_{j=1}^{i-1} x_{ij} \right). \quad (6.86)$$

Здесь все переменные неповторные. Поэтому проводим полное замещение:

$$R_c = P_n = \prod_{i=1}^n R_i \prod_{i=2}^n \left( 1 - \prod_{j=1}^{i-1} Q_{ij} \right). \quad (6.87)$$

В частности, при  $R_i = p_1$ ,  $R_{ij} = p_2 = 1 - q_2$  имеем

$$R_c = p_1^n p_2 (1 - q_2^2) (1 - q_2^3) \dots (1 - q_2^{n-1}). \quad (6.88)$$

Отсюда видно, что при увеличении ранга системы и числа узлов  $n$  определяющую роль играет надежность узлов. При достаточно надежных узлах вероятность  $R_c$  уменьшается незначительно с ростом  $n$  (рис. 6.17).

### Передача многоадресного сообщения одним узлом всем узлам в полносвязной сети

В полносвязной ориентированной сети из  $n$  узлов узел передает одно и то же сообщение узлам  $1, n-1$  в условиях полного оповещения. Логическая ФРС определяется формулой (6.83), а функции  $f_{nj}$  имеют вид

$$f_{nj} = x_n x_j (x_{nj} \vee x_{n-1, j} f_{n, n-1} \vee \dots \vee x_{n-2, j} f_{n, n-2} \vee \dots \vee x_{j+1, j} f_{n, j+1}), \quad j = 1, n-1. \quad (6.89)$$

Подставим (6.89) при  $j=1$  в (6.83) и проведем поглощение:

$$\begin{aligned} f_n &= x_n x_1 (x_{n1} \vee x_{n-1, 1} f_{n, n-1} \vee \dots \vee x_{2, 1} f_{n2}) f_{n2} f_{n3} \dots f_{n, n-1} = \\ &= x_n x_1 \left( \bigvee_{i=2}^n x_{i1} f_{n1} \right). \end{aligned} \quad (6.90)$$

Используя (6.90) как рекуррентное соотношение, получаем

$$f_n = \bigwedge_{i=1}^n x_i \bigwedge_{j=1}^{n-1} \left( \bigvee_{i=j+1}^n x_{ij} \right). \quad (6.91)$$

Отсюда

$$R_c = P_n = \prod_{i=1}^n R_i \prod_{j=1}^{n-1} \left( 1 - \prod_{i=j+1}^n Q_{ij} \right). \quad (6.92)$$

При одинаковых значениях вероятностей  $Q_{ij}$  формула (6.92) совпадает с (6.87). Вероятности  $R_c$  совпадают и при  $Q_{ij} = (i-j)q_2$ . Различия в надежности систем в обоих режимах появляются, когда вероятности  $Q_{ij}$  изменяются в зависимости от  $i$ , например, так:  $Q_{ij} = Q_0 + iq_1 + (i-j)q_2$ .

## Передача многоадресных сообщений всеми узлами в полносвязной сети

В полносвязной ориентированной сети из  $n$  узлов в узлы 2,  $n$  ведут передачу сообщений, адресованных всем доступным узлам. Оповещение о состоянии сети полное. Сеть работоспособна, если все сообщения доставляются по всем указанным адресам. Логическую функцию работоспособности сети можно записать через рекуррентное соотношение

$$f_n = x_n f_{n1} f_{n2} \dots f_{n, n-1} f_{n-1}, \quad (6.93)$$

где

$$f_{ni} = x_{ni} \vee x_{n, i+1} f_{i+1, i} \vee \dots \vee f_{n-1, i} x_{n, n-1}, \quad [i = 1, n-1]. \quad (6.94)$$

Явное выражение для  $f_n$  можно получить методом полной математической индукции. Для  $n=3$  и 4

$$\begin{aligned} f_3 &= x_3 f_{31} f_{32} f_2 = x_3 (x_{31} \vee x_{32} x_2 x_{21}) \times \\ &\quad \times x_{32} x_2 x_{21} x_1 = x_1 x_2 x_3 x_{32} x_{21}, \\ f_4 &= x_4 f_{41} f_{43} f_3 = x_4 (x_{41} \vee x_{42} f_{21} \vee x_{43} f_{31}) \times \\ &\quad \times (x_{42} \vee x_{43} x_3 x_{32}) x_{43} f_3 = x_1 x_2 x_3 x_4 x_{43} x_{32} x_{21}. \end{aligned}$$

Пусть

$$f_{n-1} = x_{n-1} \bigwedge_{i=1}^{n-2} (x_i x_{i+1, i}). \quad (6.95)$$

Покажем, что тогда верно выражение

$$f_n = x_n \bigwedge_{i=1}^{n-1} (x_i x_{i+1, i}). \quad (6.96)$$

Подставим (6.94) в (6.93), а  $f_{n-1}$  выразим через  $f_{n-2}$ :

$$\begin{aligned} f_n &= x_n x_{n, n-1} \bigwedge_{i=1}^{n-2} (x_{ni} \vee x_{n, i+1} f_{i+1, i} \vee \dots \\ &\quad \dots \vee x_{n, n-1} f_{n-1, i}) (x_{n-1} f_{n-1, 1} \dots f_{n-1, n-2} f_{n-2}). \end{aligned}$$

Упростим это выражение с помощью операции поглощения:

$$f_n = x_n x_{n, n-1} f_{n-1}.$$

Подставив сюда (6.95), приходим к (6.96). Замещение в (6.96) дает

$$R_c = P_n = R_n \prod_{i=1}^{n-1} R_i R_{i+1, i}. \quad (6.97)$$

Получился очень интересный результат. В полностью связанной сети вероятность работоспособного состояния определяется только надежностью узлов и смежных линий связи и не зависит от надежности других линий связи. Это значит, что структурная избыточность не улучшает надежность системы. Заметим, что этот результат получен только с помощью алгебры логики без привлечения каких-либо дополнительных вероятностных соображений.

В заключение главы заметим, что рассмотренная выше методика анализа надежности с помощью модифицированного ЛВМ полностью применима и для систем со структурой в виде неориентированных графов, хотя при этом и возникают дополнительные трудности, вызванные существенным увеличением числа различных путей между полюсами и сокращением числа бесповторных переменных ФАЛ. Преодолению этих трудностей в известной степени способствуют свойства модифицированного ЛВМ. Так после записи ФРС с помощью системы логических уравнений вида (2.11), (2.12) нет необходимости в ее решении по правилам § 2.4, а переход к СФФВ осуществляется непосредственно от функции вида (6.1), которая является ФПЧЗ. В дальнейшем выполняется многошаговая процедура замещения логических переменных СФФВ и переход к ВФ. На этом этапе полезно использовать свойство смешанной формы типа (1.85), состоящее в том, что в каждом из слагаемых допускается независимое замещение переменных. Это позволяет увеличить число переменных, замещаемых за один шаг, и быстро довести замещение до конца. С помощью модифицированного ЛВМ, в частности, можно проанализировать системы, рассмотренные в примерах 3.1—3.6.

Подведем итоги результатам, приведенным в данной главе.

1. Модифицированный ЛВМ наиболее успешно применяется при анализе надежности ориентированных двухполюсных сетей. Ручному анализу доступны системы, содержащие несколько десятков элементов (в одном

из примеров около 40). Анализировать неориентированные системы сложнее, так как при одних и тех же элементах и связях между ними число различных путей между полюсами в ней гораздо больше, чем в ориентированной. Однако и в этом случае число элементов в системах, доступных ручному анализу, достигает нескольких десятков (в одном из примеров 26).

2. Модифицированный. ЛВМ, как и другие ЛВМ, легко формализуется, для их реализации можно использовать ЭВМ. Авторы располагают программами для расчета показателей надежности на ЭВМ «Мир-2» и ЕС ЭВМ, с помощью которых при затратах машинного времени от десятков секунд до нескольких минут можно анализировать надежность систем, состоящих из ста элементов и более. Это время существенно меньше, чем при статистическом моделировании. Важным фактором ускорения расчетов является также запись функции работоспособности в виде системы логических уравнений и отсутствие необходимости ее решения в исходной форме.

3. Дополнительным фактором уменьшения трудоемкости расчетов, характерным для модифицированного ЛВМ, является переход к приближенным формулам в результате отбрасывания некоторых членов в смешанной форме на промежуточных стадиях замещения логических переменных или замены незамещенных логических функций упрощенными. Это возможно потому, что смешанная форма может быть вычислена на любой стадии замещения и может быть оценен порядок всех входящих в нее слагаемых.

## Глава 7

### АНАЛИЗ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ИНФОРМАЦИОННОЙ НАГРУЗКИ УЧАСТКОВ СЕТИ

#### 7.1. ПОКАЗАТЕЛИ ИНФОРМАЦИОННОЙ НАГРУЗКИ УЧАСТКОВ СЕТИ

При избирательной передаче сообщений в многосвязных информационных сетях для каждой пары узлов назначается основной маршрут, по которому происходит передача, если все элементы сети работоспособны и этот маршрут не перегружен. Если алгоритм выбора маршрута не учитывает размеры очередей сообщений на узлах, то

единственной причиной изменения маршрута остаются отказы элементов сети — транзитных узлов и линий связи. Это означает, что перераспределение информационных потоков является следствием ненадежности элементов сети. Нахождение распределения информационных потоков является одной из важных задач проектирования информационных сетей.

В двухполюсной системе в каждый момент времени существует единственный выбранный маршрут, по которому может вестись передача сообщений между полюсами. Поэтому процесс функционирования системы можно рассматривать как случайный процесс переключения маршрутов в моменты отказов и восстановлений в соответствии с принятым алгоритмом. Если в системе имеется всего  $m$  различных путей между полюсами, то можно ввести  $m$  состояний  $e_i$  и случайных значений времени  $\xi_i$  пребывания в этих состояниях. Обозначим через  $P_i$  среднюю долю времени пребывания системы в состоянии  $e_i$  на стационарном участке эксплуатации. При постоянной интенсивности сообщений, поступающих на вход двухполюсной системы,  $P_i$  характеризует среднюю долю всех сообщений поступающих от одного полюса к другому по  $i$ -му пути, и может трактоваться как коэффициент информационной нагрузки пути. Одновременно  $P_i$  можно трактовать как вероятность того, что сообщение, поступившее в систему в произвольный момент времени, застанет систему в состоянии, когда  $i$ -й путь работоспособен и выбран для передачи данного сообщения. В дальнейшем распределение  $\{P_i\}$  будем называть распределением информационной нагрузки путей.

Информационная нагрузка узлов и линий связи характеризуется с помощью распределения вероятностей  $P_i$  и  $P_{ij}$  соответственно. Вероятность  $P_i$  есть средняя доля времени, в течение которого используются пути, содержащие в своем составе  $i$ -й узел. Одновременно  $P_i$  можно рассматривать как вероятность того, что поступившее в произвольный момент сообщение пройдет через  $i$ -й транзитный узел. Аналогично определяется вероятность  $P_{ij}$  использования линии связи  $ij$ . Тот же подход и аналогичные рассуждения можно применить для определения вероятностей использования других более крупных участков сети: группы путей, отрезка пути из нескольких линий связи и узлов, группы узлов и т. д.

Кроме безусловной стационарной вероятности использования  $i$ -го элемента (или участка сети) для характеристики информационной нагрузки полезно также использовать стационарную вероятность использования  $i$ -го элемента  $P_{yi}$  при условии, что в момент прихода заявки элемент работоспособен. Вероятность  $P_{yi}$  выражает среднюю долю времени пребывания элемента в работоспособном состоянии, в течение которого согласно алгоритму выбора маршрута элемент используется при взаимодействии полюсов. Очевидно, что  $P_{yi} = P_i / K_{vi}$ , где  $K_{vi}$  — коэффициент готовности  $i$ -го элемента.

Важной особенностью задачи определения вероятностных характеристик информационной нагрузки является их зависимость от алгоритмов выбора маршрутов и условий оповещения о состоянии сети. Разнообразие сведений, которые необходимо учитывать для расчета характеристик, делают задачу очень сложной. Однако именно здесь в наибольшей степени проявляются преимущества ЛВМ перед другими методами, использующими неформализованные комбинаторные соображения.

Заметим, что задача определения информационной нагрузки не является задачей надежности в традиционном ее понимании, хотя и

требует сведений о надежности элементов системы. Как и задачу нахождения коэффициентов использования оборудования, данную задачу можно отнести к задачам эффективности. Результаты ее решения можно использовать при разработке алгоритмов управления на сети, выборе методов и глубины структурного резервирования, расчетах объемов буферной памяти и времени доставки информации.

## 7.2. ХАРАКТЕРИСТИКИ ИНФОРМАЦИОННОЙ НАГРУЗКИ ПУТЕЙ И ГРУППЫ ПУТЕЙ ПРИ ПОЛНОМ ОПОВЕЩЕНИИ О СОСТОЯНИИ СЕТИ

Рассмотрим двухполюсную ориентированную сеть произвольной структуры. В условиях полного оповещения о состоянии сети алгоритм выбора маршрута может базироваться на ряде приоритетности путей. Ряд приоритетности составляется с учетом количества транзитных узлов, входящих в путь, пропускной способности направленной связи, надежности и других технических характеристик элементов сети. Он задается заранее на стадии проектирования и может перестраиваться в процессе функционирования системы, адаптируясь к состоянию сети. Перенумеруем пути в порядке их расположения в ряду приоритетности и составим для  $i$ -го пути элементарную конъюнкцию

$$K_i = x_1 \bigwedge_{(j)} (x_j x_{jk}), \quad j, k \in M_i, \quad (7.1)$$

где  $M_i$  — множество узлов, входящих в путь.

Составим теперь логическую функцию нагрузки пути  $f_i$ . В общем случае логическая функция нагрузки пути выражает условия его работоспособности и выбора для передачи по нему информации между полюсами в соответствии с принятым алгоритмом управления потоками на сети. Если выбор проводится с помощью ряда приоритетности, то  $i$ -й путь используется в том случае, когда он работоспособен, но не работоспособен ни один путь, расположенный ранее в ряду приоритетности и обладающий более высоким приоритетом. Поэтому

$$f_i = \left( \bigvee_{j=1}^{i-1} K_j \right)' K_i = B'_i K_i. \quad (7.2)$$

Формула (7.2) упрощается, если использовать тождество (1.61а). При этом обычно удается сделать все переменные бесповторными и провести полное замещение. Если же некоторые переменные повторяются, то они переводятся в смешанной форме в показатели степени и замещаются на следующих этапах.

Для группы путей  $A$ , расположенных рядом в ряду приоритетности, логическая функция нагрузки имеет вид

$$f_A = \bigvee_{v=1}^{i-1} K'_v \left( \bigvee_{v=i}^j K_v \right) = \bigvee_{r=1}^{n-1} (x_{nr} f_r)' \left( \bigvee_{r=1}^{n-1} x_{nr} g_r \right); \quad (7.3)$$

Частичное замещение в (7.3) проводится с помощью теоремы 8 гл. 1 и формулы (1.82):

$$P_A = P(f_A = 1) = \prod_{r=1}^{n-1} Q_{nr}^{f_r} \left( 1 - \prod_{r=1}^{n-1} Q_{nr}^{f'_r g_r} \right). \quad (7.4)$$

Если пути расположены так, что образуют две группы в ряду приоритетности  $A_2$  и  $A_4$ , разделенные группой  $A_3$ , то логическая функция нагрузки путей группы  $A = A_2 \vee A_4$  имеет вид

$$f_A = B'_1 (B_2 \vee B'_2 B'_3 B_4), \quad B_i = \bigvee_{(j)} K_j, \quad j \in A_i, \quad i = \overline{1, 4}. \quad (7.5)$$

Если в группу  $A_i$  входит  $m_i$  путей, то (7.5) представляется в виде

$$f_A = \bigwedge_{i=1}^{m_1} K'_i \left( \bigwedge_{i=m_1+1}^{m_1+m_2} K_i \vee \bigwedge_{i=m_1+1}^{m_1+m_2+m_3} K'_i \cdot \bigwedge_{j=m_1+m_2+m_3+1}^{m_1+m_2+m_3+m_4} K_j \right). \quad (7.6)$$

Слагаемые в (7.6) ортогональны, и в них замещение проводится независимо. Учитывая, что каждое слагаемое имеет структуру формулы (7.2), для замещения в каждом из них можно использовать формулу (7.4):

$$P_A = P(f_A = 1) = \prod_{i=1}^{n-1} Q_{ni}^{f_i^{(1)}} \left( 1 - \prod_{i=1}^{n-1} Q_{ni}^{(f_i^{(1)})' g_i^{(1)}} \right) + \prod_{i=1}^{n-1} Q_{ni}^{f_i^{(2)}} \left( 1 - \prod_{i=1}^{n-1} Q_{ni}^{(f_i^{(2)})' g_i^{(2)}} \right). \quad (7.7)$$

Аналогично составляются формулы и в случае, когда группа путей  $A$  образует в ряду приоритетности более двух изолированных подгрупп. Рассмотрим примеры.

**Пример 7.1.** В полностью связанной сети из пяти узлов с полным оповещением ряд приоритетности путей имеет вид: 1) 52, 2) 541, 3) 531, 4) 521, 5) 5431, 6) 5421, 7) 5321, 8) 54321. Необходимо найти распределение вероятностей информационной нагрузки путей, считая, что все узлы работоспособны с вероятностью  $p_1$ , а линии связи с вероятностью  $p_2$ .

*Решение.* Логические функции нагрузки

$$\begin{aligned} f_1 &= x_5 x_{51} x_1, \quad f_2 = x'_5 x'_{51} x_4 x_{41} x_1, \\ f_3 &= x'_5 x'_1 (x_{54} x_4 x_{41})' x_5 x_{53} x_3 x_3 x_1, \\ f_4 &= x'_5 x'_{51} (x_{54} x_4 x_{41})' (x_{53} x_3 x_{31})' x_5 x_{52} x_2 x_{21} x_1, \\ f_5 &= x'_5 x'_{51} x'_{53} x'_{41} (x_{52} x_2 x_{21})' x_5 x_{54} x_4 x_{43} x_3 x_3 x_1, \\ f_6 &= x'_5 x'_{51} x'_{52} x'_{41} (x_3 x_{31} (x_{43} \vee x_{53}))' x_5 x_{54} x_4 x_{42} x_2 x_{21} x_1, \\ f_7 &= x'_5 x'_{51} x'_{52} x'_{31} (x_{54} x_4 (x_{41} \vee x_{42}))' x_5 x_{53} x_3 x_{32} x_2 x_{21} x_1, \\ f_8 &= x'_5 x'_{51} x'_{52} x'_{53} x'_{41} x'_{42} x'_{31} x_5 x_{54} x_4 x_{43} x_3 x_{32} x_2 x_{21} x_1 \end{aligned} \quad (7.8)$$

Отсюда после полного замещения получим

$$\begin{aligned}
 P_1 &= R_5 R_{51} R_1, \quad P_2 = Q_{51} R_{54} R_4 R_{41} R_1, \\
 P_3 &= R_3 R_5 R_{53} R_{31} R_1 Q_{51} (1 - R_{54} R_4 R_{41}), \\
 P_4 &= Q_{51} R_5 R_{52} (1 - R_{54} R_4 R_{41}) (1 - R_{53} R_3 R_{31}) R_2 R_{21} R_1, \\
 P_5 &= Q_{51} Q_{53} Q_{41} (1 - R_{52} R_2 R_{21}) R_5 R_{54} R_4 R_{43} R_3 R_{31} R_1, \\
 P_6 &= Q_{51} Q_{52} Q_{41} (1 - R_3 R_{31} (1 - Q_{43} Q_{53})) R_5 R_{54} R_4 R_{42} R_2 R_{21} R_1, \\
 P_7 &= Q_{51} Q_{52} Q_{31} (1 - R_{54} R_4 (1 - Q_{41} Q_{42})) R_5 R_{53} R_3 R_{32} R_2 R_{21} R_1, \\
 P_8 &= Q_{51} Q_{52} Q_{53} Q_{41} Q_{42} Q_{31} R_5 R_{54} R_4 R_{43} R_3 R_{32} R_2 R_{21} R_1.
 \end{aligned}$$

При одинаковой надежности всех узлов и всех линий связи

$$\begin{aligned}
 P_1 &= p^2_1 p_2, \quad P_2 = q_2 p^3_1 p^2_2, \quad P_3 = q_2 p^3_1 p^2_2 (1 - p_1 p^2_2), \\
 P_4 &= q_2 p^3_1 p^2_2 (1 - p_1 p^2_2)^2, \quad P_5 = q^3_2 p^4_1 p^3_2 (1 - p_1 p^2_2), \\
 P_6 &= P_7 = q^3_2 (1 - p_1 p_2 (1 - q^2_2)) p^4_1 p^3_2, \quad P_8 = q^6_2 p^5_1 p^4_2. \quad (7.9)
 \end{aligned}$$

Результаты расчетов по формулам (7.9) при  $q_1=0$  приведены на рис. 7.1,а, из которого видно, что вероятность  $P_i$  с увеличением номера пути уменьшается не пропорционально. При достаточно больших  $q$  ( $q > 0,2$ ) близкую друг к другу среднюю нагрузку имеют пути одинаковой длины (с номерами 1, 2—4, 5—7 и 8) (рис. 7.1,б).

Внутри второй и третьей групп меньшую нагрузку имеют пути с более низким приоритетом. Интересно отметить, что пути 5—8 имеют среднюю нагрузку ниже уровня потерь ( $i=9$ ). Это может служить основанием для упрощения алгоритма выбора маршрута за счет исключения из него путей 5—8. Для всех путей, кроме первого, средняя нагрузка сначала растет, достигает некоторого максимума, а затем начинает уменьшаться. В пределах каждой из указанных групп экстремальные значения  $P_i$  близки друг к другу, хотя и достигаются при различных значениях  $q$ . В то же время при малых  $q$  значения  $P_i$  отличаются существенно (при  $q=0,1$  примерно на порядок).

Для рассматриваемой системы представляет интерес расчет суммарной средней нагрузки групп путей с одинаковым числом транзитных узлов. Для второй и третьей группы логические функции нагрузки

$$\begin{aligned}
 \Phi_2 &= x'_{51} (x_{54} x_4 x_{41} \vee x_{53} x_3 x_{31} \vee x_{52} x_2 x_{21}) x_1, \\
 \Phi_3 &= x'_{51} (x_{52} x_2 x_{21})' (x_{53} x_3 x_{31})' (x_{54} x_4 x_{41})' (x_{54} x_4 (x_{43} x_3 x_{31} \vee x_{42} x_2 x_{21}) \vee \\
 &\quad \vee x_{53} x_3 x_{32} x_2 x_{21}) x_5 x_1.
 \end{aligned}$$

В первой функции все переменные неповторные. Поэтому

$$P(\Phi_2=1) = Q_{51} R_5 R_1 (1 - (1 - R_{54} R_4 R_{41}) (1 - R_{52} R_2 R_{21}) (1 - R_{53} R_3 R_{31})).$$

Для  $\Phi_3$  воспользуемся теоремой 8 гл. 1 и проведем замещение

$$\begin{aligned}
 P(\Phi_3=1) &= R_1 R_5 Q_{51} (1 - R_{54} R_4)^{x_{41}} Q_{52}^{x_2 x_{21}} Q_{53}^{x_3 x_{31}} (1 - (1 - \\
 &\quad - R_{54} R_4)^{x'_{41}} (x_{43} x_3 x_{31} \vee x_{42} x_2 x_{21}) Q_{53}^{x'_{31} x_3 x_{32} x_2 x_{21}}).
 \end{aligned}$$

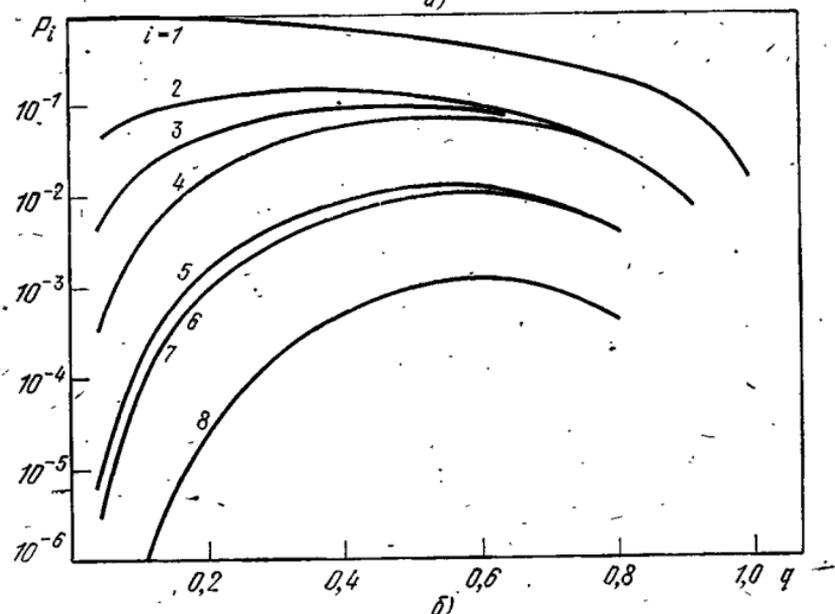
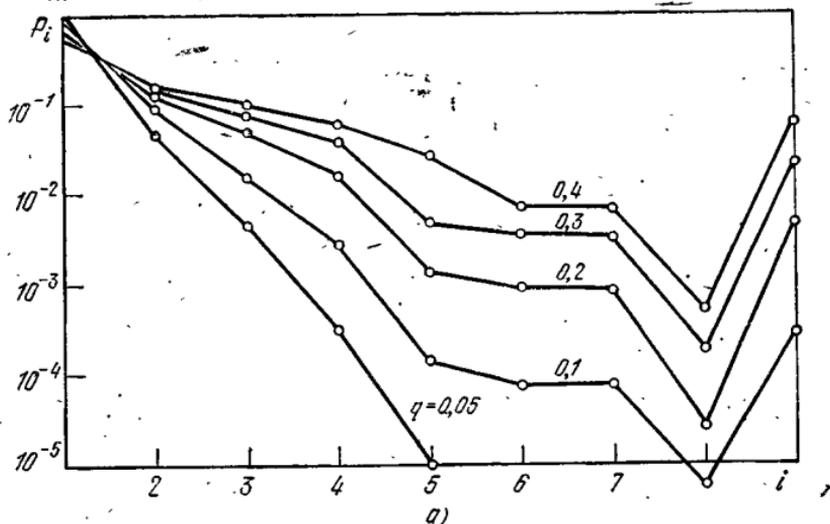


Рис. 7.1. Распределение информационной нагрузки по различным путям в полностью связанной системе с полным оповещением

В этом выражении последовательно замечаем  $x_2x_{21}$ ,  $x_{31}$ ,  $x_3$ ,  $x_{32}$ ,  $x_{42}$ ,  $x_{43}$ :

$$\begin{aligned}
 P(\Phi_3=1) = & \{Q_{52}R_2R_{21}[R_{41}R_{53}R_3R_{32}Q_{31}(1-R_{54}R_4) + \\
 & + R_{31}Q_{41}R_{54}R_4(R_3Q_{53}(1-Q_{42}Q_{43}) + Q_3R_{42}) + Q_{31}Q_{41}[R_3R_{32}(R_{42}(R_{53} + \\
 & + Q_{53}R_{54}R_4) + Q_{42}R_{53}) + (1-R_3R_{32})R_{54}R_4R_{42}]\} + \\
 & + Q_{41}Q_{53}(1-R_2R_{21})R_{54}R_4R_{43}R_3R_{31}R_5R_1Q_{51}. \quad (7.10)
 \end{aligned}$$

При  $R_i = p_i = 1 - q_1$ ,  $R_{ij} = p_{ij} = 1 - q_2$

$$P(\Phi_3=1) = p_{41}p_{32}q_2^2[1 - p_4p_2 + q_1p_2 + (1+q_2)(1 - p_2^2p_1 + p_1p_2q_2)].$$

**Пример 7.2.** Информационная сеть со структурой, изображенной на рис. 7.2, работает в условиях полного оповещения о состоянии сети. Дерево путей приведено на рис. 7.3, а по периметру указаны номера путей в ряду приоритетности. Необходимо найти вероятность использования пути 75321.

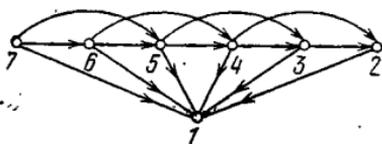


Рис. 7.2. Структура двух-полюсной информационной сети

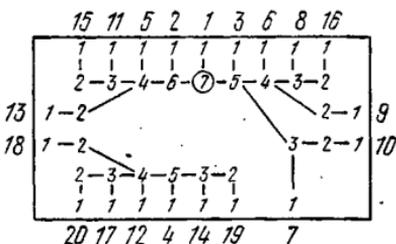


Рис. 7.3. Дерево путей с рядом приоритетности

**Решение.** Логическая функция нагрузки пути 10 составляется в соответствии с (7.2):

$$f_{10} = B'_1 B_2, \quad B'_1 = x'_{71} (x_{76} x_6 (x_{61} \vee x_{64} x_4 x_{41} \vee x_{65} x_5 x_{51}))' (x_{51} \vee \vee x_{53} x_3 x_{31} \vee x_{54} x_4 (x_{41} \vee x_{43} x_3 x_{31} \vee x_{42} x_2 x_{21}))', \\ B_2 = x_7 x_{75} x_5 x_{53} x_3 x_{32} x_2 x_{21} x_1.$$

После упрощения получим

$$\bar{f}_{10} = x'_{71} (x_{76} x_6 (x_{61} \vee x_{64} x_4 x_{41}))' x'_{51} x'_{31} (x_{54} x_4 (x_{41} \vee x_{42}))' B_2. \quad (7.11)$$

Проведем здесь замещение бесповторных переменных:

$$P_{10}(x_i) = P(f_{10} = 1) = C (1 - R_7 R_6 (1 - Q_{61} Q_{64}^{x_{41}})) Q_{64}^{x_{41} \vee x_{42}},$$

$$C = Q_{51} Q_{71} Q_{31} R_7 R_{75} R_5 R_{53} R_3 R_{32} R_2 R_{21} R_1.$$

После замещения остальных переменных

$$P_{10} = C [R_4 R_{41} Q_{54} (1 - R_7 R_6 (1 - Q_{61} Q_{64})) + R_4 Q_{41} (1 - R_7 R_6 R_6 R_{61}) \times \times (1 - R_{54} R_{42}) + Q_4 (1 - R_7 R_6 R_{61})] \quad (7.12)$$

В частности, при  $R_i = p_i = 1 - q_i$ ,  $R_{ij} = p_{ij} = 1 - q_{ij}$

$$P_{10} = q^3 p^6 p^5_1 [p_1 p_2 q_2 (1 - p_1 p_2 (1 - q^2_2)) + + (1 - p_1 p^2_2) (p_1 q_2 (1 - p^2_2) + q_1)]. \quad (7.13)$$

На этом примере можно проиллюстрировать еще одну возможность, которую предоставляет ЛВМ разработчикам информационных сетей. По логическим функциям  $f_i$  удобно наблюдать влияние места пути в ряду приоритетности на среднюю нагрузку пути, не вычисляя вероятностей  $P_i$ . Проанализируем последствия некоторых переме-

ний в ряду приоритетности. Установим путь 75321 на 12 место, в ряду приоритетности, переместив пути 76431 и 76541 соответственно на места 10 и 11 и введем для функций  $f$  двойной индекс. Первый индекс будет указывать место пути в ряду, приведенном на рис. 7.3, а второй — новое место того же пути в ряду приоритетности. Тогда

$$f_{10,12} = B'_1 B_2 (x_{76} x_{60} x_{64} x_{41} x_{43} x_{31})' (x_{76} x_{60} x_{65} x_{54} x_{41})'. \quad (7.14)$$

Сравнив (7.14) с (7.11), видим, что первая дополнительная конъюнкция поглощается переменной  $x'_{31}$ , а вторая — членом  $(x_{54} x_{41})'$ , входящими в (7.11). Поэтому

$$f_{10,12} = B'_1 B_2 = f_{10,10}.$$

Это означает, что изменение положения пути не повлияло на его среднюю нагрузку. Очевидно, что перестановка путей 75321 и 76541 приводит к тому же результату. Нагрузка пути 76541 не изменится, если поставить его на место 15, увеличивая приоритеты путей 76421, 764321 и 754321, стоящих в исходном ряду на местах 13, 15 и 16 соответственно. При этом не изменится нагрузка и этих трех путей. Чтобы убедиться в этом, составим функции  $f_{ij}$ . Сохраняя за конъюнкциями  $K_i$  индекс в соответствии с рядом приоритетности, приведенном на рис. 7.3, запишем

$$f_{12,15} = \left( \bigvee_{i=1}^{11} K_i \right)' (K_{13} \vee K_{15})' K'_{16} K_{12}, \quad (7.15)$$

$$K_{12} = x_7 x_{76} x_6 x_{65} x_5 x_{54} x_4 x_{41} x_1,$$

$$f_{13,13} = \left( \bigvee_{i=1}^{11} K_i \right)' (x_{65} x_5 x_{54} x_{41})' K_{13}, \quad (7.16)$$

$$f_{15,15} = \left( \bigvee_{i=1}^{11} K_i \right)' (x_{76} x_6 (x_{65} x_5 (x_{54} x_4 x_{41} \vee x_{53} x_3 x_{31}) \vee \vee_{j=2}^4 x_{64} x_4 x_{42} x_2 x_{21}))' K_{15}, \quad (7.17)$$

$$f_{16,16} = \left( \bigvee_{i=1}^{11} K_i \right)' K'_{13} K'_{15} (x_{76} x_6 x_{65} x_5 (x_{54} x_4 x_{41} \vee x_{53} x_3 x_{31}))' K_{16}, \quad (7.18)$$

$$K_{13} = x_7 x_{76} x_6 x_{64} x_4 x_{42} x_2 x_{21} x_1,$$

$$K_{15} = x_{76} x_6 x_{64} x_4 x_{43} x_3 x_{32} x_2 x_{21} x_1 x_7,$$

$$K_{16} = x_7 x_{75} x_5 x_{54} x_4 x_{43} x_3 x_{32} x_2 x_{21} x_1.$$

Формулу (7.15) необходимо упростить, положив  $x_{76} x_6 = 1$ ,  $x_{41} = 1$ ,  $x_{54} x_4 = 1$  в  $B_1$ ,  $K_{13}$ ,  $K_{15}$ . После этого убеждаемся, что дополнительные сомножители в (7.15) поглощаются с помощью  $(x_{64} x_4)'$  и  $(x_7 x_5)'$ , входящими в  $B'_1$ . И тогда  $f_{12,15} = f_{12,12}$ . В формуле (7.16) полагаем равными единице в конъюнкциях  $K_i$ ,  $i=1, 12$ , все переменные, входящие в  $K_{13}$ . После этого убеждаемся, что дополнительный сомножитель поглощается с помощью  $x_{41}$ , входящего в  $K_5$ . Поэтому  $f_{13,13} = f_{13,12}$ . Аналогично устанавливаем, что в (7.17)  $K_{12}$  и  $K_{14}$  поглощаются с помощью  $x_{41}$  и  $x_{31}$ , входящими в  $K_5$  и  $K_{11}$ . Отсюда  $f_{15,15} = f_{15,13}$ . В (7.18) после упрощения  $K_{12}$  и  $K_{14}$  также поглощаются с помощью  $x_{31}$  и  $x_{41}$ . Поэтому  $f_{16,16} = f_{16,14}$ .

### 7.3. ХАРАКТЕРИСТИКИ ИНФОРМАЦИОННОЙ НАГРУЗКИ УЗЛОВ И ЛИНИЙ СВЯЗИ ПРИ ПОЛНОМ ОПОВЕЩЕНИИ О СОСТОЯНИИ СЕТИ

Задача поиска средней информационной нагрузки узла, линии связи или групп узлов и линий связи сводится к поиску средней информационной нагрузки групп путей, содержащих интересующий нас элемент сети. Если выделенная по этому признаку группа путей находится рядом в ряду приоритетности, т. е. пути не разделены другими путями, не входящими в эту группу, то логическая функция нагрузки и смешанная форма находятся соответственно по формулам (7.3) и (7.4). Если же они разделены другими путями на две подгруппы, то используются формулы (7.5) — (7.7). В общем случае, когда группа разделена на  $m$  подгрупп, для записи  $f_A$  применяется формула

$$f_A = B'_1(B_2 \vee B'_3(B_4 \vee \dots \vee B'_{2m-1}B_{2m}) \dots). \quad (7.19)$$

Эта форма функции еще не является ФПЧЗ. Для записи ФПЧЗ необходимо провести ортогонализацию дизъюнктивных членов. Раскрыв в (7.19) скобки, представим  $f_A$  в виде

$$f_A = \bigvee_{k=1}^m C_k, \quad C_k = \bigwedge_{i=1}^k B'_{2i-1}B_{2k}. \quad (7.20)$$

Проведем в (7.20) ортогонализацию слагаемых:

$$f_A = C_1 \vee C'_1 C_2 \vee C'_1 C'_2 C_3 \vee \dots \vee C'_1 C'_2 \dots C'_{k-1} C_k. \quad (7.21)$$

Выполняя упрощения с помощью формулы (1.61a) и группируя члены в скобки, получаем

$$f_A = B'_1(B_2 \vee B'_2 B'_3(B_4 \vee B'_4 B'_5(B_6 \vee \dots \vee B'_{2m-2} B'_{2m-1} B_{2m}) \dots)). \quad (7.22)$$

Здесь все слагаемые ортогональны и каждое слагаемое согласно теореме 10 гл. 1 является ФПЧЗ. При переходе к смешанной форме частичное замещение в каждом дизъюнктивном члене можно вести отдельно. Для этого необходимо воспользоваться теоремой 10 гл. 1. Представим  $B_j$  в виде

$$B_j = \bigvee_{i=1}^{n-1} x_n x_{ni} f_{ij}. \quad (7.23)$$

Подставим (7.23) в (7.22), раскроем скобки и преобразуем, используя формулу

$$\bigwedge_{i=1}^k B'_j = \left( \bigvee_{i=1}^{n-1} x_n x_{ni} (f_{i1} \vee f_{i2} \vee \dots \vee f_{ik}) \right)'$$

В результате получим

$$f_A = x_n \left( \left( \bigvee_{i=1}^{n-1} x_{ni} f_{i1} \right)' \left( \bigvee_{i=1}^{n-1} x_{ni} f_{i2} \right) \vee \right. \\ \left. \vee \left( \bigvee_{i=1}^{n-1} x_{ni} (f_{i1} \vee f_{i2} \vee f_{i3}) \right)' \left( \bigvee_{i=1}^{n-1} x_{ni} f_{i4} \right) \vee \dots \right. \\ \left. \dots \vee \left( \bigvee_{i=1}^{n-1} x_{ni} \left( \bigvee_{j=1}^{2m-1} f_{ij} \right)' \left( \bigvee_{i=1}^{n-1} x_{ni} f_{i, 2m} \right) \right) \right).$$

Тогда согласно теореме 10 смешанную форму можно записать в виде

$$P_A = P(f_A = 1) = R_n \sum_{k=1}^m \prod_{i=1}^{n-1} Q_{ni}^{g_{ik}} \left( 1 - \prod_{i=1}^{n-1} Q_{ni}^{g'_{ik}} f_{i,2k} \right), \quad (7.24)$$

где

$$g_{ik} = f_{i1} \vee f_{i2} \vee \dots \vee f_{i,2k-1}. \quad (7.25)$$

После логических преобразований в показателях степени проводится многошаговое замещение остальных переменных отдельно в каждом слагаемом (7.24) по общим правилам, рассмотренным в § 6.1.

