

# Надежность и эффективность в технике

---

*Справочник в десяти томах*

# Надежность и эффективность в технике

---

*Справочник в десяти томах*

*Редакционный совет:*

*В.С. АВДУЕВСКИЙ, акад. АН СССР  
(председатель);*

*Н.А. СЕВЕРЦЕВ, д-р техн. наук  
(зам. председателя);*

*В.И. КУЗНЕЦОВ, акад. АН СССР;*

*Н.Д. КУЗНЕЦОВ, акад. АН СССР;*

*В.А. МЕЛЬНИКОВ, акад. АН СССР;*

*В.П. МИШИН, акад. АН СССР;*

*В.Ф. УТКИН, акад. АН СССР;*

*К.В. ФРОЛОВ, акад. АН СССР;*

*Б.В. ГНЕДЕНКО, акад. АН УССР;*

*И.Н. КОВАЛЕНКО, акад. АН УССР;*

*Б.Ф. ЛОМОВ, чл.-корр. АН СССР*

Том  
8

# Эксплуатация и ремонт

Под редакцией акад. АН СССР  
В.И. КУЗНЕЦОВА  
и д-ра техн. наук  
Е.Ю. БАРЗИЛОВИЧА



МОСКВА  
«МАШИНОСТРОЕНИЕ»  
1990

ББК 30.14  
Н17  
УДК 621-192 (035)

Авторы тома: А. М. Андронов, М. А. Арустамов, Е. Ю. Барзилович, Р. Н. Белокопъ, Ю. К. Беляев, А. И. Бондаренко, В. Г. Воробьев, В. Ф. Воскобоев, Б. В. Гнеденко, В. В. Грицык, А. Н. Далакшвили, В. И. Дорошков, В. А. Каштанов, В. Г. Кендель, И. Н. Коваленко, Н. А. Кортаев, В. И. Костеневич, Л. Ф. Красников, А. В. Кривошейкин, А. М. Кузнецов, В. И. Кузнецов, А. Б. Кузьмин, Э. Г. Лазаревич, С. Г. Логинов, П. И. Максименко, О. Е. Митряева, В. И. Никитин, В. С. Новиков, Ф. Н. Покровский, М. В. Савенков, Н. А. Северцев, А. В. Семенычев, А. В. Соломенцев, С. А. Тимашев, А. Г. Шевчук

Рецензент д-р техн. наук, проф. В. П. Грабовецкий

**Надежность и эффективность в технике: Справочник.**  
Н17 В 10 т./Ред. совет: В. С. Авдудевский (пред.) и др. — М.:  
Машиностроение, 1990. — (В пер.).

Т. 8: Эксплуатация и ремонт/Под ред. В. И. Кузнецова  
и Е. Ю. Барзиловича. — 320 с.: ил. — 1 р. 80 к.

Изложены модели технического обслуживания и ремонта систем различного назначения. Приведены методы непараметрического статистического оценивания исходных данных для рассматриваемых моделей, примеры технической реализации некоторых алгоритмов управления качеством систем в процессе эксплуатации.

Для ИТР, занятых проектированием, изготовлением, испытанием и эксплуатацией техники; может быть полезен преподавателям и студентам вузов.

Н 2702000000—603 Подписное  
038 (01)—90

ББК 30.14

# Оглавление

Предисловие	10	Глава 3. Управляемые марковские и полумарковские процессы в задачах эксплуатации (И. Н. Коваленко)	52
Глава 1. Показатели эксплуатации технических систем, оценка старения элементов (Е. Ю. Барвилович, М. В. Савенков)	12	1. Принципы построения математической модели	52
1. Показатели оценки эксплуатации технических систем	12	2. Вложенные цепи Маркова и эргодические соотношения для критериев	54
2. Статистическая оценка старения элементов технических систем	14	3. Оптимальное управление цепями Маркова	55
Глава 2. Базы данных и статистические выводы о показателях надежности по результатам эксплуатации и испытаний (Ю. К. Беляев)	20	4. Оптимальное управление полумарковскими процессами	57
1. Основные положения	20	5. Метод динамического программирования	62
2. Порции и массивы данных	22	6. Сокращение множества стратегий	62
3. Оценка вероятности безотказной работы и функции ресурса	28	7. Оптимальное управление регенерирующими процессами	63
4. Свойства аддитивных и множительных оценок	34	8. Оптимизация технического обслуживания высоконадежных систем	64
5. Ядерные оценки функций интенсивностей отказов	39	9. Адаптивное управление	65
6. Данные с ковариатами	43	10. Управляемые процессы восстановления в задачах оптимальной эксплуатации по ресурсу (Е. Ю. Барвилович, И. Н. Коваленко)	65
7. Метод эмпирического моделирования — бутстреп	45	11. Пример применения управляемого полумарковского процесса (Е. Ю. Барвилович, В. Ф. Воскобоев)	69
8. Математическое обеспечение расчетов	47	Глава 4. Немарковские управляемые случайные процессы в задачах оптимизации технического обслуживания	72
9. Данные типа доза—эффект (ударные испытания)	47		

1. Лемма Дуба и ее приложения (Е. Ю. Барвилович) . . . . .	72	1. Вводные замечания . . . . .	112
2. Оптимизация технического обслуживания систем в функциональным резервированием (М. А. Арустамов, А. Н. Далакишвили, В. И. Никитин, А. В. Семеновичев) . . . . .	78	2. Описание стратегии технического обслуживания. Постановка задачи . . . . .	113
3. Оптимизация по критерию отношения математических ожиданий (Е. Ю. Барвилович) . . . . .	80	3. Решение задачи оптимизации при полной информации . . . . .	116
4. Сравнение моделей. Неоднократное применение правила (6) (Е. Ю. Барвилович, П. И. Максименко, О. Е. Митряева, А. Г. Шевчук) . . . . .	82	4. Определение оптимальной периодичности плановых предупредительных профилактик при мгновенной индикации отказа (полная информация) . . . . .	119
<b>Глава 5. Общая модель эксплуатации и ремонта по техническому состоянию восстанавливаемых систем (А. М. Андронов, Е. Ю. Барвилович) . . . . .</b>	<b>86</b>	5. Определение оптимальной периодичности плановых восстановительных работ при отсутствии самостоятельной индикации отказов (стратегия хранения, полная информация) . . . . .	<b>125</b>
1. Описание модели . . . . .	86	6. Математические основы решения минимаксных задач технического обслуживания . . . . .	129
2. Общий алгоритм нахождения оптимальных стратегий . . . . .	88	7. Определение периодичности плановых предупредительных профилактик при произвольной длительности индикации отказа и неполной информации о надежности . . . . .	131
3. Марковость и монотонность . . . . .	92	8. Определение периодичности плановой предупредительной профилактики при мгновенной индикации отказа и неполной информации о надежности . . . . .	134
4. Управление ремонтом механической системы при пуассоновском потоке ударных нагрузок . . . . .	94	9. Определение периодичности плановой предупредительной профилактики при отсутствии самостоятельной индикации отказов и неполной информации о надежности . . . . .	138
5. Управление ремонтом самовосстанавливающейся механической системы при пуассоновском потоке ударных нагрузок . . . . .	102	10. Минимаксная стратегия при ограничениях на моменты . . . . .	142
6. Управление ремонтом системы при полумарковском процессе ударных нагрузок . . . . .	106	11. Минимаксная стратегия технического обслуживания при наличии ошибок контроля . . . . .	144
7. Сопоставление результатов анализа различных моделей . . . . .	110	<b>Глава 7. Модели технического обслуживания систе-</b>	
<b>Глава 6. Модели технического обслуживания системы без учета ее структуры (В. А. Каштанов) . . . . .</b>	<b>112</b>		

