

# Маршрутизация и парадокс заключенного

*Дмитрий Трофимов  
Владимир Полевиков*

22 октября 2006г.

# Содержание

Содержание .....	2
Часть 1. Введение.....	2
Часть 2. Примеры.....	2
Парадокс заключенного .....	2
Пример 1. Пример Пигу (Pigou), 1920г.....	3
Пример 2. Парадокс Браесса (Braess), 1968г.....	5
Часть 3. Формальные определения .....	5
Часть 4. Границы цены анархии .....	7
Граница Пигу.....	7
Оптимальность границы Пигу.....	9
Часть 5. Уменьшение цены анархии .....	10
Оценка парадокса Браесса .....	10
Борьба с парадоксом Браесса .....	12
Другие способы уменьшения цены анархии.....	13
Заключение.....	14
Источники.....	14

## Часть 1. Введение

Самостоятельная (или «эгоистичная») маршрутизация (selfish routing) - режим распределения нагрузки в сетях, где каждый пользователь организует свой маршрут, руководствуясь собственными интересами, независимо от других.

Некоторые области, где присутствует такой эффект:

- Компьютерные сети
- Дорожные сети
- Экономические процессы

Результат такой маршрутизации обычно неэффективен в плане оптимизации некоторых естественных целевых функций. Количественная мера этой неэффективности получила название «цена анархии» (The Price of Anarchy).

## Часть 2. Примеры

Почему организация, основанная на личных предпочтениях каждого пользователя по отдельности, может быть значительно неэффективной, видно из следующего примера, известного как «парадокс заключенного».

### Парадокс заключенного

Рассмотрим такую игру. Имеется двое игроков и банк, выплачивающий выигрыши игрокам. У каждого игрока на руках две карты, на одной написано «кооперируюсь», на второй – «отказываюсь». Каждый игрок выбирает карту и кладет ее на стол лицом вниз, так, чтобы не видел другой игрок. Затем обе карты переворачиваются, и возможен один из следующих исходов:

- Оба игрока сыграли «кооперируюсь»: в этом случае банк выплачивает каждому по 300 долларов.
- Оба игрока сыграли «отказываюсь»: банк штрафует каждого игрока на 10 долларов.
- Один из игроков (допустим, первый) сыграл «кооперируюсь», второй – «отказываюсь»: в этом случае первый игрок штрафует на 100 долларов, второй получает от банка 500.

В чем же здесь парадокс? Представим ход мыслей первого игрока. Другой игрок может пойти одним из двух способов, рассмотрим их оба:

- Другой игрок пошел «отказываюсь». В этом случае выгодно играть также «отказываюсь», ибо в этом случае потеря составит лишь 10 долларов против 100.
- Другой игрок пошел «кооперируюсь». В этом случае, если также сыграть «кооперируюсь», то выигрыш составит 300 долларов, если же сыграть «отказываюсь» – 500 долларов.

Следовательно, в любом случае игроку всегда выгодно играть «отказываюсь».

Таким образом, если между собой играют два рационально мыслящих игрока, не имеющих возможности заранее договориться между собой, то оба останутся в проигрыше, несмотря на то, что существует исход игры, более устраивающий их обоих.

Вернемся к маршрутизации в сетях. Далее мы подробно остановимся на следующих двух важных примерах неэффективных сетей:

### Пример 1. Пример Пигу (Pigou), 1920г.

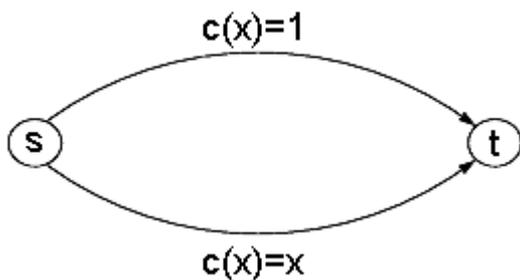


Рис.1а

Рассмотрим сеть, изображенную на рис.1а. Два различных ребра соединяют источник  $s$  и сток  $t$ . Каждому ребру соответствует своя функция стоимости (времени пути), зависящая от нагрузки на данное ребро. У верхнего ребра эта функция  $c(x)=1$ , то есть, константа, что означает, что ребро хоть и сравнительно длинное, но устойчивое к нагрузкам. Нижнее ребро имеет функцию стоимости  $c(x)=x$ , зависящую линейно от нагрузки. Видно, что нижнее ребро дешевле верхнего тогда и только тогда, когда нагрузка на него меньше единицы.