**Пример 7.3.** В системе, рассмотренной в примере 7.2, необходимо найти вероятность использования линии связи 54 по путям, проходящим через линии 75, 76 и 64, а также полную вероятность использования линии 54, считая узлы идеально надежными.

*Решение.* Согласно ряду приоритетности, приведенному на рис. 7.3, есть всего четыре пути, содержащие линии 75 и 54. Они занимают места 6, 8, 9 и 16. При идеально надежных узлах логическая функция нагрузки

$$f_{754} = B'_1 (B_2 \vee B'_2 B'_3 (B_4 \vee B'_4 B'_5 B_6)), \quad (7.26)$$

где

$$B_1 = x_{71} \vee x_{75} x_{51} \vee x_{76} (x_{61} \vee x_{64} x_{41} \vee x_{65} x_{51}), \quad B_2 = x_{75} x_{54} x_{41}, \quad B_3 = x_{75} x_{53} x_{31},$$

$$B_4 = x_{75} x_{54} (x_{43} x_{31} \vee x_{42} x_{21}), \quad B_5 = x_{75} x_{53} x_{32} x_{21} \vee$$

$$\vee x_{76} (x_{65} (x_{54} x_{41} \vee x_{53} x_{31}) \vee x_{64} (x_{43} x_{31} \vee (x_{42} \vee x_{43} x_{32}) x_{21})),$$

$$B_6 = x_{75} x_{54} x_{43} x_{32} x_{21}. \quad (7.27)$$

Подставляя (7.27) и (7.26) и упрощая выражение с помощью формулы (1.61a), находим

$$f_{754} = x'_{71} x'_{51} x_{54} \varphi (x_{41} \vee x'_{41} (x_{53} x_{31})' (x_{43} x_{31} \vee x_{42} x_{21} \vee x'_{53} x'_{31} x'_{42} (x_{76} x_{64})' x_{43} x_{32} x_{21})), \quad \varphi = (x_{76} (x_{61} \vee x_{64} x_{41}))'. \quad (7.28)$$

Преобразуем (7.28), умножив каждое слагаемое в скобках на  $\varphi$  и проведя очевидные упрощения:

$$f_{754} = x'_{71} x'_{51} x_{75} x_{54} (x_{41} (x_{76} (x_{61} \vee x_{64}))' \vee x'_{41} (x_{53} x_{31})' (x_{76} x_{61})' \times \\ \times (x_{43} x_{31} \vee x_{42} x_{21}) \vee (x_{76} (x_{61} \vee x_{64}))' x'_{41} x'_{42} x'_{53} x'_{31} x_{43} x_{32} x_{21}). \quad (7.29)$$

Здесь все переменные в каждом из трех ортогональных слагаемых (кроме  $x_{31}$  во втором слагаемом) бесповторные. Поэтому, проведя замещение сразу всех переменных, кроме  $x_{31}$ , а затем замещение  $x_{31}$ , получим

$$\begin{aligned} P_{754} = P(f_{754} = 1) = & Q_{51} Q_{71} R_{75} R_{54} [(Q_{76} + R_{76} Q_{61} Q_{64}) \times \\ & \times (R_{41} + Q_{41} Q_{31} Q_{42} Q_{53} R_{43} R_{32} R_{21}) + Q_{41} (1 - R_{76} R_{61}) \times \\ & \times [Q_{53} R_{31} (R_{43} + Q_{43} R_{42} R_{21}) + Q_{31} R_{42} R_{21}]]. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Результат получился достаточно быстро благодаря специальной форме записи функции  $f_{754}$  в соответствии с (7.22).

Найдем теперь нагрузки линий 54 по путям, имеющим общий отрезок 7654. По ряду приоритетности устанавливаем, что есть четыре таких пути с номерами 12, 17, 18, 20. Сохраняя форму записи (7.26), запишем выражение для функций  $B_i$ :

$$\begin{aligned}
 B_1 &= x_{71} \sqrt{x_{75} (x_{51} \sqrt{x_{53} (x_{31} \sqrt{x_{32} x_{21}}) \sqrt{x_{54} (x_{41} \sqrt{x_{42} x_{21}} \sqrt{x_{43} x_{31}}) \sqrt{x_{76} (x_{61} \sqrt{x_{65} x_{51}} \sqrt{x_{64} (x_{41} \sqrt{x_{43} x_{31}}) \sqrt{x_{75} x_{54} x_{43} x_{32} x_{21}} \sqrt{x_{76} (x_{64} (x_{42} \sqrt{x_{43} x_{32}}) x_{21} \sqrt{x_{65} x_{53} x_{31}}) \sqrt{x_{43} x_{32} x_{21}}}}}}}} \\
 B_2 &= x_{76} x_{65} x_{54} x_{41}, \quad B_4 = \\
 &= x_{76} x_{65} x_{54} (x_{43} x_{31} \sqrt{x_{42} x_{21}}), \quad B_3 = x_{75} x_{54} x_{43} x_{32} x_{21} \sqrt{x_{76} (x_{64} (x_{42} \sqrt{x_{43} x_{32}}) x_{21} \sqrt{x_{65} x_{53} x_{31}}) \sqrt{x_{43} x_{32} x_{21}}}.
 \end{aligned} \tag{7.31}$$

Подставляя (7.31) в (7.26) и проведя упрощения, получаем

$$\begin{aligned}
 f_{7654} &= x'_{71} x'_{61} x'_{51} x_{76} x_{65} x_{54} (x'_{75} x'_{64} x_{41} \sqrt{x'_{41} (x_{64} x_{43} x_{31})' \times \\
 &\times (x_{75} (x_{53} (x_{31} \sqrt{x_{32} x_{21}}) \sqrt{(x_{42} \sqrt{x_{43} x_{32}}) x_{21})' (x_{43} x_{31} \sqrt{x_{42} x_{21}}) \sqrt{x'_{41} x'_{42} x'_{53} x'_{31} x'_{75} x_{43} x_{32} x_{21}}).
 \end{aligned} \tag{7.32}$$

Здесь все слагаемые ортогональны, причем в первом и третьем все переменные бесповторны, а во втором слагаемом бесповторны  $x_{41}$ ,  $x_{53}$ ,  $x_{64}$  и  $x_{75}$ . Проведем замещение, используя теорему 6:

$$\begin{aligned}
 P_{7654}(x_i) &= C_1 (C_2 + Q_{41} (1 - (1 - \\
 &- Q_{64}^{x_{43} x_{31}} Q_{75}^{x_{53}} (x_{31} \sqrt{x_{32} x_{21}}) \sqrt{(x_{42} \sqrt{x_{43} x_{32}}) x_{21}) x_{43} x_{31} \sqrt{x_{42} x_{21}})),
 \end{aligned}$$

где  $C_1 = Q_{71} Q_{61} Q_{51} R_{76} R_{65} R_{54}$ ;  $C_2 = Q_{75} (Q_{64} R_{41} + Q_{41} Q_{31} Q_{32} Q_{53} R_{43} R_{32} R_{21})$ . Проведем здесь замещение  $x_{31}$  и  $x_{43}$ , а затем  $x_{42}$  и  $x_{21}$  во втором слагаемом:

$$\begin{aligned}
 P_{7654}(x_i) &= C_1 (C_2 + Q_{41} (Q_{64} R_{43} R_{31} Q_{75}^{x_{53}} \sqrt{(x_{42} \sqrt{x_{32}}) x_{31}} + \\
 &+ (1 - R_{43} R_{31}) Q_{75} R_{42} R_{21})).
 \end{aligned}$$

Незамещенные переменные бесповторны, и поэтому они замещаются за один шаг:

$$\begin{aligned}
 P_{7654} &= C_1 (C_2 + Q_{41} Q_{75} R_{42} R_{21} (1 - R_{43} R_{31}) + Q_{41} Q_{64} R_{43} R_{31} \times \\
 &\times (Q_{75} + Q_{53} R_{75} (Q_{21} + R_{21} Q_{32} Q_{42}))).
 \end{aligned} \tag{7.33}$$

Полная вероятность использования линии 54 по любым путям находится суммированием (7.30) и (7.33). Заметим, что в данном примере в логических функциях было 15 переменных, а суммарное число вхождений букв в логические функции (7.27) и (7.31) составило 121.

**Пример 7.4.** Пусть в системе из примера 6.2 ряд приоритетности путей при  $s=3$ : 521, 531, 541, 5321, 5421, 5431, 54321. Необходимо найти вероятность использования транзитных узлов 2, 3 и 4 при передаче сообщений из узла 5 в узел 1.

**Решение.** Логическая функция нагрузки узла 3 определяется формулой (7.26) с функциями

$$\begin{aligned}
 B_1 &= x_{52} x_{21}; \quad B_2 = x_{53} x_{31}; \quad B_3 = x_{54} x_{41}; \quad B_4 = x_{53} x_{32} x_{21}, \\
 B_5 &= x_{54} x_{42} x_{21}; \quad B_6 = x_{54} x_{43} x_{31} (x_{31} \sqrt{x_{32} x_{21}}).
 \end{aligned} \tag{7.34}$$

После подстановки (7.34) в (7.26) и упрощений получим

$$f_{53} = x_1 x_3 x_5 (x_{52} x_2 x_{21})' x_{53} x_{31} \sqrt{x'_{52} x'_{31} (x_{54} x_4 x_{41})' x_{53} x_{32} x_2 x_{21} \sqrt{x'_{41} x'_{53} (x_2 x_{21} (x_{42} \sqrt{x_{52}}))' x_{54} x_4 x_{43} (x_{31} \sqrt{x_{32} x_2 x_{21}})}}. \quad (7.35)$$

Здесь все слагаемые ортогональны. Причем в двух слагаемых все переменные неповторные, а в третьем — все, кроме  $x_{31}$ ,  $x_{32}$  и  $x_2 x_{21}$ . Выполнив замещение с использованием теоремы 6, получим

$$P_{53} = P(f_{53} = 1) = C_1 (C_2 + Q_{41} R_{54} R_4 R_{43} (1 - (1 - Q_{53} (Q_{42} Q_{52})^{x_2 x_{21}}) x_{31} \sqrt{x_{32} x_2 x_{21}})), \quad (7.36)$$

где  $C_1 = R_1 R_3 R_5$ ,  $C_2 = R_{53} (R_{31} (1 - R_{52} R_2 R_{21}) + Q_{31} Q_{52} R_{32} R_2 R_{21} (1 - R_{54} \times R_4 R_{41}))$ .

В (7.36) замещаем сначала  $x_{31}$ , затем  $x_{32}$ ,  $x_2 x_{21}$ . Окончательно имеем

$$P_{53} = C_1 (C_2 + Q_{41} R_{54} R_4 R_{43} (R_{31} Q_{53} (1 - Q_{52} Q_{53})) + Q_{52} Q_{31} Q_{42} Q_{53} R_{32} R_2 R_{21}^{-1}). \quad (7.37)$$

Логическая функция нагрузки узлов 2 и 4 находится аналогично. После преобразований

$$f_{52} = x_5 x_2 x_{21} x_1 (x_{52} \sqrt{x'_{52} x'_{31} (x_{54} x_4 x_{41})' x_{53} x_3 x_{32} \sqrt{x'_{52} x'_{41} \times (x_{53} x_3 x_{31})' x_{54} x_4 x_{42} \sqrt{x'_{52} x'_{53} x'_{41} x'_{42} x'_{31} x_{54} x_4 x_{43} x_3 x_{32}})}, \quad (7.38)$$

$$f_{54} = x_5 x_4 x_4 x_1 (x_{52} x_2 x_{21})' (x_{41} (x_{53} x_3 x_{31})' \sqrt{x'_{41} (x_{53} x_3 (x_{31} \sqrt{x_{32} x_2 x_{21}}))' \wedge (x_{42} x_2 x_{21} \sqrt{x_{43} x_3 (x_{31} \sqrt{x_{32} x_2 x_{21}}))}). \quad (7.39)$$

Формулы (7.38) и (7.39) являются формами перехода к полному или частичному замещению. Проведя полное замещение в (7.38),

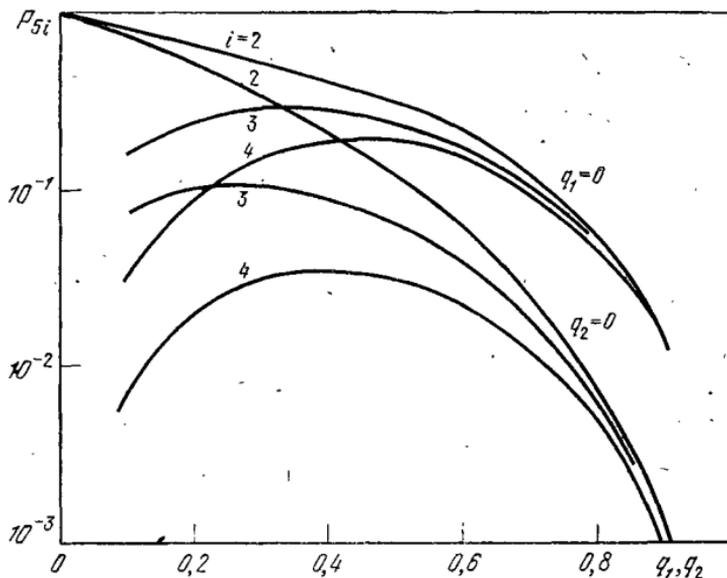


Рис. 7.4. Зависимость вероятности использования транзитных узлов в трехсвязной сети с полным оповещением от надежности узлов и линий связи

а в (7.39) сначала частичное замещение, а затем замещение  $x_2x_{21}$ ,  $x_3$ ,  $x_{31}$  и  $x_{32}$ , получим

$$P_{52} = R_1 R_2 R_5 R_{21} [R_{52} + Q_{52} (Q_{31} R_{53} R_3 R_{32} (1 - R_{54} R_4 R_{41}) + Q_{41} R_{54} R_4 (R_{42} (1 - R_{53} R_3 R_{31}) + Q_{53} Q_{42} Q_{31} R_{43} R_3 R_{32}))], \quad (7.40)$$

$$P_{54} = R_5 R_{54} R_4 R_1 [R_{41} (1 - R_{52} R_2 R_{21}) (1 - R_{53} R_3 R_{31}) + Q_{41} (R_2 R_{21} Q_{52} (R_3 (1 - Q_{31} Q_{32}) (1 - Q_{42} Q_{43}) Q_{53} + (Q_3 + R_3 Q_{31} Q_{32}) R_{42} + (1 - R_2 R_{21}) R_{43} R_3 R_{31} Q_{53})]. \quad (7.41)$$

Некоторые результаты расчетов по формулам (7.37), (7.40) и (7.41) при  $R_i = p_i = 1 - q_i$ ,  $R_{ij} = p_{ij} = 1 - q_{ij}$  приведены на рис. 7.4, из которого видно, что нагрузка транзитных узлов зависит в большей степени от надежности линий связи, чем от надежности узлов. При прочих равных условиях нагрузка транзитных узлов выше при ненадежных линиях связи, чем при надежных узлах. С увеличением  $q_i$  нагрузки всех узлов сближаются и слабо зависят от приоритетов. Приоритет путей существенно влияет на нагрузку лишь при  $q < 0,5$ .

#### 7.4. ХАРАКТЕРИСТИКИ ИНФОРМАЦИОННОЙ НАГРУЗКИ ПУТЕЙ, УЗЛОВ И ЛИНИЙ СВЯЗИ ПРИ ОТСУТСТВИИ ОПОВЕЩЕНИЯ О СОСТОЯНИИ СЕТИ.

В ориентированной двухполюсной сети узлы имеют информацию от собственной системы контроля только об исходящих линиях связи. Поэтому алгоритм выбора маршрута базируется на ряде приоритетности линий связи. В этом случае узел — источник не может определить заранее полный маршрут сообщений и нагрузка транзитных узлов и линий связи определяется также алгоритмами выбора маршрута на промежуточных узлах. Поэтому в отсутствие оповещения меняется по сравнению с полным оповещением не только уровень потерь сообщений, но и распределение информационной нагрузки элементов сети.

Рассмотрим отдельно методы расчета нагрузки путей, узлов и линий связи. Не уменьшая общности результатов, анализ информационной нагрузки будем вести для полносвязной сети.

Нагрузка путей. Обозначим через  $I$  путь  $(n, i_1, i_2, \dots, i_k, 1)$  и найдем вероятность его использования при заданных алгоритмах выбора маршрутов на узле  $n$  и транзитных узлах  $i_j$ . Обозначим также знаком  $<$  отношение предшествования одного элемента другому в ряде приоритетности. Пусть  $f_I(n)$  — логическая функция нагрузки пути  $I$ , соединяющего узлы  $n$  и  $1$ ,  $f_I(i_r)$  — логическая функция нагрузки отрезка пути  $I$  между узлами  $i_r$  и  $1$ . Тогда можно записать равенства

$$f_I(n) = x_n \bigwedge_{j < i_1} x'_{nj} x_{ni_1} f_I(i_1),$$

$$f_I(i_r) = x_{i_r} \bigwedge_{j < i_{r+1}} x'_{i_r j} x_{i_r i_{r+1}} f_I(i_{r+1}), \quad (7.42)$$

$$f_I(i_k) = x_{i_k}. \quad (7.43)$$

Здесь использовано очевидное условие, что линия  $i, i_{y+1}$  будет включена в маршрут только при отказе всех предшествующих ей в ряду приоритетности линий связи.

Подставив (7.43) в (7.42), получим

$$f_I(n) = K_I \bigwedge_{j < i_1} x'_{nj} \bigwedge_{j < i_2} x'_{ij} \dots \bigwedge_{j < i_k} x'_{ik-1j};$$

$$K_I = x_n x_{ni_1} x_{i_1 i_{12}} \dots x_{i_{k-1} i_k} x_1. \quad (7.44)$$

Данная функция содержит только неповторные переменные. Поэтому можно провести полное замещение:

$$P_I = \prod_{j < i_1} Q_{nj} \prod_{j < i_2} Q_{ij} \dots \prod_{j < i_k} Q_{ik-1j} \tilde{P}_I, \quad \tilde{P}_I =$$

$$= R_n R_1 \prod_{r=1}^{k-1} (R_{i_r} R_{i_r i_{r+1}}) R_{ni_1} R_{i_k 1}, \quad (7.45)$$

где  $\tilde{P}_I$  — вероятность работоспособного состояния пути  $I$ .

**Пример 7.5.** В системе, рассмотренной в примере 7.1, отсутствует оповещение о состоянии сети. Ряды приоритетности линий связи в узлах: 51, 54, 53, 52, 41, 43, 42, 31, 32. Необходимо найти распределение информационной нагрузки группы путей с одинаковым количеством транзитных узлов.

**Решение.** Непосредственно из формулы (7.45) находим

$$P_{51} = R_5 R_{51} R_1, \quad P_{541} = Q_{51} R_5 R_{54} R_4 R_{41} R_1,$$

$$P_{531} = Q_{51} Q_{54} R_5 R_{53} R_3 R_{31} R_1,$$

$$P_{521} = Q_{51} Q_{53} Q_{54} R_5 R_{52} R_2 R_{21} R_1, \quad P_{5431} = Q_{51} Q_{41} Q_{43} R_5 R_{54} R_4 R_{43} R_3 R_{31} R_1,$$

$$P_{5421} = Q_{51} Q_{41} Q_{43} R_5 R_{54} R_4 R_{42} R_2 R_{21} R_1, \quad P_{5321} = Q_{51} Q_{54} Q_{31} R_5 R_{53} R_3 R_{32} \times$$

$$\times R_2 R_{21} R_1,$$

$$P_{54321} = Q_{51} Q_{41} Q_{31} R_5 R_{54} R_4 R_{43} R_3 R_{32} R_2 R_{21} R_1.$$

При  $R_i = p_1$ ,  $R_{ij} = p_2$  вероятность использования путей с одним, двумя и тремя транзитными узлами

$$P(\Phi_2=1) = p^3 p^2 q_2 (1 + q_2 + q_2^2), \quad P(\Phi_3=1) = p^4 p^3 q_2^2 (1 + 2q_2),$$

$$P(\Phi_4=1) = p^5 p^4 q_2^3.$$

Результаты расчетов показаны на рис. 7.5, из которого следует, что в системе без оповещения происходит значительное перераспределение нагрузки между путями с различным числом транзитных узлов по сравнению с системой с полным оповещением. В системе без оповещения существенно увеличивается нагрузка путей с двумя и тремя транзитными узлами за счет уменьшения нагрузки путей с одним транзитным узлом. Однако и в ней вероятности  $P(\Phi_3=1)$  и  $P(\Phi_4=1)$  значительно меньше, чем вероятность  $P(\Phi_2=1)$ . Интересно отметить, что  $P(\Phi_3=1)$  оказывается заметно меньше, чем суммарная нагрузка путей 5431, 5421 и 5321. Это говорит о том, что

при суммировании нагрузки путей получается завышенной оценка действительной суммарной нагрузки множества путей.

Нагрузка узлов. Пусть сообщения передаются из некоторого узла  $k$  в направлении узла  $l$ . Ряд приоритетности линий связи в узле  $k$  задан:  $ki_{k1}, ki_{k2}, \dots, ki_{ks_k}, k \leq n$ . Найдем выражение для транзитной нагрузки узла  $i < k$ . Разделим все узлы, указанные в ряду приоритетности, на два подмножества:  $M_{1k}$  содержит узел  $i$  и все узлы  $j > i$ , которые имеют хотя бы один путь к узлу  $l$ , прохо-

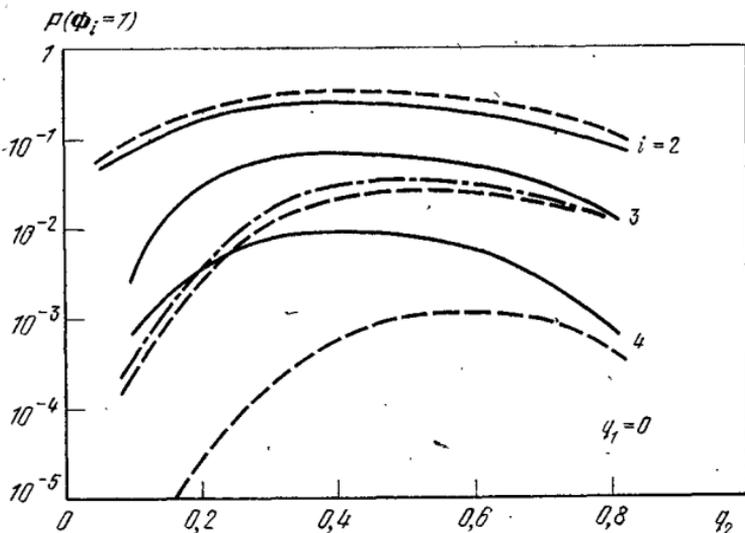


Рис. 7.5. Зависимость информационной нагрузки групп путей с транзитными узлами от надежности линий связи:

— в системах без оповещения; - - - с полным оповещением; - · - · - суммарная нагрузка путей

дящий через узел  $i$ ;  $M_{2k}$  включает остальные узлы. Если узлы  $M_{1k}$  расположены перед узлами  $M_{2k}$  в ряду приоритетности, то логическая функция нагрузки узла  $i$

$$f_{ki} = \left( \bigvee_{r \in M_{1k}} \left( \bigwedge_{j < r} x'_{kr} \right) x_{kr} f_{ri} \right) x_k x_i, \quad f_{ii} = 1, \quad k \leq n. \quad (7.46)$$

Переменная  $x_1$  не входит в (7.46), так как передача из узла  $k$  будет происходить независимо от состояния узла  $l$ , которое узлу-отправителю неизвестно. Если узлы  $M_{2k}$  расположены перед узлами  $M_{1k}$ , то

$$f_{ki} = x_k x_i \bigwedge_{j \in M_{2k}} x'_{kj} \left( \bigvee_{r \in M_{1k}} \left( \bigwedge_{j < r, j \in M_{1k}} x'_{kj} \right) x_{kr} f_{ri} \right), \quad f_{ii} = 1. \quad (7.47)$$

Элементы множества  $M_{2k}$  можно разделить в ряду приоритетности на два подмножества элементами  $M_{1k}$ . Тогда

$$f_{ki} = x_k x_i \bigwedge_{j \in M_{2k}^{(1)}} x'_{kj} \left( \bigvee_{r \in M_{1k}} \left( \bigwedge_{r > j \in M_{1k}} x'_{kj} \right) x_{kr} f_{ri} \right), \quad f_{ii} = 1. \quad (7.48)$$

Если элементы множества  $M_{1k}$  разделены на два подмножества элементами множества  $M_{2k}$ , то

$$f_{ki} = x_k x_i \left( \bigwedge_{r \in M_{1k}^{(1)}} \left( \bigwedge_{j < r} x'_{kj} \right) x_{kr} f_{ri} \vee \right. \\ \left. \vee \left( \bigwedge_{j \in M_{2k}} x'_{kj} \right) \left( \bigvee_{r \in M_{1k}^{(2)}} \left( \bigwedge_{r > j \in M_{1k}^{(2)}} x'_{kj} \right) x_{kr} f_{ri} \right) \right). \quad (7.49)$$

Аналогично составляются логические функции для других сочетаний элементов  $M_{1k}$  и  $M_{2k}$  в ряду приоритетности. При переходе к смешанной форме частичное замещение в (7.46) — (7.49) в силу ортогональности слагаемых проводится отдельно в каждом слагаемом. В частности, для (7.46) и (7.47) имеем

$$P_{ki} = R_k R_i \sum_{r \in M_{1k}} \prod_{j < r} Q_{kj} R_{kr} P_{ri}; \quad (7.50)$$

$$P_{ki} = R_k R_i \prod_{j \in M_{2k}} Q_{kj} \sum_{r \in M_{1k}} \prod_{j < r} Q_{kj} R_{kr} P_{ri}. \quad (7.51)$$

Эти формулы дают рекуррентные соотношения, позволяющие по значениям  $P_{ri}$  найти искомые вероятности.

Нагрузка линий связи. Логическая функция нагрузки линий имеет вид

$$f_{nij} = f_{ni} \bigwedge_{r < j} x'_{ir} x_{ij}. \quad (7.52)$$

При составлении этой формулы учтены очевидные соображения: линия  $ij$  будет использована при передаче сообщения, если выбранный путь пройдет через узел  $i$  и откажут все исходящие из этого узла линии связи, предшествующие в ряде приоритетности линии  $ij$ . Перед замещением функцию (7.52) следует упростить с помощью формул (1.61а). В дальнейшем процедура построения расчетной формулы совпадает с аналогичной процедурой при определении нагрузки транзитного узла. Рассмотрим далее некоторые частные классы структур.

### **s-связная структура $n$ -го ранга с приоритетностью линий связи в порядке возрастания номеров смежных узлов**

Этот случай отличается от общего тем, что здесь число исходящих линий связи для узлов с номерами  $k > s$  постоянно и равно  $s$ , а для  $k \leq s$  равно  $k-1$ . Кроме того, ряд приоритетности имеет определенный вид:  $(k1), (k2), \dots, (k, k-1)$  для  $k \leq s+1$  и  $(k, k-s), (k, k-s+1), \dots, (k, k-1)$  для  $k > s+1$ . Тогда согласно (7.45) вероятность использования пути  $I = (ni_1 i_2 \dots i_l)$  определяется по формуле

$$P_I = \prod_{r=1}^l \prod_{j=m_{r-1}}^{i_r-1} Q_{i_{r-1}j} \tilde{P}_I, \quad i_0 = n, \quad m_r = \max(i_r - s, 1); \quad (7.53)$$

Вероятность использования узла  $i$  получается из формул (7.47) и (7.51):

$$P_{ki} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{k-1} R_{kj} \prod_{r=1}^{j-1} Q_{kr} P_{ji}, & i < k \leq s+1, \\ \sum_{j=k-s}^{k-1} R_{kj} \prod_{r=k-s}^{j-1} Q_{kr} P_{ji}, & k-s > i, \\ \sum_{j=1}^{k-1} R_{kj} \prod_{r=k-s}^{j-1} Q_{kr} P_{ji}, & k-s \leq i < k, \quad P_{ii} = 1. \end{cases} \quad (7.54)$$

Если приоритетность линий связи назначается так, что на первом месте стоит линия  $x_{k1}$ , а остальные располагаются в порядке убывания номера смежного узла, то вместо (7.53) и (7.54) следует использовать формулы

$$P_i = \prod_{r=1}^i \prod_{j=i_r+1}^{i_{r-1}-1} Q_{i_{r-1}j} \prod_{j=0}^{i-1} Q_{ij} \tilde{P}_j; \quad (7.55)$$

$$P_{ki} = \begin{cases} Q_{k1} \sum_{r=0}^{k-1-i} R_{k,i+r} \prod_{j=i+r+1}^{k-1} Q_{kj} P_{i+r,i}, & 1 < i < k \leq s+1, \\ \sum_{r=0}^{k-1-i} R_{k,i+r} \prod_{j=i+r+1}^{k-1} Q_{kj} P_{i+r,i}, & 1 < k-s \leq i < k, \\ \sum_{r=0}^{s-1} R_{k,k-s+r} \prod_{j=k-s+1+r}^{k-1} Q_{kj} P_{k-s+r,i}, & k > s+i. \end{cases} \quad (7.56)$$

Вероятность использования линии  $ij$  определяется как произведение вероятности  $P_{ni}$  на условную вероятность того, что в узле  $i$  будет выбрана именно линия  $ij$ :

$$P_{nij} = P_{ni} \tilde{P}_{ij} = P_{ni} R_{ij} \prod_{r < j} Q_{ir}. \quad (7.57)$$

Иногда более удобно пользоваться представлением функции в виде рекуррентного соотношения

$$P_{nij} = \sum_{r=i+1}^{n-1} R_n \prod_{j < r} Q_{nj} R_{nr} P_{rij}.$$

**Пример 7.6.** В полностью связанной системе из пяти узлов без оповещения необходимо найти среднюю информационную нагрузку транзитных узлов, считая узлы идеально надежными.

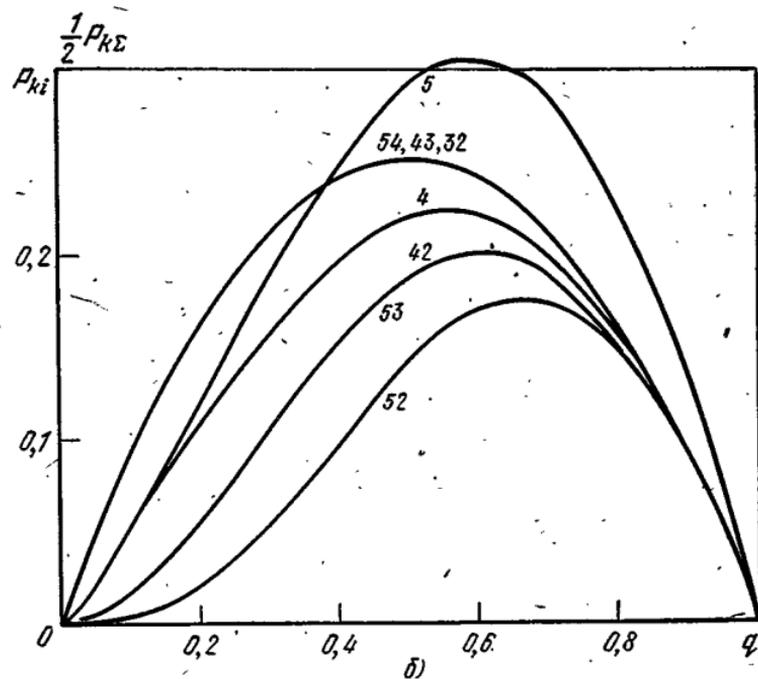
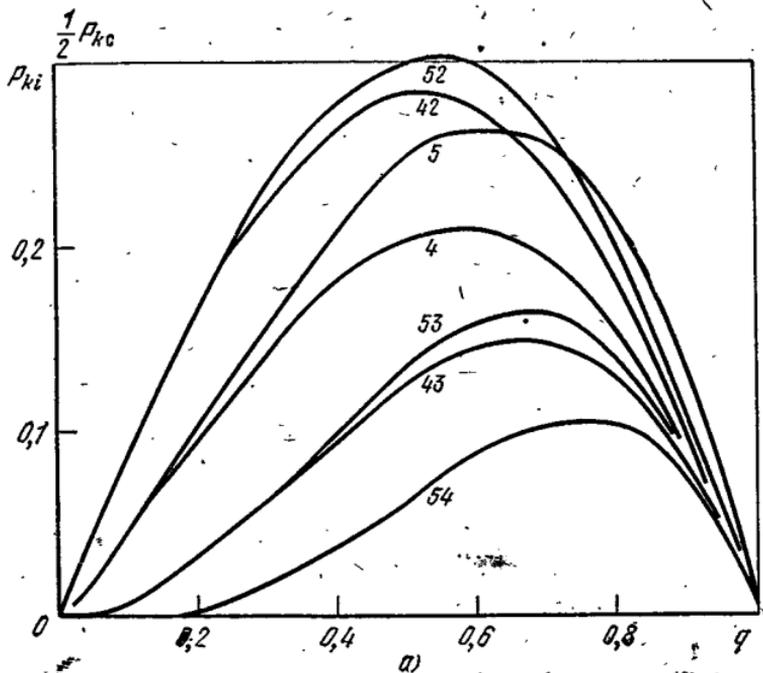


Рис. 7.6. Зависимость информационной нагрузки транзитных узлов от надежности линий связи в полностью связанной системе без оповещения:

а — алгоритм 1; б — алгоритм 2; 4, 5 — суммарная нагрузка узлов

*Решение.* Пусть приоритетности линий связи назначены в порядке возрастания номеров смежных узлов (алгоритм 1): 51, 52, 53, 54; 41, 42, 43; 31, 32. Тогда в соответствии с (7.47)

$$\begin{aligned} f_{54} &= x'_{51} x'_{52} x'_{53} x_{54}; & f_{53} &= x'_{51} x'_{52} (x_{53} \vee x'_{53} x_{54} f_{43}), & f_{43} &= x'_{41} x'_{42} x_{43}; \\ f_{52} &= x'_{51} (x_{52} \vee x'_{52} (x_{53} f_{32} \vee x'_{53} x_{54} f_{42})); \\ f_{42} &= x'_{41} (x_{42} \vee x'_{42} x_{43} f_{32}); & f_{32} &= x'_{31} x_{32}. \end{aligned} \quad (7.58)$$

В результате замещения получаем

$$\begin{aligned} P_{54} &= Q_{51} Q_{52} Q_{53} R_{54}, & P_{53} &= Q_{51} Q_{52} (R_{53} + Q_{53} R_{54} Q_{41} Q_{42} R_{43}); \\ P_{52} &= Q_{51} (R_{52} + Q_{52} Q_{31} R_{53} R_{32} + Q_{52} Q_{53} Q_{41} R_{54} (R_{42} + Q_{42} Q_{31} R_{43} R_{32})). \end{aligned} \quad (7.59)$$

Вероятности использования линий связи 51, 41, 31 и 21 вычисляются с помощью формулы (7.57):

$$P_{5,51} = R_{51}, \quad P_{5,k1} = R_{k1} P_{5k}, \quad k=2, 3, 4. \quad (7.60)$$

Если ряды приоритетности имеют вид 51, 54, 53, 52, 41, 43, 42, 31, 32 (алгоритм 2), то вместо (7.59) имеем

$$\begin{aligned} P_{54} &= Q_{51} R_{54}; & P_{53} &= Q_{51} (Q_{41} R_{54} R_{43} + Q_{54} R_{53}), & P_{42} &= Q_{41} (Q_{31} R_{43} R_{32} + \\ & & & + Q_{43} R_{42}), & P_{52} &= Q_{51} (R_{54} P_{42} + Q_{54} (Q_{31} R_{53} R_{32} + Q_{53} R_{52})). \end{aligned} \quad (7.61)$$

Результаты расчетов по формулам (7.59)–(7.64) при  $Q_{ij}=q$  приведены на рис. 7.6, из которого следует, что при обоих алгоритмах выбора маршрута наибольшая нагрузка у первого по приоритетности транзитного узла. При алгоритме 1 она составляет при  $q=0,1$  90% и при  $q=0,2$  83% от суммарной транзитной нагрузки  $P_{5\Sigma} = P_{52} + P_{53} + P_{54}$ . Если передача ведется из узла 4, то наиболее приоритетный узел 2 принимает 91% нагрузки  $P_{4\Sigma} = P_{42} + P_{43}$  при  $q=0,1$  и 83% при  $q=0,2$ . При алгоритме 2 нагрузка распределяется в целом более равномерно, хотя по-прежнему узел с большим приоритетом имеет и большую нагрузку: так, при передаче из узла 5 на узел 4 падает 81,6% суммарной транзитной нагрузки при  $q=0,1$  и 67% при  $q=0,2$ . При передаче из узла 4 узел 3 принимает 84% нагрузки при  $q=0,1$  и 73,5% при  $q=0,2$ . При алгоритме 2 третий по приоритету транзитный узел имеет нагрузку при  $q=0,1$  в 5,3 раза меньше, чем второй, и 27,4 раза меньше, чем первый. При  $q=0,2$  эти же отношения составляют 2,78 и 7,72. Для сравнения заметим, что при алгоритме 1 расчет дает значения 10 и 101 при  $q=0,1$ , 20 и 104 при  $q=0,2$ . Наконец, заметим, что суммарные нагрузки  $P_{5\Sigma}$  и  $P_{4\Sigma}$  при алгоритме 2 всегда выше, чем при алгоритме 1, а вероятность потерь ниже.

### **s-связная разомкнутая ориентированная радиально-кольцевая структура (рис. 7.7)**

Рассмотрим режим передачи сообщений из узла  $n$  в узел 1, полагая, что на каждом узле  $k$  задан ряд приоритетности линий связи в виде  $k1, ki_{k1}, ki_{k2}, \dots, ki_{ks}$ . При определении средней информативной нагрузки узлов принимаем во внимание, что сообщения

могут поступить в узел  $k=2, n-1$  несколькими различными способами. При  $k \geq n-s$  сообщения могут поступить по прямой линии связи  $nk$  или через промежуточные узлы  $k+1, k+2, \dots, n-1$ . Поэтому логическая функция информационной нагрузки

$$f_{nk} = \bigvee_{r=k}^{n-1} \left( \bigwedge_{j \leq r} x'_{nj} \right) x_{nr} f_{rk} x_n, \quad k \geq n-s; \quad f_{kk} = 1. \quad (7.62)$$

При  $k < n-s$  прямая связь узлов  $n$  и  $k$  отсутствует. Поэтому

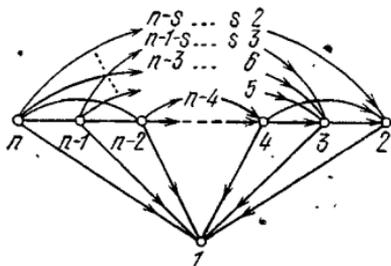
$$f_{nk} = \bigvee_{r=n-s}^{n-1} \left( \bigwedge_{j \leq r} x'_{nj} \right) x_{nr} x_{nr} f_{rk}, \quad k < n-s. \quad (7.63)$$

В силу ортогональности слагаемых в (7.62) и (7.63) замещение проводится отдельно в каждом слагаемом. Объединив оба случая, запишем

$$P_{nk} = \sum_{r=m}^{n-1} \prod_{j < r} Q_{nj} R_{nr} P_{rk}, \quad m = \max(k, n-s). \quad (7.64)$$

Входящие в правую часть (7.64) вероятности  $P_{rk}$  находятся с помощью той же формулы после соответствующей замены индексов.