мы с учетом ее структуры ( <i>В. А. Кашинов</i> )	147	большого масштаба ( <i>А. М. Андронов</i> )	183
1. Модель технического обслуживания двух последовательно соединенных элементов (подсистем)	147	1. Описание и формализация типовых задач	183
2. Обслуживание $N$ последовательно соединенных элементов	153	2. Модели управляемых систем массового обслуживания	186
<b>Глава 8. Выбор запасного комплекта элементов для обеспечения эксплуатации по заданному ресурсу, уровню надежности и состоянию</b>	162	3. Алгоритмы Уайта—Швейцера нахождения оптимальных управлений	192
1. Определение объема запасных элементов для обеспечения эксплуатации по заданному ресурсу ( <i>Е. Ю. Барзилович</i> )	162	4. Сравнение вычислительной эффективности различных алгоритмов нахождения оптимальных управлений	195
2. Определение оптимального количества запасных элементов при эксплуатации системы по уровню надежности ( <i>Е. Б. Барзилович</i> )	163	5. Алгоритм для полумарковских процессов типа размножения и гибели	197
3. Оценка количества запасных элементов при эксплуатации по состоянию ( <i>В. Ф. Воскобоев</i> )	166	<b>Глава 11. Формирование процедуры контроля при эксплуатации сложных технических систем</b> ( <i>В. Ф. Воскобоев, А. Б. Кувьмин, С. Г. Логинов</i> )	200
<b>Глава 9. Организация групповой эксплуатации сложных технических систем большого масштаба</b> ( <i>А. М. Андронов</i> )	172	1. Исходные данные для контроля технических систем	200
1. Особенности организации эксплуатации систем	172	2. Общие требования к методике формирования процедуры контроля технического состояния	201
2. Физические модели эксплуатации систем	174	3. Методика построения процедур контроля	202
<b>Глава 10. Управляемые системы массового обслуживания как основа исследования эксплуатации систем</b>		<b>Глава 12. Контроль параметров систем в процессе эксплуатации</b>	209
		1. Общие методы контроля. Дистанционный контроль, контроль аналоговых и цифровых схем ( <i>Ф. Н. Покровский</i> )	209
		2. Контроль параметров частично наблюдаемой системы в случае дискретного времени ( <i>А. М. Андронов</i> )	211
		3. Контроль параметров при непрерывном времени наблюдения ( <i>А. М. Андронов</i> )	215

4. Оптимизационные задачи контроля параметров (А. М. Андронов) . . . . .	220	томатизированных систем эксплуатации и ремонта техники (М. В. Савенков)	273
5. Достоверность контроля работоспособности изделий (Р. Н. Белоконь, В. Г. Кендель, А. М. Кузнецов, В. С. Новиков, А. В. Соколенцев) . . . . .	221	1. Использование ЭВМ при эксплуатации техники . . . . .	273
6. Определение программы контроля технического состояния системы (А. И. Бондаренко)	231	2. Пакеты прикладных программ для решения задач эксплуатации и ремонта . . . . .	275
<b>Глава 13. Показатели ремонтпригодности технических систем и их определение (В. Ф. Воскобоев, В. И. Дорошков)</b>	238	3. Перспективы развития управления эксплуатацией с помощью ЭВМ и перехода на адаптивную систему технического обслуживания	277
1. Понятия и определения. Связь между видами ремонта . . . . .	238	<b>Глава 16. Основы построения технических средств автоматизированного контроля и диагностики сложных систем (В. В. Грицкий, Н. А. Коротаяев, В. И. Костеневич, Э. Р. Лавинович)</b>	279
2. Показатели, характеризующие ремонтпригодность технических систем . . . . .	238	1. Общие сведения . . . . .	279
3. Определение показателей ремонтпригодности	239	2. Основные требования к аппаратуре . . . . .	279
<b>Глава 14. Анализ, планирование и управление процессом ремонта технических систем (В. Ф. Воскобоев, В. И. Дорошков)</b>	254	3. Средства вычислительной техники в аппаратуре . . . . .	280
1. Экономическое обоснование целесообразности ремонта . . . . .	254	4. Структура автоматизированных средств контроля и диагностики сложных систем . . . . .	282
2. Типовые структурные схемы ремонта изделий техники . . . . .	255	5. Структурная организация трехуровневого мультимикропроцессорного комплекса контроля, диагностики и управления техническим состоянием сложной системы . . . . .	283
3. Основные понятия и элементы сетевого графика	259	6. Структура программного обеспечения автоматизированных средств контроля и диагностики сложных систем	286
4. Алгоритм расчета параметров детерминированного сетевого графика . . . . .	260	<b>Глава 17. Примеры современных автоматизированных систем эксплуа-</b>	
5. Моделирование системы ремонта	262		
<b>Глава 15. Принципы организации математического обеспечения ав-</b>			

тации и ремонта техники . . . . .	291	ного оборудования ( <i>В. Г. Воробьев</i> ) . . . . .	300
1. Эксплуатация и техническое обслуживание больших систем с мониторингом ( <i>С. А. Тимашев</i> ) . . . . .	291	4. Принципы автоматического управления приемниками ( <i>А. В. Кривошейкин</i> ) . . . . .	303
2. Автоматизированная система эксплуатации и ремонта самолетов гражданской авиации ( <i>Л. Ф. Красников</i> ) . . . . .	294	5. Перспективная система автоматической эксплуатации и ремонта техники ( <i>Е. Ю. Барзилович, Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко, Н. А. Северцев</i> ) . . . . .	307
3. Автоматизированные средства контроля авиацион-		Список литературы . . . . .	312
		Предметный указатель . . . . .	316

## Предисловие

Существуют два взаимосвязанных пути повышения надежности сложных технических систем и комплексов в эксплуатации. Первый путь — создание передовых технологий производства высоконадежных элементов, узлов, блоков и совершенных методов их сборки и отладки на уровне систем и комплексов. Второй путь — совершенствование, с одной стороны, существующих программ эксплуатации, а с другой — создание на базе имеющихся технологий перспективных систем и комплексов, состоящих по возможности из однотипных элементов, узлов или блоков со встроенными в системы запасными элементами, датчиками — измерителями информации, набором микропроцессоров (используемых и для других целей) и исполнительного элемента. Для микропроцессоров разрабатываются специальные подпрограммы управления состоянием систем и комплексов, реализация которых с помощью исполнительного элемента (манипулятора или оператора, а в отдельных случаях и робота) позволит существенно повысить надежность систем и комплексов в процессе эксплуатации и одновременно сократить эксплуатационные затраты.

Материал в томе 8 подан так, чтобы сориентировать инженера и руководящего работника любого ранга в области эксплуатации техники различного назначения на полную или частичную реализацию именно второго пути повышения надежности систем и комплексов.

В справочнике отражен отечественный и зарубежный опыт разработки и применения моделей технического обслуживания сложных технических систем различного назначения (меха-

нических, электрических, электронных систем, систем автоматики и телемеханики, комбинированных систем). Чаще всего это системы длительной эксплуатации.

В томе 8 описан отечественный опыт анализа и непараметрического оценивания накапливаемых в процессе эксплуатации статистических данных, ориентированный на использование статистических методов с применением ЭВМ, что позволяет автоматизировать процесс обработки накапливаемых статистических данных при эксплуатации технических систем и их элементов, узлов, блоков с использованием ЭВМ, сопряженных с исследуемой технической системой или встраиваемых в эти системы; получать объективный материал, необходимые статистические оценки при его обработке по рассматриваемым в томе алгоритмам с целью выдачи обоснованных рекомендаций на обслуживание технических систем, элементов, блоков и составляющих их узлов.

Большое место в томе 8 занимают модели обслуживания систем различного назначения по техническому состоянию.