Предположим, что есть большое количество пользователей, создающих в сумме единицу нагрузки. Так как каждый пользователь стремится минимизировать свои затраты, все из них выберут нижний путь, руководствуясь соображением, что нижний путь никогда не бывает дороже верхнего, даже если он полностью нагружен, и строго дешевле верхнего, если хоть один пользователь выбрал верхний. В таком режиме маршрутизации средняя стоимость пути пользователей будет равна 1.

Теперь предположим, что мы можем управлять маршрутами части пользователей. Можем ли мы что-то улучшить в этой ситуации? Направим половину пользователей по верхнему пути. У каждого из них стоимость пути будет равна 1 - не хуже, чем было. В то же время, остальные

пользователи, идущие по нижнему пути, теперь тратят лишь  $1/2$  первоначальной стоимости. Таким образом, ни одному пользователю хуже не стало, а средняя стоимость уменьшилась с 1 до  $3/4$ .

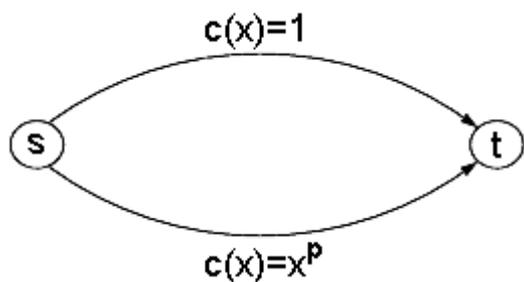


Рис.16

Этот эффект можно значительно усилить, если в приведенном примере нижнему ребру задать функцию стоимости  $c(x)=x^p$  (рис. 16). Тогда, будучи предоставленными самим себе, все пользователи вновь выберут нижний маршрут, и средняя стоимость будет равна 1. Если же мы направим малую их часть  $\epsilon$  по верхнему маршруту, то средняя стоимость будет равна  $\epsilon+(1-\epsilon)^p$ , что стремится к 0 при  $p$ , стремящимся к бесконечности и  $\epsilon$ , стремящимся к 0.

Определим «цену анархии» как отношение средней стоимости маршрутов в самостоятельном режиме к минимально возможной средней стоимости. Цена анархии в первом примере равна  $4/3$ , и может быть сколь угодно велика во втором, в зависимости от выбора  $p$ .

Из этого примера видно, что цена анархии может быть значительной, если функции стоимости ребер «достаточно нелинейны». Поднимается ряд важных вопросов:

- Может ли цена анархии быть велика при «не слишком нелинейных» стоимостях?
- Растет ли цена анархии с увеличением сложности сети?

Далее мы покажем, что ответ на все три вопроса – «нет», то есть, в каком-то смысле, пример Пигу и его простые разновидности – универсальный «худший случай» для сетей с самостоятельной маршрутизацией.

Во втором рассматриваемом примере цена анархии будет не выше, чем в примере Пигу, однако, этот пример выявляет еще один далеко не очевидный факт, присутствующий в таких сетях.

## Пример 2. Парадокс Браеса (Braess), 1968г.

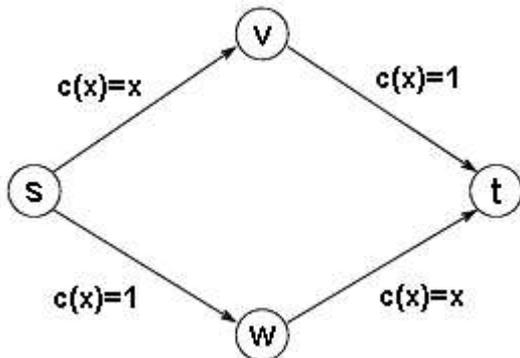


Рис.2а

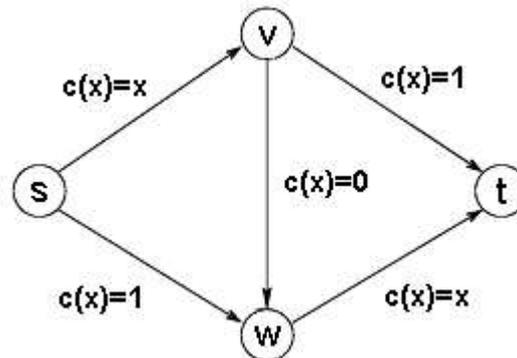


Рис.2б

Рассмотрим сеть из четырех узлов, показанную на рис.2а. Существуют два пути из s в t, каждый с суммарной стоимостью  $1 + x$ . Оба маршрута имеют одинаковую стоимость, так что следует ожидать, что в самостоятельном режиме пользователи разделятся поровну между ними.

Средняя стоимость пути в этом случае –  $3/2$ .