Рис. 7.7.  $s$ -связная разомкнутая ориентированная радиально-кольцевая структура



При нахождении нагрузки прямых линий связи также будем различать случаи  $k \geq n-s$  и  $k < n-s$ . Составим сначала логические функции нагрузки для линий  $n1, (n-1,1)$  и  $(n-2,1)$

$$f_{n,1} = x_n x_{n1}; \quad f_{n,n-1} = \bigwedge_{j \leq n-1} x'_{nj} x_{n,n-1} x_{n-1} x_{n-1}, i x_n;$$

$$f_{n,n-2,1} = x_n x_{n-2,1} \left( \bigwedge_{j \leq n-2} x'_{nj} x_{n,n-2} \bigvee_{j \leq n-2} x'_{n-1,j} x_{n-1,n-2} f_{n,n-1} \right). \quad (7.65)$$

Для любого  $k \geq n-s$

$$f_{n,k1} = x_n x_{k1} \left( \bigvee_{r=k+1}^n \left( \bigwedge_{j \leq k} x'_{rj} \right) x_{rk} f_{nr} \right). \quad (7.66)$$

Для  $k < n-s$

$$f_{n,k1} = x_n x_{k1} \left( \bigvee_{r=k+1}^{n+k+s} \left( \bigwedge_{j \leq k} x'_{rj} \right) x_{rk} f_{nr} \right), \quad (7.67)$$

Объединяя оба случая, проводим замещение:

$$P_{n, k_1} = \sum_{r=k+1}^{\min(n, k+s)} \prod_{j \leq k} Q_{r_j} R_{r_j k} R_n R_{r_1} P_{nr}. \quad (7.68)$$

Вероятности  $P_{nr}$  находятся по формуле (7.64).

**Пример 7.7.** В системе, рассмотренной в примере 7.2, при отсутствии оповещения о состоянии сети приняты следующие приоритеты линий связи: 71, 75, 76; 61, 64, 65; 51, 53, 54; 41, 42, 43; 31, 32. Необходимо найти распределение средней информационной нагрузки по всем входящим в узел 1 линиям связи.

*Решение.* Используя формулы (7.64), (7.66) — (7.68), получаем

$$\begin{aligned} P_{7,71} &= R_{71}, & P_{7,61} &= Q_{71} Q_{75} R_{76} R_{61}, \\ P_{7,51} &= Q_{71} R_{51} (R_{75} + Q_{75} R_{76} P_{65}), & P_{65} &= Q_{61} Q_{64} R_{65}, \\ P_{7,41} &= Q_{71} R_{41} (R_{75} P_{54} + Q_{75} R_{76} P_{64}), & P_{54} &= Q_{51} Q_{53} R_{54}, & P_{64} &= Q_{61} R_{64}, \\ P_{7,31} &= Q_{71} R_{31} (R_{75} P_{53} + Q_{75} R_{76} P_{63}), & P_{53} &= Q_{51} (R_{53} + Q_{53} R_{54} P_{43}), \\ & & P_{43} &= Q_{41} Q_{42} R_{43}, & P_{63} &= Q_{61} (R_{64} P_{43} + Q_{64} R_{65} P_{53}), \\ P_{7,21} &= Q_{71} Q_{61} R_{21} (R_{64} P_{42} + Q_{64} R_{65} P_{52}), & P_{42} &= Q_{41} R_{42}, \\ & & P_{52} &= Q_{51} (R_{53} R_{32} Q_{31} + Q_{53} R_{54} P_{42}). \end{aligned} \quad (7.69)$$

Если приоритеты транзитных узлов установить в порядке убывания номера узла, то аналогичные приемы приводят к следующим расчетным формулам:

$$\begin{aligned} P_{7,71} &= R_{71}, & P_{7,61} &= Q_{71} R_{76} R_{61}, & P_{7,51} &= Q_{71} R_{51} (Q_{61} R_{76} R_{65} + Q_{76} R_{65}), \\ & & P_{7,41} &= Q_{71} R_{41} (R_{76} P_{64} + Q_{76} Q_{75} P_{54}), & P_{54} &= Q_{51} R_{54}, \\ & & P_{64} &= Q_{61} (R_{65} P_{54} + Q_{65} R_{64}), \\ P_{7,31} &= Q_{71} R_{31} (R_{76} P_{63} + Q_{76} R_{75} P_{53}), & P_{63} &= Q_{61} (R_{65} P_{53} + Q_{65} R_{64} P_{43}), \\ & & P_{53} &= Q_{51} (R_{54} P_{43} + Q_{54} R_{53}), \\ & & P_{7,21} &= Q_{71} R_{21} (R_{76} P_{62} + Q_{76} R_{65} P_{52}), \\ P_{62} &= Q_{61} (R_{65} P_{52} + Q_{65} R_{64} P_{42}), & P_{52} &= Q_{51} (R_{54} P_{42} + Q_{54} R_{53} P_{32}), \\ P_{42} &= Q_{41} (R_{43} P_{32} + Q_{43} R_{42}), & P_{43} &= Q_{41} R_{43}, & P_{32} &= Q_{31} R_{32}. \end{aligned} \quad (7.70)$$

Для сравнения с результатами примеров 7.2 и 7.3 рассчитаем среднюю нагрузку при 75321 и отрезков путей 754 и 7654.

Для алгоритма 1

$$\begin{aligned} P_{16} &= Q_{71} Q_{51} Q_{31} R_{75} R_{53} R_{32} R_{21}; & P_{754} &= Q_{71} Q_{51} Q_{53} R_{75} R_{54}; \\ P_{7654} &= Q_{71} Q_{75} Q_{61} Q_{64} Q_{51} Q_{53} R_{76} R_{65} R_{54}. \end{aligned} \quad (7.71)$$

Для алгоритма 2

$$\begin{aligned} P_{10} &= Q_{71} Q_{76} Q_{51} Q_{54} Q_{31} R_{75} R_{53} R_{32} R_{21}; \\ P_{754} &= Q_{71} Q_{76} Q_{51} R_{75} R_{54}; & P_{7654} &= Q_{71} Q_{61} Q_{51} R_{76} R_{65} R_{54}. \end{aligned} \quad (7.72)$$

Результаты расчетов по формулам (7.69) и (7.70) при  $Q_{ij} = q$  представлены на рис. 7.8, из которого видно, что нагрузка пути 75321 при согласованных алгоритмах выбора маршрута оказывается

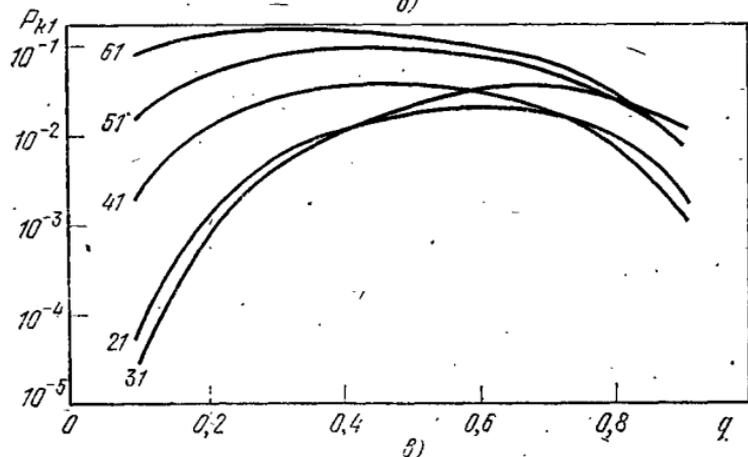
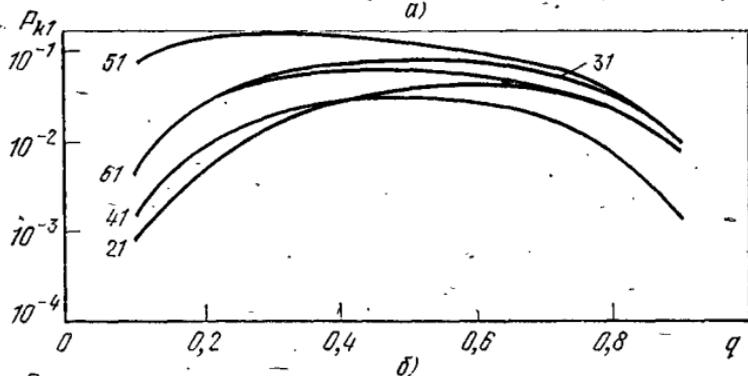
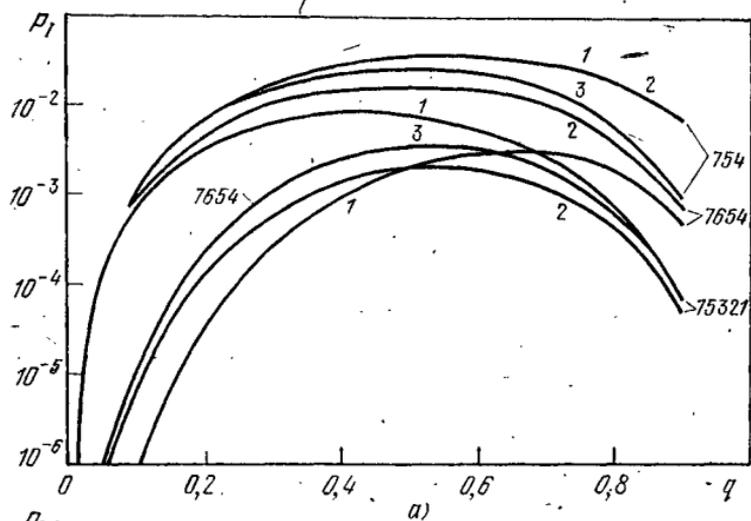


Рис. 7.8. Зависимость информационной нагрузки отрезков путей 754, 7654 и путей 75321 и  $k1$  от надежности линий связи:  
 а) 1 — без оповещения; а1; 2 — без оповещения; а2; 3 — полное оповещение; б и в) алгоритм 1 и 2 без оповещения

примерно одинаковой и при полном оповещении и без оповещения. Аналогичное соотношение при небольших  $q$  имеет место и для отрезка пути 764. Нагрузки 7654 и 75321 при полном оповещении близки друг к другу и на рисунке представлены одной кривой, причем они значительно отличаются от нагрузок 7654 при неполном оповещении и обоих алгоритмах.

Нагрузки прямых линий связи существенно зависят от приоритетов транзитных узлов. При алгоритме 1 наибольшая нагрузка приходится на линию 51, а линии 61 и 31 имеют примерно одинаковую нагрузку при  $q > 0,4$  и следуют за 51. При алгоритме 2 наибольшая нагрузка у линии 61, на втором месте линия 51, на последнем — линия 31. Попутно заметим, что перераспределение нагрузки при переходе от алгоритма 1 к алгоритму 2 сопровождается уменьшением вероятности потерь при  $q=0,1$  от  $1,32 \cdot 10^{-3}$  до  $1,12 \cdot 10^{-3}$ . При полном оповещении и  $q=0,1$  вероятность потерь  $1,02 \cdot 10^{-3}$ .

## 7.5. ХАРАКТЕРИСТИКИ ИНФОРМАЦИОННОЙ НАГРУЗКИ УЗЛОВ И ЛИНИЙ СВЯЗИ ПРИ ЧАСТИЧНОМ ОПОВЕЩЕНИИ О СОСТОЯНИИ СЕТИ

Система с частичным оповещением в методике оценки информационной нагрузки занимает промежуточное положение между системами без оповещения и с полным оповещением. От первой данную систему отличает наличие путей, состояния которых полностью известно в узле-отправителе сообщения, от второй — наличием неопределенности при выборе маршрута в некоторых узлах, когда выбирается направление передачи без гарантии того, что в данном направлении есть хотя бы один работоспособный путь к адресату. Системы с частичным оповещением уже рассматривались в § 5.4 при анализе вероятности доставки сообщений. Рассмотрим для этих систем задачу о распределении информационной нагрузки по сети.

Нагрузка узлов. Пусть передача сообщений из узла  $n$  в направлении узла  $l$  происходит по маршрутам, которые могут включать некоторый транзитный узел  $k$ . Как и раньше, разделим все узлы на два подмножества  $M_{1k}$  и  $M_{2k}$ . В каждом узле множества  $M_{1k}$ , включая и узел  $n$ , алгоритм выбора маршрута содержит ряд приоритетности путей, состояния которых известны, и ряд приоритетности линий связи, используемый тогда, когда все пути первого ряда неработоспособны. Выделим в ряде приоритетности путей узла  $n$  подмножества  $M_i$ , так, что все  $M_i$  с нечетными номерами не содержат путей, проходящих через узел  $k$ , а  $M_i$  с четными номерами содержат только пути, которые проходят через узел  $k$ . В частности, может быть так, что множество  $M_1$  пусто. Это имеет место в случае, когда первый по приоритетности путь содержит узел  $k$ . Пути, вошедшие в ряд приоритетности, составляют только часть всего множества путей, которые существуют между полюсами в системе. Остальные пути имеют в своем составе элементы, состояния которых неизвестно, и могут быть использованы с помощью ряда приоритетности линий связи, когда все пути множества  $M_+ = \bigcup_{(i)} M_i$ , неработоспособны.

Пусть этот ряд имеет вид  $ni_1, ni_2, \dots, ni_m$ . В него включаются те направления, которые содержат только работоспособные пути. Тогда логическая функция нагрузки узла  $k$

$$f_{nk} = B'_1 (B_2 \vee B'_3 (B_4 \vee \dots \vee B'_{r-1} (B_r \vee g_{nk}) \dots)), \quad (7.73)$$

где

$$B_i = \bigvee_{j \in M_i} K_j; \quad g_{nk} = \bigvee_{r \in M_{1k}}^m \left( \bigwedge_{j < r} x'_{nj} \right) x_n x_{nr} f_{rk}. \quad (7.74)$$

Здесь  $K_j$  — элементарная конъюнкция, логическая функция работоспособности  $j$ -го пути;  $g_{nk}$  — логическая функция нагрузки угла  $k$  при использовании второй части алгоритма выбора маршрута, основанной на ряде приоритетности линий связи. Функция  $f_{nk}$  является логической функцией нагрузки узла при передаче сообщений из узла  $r$ ;  $f_{nk} = 0$ , если из узла  $r$  нет ни одного пути к выходу системы, содержащего узел  $k$ . Нетрудно увидеть, что при  $g_{nk} = 0$  (нет путей с неопределенным состоянием элементов) (7.73) переходит в (7.19). Если  $M_+$  пусто, то (7.73) переходит в (7.46). Форма функции (7.73) еще не является ФПЧЗ. Для этого она должна быть преобразована к ортогональному виду

$$f_{nk} = B'_1 (B_2 \bigvee B'_2 B'_3 (B_4 \bigvee \dots \bigvee B'_{r-2} B'_{r-1} (B_r \bigvee B'_r g_{nk}) \dots)). \quad (7.75)$$

Прежде чем проводить частичное замещение в последнем слагаемом должны быть выполнены упрощения с помощью формул (1.61,а).

Нагрузка линий связи. Как и при построении формулы (7.73), в ряде приоритетности путей, выделяем подмножества  $M_i$ , содержащих или не содержащих интересующую нас линию связи  $kl$ . После этого составляем логическую функцию нагрузки

$$f_{n,kl} = \tilde{B}'_1 (\tilde{B}_2 \bigvee \tilde{B}'_2 \tilde{B}'_3 (\tilde{B}_4 \bigvee \dots \bigvee \tilde{B}'_{v-1} (\tilde{B}_v \bigvee g_{nk} \varphi_{kl}) \dots)), \quad (7.76)$$

где

$$\tilde{B}_i = \bigvee_{j \in M_i} K_j; \quad \varphi_{kl} = \bigwedge_{j < l} x'_{kj} x_{kl}. \quad (7.77)$$

Функция  $g_{nk}$  определяется формулой (7.74).

После ортогонализации получаем

$$f_{n,kl} = \tilde{B}'_1 (\tilde{B}_2 \bigvee \tilde{B}'_2 \tilde{B}'_3 (\tilde{B}_4 \bigvee \dots \bigvee \bigvee \tilde{B}'_{v-2} \tilde{B}'_{v-1} (\tilde{B}_v \bigvee \tilde{B}'_v g_{nk} \varphi_{kl}) \dots)). \quad (7.78)$$

Замещение в (7.75) и (7.78) проводится по общим правилам, причем в силу ортогональности независимо друг от друга в каждом слагаемом. Рассмотрим теперь конкретные классы систем и алгоритмы оповещения.

### **s-связная сеть с оповещением смежных узлов о работоспособности прямых линий связи с адресатом**

Структурная схема сети приведена на рис. 6.2. При  $n \leq s+1$  сеть полностью связана, а при  $n > 2s+1$  появляются узлы с номерами  $s+1 < k \leq n$ , до которых информация оповещения не доходит. На этих

узлах ряд приоритетности путей отсутствует и алгоритм выбора маршрута такой же, как при отсутствии оповещения. Поэтому далее рассматриваются случаи  $n \leq s+1$  и  $s+1 < n \leq 2s+1$ .

При  $n \leq s+1$  логическая функция нагрузки транзитных узлов определяется рекурсивно в соответствии (7.75) из соотношений

$$\begin{aligned} f_{nk} &= B'_{n1} (B_{n2} \vee B'_{n2} B'_{n3} g_{nk}), \quad 5 \leq n \leq s+1, \\ g_{nk} &= \bigvee_{r=3}^{n-1} x_n \left( \bigwedge_{j < r} x'_{nj} \right) x_{nr} f_{rk}; \\ f_{rk} &= B'_{r1} (B_{r2} \vee B'_{r2} B'_{r3} \varphi_{rk}). \\ g_{rk} &= \bigvee_{i=k}^{r-1} x_r \left( \bigwedge_{j < r} x'_{rj} \right) x_{ri} f_{ik}, \quad 3 \leq r \leq n-1. \end{aligned} \quad (7.79)$$

Здесь функции  $B_{ri}$  зависят от назначенных приоритетов путей  $ti$ . Если пути упорядочены в порядке возрастания номеров  $i$ , то

$$B_{r1} = \bigvee_{i=1}^{k-1} x_r x_{ri} x_i x_{i1} x_1, \quad B_{r2} = x_r x_{rk} x_k x_{k1} x_1, \quad (7.80)$$

$$B_{r3} = \bigvee_{i=k+1}^{r-1} x_r x_{ri} x_i x_{i1} x_1, \quad 3 \leq r \leq n.$$

Если приоритеты установлены в порядке убывания номера  $i$ , то

$$\begin{aligned} B_{r1} &= x_r x_1 \left( x_{r1} \vee \left( \bigvee_{i=k+1}^{r-1} x_{ri} x_i x_{i1} \right) \right), \\ B_{r3} &= x_r x_1 \left( \bigvee_{i=2}^{k-1} x_{ri} x_i x_{i1} \right). \end{aligned} \quad (7.81)$$

При  $s+1 < n \leq 2s+1$  узлы  $n, n-1, \dots, n-s+1$  не имеют прямых линий связи с узлом 1, но узлы с номерами  $s+1, n-s$  такие связи имеют и об их состоянии сообщается узлам  $n-s+1, n$ . На основе этой информации строится ряд приоритетности путей. При построении логических функций  $f_{nk}$  будем различать три случая: 1)  $2 \leq k \leq n-s$ , когда узлы  $k$  имеют прямые связи с узлом 1, но не имеют их с узлом  $n$ ; 2)  $n-s < k \leq s+1$ , когда узлы  $k$  имеют прямые связи с узлами  $n$  и 1; 3)  $s+1 < k \leq n-1$ , когда узлы  $k$  имеют прямые связи с  $n$ , но не имеют их с 1.

При  $k \leq n-s$  логическая функция нагрузки узла  $k$

$$f_{nk} = \bigwedge_{i=n-s}^{s+1} K'_i \left( \bigvee_{r=n-s}^{n-1} x_{nr} \bigwedge_{j < r} x'_{nj} f_{rk} \right). \quad (7.82)$$

Из (7.82) ясно, что приоритеты путей в узле  $n$  не влияют на нагрузку узла  $k$ . Она зависит лишь от приоритетности линий связи.

При  $n-s < k \leq s+1$  в ряд приоритетности путей входит путь  $nk1$  и нагрузка узла  $k$  определяется состоянием только части путей, входящих в ряд приоритетности узла  $n$ . Поэтому

$$f_{nk} = \bigwedge_{i < k} K'_i \left( K_k \vee K'_k \bigwedge_{k < i} K'_i \left( \bigvee_{r=k}^{n-1} x_{nr} \bigwedge_{j < r} x'_{nj} f_{rk} \right) \right). \quad (7.83)$$

Здесь  $i < k$  и  $k < i$  обозначают отношение предшествования узлов  $i$  и  $k$  в ряде приоритетности путей, а  $j < r$  — отношение предшествования в ряде приоритетности линий связи.

При  $s+1 < k \leq n-1$  отсутствует путь  $nk1$ . Поэтому

$$f_{nk} = \bigwedge_{i=n-s}^{s+1} K'_i \left( \bigvee_{r=k+1}^{n-1} x_{nr} \bigwedge_{j < r} x'_{nj} f_{rk} \right). \quad (7.84)$$

Входящие в (7.82)—(7.84) функции  $f_{nh}$  определяются по тем же формулам после замены индекса  $n$  на  $r$ . Перед замещением в (7.79)—(7.84) проводятся упрощения для увеличения числа бесповторных переменных.

**Пример 7.8.** В полносвязной сети с шестью узлами и оповещением о состоянии прямой линии связи ряд приоритетности путей на узле  $m$  имеет вид  $(m1)$ ,  $(m21)$ , ...,  $(m, m-1, 1)$ , а ряд приоритетности линий связи  $(m, m-1)$ ,  $(m, m-2)$ , ...,  $m4$ ,  $m3$ . Считая узлы идеально надежными, необходимо найти транзитную нагрузку узлов при передаче сообщений из узла 5 или 6 в узел 1.

**Решение.** Согласно (7.79) и (7.80) логические функции нагрузок узлов

$$\begin{aligned} f_{65} &= x'_{61} (x_{62} x_{21})' (x_{63} x_{31})' (x_{64} x_{41})' x_{65}; \\ f_{64} &= x'_{61} (x_{62} x_{21})' (x_{63} x_{31})' (x_{64} x_{41} \vee \\ &\quad \vee (x_{64} x_{41})' (x_{65} x_{51})' (x_{65} f_{54} \vee x'_{65} x_{64})); \\ f_{63} &= x'_{61} (x_{62} x_{21})' (x_{63} x_{31} \vee (x_{63} x_{31})' (x_{64} x_{41})' \times \\ &\quad \times (x_{65} x_{51})' (x_{65} x_{53} \vee x'_{65} x_{64} f_{43} \vee x'_{65} x'_{64} x_{63})); \\ f_{62} &= x'_{61} (x_{62} x_{21} \vee (x_{62} x_{21})' (x_{63} x_{31})' (x_{64} x_{41})' (x_{65} x_{51})' \times \\ &\quad \times (x_{65} f_{52} \vee x_{65}' x_{64} f_{42} \vee x'_{65} x'_{64} x_{63} f_{32})). \end{aligned} \quad (7.85)$$

Входящие в (7.85) функции  $f_{rh}$  также составляются согласно (7.79):

$$\begin{aligned} f_{54} &= x'_{51} (x_{52} x_{21})' (x_{53} x_{31})' x_{54}; \\ f_{53} &= x'_{51} (x_{52} x_{21})' (x_{53} x_{31} \vee (x_{53} x_{31})' \times \\ &\quad \times (x_{54} x_{41})' (x_{54} f_{43} \vee x'_{54} x_{53})), \\ f_{52} &= x'_{51} (x_{52} x_{21} \vee (x_{52} x_{21})' (x_{53} x_{31})' \times \\ &\quad \times (x_{54} x_{41})' (x_{54} f_{42} \vee x'_{54} x_{53} f_{32})), \end{aligned} \quad (7.86)$$

$$\begin{aligned} f_{43} &= x'_{41} (x_{42} x_{21})' x_{43}, \quad f_{42} = x'_{41} ((x_{42} x_{21})' \times \\ &\quad \times (x_{43} x_{31})' x_{43} f_{32} \vee x_{42} x_{21}), \quad f_{32} = x'_{31} x_{32} x_{21}. \end{aligned} \quad (7.87)$$

Подставим (7.86) и (7.87) в (7.85), раскроем скобки и упростим, используя формулы (1.61a). В результате получим

$$\begin{aligned} f_{64} &= x'_{61} ((x_{62} x_{21})' (x_{63} x_{31})' x_{64} x_{41} \vee \\ &\quad \vee x_{65} x_{54} x'_{41} (x_{21} (x_{62} \vee x_{52}))' (x_{31} (x_{63} \vee \\ &\quad \vee x_{53}))' (x_{64} x_{41})' \vee (x_{62} x_{21})' (x_{63} x_{31})' x'_{41} x'_{65} x_{64}); \\ f_{63} &= x'_{61} ((x_{62} x_{21})' x_{63} x_{31} \vee x_{65} x_{53} x'_{51} \times \\ &\quad \times (x_{64} x_{41})' (x_{21} (x_{62} \vee x_{52}))' (x_{31} x_{63} \vee \\ &\quad \vee x'_{31} x'_{54}) \vee x_{65} x_{54} x_{43} x'_{41} (x_{31} (x_{63} \vee \\ &\quad \vee x_{53}))' (x_{21} (x_{42} \vee x_{52} \vee x_{62}))' \vee x_{63} x'_{64} \times \\ &\quad \times x'_{65} x'_{31} (x_{62} x_{21})' \vee x_{64} x_{43} x'_{65} x'_{41} (x_{63} x_{31})' \times \\ &\quad \times (x_{21} (x_{62} \vee x_{42}))), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{62} &= x'_{61} x'_{21} (x_{62} \sqrt{x'_{62} x'_{51} x_{65} (x_{52} \times \\
&\times (x_{63} x_{31})' (x_{64} x_{41})' \sqrt{x'_{52} x'_{41} x_{54} (x_{42} (x_{31} \times \\
&\times (x_{63} \sqrt{x_{53}})' \sqrt{x'_{31} x'_{42} x_{43} x_{32}})) \sqrt{ \\
&\sqrt{x'_{54} x'_{51} (x_{64} x_{41})' x_{62} x'_{52} x'_{31} \times \\
&\times x_{65} x_{53} x_{32} \sqrt{(x_{42} (x_{63} x_{31})' \sqrt{ \\
&\sqrt{x'_{42} x'_{31} x_{43} x_{32}}) x'_{65} x'_{62} x'_{41} x_{64} \sqrt{ \\
&\sqrt{x'_{65} x'_{64} x'_{62} x'_{31} x_{63} x_{32}}), \\
f_{53} &= x'_{51} ((x_{52} x_{21})' x_{53} (x_{31} \sqrt{x'_{31} x'_{54}}) \sqrt{ \\
&\sqrt{x'_{41} (x_{53} x_{31})' (x_{21} (x_{42} \sqrt{x_{52}})' x_{54} x_{43}), \\
f_{52} &= x'_{51} x_{21} (x_{52} \sqrt{x'_{52} (x'_{41} x_{54} ((x_{53} x_{31})' \times \\
&\times x_{42} \sqrt{x'_{42} x'_{31} x_{43} x_{32}}) \sqrt{x'_{54} x'_{31} x_{53} x_{32}})), \\
f_{42} &= x'_{41} x_{21} (x_{42} \sqrt{x'_{42} x'_{31} x_{43} x_{32}}).
\end{aligned} \tag{7.88}$$

Функции  $f_{65}$ ,  $f_{54}$ ,  $f_{43}$  и  $f_{32}$  определяются из (7.85)–(7.87). Слагаемые функции (7.88) ортогональные и все переменные в каждом слагаемом неповторные. Поэтому не представляет труда провести в них полное замещение. При равных вероятностях  $R_{ij} = p = 1 - q$  получаем следующие расчетные формулы:

$$\begin{aligned}
P_{65} &= pq(1-p^2)^3; \quad P_{64} = pq[(1-p^2)(p+q^2) + \\
&\quad + pq^3(1+pq^2)](1-p^2), \\
P_{63} &= p^2q[(1-p^2)(1+q^3(1+pq)) + q^3(1+ \\
&\quad + pq)(1-p^2+pq(1+pq^2))], \\
P_{62} &= p^2q[1+q^4((1+p)^3+2pq(1+ \\
&\quad + pq)-1)+p^2q^6(1+p)], \\
P_{54} &= pq(1-p^2)^2; \quad P_{53} = pq(1-p^2)(p+q^2+pq^2(1+pq)), \\
P_{52} &= p^2q(1+3pq^3).
\end{aligned} \tag{7.89}$$

Результаты расчетов по формулам (7.89) показаны на рис. 7.9, из которого следует, что распределение средней транзитной нагрузки по узлам существенно меняется при увеличении  $q$ . При малых  $q$  наибольшая транзитная у узла, указанного первым в ряде

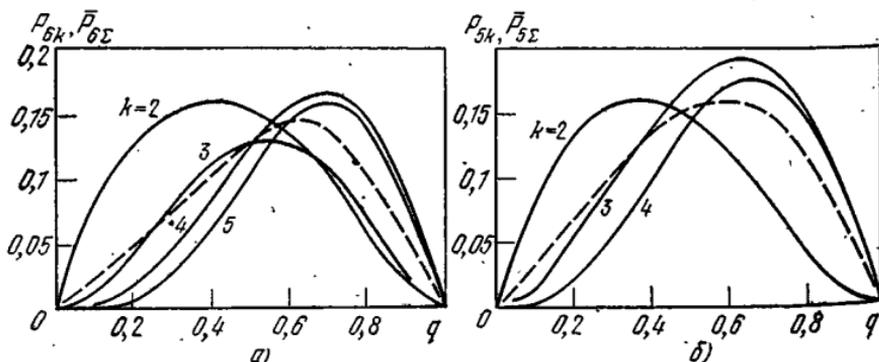


Рис. 7.9. Зависимость транзитной информационной нагрузки узлов в полносвязной сети с оповещением о состоянии прямой линии связи: а — передача из узла 6; б — из узла 5; — — —  $P_{i\Sigma}$

приоритетности путей. При увеличении  $q$  быстро увеличивается нагрузка узлов, имеющих высокий приоритет во втором ряде (ряде приоритетности линий связи). Нагрузки выравниваются в области значений  $q=0,55-0,65$  при передаче из узла  $\delta$  и в области  $q=0,45-0,55$  при передаче из узла  $\delta$ .

На рисунке штриховой линией показаны нагрузки, усредненные по всем транзитным узлам;  $\bar{P}_{6\Sigma} = 0,25 (P_{62} + P_{63} + P_{64} + P_{65}) = P_{6\Sigma}/4$ ;  $\bar{P}_{5\Sigma} = (P_{52} + P_{53} + P_{54})/3 = P_{5\Sigma}/3$ . Для  $q < 0,3$  суммарные нагрузки  $\bar{P}_{6\Sigma}$  и  $\bar{P}_{5\Sigma}$  практически совпадают, а при  $q > 0,3$  суммарная транзитная нагрузка больше при передаче из узла  $\delta$ . Обе характеристики в области  $q=0,6-0,65$  достигают максимума, равного  $0,56$  и  $0,48$  для  $n=6$  и  $5$  соответственно.

**Пример 7.9.** В трехсвязной ориентированной информационной сети с восемью узлами узлы  $3-7$  получают информацию от узлов  $2-4$  о состоянии линий связи  $21, 31$  и  $41$ . Ряды приоритетности путей построены в порядке возрастания, а ряды приоритетности линий связи — в порядке убывания номеров транзитных узлов. Необходимо найти среднюю информационную нагрузку транзитных узлов при передаче сообщений из узлов  $8, 7$  и  $6$ . Узлы считаются идеально надежными.

**Решение.** Логические функции нагрузки  $f_{5a}$  и  $f_{6a}$  и соответствующие им вероятности получаются из формул (7.85)–(7.88) после подстановки  $x_{51}=x_{61}=x_{62}=0$  и последующего полного замещения логических переменных. Перепишем их в более удобной форме:

$$\begin{aligned}
 f_{54} &= (x_{52}x_{21})' (x_{53}x_{31})' x_{54}, \quad f_{53} = (x_{52}x_{21})' \times \\
 &\quad \times x_{53} (x_{31} \vee x'_{31}x'_{54}) \vee f^*_{53}, \\
 f_{52} &= x_{21} (x_{52} \vee x'_{52}x'_{54}x'_{31}x_{53}x_{32}) \vee f^*_{52}, \\
 f^*_{53} &= x'_{41} (x_{53}x_{31})' (x_{21} (x_{42} \vee x_{52}))' x_{52}x_{43}, \\
 f^*_{52} &= x'_{52}x'_{41}x_{54}x_{21} (x_{42} (x_{53}x_{31})' \vee \\
 &\quad \vee x_{43}x_{32}x'_{42}x'_{31}), \quad f_{65} = (x_{63}x_{31})' (x_{64}x_{41})' x_{65}, \\
 f_{64} &= (x_{63}x_{31})' x_{64}x_{41} \vee x_{65}x_{54} (x_{52}x_{21})' \times \\
 &\quad \times (x_{64}x_{41})' (x_{31} (x_{53} \vee x_{63}))' \vee f^*_{64}, \\
 f_{63} &= x_{63} (x_{31} \vee x'_{31}x'_{64}x'_{65}) \vee x_{65}x_{53} (x_{52}x_{21})' (x_{64}x_{41})' \times \\
 &\quad \times (x_{31}x'_{63} \vee x'_{31}x'_{54}) \vee f^*_{63}, \\
 f^*_{64} &= x'_{41}x'_{65} (x_{63}x_{31})' x_{64}, \quad f^*_{63} = x'_{41}x_{43} (x_{65} \times \\
 &\quad \times x_{54} (x_{31} (x_{63} \vee x_{53}))' (x_{21} (x_{42} \vee x_{52}))' \vee \\
 &\quad \vee x_{64}x'_{65} (x_{63}x_{31})' (x_{42}x_{21})'), \\
 f_{62} &= x'_{65}x'_{64}x'_{31}x_{63}x_{22}x_{21} \vee f^*_{62} \vee (x_{64}x_{41})' f^{**}_{62}, \\
 f^*_{62} &= x'_{41}x_{21} (x'_{52}x_{65}x_{54} (x_{42} (x_{31} (x_{53} \vee \\
 &\quad \vee x_{43}))' \vee x'_{42}x'_{31}x_{43}x_{32}) \vee (x'_{42}x'_{31}x_{43}x_{32} \vee \\
 &\quad \vee x_{42} (x_{63}x_{31})' x'_{65}x_{64}), \\
 f^{**}_{62} &= x_{65}x_{21} (x_{52} (x_{63}x_{31})' \vee x'_{52}x'_{54}x'_{31}x_{53}x_{32}). \quad (7.90)
 \end{aligned}$$

Здесь все слагаемые ортогональные, а переменные в слагаемых бесповторные. Поэтому можно провести полное замещение.

Полагая затем  $R_{ij} = p - 1 - q$ , получаем расчетные формулы:

$$\begin{aligned} P_{54} &= p(1-p^2)^2, \quad P_{53} = p(1-p^2)[p+q^2+ \\ &+ pq^2(1+pq)], \quad P_{52} = p^2[1+pq^3(2+p+pq)], \\ P_{65} &= p(1-p^2)^2, \quad P_{64} = p(1-p^2)[p+q^2+ \\ &+ pq^2(1+pq)(1-p^2)], \\ P_{63} &= p^2[1+q^2(1-p^2)(1+q+2pq)+pq^3(1+pq)^2], \\ P_{62} &= p^3q^2[(1+p)(1+p+pq^2)+q(pq+2(1+p+p^2q))]. \end{aligned} \quad (7.91)$$

Составим расчетные формулы для логических функций при  $n=7$  и  $8$  и  $k < n$ . Учитывая, что при  $n=7$  выполняется соотношение  $n=2s+1$ , по формулам (7.82)–(7.84) с учетом (7.88) и (7.90) на-  
ХОДИМ

$$f_{75} = x_{76}x_{65}(x_{63}x_{31})'(x_{41}(x_{74}\sqrt{x_{64}})')\sqrt{ \\ \sqrt{x'_{76}(x_{74}x_{41})'}x_{75}}, \quad (7.92)$$

$$\begin{aligned} f_{74} &= x_{74}x_{41}\sqrt{x_{76}(x'_{74}(x_{63}x_{31})'x_{64}x_{41}\sqrt{ \\ \sqrt{(x_{52}x_{21})'}(x_{31}(x_{53}\sqrt{x_{63}})')(x_{41}(x_{74}\sqrt{ \\ \sqrt{x_{64}})')}x_{65}x_{54}\sqrt{x'_{65}(x_{63}x_{31})'x'_{41}x_{64}}\sqrt{ \\ \sqrt{x'_{76}((x_{74}x_{41})'(x_{52}x_{21})')(x_{53}x_{31})'x_{75}x_{54}}\sqrt{ \\ \sqrt{x'_{75}x'_{41}x_{74}})}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{73} &= x_{76}((x_{74}x_{41})'x_{63}(x_{31}\sqrt{x'_{31}x'_{64}x'_{65}})\sqrt{ \\ \sqrt{(x_{52}x_{21})'}(x_{41}(x_{74}\sqrt{x_{64}})')}x_{65}x_{53}(x_{31}x'_{63}\sqrt{ \\ \sqrt{x'_{31}x'_{54}}}\sqrt{f^*_{63}})\sqrt{x'_{76}x_{75}((x_{74}x_{41})'(x_{52}x_{21})' \times \\ \times x_{53}(x_{31}\sqrt{x'_{31}x'_{54}})\sqrt{x'_{41}(x_{21}(x_{42}\sqrt{ \\ \sqrt{x_{52}})')}x_{53}x_{31})'x_{54}x_{43}}\sqrt{x'_{76}x'_{75}} \times \\ \times x'_{41}(x_{42}x_{21})'x_{74}x_{43}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{72} &= x_{76}((x_{74}x_{41})'x'_{65}x'_{64}x'_{31}x_{63}x_{32}x_{21}\sqrt{f^*_{62}}\sqrt{(x_{41}(x_{74}\sqrt{x_{64}})')f^*_{62}}\sqrt{ \\ \sqrt{x'_{76}x_{75}(f^*_{52}\sqrt{(x_{74}x_{41})'x_{21}(x_{52}\sqrt{x'_{52}x'_{54}x'_{31}x_{53}x_{32})})\sqrt{ \\ \sqrt{x'_{76}x'_{75}x_{74}f_{42}}}. \end{aligned} \quad (7.93)$$

Здесь все слагаемые ортогональные и в каждом слагаемом только неповторные переменные. Поэтому и проводим полное замещение. При  $R_{ij} = p - 1 - q$  получим следующие расчетные формулы:

$$\begin{aligned} P_{76} &= p(1-p^2), \quad P_{75} = pq(1-p^2)(1+p+ \\ &+ p^2q), \quad P_{74} = p^2[1+q^2(1+p)(1+pq(1+ \\ &+ pq^2))] + pq^3[1+pq(1+p)^3], \\ P_{73} &= p^2\{(1-p^2)[p+2q^3+q^2((1+pq)^2+ \\ &+ (1+p)(p+q^2))] + pq^3[p(1+pq)^2+q(1+p)^2]\}, \\ P_{72} &= p^2q^2\{(1+pq)(1+p+pq^2)p^2+(1-p^2)(1+ \\ &+ pq^3)+pq[1+pq^2+p(1+2p)(1+pq)+pq(2+2p+ \\ &+ pq)]\}. \end{aligned} \quad (7.94)$$

Поскольку узел не получает информации оповещения, вероятность загрузки транзитных узлов определяется по формуле (7.50):

$$\begin{aligned} P_{8k} &= R_{87}P_{7k} + Q_{87}R_{86}P_{6k} + Q_{87}Q_{86}R_{85}P_{5k}, \quad k=2,5, \\ P_{86} &= R_{87}P_{76} + Q_{87}R_{86}, \quad P_{87} = R_{87}. \end{aligned} \quad (7.95)$$

Результаты расчетов по формулам (7.91), (7.94) и (7.95) представлены на рис. 7.10, из которого следует, что при небольших  $q$  основную транзитную нагрузку имеют узлы, занимающие первое место в ряде приоритетности путей: узлы 2, 3, 4 при передаче сообщений соответственно из узлов 5, 6 и 7. Нагрузка остальных узлов хотя и меньше, но остается на достаточно высоком уровне по сравнению с полносвязной системой (см. рис. 7.9). При передаче сообщений из узла 8 при небольших  $q$  основная транзитная нагрузка падает на узел 7.