Отдельный раздел посвящен вопросам организации и анализа ремонта сложных технических систем.

В справочнике описаны не только области приложений приведенных результатов с иллюстрирующими, порой нетривиальными примерами, но сжато и достаточно строго изложены математические методы, применяемые при исследовании процессов эксплуатации и ремонта сложных технических систем различного назначения. Овладев такими методами, инженер способен самостоятельно решать (в боль-

шинстве случаев используя ЭВМ) широкий круг важных практических задач.

Отличительной особенностью тома 8 является и то, что в нем указано место многих приведенных математических методов и моделей в общей перспективной схеме автоматической эксплуатации и ремонта техники (даны примеры автоматизированной эксплуатации сложных систем с мониторингом (механические системы), с универсальной ЭВМ (системы эксплуатации двигателей и оборудования самолетов гражданской авиации), с ЭВМ на микрокристаллах (для контроля типовых аналоговых радиотехнических устройств).

По-видимому первые автоматические системы эксплуатации и ремонта, несмотря на сложность их реализации, будут создаваться для АЭС, для автоматизированных систем управления воздушным движением, для межпланетных космических кораблей и станций и для других крайне важных и сложных объектов.

Материал тома по главам расположен таким образом, чтобы заинтересованный читатель мог им пользоваться автономно.

Несомненно, что многие рассмотренные в томе подходы к модели могут найти (и уже находят) применение в существующих системах эксплуатации и ремонта.

Следует особо отметить, что внедрение приведенных результатов позволит широко использовать современные статистические методы и методы оптимизации во всех областях народного хозяйства с целью снижения эксплуатационных затрат при одновременном существенном повышении эксплуатационной надежности техники.

В связи с тем, что по полноте и глубине охвата материал по эксплуатации и ремонту техники, изложенный в настоящем томе, является первым в отечественной и зарубежной литературе, авторы и редакторы тома просят о всех замеченных недостатках сообщать в редакцию.

По мнению редакторов, содержание настоящего тома справочника должно стимулировать разработку и создание высокоэффективных и экономичных образцов отечественных машин.

Академик АН СССР

**В. И. Кузнецов**

Доктор технических наук, профессор

**Е. Ю. Барзилович**

# Глава 1. Показатели эксплуатации технических систем, оценка старения элементов

## 1. ПОКАЗАТЕЛИ ОЦЕНКИ ЭКСПЛУАТАЦИИ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

При оценке технической системы необходимо учитывать не только свойства, закладываемые при проектировании и изготовлении изделий, но и характеристики эффективности применения изделий при принятой системе их эксплуатации, т. е. характеристики надежности и эксплуатационного качества техники, а также качество работы обслуживающего персонала по своевременному выявлению и устранению отказов.

Для оценки эксплуатации технических систем принято использовать числовые показатели, которые определяются как величины, характеризующие одно или несколько свойств, составляющих эксплуатационную надежность.

Номенклатура показателей для различных технических систем задается специальными государственными или отраслевыми стандартами. Основными из них являются следующие показатели:

$T_{\Pi}$  — наработка на отказ, проявившийся в процессе применения по назначению;

$T_{\Pi}$  — наработка на неисправность, выявленную как при применении, так и в процессе технического обслуживания и подготовки к применению;

$T_{O. \Pi}$  — наработка на неисправность, вызванную ошибками обслуживающего персонала;

$T_{\text{ИПД}}$  — наработка на неисправность, вызванную конструктивно-производственными дефектами;

$T_{\text{В}}$  — наработка на отказ, приведший к задержке начала применения по назначению;

$T_{\text{Б, П}}$  — наработка на дефект, выявление и устранение которого не привело к сколько-нибудь серьезным последствиям.

Все эти показатели могут иметь несколько разновидностей в зависимости от наличия у неисправностей ряда специальных признаков. Например, их можно рассчитать для отдельных агрегатов или сложных технических изделий, включающих ряд систем. Те же показатели используются для характеристики работы по поддержанию надежности отдельных подразделений в отрасли (на предприятии), которые эксплуатируют примерно одинаковую технику.

Кроме перечисленных показателей типа «средняя наработка», часто применяются числовые показатели типа «вероятность отсутствия отказов, приводящих к задержке применения технической системы», «количество задержек из-за отказов на 1000 применений» или относительные показатели следующего вида:

$K_{\Pi}$  — относительное число неисправностей, проявившихся при применении, от общего числа неисправностей;

$K_{O. \Pi}$  — относительное число неисправностей, выявленных на оперативных видах обслуживания в ходе подготовки технических систем к применению, от их общего числа;

$K_{\text{ПР}}$  — относительное число неисправностей, выявленных при проведении профилактического обслуживания, от их общего числа.

Наиболее полно характеризуют изменение надежности технических систем в процессе эксплуатации функции:  $\omega(t)$  — параметр потока отказов;  $\lambda(t)$  — интенсивность отказов.

Статистически функции  $\omega(t)$  и  $\lambda(t)$  определяются следующим образом:

$$\omega(t) = \frac{\Delta n_k}{N \Delta t}, \quad (k-1) \Delta t \leq t \leq k \Delta t,$$

где  $N$  — общее число восстанавливаемых изделий, находящихся в эксплуатации;  $\Delta n_k$  — число отказов, попавших в  $k$ -й интервал наблюдения длиной  $\Delta t$ ;

$$\lambda(t) = \frac{\Delta n_k}{(N - \Delta n_1 - \dots - \Delta n_{k-1}) \Delta t}, \quad (k-1) \Delta t \leq t \leq k \Delta t,$$

где  $N$  — общее число учитываемых (при эксплуатации) невосстанавливаемых элементов;  $\Delta n_1, \dots, \Delta n_{k-1}, \Delta n_k$  — соответственно число отказов, попавших в первый, ...,  $(k-1)$ -й,  $k$ -й интервалы наблюдений одинаковой длины  $\Delta t$ .

Таким образом, функция  $\omega(t)$  является характеристикой восстанавливаемых в процессе эксплуатации элементов изделий, а функция  $\lambda(t)$  — характеристикой невосстанавливаемых элементов.

В эксплуатации важным показателем является средний остаточный ресурс. Пусть изделие проработало безотказно время  $\alpha$ . Тогда средний остаточный ресурс

$$R(\alpha) = \frac{\int_{\alpha}^{\infty} P(x) dx}{P(\alpha)}, \quad (1)$$

где  $P(x)$  — вероятность безотказной работы изделия в течение времени  $x$ .

Аналогично определяются показатели: средний остаточный срок службы и средний остаточный срок сохранности, если в (1) вероятности  $P(x)$  соответственно придать смысл вероятности безотказной работы изделия в течение срока службы или срока сохранности.

Статистические оценки показателя  $R(\alpha)$  содержатся в гл. 2 [9].

Проанализируем числовые показатели надежности и эксплуатационного качества. Каждый из названных показателей характеризует определенное свойство технического объекта и системы его эксплуатации. Так, нара-

ботка на отказ, проявившийся в процессе применения по назначению  $T_{\Pi}$ , характеризует надежность техники при применении и наиболее просто позволяет определить влияние надежности техники на эффективность. Нарботка на неисправность  $T_{\Pi}$  является характеристикой того уровня надежности, который достигнут при проектировании, изготовлении и эксплуатации технической системы. Показатели  $T_{0. \Pi}$  и  $T_{\text{нпд}}$  позволяют оценить влияние на уровень надежности раздельно работы заказчика (эксплуатационников) и поставщика (изготовителей).