Теперь, с целью улучшить ситуацию, мы добавляем новое ребро между серединами маршрутов, короткое и с неограниченной пропускной способностью, с функцией стоимости  $c(x)=0$  (рис.2б).

Как изменится средняя стоимость в этом случае?

По аналогии с примером Пигу, стоимость пути  $s \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow t$  ни при каких условиях не может быть выше, чем стоимость любого из исходных, и при этом она будет строго ниже, если хоть кто-то выберет один из исходных путей. Поэтому все пользователи выберут именно этот маршрут, что приведет к нагрузке, а следовательно, и стоимости ребер  $s \rightarrow v$  и  $w \rightarrow t$ , равной 1, и средняя стоимость пути в результате составит 2.

Парадокс Браеса показывает, что даже добавление в сеть ребра нулевой стоимости может увеличить стоимость пути для каждого из пользователей! Или, что то же самое, удаление одного ребра из сети с линейными функциями стоимости может снизить стоимость. В связи с этим возникают вопросы:

- Может ли удаление ребер в более сложных сетях снизить стоимость в большее число раз, чем в небольших сетях?
- Тот же вопрос для сетей с нелинейными функциями стоимости, и для сетей с несколькими парами "источник-сток".

## Часть 3. Формальные определения

Вспомним терминологию потоков в сетях. Сеть задается графом  $G=(V,E)$  со множеством вершин  $V$  и множеством ребер  $E$ , а также множеством из  $k$  пар начальных и конечных вершин («источников» и «стоков»), также называемых «товарами». Любая вершина может входить в несколько таких пар. Параллельные ребра разрешены.

Для данной сети  $G$ , обозначим  $P_i$  множество всех простых путей из  $s_i$  в  $t_i$ , и  $P$  - объединение всех  $P_i$ . Здесь и далее мы предполагаем, что  $P_i$  не пусто. Поток в сети  $G$  - неотрицательный вектор  $f_p$ . Для потока  $f$  и пути  $p$  из  $P_i$ ,  $f_p$  интерпретируется как величина нагрузки из  $s_i$  в  $t_i$ , использующего путь  $p$ .

Поток  $f$  порождает поток на ребрах  $f_e$ :  $f_e = \sum f_p$ ,  $p$  из  $P$ ,  $e$  из  $p$ . Введем вектор  $g$  - величину нагрузки на каждом товаре (на каждой паре  $(s_i, t_i)$ ). Поток  $f$  в сети  $G$  является допустимым, если для каждого  $i = \{1, 2, \dots, k\}$   $\sum f_p = g_i$ , по всем путям  $p$  из  $P_i$ .

Для моделирования негативного влияния повышенной нагрузки назначим каждому ребру  $e$  в сети  $G$  неотрицательную, непрерывную, неубывающую функцию стоимости  $c_e(x)$ , где  $x$  - величина потока по ребру  $e$ .

Таким образом, сеть с самостоятельной маршрутизацией задается тройкой  $(G, g, c)$ .

Введем понятие *равновесия*. Пусть  $f$  - допустимый поток в сети  $(G, g, c)$ . Общая стоимость  $c_p(f)$  пути  $p$ , создаваемая нагрузкой на путь  $p$ , определяется как сумма стоимостей по всем ребрам, входящим в путь  $p$ :  $c_p(f) = \sum c_e(f_e)$ ,  $e$  из  $p$ .

Мы предполагаем, что при самостоятельной маршрутизации каждый участник стремится минимизировать стоимость своего собственного пути. Это приводит к следующему определению:

**Определение.** Поток  $f$  в сети  $(G, g, c)$  называется *равновесием Вардрона*, или *уравновешенным потоком*, если для любого  $i = \{1, 2, \dots, k\}$  и для любой пары путей  $p, q$  из  $P_i$  из  $s_i$  в  $t_i$ , при  $f_p > 0$  выполняется неравенство:

$$c_p(f) \leq c_q(f)$$

Другими словами, все пути, используемые потоком в равновесии, имеют наименьшую возможную стоимость. В частности, у всех путей для отдельно взятой пары "источник-сток" стоимость равна.

Покажем существование и единственность такого равновесия.

**Утверждение.** Пусть задана сеть  $(G, g, c)$ . Тогда:

- a. В этой сети существует не менее одного равновесия Вардрона.
- b. Если  $f$  и  $f'$  являются равновесиями Вардрона, то для всех ребер  $e$  сети:  $c_e(f_e) = c_e(f'_e)$

Доказательство (мы не будем здесь полностью его приводить) основывается на том, что потоки, удовлетворяющие условиям равновесия, минимизируют следующую потенциальную функцию:

$\Phi(f) = \sum_e \int_0^{f_e} c_e(x) dx$ , по всем  $e$  из  $E$   
на множестве всех допустимых потоков в  $(G, g, c)$ .