Рассмотрим теперь, как распределяется информационная нагрузка по путям и линиям связи. При определении нагрузки путей

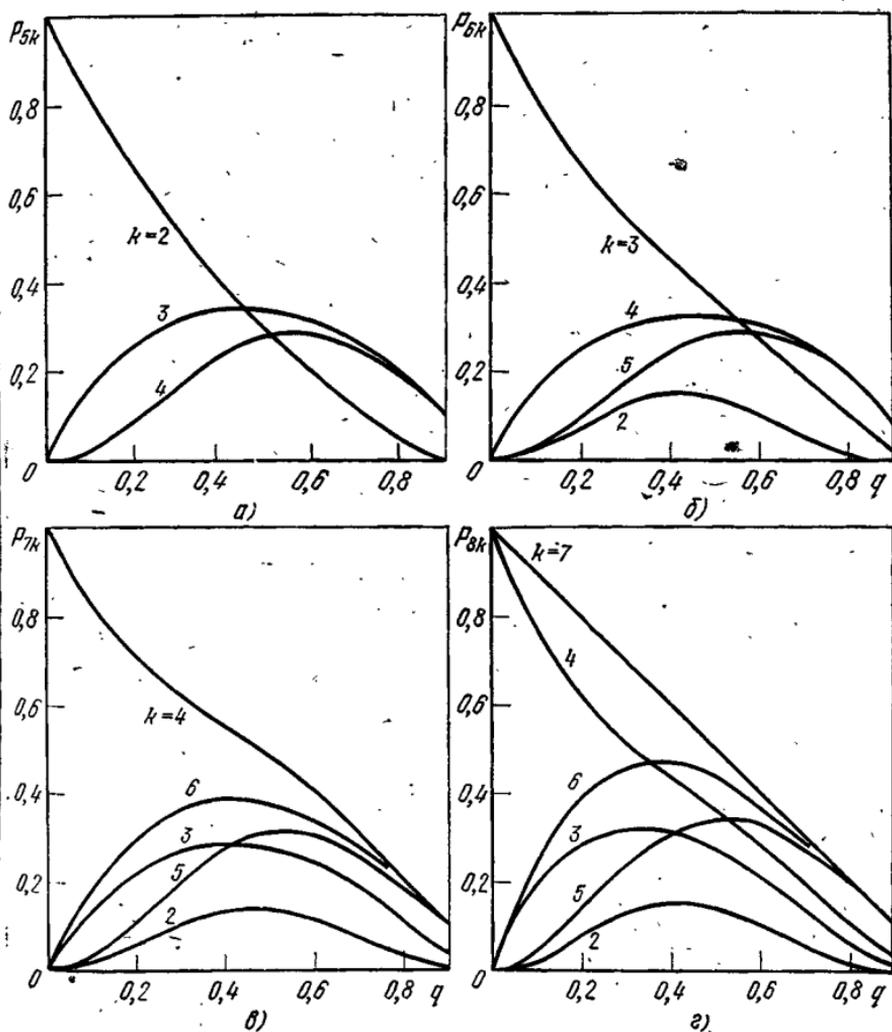


Рис. 7.10. Зависимость транзитной информационной нагрузки узлов от надежности линий связи в трехсвязной сети с оповещением о состоянии прямой линии связи:

а, б, в, г — передача из узлов 5, 6, 7 и 8 соответственно

будем различать пути двух типов: входящие и не входящие в ряд приоритетности. Для путей первого типа  $nk1$  логическая функция нагрузки

$$f_I = \bigwedge_{i < k} (x_{ni} x_i x_{i1})' x_n x_{nk} x_k x_{k1} x_1. \quad (7.96)$$

Для пути второго типа, проходящего через узлы  $n, i_1, \dots, i_m, 1$

$$f_I(i_m) = x_{i_m} x_{i_{m-1}} x_1,$$

$$f_I(n) = \bigwedge_{i=n-s}^{s+1} (x_{ni} x_i x_{i1})' \bigwedge_{j < i_1} x'_{nj} x_n x_{ni_1} f_I(i_1), \quad s+1 \leq n \leq 2s+1,$$

$$f_I(i_r) = x_{i_r} \bigwedge_{i=\max(i_r-s, 1)}^{\min(i_r, s+1)} (x_{i_r i} x_i x_{i1})' \left( \bigwedge_{j < i_{r+1}} x'_{i_r j} \right) f_I(i_{r+1}),$$

$$r = \overline{1, m-1}. \quad (7.97)$$

В (7.96) все логические переменные неповторные, в (7.97) некоторые переменные повторяются. Однако функции легко преобразуются к неповторному виду. Поэтому в обоих случаях удается провести полное замещение переменных и получить расчетные формулы для вероятностей использования путей.

При расчете информационной нагрузки линий связи, чтобы упростить обозначения, будем считать для определенности, что ряд приоритетности путей в узлах построен в порядке возрастания номера транзитного узла, хотя не представляет особых трудностей записать все нижеследующие формулы и для любой другой приоритетности. Тогда, обращаясь к общей формуле (7.78), запишем для линий, входящих в состав пути  $nk1$ :

$$f_{n, nk} = \tilde{B}'_{n1} (\tilde{B}_{n2} \vee \tilde{B}'_{n2} \tilde{B}'_{n3} \bigwedge_{j < k} x_{nj} x_n x_{nk} x_k), \quad (7.98)$$

$$f_{n, k1} = \tilde{B}'_{n1} (\tilde{B}_{n2} \vee \tilde{B}'_{n2} \tilde{B}'_{n3} g_{nk} x_{k1}) = f_{nk} x_{k1}, \quad (7.99)$$

где

$$\tilde{B}'_{n1} = \bigvee_{r=n-s}^{k-1} x_{ni} x_i x_{i1}, \quad \tilde{B}_{n2} = x_n x_{nk} x_{k1}, \quad \tilde{B}_{n3} = \bigvee_{i=k+1}^{s+1} x_{ni} x_i x_{i1},$$

$$g_{nk} = \bigvee_{r=3}^{n-1} x_n x_{nr} \bigwedge_{j < r} x'_{nj} f_{rk}. \quad (7.100)$$

Если линия связи  $kl$  не входит в состав пути, включенного в ряд приоритетности, то

$$f_{n, kl} = \bigwedge_{i=1}^{n-1} (x_{ni} x_i x_{i1})' g_{nk} f_{k, kl}, \quad (7.101)$$

где  $g_{nk}$  — определяется по формуле (7.100), а  $f_{k, kl}$  — либо по формуле (7.98), если в сети есть линия связи  $l1$  либо по формуле (7.101) в противоположном случае. В обоих случаях в формулах индекс  $n$  предварительно заменяется на  $k$ .

## 5-связная сеть с оповещением смежных узлов о наличии работоспособного пути к адресату

В гл. 6 было замечено, что по вероятности доставки сообщений оповещение о наличии хотя бы одного работоспособного пути не уступает полному оповещению. Однако при таком оповещении происходит перераспределение нагрузок элементов сети (и иногда весьма существенное) по сравнению с полным оповещением, связанное с тем, что здесь не удается уже на узле-отправителе полностью определить маршрут сообщений и фактический маршрут не всегда получается кратчайшим среди возможных работоспособных.

Алгоритм выбора маршрута базируется на ряде приоритетности направлений связи  $ki_{k1}, ki_{k2}, \dots, ki_{ks}$ . Направление  $ki_{k1}$  считается работоспособным, если в нем есть работоспособный путь. Если же его нет, то выбирается следующее по приоритетности работоспособное направление. На каждом узле выбирается не весь маршрут, а только направление передачи до ближайшего смежного узла. На этом узле также работает алгоритм выбора маршрута, по которому определяется следующее направление передачи, и так до самого адресата.

Найдем выражение для логических функций информационной нагрузки путей, узлов и линий связи. Пусть некоторый путь  $I$  проходит через узлы  $n, j_1, j_2, \dots, j_m, 1$ . Тогда логическую функцию нагрузки пути можно определить из рекуррентного соотношения

$$f_I(n) = \bigwedge_{j \prec j_1} (x_{nj} f_j)' x_n x_{n j_1} f_I(j_1), \quad (7.102)$$

$$f_I(j_r) = \bigwedge_{j \prec j_{r+1}} (x_{j_r j} f_j)' x_{j_r} x_{j_r j} f_I(j_{r+1}), \quad r = \overline{1, m-1},$$

$$f_I(j_m) = x_{j_m} x_{j_m 1} x_1.$$

Здесь  $f_j$  — логические функции успешности доведения сообщения из узла  $j$  в узел  $I$ , определяемые по формулам из § 6.2. В (7.102) бесповторными переменными являются  $x_n, x_{n j_1}$ . Поэтому можно перейти к смешанной форме, проведя замещение этих переменных, а затем провести многошаговую процедуру замещения остальных переменных. В этом случае

$$P_I(n, f_I(j_1), j_j) = \prod_{j \prec j_1} Q_{nj}^{f_I} R_n (1 - Q_{nj}^{f_I(j_1)}). \quad (7.103)$$

Дальнейшее замещение происходит по общим правилам, изложенным в § 6.1 и 6.2. Эту общую процедуру обычно удается сократить, если (7.102) выразить некоторые  $f_i$  через  $f_j$  по формулам (6.14) и провести упрощения для увеличения числа бесповторных переменных. Во многих случаях этот путь позволяет сделать все переменные бесповторными и провести полное замещение. Информационная нагрузка узлов и линий связи может быть выражена через нагрузки путей. Для этого необходимо просуммировать нагрузки всех путей, проходящих через данный узел или линию связи. Этот способ хотя и принципиально возможен, но трудоемок, так как надо искать предварительно нагрузки путей. На практике удоб-

неё определять нагрузку узлов и путей непосредственно, составляя логические функции нагрузки. В этом случае логические функции нагрузки узлов и линий связи определяются по формулам

$$f_{nk} = \bigvee_{r=m}^{n-1} x_n \left( \bigwedge_{j \leq r} (x_{nj} f_j) \right)' x_{nr} f_r k f_k, \quad m = \max(k+1, n-s), \quad (7.104)$$

$$f_{n,kl} = f_{nk} \left( \bigwedge_{j \leq l} (x_{kj} f_j)' x_{kl} f_l \right). \quad (7.105)$$

Благодаря ортогональности слагаемых в (7.104) замещение переменных на первом шаге можно проводить независимо в каждом слагаемом.

**Пример 7.10.** В полностью связанной сети с пятью узлами узлы 5, 4 и 3 оповещаются узлами с меньшими номерами о наличии работоспособного пути к  $l$ . Ряд приоритетности направлений связи имеет вид 51, 54, 53, 52, 41, 43, 42, 31, 32. Необходимо найти информационную нагрузку путей, узлов и прямых линий связи с 1, считая узлы идеально надежными.

**Решение.** Перенумеруем все возможные пути между полюсами системы в следующем порядке: 51, 541, 531, 521, 5431, 5421, 5321, 54321. Тогда согласно (7.103) логические функции нагрузки путей  $f_{5,r}$ :

$$\begin{aligned} f_{5,51} &= x_{51}, \quad f_{5,531} = x'_{51} (x_{54} f_4)' x_{53} x_{31} = \\ &= x'_{51} (x_{54} (x_{41} \vee x_{43} \vee x_{42} x_{21}))' x_{53} x_{31}, \\ f_{5,521} &= x'_{51} (x_{54} f_4)' (x_{53} f_3)' x_{52} x_{21} = \\ &= x'_{51} (x_{54} (x_{41} \vee x_{42} \vee x_{43} f_3))' (x_{53} f_3)' x_{52} x_{21}, \\ f_{5,541} &= x'_{51} x_{54} x_{41}, \quad f_3 = x_{31} \vee x_{32} x_{21}, \\ f_{5,5431} &= x_{54} f_{4,431} = x'_{41} x_{54} x_{43} x_{31}, \\ f_{5,5421} &= x'_{51} x_{54} f_{4,421} = x'_{51} x'_{41} (x_{43} f_3)' x_{54} x_{42} x_{21}, \\ f_{5,5321} &= x'_{51} (x_{54} f_4)' x_{53} f_{3,321} = \\ &= x'_{51} x'_{31} (x_{54} (x_{41} \vee x_{42} \vee x_{43}))' x_{53} x_{32} x_{21}, \\ f_{5,54321} &= x_{54} f_{4,4321} = x'_{51} x'_{41} x'_{31} x_{54} x_{43} x_{32} x_{21}. \end{aligned}$$

Отсюда при  $R_{ij} = p = 1 - q$  получаем расчетные формулы

$$\begin{aligned} P_{5,51} &= p, \quad P_{5,541} = qp^2, \quad P_{5,531} = q^2 p^2 (1 + \\ &+ pq^2 (1 + p)), \quad P_{5,521} = p^2 q^3 [(1 - q^2) \times \\ &\times (1 + pq) + q(1 + pq)], \\ P_{5,5421} &= q^3 p^3 (1 + pq), \quad P_{5,5321} = p^3 q^3 (1 + pq^2), \\ P_{5,54321} &= q^3 p^4. \end{aligned} \quad (7.106)$$

Логические функции нагрузки узлов

$$\begin{aligned} f_{53} &= x'_{51} (x_{54} x'_{41} x_{43} \vee (x_{54} (x_{41} \vee x_{42} \times \\ &\times x_{21} \vee x_{43}))' x_{53}) f_3, \\ f_{52} &= x'_{51} (x_{54} x'_{41} (x_{43} (x_{31} \vee x_{32}))' x_{42} \vee \\ &\vee x'_{31} (x_{54} (x_{41} \vee x_{42} \vee x_{43}))' x_{53} x_{32} \vee \\ &\vee x_{52} (x_{53} (x_{31} \vee x_{32}))' (x_{54} (x_{41} \vee x_{42} \vee \\ &\vee x_{43} (x_{31} \vee x_{32})))' x_{21}. \end{aligned}$$

В функциях  $f_{54}$  и  $f_{53}$  неповторные все переменные, кроме  $x_{21}$ , а в  $f_{52}$  все, кроме  $x_{31} \vee x_{32}$ . Поэтому замещение проводится в два шага: сначала записывается смешанная форма, а затем в ней проводится разрезание по указанным переменным. Окончательно имеем

$$\begin{aligned}
 P_{54} &= Q_{51} R_{54} [R_{21} (1 - Q_{41} Q_{42} (Q_{43} + \\
 &+ R_{43} Q_{31} Q_{32})) + Q_{21} (R_{41} + Q_{41} R_{43} R_{31})], \\
 R_{53} &= Q_{51} [R_{21} (1 - Q_{31} Q_{32}) (Q_{41} R_{54} R_{43} + \\
 &+ R_{53} (Q_{54} + R_{54} Q_{41} Q_{42} Q_{43})) + \\
 &+ Q_{21} R_{31} (Q_{41} R_{54} R_{43} + R_{53} (Q_{54} + R_{54} Q_{41} Q_{43}))], \\
 P_{52} &= Q_{51} R_{21} [R_{54} R_{42} Q_{41} (Q_{43} + \\
 &+ R_{43} Q_{31} Q_{32}) + R_{53} R_{32} Q_{31} (Q_{54} + R_{54} Q_{41} \times \\
 &\times Q_{42} Q_{43}) + R_{52} ((1 - Q_{31} Q_{32}) (Q_{54} + \\
 &+ R_{54} Q_{41} Q_{42} Q_{43}) Q_{53} + Q_{31} Q_{32} (Q_{54} + R_{54} Q_{41} Q_{42}))]. \quad (7.107)
 \end{aligned}$$

Логические функции нагрузки линий связи  $k1$  определяется по формуле  $f_{5,k1} = f_{5k} x_{k1}$ . После упрощений имеем

$$\begin{aligned}
 f_{5,41} &= x'_{51} x_{54} x_{41}, \quad f_{5,31} = x'_{51} x_{31} (x_{54} \times \\
 &\times x_{43} x'_{41} \vee (x_{54} (x_{41} \vee x_{42} x_{21} \vee x_{43}))' x_{53}), \quad f_{5,21} = f_{52}.
 \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
 P_{5,41} &= Q_{51} R_{54} R_{41}, \quad P_{5,21} = P_{52}, \\
 P_{5,31} &= Q_{51} R_{31} [Q_{41} R_{54} R_{43} + \\
 &+ (Q_{54} + R_{54} Q_{41} Q_{43} (1 - R_{42} R_{21})) R_{53}]. \quad (7.108)
 \end{aligned}$$

Для сравнения приведем здесь в окончательном виде расчетные формулы для значений информационной нагрузки в том случае, если на узлах 5 и 4 ряды приоритетности имеют вид 51, 52, 53, 54, 41, 42, 43. Тогда

$$\begin{aligned}
 P_{5,521} &= Q_{51} R_{52} R_{21}, \quad P_{5,531} = Q_{51} (1 - R_{52} R_{21}) R_{53} R_{31}, \\
 P_{5,541} &= Q_{51} R_{54} R_{41} (Q_{52} R_{53} R_{21} (1 - Q_{31} Q_{32}) + Q_{21} (1 - R_{53} R_{31})), \\
 P_{5,5321} &= Q_{51} Q_{52} Q_{31} R_{32} R_{21} R_{53}, \\
 P_{5,54321} &= Q_{51} Q_{52} Q_{53} Q_{41} Q_{42} Q_{31} R_{54} R_{43} R_{32} R_{21}, \\
 P_{5,5431} &= Q_{51} Q_{52} Q_{53} (1 - R_{42} R_{21}) R_{54} R_{43} R_{31}, \\
 P_{5,5421} &= Q_{51} Q_{52} Q_{41} (Q_{53} + R_{53} Q_{31} Q_{32}) R_{54} R_{42} R_{21}, \\
 P_{52} &= Q_{51} R_{21} [R_{52} + Q_{52} (Q_{31} R_{53} R_{32} + \\
 &+ Q_{41} R_{54} R_{42} (Q_{53} + R_{53} Q_{31} Q_{32}))], \\
 P_{53} &= Q_{51} R_{53} [R_{21} Q_{52} (1 - Q_{31} Q_{32}) + Q_{21} R_{31}], \\
 P_{54} &= Q_{51} R_{54} [R_{21} Q_{52} [(1 - Q_{31} Q_{32}) (1 - \\
 &- Q_{41} Q_{42} Q_{43}) Q_{53} + Q_{31} Q_{32} (1 - Q_{41} Q_{42})] + \\
 &+ Q_{21} [Q_{53} R_{31} (1 - Q_{41} Q_{43}) + Q_{31} R_{41}]], \\
 P_{5,21} &= P_{52}, \quad P_{5,31} = Q_{51} R_{53} R_{31} (1 - R_{52} R_{21}), \\
 P_{5,41} &= Q_{51} R_{54} R_{41} [Q_{52} R_{21} ((1 - Q_{31} Q_{32}) Q_{53} + Q_{31} Q_{32}) + \\
 &+ Q_{21} (1 - R_{53} R_{31})]. \quad (7.109)
 \end{aligned}$$

Результаты расчетов по формулам (7.106)—(7.109) приведены на рис. 7.11, из которого видно, что при обоих алгоритмах выбора маршрута нагрузка путей уменьшается при увеличении номера пути в ряду приоритетности. Для путей с одинаковым числом транзитных узлов наибольшие различия в нагрузке при небольших  $q$ . С увеличением  $q$  значения  $P_{5,l}$  сближаются. Однако следует отметить, что при алгоритме 1 нагрузка путей с двумя транзитными узлами выше, чем при алгоритме 2, и для небольших  $q$  ( $q < 0,2$ ) близка к нагрузке пути 521. Поэтому в среднем время доставки сообщений при алгоритме 1 будет больше, чем при алгоритме 2.

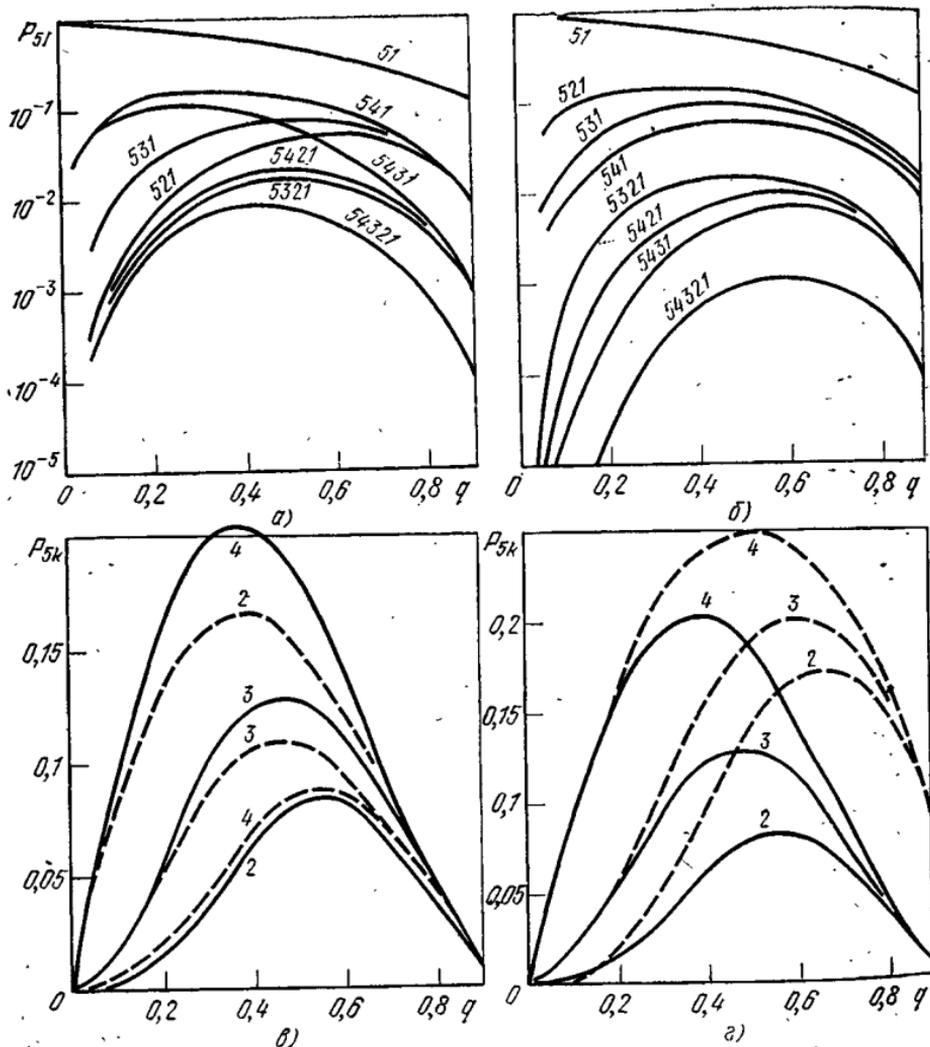


Рис. 7.11. Зависимость информационной нагрузки путей и узлов от надежности линий связи в полностью связанной системе с оповещением узлов о наличии работоспособного пути адресату:

а, в, г — алгоритм 1; б — алгоритм 2

Зато уровень потерь в системе в первом случае ниже, чем во втором (см. пример 6.7). На рис. 7.11,а сплошной линией показаны значения транзитной нагрузки узлов при алгоритме 1, штриховой при алгоритме 2. Согласно графикам нагрузка максимальна при  $q=0,35-0,4$  для узла с наивысшим приоритетом и  $q=0,35-0,6$  для узла с низшим приоритетом. Для сравнения на рис. 7.11,б показаны значения транзитной нагрузки узлов системы без оповещения (штриховая линия) и с частичным оповещением (сплошная линия) при алгоритме 1. Из рисунка видно, что для всех узлов нагрузка при частичном оповещении меньше, чем при неполном оповещении, причем независимо от  $q$ . Это можно объяснить тем, что в системе без оповещения сообщения транзитным узлам подаются даже в том случае, если они вследствие отказа не могут передавать их дальше адресату. При частичном оповещении состояние узлов 2—4 известно узлу 5 и сообщения отправляются транзитному узлу только тогда, когда он работоспособен.

В заключение заметим, что модифицированный ЛВМ может успешно применяться и для расчета информационной нагрузки и при многоадресных сообщениях с учетом возможного возникновения копий сообщений в транзитных узлах, продвигающихся к абонентам по различным маршрутам. Как и в задачах надежности, здесь также удастся алгоритмизировать расчеты и применить ЭВМ. Это обеспечивается общностью записи исходной смешанной формы и единством правил замещения логических переменных.

## Глава 8

### АНАЛИЗ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМ С ВЕТВЯЩЕЙСЯ СТРУКТУРОЙ И МЕРИДИАННЫМИ СВЯЗЯМИ

#### 8.1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Системами с ветвящейся структурой (или ветвящимися системами) называют системы, состоящие из одного или нескольких центральных устройств (звеньев, узлов) и группы периферийных устройств (звеньев, узлов), предназначенных для выполнения общего задания и объединенных общей целью функционирования. К классу ветвящихся относятся системы централизованного контроля (СЦК), системы передачи данных (СПД), вычислительные системы (ВС), автоматизированные системы управления (АСУ). Особенность их функциони-

рования состоит в том, что устройства и звенья систем имеют определенное функциональное подчинение. Поэтому в системе выделяют группы устройств и звеньев первого, второго,  $m$ -го уровней (рангов), назначаемых в порядке подчиненности. Периферийные устройства (ПУ) являются устройствами младшего уровня (ранга). Совокупность ПУ имеет некоторую функциональную избыточность, и отказ одного и даже нескольких из них приводит не к отказу системы, а лишь к некоторому снижению качества функционирования, что обычно зависит не только от числа ПУ, но и от того, какая именно совокупность ПУ отказала, так как влияние разных устройств на качество функционирования системы может быть различным.

При наличии нескольких рангов подчинения ситуация усложняется, поскольку отказ устройства промежуточного ранга может сделать невозможной нормальную работу подчиненных ему устройств. Отказ центрального устройства (звена) часто приводит к полной потере качества и полному отказу системы либо к полной потере некоторых важных функций. Обычно каждому звену более высокого ранга подчинено несколько звеньев низшего ранга. Поэтому число звеньев одного ранга увеличивается при переходе от центральной части системы к периферии. За это свойство системы и получили название ветвящихся или систем с ветвящейся структурой (СВС).

Структуры многих ветвящихся систем можно изобразить в виде графа типа «дерево» (рис. 8.1). В них каждый узел имеет связь с узлами соседних рангов и не имеет связи с узлами того же ранга или через несколько рангов. В общем случае возможны произвольные связи между узлами различных рангов (меридианные связи) и узлами одного ранга (широтные или рокадные). В системе с меридианными связями полезно ввести понятие ветви. Ветвью называют фрагмент ветвящейся структуры, содержащий центральный узел (или узлы), один периферийный узел и все линии связи и узлы промежуточных рангов, которые принимают или могут принять участие во взаимодействии центрального и периферийного узлов. Ветвь называют простой, если в нее входит не более одного узла каждого ранга. Простые ветви могут быть односвязными, многосвязными, полносвязными и с произвольными связями между уз-

лами. Если в системе все ветви простые, то она является системой с однозначным подчинением (рис. 8.2,а). В отличие от них системы с неоднозначным подчинением имеют ветви, содержащие по несколько узлов одного ранга (рис. 8.2,б). Если все ветви одинаковы, то структура является изотропной. Каждый узел и каждая линия связи могут иметь сложную структуру. Однако в структуре системы они представляются одним элементом с эквивалентными показателями надежности. Это

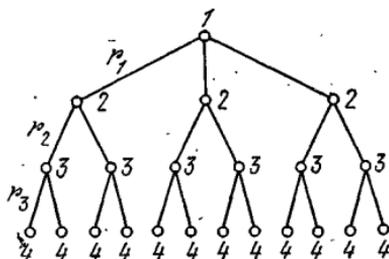


Рис. 8.1. Ветвящаяся структура типа «дерево».

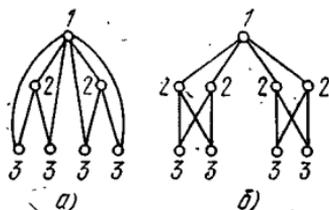


Рис. 8.2. Система с однозначным (а) и неоднозначным (б) подчинением узлов

выполняется сравнительно просто, если исходная структура узла и линии связи является двухполюсником. Если же это не так, то требуется эквивалентное преобразование структуры к двухполюснику или более подробное ее представление в структуре системы.

Важной особенностью СВС является то, что в них не удается однозначно сформулировать понятие отказа системы, так как при отказах любых элементов, кроме центрального узла, происходит не полная потеря качества функционирования, а лишь некоторое его снижение. Это затрудняет получение скалярного показателя качества функционирования. Для преодоления этой трудности можно предложить два подхода. Первый — это переход от показателей надежности к показателям эффективности [9, 68]. Понимая работоспособность ветви в том же смысле, что и в гл. 6, и определяя для изотропной системы распределение числа работоспособных ветвей как

$$P_k(t) = P(K(t) = k), \quad (8.1)$$

составляем показатель эффективности как математическое ожидание некоторой меры качества функциониро-

вания системы

$$\bar{E}(t) = M(E(t)) = \sum_{k=0}^N E_k P_k(t), \quad (8.2)$$

где  $E_k$  — уровень качества функционирования в состоянии  $k$  (при наличии  $k$  работоспособных ветвей);  $N$  — число периферийных узлов или ветвей.

Аналогичное выражение легко записать и для любой неізотропной системы. В частности, если  $E_k$  допускает представление в виде полинома

$$E_k = \sum_{i=0}^{\infty} a_i k^i,$$

то (8.2) приобретает вид

$$\bar{E} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \alpha_i, \quad (8.3)$$

где  $\alpha_i = MK^i$  —  $i$ -й начальный момент распределения числа работоспособных ветвей. Если некоторое  $\alpha_i = 1$ , а прочие  $\alpha_j = 0$  ( $j \neq i$ ), то

$$\bar{E} = \alpha_i = \sum_{k=1}^N k^i P_k.$$

При  $i=1$  показателем эффективности является среднее число работоспособных ветвей. Заметим, что в изотропной системе в соответствии с теоремой умножения теории вероятностей независимо от того, имеют ветви общие элементы или нет, среднее число работоспособных ветвей определяется по формуле

$$\bar{N} = M\left(\sum_{i=1}^N \xi_i(t)\right) = \sum_{i=1}^N M(\xi_i(t)) = NM(\xi(t)) = NP(f=1), \quad (8.4)$$

где  $\xi_i(t)$  — индикатор работоспособности  $i$ -й ветви;  $P(f=1)$  — вероятность того, что в момент  $t$  произвольно выбранная ветвь работоспособна. Эта вероятность определяется по правилам, изложенным в гл. 6.

Отсюда следует, что все результаты этой главы можно использовать не только для двухполюсных структур,

но и при вычислении показателя эффективности (8.4) ветвящейся системы. Коэффициенты  $E_k$  в формуле (8.2) определяются достаточно просто, если мера качества имеет определенный физический смысл, например объем доставляемой или получаемой информации в информационной системе, уровень располагаемой мощности в энергетических системах, число одновременно включаемых в работу установок и т. д. В других случаях

возникают серьезные трудности. Уменьшение точности и достоверности задания  $E_k$  уменьшает ценность расчетов показателя эффективности и делает их целесообразность проблематичной. В этом случае можно использовать второй подход. Он состоит в использовании вектора показателей надежности, вычисляемых для различных определений понятия «отказ системы», соответствующих различным порогам снижения качества функционирования. Для невозстанавливаемой изотропной системы находят вероятности

$$\begin{aligned} R_c(t, n) &= P(T_0(m) > t) = \pi_m(t) = \\ &= \sum_{k=N-m}^N P_k(t) = P(\zeta(t) \geq N-m), \end{aligned} \quad (8.5)$$

где  $T_0(m)$  — наработка системы до момента, когда откажет  $(N-m+1)$ -я ветвь;  $\zeta(t)$  — число работоспособных ветвей в момент  $t$ . При различных  $m$  получается семейство зависимостей вероятностей от времени (рис. 8.3). Для восстанавливаемой системы вероятность  $\pi_m(t)$  имеет смысл функции  $K_{гс}(t, m)$  или коэффициента готовности:

$$K_{гс}(m) = \sum_{k=N-m}^N P_k. \quad (8.6)$$

Кроме показателей (8.5) и (8.6) представляют интерес и показатели информационной нагрузки элементов системы в режиме централизованного сбора или передачи информации центральным узлом. В отличие от

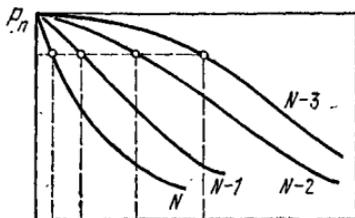


Рис. 8.3. Семейство зависимостей вероятностей работоспособного состояния от времени при различных определениях понятия «отказ ветвящейся системы»

двухполюсных систем. в СВС нагрузка узла и линий связи может быть большой, так как через них могут передавать сообщения многие периферийные узлы. В качестве показателей информационной нагрузки можно использовать:

— коэффициент информационной нагрузки  $K_{ni}^0$ , выражающий вероятность того, что в произвольный момент времени для восстанавливаемой системы и в некоторый момент  $t$  для невозстанавливаемой данная подсистема (путь, узел, линия связи, группа путей, узлов и т. д.) будет работоспособна и примет участие во взаимодействии центрального и одного из периферийных узлов;

— коэффициент использования  $K_{ni}^0$ , равный отношению  $K_{ni}^0$  к коэффициенту готовности подсистемы  $K_{ni}$  и выражающий долю времени пребывания в работоспособном состоянии, в течение которого подсистема используется при взаимодействии центрального и одного из периферийных узлов;

— распределение числа ветвей, в которых данная подсистема используется при взаимодействии центрального и периферийных узлов.

Как и при расчете показателей работоспособности, коэффициент информационной нагрузки и коэффициент использования подсистемы при работе одной ветви изотропной системы можно трактовать соответственно как безусловную среднюю долю информационной нагрузки и условную среднюю долю информационной нагрузки при условии, что рассматриваются только интервалы времени работоспособного состояния подсистемы.

## 8.2. НАДЕЖНОСТЬ ИЗОТРОПНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЗНАЧНЫМ ПОДЧИНЕНИЕМ УЗЛОВ ПРИ ПОЛНОМ ОПОВЕЩЕНИИ О СОСТОЯНИИ СЕТИ

Рассмотрим систему, структурная схема которой приведена на рис. 6.2: узел 1 является центральным, узел  $n$  — периферийным, а узлы  $2, n-1$  промежуточными. В изотропной структуре все ветви одинаковы, поэтому параметрами структуры являются:  $n$  — число рангов,  $r_i$  — коэффициент разветвления при переходе от  $i$ -го ранга к  $(i+1)$ -му, равный числу узлов  $(i+1)$ -го ранга, соединенных с одним узлом  $i$ -го ранга,  $R_i = 1 - Q_i$  — вероятность работоспособного состояния каждого узла  $i$ -го

ранга,  $R_{ij}=1-Q_{ij}$  — вероятность работоспособного состояния каждой линии связи между звеньями  $i$ -го и  $j$ -го рангов. Общее число периферийных узлов  $N=r_1 r_2 \dots r_{n-1}$ . Модель системы с полносвязными ветвями включает в себя как частные случаи системы односвязные (типа «дерево») и многосвязные. Для получения результатов по этим системам из результатов для полносвязной системы достаточно положить равными нулю вероятности  $R_{ij}$  отсутствующих линий связи.

Найдем производящий полином распределения числа работоспособных ветвей. Построение полинома с помощью модифицированного ЛВМ проходит в несколько этапов.

1. Запись логической функции работоспособности ветви. Логическая функция определяется по формулам (6.13) при  $s=n-1$ .

2. Составление СФФВ для одной ветви. В формуле (6.13) проводится частичное замещение. Замещаются неповторяющиеся переменные  $x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{n,n-1}$ , согласно теореме 7 гл. 1:

$$P_n(f_1, f_2, \dots, f_{n-1}) = R_n \left( 1 - \prod_{i=1}^{n-1} Q_{ni}^{f_i} \right). \quad (8.7)$$

3. Составление производящего полинома для одной ветви. Поскольку ветвь может находиться только в двух состояниях, то

$$\Phi_n^{(n)}(z, f_1, f_2, \dots, f_{n-1}) = 1 - P_n + P_n z = 1 + P_n(z - 1), \quad (8.8)$$

где нижний индекс указывает число рангов в системе, а верхний — ранг узла, к которому относится данный полином.