Влияние надежности на экономические показатели эксплуатации оценивает, в частности, показатель  $T_{\text{з}}$  — наработка на отказ, приведший к задержке начала применения по назначению. Например, для авиационной техники такой отказ приведет к задержке вылета или отмене рейса по расписанию. Регулярность рейсов зависит не от надежности вообще, а только от тех отказов, которые обслуживающему персоналу не удалось устранить к нужному времени. Поэтому по отказам, приведшим к задержкам и отменам рейсов, целесообразно обрабатывать специальные мероприятия, добиваясь максимального повышения показателя  $T_{\text{з}}$ .

Показатель  $T_{\text{б. п}}$  — наработка на неисправность без последствий — характеризует работу обслуживающего персонала по поддержанию надежности и уровня безотказности технической системы.

Показатели  $K_{\Pi}$ ,  $K_{0. \Pi}$ ,  $K_{\text{нр}}$  — распределение выявленных неисправностей по месту их обнаружения — характеризуют принятую систему обслуживания. Главным является показатель  $K_{\Pi}$ . Для уменьшения  $K_{\Pi}$  необходимо улучшать контроль техники, добиваясь своевременного выявления или предсказания ее неисправностей. Таким образом, предпочтительна будет та система эксплуатации, которая обеспечит при прочих равных показателях увеличение  $K_{\text{нр}}$  за счет уменьшения  $K_{\Pi}$ .

Статистическое определение показателей эксплуатации проводится специализированной автоматизированной

системой сбора и обработки сведений об отказах техники в эксплуатации (см. гл. 15 и 17). С помощью специализированной АСУ показатели оценки эксплуатации технических изделий определяются раз в квартал или полугодие. Накапливаемый материал позволяет проводить статистический анализ показателей с целью изучения изменения надежности и других эксплуатационных качеств техники. Такой статистический анализ дает возможность контролировать ход выполнения разрабатываемых потребителем и поставщиком программ повышения надежности технических изделий.

## 2. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА СТАРЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Главной характеристикой надежности элементов технических систем является интенсивность их отказов  $\lambda(t)$ . Возрастание интенсивности отказов по времени свидетельствует о старении элементов, поскольку у последних вероятность возникновения отказов тем больше, чем дольше они эксплуатируются. Характер изменения интенсивности позволяет обоснованно определить мероприятия при эксплуатации, которые бы обеспечили компенсацию старения элементов техники и позволили установить некоторым элементам свои ресурсы, отличные от общего ресурса технического изделия.

В зависимости от характера изменения интенсивности отказов во вре-

мени в современной теории надежности различают несколько классов функции распределения времени до отказа  $F(t)$ .

Распределения с возрастающей функцией интенсивности (ВФИ) отказов (рис. 1, а). К этому классу относятся функции распределения, у которых  $\lambda(t)$  строго возрастает по времени. Примером являются нормальная функция распределения или распределение Вейбулла—Гнеденко

$$f(t) = (m/t_0) t^{m-1} \exp(-t/t_0),$$

$$\lambda(t) = (m/t_0) t^{m-1} \quad (2)$$

с параметром  $m > 1$ .

Функции распределения с убывающей интенсивностью отказов. Примером такой функции со строго убывающей интенсивностью во времени  $\lambda(t)$  является распределение Вейбулла—Гнеденко с параметром  $m < 1$  (см. рис. 1, б). К ним относятся функции надежности резисторов и конденсаторов (они хорошо аппроксимируются распределением Вейбулла—Гнеденко с  $m = 0,57 \div 0,83$ ). Примерно таков же характер изменения интенсивности отказов большинства типов диодов и триодов.

Однако у диодов, рассчитанных на силу тока более 30 А, наблюдается старение (для аппроксимации их функций надежности подходит распределение Вейбулла—Гнеденко с  $m = 1,22$ ). Есть такая же тенденция в изменении надежности триодов большой мощности ( $m = 1,36$ ).

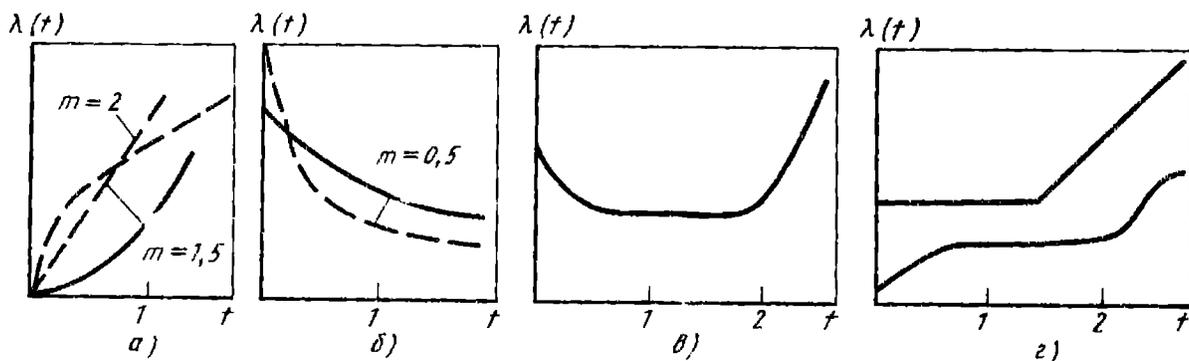


Рис. 1. Характер изменения функций интенсивности отказов:

а — возрастающая; б — убывающая; в — «возрастная»; г — возрастающая в среднем;  
— — — — — интенсивность отказов для распределения Вейбулла—Гнеденко при разных значениях параметра  $m$

Функции распределения вогнутой интенсивностью отказов. Их называют функциями с «возрастной» интенсивностью. К этому классу относятся различные для инженерных приложений функции надежности элементов, имеющих большую начальную интенсивность отказов из-за приработки и возрастание потока отказов в конце срока службы из-за старения (см. рис. 1, в). Например, на современном транспортном самолете функцию надежности типа ВФИ имеют 8—11 % агрегатов, а функции надежности возрастного типа 4 %.

Границей между классами является экспоненциальное распределение  $F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$ . Именно на сравнении функции надежности с экспонентой и основана классификация.

Функция распределения с возрастающей в среднем интенсивностью ВСФИ отказов (см. рис. 1, г). Для характеристики функции этого класса используется функция

$$\Lambda(t) = t^{-1} \int_0^t \lambda(t) dt. \quad (3)$$

В классификации функции распределения по изменению  $\lambda(t)$  во времени используется ее технический смысл. Если  $\Lambda(t)$  возрастает, следовательно, средняя остаточная продолжительность исправного состояния элемента, проработавшего время  $t$ , меньше, чем у элемента с меньшей наработкой. Именно такие элементы имеет смысл заменять в эксплуатации на новые. Для экспоненциальной функции распределения  $\Lambda(t) = \lambda = \text{const}$ , т. е. замены элементов по ресурсу неэффективны.

Элементы, для которых  $\Lambda(t)$  не убывает с ростом  $t$ , относят к классу «стареющих в среднем». Для элементов класса ВСФИ новый объект в среднем лучше, чем использованный. Отличие их от элементов класса ВФИ состоит в том, что у стареющих в среднем элементов  $\lambda(t)$  не обязательно монотонно возрастает.

Рассмотрим модели отказов технических устройств, которые обусловли-

вают отнесение функций их надежности к классу ВФИ. Наиболее распространены модели двух типов. Первая модель — модель накопления повреждений. В этой модели считается, что моменты появления мелких повреждений (дефектов) в техническом устройстве образуют пуассоновский поток событий с интенсивностью  $\lambda$ . При наличии в устройстве  $k$  повреждений оно отказывает с вероятностью  $P_k$ . Тогда

$$\bar{F}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} (\lambda t)^k P_k. \quad (4)$$

Если сделать предположение, что каждый дефект наносит ущерб не меньше предыдущего, то  $\sqrt[k]{P_k}$  не возрастает. При этом простейшем предположении функция надежности технического устройства будет относиться к классу ВСФИ. Тот же вывод справедлив для случая, когда поток дефектов не простейший, а относится к классу убывающих в среднем. В формуле (4) в этом случае вместо  $\lambda t$  необходимо подставить  $\Lambda(t)t$ , определяемое из (3).