Так как все функции стоимости непрерывны, и пространство всех потоков - компакт, следует, что минимум потенциальной функции достигается, а значит, равновесие существует. Из неотрицательности стоимостей можно получить единственность.

Интуитивно понятно, что если некоторый уравновешенный поток минимизирует потенциальную функцию, которая «близка» к целевой функции, поток не может быть

значительно неэффективен. Далее будет показано, что с помощью указанной потенциальной функции можно получить верхнюю оценку «цены анархии».

**Утверждение.** Допустимый поток  $f$  в сети  $(G,r,c)$  является равновесием Вардропа в том и только в том случае, если:

$$\sum c_e(f_e)f_e \leq \sum c_e(f_e)f_e^*, \text{ по всем } e \text{ из } E$$

для каждого допустимого потока  $f^*$  в сети  $(G,r,c)$ .

**Доказательство.** Из определения равновесия Вардропа напрямую следует, что:

$$\sum c_p(f)f_p \leq \sum c_p(f)f_p^*, \text{ по всем } p \text{ из } P$$

для каждого допустимого потока  $f^*$  в сети  $(G,r,c)$ . Раскрывая  $c_p(f)$  по определению как  $\sum c_e(f_e)$ , и изменяя порядок суммирования, получаем требуемое.

Закончим эту часть определением понятия «цена анархии». Так как смысл этого понятия - мера неэффективности уравновешенного потока, потребуется некоторая целевая функция. Примем за такую функцию  $C(f)$  стоимость потока  $f$  в сети  $(G,r,c)$ :

$$C(f) = \sum c_p(f)f_p = \sum c_e(f_e)f_e$$

Второе равенство в этом выражении было получено в прошлом доказательстве.

Допустимый поток  $f$  является *оптимальным*, если его стоимость минимальна среди всех допустимых потоков в сети  $(G,r,c)$ . В силу непрерывности функций стоимости и компактности пространства допустимых потоков, в любой сети оптимальный поток существует.

**Определение.** Цена анархии  $\rho(G,r,c)$  для сети  $(G,r,c)$  - следующая величина:

$$\rho(G,r,c) = C(f)/C(f^*)$$

где  $f$  - уравновешенный по Вардропу поток, и  $f^*$  - оптимальный поток.

Цена анархии на непустом множестве сетей  $X$ :

$$\rho(X) = \sup \rho(G,r,c), \text{ по всем } (G,r,c) \text{ из } X$$

Из утверждения про единственность равновесия Вардропа следует, что у всех уравновешенных потоков стоимость равна. Таким образом, цена анархии однозначно определена для всех случаев, кроме случая, когда существует уравновешенный поток стоимости 0. Для таких сетей определим цену анархии значением 1.

## Часть 4. Границы цены анархии

Пример Пигу и его нелинейный вариант показывают, что цена анархии зависит, как минимум, от типа функций стоимости. Далее мы попробуем установить границы цены анархии на разных классах используемых функций - в частности, на классах линейных функций и полиномов.

### Граница Пигу

Для любого множества  $C$  используемых функций стоимости, примеры типа Пигу дают естественную нижнюю границу цены анархии всех сетей с функциями стоимости из  $C$ .

Пусть  $C$  содержит все функции-константы, выберем функцию  $c_2$  из  $C$  и величину нагрузки  $r \geq 0$ . Пусть  $c_1$  - функция из  $C$ , равная во всех точках  $c_2(r)$ . Рассмотрим сеть из примера Пигу с двумя вершинами и двумя ребрами между ними, функциями стоимости  $c_1$  и  $c_2$  на верхнем и нижнем ребрах соответственно, и величиной нагрузки  $r$ .

Направление всей нагрузки на нижнее ребро даст равновесие Вардропа со стоимостью  $c_2(r)r$ . Цена анархии в такой сети равняется:

$$\max (c_2(r)r / (c_2(x)x + (r-x)c_2(r))), 0 \leq x \leq r$$

В следующем определении используется аналогичное выражение, но величина  $x$  не ограничена сверху  $r$ ; так как  $c_2$  - неубывающая функция, это не изменит величины максимума.

Теперь мы можем получить нижнюю оценку цены анархии, выбрав функцию стоимости  $c_2$  и величину  $r$  наилучшим возможным образом.