4. Возведение производящего полинома в степень, равную коэффициенту разветвления на ярусе. Смысл этого действия заключается в следующем. Полином (8.2) можно рассматривать как производящий полином распределения случайной величины  $\xi_{ni}$ , принимающий два значения; 1 или 0. Число работоспособных ветвей, проходящих через один узел  $(n-1)$ -го ранга, является случайной величиной, равной сумме случайных величин  $\xi_{ni}$ :

$$\xi_{n-1, i} = \sum_{j=1}^{n-1} \xi_{nj}. \quad (8.9)$$

Из теории вероятностей известно, что производящий полином распределения суммы независимых случайных величин равен произведению производящих полиномов слагаемых, а если слагаемые имеют одинаковые распределения, то  $r_{n-1}$ -й степени полинома распределения одного из слагаемых. Но в (8.9) слагаемые, вообще говоря, зависимы, так как некоторые пути в различных ветвях имеют общие участки. Поэтому умножать или возводить в степень полиномы с коэффициентами, не содержащими незамещенных логических переменных, нельзя. Однако эту трудность можно преодолеть, не нарушив законов теории вероятностей, если применить модифицированный ЛВМ и СФФВ. Для этого необходимо все логические переменные, соответствующие независимым элементам  $n$ -го ранга, заместить на вероятности, а переменные, соответствующие общим участкам путей, перевести в показатели степени, как это сделано в формуле (8.7). Тогда можно найти характеристики случайной величины (8.9) с помощью приемов, используемых для получения характеристик суммы независимых случайных величин. В этом состоит одна из основных особенностей модифицированного ЛВМ и одно из его важных полезных свойств. В частности, производящий полином распределения величины  $\xi_{n-1,i}$  получается возведением в степень полинома (8.8) с коэффициентами в смешанной форме:

$$\Phi_n^{(n-1)}(z, f_1, f_2, \dots, f_{n-1}) = [\Phi_n^{(n)}(z, f_1, f_2, \dots, f_{n-1})]^{r_{n-1}} / \quad (8.10)$$

5. Замещение логических переменных, относящихся к  $(n-1)$ -му рангу. Используя вторую и третью теоремы разложения, а также учитывая формулу (6.13), преобразуем (8.10) следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi_n^{(n-1)}(z, f_1, f_2, \dots, f_{n-2}) &= \\ &= P(f_{n-1}=1) [\Phi_n^{(n)}(z, f_1, f_2, \dots, f_{n-2}, 1)]^{r_{n-1}} + \\ &+ P(f_{n-1}=0) [\Phi_n^{(n)}(z, f_1, f_2, \dots, f_{n-2}, 0)]^{r_{n-1}}, \quad (8.11) \end{aligned}$$

где

$$P(f_{n-1}=1) = 1 - P(f_{n-1}=0) = R_{n-1} \left( 1 - \prod_{i=1}^{n-2} Q_{n-1,i}^f \right).$$

Здесь снова оказались замещенными только логические переменные  $n$ -го и  $(n-1)$ -го рангов, соответствующие независимым участкам путей, а логические переменные общих участков по-прежнему записаны в показателях степени. Поэтому полином вновь можно возводить в степень как полином распределения суммы независимых случайных величин.

6. Возведение в степень производящего полинома и замещение логических переменных, относящихся к ярусам 1,  $n-2$ . Представляя число работоспособных ветвей с общим узлом  $i$ -го ранга ( $i=1, n-2$ ) в виде суммы чисел работоспособных ветвей с общим узлом  $(i+1)$ -го ранга, можно предложить процедуру свертки распределений вероятностей, записанных в смешанной форме, путем последовательного возведения в степень производящего полинома и замещения неповторных переменных. Для этого полином (8.11) возводим в степень  $r_{n-2}$  и замещаем переменные  $x_{n-2}$  и  $x_{n-2,i}$ , затем возводим в степень  $r_{n-3}$  и замещаем переменные  $x_{n-3}$  и  $x_{n-3,i}$  и т. д. Таким образом выполняется многошаговая процедура, на каждом шаге которой выполняется преобразование

$$\Phi_n^{(i)}(z, f_1, \dots, f_i) = [\Phi_n^{(i+1)}(z, f_1, \dots, f_i)]^{r_i}; \quad (8.12)$$

$$\begin{aligned} \Phi_n^{(i)}(z, f_1, \dots, f_{i-1}) = & P(f_i = 1) \Phi_n^{(i)}(z, f_1, \dots, f_{i-1}, 1) + \\ & + P(f_i = 0) \Phi_n^{(i)}(z, f_1, \dots, f_{i-1}, 0), \end{aligned} \quad (8.13)$$

где  $P(f_i = 1) = R_i \left( 1 - \prod_{j=1}^{i-1} Q_{ij}^{f_j} \right)$ .

Рассмотрим некоторые частные случаи.

### Структура типа «дерево»

Логическая функция работоспособности ветви

$$f_n = x_n x_{n, n-1} f_{n-1}, \quad f_i = x_i x_{i, i-1} f_{i-1}, \quad i = \overline{2, n-1}; \quad f_1 = x_1. \quad (8.14)$$

Производящий полином для одной ветви

$$\Phi_n^{(n)}(z, f_{n-1}) = 1 + (z-1) R_n (1 - Q_{n, n-1}^{f_{n-1}}).$$

После возведения в степень  $r_{n-1}$ , и замещения  $f_{n-1}$

$$\Phi_n^{(n-1)}(z, f_{n-2}) = Q_{n-1} + R_{n-1} Q_{n-1, n-2}^{f_{n-2}} + \\ + R_{n-1} (1 - Q_{n-1, n-2}^{f_{n-2}}) [1 + (z-1) R_n R_{n, n-1}]^{r_{n-1}}.$$

Повторяя эти операции  $n-1$  раз, окончательно получаем

$$\Phi_n(z) = Q_1 + R_1 [\dots [ [ [1 + (z-1) R_n R_{n, n-1}]^{r_{n-1}} \times \\ \times R_{n-1} R_{n-1, n-2} + 1 - R_{n-1} R_{n-1, n-2}]^{r_{n-2}} \times \\ \times R_{n-2} R_{n-2, n-3} + 1 - R_{n-2} R_{n-2, n-3}]^{r_{n-3}} + \dots \\ \dots + 1 - R_2 R_{21}]^{r_1}. \quad (8.15)$$

Отсюда легко найти моменты распределения

$$\bar{N} = M\zeta = \Phi'_n(1) = R_1 r_1 R_2 R_{21} \Phi_{n-1}^{r_1-1}(z) \Phi'_{n-1}(z)|_{z=1} = \\ = R_1 \prod_{i=1}^{n-1} r_i R_{i+1, i} \Phi_{n-i}^{r_i-1}(z)|_{z=1}.$$

Отсюда

$$\bar{N} = R_1 \prod_{i=1}^{n-1} a_i r_i, \quad a_i = R_{i+1} R_{i+1, i}. \quad (8.16)$$

Вторая производная

$$\Phi''_n(1) = \Phi'_n(1) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{d}{dz} \Phi_{n-i}^{r_i-1}(z)|_{z=1}.$$

Отсюда второй начальный момент

$$M\zeta^2 = \Phi''_n(1) + \Phi'_n(1) = \Phi'_n(1) \left[ \sum_{j=1}^{n-1} (1 - \alpha_j) \times \right. \\ \left. \times \prod_{i=j+1}^{n-1} r_i a_i + \prod_{i=1}^{n-1} a_i r_i \right]. \quad (8.17)$$

Формулы (8.16) и (8.17) совпадают с результатом, полученным в работе [68] другим способом.

**Пример 8.1.** Пусть в двухъярусной ветвящейся изотропной структуре типа «дерево» вероятности работоспособного состояния узлов и линий связи определяются соотношениями:  $R_1=R_2R_{21}=R_3R_{32}=p=1-q$ . Необходимо найти распределения числа работоспособных ветвей и коэффициент готовности системы  $K_{гс}(m)$  для вариантов: 1)  $r_1=1, r_2=16$ ; 2)  $r_1=2, r_2=8$ ; 3)  $r_1=r_2=4$ ; 4)  $r_1=8, r_2=2$ ; 5)  $r_1=16, r_2=1$ ; 6)  $r_1=r_2=8$ , 7)  $r_1=r_2=16$ .

*Решение.* Согласно формуле (8.15) при  $n=3$  производящий полином приобретает вид

$$\Phi_s(z) = q + p(q + p(q + pz)^2)^2 \quad (8.18)$$

При небольших  $N=r_1r_2$  расчеты коэффициентов полинома (8.18) проводятся непосредственно по точным формулам вручную или с помощью ЭВМ. При больших  $N$  и малых  $q$  можно использовать приближенную формулу  $p^k \approx \exp(-k(1-p))$ . Результаты расчетов по этой формуле представлены на рис. 8.4. Нумерация кривых на рис. 8.4, в—е соответствует нумерации вариантов в начальных условиях.

Анализ результатов позволяет сделать следующие выводы. Вероятность  $P_m$  не является монотонно убывающей функцией  $m$ , и поэтому более вероятной в некоторых случаях оказывается групповая потеря связи с большим числом периферийных узлов. Например, при  $r_1=r_2=4$  и  $q=1-p=0,01$  вероятность  $P_3=0,00046$ , тогда как  $P_4=0,034$ , а  $P_5=0,0041$  (рис. 8.4, а). В наибольшей степени немонотонность проявляется при больших  $q$ . Так, при  $q=0,2$  и  $r_1=r_2=4$  вероятность  $P_m$  достигает максимума 0,11 при  $m=5$  и далее убывает монотонно. При  $q=0,1$  наиболее вероятна потеря связи с одним узлом. С увеличением  $m$  вероятность убывает монотонно.

Коэффициент готовности системы растет при увеличении функциональной избыточности и снижении порога минимального необходимого числа работоспособных ветвей (рис. 8.4, б). Однако этот рост неравномерный, наиболее заметен при небольших  $m$ . Начиная с некоторого значения  $m$   $K_{гс}(m)$  увеличивается медленно. В точках  $m=kr_2$  происходят скачки вероятности  $P_m$ , обусловленные тем, что начиная с этих значений допускается отказ  $k$  узлов второго ранга.

На рис. 8.4, в, г показаны значения  $P_m$  и  $K_{гс}(m)$  при 16 периферийных узлах и различных вариантах органи-

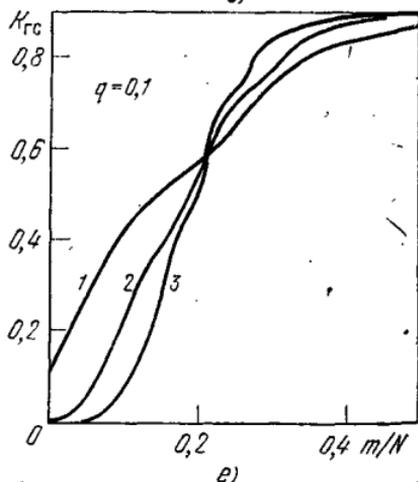
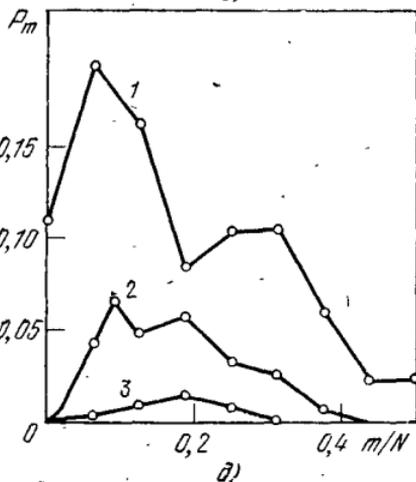
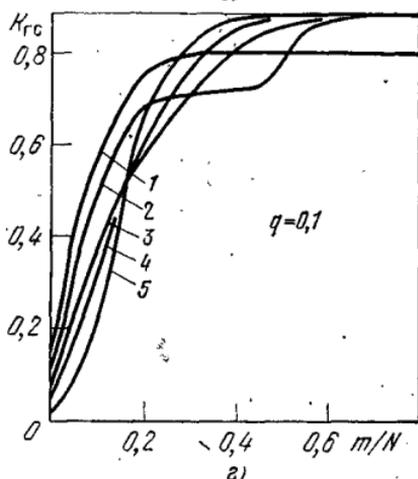
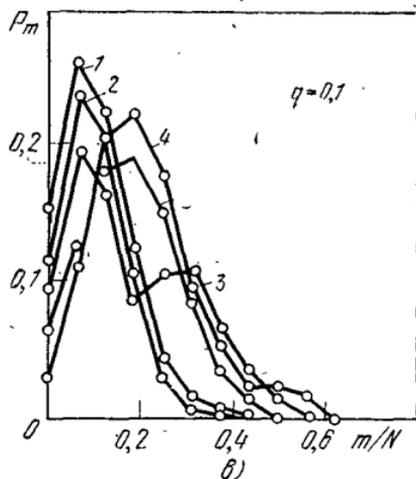
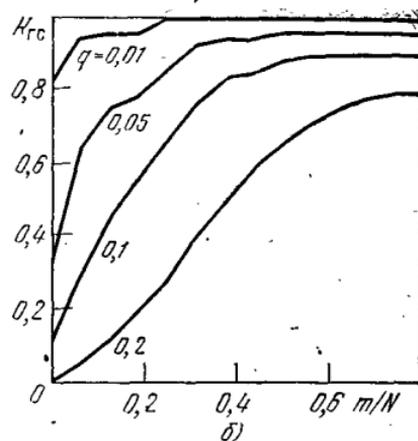
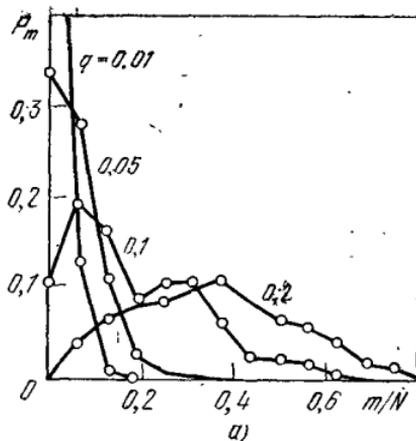


Рис. 8.4. Распределение числа работоспособных ветвей и коэффициент готовности двухъярусной изотропной структуры типа «дерево»

а, б)  $r_1=r_2=4$ ; в, г) 1 —  $r_1=1, r_2=16$ ; 2 —  $r_1=2, r_2=8$ ; 3 —  $r_1=r_2=4$ ; 4 —  $r_1=8, r_2=2$ ; 5 —  $r_1=16, r_2=1$ ; д, е) 1 —  $N=16, r_1=r_2=4$ ; 2 —  $N=64, r_1=r_2=8$ ; 3 —  $N=256, r_1=r_2=16$

зации структуры. Из графиков видно, что при небольшой функциональной избыточности для  $q=0,1$  при  $m/N < 0,15$  преимущество имеют системы с меньшим числом узлов второго ранга. С увеличением  $m/N$  ситуация меняется и при  $m/N = \delta \geq 0,3$  наибольший  $K_{Гс}$  имеет вариант 5 ( $r_1=16$  и  $r_2=1$ ). Затем следуют варианты 4 и 3. При  $\delta > 0,5$  за ними следуют варианты 2 и 1.

На рис. 8.4, *д, е* показана зависимость  $P_m$  и  $K_{Гс}(m)$  от относительного уровня функциональной избыточности при  $r_1=r_2$  и различном числе периферийных узлов. Из графиков видно, что при неизменной надежности узлов и линий связи увеличение параметров системы  $r_1$  и  $r_2$  при небольших  $\delta$  ( $\delta < 0,2$ ) приводит к снижению  $K_{Гс}$ , а при больших  $\delta$  ( $\delta > 0,25$ ) к его увеличению. Последнее объясняется тем, что одновременно с увеличением сложности системы увеличивается допустимое число отказавших ветвей и этот рост избыточности влияет на  $K_{Гс}$  сильнее, чем рост сложности системы.

### Полносвязная трехъярусная система

Согласно (6.13) и (6.14) логические функции работоспособности

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1, \quad f_2 = x_2 x_{21} f_1; \quad f_3 = x_3 (x_{31} f_1 \vee x_{32} f_2), \\ f_4 &= x_4 (x_{41} f_1 \vee x_{42} f_2 \vee x_{43} f_3). \end{aligned}$$

С учетом формул (8.7) и (8.8) производящий полином для одной ветви

$$\Phi_4^{(4)}(z, f_1, f_2, f_3) = 1 + (z-1) R_4 (1 - Q_{41}^{f_1} Q_{42}^{f_2} Q_{43}^{f_3}).$$

Возведение в степень  $r_3$  и разрезание по  $f_3$  дает

$$\begin{aligned} \Phi_4^{(3)}(z, f_1, f_2) &= R_3 (1 - Q_{31}^{f_1} Q_{32}^{f_2}) [1 + (z-1) R_4 (1 - \\ &\quad - Q_{41}^{f_1} Q_{42}^{f_2} Q_{43})]^{r_3} + (Q_3 + R_3 Q_{31}^{f_1} Q_{32}^{f_2}) [1 + \\ &\quad + (z-1) R_4 (1 - Q_{41}^{f_1} Q_{42}^{f_2})]^{r_3}. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Теперь необходимо возвести полином (8.19) в степень  $r_2$ , провести разрезание по  $f_2$ , возвести в степень

$r_1$  и заместить  $x_1$ . Тогда

$$\begin{aligned} \Phi_4(z) = & Q_1 + R_1 [R_2 R_{21} [R_3 (1 - Q_{31} Q_{32}) [1 + \\ & + (z-1) R_4 (1 - Q_{41} Q_{42} Q_{43})]^{r_3} + (R_3 Q_{31} Q_{32} + Q_3) [1 + \\ & + (z-1) R_4 (1 - Q_{41} Q_{42})]^{r_3}]^{r_2} + (1 - R_2 R_{21}) [R_3 R_{31} [1 + \\ & + (z-1) R_4 (1 - Q_{41} Q_{42})]^{r_3} + (1 - R_3 R_{31}) [1 + \\ & + (z-1) R_4 R_{41}]^{r_3}]^{r_1}. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Отсюда при  $R_i = p$  и  $R_{ij} = 1$  имеем

$$\Phi_4(z) = q + p(q + pz)^N, \quad N = r_1 r_2 r_3.$$

Первые три коэффициента этого полинома

$$P_N = p^{N+1}, \quad P_{N-1} = Nqp^N, \quad P_{N-2} = \frac{1}{2}N(N-1)q^2p^{N-1}.$$

При  $R_i = 1$  и  $R_{ij} = p$  вид полинома более сложный. Первые два коэффициента:

$$P_N = p^{r_1} (pC_1^{r_2} + qC_2^{r_2})^{r_1},$$

$$P_{N-1} = r_1 P_N (pB_1 C_1^{r_2-1} + qB_2 C_2^{r_2-1}),$$

где

$$B_1 = q^3 r_3 [(1 - q^2)(1 - q^2)^{r_3-1} + q(1 - q^2)^{r_3-1}],$$

$$B_2 = pq^2 r_3 [(1 - q^2)^{r_3-1} + p^{r_3-2}],$$

$$C_1 = (1 - q^2)(1 - q^2)^{r_3} + q^2(1 - q^2)^{r_3},$$

$$C_2 = p(1 - q^2)^{r_3} + qp^{r_3}.$$

Расчеты по приведенным формулам показывают, что в системе с полностью связанными ветвями при прочих равных условиях определяющую роль играет надежность узлов (рис. 8.5). При  $R_i = 1$  основное влияние на  $K_{гс}$  оказывают линии связи между узлом 1 и узлами второго ранга. «Вклад» остальных линий связи в надежность системы незначителен. Следствием этого является слабое изменение  $K_{гс}$  при создании избыточных узлов из-за уменьшения необходимого числа работоспособных ветвей. Первый заметный скачок наблюдается при числе избыточных ветвей  $m \geq r_2 r_3$ . Однако при  $Q_i > 0$  влияние избы-

точности ветвей становится заметным и при  $Q_i \approx 0,1$  позволяет достичь значения, близкого к предельно возможному уже при  $\delta = m/N \geq 0,2$  (рис. 8.5,з). Зависимость коэффициента готовности от сложности системы при неизменном уровне избыточности такая же, как и для систем со структурой типа «дерево»: при небольших  $\delta$  большей надежностью обладают системы с меньшим числом периферийных узлов, а при достаточно больших  $\delta$  (здесь  $\delta > 0,125$ ) увеличение числа периферийных узлов приводит к увеличению коэффициента готовности.

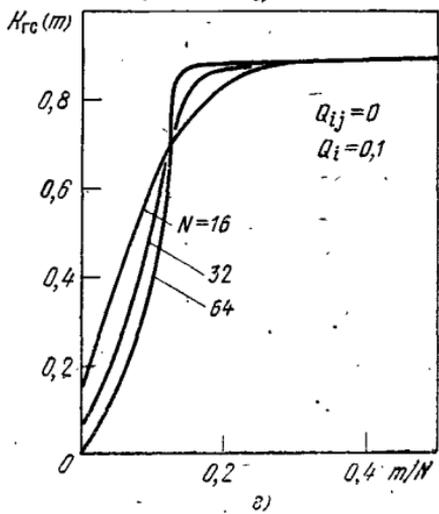
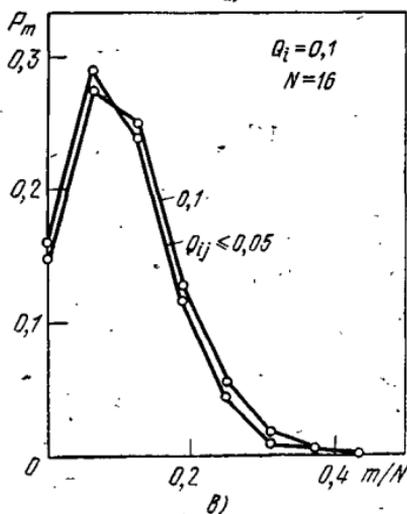
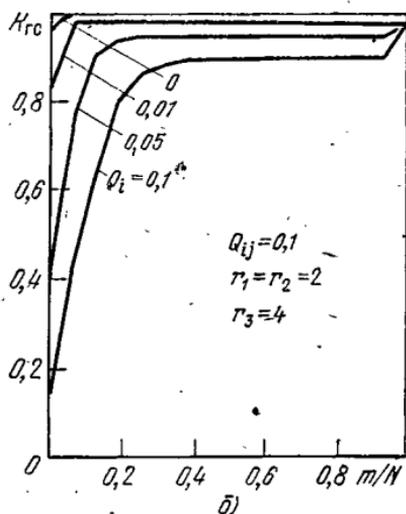
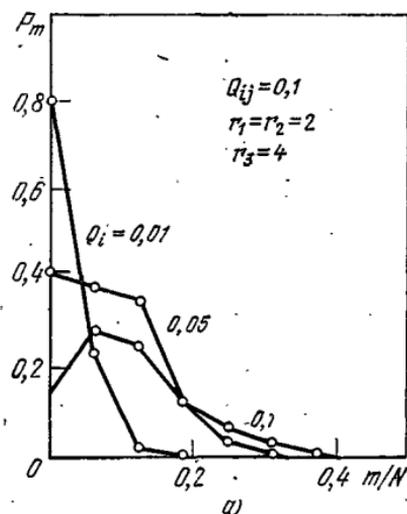


Рис. 8.5. Распределение числа работоспособных ветвей и коэффициент готовности трехъярусной системы с полностью связными ветвями

### 8.3. НАДЕЖНОСТЬ ИЗОТРОПНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЗНАЧНЫМ ПОДЧИНЕНИЕМ УЗЛОВ ПРИ НЕПОЛНОМ ОПОВЕЩЕНИИ О СОСТОЯНИИ СЕТИ

Рассмотрим сначала систему без оповещения. Логические функции работоспособности на узле  $k$  имеют вид (6.56). Общая схема построения производящего полинома сводится к следующему: сначала в каждой функции  $f_k$  проводится замещение  $x_k$  и  $x_{ki}$  и получаются вероятности в смешанной форме  $P(f_k=1) = P_k(f_1, \dots, f_{k-1})$ . Затем составляется полином для одной ветви

$$\Phi_n^{(n)}(z, f_1, f_2, \dots, f_{n-1}) = 1 + (z-1)R_n [1 - Q_{n1}^{f_1} + Q_{n1}(1 - Q_{ni_1}^{f_{i_1}}) + \dots + Q_{n1} \prod_{k=1}^{n-3} Q_{ni_k} (1 - Q_{ni_{n-2}}^{f_{i_{n-2}}})], \quad (8.21)$$

где  $1, i_1, i_2, \dots, i_{n-2}$  — ряд приоритетности направлений связи на узле  $n$ . Далее производится возведение в степень  $r_{n-1}$  и разрезание по функции  $f_{n-1}$ , затем снова возведение в степень  $r_{n-2}$  и разрезание по  $f_{n-2}$  и так до замещения всех переменных:

$$\begin{aligned} \Phi_n^{(n-1)}(z, f_1, f_2, \dots, f_{n-2}) &= P_{n-1}(f_1, f_2, \dots, f_{n-2}) \times \\ &\quad \times [\Phi_n^{(n)}(z, f_1, f_2, \dots, f_{n-2}, 1)]^{r_{n-1}} + \\ &\quad + Q_{n-1}(f_1, f_2, \dots, f_{n-2}) [\Phi_n^{(n)}(z, f_1, f_2, \dots, f_{n-2}, 0)]^{r_{n-1}}; \\ \Phi_n^{(n-2)}(z, f_1, f_2, \dots, f_{n-3}) &= P_{n-2}(f_1, f_2, \dots, f_{n-3}) \times \\ &\quad \times [\Phi_n^{(n-1)}(z, f_1, f_2, \dots, f_{n-3}, 1)]^{r_{n-2}} + \\ &\quad + Q_{n-2}(f_1, f_2, \dots, f_{n-3}) [\Phi_n^{(n-1)}(z, f_1, f_2, \dots, f_{n-3}, 0)]^{r_{n-2}}; \\ \Phi_n(z) &= Q_1 + R_1 [P_2(1) \Phi_n^{(2)}(z, 1, 1) + Q_2(1) \Phi_n^{(2)}(z, 1, 0)]^{r_1}. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Рассмотрим далее некоторые частные случаи.

#### Полносвязная четырехъярусная система без оповещения о состоянии сети

В системе есть узлы пяти рангов: один узел первого ранга,  $r_1$  узлов второго ранга на первом ярусе,  $r_1 r_2$  узлов третьего ранга на втором ярусе,  $r_1 r_2 r_3$  узлов четвертого ранга на третьем ярусе и  $r_1 r_2 r_3 r_4$  узлов пятого ран-

га на четвертом ярусе. Ряд приоритетности направлений связи на узле  $k$  имеет вид  $1, 2, \dots, k-1$ , т. е. передача ведется в направлении наименьшего по номеру работоспособного узла ветви. Тогда из (8.22) имеем

$$\begin{aligned} \Phi_5(z) = & Q_1 + R_1 [P_2(1) [P_3(1, 1) [P_4(1, 1, 1) \times \\ & \times \Phi_5^{(4)}(z, 1, 1, 1, 1) + Q_4(1, 1, 1) \Phi_5^{(4)}(z, 1, 1, 1, 0)]^{r_3} + \\ & + Q_3(1, 1) [P_4(1, 1, 0) \Phi_5^{(4)}(z, 1, 1, 0, 1) + Q_4(1, 1, 0) \times \\ & \times \Phi_5^{(4)}(z, 1, 1, 0, 0)]^{r_3} + Q_2(1) [P_3(1, 0) [P_4(1, 0, 1) \times \\ & \times \Phi_5^{(4)}(z, 1, 0, 1, 1) + Q_4(1, 0, 1) \Phi_5^{(4)}(z, 1, 0, 1, 0)]^{r_3} + \\ & + Q_3(1, 0) [P_4(1, 0, 0) \Phi_5^{(4)}(z, 1, 0, 0, 1) + \\ & + Q_4(1, 0, 0) \Phi_5^{(4)}(z, 1, 0, 0, 0)]^{r_3} ]^{r_2} ]^{r_1}, \quad (8.23) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} P_2(1) = & 1 - Q_2(1) = R_2 R_{21}, \quad P_3(1, f_2) = R_3 (R_{31} + Q_{31} (1 - Q_{32}^{f_2})), \\ P_4(1, f_2, f_3) = & R_4 [1 - Q_{41} Q_{42}^{f_2} + Q_{41} Q_{42} (1 - Q_{43}^{f_3})], \\ \Phi_5^{(4)}(z, 1, f_2, f_3, f_4) = & [1 + (z-1) (1 - Q_{51} Q_{52}^{f_2} + \\ & + Q_{51} Q_{52} (1 - Q_{53}^{f_3}) + Q_{53} Q_{51} Q_{52} (1 - Q_{54}^{f_4}))]^{r_4}. \quad (8.24) \end{aligned}$$

Подставив (8.24) в (8.23), получим

$$\begin{aligned} \Phi_5(z) = & Q_1 + R_1 \{ R_2 R_{21} [R_3 (1 - Q_{31} Q_{32}) [R_4 (1 - \\ & - Q_{41} Q_{42} Q_{43}) (1 + (z-1) R_5 (1 - Q_{51} Q_{52} Q_{53} Q_{54}))]^{r_4} + \\ & + (Q_4 + R_4 Q_{41} Q_{42} Q_{43}) (1 + (z-1) R_5 (1 - Q_{51} Q_{52} Q_{53}))]^{r_4} ]^{r_3} + \\ & + (Q_3 + R_3 Q_{31} Q_{32}) [R_4 (1 - Q_{41} Q_{42}) (1 + (z-1) R_5 (1 - \\ & - Q_{51} Q_{52} (1 - Q_{53} R_{54})))]^{r_4} + (Q_4 + R_4 Q_{41} Q_{42}) (1 + (z-1) R_5 (1 - \\ & - Q_{51} Q_{52}))]^{r_4} ]^{r_3} + (1 - R_2 R_{21}) [R_3 R_{31} [R_4 (R_{41} + Q_{41} Q_{42} Q_{43}) (1 + \\ & + (z-1) R_5 (R_{51} + Q_{51} Q_{52} (1 - Q_{53} Q_{54})))]^{r_4} + \\ & + (Q_4 + R_4 Q_{41} (1 - Q_{42} Q_{43})) (1 + (z-1) R_5 (R_{51} + \\ & + Q_{51} Q_{52} R_{53}))]^{r_4} ]^{r_3} + (1 - R_3 R_{31}) [R_4 R_{41} [1 + (z-1) R_5 (R_{51} + \\ & + Q_{51} Q_{52} Q_{53} R_{54})]^{r_4} + (1 - R_4 R_{41}) (1 + (z-1) R_5 \times \\ & \times R_{51})]^{r_4} ]^{r_3} ]^{r_1}. \quad (8.25) \end{aligned}$$

Отсюда можно получить полиномы и для других  $n < 5$ . Так,  $\Phi_4(z)$  получается из (8.25) при  $R_{51}=R_{52}=R_{53}=0$ ,  $\Phi_3(z)$  при  $R_{41}=R_{42}=0$ ,  $R_4=R_{43}=r_3=1$ . Кроме того, из (8.25) можно получить формулы для систем с тем же числом ярусов, но с меньшей избыточностью. Так при,  $R_{hi}=0$ ,  $i \leq k-2$ ,  $k=2$ ,  $n$ , формула (8.22) совпадает

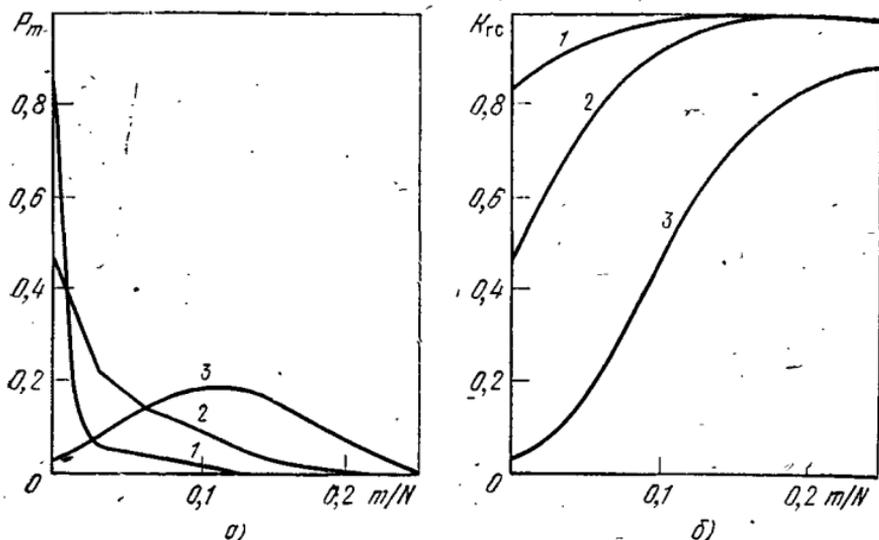


Рис. 8.6. Распределение числа работоспособных ветвей (а) и коэффициент готовности (б) четырехъярусной системы с полностью связными ветвями без оповещения о состоянии сети при  $N=32$ ,  $r_1=4$ ,  $r_i=2$ :

1)  $Q_i=0$ ,  $Q_{ij}=0,1$ ; 2)  $Q_i=0$ ;  $Q_{ij}=0,2$ ; 3)  $Q_i=Q_{ij}=0,1$

с (8.15), а при  $Q_{h,h-1}=Q_{h,h-2}=0$ ,  $R_{hi}=0$ ,  $k=2$ ,  $n$ ,  $i \leq k-3$  получаем формулу для двухсвязной сети с надежными связями. Некоторые результаты расчетов по формуле (8.25) приведены на рис. 8.6, из которого следует, что и в отсутствие оповещения вид распределений  $P_m$  сохраняется тем же, что и при полном оповещении: при малых  $Q_i$  и  $Q_{ij}$  значения  $P_m$  убывают с ростом  $m$ , а при больших  $m$  распределение становится унимодальным. Коэффициент готовности системы растет при снижении минимально допустимого числа работоспособных ветвей и при  $Q_i=0$  может достигать очень близких к единице значений при сравнительно небольшой избыточности. Так, при  $N=32$   $K_{гс}(m)$  становится более 0,99 уже при  $m=4$  для  $Q_{ij}=0,1$  и при  $m=6$  для  $Q_{ij}=0,2$ .

## Полносвязная система с оповещением о прямой линии связи

Для данной системы логическая функция работоспособности представлена формулой (6.70). Запишем ее в несколько ином виде:

$$f_k = x_k (x_{k1} g_1 \vee \dots \vee x_{k, k-1} g_{k-1} \vee \left( \bigwedge_{i=1}^{k-1} (x_{ki} g_i)' \right) \times \\ \times (x_{k1} f_{i_1} \vee \dots \vee \bigwedge_{v=1}^{k-3} (x_{k1} x_{i_v})' x_{k1} x_{k-2} f_{i_{k-2}})), \quad k = \overline{5, n}; \quad (8.26)$$

$$f_k = x_k \left( \bigvee_{i=1}^{k-1} x_{ki} f_i \right); \quad k \leq 4; \quad (8.27)$$

$$g_i = x_i x_{i1} x_{i2}; \quad f_2 = g_2 = x_2 x_{21} x_{22}; \quad f_1 = g_1 = x_1. \quad (8.28)$$

Проведем замещение  $x_n$  и  $x_{ni}$  и возведение полинома в степень  $r_{n-1}$ :

$$\Phi_n^{(n-1)}(z, f_1, \dots, f_{n-1}, g_2, \dots, g_{n-1}) = \\ = [1 + (z-1) R_n [1 - \prod_{i=1}^{n-1} Q_{ni}^{g_i} + \prod_{i=1}^{n-1} Q_{ni}^{g_i} (1 - Q_{ni}^{g'_{i_1} f_{i_1}}) + \\ + \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1}}^{n-1} Q_{ni}^{g_i} Q_{ni}^{x_{i_1}} (1 - Q_{ni}^{g'_{i_2} f_{i_2}}) + \dots \\ \dots + \prod_{k=1}^{n-3} Q_{ni_k}^{x_{i_k}} Q_{ni_{n-2}}^{g_i} (1 - Q_{ni_{n-2}}^{g'_{i_{n-2}} f_{i_{n-2}}})]]^{r_{n-1}} \quad (8.29)$$

Замещение  $x_i$ ,  $f_i$  и  $g_i$  должно проводиться последовательно с переходом от яруса к ярусу. В отличие от случаев полного оповещения и отсутствия оповещения, где на каждом шаге разрезание ведется только по одной функции  $f_k$ , здесь, вообще говоря, надо составлять три слагаемых:

$$\Phi_n^{(k-1)}(z, f_1, \dots, f_{k-1}, g_2, \dots, g_{k-1}) = [P(g'_{kf} f'_k = 1) + \\ + P(g_k = 1) \Phi_n^{(k)}(z, f_1, \dots, f_k, g_2, \dots, g_{k-1}, 1) + \\ + P(g'_{kf} f_k = 1) \Phi_n^{(k)}(z, f_1, \dots, f_{k-1}, 1, g_2, \dots, g_{k-1}, 0)]^{r_{k-1}}, \\ k = \overline{3, n-1}. \quad (8.30)$$

В правой части зависимость от  $f_k$  отсутствует, несмотря на формальную запись  $f_k$  во втором слагаемом, так как согласно (8.29) при  $g_k=1$ , слагаемые, содержащие  $f_k$ , обращаются в нуль независимо от значения  $f_k$ . В некоторых случаях второй и третий полиномы  $\Phi_n^{(k)}(z)$  в (8.43) совпадают, и тогда получается обычная формула

$$\Phi_n^{(k-1)}(z, f_1, \dots, f_{k-1}, g_3, \dots, g_{k-1}) = [P(f_k=0) + P(f_k=1)\Phi_n^{(k)}(z, f_1, \dots, f_{k-1}, 1, g_3, \dots, g_{k-1}, 1)]^{r_{k-1}}. \quad (8.31)$$

Здесь использовано равенство  $f_k = g'_k f_k \vee g_k$ , вытекающее из (8.28). Многошаговое использование формул (8.30) и (8.31) для преобразования (8.29) позволяет получить искомый полином  $\Phi_n(z)$ . Рассмотрим пример.

**Пример 8.2.** В полностью связанной изотропной четырехърусной системе с оповещением узлов о состоянии прямой линии связи с центром ряд приоритетности линий связи в узлах пятого ранга имеет вид 54, 53. Считая известными вероятности работоспособного состояния узлов  $R_i$  и линий связи  $R_{ij}$ , необходимо найти производящий полином  $\Phi_5(z)$  распределения числа работоспособных ветвей.