Вторая модель, приводящая к функции надежности типа ВФИ, основана на предположении, что техническое устройство, состоящее из разнородных элементов, отказывает тогда, когда вышел из строя хотя бы один из них. Отказы каждого  $i$ -го элемента образуют простейший поток с интенсивностью  $\lambda_i$ . Поток отказов устройства в целом будет иметь случайную интенсивность  $\lambda$ , определяемую распределением  $F(\lambda)$ . Если  $F(\lambda)$  является  $\gamma$ -распределением, то функция надежности устройства  $\bar{F}(t)$  принадлежит к классу ВФИ. Например, этой модели соответствует возникновение распределения Вейбулла—Гнеденко (2). Известно, что распределение (2) является предельным распределением при  $n \rightarrow \infty$  самой меньшей из  $n$  независимых случайных величин. Поэтому если элементов в устройстве достаточно много и время до отказа его определяется наименьшим из всех времен до отказа одного из элементов, то функция надежности такого устройства описывается распределением Вейбулла—Гнеденко.

При оценке характера функции надежности  $\bar{F}(t)$  по экспериментальным данным часто встречаются цензурированные исходные данные. Классическим примером цензурирования являются рассмотренные в гл. 2 испытания на надежность в соответствии с планами  $[N, B, r]$  или  $[N, B, T]$ , в ходе которых информация собирается только до  $r$ -го отказа или до заданной заранее наработки испытываемых изделий  $T$ . В общем случае (модель произвольного цензурирования) следует считать, что изучается пара чисел  $(\tau_i, y_i)$ , из которых первое — момент отказа  $i$ -го устройства, а второе — момент окончания наблюдений за  $i$ -м устройством. Второе число является случайным с распределением  $R(y)$ , которое иногда называют функцией выживания. Наблюдается другая пара чисел  $\{z_i = \min(\tau_i, y_i), \delta_i\}$ , где  $\delta_i = 1$ , если  $\tau_i < y_i$ , и  $\delta_i = 0$ , если  $\tau_i \geq y_i$ . Числа  $z_i$  образуют цензурированную выборку.

Физически можно интерпретировать момент  $\tau_i$  как наступление отказа именно того элемента технического устройства, который изучается, а момент  $y_i$  — как наступление любого другого отказа в  $i$ -м устройстве, который приводит к снятию этого устройства с дальнейшей эксплуатации (или к прекращению его испытаний). Например, если испытываются устройства с ограниченным ресурсом  $T_p$ , то все  $y_i$  не могут быть больше  $T_p$  (соответствующая функция выживания  $R(y) = 1$ , если  $0 \leq y \leq T_p$ ).

Введем некоторые обозначения. Пусть  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_N$  — отличные друг от друга значения в упорядоченном ряду наблюдений  $z_i$ ;  $r_i$  — число отказов в момент  $t_i$ ;  $n_i$  — общее число наблюдений (отказов или прекращений испытаний устройства) в момент

$$t_i, \quad M_j = \sum_{i=1}^j n_i; \quad M_N = n \quad (N \text{ — число}$$

зафиксированных отказов,  $n$  — общее число наблюдений).

Оценка максимального правдоподобия для интенсивности отказов будет ступенчатой функцией со скачками в момент наблюдений  $t_i$ , хотя скачки должны иметь место не обязательно

во всех точках  $t_i$ . Например, для распределений типа ВФИ формулы оценок максимального правдоподобия:

$$\lambda_i = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_1; \\ \max_{i \leq l < N-1} \min_{1 \leq s \leq l} & \\ \sum_{j=s}^l r_j \bigg/ \sum_{j=s}^l (n - M_j) \times & (5) \\ \times (t_{j+1} - t_j) & \text{при } t_1 \leq t \leq t_N; \\ \lambda_{N-1} & \text{при } t > t_N. \end{cases}$$

Без учета минимакса формула (5) превращается в простую оценку величины, обратной средней наработке на один отказ изучаемого парка изделий. Минимум в оценке  $\lambda_i$  применен потому, что заранее постулируется рост интенсивности отказов, т. е. необходимо, чтобы  $\lambda_i$  было не больше всех последующих  $\lambda_l$  при  $l \geq i$ . Максимум обеспечивает, чтобы  $\lambda_i$  было больше всех  $\lambda_s$  при  $s > i$ . Специальные статистические исследования на ЭВМ показали, что среднее квадратическое отклонение оценки максимального правдоподобия на 35—40 % больше, чем у параметрической оценки. При увеличении  $m$  точность оценок максимального правдоподобия улучшается, а при больших  $m$  и большом времени наблюдения  $t_N$  она даже лучше, чем у параметрической оценки. Это вполне объяснимое явление, так как при выводе формулы (5) использовано свойство возрастания интенсивности отказов во времени, а оно тем более заметно, чем больше  $m$  и  $t_N$ .

Статистические тесты, позволяющие идентифицировать функцию распределения по выборке, содержащей  $n$  полученных экспериментально значений моментов отказов  $t_i$  технического изделия, строятся так, чтобы отличить опорную гипотезу  $H_0: \lambda(t) = \text{const}$  от гипотезы  $H_1: \lambda(t)$  — возрастает. Для различения этих гипотез используются порядковые статистики на основе ранжированного ряда моментов отказов в порядке возрастания  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_j \leq t_n$ . Простейший тест для проверки гипотезы о старении

элементов технических изделий основывается на подсчете числа перестановок  $v_n$  нормализованных интервалов  $D_{Hj}$ :

$$D_{Hj} = (n - j - 1) (t_j - t_{j-1}),$$

где  $j$  — порядковый номер момента отказа в ранжированном ряду.

Число перестановок нормализованных интервалов

$$v_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i v_{ij},$$

где  $v_{ij} = [D_{Hi} \geq D_{Hj}, i > j].$  (6)

Квадратными скобками здесь и далее в этом параграфе обозначен индикатор события, описанного в скобках, т. е. в формуле (6) величина  $v_{ij} = 1$ , если  $D_{Hi} \geq D_{Hj}$ , и  $v_{ij} = 0$  — в противном случае.

Распределение статистики  $v_n$  хорошо изучено и затабулировано. Чтобы понять, как оно строится, достаточно учесть, что при нулевой гипотезе нормализованные интервалы  $D_{Hi}$  распределены независимо, каждый по нормальному закону так, что  $P(v_{ij} = 1) = 0,5$ . При справедливости альтернативной гипотезы  $P(v_{ij} = 1) > 0,5$ , когда  $i > j$ , так как для более ранних моментов времени величины интервалов должны быть больше, чем для поздних. Таким образом, каждое значение  $v_{ij}$  и, следовательно,  $v_n$  будет больше при альтернативной гипотезе. Поэтому при больших  $v_n$  нулевая гипотеза отвергается.

Уже при небольших  $n > 10$  распределение  $v_n$  близко к нормальному, что позволяет находить граничное значение для статистики (6) по формуле

$$\vartheta_{n, \alpha} = Mv_n + u_{1-\alpha} \sqrt{Dv_n},$$

где  $u_{1-\alpha}$  — квантиль нормального распределения;  $Mv_n = 1/4 (n - 1) n$ ;  $Dv_n = 1/12n (n - 1) (2n + 5)$ .