**Определение.** Пусть  $C$  - непустое множество функций. *Границей Пигу*  $\alpha(C)$  для  $C$  называется величина:

$\sup (\sup (c(r)r / (c(x)x + (r-x)c(r))), x, r \geq 0)$ , по всем  $c(x)$  из  $C$   
при этом выражение  $0/0$  приравнивается по определению цены анархии к 1.

Примеры оценок:

- Для класса линейных функций:  $C = \{ax + b, a, b \geq 0\}$   $\alpha(C) = 4/3$ ;
- Для класса полиномов с неотрицательными коэффициентами степени не выше  $p$ :  
 $\alpha(C) = (1 - p(p+1)^{-(p+1)/p})^{-1}$

Граница Пигу использует только простые сети для получения нижней границы цены анархии. Следующее утверждение напрямую выводится из определения этой границы.

**Утверждение.** Пусть  $C$  - множество функций, включающее все константные функции,  $X$  - множество сетей с двумя узлами (исток и сток) и двумя ребрами между ними, с функциями стоимости из  $C$ . Тогда  $\rho(X) \geq \alpha(C)$

Требование включения в множество  $C$  константных функций можно убрать, используя более сложные сети. Например, допустим, что множество  $C$  *разнообразно*, в том смысле, что  $\{c(0) : c \in C\} = [0; +\infty)$ . Тогда ребро с постоянной стоимостью  $c(x) = a$ , на практике может быть заменено большим количеством параллельных ребер, для каждого из которых  $c(0) = a$ . Это показывает, что сеть из примера Пигу с константной функцией может быть заменена сетью из двух вершин, и неограниченным количеством параллельных ребер, без изменения цены анархии.

**Утверждение.** Пусть  $C$  - *разнообразное* множество функций,  $X$  - множество сетей с двумя узлами (исток и сток) и произвольным числом ребер между ними, с функциями стоимости из  $C$ . Тогда  $\rho(X) \geq \alpha(C)$

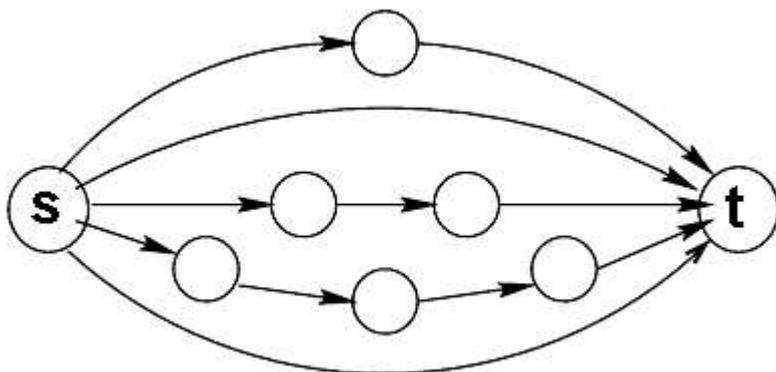


Рис.3

Требование разнообразности множества можно далее ослабить, ограничившись требованием *неоднородности* множества  $C$  - наличием в этом множестве функции  $c$ , такой что  $c(0) > 0$ , и еще немного более усложнив сети, допустив произвольное количество промежуточных вершин на каждом из параллельных путей (пример такой сети - на рис.3).

**Утверждение.** Пусть  $C$  - *неоднородное* множество функций,  $X$  - множество сетей с истоком и стоком, соединенным произвольным количеством попарно непересекающихся (кроме как в истоке и стоке) путей, с функциями стоимости из  $C$ . Тогда  $\rho(X) \geq \alpha(C)$

Получение нижней границы для класса однородных функций является открытым вопросом.

### Оптимальность границы Пигу

Теперь можно получить верхнюю оценку цены анархии, соответствующую границе Пигу.

Из определения границы Пигу непосредственно выводится следующая лемма.

**Лемма.** Пусть  $C$  - множество функций стоимости,  $\alpha(C)$  - граница Пигу для  $C$ . Для функции  $c$  из  $C$  и  $x, r \geq 0$ :

$$c(x)x \geq c(r)r/\alpha(C) + (x-r)c(r)$$

**Теорема.** Пусть  $C$  - множество функций стоимости,  $\alpha(C)$  - граница Пигу для  $C$ . Для любой сети  $(G, r, c)$  с функциями стоимости из  $C$ :

$$\rho(G, r, c) \leq \alpha(C)$$

**Доказательство.** Пусть  $f^*$  - оптимальный поток,  $f$  - равновесие Вардропа. Тогда:

$$c(f^*) = \sum c_e(f_e^*)f_e^* \geq (1/\alpha(C)) \sum c_e(f_e)f_e + \sum (f_e^* - f_e) c_e(f_e) \geq c(f)/\alpha(C)$$

Теорема показывает, что нижняя граница, полученная выше, равна верхней, то есть, в частности, для класса линейных функций цена анархии в точности равна  $4/3$ , для класса полиномов степени  $p$  - значению выражения  $\alpha(C) = (1 - p(p+1)^{-(p+1)/p})^{-1}$ , и т.д.