*Решение.* Составим логическую функцию работоспособности одной ветви

$$f_5 = x_5 (x_{51} f_1 \vee x_{52} f_2 \vee x_{53} g_3 \vee x_{54} (g_4 \vee f_4) \vee (x_{54} f_4)' x_{53} f_3),$$

где  $f_1 = x_1$ ;  $f_2 = x_2 x_{21} f_1$ ;  $g_i = x_i x_{i1} x_1$ . Функции  $f_4$  и  $f_3$  определяются по формулам (6.19). Выполняя ортогонализацию последнего слагаемого с остальными, получаем

$$f_5 = x_1 x_5 (x_{51} \vee x_{52} x_2 x_{21} \vee x_{53} x_3 x_{31} \vee x_{54} f_4 \vee x'_{51} (x_{52} x_2 x_{21})' (x_{53} x_3 x_{31})' \times (x_{54} f_4)' x_{53} f_3). \quad (8.32)$$

Проведем замещение неповторных переменных в каждой из ортогональных частей функции  $f_5$  и используем теорему 8 в гл. 1. В результате запишем следующую смешанную форму:

$$P_5(f_i, g_i) = R_5 [1 - Q_{51}^{f_1} Q_{52}^{f_2} Q_{53}^{g_3} Q_{54}^{f_4} + Q_{51}^{f_1} Q_{52}^{f_2} Q_{53}^{g_3} Q_{54}^{f_4} (1 - Q_{53}^{g'_3})]. \quad (8.33)$$

Составляем производящий полином для одной ветви и проведем замещение переменных, относящихся к элементам четвертого ранга, рассматривая три ситуации:  $x_4 f_4 = 1$ ;  $x_4 f'_4 = 1$ ;  $x_4 = 0$ . После возведения полинома в степень  $r_4$  и замещения имеем

$$\begin{aligned} \Phi_5^{(4)}(z, f_i, g_i) = & R_4 (1 - Q_{41}^{f_1} Q_{42}^{f_2} Q_{43}^{f_3}) [1 + (z-1) R_5 (1 - \\ & - Q_{41}^{f_1} Q_{42}^{f_2} Q_{43}^{f_3} Q_{54})]^{r_4} + R_4 Q_{41}^{f_1} Q_{42}^{f_2} Q_{43}^{f_3} [1 + \\ & + (z-1) R_5 (1 - Q_{51}^{f_1} Q_{52}^{f_2} Q_{53}^{g_3} + Q_{51}^{f_1} Q_{52}^{f_2} Q_{53}^{g_3} Q_{54} (1 - \\ & - Q_{53}^{g'_3}))]^{r_4} + Q_4 [1 + (z-1) R_5 (1 - Q_{51}^{f_1} Q_{52}^{f_2} Q_{53}^{f_3})]^{r_4}. \end{aligned} \quad (8.34)$$

Здесь использовано равенство  $g_3 \sqrt{g'_3} f_3 \equiv f_3$ . Теперь проведем замещение  $f_3$  и  $g_3$ , рассматривая три несовместных события:  $g_3 = 1$ ,  $f_3 g'_3 = 1$  и  $f'_3 g'_3 = 1$ . После возведения в степень и замещения

$$\begin{aligned} \Phi_5^{(3)}(z, f_1, f_2) = & R_3 R_{31} [R_4 (1 - Q_{41}^{f_1} Q_{42}^{f_2} Q_{43}) \times \\ & \times \varphi_1(z, f_1, f_2) + (R_4 Q_{41}^{f_1} Q_{42}^{f_2} Q_{43} + Q_4) \varphi_2(z, f_1, f_2)]^{r_3} + \\ & + Q_{31} R_3 (1 - Q_{32}^{f_2}) [R_4 (1 - Q_{41}^{f_1} Q_{42}^{f_2} Q_{43}) \varphi_1(z, f_1, f_2) + \\ & + Q_4 \varphi_2(z, f_1, f_2) + R_4 Q_{41}^{f_1} Q_{42}^{f_2} Q_{43} \varphi_3(z, f_1, f_2)]^{r_3} + \\ & + (Q_3 + R_3 Q_{31}^{f_1} Q_{32}^{f_2}) [R_4 (1 - Q_{41}^{f_1} Q_{42}^{f_2}) \varphi_4(z, f_1, f_2) + \\ & + (R_4 Q_{41}^{f_1} Q_{42}^{f_2} + Q_4) \varphi_5(z, f_1, f_2)]^{r_3}, \end{aligned} \quad (8.35)$$

где

$$\varphi_1(z, f_1, f_2) = (1 + (z-1) R_5 (1 - Q_{51}^{f_1} Q_{52}^{f_2} Q_{53} Q_{54}))^{r_4},$$

$$\varphi_2(z, f_1, f_2) = (1 + (z-1) R_5 (1 - Q_{51}^{f_1} Q_{52}^{f_2} Q_{53}))^{r_4},$$

$$\varphi_3(z, f_1, f_2) = (1 + (z-1) R_5 (1 - Q_{51}^{f_1} Q_{52}^{f_2} (1 - Q_{54} R_{53})))^{r_4},$$

$$\varphi_4(z, f_1, f_2) = (1 + (z-1) R_5 (1 - Q_{51}^{f_1} Q_{52}^{f_2} Q_{54}))^{r_4},$$

$$\varphi_5(z, f_1, f_2) = (1 + (z-1) R_5 (1 - Q_{51}^{f_1} Q_{52}^{f_2}))^{r_4}.$$

Возводим полином (8.35) в степень  $r_2$ , замещаем  $x_2 x_{21}$ , возводим в степень  $r_1$  и замещаем  $x_1$ . Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \Phi_5(z) = & Q_1 + R_1 \{ R_2 R_{21} [ R_3 R_{31} [ R_4 (1 - Q_{41} Q_{42} Q_{43}) \times \\ & \times \varphi_1(z, 1, 1) + \varphi_2(z, 1, 1) (R_4 Q_{41} Q_{42} Q_{43} + Q_4) ]^{r_3} + \\ & + Q_{31} R_3 R_{32} [ R_4 (1 - Q_{41} Q_{42} Q_{43}) \varphi_1(z, 1, 1) + \\ & + R_4 Q_{41} Q_{42} Q_{43} \varphi_2(z, 1, 1) + Q_4 \varphi_2(z, 1, 1) ]^{r_3} + \\ & + (Q_3 + R_3 Q_{31} Q_{32}) [ R_4 (1 - Q_{41} Q_{42}) \varphi_4(z, 1, 1) + \\ & + (Q_4 + R_4 Q_{41} Q_{42}) \varphi_4(z, 1, 1) ]^{r_3} ]^{r_2} + (1 - R_2 R_{21}) [ R_3 R_{31} [(1 - \\ & - Q_{41} Q_{43}) \varphi_1(z, 1, 0) + (Q_4 + R_4 Q_{41} Q_{43}) \varphi_2(z, 1, 0) ]^{r_3} + \\ & + (1 - R_3 R_{31}) [(1 - R_4 R_{41}) \varphi_5(z, 1, 0) + \\ & + R_4 R_{41} \varphi_4(z, 1, 0) ]^{r_3} ]^{r_1} \}. \end{aligned} \quad (8.36)$$

Некоторые результаты расчетов по формуле (8.36) приведены на рис. 8.7, из которой видно, что при частичном оповещении сохраняются общие закономерности изменения  $P_m$  и  $K_{гс}(m)$  при изменении уровня функциональной избыточности, подмеченные для систем с полным оповещением и без оповещения.

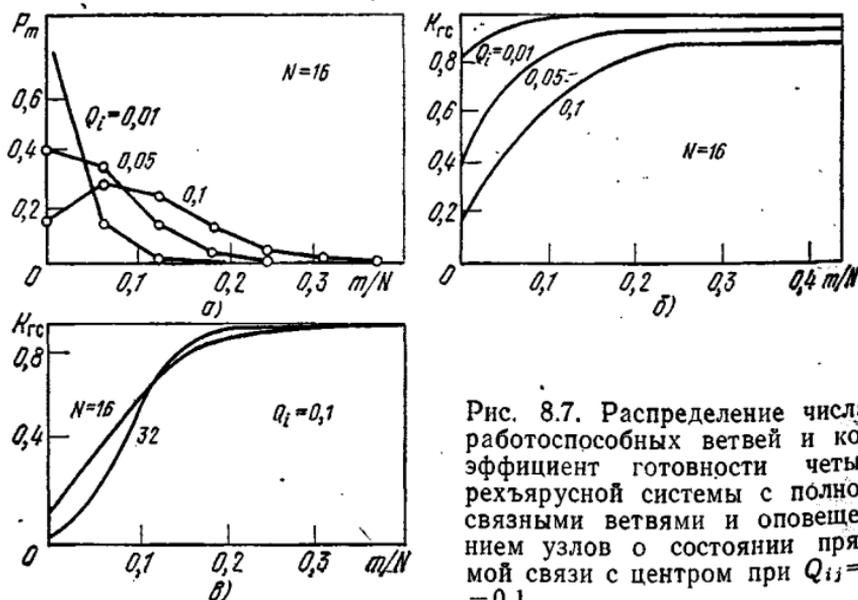


Рис. 8.7. Распределение числа работоспособных ветвей и коэффициент готовности четырехъярусной системы с полностью связными ветвями и оповещением узлов о состоянии прямой связи с центром при  $Q_{ij} = 0,1$

#### 8.4. НАДЕЖНОСТЬ ИЗОТРОПНЫХ СИСТЕМ С НЕОДНОЗНАЧНЫМ ПОДЧИНЕНИЕМ И НЕИЗОТРОПНЫХ СИСТЕМ ПРИ ПОЛНОМ ОПОВЕЩЕНИИ О СОСТОЯНИИ СЕТИ

Изложенную ранее методику расчета надежности изотропных ветвящихся систем можно обобщить для не-изотропных систем и систем с неоднозначным подчинением. Рассмотрим сначала первый класс систем. Неизотропность создается различиями как в структуре ветвей, так и в значениях коэффициентов готовности элементов и коэффициентов разветвления в узлах одного ранга. Основные особенности построения расчетных формул для производящего полинома распределения числа работоспособных ветвей в не-изотропной системе состоят в следующем. Прежде всего необходимо установить, сколько различных по структуре ветвей имеется в системе и для каждой из них на этапе 1 составить логическую функцию работоспособности. На этапах 2 и 3 учитываются различия в значениях  $R_i$ ,  $R_{ij}$ ,  $r_i$  и составляются столько полиномов типа (8.8), сколько имеется различных ветвей по всем указанным признакам. На этапах 4 и 6 возведение полиномов в степень заменяется их перемножением. В остальном методика расчета надежности не-изотропных систем такая же, как для систем изотропных. Рассмотрим некоторые частные случаи.

##### Неизотропная структура типа «дерево»

Пусть в структуре типа «дерево» все ветви отличаются друг от друга хотя бы одним признаком. Введем многопозиционную нумерацию ветвей в  $n$ -ранговой структуре с помощью вектора  $I_{n-1} = (i_1, i_2, \dots, i_{n-1})$ , где  $i_k$  — порядковый номер узла  $(k+1)$ -го ранга в кусте  $k$ -го ранга, имеющем в своем корне узел  $k$ -го ранга (рис. 8.8). Этот же номер присваивается и узлу самого младшего ранга в рассматриваемой ветви. Коэффициент разветвления в узле  $I_{k-1}$   $k$ -го ранга обозначим через  $r_k^{(I_{k-1})}$ , а вероятности работоспособного состояния узлов и линий связи через  $R_k^{(I_{k-1})}$  и  $R_{k, k-1}^{(I_{k-1})}$ .

Введя соответствующие логические переменные, составим логическую функцию работоспособности ветви  $I_{n-1}$  в следующем виде:

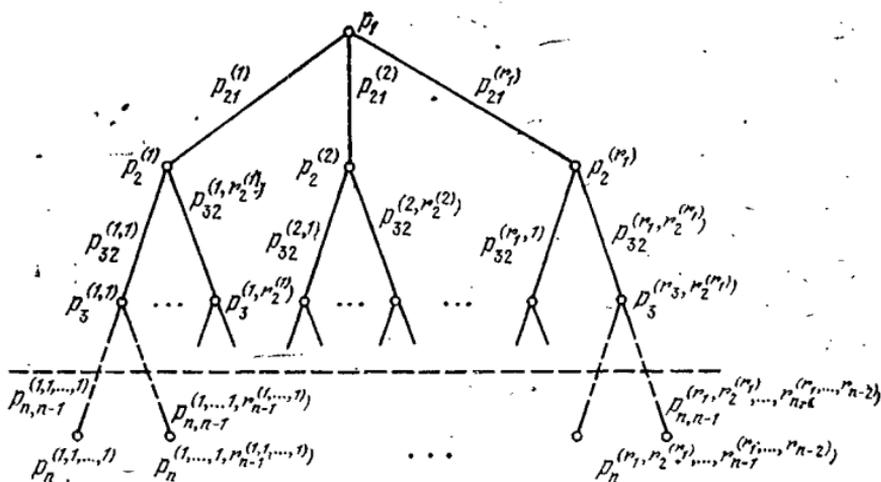


Рис. 8.8. Неизотропная ветвящаяся структура типа «дерево»

$$f_n^{(I_{n-1})} = x_n^{(I_{n-1})} x_{n,n-1}^{(I_{n-1})} f_{n-1}^{(I_{n-2})},$$

$$f_k^{(I_{k-1})} = x_k^{(I_{k-1})} x_{k,k-1}^{(I_{k-1})} f_{k-1}^{(I_{k-2})}, \quad k = \overline{2, n-1}, \quad f_1 = x_1. \quad (8.37)$$

Замещая переменные, относящиеся к элементам  $n$ -го ранга, записываем производящий полином для одной ветви

$$\Phi_n^{(n)}(z, f_{n-1}^{(I_{n-2})}) = 1 + (z-1) R_n^{(I_{n-1})} (1 - Q_{n,n-1}^{(I_{n-1})}) f_{n-1}^{(I_{n-2})} \quad (8.38)$$

Перемножая полиномы для ветвей одного куста  $(n-1)$ -го ранга, получаем

$$\Phi_n^{(n-1)}(z, f_{n-1}^{(I_{n-2})}) = \prod_{i_{n-1}=1}^{n-1} [1 + (z-1) R_n^{(I_{n-2})} f_{n-1}^{(I_{n-2})} \times \\ \times (1 - (Q_{n,n-1}^{(I_{n-2})}) f_{n-1}^{(I_{n-2})})]. \quad (8.39)$$

После разрезания по функции  $f_{n-1}^{(I_{n-2})}$

$$\Phi_n^{(n-1)}(z, f_{n-1}^{(I_{n-2})}) = 1 + R_{n-1}^{(I_{n-2})} (1 - (Q_{n-1,n-2}^{(I_{n-2})}) f_{n-1}^{(I_{n-2})}) \times \\ \times [\Phi_n^{(n-1)}(z, f_{n-1}^{(I_{n-2})} = 1) - 1]. \quad (8.40)$$

Теперь снова необходимо перемножить полиномы в каждом кусте  $(n-2)$ -го ранга и заместить функции  $f_{n-2}^{(i)}$ , затем вновь перемножить полиномы и так до тех пор, пока не будут замещены все логические переменные. Окончательно получаем

$$\Phi_n(z) = Q_1 + R_1 \prod_{i_1=1}^{r_1} \{ 1 - R_2^{(i_1)} R_{21}^{(i_1)} + R_2^{(i_1)} R_{21}^{(i_1)} \times \\ \times \prod_{i_2=1}^{r_2^{i_1}} [ 1 - R_3^{(i_1, i_2)} R_{32}^{(i_1, i_2)} + \dots + R_{n-1}^{(i_1, i_2)} R_{n-1, n-2}^{(i_1, i_2)} \times \\ \times \prod_{i_{n-1}=1}^{r_{n-1}^{(i_1, i_2)}} ( 1 + (z-1) R_n^{(i_1, i_2, i_{n-1})} R_{n, n-1}^{(i_1, i_2, i_{n-1})} ) \dots ] \}. \quad (8.41)$$

В каждом конкретном случае формула (8.41) обычно существенно упрощается, так как многие ветви оказываются одинаковыми и тогда произведение полиномов переходит в соответствующую степень одного полинома. При всех одинаковых ветвях формула (8.41) совпадает с (8.15).

**Пример 8.3.** Пусть в двухъярусной структуре типа «дерево» все линии связи третьего ранга, принадлежащие одному кусту, равнонадежны и имеют вероятности работоспособного состояния  $R_{32}^{(i)}$ . Все узлы третьего ранга, принадлежащие одному кусту второго ранга, также равнонадежны и имеют вероятности  $R_3^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, r_1}$ . Коэффициент разветвления в  $i$ -м кусте второго ранга равен  $r_2^{(i)}$ . Вероятности работоспособного состояния узлов первого и второго рангов и линий связи между ними равны соответственно  $R_1, R_2^{(i)}, R_{21}^{(i)}$ . Необходимо найти распределение числа работоспособных ветвей.

*Решение.* Логическая функция работоспособности ветви  $i$ -го куста второго ранга

$$f_3^{(i)} = x_3^{(i)} x_{32}^{(i)} f_2^{(i)}, \quad f_2^{(i)} = x_2^{(i)} x_{21}^{(i)} x_1, \quad i = \overline{1, r_1}.$$

Производящий полином для ветви

$$\Phi_3^{(3)}(z, f_2^{(i)}) = 1 + (z-1) R_3^{(i)} (1 - (Q_{32}^{(i)}) f_2^{(i)}). \quad (8.42)$$

Возводим (8.42) в степень  $r_2^{(i)}$  и проводим разрезание по  $f_2^{(i)}$ .

$$\Phi_3^{(2)}(z, r_2^{(i)}, x_1) = R_2^{(i)} (1 - (Q_{21}^{(i)})^{x_1}) \times \\ \times [(1 + (z-1) R_3^{(i)} R_{32}^{(i)})^{r_2^{(i)}} - 1] + 1. \quad (8.43)$$

На последнем шаге перемножаем полиномы (8.43) и замещаем  $x_1$ . Окончательно получим

$$\Phi_3(z) = Q_1 + R_1 \prod_{i=1}^{r_1} [1 - R_2^{(i)} R_{21}^{(i)} + R_2^{(i)} R_{21}^{(i)} (1 + \\ + (z-1) R_3^{(i)} R_{31}^{(i)})^{r_2^{(i)}}]. \quad (8.44)$$

Дифференцирование полинома (8.44) по  $z$  позволяет найти среднее число работоспособных ветвей

$$\bar{N} = M\zeta = R_1 \sum_{i=1}^{r_1} R_2^{(i)} R_{21}^{(i)} R_3^{(i)} R_{32}^{(i)} r_2^{(i)}. \quad (8.45)$$

На рис. 8.9 приведены результаты расчетов по формуле (8.44) для  $r_1 = 4$  и трех вариантов значений  $r_2^{(i)}$ . Вероятности  $R_j^{(i)}$  и  $R_{j,j-1}^{(i)}$  вычислялись по формуле

$$R_j^{(i)} = 1 - q_{j0}/i; \quad R_{j,j-1}^{(i)} = 1 - q_{j,j-1}^0/i, \\ i = \overline{1, 4}, \quad R_i = 1 - q_{i0}.$$

Сравнение кривых 2 и 3 показывает, что распределение периферийных узлов по кустам второго ранга заметно влияет на надежность системы. В данном случае неравномерное распределение оказалось благоприятным и привело к повышению коэффициента готовности системы. Сравнение кривых 1 и 2, соответствующих системам с различным числом периферийных узлов, показывает, что соотношение коэффициентов готовности  $K_{ГС}(m)$  имеет более сложный вид, чем то же соотношение для изотропных систем. Однако при малых  $m$  по-прежнему более надежной является система с меньшим числом узлов.

Обобщение изложенной в § 8.2 методики для систем с неоднозначным подчинением в общем случае представляет большие трудности вычислительного характера. Поэтому здесь будут рассмотрены частные случаи, для которых удастся достаточно быстро получить результаты в замкнутой форме и провести по ним расчеты. Для этого из всех структур с неоднозначным подчинением выделим два наиболее известных класса: 1) системы со

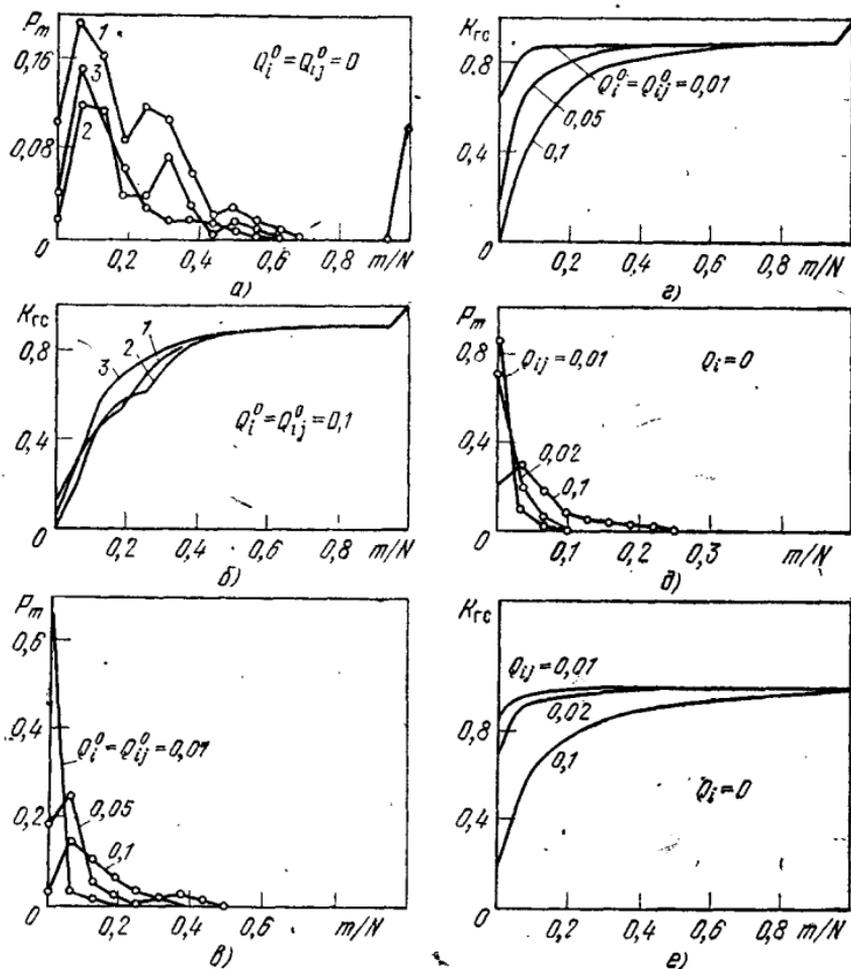


Рис. 8.9. Распределение числа работоспособных ветвей и коэффициент готовности двухъярусной неізотропной системы со структурой типа «дерево»:

а, б)  $1-r_2^{(i)} = 4$ ,  $2-r_2^{(i)} = 8$ ,  $3-r_2^{(1)} = 4$ ,  $r_2^{(2)} = 6$ ,  $r_2^{(3)} = 10$ ,  $r_2^{(4)} = 12$ ; в, г, д, е)  $r_2^{(1)} = 4$ ,  $r_2^{(2)} = 6$ ,  $r_2^{(3)} = 10$ ,  $r_2^{(4)} = 12$

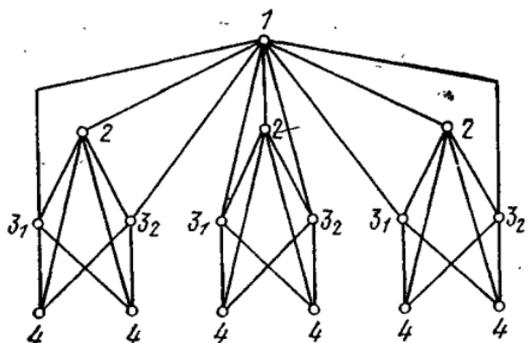


Рис. 8.10. Ветвящаяся система со структурным дублированием узлов

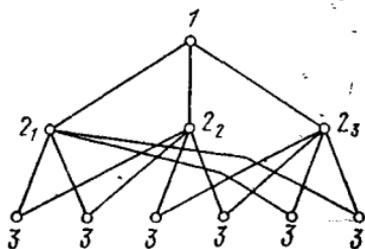


Рис. 8.11. Ветвящаяся система с функциональным резервированием узлов

структурным дублированием узлов  $k$ -го ранга (рис. 8.10), 2) системы с функциональным резервированием узлов  $k$ -го ранга (рис. 8.11). Рассмотрим теперь отдельно эти два класса систем с неоднозначным подчинением узлов.

### Система со структурным дублированием узлов

Пусть в полносвязной структуре узлы  $k$ -го ранга дублируются и каждый из двух узлов имеет полный комплект связей с узлами других рангов. Рассмотрим далее случай, когда дублирование введено только на одном из рангов, хотя все формулы можно обобщить на случай, когда узлы дублируются на двух и более рангах. Логическая функция работоспособности имеет вид (6.13), только в ней надо считать, что

$$f_k = f_k^{(1)} \vee f_k^{(2)}, f_k^{(i)} = x_k^{(i)} \left( \bigvee_{j=1}^{k-1} x_{kj}^{(i)} f_j \right), i=1, 2. \quad (8.46)$$

Производящий полином распределения для одной ветви

$$\begin{aligned} & \Phi_n^{(n)}(z, f_1, \dots, f_{n-1}) = \\ & = \left( 1 - \prod_{i=1}^{k-1} Q_{ni}^{f_i} Q_{nk1}^{f_k^{(1)}} Q_{nk2}^{f_k^{(2)}} \prod_{i=k+1}^{n-1} Q_{ni}^{f_i} \right) R_n(z-1) + 1. \quad (8.47) \end{aligned}$$

При  $k < i < n$  выполняется рекуррентное соотношение

$$\Phi_n^{(i)}(z, f_1, \dots, f_{i-1}) = P_i(f_1, \dots, f_{i-1}) [\Phi_n^{(i+1)}(z, f_1, \dots, f_{i-1}, 1)]^{r_i} + Q_i(f_1, \dots, f_{i-1}) [\Phi_n^{(i+1)}(z, f_1, \dots, f_{i-1}, 0)]^{r_i}, \quad (8.48)$$

где

$$P_i = 1 - Q_i = R_i \left( 1 - \prod_{j=1}^{k-1} Q_{ij}^{f_j} Q_{ik_1}^{f_{k_1}^{(1)}} Q_{ik_2}^{f_{k_2}^{(2)}} \prod_{j=k+1}^{i-1} Q_{ij}^{f_j} \right). \quad (8.49)$$

При  $i = k$  разрезание проводится последовательно по  $f_k^{(1)}$  и  $f_k^{(2)}$ , в результате получаем

$$\begin{aligned} \Phi_n^{(k)}(z, f_1, \dots, f_{k-1}) = & P_k^{(1)} [P_k^{(2)} [\Phi_n^{(k+1)}(z, f_1, \dots, \\ & \dots, f_{k-1}, 1, 1)]^{r_k} + Q_k^{(2)} [\Phi_n^{(k+1)}(z, f_1, \dots, f_{k-1}, 1, 0)]^{r_k}] + \\ & + Q_k^{(1)} [P_k^{(2)} [\Phi_n^{(k+1)}(z, f_1, \dots, f_{k-1}, 0, 1)]^{r_k} + \\ & + Q_k^{(2)} [\Phi_n^{(k+1)}(z, f_1, \dots, f_{k-1}, 0, 0)]^{r_k}]. \quad (8.50) \end{aligned}$$

Теперь этот полином надо возвести в степень  $r_{k-1}$  и провести разрезание по остальным функциям. При  $2 \leq i < k$  разрезание  $\Phi_n^{(i)}(z)$  по функции  $f_i$  выполняется с помощью формулы (8.48), но в ней для определения вероятностей  $P_i$  вместо (8.49) надо использовать формулу

$$P_i = R_i \left( 1 - \prod_{j=1}^{i-1} Q_{ij}^{f_j} \right). \quad (8.51)$$

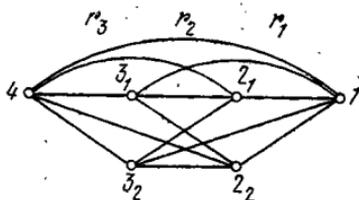


Рис. 8.12. Структура одной ветви в системе со структурным дублированием узлов второго и третьего рангов

**Пример 8.4.** Пусть в трехъярусной системе с полностью связными ветвями и полным оповещением о состоянии сети дублируются узлы второго и третьего рангов (рис. 8.12). Необходимо найти распределение числа работоспособных ветвей, считая известными коэффициенты разветвления на ярусах  $r_i$  и вероятности работоспособного состояния узлов и линий связи.

*Решение.* Логическая функция работоспособности определяется из формул

$$\begin{aligned}
 f_4 &= x_4 (x_{41} x_1 \vee x_{42,1} f_2^{(1)} \vee x_{42,2} f_2^{(2)} \vee x_{43,1} f_3^{(1)} \vee x_{43,2} f_3^{(2)}), \\
 f_3 &= x_3^{(i)} (x_{31,i} x_1 \vee x_{32,ii} f_2^{(1)} \vee x_{32,iz} f_2^{(2)}), \\
 f_2^{(i)} &= x_2^{(i)} x_{21}^{(i)} x_1, \quad i=1, 2.
 \end{aligned}
 \tag{8.52}$$

Производящий полином для одной ветви

$$\begin{aligned}
 \Phi_4^{(4)}(z, x_1, f_2^{(1)}, f_2^{(2)}, f_3^{(1)}, f_3^{(2)}) &= \\
 &= R_4 (1 - Q_{41}^{x_1} Q_{42,1}^{f_2^{(1)}} Q_{42,2}^{f_2^{(2)}} Q_{43,1}^{f_3^{(1)}} Q_{43,2}^{f_3^{(2)}}) (z - 1) + 1.
 \end{aligned}
 \tag{8.53}$$

После разрезания по  $f_3^{(i)}$  и возведения в степень  $r_3$  и  $r_2$

$$\begin{aligned}
 \Phi_4^{(2)}(z, f_2^{(1)}, f_2^{(2)}) &= \{P_3^{(1)} [P_3^{(2)} (\Phi_4^{(4)}(z, 1, f_2^{(1)}, f_2^{(2)}, 1, 1))]^{r_3} + \\
 &+ Q_3^{(2)} (\Phi_4^{(4)}(z, 1, f_2^{(1)}, f_2^{(2)}, 1, 0))]^{r_3} + \\
 &+ Q_3^{(1)} [P_3^{(2)} (\Phi_4^{(4)}(z, 1, f_2^{(1)}, f_2^{(2)}, 1, 0))]^{r_3} + \\
 &+ Q_3^{(2)} (\Phi_4^{(4)}(z, 1, f_2^{(1)}, f_2^{(2)}, 0, 0))]^{r_3}\}^{r_2},
 \end{aligned}
 \tag{8.54}$$

где

$$\begin{aligned}
 P_3^{(i)}(f_2^{(1)}, f_2^{(2)}) &= 1 - Q_3^{(i)}(f_2^{(1)}, f_2^{(2)}) = \\
 &= R_3^{(i)}(1 - Q_{31,i} Q_{32,ii}^{f_2^{(1)}} Q_{32,iz}^{f_2^{(2)}}),
 \end{aligned}
 \tag{8.55}$$

Теперь надо провести разрезание по  $f_2^{(1)}$  и  $f_2^{(2)}$ , возвести в степень  $r_1$ . Окончательно получим

$$\begin{aligned}
 \Phi_4(z) &= Q_1 + R_1 \{R_2^{(1)} R_{21}^{(1)} [R_2^{(2)} R_{21}^{(2)} \Phi_4^{(2)}(z, 1, 1) + \\
 &+ (1 - R_2^{(2)} R_{21}^{(2)}) \Phi_4^{(2)}(z, 1, 0)] + (1 - R_2^{(1)} R_{21}^{(1)}) \times \\
 &\times [R_2^{(2)} R_{21}^{(2)} \Phi_4^{(2)}(z, 0, 1) + (1 - R_2^{(2)} R_{21}^{(2)}) \Phi_4^{(2)}(z, 0, 0)]\}^{r_1}.
 \end{aligned}
 \tag{8.56}$$

Некоторые результаты расчетов по формулам (8.53) — (8.56) приведены на рис. 8.13, где представлены зависимости коэффициентов готовности системы от допустимого числа отказавших ветвей  $m$  и вероятности неработоспособного состояния элементов для трех вариантов исходных данных: ненадежны узлы и линии связи (рис. 8.13,а), ненадежны узлы (рис. 8.13,б) и ненадеж-

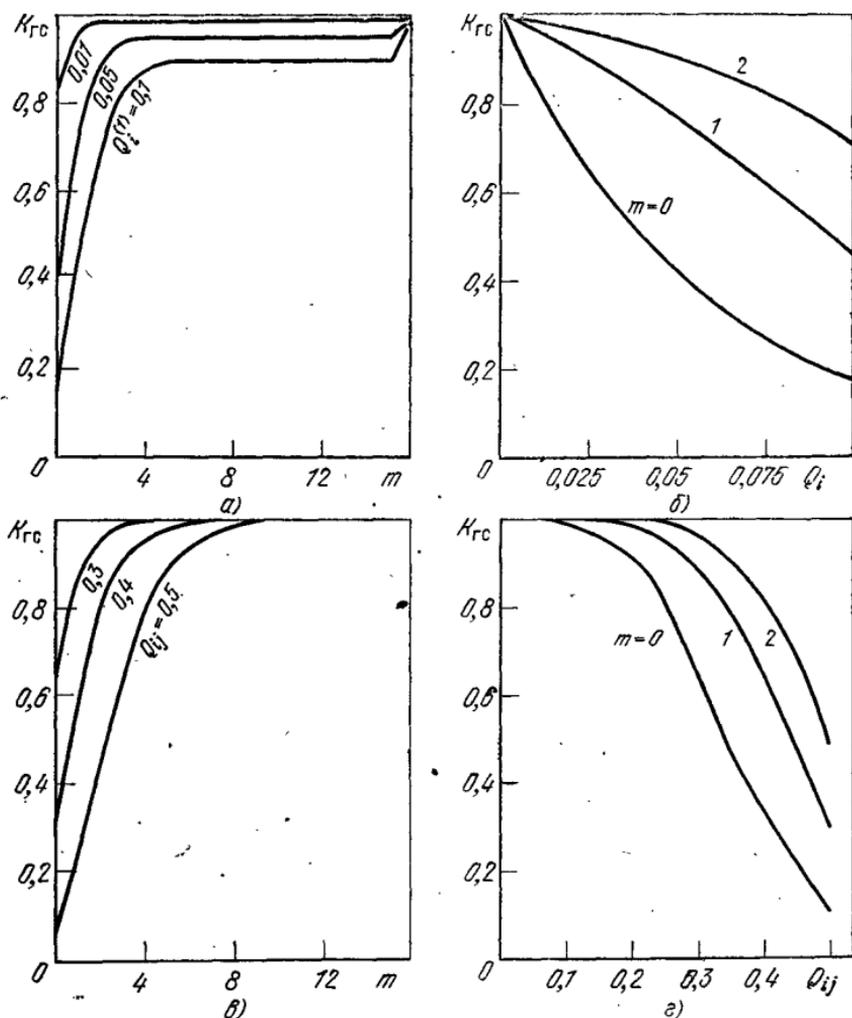


Рис. 8.13. Коэффициент готовности трехъярусной системы с полностью связными ветвями и структурным дублированием узлов второго и третьего рангов при  $r_1=r_2=2, r_3=4$ :

а)  $Q_i^{(2)} = Q_{ij}^{(1)} = Q_{ij}^{(2)} = 0, 1$ ; б)  $Q_{ij}^{(1)} = Q_{ij}^{(2)} = 0, Q_i^{(1)} = Q_i^{(2)} = Q_{ij}$ ; в, г)  $Q_i^{(1)} = Q_i^{(2)} = 0, Q_{ij}^{(1)} = Q_{ij}^{(2)} = Q_{ij}$

ны линии связи (рис. 8.13, в, г). Сравнение графиков подтверждает различную зависимость  $K_{гс}(m)$  от надежности узлов и линий связи. Наиболее чувствителен  $K_{гс}(m)$  к уменьшению надежности узлов. Увеличение  $m$  в системе с идеально надежными узлами позволяет сделать  $K_{гс}$  весьма близким к единице. В системе с ненадежными узлами это не удастся, так как начиная с некоторого  $m$  надежность системы определяется надежностью центрального узла.

### Система с функциональным резервированием узлов $k$ -го ранга

Пусть в системе с полносвязными ветвями каждый узел  $k$ -го ранга кроме связей с собственными узлами младших рангов имеет полный комплект связей со всеми узлами, подчиненными соседнему (слева или справа) узлу  $k$ -го ранга. В дальнейшем удобно использовать понятие малого и большого кустов. Малым кустом будем называть подсистему, содержащую один узел  $k$ -го ранга и все подчиненные ему узлы младших рангов. Большим кустом является подсистема, содержащая один узел  $(k-1)$ -го ранга и все подчиненные ему малые кусты. В рассматриваемой системе все узлы каждого малого куста имеют связи с собственным узлом  $k$ -го ранга и с узлами младших рангов соседнего (справа) малого куста. В большом кусте для крайнего (справа) малого куста соседним является крайний слева (рис. 8.11). Все узлы каждого малого куста кроме своих основных функций выполняют функциональное резервирование ветвей соседнего малого куста, участвуя во взаимодействии периферийных узлов соседнего куста с центральным узлом, когда там не остается ни одного работоспособного основного пути. Из описания структуры системы следует, что логические функции работоспособности всех ветвей одного малого куста одинаковы. Логические функции работоспособности одноименных ветвей различных больших кустов также одинаковы. Поэтому для полного описания модели надежности системы на логическом уровне достаточно составить  $r_{k-1}$  логических функций, соответствующих различным малым кустам, входящим в один большой куст. Их находят из следующей системы

логических уравнений:

$$f_s^{(i)} = x_s \left( \bigvee_{j=1}^{k-1} x_{sj} f_j \vee x_{sk, i} f_k^{(i)} \vee x_{sk, i+1} f_k^{(i+1)} \vee \left( \bigvee_{j=k+1}^{s-1} x_{sj} f_j \right) \right), \quad i = \overline{1, r_{k-1}}, \quad m = \overline{k+1, n},$$

$$f_k^{(i)} = x_k^{(i)} \left( \bigvee_{j=1}^{k-1} x_{kj} f_j \right), \quad f_s = x_s \left( \bigvee_{j=1}^{s-1} x_{sj} f_j \right), \quad s < k, \quad (8.57)$$

где  $i$  — порядковый номер малого куста в большом кусте;  $x_{sk, i}$  — индикатор работоспособного состояния линии связи между узлами  $s$  и  $k$   $i$ -го малого куста;  $x_{sk, i+1}$  — индикатор работоспособного состояния линии связи между узлом  $s$   $i$ -го куста и узлом  $k$   $(i+1)$ -го куста;  $f_k^{(i)}$  и  $f_k^{(i+1)}$  — логические функции работоспособности участков ветви между узлами  $k$  и  $l$  в  $i$ -м и  $(i+1)$ -м кустах соответственно. Остальные переменные и функции имеют тот же смысл, что и раньше.

Проведем замещение переменных  $n$ -го ранга в (8.57) и составим производящий полином для одной ветви  $i$ -го куста

$$\Phi_{ni}^{(n)}(z, f_1, \dots, f_k^{(i)}, f_k^{(i+1)}, f_{k+1}, \dots, f_{n-1}) = \\ = 1 + (z-1) R_n \left( 1 - \prod_{j=1}^{k-1} Q_{nj}^{f_j} Q_{nk, i}^{f_k^{(i)}} Q_{nk, i+1}^{f_k^{(i+1)}} \prod_{j=k+1}^{n-1} Q_{nj}^{f_j} \right). \quad (8.58)$$

Следующие  $n-k-1$  шагов замещения в (8.58) проводятся по обычной схеме: последовательное возведение в степень  $r_{n-1}, \dots, r_k$  и разрезание полиномов по функциям  $f_{n-1}, \dots, f_{k+1}$ . В результате получаем

$$\Phi_{ni}^{(k)}(z, f_1, \dots, f_{k-1}, f_k^{(i)}, f_k^{(i+1)}) = \\ = [P(f_{k+1} = 1) \Phi_{ni}^{(k+1)}(z, f_1, \dots, f_{k-1}, f_k^{(i)}, f_k^{(i+1)}, 1) + \\ + P(f_{k+1} = 0) \Phi_{ni}^{(k+1)}(z, f_1, \dots, f_{k-1}, f_k^{(i)}, f_k^{(i+1)}, 0)]^{r_k}. \quad (8.59)$$

Проведем теперь разрезание по функциям  $f_k^{(i)}$  и  $f_k^{(i+1)}$ . Поскольку соседние малые кусты зависят друг от друга вследствие введения дополнительных связей между ними, нельзя после разрезания (8.59) по  $f_k^{(i)}$  и  $f_k^{(i+1)}$  просто возвести полином в степень  $r_{k-1}$ , как это делалось в § 8.4. Необходимо сделать полный перебор возможных ситуаций в большом кусте на уровне  $k$ -го ранга и опре-

Делить условные полиномы для каждой ситуации, а затем объединить их с помощью формулы полной вероятности. В общем виде результат очередного шага замещения и перехода от узлов  $k$ -го к узлам  $(k-1)$ -го ранга можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Phi_n^{(k-1)}(z, f_1, \dots, f_{k-1}) = & P_k^{r_{k-1}} (\Phi_n^{(k)}(z, f_1, \dots, f_{k-1}, 1, 1))^{r_{k-1}} + \\ & + r_{k-1} P_k^{r_{k-1}-1} Q_k (\Phi_n^{(k)}(z, f_1, \dots, f_{k-1}, 1, 1))^{r_{k-1}-2} \times \\ & \times (\Phi_n^{(k)}(z, f_1, \dots, f_{k-1}, 0, 1))^2 + \sum_{i=2}^{r_{k-1}} \sum_{(j)} b_{ij} P_k^{r_{k-1}-i} Q_k^i \times \\ & \times [\Phi_n^{(k)}(z, f_1, \dots, f_{k-1}, 1, 1)]^{c_{ij3}} [\Phi_n^{(k)}(z, f_1, \dots, f_{k-1}, 0, 1)]^{c_{ij1}} \times \\ & \times [\Phi_n^{(k)}(z, f_1, \dots, f_{k-1}, 0, 0)]^{c_{ij0}}. \end{aligned} \quad (8.60)$$

где  $P_k(f_1, \dots, f_{k-1}) = 1 - Q_k(f_1, \dots, f_{k-1}) = P(f_k^{(i)} = 1)$ .