**Пример.** Результаты наблюдений за моментами отказов блока составили ряд (в месяцах): 16; 44; 55; 67; 73; 76; 80; 81; 86; 93; 100; 108; 114; 120; 125; 129; 132; 134; 140; 147; 148; 151; 152; 158; 181; 190; 193; 213; 215, а интервалы  $D_{Hj}$  (в месяцах): 448; 756; 286; 300; 144; 69; 88; 21; 199; 133; 126; 136; 96; 90; 56; 39; 24; 66; 70; 9; 24;

7; 36; 115; 36; 9; 40; 2. По ним подсчитываем:  $n = 29, v_n = 317, Mv_n = 203, Dv_n = 4263, \vartheta_{n, 0,962} = 317$ . По этим данным гипотезу о неизменности интенсивности отказов следует отвергнуть, и ошибка при этом составит менее 4 %.

Другой тест, позволяющий идентифицировать функции надежности типа ВФИ, предложен Холлендером и Прошаном. Он также основывается на том, что при справедливости гипотезы  $\lambda(t) = \text{const}$  нормализованные интервалы  $D_{Hj}$  распределены нормально. Более поздние исследования доказывают, что распределение  $D_{Hj}$  сходится к нормальному медленно и поэтому в первоначальный тест Холлендера—Прошана внесена поправка.

В качестве различающей статистики используется

$$v_n = \sqrt{210n} \sum_{j=1}^n l_{jn} D_{Hj} / \sum_{j=1}^n D_{Hj},$$
 (7)

где  $l_{jn} = 1/3 (j/n)^3 - (1 - 1/2 n) \times (j/n)^2 + (1/2 - 1/2n + 1/6n^2) (j/n)$ ;  $j$  — порядковый номер момента отказа  $t_j$  в ранжированном ряду экспериментальных данных. Граничное значение для статистики  $v_n$  приводится в специальных таблицах.

Оба приведенных теста предназначены для проверки гипотезы о старении по цензурированным выборкам, т. е. в случае, когда имеются сведения о моментах отказов всех поставленных на испытания технических устройств. В практике эксплуатации чаще приходится иметь дело с цензурированными выборками. Тесты и выводы по ним для этого случая претерпевают значительные изменения. При построении теста для проверки гипотезы о том, что «новое лучше старого» в условиях цензурированных данных, будем проверять гипотезу о принадлежности распределения  $\bar{F}(t)$  к классу ВСФИ на основе наблюдений  $\{z_i, \delta_i\}$ . При наличии цензурирования оценки для функции надежности выражаются формулами

$$\bar{F}_n(t) = \bar{H}_n(t) R_n(t);$$

$$\bar{H}_n(t) = N^+(t)/n; \quad (8)$$

$$N^+(t) = \sum_{i=1}^n [z_i > t],$$

где

$$R_n(t) = \prod_{i=1}^n \left\{ \frac{2 + N^+(z_i)}{1 + N^+(z_i)} \right\}^{[\delta_i = 0, z_i < t]};$$

$\bar{F}_n(t)$  имеет скачки во всех точках, в которых  $t = z_1, z_2, \dots, z_n$ . Величина скачка в  $k$ -й точке равна  $\{n^{-1}(n - k + 1) [\delta_k = 0] + n^{-1} [\delta_k = 1]\} \times R_n(z_k)$ . В качестве меры принадлежности функции надежности  $\bar{F}(t)$  к тому или иному классу используем статистику

$$v_n = \int_0^{M_n} \{\bar{F}_n(t)\}^2 dt \Big/ \int_0^{M_n} \bar{F}_n(t) dt, \quad (9)$$

где  $M_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , а порядок изменения  $M_n$  будет назначен в дальнейшем.

Формулу (9) в виде, приспособленном для расчетов, можно записать так:

$$v_n = \frac{\sum_{i=1}^n R_n(z_{i-1}) [z_i \leq M_n] \times \sum_{l=1}^i (z_i - z_{l-1}) \times \times \bar{F}_n(z_{l-1}) \left\{ \frac{[\delta_l = 0]}{n(n-l+1)} + \frac{[\delta_l = 1]}{n} \right\}}{\sum_{j=1}^n (z_j - z_{j-1}) \times \times \bar{F}_n(z_{j-1}) [z_j \leq M_n] + \bar{F}_n(M_n)} +$$

В случае отсутствия цензурирования, когда  $z_i = t_i$ ,  $M_n = \infty$ ,  $R_n = 1$ ,  $\bar{F}_n(z_i) = n^{-1}(n - i + 1)$ ,  $\delta_i = 1$ , статистика (9) превращается в статистику (7) с точностью до масштабных коэффициентов.

Распределение статистики  $v_n$  зависит от интенсивности отказов  $\lambda(t)$  и закона цензурирования  $R(t)$ . Так,

если функция распределения  $F(t)$  экспоненциальная, то статистика (9) имеет нормальное распределение с математическим ожиданием

$$Mv_n = 1/2 (1 - e^{-M_n/T_1}) \quad (10)$$

и дисперсией

$$Dv_n = 1 + 1/R_n(M_n) (6e^{-2M_n/T_1} - 4e^{-3M_n/T_1} - 3e^{-4M_n/T_1}) + \sum_{j=1}^n (1 - \delta_j)/(2 + N^+(z_j)) R_n(z_j) \times \times (4e^{-3z_j/T_1} - 6e^{-2z_j/T_1} + 3e^{-z_j/T_1}), \quad (11)$$

где  $T_1 = \sum_{j=1}^n z_j / \sum_{j=1}^n \delta_j$  — экспериментальное значение средней наработки на отказ.

При назначении  $M_n$  следует руководствоваться тем, что эта величина должна иметь порядок  $n^{-\gamma}$ , где  $0,5 \leq \gamma \leq 1$ . Так, если выбрать  $M_n = d (\log n)^s$  с задаваемыми  $d > 0$  и  $s > 1$ , то справедливость (10) и (11) гарантируется для функций  $F(t)$  и  $R(t)$ , которые или ведут себя при больших  $t$  подобно  $t^{-\gamma}$ , когда  $\gamma > 0$ , или при  $t \rightarrow \infty$  удовлетворяют условию  $\{\bar{F}(t) + \bar{R}(t)\} e^{-\gamma t} \rightarrow 0$  (1) для некоторого  $\gamma > 0$ .

Интересные для практики функции надежности  $\bar{F}(t)$  цензурирования  $\bar{R}(t)$  этим условиям удовлетворяют, так как при большом времени наработки вероятность безотказной работы уменьшается достаточно быстро.

Обобщив вышесказанное, дадим процедуру проверки гипотезы по цензурированным наблюдениям.

1) Приняв за основу возрастание  $M_n$  по закону

$$M_n = d (\log n)^{0,9},$$

выберем такое  $d$ , чтобы  $M_n$  было больше самого большого из наблюдений  $z_n$  или больше ресурса технического устройства.

2) При выбранном  $M_n$  подсчитаем значение различающей статистики  $v_n$  по формуле (9), а также математическое ожидание и дисперсию для нее

в случае справедливости гипотезы  $H_0$  по формулам (10) и (11).

3) Проверим справедливость гипотезы  $H_0$ . Ее следует принять с вероятностью ошибки не более  $\alpha$ , если

$$v_n \leq Mv_n + u_{1-\alpha} \sqrt{Dv_n}.$$

В качестве примера рассмотрим данные о 29 отказах блока аппаратуры, приведенные ранее. Добавим лишь, что эксплуатировалось 69 комплектов аппаратуры, в которых применены эти блоки. При любом отказе комплект о дальнейшей эксплуатации снимался. Сорок комплектов снято в связи с отказами других блоков в следующие моменты времени (в месяцах): 13; 14; 19; 20; 23; 25; 26; 27; 31; 32; 34; 37; 38; 40; 46; 50; 53; 54; 57; 58; 59; 60;

66; 70; 85; 90; 98; 102; 105; 110; 118; 124; 130; 136; 138; 141; 194; 234.