Более того, так как граница Пигу была получена на простейших сетях, то из этого следует, что наихудшая эффективность в сетях с самостоятельной маршрутизацией достигается уже на этих простых сетях, то есть, цена анархии не зависит от сложности сети, а зависит только от класса используемых функций стоимости.

## Часть 5. Уменьшение цены анархии

### Оценка парадокса Браеса

Приведенный в начале пример Браеса с сетью из 4 узлов - лишь «вершина айсберга»; далее мы покажем, что негативное влияние парадокса на более сложные сети может быть сколь угодно велико.

Количественной характеристикой такого влияния является *коэффициент Браеса*, показывающий, во сколько раз стоимость уравновешенного потока в сети  $(G, r, c)$  может превышать стоимость такого в произвольном подграфе  $H$ , полученного из  $G$ :

$$\beta(G, r, c) = \max (C(f)/C(f^H))$$

где  $H$  - произвольная подсеть  $G$ , содержащая путь из  $s$  в  $t$ ,  $f$  и  $f^H$  - равновесия Вардропа в сетях  $(G, r, c)$  и  $(H, r, c)$  соответственно.

В случае, если сеть  $(G, r, c)$  допускает уравновешенный поток нулевой стоимости, коэффициент Браеса определяется как 1.

Так как уравновешенный поток  $f^H$  в сети  $(H, r, c)$  является допустимым потоком в сети  $(G, r, c)$ , то, по определению цены анархии:

$$\beta(G, r, c) \leq \rho(G, r, c)$$

Как следствие, в сетях с одной парой "источник-сток" коэффициент Браеса ограничен сверху границей Пигу, в частности, величиной  $4/3$  для линейных функций стоимости.

В приведенном в начале примере Браеса, даже если использовать нелинейные функции вида  $c(x)=x^p$ , коэффициент Браеса не превысит 2; худшие показатели достигаются только на более сложных сетях.

Важным утверждением является следующая теорема.

**Теорема.** Для любого  $n \geq 2$  существует сеть  $(G, r, c)$  из  $n$  вершин, такая что:

$$\beta(G, r, c) \geq \lfloor n/2 \rfloor$$

**Доказательство.** Для  $n=2$  - очевидно. Случай с нечетным  $n$  легко сводится к случаю с четным  $n$  добавлением изолированной вершины. Далее предполагаем, что  $n=2k+2$  для натурального  $k$ .

Определим  $k$ -й граф Браеса  $B^k$ .

Множество вершин  $V^k = \{s, v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_k, t\}$

Множество ребер  $E^k$  - объединение множеств ребер типов А, В и С, определенных следующим образом:

- $A = \{(v_i, w_i), 1 \leq i \leq k\}$
- $B = \{(v_i, w_{i-1}), 2 \leq i \leq k\} + \{(s, w_k)\} + \{(v_1, t)\}$
- $C = \{(s, v_i), 1 \leq i \leq k\} + \{(w_i, t), 1 \leq i \leq k\}$

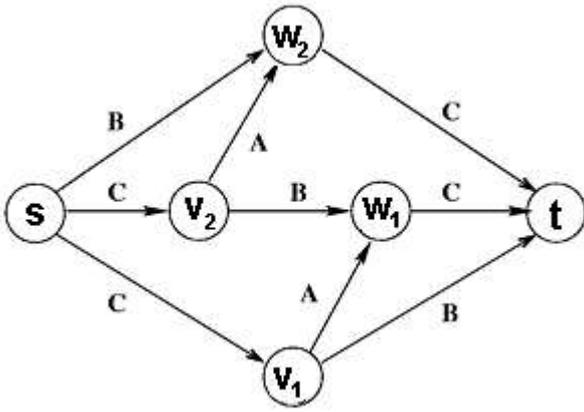


Рис.4а. Граф Браеса  $B^2$

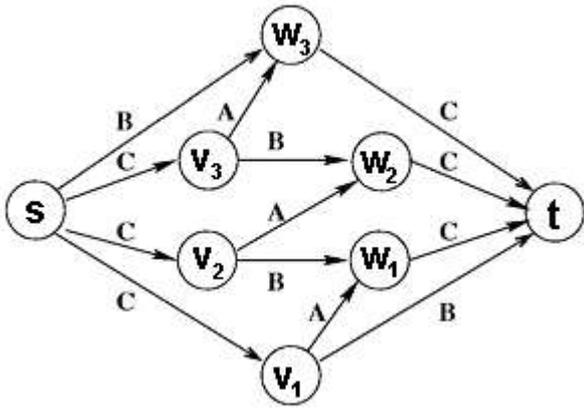


Рис.4б. Граф Браеса  $B^3$

Граф  $B^1$  - исходный пример Браеса; примеры для  $k=2$  и  $k=3$  приведены на рис.4а,б.