Таблица 8.1

$r_{k-1}$	$i$	$j$	$b_{ij}$	$c_{ij0}$	$c_{ij1}$	$c_{ij3}$
3	2	1	3	1	2	0
	3	1	1	3	0	0
4	2	1	2	0	2	2
	2	2	4	1	2	1
	3	1	4	2	2	0
	4	1	1	4	0	0
5	2	1	5	0	4	1
	2	2	5	1	2	2
	3	1	5	1	4	0
	3	2	5	2	2	1
	4	1	5	3	2	0
6	5	1	1	5	0	0
	2	1	6	1	2	3
	2	2	9	0	4	2
	3	1	2	0	6	0
	3	2	12	1	4	1
	3	3	6	2	2	2
	4	1	3	2	4	0
	4	2	6	3	2	1
4	3	6	2	4	0	
5	1	6	4	2	0	
6	1	1	6	0	0	

Каждое слагаемое в (8.60) соответствует числу (от 0 до  $r_{k-1}$ ), неработоспособных участков ветвей от узла  $k$  до 1. При составлении формулы использовалось предположение, что одноименные линии связи от узлов младших рангов к узлам  $k$ -го ранга имеют одинаковую надежность, и поэтому вид полинома определяется только числом узлов  $k$ -го ранга, через которые можно организовать связь с центральным узлом, и не зависит от того, какое из двух возможных направлений используется — основное или резервное. Коэффициенты  $b_{ij}$  и  $c_{ij}$  определяются из комбинаторных соображений перебором гипотез. Значения коэффициентов для  $r_{k-1} = 3, 6$  приведены в табл. 8.1. Дальнейшее преобразование полинома (8.60) с замещением оставшихся логических переменных осуществляются по общим правилам, приведенным в § 8.2.

**Пример 8.5.** В трехъярусной системе с полностью связными ветвями введено функциональное резервирование узлов второго ранга. Необходимо найти производящий полином распределения числа работоспособных ветвей для  $r_1=3, 4$  и 5.

**Решение.** Логическая функция работоспособности ветви

$$f_4^{(i)} = x_4 (x_{41} x_1 \vee x_{42}, i f_2^{(i)} \vee x_{42}, i+1 f_2^{(i+1)} \vee x_{43} f_3^{(i)}),$$

$$i = \overline{1, r_1},$$

$$f_3^{(i)} = x_3 (x_{31} x_1 \vee x_{32}, i f_2^{(i)} \vee x_{32}, i+1 f_2^{(i+1)}),$$

$$f_2^{(i)} = x_2, i x_{21}, i x_{11}.$$

Производящий полином для одной ветви, получаемый после замещения  $x_4$  и  $x_{4j}$ ,

$$\Phi_{4i}^{(4)}(z, x_1, f_2^{(i)}, f_2^{(i+1)}, f_3^{(i)}) = 1 + (z-1) R_4 (1 - Q_{41}^{x_1} Q_{42, i}^{f_2^{(i)}} Q_{42, i+1}^{f_2^{(i+1)}} Q_{43}^{f_3^{(i)}}). \quad (8.61)$$

После возведения (8.61) в степень  $r_3$ , замещения  $f_3^{(i)}$  и возведения в степень  $r_2$  получим полином типа (8.61):

$$\Phi_{4i}^{(2)}(z, x_1, f_2^{(i)}, f_2^{(i+1)}) = \{R_3 (1 - Q_{31}^{x_1} Q_{32, i}^{f_2^{(i)}} Q_{32, i+1}^{f_2^{(i+1)}}) \times \\ \times [\Phi_{4i}^{(4)}(z, x_1, f_2^{(i)}, f_2^{(i+1)}, 1)]^{r_3} + (Q_3 + R_3 Q_{31}^{x_1} Q_{32, i}^{f_2^{(i)}} Q_{32, i+1}^{f_2^{(i+1)}}) \times \\ \times [\Phi_{4i}^{(4)}(z, x_1, f_2^{(i)}, f_2^{(i+1)}, 0)]^{r_3}\}^{r_2}. \quad (8.62)$$

Замещение  $f_2^{(i)}$  и  $f_2^{(i+1)}$  проводится с помощью формулы (8.60) и табл. 8.1. Окончательно имеем

$$\Phi_4(z) = Q_1 + R_1 [p^3 \Phi_4^3(z, 3) + 3p^2 (1-p) \Phi_4(z, 3) \Phi_4^2(z, 1) + \\ + 3p (1-p)^2 \Phi_4^2(z, 1) \Phi_4(z, 0) + (1-p)^3 \Phi_4^3(z, 0)], \quad r_1=3; \quad (8.63)$$

$$\Phi_4(z) = Q_1 + R_1 [p^4 \Phi_4^4(z, 3) + 4p^3 (1-p) \Phi_4^2(z, 3) \Phi_4^2(z, 1) + \\ + 2p^2 (1-p)^2 [\Phi_4^4(z, 1) + 2\Phi_4(z, 3) \Phi_4^2(z, 1) \Phi_4(z, 0)] + \\ + 4p (1-p)^3 \Phi_4^2(z, 1) \Phi_4^2(z, 0) + (1-p)^4 \Phi_4^4(z, 0)], \quad r_1=4, \quad (8.64)$$

$$\Phi_4(z) = Q_1 + R_1 [p^5 \Phi_4^5(z, 3) + 5p^4(1-p) \Phi_4^3(z, 3) \times \\ \times \Phi_4^2(z, 1) + 5p^3(1-p)^2 [\Phi_4(z, 3) \Phi_4^4(z, 1) + \Phi_4^2(z, 3) \times \\ \times \Phi_4^2(z, 1) \Phi_4(z, 0)] + 5p^2(1-p)^3 [\Phi_4(z, 1) \Phi_4(z, 0) + \\ + \Phi_4(z, 3) \Phi_4^2(z, 1) \Phi_4(z, 0)] + 5p(1-p)^4 \Phi_4^2(z, 1) \times \\ \times \Phi_4^3(z, 0) + (1-p)^5 \Phi_4^5(z, 0)], \quad r_1=5, \quad (8.65)$$

где  $p = R_2 R_{21}$ ;  $\Phi_4(z, 3) = \Phi_{4i}^{(2)}(z, 1, 1, 1)$ ;  $\Phi_4(z, 1) = \Phi_{4i}^{(2)}(z, 1, 1, 0)$ ;  $\Phi_4(z, 0) = \Phi_{4i}^{(2)}(z, 1, 0, 0)$ .

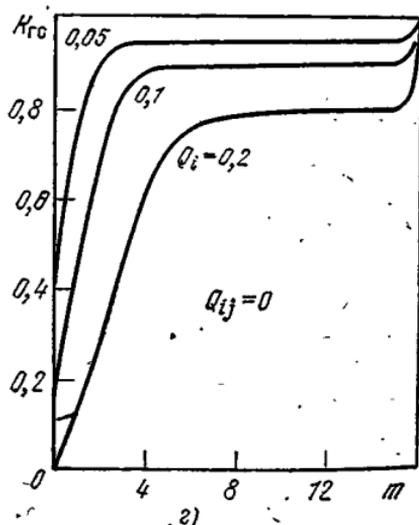
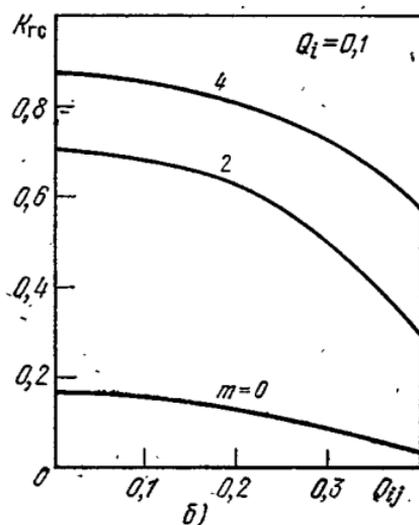
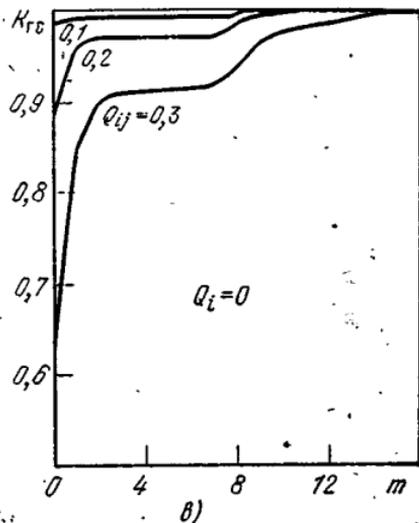
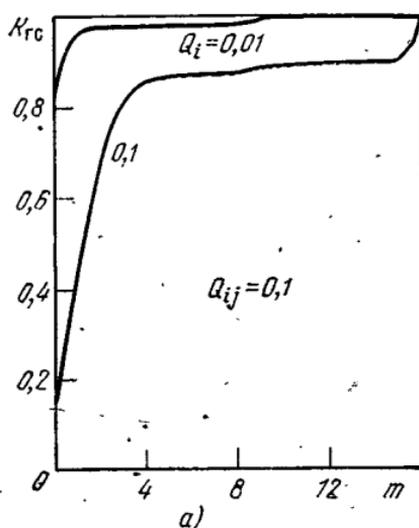


Рис. 8.14. Коэффициент готовности трехъярусной системы с полностью связанными ветвями и функциональным резервированием узлов второго ранга при  $r_1=4, r_2=r_3=2$

Некоторые результаты расчетов по формуле (8.64) приведены на рис. 8.14, из которого видно, что зависимость  $K_{гс}(m)$  имеет ярко выраженный нелинейный характер. Основной рост  $K_{гс}(m)$  происходит при небольших  $m$ : до  $m=1$  при  $Q_i=0$ ,  $Q_{ij} \leq 0,2$  или  $Q_i=0,1$  и  $Q_{ij} \leq 0,1$  (рис. 8.14, а, в);  $m=2$  при  $Q_i=0$  и  $Q_{ij} \leq 0,3$  (рис. 8.14, в);  $m=4$  при  $Q_i=0,1$  и  $Q_{ij} \leq 0,1$  (рис. 8.14, а, з). Затем увеличение избыточности, практически не изменяет  $K_{гс}$ . При  $Q_i=0$  следующее значительное повышение  $K_{гс}$  происходит при  $m/N \geq 0,5$ . Зависимость  $K_{гс}$  от  $Q_{ij}$  (рис. 8.14, б) свидетельствует о том, что и в данной системе влияние надежности линий связи на  $K_{гс}$  значительно слабее, чем влияние надежности узлов.

### Централизованная ветвящаяся структура технических средств АСУ ТП

Структурные схемы одной ветви системы для неизбыточного и двух избыточных вариантов с их модификациями представлены на рис. 6.6. Система имеет три точки разветвления: на выходах УСО, КАС1 и КАС2. Обозначим коэффициенты разветвления через  $r_1$ ,  $r_2$  и  $r_3$  и найдем распределение числа работоспособных ветвей во всех вариантах структуры, рассмотренных в § 6.2, полагая все ветви одинаковыми, т. е. система является изотропной с неоднозначным подчинением узлов. Логические функции работоспособности ветвей задаются формулами (6.33), (6.36), (6.38) и (6.41). Из формул видно, что во всех вариантах структуры переменная  $x_7$  неповторная и входит в логические функции как сомножитель. Это позволяет несколько упростить задачу поиска  $\Phi_4(z)$  и перейти к рассмотрению трехшаговой структуры без датчиков. Определяя полином  $\Phi_3(z)$ , искомый полином можно получить с помощью очевидного отношения

$$\Phi_4(z) = \Phi_3[(1 + R_7(z - 1))^{r_7}]. \quad (8.66)$$

Для неизбыточного варианта производящий полином для одной ветви

$$\Phi_3^{(3)}(z, x_i) = 1 + (z - 1)(1 - Q^{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5}).$$

Двукратное возведение в степень и разрезание по логическим переменным дает следующий полином:

$$\Phi_3(z) = 1 - R_1 R_2 + R_1 R_2 [1 - R_3 R_4 R_5 + R_3 R_4 R_5 (1 + (z-1) R_5)^{r_1}]. \quad (8.67)$$

Для варианта 1 производящий полином будем искать в виде

$$\Phi_3(z) = (1 - R_1 R_2)^2 + 2R_1 R_2 (1 - R_1 R_2) \psi_2(z) + (R_1 R_2)^2 \psi_1(z). \quad (8.68)$$

Для получения условного полинома  $\psi_1(z)$  в формуле (8.68) надо положить  $x_7 = x_{1_i} = x_{2_i} = 1$  и заместить  $x_{5_i}$  и  $x_{5_2}$ .

Тогда

$$\psi_1^{(3)}(z, f_{5_1}, f_{5_2}) = 1 + (z-1)(1 - Q_5^{f_{5_1}} Q_5^{f_{5_2}}), \quad (8.69)$$

где  $f_{5_1} = x_{6_1} (x_{3_1} \vee x_{3_2}) (x_{4_1} \vee x_{4_2} (x_{3_2} \vee x_{3_3}))$ ;  $f_{5_2} = x_{6_2} (x_{3_2} \vee x_{3_4}) (x_{4_2} \vee x_{4_1} (x_{3_1} \vee x_{3_2}))$ .

Возведение в степень  $r_2$  (8.69) и замещение  $x_{3_i}$  приводит к выражению

$$\psi_1^{(2)}(z, x_{6_i}, x_{4_i}) = (1 - Q_5^2)^2 \varphi_1(z, x_{6_i}, x_{4_i}) + 2Q_5^2 (1 - Q_5^2) \varphi_2(z, x_{6_i}, x_{4_i}) + Q_5^4, \quad (8.70)$$

где

$$\varphi_1(z, x_{6_i}, x_{4_i}) = [1 + (z-1)(1 - Q_5^{x_{6_1} (x_{4_1} \vee x_{4_2})} Q_5^{x_{6_2} (x_{4_1} \vee x_{4_2})})]^{r_2},$$

$$\varphi_2(z, x_{6_i}, x_{4_i}) = [1 + (z-1)(1 - Q_5^{x_{6_1} x_{4_1}})]^{r_2}. \quad (8.71)$$

Замещение оставшихся переменных дает

$$\varphi_1(z) = (1 - Q_5^2) [R_5^2 (1 + (z-1)(1 - Q_5^2))^{r_2} + 2R_5 Q_5 (1 + (z-1) R_5)^{r_2} + Q_5^2] + Q_5^4,$$

$$\varphi_2(z) = R_4 R_5 (1 + (z-1) R_5)^{r_2} + 1 - R_4 R_5. \quad (8.72)$$

Для получения полинома  $\psi_2(z)$  надо в (6.33) положить  $x_7=y_1=1$ ,  $y_2=0$ . После замещения  $x_5$

$$\psi_2^{(3)}(z, f_{53}) = 1 + (z-1)(1 - Q_5^{f_{53}}),$$

$$f_{53} = x_{4_1} x_{6_1} (x_{3_1} \vee x_{3_2}).$$

После замещения  $x_{3_i}$  находим

$$\psi_2^{(2)}(z, x_{6_1}, x_{4_1}) = (1 - Q_2^2) [1 + (z-1)(1 - Q_5^{x_{4_1} x_{6_1}})]^2 + Q_2^2. \quad (8.73)$$

Сравнивая (8.73) и (8.71), видим, что в (8.73) входит  $\varphi_2(z)$ . Поэтому запишем сразу окончательную формулу

$$\psi_2(z) = [(1 - Q_2^2) \varphi_2(z) + Q_2^2]^2. \quad (8.74)$$

Функция  $\varphi_2(z)$  определяется формулой (8.72).

Для варианта 1м полином  $\Phi_3(z)$  разыскивается в форме

$$\Phi_3(z) = C_0 + \sum_{i=1}^5 C_i \psi_i(z), \quad (8.75)$$

где  $C_0 = Q_1^2 + R_2^2 Q_2^4 + 2R_1 Q_1 Q_2^2$ ;  $C_1 = R_2^2 R_4^2$ ;  $C_2 = 4R_2^2 \times \times R_3^2 Q_2$ ;  $C_3 = 4R_2^2 R_2^2 Q_2^2$ ;  $C_4 = 2R_1 R_2^2 (R_1 Q_2^2 + Q_1)$ ;  $C_5 = = 4R_1 R_2 Q_2 (R_1 Q_2^2 + Q_1)$ . Условный полином  $\psi_1(z)$  соответствует состоянию, когда работоспособны все четыре УСО. Поскольку остальная часть системы в вариантах 1 и 1м одна и та же, полином  $\psi_1(z)$  необходимо находить по формулам (8.70) и (8.72). Полином  $\psi_2(z)$  соответствует состоянию, когда в одной ЭВМ работают два УСО, а в другой — только одно. Логическая функция работоспособности получается из (6.41) и (6.46) при  $x_7 = x_{1_i} = x_{2_1} = x_{2_2} = x_{2_3} = 1$ ,  $x_{2_4} = 0$ . Полином для одной ветви

$$\psi_2^{(3)}(z, f_{54}, f_{55}) = 1 + (z-1)(1 - Q_5^{f_{54}} Q_5^{f_{55}}), \quad (8.76)$$

где  $f_{54} = x_{6_1} (x_{3_1} \vee x_{3_2}) (x_{4_1} \vee x_{4_2} x_{3_3})$ ;  $f_{55} = x_{6_2} x_{3_3} (x_{4_2} \vee \vee x_{4_1} (x_{3_1} \vee x_{3_2}^{\vee}))$ .

После возведения (8.76) в степень  $r_2$  и замещения  $x_{3_i}$

$$\begin{aligned} \psi_2^{(2)}(z, x_{6_i}, x_{4_i}) = & (1 - Q_3^2) R_3 \varphi_1(z, x_{6_i}, x_{4_i}) + \\ & + R_3 Q_3 (1 + 2Q_3) \varphi_2(z, x_{6_i}, x_{4_i}) + Q_3^3. \end{aligned} \quad (8.77)$$

Совпадение смешанных форм полиномов  $\varphi_i$  из (8.77) и (8.71) позволяет воспользоваться результатами замещения (8.72) и записать сразу искомый полином

$$\begin{aligned} \psi_2(z) = & [(1 - Q_3^2) R_3 \varphi_1(z) + \\ & + R_3 Q_3 (1 + 2Q_3) \varphi_2(z) + Q_3^3]^{r_1}. \end{aligned} \quad (8.78)$$

Условный полином  $\psi_3(z)$  соответствует состоянию, когда работоспособны две ЭВМ и в каждом плече структуры по одному УСО.

Полагая в (8.69)  $x_{3_3} = x_{3_4} = 0$  и замещая  $x_{3_i}$  и  $x_{3_3}$ , получаем

$$\begin{aligned} \psi_3^{(2)}(z, x_{6_i}, x_{4_i}) = & R_3^2 \varphi_1(z, x_{6_i}, x_{4_i}) + \\ & + 2R_3 Q_3 \varphi_2(z, x_{6_i}, x_{4_i}) + Q_3^2. \end{aligned}$$

Используя результат замещения (8.72), можем записать сразу окончательно выражение

$$\psi_3(z) = [R_3^2 \varphi_1(z) + 2R_3 Q_3 \varphi_2(z) + Q_3^2]^{r_1}. \quad (8.79)$$

Полином  $\psi_4(z)$  соответствует состоянию, когда работает одна ЭВМ с двумя УСО. Полагая в (8.69)  $x_{3_3} = x_{3_4} = 0$ , видим, что логическая функция  $f_{52} = 0$ , а  $f_{51} = f_{53}$ . Отсюда следует, что  $\psi_4(z)$  определяется по формуле (8.74).

Для получения  $\psi_5(z)$  в (8.69) надо положить  $x_{3_2} = x_{3_3} = x_{3_4} = 0$ .

После замещения

$$\psi_5(z) = (R_3 \varphi_2(z) + Q_3)^{r_1}. \quad (8.80)$$

Вариант 2 отличается от варианта 1 только наличием перекрестных связей между АЦП и УСО. Поэтому  $\Phi_3(z)$  разыскивается также в виде (8.68). Однако во втором состоянии, когда работоспособно только одно плечо

в структуре ветви, вместо условного полинома  $\psi_2(z)$  надо взять  $\psi_3(z)$  из (8.79), т. е.

$$\Phi_3(z) = R_1^2 R_2^2 \psi_1(z) + 2R_1 R_2 (1 - R_1 R_2) \times \\ \times \psi_3(z) + (1 - R_1 R_2)^2. \quad (8.81)$$

Аналогично для варианта 2м производящий полином разыскивается в виде (8.75). Нетрудно установить, что изменения в выражении касаются только двух коэффициентов

$$C_3 = 2R_1 R_2^2 (2R_1 Q_2^2 + Q_1), \\ C_4 = 2R_1^2 R_2^2 Q_2^2, \quad (8.82)$$

остальные коэффициенты  $C_i$  и полиномы  $\psi_i(z)$  не меняются.

Если в варианте 2 не вводить дублирование элементов 4, 5 и 6, то форма представления полинома (8.75) сохраняется, но для получения полиномов  $\psi_i(z)$  в логической функции (6.38) надо положить  $x_{5_1} = x$ ,  $x_{6_1} = x_{6_2}$ ,  $x_{4_1} = x_{4_2}$ .

После замещения переменных получим следующее выражение для искомого полинома:

$$\Phi_3(z) = C_0 + C_1 [(1 - Q_3^4) \varphi_2(z) + Q_3^4]^{r_1} + \\ + C_2 [(1 - Q_3^2) \varphi_2(z) + Q_3^2]^{r_1} + (C_3 + C_4) [(1 - Q_3^2) \varphi_2(z) + \\ + Q_3^2]^{r_1} + C_5 [R_3 \varphi_2(z) + Q_3]^{r_1}, \quad (8.83)$$

где  $\varphi_2(z) = R_4 R_6 (1 + (z-1) R_5)^{r_2} + 1 - R_4 R_6$ .

Если, кроме того, в каждом плече заменить два ПСБ одним, то получится полином вида (8.75), но с другими  $\psi_i(z)$ . Опустив промежуточные выкладки, запишем окончательные выражения

$$\psi_1(z) = [(1 - Q_3^2)^2 \varphi_3(z) + 2Q_3^2 (1 - Q_3^2) \varphi_4(z) + Q_3^4]^{r_1}, \\ \psi_2(z) = [R_3 (1 - Q_3^2) \varphi_3(z) + Q_3 R_3 (1 + 2Q_3) \varphi_4(z) + Q_3^2]^{r_1}, \\ \psi_3(z) = [R_3^2 \varphi_3(z) + 2R_3 Q_3 \varphi_4(z) + Q_3^2]^{r_1}, \\ \psi_4(z) = [(1 - Q_3^2) \varphi_4(z) + Q_3^2]^{r_1},$$

$$\psi_5(z) = (R_3 \varphi_4(z) + Q_3)^{r_1}, \quad (8.84)$$

где

$$R_3 = 1 - Q_3 = R_{\text{кв}} R_{\text{цсб}},$$

$$\varphi_3(z) = R_4 R_6 (1 - Q_3^2) [(1 + (z-1) R_5)^{r_2} - 1] + 1; \quad (8.85)$$

$$\varphi_4(z) = 1 + R_4 R_6 R_8 [(1 + (z-1) R_5)^{r_2} - 1],$$

$$R_8 = R_{\text{цсб}}.$$

Некоторые результаты расчетов по формулам (8.67) — (8.85) приведены на рис. 8.15.

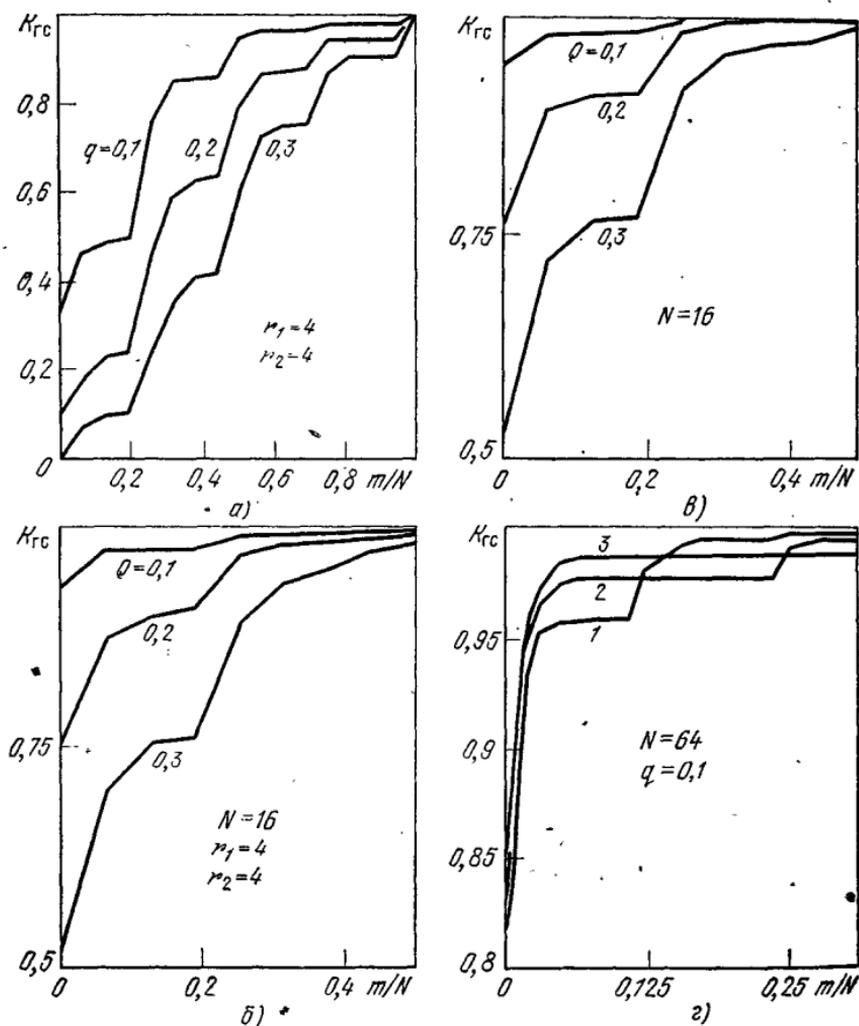


Рис. 8.15. Коэффициент готовности централизованной ветвящейся структуры технических средств АСУ ТП:

а — неизбыточный вариант; б — вариант 1; в — вариант 2; г — вариант 1, 1 —  $r_1=r_2=8$ , 2 —  $r_1=4, r_2=16$ , 3 —  $r_1=2, r_2=32$

## 8.5. ХАРАКТЕРИСТИКИ ИНФОРМАЦИОННОЙ НАГРУЗКИ ПУТЕЙ, УЗЛОВ И ЛИНИЙ СВЯЗИ ПРИ ЦЕНТРАЛИЗОВАННОМ СБОРЕ ИНФОРМАЦИИ В ВЕТВЯЩЕЙСЯ СИСТЕМЕ

Режим централизованного сбора информации является одним из основных в системах централизованного контроля, информационных системах, АСУ технологическими процессами и объектами. Сбор информации может осуществляться по регламенту либо инициироваться центральным узлом с помощью циклического опроса или специального циркулярного сообщения, направляемого всем периферийным узлам. Если все периферийные узлы одного куста используют при передаче пути, проходящие через один и тот же транзитный узел и линию связи, то на узлах могут возникать очереди, приводящие к увеличению общего времени сбора информации. Учитывая, что это время является одной из важнейших характеристик системы, важно установить, сколько периферийных узлов воспользуются при передаче данным элементом сети и какова длина возникающей очереди. Длина очереди зависит не только от алгоритма выбора маршрута и надежности сети, но и от структуры и параметров потока сообщений от каждого периферийного узла. Если же общая длина всех сообщений, передаваемых каждым периферийным узлом по регламенту или однократному запросу известна, то длину очереди на транзитном узле нетрудно рассчитать, зная распределение числа периферийных узлов, использующих при передаче заданный транзитный узел или другой элемент сети. Нахождение этого распределения, называемого далее распределением информационной нагрузки, и является основной задачей данного параграфа.

Основой для построения распределений являются логические функции нагрузки, рассмотренные в гл. 7. Методика построения производящего полинома распределения информационной нагрузки содержит те же этапы, что и методика построения распределения числа работоспособных ветвей, изложенная в § 8.2. Общими в обоих случаях являются и приемы преобразования логических функций и полиномов в смешанной форме. Однако существуют и некоторые особенности расчета распределения информационной нагрузки. Отметим две из них. Во-первых, при расчете информационной нагрузки логические переменные, принадлежащие одному рангу, не

удается сгруппировать в одной функции, как это удавалось при расчете распределения числа работоспособных ветвей. Обычно переменные входят в различных сочетаниях в показатели степени вероятностей. Это усложняет процедуру замещения и увеличивает число слагаемых в полиноме. Во-вторых, при построении полинома нельзя проводить раздельное замещение переменных в ортогональных слагаемых, существенно упрощающее построение расчетных формул для двухполюсных систем. Это объясняется необходимостью вынесения вероятности логических условий за пределы оператора возведения в степень, действующего целиком на всю сумму ортогональных слагаемых. Несмотря на это с помощью ЛВМ удастся довести до конца решение задачи во многих практически интересных случаях, когда другие методы не дают удовлетворительных результатов.

Рассмотрим более подробно методы построения распределений информационной нагрузки различных элементов и подсистем при различных вариантах оповещения узлов о состоянии сети.

### **Информационная нагрузка путей при полном оповещении о состоянии сети**

В изотропной системе с ветвями произвольной структуры и однозначным подчинением узлов алгоритм выбора маршрутов на периферийных узлах содержит ряд приоритетности путей. Необходимо найти распределение числа периферийных узлов, которые в сеансе сбора информации будут использовать путь  $I_i$ , занимающий  $i$ -е место в ряду приоритетности. По-прежнему рассматриваем стационарный участок эксплуатации системы, когда каждый элемент в модели надежности характеризуется стационарной вероятностью работоспособного состояния при неограниченном восстановлении либо вероятностью  $p_i(t)$ , рассчитываемой по формуле

$$p_i(t) = (1 + \beta p_{vi}^0 \bar{T}_{vi} / \bar{t}_{0i})^{-1} \times \exp[-(1 - \beta p_{vi}^0) \lambda_i t],$$

где  $\bar{t}_{0i} = \lambda_i^{-1}$  — наработка на отказ;  $\bar{T}_{vi}$  — среднее время восстановления;  $\beta = p_{vi} / p_{vi}^0$  — параметр для varia-

ции,  $p_{vi}$  имеет смысл доли устраняемых отказов, если восстановление ограничено и только часть отказов устраняется и характеризуется стационарной вероятностью, а другая часть учитывается так же, как в невозстановливаемой системе. Логическая функция нагрузки пути определяется формулой (7.2), а группы путей— (7.3). Выполняя замещение  $x_n$  и  $x_{nj}$  в (7.1), составляем производящий полином распределения нагрузки группы путей для одной ветви

$$\Phi_{nj}^{(n)}(z, f_1, \dots, f_{n-1}, g_1, \dots, g_{n-1}) = 1 + (z-1) R_n \prod_{j=1}^{n-1} Q_{nj}^{f_j} \left( 1 - \prod_{j=1}^{n-1} Q_{nj}^{g_j} \right). \quad (8.86)$$

Если ни один из путей, предшествующих рассматриваемой группе путей в ряду приоритетности, не содержит линии  $nj$ , то  $f_j=0$ . Если же рассматриваемая группа путей не содержит некоторой линии  $nj$ , то  $g_j=0$ . После возведения (8.86) в степень  $r_{n-1}$  проводится замещение  $x_{n-1}$  и  $x_{n-1,j}$ , входящих в  $g_{n-1}$  и  $f_{n-1}$ , путем разложения полинома на три слагаемых, соответствующих трем несовместным ситуациям:  $f_{n-1}=1, f'_{n-1}g_{n-1}=1, f'_{n-1}g'_{n-1}=1$  — и образующих полную группу событий. Эти операции повторяются до полного замещения всех логических переменных. Если для некоторого  $i$  функции  $f_i$  и  $g_i$  отсутствуют в записи (8.86), то после возведения в степень  $r_i$  этап замещения пропускается и выполняется только возведение в степень  $r_{i-1}$ .

**Пример 8.6.** В четырехъярусной изотропной ветвящейся системе с полносвязными ветвями коэффициенты разветвления на ярусах  $r_1, r_2, r_3$  и  $r_4$ . Оповещение о состоянии сети полное. Ряд приоритетности путей такой же, как в примере 7.1. Необходимо найти распределение числа периферийных узлов, которые доставляют информацию в центральный узел по прямым линиям связи, используя один, два и три транзитных узла.