Таким образом, получено 29 нецензурированных наблюдений и 40 цензурированных. Выберем  $d = 70$ , тогда  $M_n = 256$ , которое больше самого большого  $z_{69} = 234$ . По результатам наблюдений  $v_n = 0,988$ ;  $Mv_n = 0,66$ ;  $\sqrt{Dv_n} = 0,26$ . Отсюда  $u_{1-\alpha} = 1,26$  и  $\alpha = 0,11$ . Таким образом, вероятность ошибки, если отвергается гипотеза о неизменности интенсивности отказов исследуемого блока, составит более 10%. В таких случаях не принято считать подтвержденной гипотезу о старении, в то время как тест без учета цензурирования, рассмотренный на с. 17, позволял сделать противоположный вывод.

## Глава 2. Базы данных и статистические выводы о показателях надежности по результатам эксплуатации и испытаний

### 1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Базы данных, содержащих обширную информацию о надежности различных изделий массового применения, могут быть организованы только на основе применения средств вычислительной техники и соответствующего математического обеспечения. Система организации базы данных должна допускать включение новых данных, получаемых в результате проведения испытаний или эксплуатации. Правильно организованная база данных допускает быстрое вычисление необходимых показателей надежности на основе имеющихся данных.

При обработке данных используются небольшое число основных формул и алгоритмов расчета основных показателей надежности: вероятности безотказной работы, функции интенсивности отказа, на основе которых могут быть рассчитаны другие показатели надежности элементов и систем (гамма-процентный ресурс, средняя наработка на отказ, коэффициент готовности и т. д.). Для расчета может быть использован комплекс программ обработки данных (см. разд. 8).

Исходным пунктом при этом является выбор подходящей модели накопления данных (см. разд. 2). Некоторые из перечисленных моделей накопления данных допускают получение статистических выводов о показателях надежности в теории мартингалов (см. т. 2). Теория мартингалов накладывает существенные ограничения на модели накопления данных. Использование наряду с мартингальными методами других общих методов математической статистики дает возможность проводить расчет показателей надежности для моделей накопления

данных, собираемых в процессе эксплуатации изделий. При этом при выполнении приводимых в параграфах 3 и 4 условий ( $U_i$ ) допускается объединение в общий массив данных, соответствующих различным планам испытаний и эксплуатации.

Учитываются все этапы работы с данными: планирование их получения, хранение полученных данных и, наконец, машинная обработка больших массивов накопленных данных для получения требуемых показателей. Под статистической базой данных понимается специальным образом организованный архив данных о надежности определенных типов изделий. При этом необходима стандартизация накапливаемых данных. Допускается весьма общий вид накапливаемых данных. Одно из основных понятий — это понятие о порциях данных, как о наименьших единицах информации, составляющих массив данных. Современные средства вычислительной техники предоставляют пользователю довольно емкие носители информации быстрого прямого доступа: гибкие диски, жесткие диски, пакеты дисков, оптические диски. Такая структура организации базы данных о надежности и методы получения на основе этой базы статистических выводов о показателях надежности изделий полностью ориентированы на использование ЭВМ.

Непараметрические точечные и интервальные оценки наиболее важны в условиях, когда накоплено большое количество статистических данных. При правильно организованном сборе данных сравнительно быстро накапливаются большие массивы данных о надежности изделий массового применения. Примерами таких изделий являются комплектующие элементы элек-

роники (интегральные схемы и т. п.), элементы автоматики, подшипники, автошины, заклепки и т. д. На основе этих накопленных данных оцениваются не только показатели надежности, но и выявляются тенденции их изменения, сравнивается продукция различных предприятий. Традиционные методы математической статистики для обработки больших массивов реальных данных, как правило, не применимы.

Необходимость использования непараметрического подхода и его преимущества. Количество данных, получаемых в результате специальным образом спланированных испытаний, как правило, невелико. Поэтому ориентируются на выбор подходящего параметрического семейства  $\mathcal{P}$  функций распределений (ф. р.) продолжительности безотказной работы  $F(s)$ ,  $s \geq 0$ . Если семейство ф. р. выбрано, то следует использовать оптимальные для этого семейства методы получения выводов о характеристиках надежности. Оптимальные методы получения выводов существенным образом зависят как от плана, по которому получены данные, так и от вида выбранного семейства. Например, в предположении об экспоненциальности ф. р. ( $F(s) = 1 - e^{-\lambda s}$ ) в качестве несмещенной оценки параметра  $\lambda$  при плане  $[N, B, r]$ , т. е. при одновременном испытании  $N$  изделий до  $r$ -го отказа, рекомендуется оценка  $\hat{\lambda} = (r - 1)/S_r$ , где  $S_r$  — суммарная наработка всех изделий за время испытаний. При обработке данных испытаний по плану  $[N, B, T]$ , т. е. в течение заданного времени  $T$ , для несмещенного оценивания  $\lambda$  необходимо использовать другую, более сложную несмещенную оценку. Естественно, что такое разнообразие расчетных формул существенно усложняет создание математического обеспечения, которое охватывало бы хотя бы основные используемые планы испытаний, основные семейства ф. р. и показатели надежности. Трудности усугубляются еще и тем, что для однотипных изделий приходится объединять данные, полученные по различным планам испытаний. Это ведет к необходимости вывода

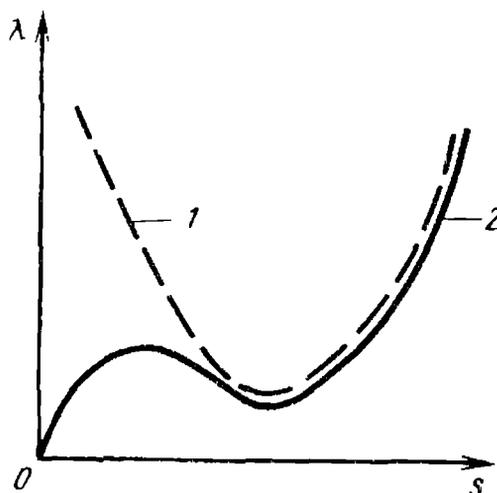


Рис. 1. График функции интенсивности отказа:

1 — без отбраковки ненадежных изделий;  
2 — с учетом отбраковки

новых формул, создания новых программ для ЭВМ и т. д.

При постепенном увеличении массива данных требуется обосновать возможность использования любого конкретного параметрического семейства для достаточно точного нахождения показателей надежности изделий. Ошибка в выборе параметрического семейства может привести к ошибочным выводам. Возможные ошибки вызваны неустойчивостью методов, оптимальных для конкретного параметрического семейства, даже при небольших отклонениях истинных ф. р. от ф. р., составляющих выбранное параметрическое семейство. Поэтому при обработке больших массивов данных целесообразно использовать непараметрические семейства и непараметрические методы оценивания.

По мере накопления данных появляется возможность выявить «тонкую структуру» ф. р. и функции интенсивности отказа. Можно ожидать, что при использовании индивидуального прогноза надежности изделий на основе неразрушающего контроля и последующей отбраковки выявленных ненадежных изделий функция интенсивности отказа будет иметь вид 2, показанный на рис. 1. Кривая 1 соответствует функции интенсивности отказа тех же изделий, но без отбраковки ненадежных изделий. Функция интенсивности отказа, представленная на рис. 1, не соответствует обычным пара-

метрическим семействам ф. р. При использовании непараметрических оценок вид ф. р. заранее не оговаривается. Это позволяет более объективно оценить истинные значения показателей надежности.