Зададим функции стоимости на ребрах  $B^k$  следующим образом:

- Для ребер типа А:  $c(x)=0$ ;
- Для ребер типа В:  $c(x)=1$ ;
- Для ребер типа С: для каждого  $i=1, \dots, k$  ребрам  $(w_i, t)$  и  $(s, v_{k-i+1})$  назначим неубывающую непрерывную функцию стоимости  $c_e$ , такую что  $c_e(k/(k+1))=0$ , и  $c_e(1)=i$ .

Для каждого  $i=1, \dots, k$  обозначим через  $P_i$  путь  $s \rightarrow v_i \rightarrow w_i \rightarrow t$ .

Для каждого  $i=2, \dots, k$  обозначим через  $Q_i$  путь  $s \rightarrow v_i \rightarrow w_{i-1} \rightarrow t$ .

Определим  $Q_1$  как путь  $s \rightarrow v_1 \rightarrow t$ , и  $Q_{k+1}$  как путь  $s \rightarrow w_k \rightarrow t$ .

С одной стороны, направление единицы нагрузки на каждый из путей  $P_1, \dots, P_k$  дает равновесие Вардропа  $f$  для сети  $(B^k, k, c)$  со стоимостью каждого пути  $k+1$ .

С другой стороны, рассмотрим подграф  $H$ , полученный из  $B^k$  исключением всех ребер типа А. Тогда направление нагрузки на каждый из путей  $Q_1, \dots, Q_{k+1}$  в размере  $k/(k+1)$  единиц даст равновесие Вардропа  $f^H$  для сети  $(H, k, c)$  со стоимостью каждого пути 1.

Таким образом, для коэффициента Браеса получаем:

$$\beta(G, r, c) \geq C(f)C(f^H) = k+1 = n/2$$

что и требовалось доказать.

Можно доказать (мы не будем приводить здесь доказательство), что полученная нижняя граница является также верхней границей, то есть, построенные в ходе предыдущего доказательства графы  $V^k$  являются «худшим случаем» парадокса Браеса.

Таким образом, цена анархии для сетей с произвольным классом функций стоимости может расти неограниченно с увеличением числа узлов в сети из-за парадокса Браеса.

### Борьба с парадоксом Браеса

Возникает естественный алгоритмический вопрос: как для данной сети определить, подвержена ли она влиянию парадокса Браеса, и если да, то какие ребра следует удалить для достижения оптимального результата?

На этот, казалось бы, безобидный вопрос очень трудно ответить. Для упрощения будем далее рассматривать сети с линейными функциями стоимости и одной парой «источник-сток».

Задача обнаружения парадокса Браеса в этой сети может быть переформулирована как следующая задача оптимизации: в заданной сети  $(G,r,c)$  с линейными функциями стоимости найти подсеть  $H$ , минимизирующую величину уравновешенного по Вардропу потока в сети  $(H,r,c)$ .

Для приближенного решения со степенью приближения  $4/3$  такой алгоритм очевиден - это алгоритм, возвращающий саму сеть  $G$  целиком. Оценка  $4/3$  для цены анархии в сети с линейными функциями была получена выше.

Конечно, хотелось бы получить алгоритм, если и не точный, то хотя бы с лучшей степенью приближения, и работающий за полиномиальное время. Увы, таких алгоритмов не существует, если  $P \neq NP$ , так как к этой задаче сводится NP-полная задача о двух непересекающихся путях в ориентированном графе, состоящая в следующем:

*Пусть задан ориентированный граф  $G=(V,E)$  с различными вершинами  $s_1, s_2, t_1, t_2 \in V$ . Существует ли пара вершинно непересекающихся путей  $P_1$  и  $P_2$ , из  $s_1$  в  $t_1$  и из  $s_2$  в  $t_2$  соответственно?*