**Решение.** Обозначим производящие полиномы распределения числа периферийных узлов, использующих пути с  $j$  транзитными узлами, через  $\Phi_{ij}(z)$ ,  $j=0, 1, 2, 3$ . Составим логические функции нагрузки путей с  $j$  тран-

зитными узлами

$$\begin{aligned}
 f_{50} &= x_5 x_{51} x_1, \quad f_{51} = x'_{51} x_5 x_1 (x_{54} x_4 x_{41} \vee \\
 &\quad \vee x_{53} x_3 x_{31} \vee x_{52} x_2 x_{21}), \quad f_{52} = x_5 x_1 x'_{51} \times \\
 &\quad \times (x_{54} x_4 x_{41})' (x_{53} x_3 x_{31})' (x_{52} x_2 x_{21})' (x_{54} \times \\
 &\quad \times (x_{43} x_3 x_{31} \vee x_{42} x_2 x_{21}) \vee (x_{53} x_3 x_{32} x_2 x_{21})), \\
 f_{53} &= x'_{51} x'_{52} x'_{53} x'_{41} x'_{31} x_{54} x_4 x_{43} x_3 x_{32} x_2 x_{21} x_1. \quad (8.87)
 \end{aligned}$$

Проведем замещение  $x_3$  и  $x_{51}$  в функции  $f_{50}$  и составим полином

$$\Phi_{50}^{(5)}(z, x_1) = 1 + (z - 1) R_5 (1 - Q_{51}^{x_1}). \quad (8.88)$$

Поскольку в (8.88) нет переменных, соответствующих переменным второго — четвертого рангов, то проводим сразу возведение в степень  $r_1 r_2 r_3 r_4$ , а затем замещение  $x_1$ :

$$\Phi_{50}(z) = Q_1 + R_1 (1 + (z - 1) R_5 R_{51})^{r_1 r_2 r_3 r_4}. \quad (8.89)$$

После замещения  $x_5$  и  $x_{51}$  в функции  $f_{51}$ , возведения полинома в степень  $r_4$  и замещения  $x_4$  и  $x_{41}$

$$\begin{aligned}
 \Phi_{51}^{(4)}(z, g_2, g_3) &= R_4 R_{41} [1 + (z - 1) R_5 Q_{51} (1 - \\
 &\quad - Q_{52}^{g_2} Q_{53}^{g_3} Q_{54}^{x_1})] + (1 - R_4 R_{41}) [1 + (z - 1) R_5 R_{51} (1 - \\
 &\quad - Q_{52}^{g_2} Q_{53}^{g_3})]^{r_4}. \quad (8.90)
 \end{aligned}$$

Для полного замещения делаем еще три шага и получаем

$$\begin{aligned}
 \Phi_{51}(z) &= Q_1 + R_1 \{ R_2 R_{21} \{ R_3 R_{31} [ R_4 R_{41} (1 + \\
 &\quad + (z - 1) R_5 Q_{51} (1 - Q_{52} Q_{53} Q_{54})]^{r_4} + (1 - R_4 R_{41}) (1 + \\
 &\quad + R_5 Q_{51} (1 - Q_{52} Q_{53}) (z - 1))^{r_4} \}^{r_3} + \\
 &\quad + (1 - R_4 R_{31}) [ R_4 R_{41} (1 + (z - 1) R_5 Q_{51} (1 - Q_{52} Q_{54}))^{r_4} + \\
 &\quad + (1 - R_4 R_{41}) (1 + (z - 1) R_5 Q_{51} R_{52})^{r_4} ]^{r_2} + \\
 &\quad + (1 - R_2 R_{21}) \{ R_4 R_{41} [ R_4 R_{41} (1 + (z - 1) R_5 Q_{51} (1 - \\
 &\quad Q_{53} Q_{54})]^{r_4} + (1 - R_4 R_{41}) (1 + (z - 1) Q_{51} R_5 R_{53})^{r_4} \}^{r_2} + \\
 &\quad + (1 - R_3 R_{31}) [ R_4 R_{41} (1 + (z - 1) R_5 Q_{51} R_{54})^{r_4} + \\
 &\quad + (1 - R_4 R_{41}) ]^{r_2} \}^{r_1}. \quad (8.91)
 \end{aligned}$$

Прежде чем провести замещение в функции  $f_{52}$ , необходимо ортогонализировать коэффициенты при  $x_{5i}$  в соответствии с формулой (1.81). Переход к смешанной форме по формуле (1.82) дает следующий полином:

$$\Phi_{52}^{(5)}(z, x_i, g_3, g_4) = 1 + (z-1) Q_{51} Q_{54}^{x_4 x_{41}} Q_{53}^{x_3 x_{31}} Q_{52}^{x_2 x_{21}} (1 - Q_{54}^{x'_{41} g_4} Q_{53}^{x'_{31} g_3}),$$

$$g_4 = x_4 (x_{43} x_3 x_{31} \vee x_{42} x_2 x_{21}) x_1,$$

$$g_3 = x_3 x_{32} x_2 x_{21} x_1.$$

После возведения в степень  $r_4$ , проведя разложение полинома по вероятностям трех событий  $x_4 x_{41} = 1$ ,  $x'_{41} g_4 = 1$  и  $x'_{41} g'_4 = 1$ , получаем

$$\Phi_{52}^{(4)}(z, x_i, g_3) = R_4 \{ R_{41} [1 + (z-1) R_5 Q_{51} Q_{54} \times$$

$$\times Q_{53}^{x_3 x_{31}} Q_{52}^{x_2 x_{21}} (1 - Q_{53}^{x'_{31} g_3})]^{r_4} + Q_{41} (1 -$$

$$- Q_{43}^{x_3 x_{31} x_2} Q_{42}^{x_2 x_{21} x_1}) [1 + (z-1) R_5 Q_{51} Q_{53}^{x_3 x_{31}} Q_{52}^{x_2 x_{21}} (1 -$$

$$- Q_{54} Q_{53}^{x'_{31} g_3})]^{r_4} \} + (Q_4 + R_4 Q_{43}^{x_3 x_{31} x_1} Q_{42}^{x_2 x_{21} x_1}) [1 +$$

$$+ (z-1) R_5 Q_{51} Q_{53}^{x_3 x_{31}} Q_{52}^{x_2 x_{21}} (1 - Q_{53}^{x'_{31} g_3})]^{r_4}.$$

Замещение остальных переменных приводит к выражению

$$\Phi_{52}(z) = Q_1 + R_1 \{ R_2 R_{21} \{ R_3 R_{31} [Q_4 + R_4 (R_{41} + Q_{41} Q_{42} Q_{43}) +$$

$$+ R_4 Q_{41} (1 - Q_{42} Q_{43}) (1 + (z-1) R_5 Q_{51} Q_{52} Q_{53} R_{54})^{r_4}]^{r_2} +$$

$$+ R_3 Q_{31} R_{32} [R_4 R_{41} (1 + (z-1) R_5 Q_{51} Q_{52} R_{53} Q_{54})^{r_4} +$$

$$+ R_4 Q_{41} R_{42} (1 + (z-1) R_5 Q_{51} Q_{52} (1 - Q_{53} Q_{55})^{r_4} +$$

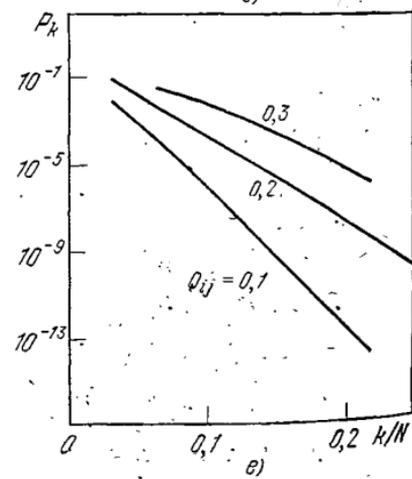
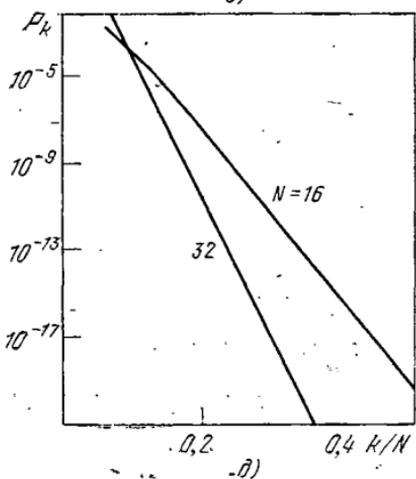
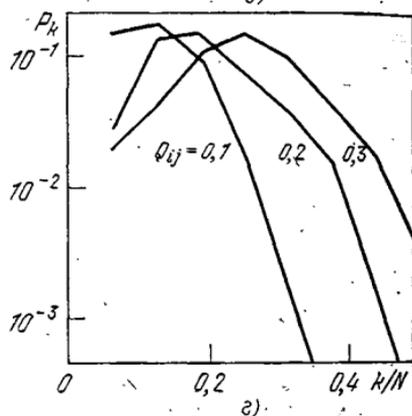
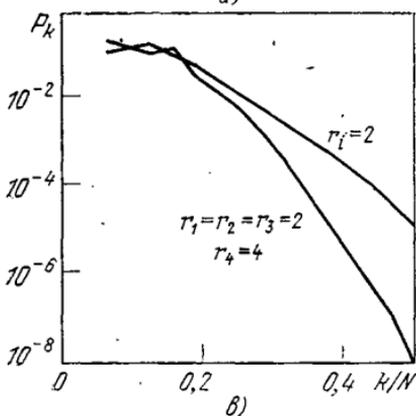
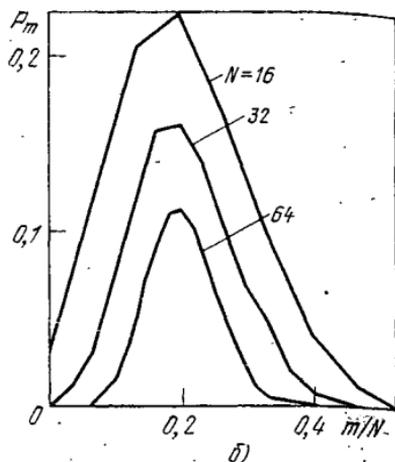
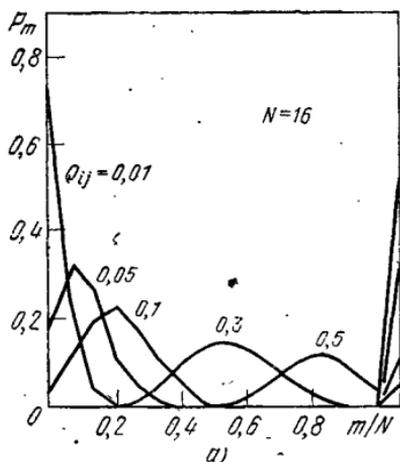
$$+ (Q_4 + R_4 Q_{41} Q_{42}) (1 + (z-1) R_5 Q_{51} Q_{52} R_{53})^{r_4}]^{r_2} +$$

$$+ (Q_3 + R_3 Q_{31} Q_{32}) [1 - R_4 R_{42} Q_{41} + R_4 R_{42} Q_{41} (1 +$$

$$+ (z-1) R_5 Q_{51} Q_{52} R_{54})^{r_4}]^{r_2} \}^{r_2} + (1 - R_2 R_{21}) \{ 1 - R_3 R_{31} +$$

$$+ R_3 R_{31} [R_4 Q_{41} R_{42} (1 + (z-1) R_5 Q_{51} Q_{52} R_{54})^{r_4} +$$

$$+ 1 - R_4 Q_{41} R_{43}]^{r_2} \}^{r_2}. \quad (8.92)$$



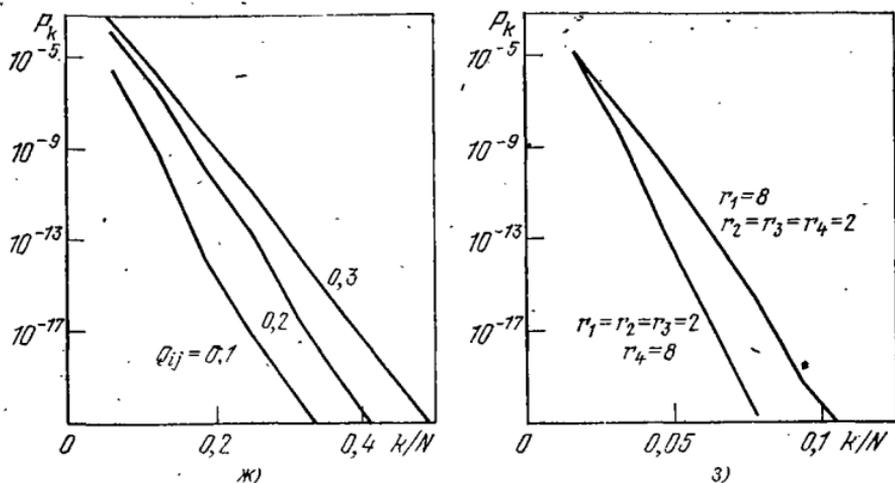


Рис. 8.16. Распределение числа периферийных узлов в четырехъярусной системе с полностью связными ветвями, доставляющих информацию в центр по линиям связи с  $k$  транзитными узлами:

а)  $k=0$ ,  $Q_i=0$ ; б)  $Q_i=k=0$ ,  $Q_{ij}=0,1$ ; в)  $k=1$ ,  $Q_i=Q_{ij}=0,1$ ; г)  $k=1$ ,  $Q_i=0$ ,  $r_1=r_2=r_3=2$ ,  $r_4=4$ ; д)  $k=2$ ,  $Q_i=Q_{ij}=0,1$ ; е)  $k=2$ ,  $Q_i=0$ ,  $N=32$ ; ж)  $k=3$ ,  $Q_i=0$ ,  $N=16$ ; з)  $k=3$ ,  $Q_{ij}=0,1$ ,  $Q_i=0$ ,  $N=64$

Аналогично составляется полином

$$\Phi_{53}(z) = Q_1 + R_1 \{ R_2 R_{21} \{ 1 - R_3 Q_{31} R_{32} + R_3 Q_{31} R_{32} [ 1 - Q_{41} Q_{42} R_4 R_{43} + Q_{41} Q_{42} R_4 R_{43} ( 1 + (z-1) R_5 Q_{51} Q_{52} Q_{53} R_{54} ]^{r_4} ]^{r_3} ]^{r_2} + 1 - R_2 R_{21} \}^{r_1} \}. \quad (8.93)$$

Результаты расчетов по формулам (8.89) — (8.93) приведены на рис. 8.16.

### Информационная нагрузка линий связи и транзитных узлов при полном оповещении о состоянии сети.

Логическую функцию нагрузки линии связи  $i_1 i_2$  в общем случае можно представить в виде (7.22) с функциями  $B_i$  вида (7.23). Используя смешанную форму (7.24), составим производящий полином для одной ветви

$$\Phi_{n, i_1 i_2}^{(n)}(z) = 1 + (z-1) \cdot P_A. \quad (8.94)$$

Далее преобразование полинома (8.94) производится по общим правилам. Особенность преобразования заключается в том, что в данном случае возведение в степень заканчивается при достижении ранга, которому

принадлежит исходящий для рассматриваемой линии связи узел. Начиная с этого ранга, замещение проводится как в двухполюсной системе. При замещении для упрощения функций следует использовать формулу

$$1 - Q^{f_1} + 1 - Q^{f_2} = 1 - Q^{f_1 \vee f_2}, \quad (8.95)$$

справедливую для ортогональных функций  $f_1$  и  $f_2$ . Кроме того, в уравнениях для коэффициентов полиномов могут возникать выражения вида  $1 - 0^f$ . По определению это выражение равно  $f$ . При расчете распределения нагрузки  $i$ -го узла полином  $\Phi_{ni}^{(n)}(z)$  имеет ту же структуру, определяемую формулами (8.94) и (7.24). Различия касаются лишь конкретного вида функции  $f_{ij}$ . Рассмотрим пример.

**Пример 8.7.** В шестиярусной системе со структурой ветви, приведенной на рис. 7.2, необходимо найти распределение информационной нагрузки линии связи 54, учитывая лишь те сообщения, которые пришли в узел 5 по линиям 75 либо 765. Разветвления на ярусах 5 и 6 равны соответственно,  $r_5$  и  $r_6$ . Оповещение о состоянии сети полное. Узлы идеально надежны. Ряд приоритетности путей приведен на рис. 7.3.

*Решение.* Производящий полином распределения нагрузки линии 54 получается с помощью логических функций (7.26) и (7.27). Замещая в (7.29) переменные  $x_{7i}$ , составляем полином

$$\begin{aligned} \Phi_{7,54}^{(7)}(z, g_1, g_2, x_i) = & 1 + (z - 1)(1 - \\ & - R_{71}^{x'_{51}x_{54}})[Q_{76}^{x_{61} \vee x_{64}}(1 - Q_{75}^{x_{61}}) + Q_{76}^{x_{61}}(1 - Q_{75}^{g_1}) + \\ & + (1 - Q_{75}^{g_2})Q_{76}^{x_{61} \vee x_{64}}], \end{aligned} \quad (8.96)$$

$$g_1 = x'_{41}(x_{53}x_{31})'(x_{43}x_{31} \vee x_{42}x_{21});$$

$$g_2 = x'_{41}x'_{42}x'_{53}x'_{31}x_{43}x_{32}x_{21}.$$

Возводим (8.96) в степень  $r_6$  и замещаем  $x_{61}$  и  $x_{64}$ :

$$\begin{aligned} \Phi_{7,54}^{(6)}(z, g_1, g_2, x_i) = & R_{61}[1 + (z - 1)(1 - R_{71}^{x'_{51}x_{54}})Q_{76}(1 - \\ & - Q_{75}^{g_3})]^{r_6} + Q_{61}R_{64}[1 + (1 - R_{71}^{x'_{51}x_{54}})(z - 1)(1 - Q_{75}^{g_1} + \\ & + Q_{76}(1 - Q_{75}^{x_{41} \vee x'_{42}x'_{53}x'_{31}x_{43}x_{32}x_{21}}))]^{r_6} + Q_{61}Q_{64}[1 + (z - 1) \times \\ & \times (1 - R_{71}^{x'_{51}x_{54}})(1 - Q_{75}^{g_3})]^{r_6}, \end{aligned} \quad (8.97)$$

$$\bar{g}_3 = x_{41} \vee x_{43} x'_{53} (x_{21} \vee x_{32} x_{21}) \vee (x_{53} x_{31})' x_{42} x_{21}.$$

Здесь дважды использована для упрощения формула (8.95).

После возведения в степень  $r_5$  и замещения остальных переменных окончательно получаем

$$\begin{aligned} \Phi_{7,54}(z) = & 1 - Q_{51} R_{54} + Q_{51} R_{54} \{ Q_{41} [ Q_{31} ( Q_{21} + R_{21} Q_{42} ( 1 - \\ & - Q_{53} R_{43} R_{32} ) ) + R_{31} ( R_{53} R_{43} + Q_{43} ( 1 - Q_{53} R_{42} ) ) ] + \\ & + ( R_{41} + Q_{41} Q_{42} Q_{53} Q_{31} R_{43} R_{32} R_{21} ) \varphi_1(z) + Q_{41} ( Q_{31} R_{42} R_{21} + \\ & + R_{31} Q_{53} ( 1 - Q_{42} Q_{43} ) \varphi_2(z) \} \}, \quad (8.98) \end{aligned}$$

где

$$\varphi_1(z) = [ ( 1 - Q_{61} Q_{64} ) \varphi_3(z) + Q_{61} Q_{64} \varphi_4(z) ]^{r_5},$$

$$\varphi_2(z) = [ R_{61} \varphi_3(z) + Q_{61} \varphi_4(z) ]^{r_5},$$

$$\varphi_3(z) = [ 1 + ( z - 1 ) Q_{71} Q_{76} R_{75} ]^{r_5},$$

$$\varphi_4(z) = [ 1 + ( z - 1 ) Q_{71} R_{75} ]^{r_5}.$$

Логическая функция нагрузки линии 54 сообщениями, поступающими через транзитный узел  $b$ , выражается формулой (7.32). Проводя в ней замещение  $x_{71}$ , составим полином

$$\begin{aligned} \Phi_{7,54}^{(7)}(z, f_5, f_6, g, x_i) = & 1 + ( z - 1 ) ( 1 - \\ & - R_{71}^{x'_{51} x'_{61} x_{65} x_{54}} ) ( Q_{75} ( 1 - Q_{76}^{x'_{65} x_{41} \vee g} ) + Q_{751}^f ( 1 - Q_{76}^f ) ), \quad (8.99) \end{aligned}$$

$f_5 = x_{53} ( x_{31} \vee x_{32} x_{21} ) \vee ( x_{42} \vee x_{43} x_{32} ) x_{21}$ ;  $f_6 = x'_{41} ( x_{64} x_{43} x_{31} )' \times$   
 $\times ( x_{43} x_{31} \vee x_{42} x_{21} )$ ;  $g = x'_{53} x'_{41} x'_{42} x'_{31} x_{43} x_{32} x_{21}$ . Возводим (8.99) в степень  $r_6$  и замещаем  $x_{6i}$ .

После возведения в степень  $r_5$  и замещения остальных переменных окончательно получаем

$$\begin{aligned} \Phi_{7,54}(z) = & Q_{41} [ R_{53} ( 1 - R_{42} R_{21} ) ( 1 - R_{43} R_{31} ) + \\ & + Q_{53} ( R_{42} Q_{21} + Q_{42} ( Q_{43} R_{31} + Q_{31} ( 1 - R_{43} R_{32} R_{21} ) ) ) ] + \\ & + [ R_{53} ( R_{41} + Q_{41} R_{43} R_{31} ) + Q_{53} ( R_{41} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + Q_{41}R_{43}R_{31}R_{21}(R_{42} + Q_{42}R_{32}) \Big] \varphi_1(z) + \\
& + [R_{53}Q_{42}R_{21}(1 - R_{41}R_{51}) + Q_{53}Q_{41}R_{21}(R_{42}(1 - \\
& \quad - R_{43}R_{31}) + Q_{42}Q_{31}R_{43}R_{32})] \varphi_2(z) + \\
& + Q_{53}Q_{42}Q_{41}R_{43}R_{31}(1 - R_{32}R_{21}) \varphi_3(z),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\varphi_1(z) = & 1 - Q_{51}R_{54} + Q_{51}R_{54} [1 - Q_{61}Q_{64}R_{65} + \\
& + Q_{61}Q_{64}R_{65}(1 + (z-1)Q_{71}Q_{75}R_{76})^{r_6}]^{r_5},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2^i(z) = & 1 - Q_{51}R_{54} + Q_{51}R_{54} [1 - Q_{61}R_{65} + \\
& + Q_{61}R_{65}(1 + (z-1)Q_{71}Q_{75}R_{76})^{r_6}]^{r_5},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_3(z) = & 1 - Q_{51}R_{54} + Q_{51}R_{54} [1 - Q_{61}Q_{64}R_{65} + \\
& + Q_{61}Q_{64}R_{65}(1 + (z-1)Q_{71}R_{76})^{r_6}]^{r_5}. \quad (8.100)
\end{aligned}$$

Информационная нагрузка путей, узлов и линий связи при отсутствии оповещения и частичном оповещении находится по тем же правилам, что и при полном оповещении. Различия возникают лишь на начальном этапе при составлении логических функций, которые находятся по формулам (7.42), (7.46) — (7.48), (7.52) для систем без оповещения и по формулам (7.73) — (7.75), (7.102) — (7.105) для систем с частичным оповещением.

В заключение заметим, что в классе задач, рассмотренном в данной главе, ЛВМ применяются впервые. Они не предъявляют каких-либо жестких требований к виду структуры системы и в то же время обладают высокой степенью формализации и дают компактную запись искомого распределения. Поэтому они более эффективны, чем, например, метод перебора гипотез или метод марковских цепей. Преимущество ЛВМ особенно проявляется при расчете распределения информационной нагрузки, а также распределения количества работоспособных ветвей при неполном оповещении о состоянии сети. Даже в сравнительно простых системах трудно решить задачи рассмотренного здесь класса иначе, чем с помощью ЛВМ. С ростом сложности систем модифицированный ЛВМ становится единственным аналитическим методом, позволяющим решить указанные задачи.

## Список литературы

1. Астров В. В., Симаков И. К., Черкесов Г. Н. Применение методов вероятностной логики и исследования операций к анализу живучести пространственно-распределительных энергетических систем. — Методические вопросы исследования надежности больших систем энергетики/ Под ред. Ю. Н. Руденко. — Иркутск: СО АН СССР, 1979, вып. 19, с. 49—60.
2. Барзилович Е. Ю., Каштанов В. А. Некоторые математические вопросы теории обслуживания сложных систем. — М.: Сов. радио, 1971. — 271 с.
3. Барлоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надежности. — М.: Сов. радио, 1969. — 488 с.
4. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. — М.: Наука, 1974. — 366 с.
5. Бутомо И. Д., Черкесов Г. Н. Применение логико-вероятностного метода к анализу надежности сложных структур. — Автоматизированные системы управления/ ЛГУ, 1975, вып. 2, с. 82—89.
6. Бернштейн С. Н. Опыт аксиоматического обоснования теории вероятностей. — Сообщения Харьковского математического общества. 1917, сер. 2, т. 15, с. 209—274.
7. Гаврилов М. А. Структурная избыточность и надежность работы релейных устройств. — Труды I Международного конгресса международной федерации по автоматическому управлению/ АН СССР, 1961, т. 3.
8. Гаврилов М. А., Остиану В. М., Потехин А. И. Надежность дискретных систем. — Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. — М., 1970. — (Итоги науки 1969/ ВИНТИ).
9. Гадасин В. А., Ушаков И. А. Надежность сложных информационно-управляющих систем. — М.: Сов. радио, 1975. — 192 с.
10. Геворкян А. С. Оценка вероятности отказа ветвящейся системы. — Надежность и контроль качества, 1977, № 5, с. 54—56.
11. Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д. Математические методы в теории надежности. — М.: Наука, 1965.
12. Гогин Ю. А., Попов Б. А., Соколов Н. Ф. Алгебраизация математических моделей процессов в электрических цепях с сосредоточенными параметрами. — Л.: Ленингр. механ. ин-т, 1976. — 168 с.
13. Гогин Ю. А., Запасская Е. С., Летучий И. А. Логико-математический метод распределения некоммутируемых каналов на информационных сетях. — Электросвязь, 1979, № 9.
14. Гурский С. К. Алгоритмизация задач управления режимами сложных систем в электроэнергетике. — Минск: Наука и техника, 1977. — 368 с.
15. Надежность и эффективность АСУ/Ю. Г. Заренин, М. Д. Збырко, Б. П. Креденцер и др. Под ред. Ю. Г. Заренина. — Киев: Техника, 1975. — 368 с.
16. Захаров В. Н., Поспелов Д. А., Хазацкий В. Е. Системы управления: Задание, проектирование, реализация. — 2-е изд. — М.: Энергия, 1977. — 423 с.

17. Кельманс А. К. Об оценке вероятностных характеристик случайных графов. — Автоматика и телемеханика, 1970, № III.
18. Китушин В. Г. Определение логической функции работоспособности электрической системы. — Электричество, 1976, № 8.
19. Китушин В. Г. Определение характеристик отказов системы при цепочечном развитии аварий. — Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1977, № 3.
20. Клячко А. В. Логико-вероятностный метод исследования надежности восстанавливаемых резервированных систем управления. — В кн.: Надежность систем судовой автоматики/ НТО Судпром.— Л., 1970, с. 16—20.
21. Колдуэлл С. Логический анализ релейных устройств. — М.: ИЛ, 1962. — 740 с.
22. Кондаков Н. И. Логический словарь. — М.: Наука, 1971.
23. Кондрашов В. А., Макаров С. В., Осипов В. А. и др. Логико-вероятностный метод расчетов надежности судовых энергетических установок. — Вычислительные системы/ СО АН СССР. — Новосибирск, 1964, вып. 13.
24. Константинов Б. А., Лосев Э. А. Логико-аналитический метод расчета надежности восстанавливаемых систем электроснабжения. — Электричество, 1971, № 12.
25. Краснов В. В., Смертина Е. Г. Логико-вероятностный расчет надежности СЭС с учетом общей перегрузки. — Труды Николаевского кораблестроительного ин-та, 1973, вып. 75.
26. Краснов В. В. Анализ надежности автоматизированных СЭС. — Николаев: НКИ, 1974. — 78 с.
27. Левин В. И. Вероятностно-автоматное моделирование сетей связи и их надежность. — Автоматика и вычислительная техника, 1975, № 6, с. 18—23.
28. Леонтьев Л. П. Надежность технических систем. — Рига.: Зинатне, 1969.
29. Лосев Э. А., Завадский В. Г. Методы оценки влияния надежности элементов на надежность системы. — В кн.: Методические вопросы исследования надежности больших систем энергетики. — Фрунзе, 1976, вып. 12, ч. 2.
30. Лубков Н. В. Производящие функции и расчет надежности логических схем. — В кн.: Автоматы и управление сетями связи. — М.: Наука, 1971, с. 172—180.
31. Лубков Н. В. Логико-статистический метод надежностного анализа сложных систем. — Приборы и системы управления, 1976, № 7, с. 10—13.
32. Макаров С. В. Вероятностные расчеты одноктактных схем. — Вычислительные системы/ СО АН СССР. — Новосибирск, 1962, вып. 4, с. 23—28.
33. Макаров Л. И., Мерекин Ю. В. Анализ надежности истинностных логических сетей, реализованных в вычислительной среде. — Вычислительные системы/ СО АН СССР. — Новосибирск, 1969, вып. 33, с. 3—9.
34. Малюгин В. Д. Один метод расчета надежности одноктактных схем. — Вычислительные системы/ СО АН СССР. — Новосибирск, 1964, вып. 13, с. 15—26.

35. Малюгин В. Д. Надежность переключательных схем. — Автоматика и телемеханика, 1964, № 9.
36. Малюгин В. Д. Один метод синтеза избыточных схем. — В кн.: Кибернетика. — М.: Наука, 1967.
37. Мерекин Ю. В. Решение задач вероятностного расчета однотактных схем методом ортогонализации. — Вычислительные системы/ СО АН СССР. — Новосибирск, 1962, вып. 5, с. 10—22.
38. Мискевич Б. А. Надежность информационных систем с фноранговой структурой. — Автоматика и телемеханика, 1971, № 3, с. 137—141.
39. Мордвинов В. Ю. Применение вероятностных расчетов логических функций для исследования надежности технических устройств. — Труды ВНИИИзмаш, 1977, вып. 31: Методы расчета надежности технических систем. — 106 с.
40. Нейман Д. Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонентов. — В кн.: Автоматы: Пер. с англ./ Под ред. А. А. Ляпунова. — М.: ИЛ, 1956.
41. Нечипоренко В. И. Функционально надежные электронные схемы. — Киев: изд-во техн. лит., 1963.
42. Нечипоренко В. И. Структурный анализ и методы построения надежных систем. — М.: Сов. радио, 1968. — 256 с.
43. Нечипоренко В. И. Структурный анализ систем. — М.: Сов. радио, 1977. — 214 с.
44. Перлик В. И., Савчук В. П. К вопросу определения надежности технических систем по методу функций работоспособности. — В кн.: Вероятностно-статистические методы в проектировании конструкций/ Днепропетровский политехн. ин-т. — Днепропетровск, 1974, с. 29—35.
45. Половко А. М., Гурович Б. И. Метод расчета резервированных восстанавливаемых устройств. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1971, № 4, с. 78—83.
46. Панфилов И. В., Половко А. М. Вычислительные системы. — М.: Сов. радио, 1980.
47. Поляк Ю. Г. Вероятностное моделирование на ЭВМ. — М.: Сов. радио, 1971. — 400 с.
48. Порецкий П. С. Решение общей задачи теории вероятностей при помощи математической логики. — Труды Казанской секции физмат. наук. Сер. 1, 1887, т. 5, с. 112.
49. Поспелов Д. А. Логические методы анализа и синтеза схем. — М.: Энергия, 1964.
50. Прохоренко В. А., Смирнов А. Н. Прогнозирование качества систем. — Минск: Наука и техника, 1976.
51. Райншке К. Модели надежности и чувствительности систем. — М.: Мир, 1979. — 452 с.
52. Рябинин И. А. Аналитические логико-вероятностные методы расчета надежности судовых электроэнергетических систем. — Электрооборудование судов. — Л.: Судостроение, 1969, вып. 133.
53. Рябинин И. А., Смирнов А. С. Схемно-логический метод исследования структурной надежности сложных невосстанавливаемых систем. — Электричество, 1971, № 5.
54. Рябинин И. А. Основы теории и расчета надежности судовых электроэнергетических систем. — 2-е изд. — Л.: Судостроение, 1971.
55. Рябинин И. А., Киреев Ю. Н. Надежность судовых электроэнер-

- гетических систем и судового электрооборудования: Учебник для вузов. — Л.: Судостроение, 1974.
56. **Рябинин И. А., Парфенов Ю. М.** Определение «веса» и «значимости» отдельных элементов при оценке надежности сложной системы. — Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1978, № 6.
  57. **Рябинин И. А., Парфенов Ю. М., Хватов В. А.** Определение приращения надежности системы при изменении ее структуры и характеристик. — Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1980, № 1.
  58. **Рябинин И. А., Борисов С. С., Новиков Э. П., Парфенов Ю. М.** Процедура расчета надежности структурно-сложных технических систем логико-вероятностным методом с учетом энергетических характеристик элементов: Алгоритм № 149. — Сборник алгоритмов и программ/ ВМА. — Л., 1979, вып. 7.
  59. **Седакин Н. М.** Элементы теории случайных импульсных потоков. — М.: Сов. радио, 1965. — 261 с.
  60. **Смирнов А. С.** Информационная надежность электронных одноконтных схем. — Автоматика и телемеханика, 1972, № 8.
  61. **Смирнов А. С.** Карточный метод ортогонализации функций алгебры логики. — Вопросы судостроения. Сер. Судовая автоматика, 1977, вып. 16.
  62. **Советов Б. Я., Яковлев С. А.** Вероятностно-временные характеристики иерархических систем сбора и передачи информации с избыточностью. — Приборостроение, 1974, № 7, с. 59—62.
  63. **Соловьев А. Д.** Некоторые нестандартные задачи из теории резервирования. — Вопросы радиоэлектроники. Сер. 12, 1964, вып. 7.
  64. **Соловьев А. Д.** Методы расчета эффективности ветвящихся систем. — Вопросы радиоэлектроники. Сер. 12, 1964, вып. 31.
  65. **Супрун Г. Ф.** Синтез систем электроэнергетики судов. — Л.: Судостроение, 1972.
  66. **Тозик В. Т.** Надежность сетей ЭВМ. Обзор. — Зарубежная радиоэлектроника, 1976, № 10.
  67. **Тозик В. Т.** Расчет вероятности связности сети ЭВМ методом ортогонализации. — Изв. вузов СССР. Приборостроение, 1977, № 11, с. 70—75.
  68. **Ушаков И. А., Коненков Ю. К.** Оценка эффективности функционирования сложных ветвящихся систем с учетом надежности. — В кн.: Кибернетика на службу коммунизму в 3-х т./ Под ред. А. И. Берга. — М.—Л.: Энергия, 1964, т. 2, с. 205—212.
  69. **Ушаков И. А.** Об оценке надежности иерархической ветвящейся системы с неравноценными исполнительными элементами. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1967, № 5.
  70. **Фокин Ю. А., Чан Динь Лонг.** Структурный анализ и методы оценки надежности сложных схем электроснабжения. — Электричество, 1973, № 5 с. 16—24.
  71. **Черкесов Г. Н.** Применение алгебры смешанных форм к анализу надежности судовых систем управления. — Тезисы докладов на 5-й Всесоюзной НТК «Проблемы создания систем управления судовыми техническими средствами». — Л.: Судостроение, 1973, вып. 5, с. 276—282.
  72. **Черкесов Г. Н.** Основы теории надежности АСУ. — Л.: ЛПИ, 1975. — 219 с.
  73. **Черкесов Г. Н.** Анализ надежности сложных систем при помощи вероятностной логики. — В кн.: Основные вопросы теории и

- практики надежности/ Под ред. акад. Бруевича Н. Г. — М.: Сов. радио, 1979, с. 73—89.
74. Цирамуа Г. С. Дискретные системы переменной структуры. — М.: Знание, 1970. — 47 с.
  75. Эзари Д., Прошан Ф. Надежность связанных систем. — В кн.: Методы введения избыточности для вычислительных систем. — М.: Сов. радио, 1966.
  76. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. — М.: Наука, 1966.
  77. Barlow R. E., Proshan F. Importance of system components and fault tree events. — Stochastic processes and their application, 1975, v. 3, № 2, p. 153—173.
  78. Barlow R. E., Fussel J. B., Singpurwalla N. D. Reliability and fault tree analysis: Theoretical and applied aspects of system reliability and safety assessment. — Society for industrial and applied mathematics, 1975.
  79. Birnbaum Z. W., Esary J. D., Saunders S. C. Multicomponent systems and structures and their reliability. — Technometrics, 1961, № 3, p. 55—77.
  80. Birnbaum Z. W. On the importance of different components in a multicomponent system. — In: Multivariate analysis. — New York: Academic Press, 1969, v. 2.
  81. Cunningham L. A. The reliability of coherent structure — a parametric approach — Microelectronics and Reliability, 1973, v. 12, № 5, p. 441—444.
  82. Inoue K., Henley E. J. Computer-aided reliability and safety analysis of complex system. — IFAC 6th Triennial World Congress, 1975, pt. 111D, August.
  83. Fussel J. B. A review of fault tree analysis with emphasis on limitation. — IFAC 6th Triennial World Congress, 1975, pt. 111D, August.
  84. Henley E. J., Kumamoto H. Reliability engineering and risk assessment. — N.-4.: Prentice-Hall inc., 1981. — 560 p.
  85. Kaufmann A., Grouchko D., Cruon R. Modeles mathematiques pour l'etude de la fiabilite' des systemes. — Paris: Masson et Cie, 1975.
  86. Kumamoto H., Tsuji T., Inoue K., Henley E. J. System reliability analysis and diagnostic by Monte Carlo method. — IFAC 7th Triennial World Congress, 1978, v. 3, June.
  87. Lambert H. E. Measures of importance of events and cut sets in fault trees. — In: Theoretical and applied aspects of system reliability and safety assessment. — Philadelphia: SIAM, 1975, p. 77—100.
  88. Masayasu Ito. Probabilistic communication net as a nonoriented graph. — IEEE Trans., 1975, v. R-24, № 3, p. 196—198.
  89. Pearson G. D. M. Computer program for approximating the reliability characteristics of acyclic directed graphs. — IEEE Trans., 1977, v. R-26, № 1, p. 32—38.
  90. Reinschke K. Neuere Methoden der Booleschen Zuverlässigkeitstheorie. — Messen. Steuern. Regeln, 1976, № 5. S. 175—178.
  91. Ryabinin I. Reliability of engineering systems: Principles and analysis. — Moscow: Mir, 1976. — 532 p.
  92. Sellers P., Hsiao M. J., Bearson L. W. Analysing errors with the boolean difference. — IEEE Trans. on Computers, 1968, v. C-17, № 7, p. 676—684.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
<b>Глава 1.</b>	
<b>НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ, НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ВОПРОСОВ НАДЕЖНОСТИ СТРУКТУРНО-СЛОЖНЫХ СИСТЕМ . . . . .</b>	<b>7</b>
1.1. Основные понятия теории множеств и алгебры логики . . . . .	7
1.2. Основные логические операции . . . . .	10
1.3. Основные определения и принятые обозначения . . . . .	15
1.4. Некоторые теоремы алгебры логики и вероятностной логики . . . . .	19
<b>Глава 2.</b>	
<b>МЕТОДЫ СОСТАВЛЕНИЯ УСЛОВИЙ РАБОТОСПОСОБНОСТИ СИСТЕМЫ . . . . .</b>	<b>29</b>
2.1. Способы описания условий работоспособности системы . . . . .	29
2.2. Основные понятия, используемые при формализации условий работоспособности структурно-сложных систем на языке алгебры логики . . . . .	32
2.3. Формализованный метод составления функции работоспособности системы . . . . .	36
2.4. Использование системы логических уравнений при составлении ФРС . . . . .	40
<b>Глава 3.</b>	
<b>ЛОГИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА СТРУКТУРНОЙ НАДЕЖНОСТИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ БЕЗ УЧЕТА ВОССТАНОВЛЕНИЯ . . . . .</b>	<b>42</b>
3.1. Метод расчета структурной надежности систем с помощью алгоритма разрезания . . . . .	42
3.2. Метод расчета надежности систем с помощью алгоритма ортогонализации . . . . .	50
3.3. Табличный метод расчета надежности системы . . . . .	54
3.4. Схемно-логический метод расчета надежности системы . . . . .	57
<b>Глава 4.</b>	
<b>ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРНОЙ НАДЕЖНОСТИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ . . . . .</b>	<b>70</b>
4.1. «Вес», «значимость» и «вклад» элемента в надежность системы . . . . .	70
4.2. Качественное и количественное приращения надежности системы . . . . .	77
4.3. Исследование структурной надежности сложных систем логико-вероятностными методами . . . . .	91

## Глава 5.

### ЛОГИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА СТРУКТУРНОЙ НАДЕЖНОСТИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ . . . . . 100

- 5.1. Основы логико-вероятностного метода расчета надежности восстанавливаемых систем . . . . . 100
- 5.2. Надежность восстанавливаемых структурно-сложных систем . . . . . 104

## Глава 6.

### АНАЛИЗ РАБОТОСПОСОБНОСТИ ДВУХПОЛЮСНЫХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ МОДИФИЦИРОВАННОГО ЛОГИКО-ВЕРОЯТНОСТНОГО МЕТОДА . . . . . 115

- 6.1. Сущность модифицированного логико-вероятностного метода. Основные этапы анализа надежности . . . . . 115
- 6.2. Надежность многосвязных систем первого и второго типов с ориентированной структурой при полном оповещении о состоянии сети . . . . . 120
- 6.3. Надежность многосвязных систем с ориентированной структурой при неполном оповещении о состоянии сети . . . . . 147
- 6.4. Надежность передачи многоадресных сообщений в ориентированных сетях . . . . . 164

## Глава 7.

### АНАЛИЗ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ИНФОРМАЦИОННОЙ НАГРУЗКИ УЧАСТКОВ СЕТИ . . . 170

- 7.1. Показатели информационной нагрузки участков сети . . . 170
- 7.2. Характеристики информационной нагрузки путей и группы путей при полном оповещении о состоянии сети . . . 172
- 7.3. Характеристики информационной нагрузки узлов и линий связи при полном оповещении о состоянии сети . . . 178
- 7.4. Характеристики информационной нагрузки путей, узлов и линий связи при отсутствии оповещения о состоянии сети . . . 182
- 7.5. Характеристики информационной нагрузки узлов и линий связи при частичном оповещении о состоянии сети . . . 192

## Глава 8.

### АНАЛИЗ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМ С ВЕТВЯЩЕЙСЯ СТРУКТУРОЙ И МЕРИДИАННЫМИ СВЯЗЯМИ . . . . . 205

- 8.1. Общие замечания . . . . . 205
- 8.2. Надежность изотропных систем с однозначным подчинением узлов при полном оповещении о состоянии сети . . . 210

8.3. Надежность изотропных систем с однозначным подчинением узлов при неполном оповещении о состоянии сети	220
8.4. Надежность изотропных систем с неоднозначным подчинением и неизотропных систем при полном оповещении о состоянии сети	227
8.5. Характеристики информационной нагрузки путей, узлов и линий связи при централизованном сборе информации в ветвящейся системе	247
Список литературы	257

ИГОРЬ АЛЕКСЕЕВИЧ РЯБИНИН  
ГЕННАДИЙ НИКОЛАЕВИЧ ЧЕРКЕСОВ

**ЛОГИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ  
НАДЕЖНОСТИ СТРУКТУРНО-СЛОЖНЫХ СИСТЕМ**

Редактор *Т. М. Бердичевская*  
Художественный редактор *Н. С. Шейн*  
Технический редактор *И. Л. Ткаченко*  
Корректор *Н. М. Давыдова*

**ИБ № 720 («Сов. радио»)**

Сдано в набор 30.12.80                      Подписано в печать 01.09.81                      Т-25456  
Формат 84×108<sup>1/32</sup>                      Бумага типографская № 3                      Гарнитура литературная  
Печать высокая                      Усл. п. л. 13,86                      Усл. кр.-отт. 14,07                      Уч.-изд. л. 13,48  
Тираж 5000 экз.                      Изд. № 19586                      Зак. № 1073                      Цена 65 к.

Издательство «Радио и связь», Москва, 101000, Главпочтамт, а/я 693

Московская типография № 10 Союзполиграфпрома  
Государственного комитета СССР  
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.  
Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10

65 к.

5В  
Р980

**«РАДИО И СВЯЗЬ»**