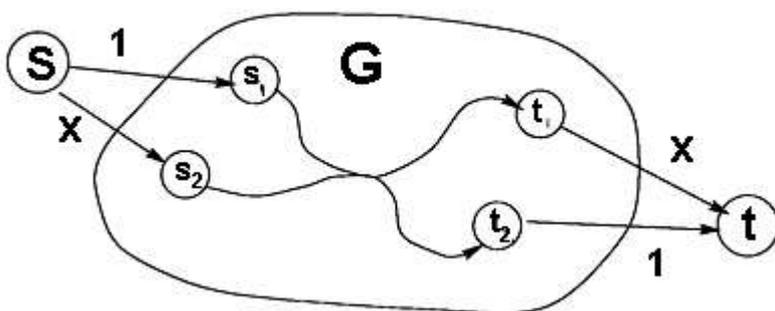


Рис.5

Если бы существовал полиномиальный алгоритм для обнаружения парадокса Браеса, то с его помощью можно было бы решить и эту задачу: добавим вершины  $s$  и  $t$  и ребра  $(s,s_1)$ ,  $(s,s_2)$ ,  $(t_1,t)$ ,  $(t_2,t)$ , как показано на рис.5, присвоим ребрам  $(s,s_1)$  и  $(t_2,t)$  цену  $c(x)=1$ , ребрам  $(s,s_2)$  и  $(t_1,t)$  цену  $c(x)=x$ , всем остальным -  $c(x)=0$ . Тогда, если два непересекающихся пути существуют, то в полученном графе существует подсеть  $(H,1,c)$  со стоимостью уравновешенного потока  $3/2$ ; в противном случае, для всех подсетей эта стоимость будет не менее 2.

Таким образом, более точного алгоритма полиномиальной трудоемкости для сетей с линейными функциями, чем тривиальный, возвращающий всю сеть, не существует.

Аналогичная задача для сетей с произвольными функциями стоимости также не имеет более точных алгоритмов, чем тривиальный (ошибется он при этом, как было показано выше, не больше, чем в  $\lfloor n/2 \rfloor$  раз).

## Другие способы уменьшения цены анархии

Кратко рассмотрим другие способы модификации исходной сети, возможность применения которых зависит от условий конкретной практической задачи.

### Удешевление ребер

Здесь получен важный результат, заключающийся в том, что стоимость уравновешенного потока величины  $r$  не превышает стоимости оптимального потока на той же сети величины  $2r$ , независимо от класса используемых функций. Из этого следует, что если мы заменим функции стоимости  $c_e(x)$  в исходной сети на функции  $c_e'(x) = c_e(x/2) / 2$ , то уравновешенный поток в сети  $(G, r, c')$  будет не дороже оптимального потока в исходной сети.

То есть, удешевление функций стоимости таким образом дает тот же эффект, что и «ручная» маршрутизация всех потоков в исходной сети.

### Управление маршрутизацией

Централизованное управление даже малой частью потока может дать значительный эффект, что хорошо видно на нелинейном примере Пигу. Однако, в некоторых случаях, когда затраты на централизацию увеличивают функцию стоимости ребра, этот эффект может быть недостижим. Для нелинейного примера Пигу «плохой случай» функции стоимости нижнего ребра:

$$c(x) = x^p / (1 - \gamma)$$

где  $0 \leq \gamma \leq 1$  - доля нагрузки, которую мы можем распределять централизованно.

### Введение платы за ребра

Идея в том, чтобы ввести дополнительную постоянную величину для каждого ребра  $\tau_e$ , и изменить функции стоимости:

$$c_e^\tau(x) = c_e(x) + \tau_e.$$

Тогда для любой сети можно подобрать их таким образом, что в получающейся сети  $(G, r, c^\tau)$  уравновешенный поток будет совпадать с оптимальным; недостаток же метода в том, что из-за дополнительной платы этот результат будет значительно дороже стоимости потока в исходной сети.

## Заключение

Мы затронули некоторые из проблем, возникающих при взаимодействии нескольких участников, действующих независимо друг от друга в собственных интересах, дали некоторые оценки возможной неэффективности, обозначили некоторые возможные пути решения этой проблемы. Многие вопросы в этой области являются открытыми по сей день, и служат темами для самостоятельных исследований. Результаты представляют практический интерес для решения многих транспортных и экономических вопросов.

## Источники

1. *Selfish Routing and the Price of Anarchy*  
<http://theory.stanford.edu/~tim/papers/optima.ps>
2. *Добрые парни финишируют первыми*  
<http://www.mista.ru/fant/gen/12.htm>
3. *Введение в теорию, методы и экономические приложения задач о дополнителности*  
<http://www.imm.uran.ru/RUS/WIN/PUBLIC/JRN/POPOV/popov1.pdf>