**Краткая характеристика накладываемых ограничений.** Допускается, что данные поступают в базу данных в виде порций, имеющих определенное строение (см. разд. 2). Каждая порция данных наряду с нужной информацией о надежности изделий определенного типа содержит информацию, которая в данный момент может не представлять интереса. Задача предварительной обработки данных состоит в том, чтобы на основе порций данных образовывать специальные таблицы, т. е. порядковые таблицы, в которых сосредоточивается нужная информация (см. с. 30). На основе этих таблиц получают статистические выводы: точечные и доверительные оценки одной или нескольких ф. р. и функций интенсивностей отказов, а затем и других показателей.

Такая общая схема обработки данных возможна лишь при выполнении ряда весьма существенных ограничений. Исходным ограничением является структура порций, в которых допускается только цензурирование справа. Существенным является также требование взаимной независимости моментов цензурирования и «будущих» отказов. Это очень жесткое ограничение. Оно выполняется не везде. Например, в авиации стараются дать прогноз возможности наступления отказа двигателя самолета. Двигатель подвергают внеплановому профилактическому ремонту, если возникает обоснованное подозрение в возможном наступлении недопустимого отказа, который мог бы иметь катастрофические последствия. В этом случае очевидна взаимная зависимость момента прекращения наблюдения за двигателем и момента отказа.

Еще одним существенным ограничением является предположение об однородности собираемых данных для заданного типа изделий. Предполагается, что все изделия, данные о надежности которых включены в общий массив данных, имеют одинаковые ф. р.

момента наступления отказа. Если данные собираются в течение продолжительного интервала времени, то ф. р. момента отказа может измениться. Частично преодолеть трудности, связанные с неоднородностью большого массива, можно с помощью разбиения этого массива на части. Если статистические выводы о ф. р. для частей окажутся различными, то эти части массива следует рассматривать либо как самостоятельные массивы, либо следует ввести дополнительные метки — числа, учитывающие наличие или отсутствие однородности. Такие изменения выполняются специальными программами на ЭВМ.

Другой путь преодоления естественной для многих изделий неоднородности массивов данных состоит в учете ковариат, т. е. значений дополнительно измеренных величин, влияющих на надежность. Например, неоднородность массива может быть вызвана изменениями условий внешней среды. Однотипные изделия, используемые в летнее и зимнее время часто имеют существенно различающиеся показатели надежности. Возникающие в этом случае задачи близки к задачам пересчета показателей надежности с одних режимов испытаний или эксплуатации на другие режимы.

Предлагаемая теория накопления и обработки данных является асимптотической, т. е. предполагается, что объем данных неограниченно возрастает. Реальные данные всегда имеют конечный объем. О точности оценок судят по ширине доверительных интервалов. Однако приводимые формулы доверительных интервалов также асимптотические. В тех случаях, когда правомерность их использования вызывает сомнение, можно применить метод бутстрепа (см. разд. 7).

## 2. ПОРЦИИ И МАССИВЫ ДАННЫХ

Предположим, что в каждом пункте сбора данных четко оговорены правила сбора и оформления данных о надежности. При этом допускается, что данные о надежности однотипных изделий могут иметь различную струк-

туру, зависящую от планов испытаний или условий эксплуатации изделий. Минимальное требование, предъявляемое к регистрируемым данным, состоит в том, что данные о надежности изделия должны содержать значение наработки  $S$  — времени работы изделия без отказа. Это значение наработки должно быть снабжено знаком — меткой  $\Gamma$ , кодирующей факт наступления или отсутствия отказа при данном значении наработки. Отсутствие отказа означает, что на момент подачи данных изделие продолжало работать. Метка  $\Gamma$  может кодировать тип наблюдаемого отказа. Если на местах сбора информации сбор данных ведется с последовательной регистрацией текущих моментов включения изделий в рабочие режимы и моментов отказов, то необходимо рассматривать две шкалы времени: календарного времени и времени наработок  $s$ .

**Пример.** Пусть ведется наблюдение процесса восстановления, в котором отказавшее изделие мгновенно заменяется новым годным. Допустим, что в момент  $t_0$  в работу включено первое изделие, которое отказало в момент  $t_1$  и было сразу заменено на идентичное второе изделие. Второе изделие отказало в момент  $t_2$  и было заменено на третье изделие и т. д. В момент  $t_k$  в работу включено  $(k+1)$ -е изделие. К моменту  $t$  подачи данных  $(k+1)$ -е изделие продолжало работать без отказа. Набор данных, накопленных к моменту  $t$ , следующий:  $t_1, \dots, t_k$  — моменты отказов,  $t_0$  — момент начала сбора данных,  $t$  — момент окончания сбора данных. Нарботки изделий равны:  $S_1 = t_1 - t_0$  (первого),  $S_2 = t_2 - t_1$  (второго),  $\dots$ ,  $S_k = t_k - t_{k-1}$  ( $k$ -го),  $S_{k+1} = t - t_k$  [ $(k+1)$ -го]. Нарботки отказавших изделий снабдим метками  $\Gamma = 1$ , а наработку неотказавшего изделия — меткой  $\Gamma = -1$ . В итоге данные запишутся в виде  $(S_1, 1; S_2, 1; \dots; S_k, 1; S_{k+1}, -1)$ . На рис. 2 показаны значения моментов отказов и достигнутые наработки. Оси абсцисс соответствуют календарное время, а оси ординат — время наработок. Такие данные соответствуют плану  $[N, B, t]$ ,  $N = 1$ .

**Пример.** Допустим, что данные содержат результаты испытаний по пла-

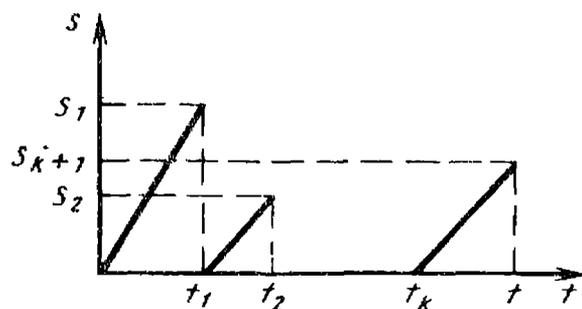


Рис. 2. Данные испытаний на надежность по плану  $[N, B, t]$ ,  $N = 1$

ну  $[N, B, t]$ , т. е.  $N$  изделий испытывались в течение времени  $t$ . Замена или восстановление отказавших изделий не производилась. Отказы наблюдались в моменты  $t_1, \dots, t_d$ . Если  $i$ -е изделие не отказало, то его наработка  $S_i = t$ , а метка  $\Gamma_i = -1$ . Если же  $i$ -е изделие отказало в момент  $t_i$ , то его наработка  $S_i = t_i$ , а метка  $\Gamma_i = 1$ . С использованием меток данные запишутся в виде набора  $2N$  чисел  $(t_1, 1; t_2, 1; \dots; t_d, 1; t, -1; \dots; t, -1)$ . Последние  $N - d$  пар чисел соответствуют изделиям, у которых за время испытаний отказы не наступили и их метки  $\Gamma = -1$ .

**Представление данных о надежности изделий в виде порций.** Для многих видов изделий необходимо учитывать тип отказа. В изделиях электроники причиной отказа может быть короткое замыкание или обрыв. Потребуем, чтобы тип отказа был выявлен и включен в данные. Нарботки изделия должны снабжаться метками  $\Gamma$ . Например, метка  $\Gamma = 1$ , если произошел обрыв,  $\Gamma = 2$ , если произошло замыкание,  $\Gamma = 3$ , если отказ не наблюдался.

Пары наработок и меток будем рассматривать как значения случайных величин. Целесообразно поступившие данные разбить на независимые между собой наборы наработок и меток. Следующее понятие является основным исходным понятием при построении статистической базы данных результатов испытаний и эксплуатации изделий.

**Порцией данных**  $X = (S_{ij}, \Gamma_{ij}, i = 1, \dots, I_j)$  называется набор значений случайных величин  $S_{ij}, \Gamma_{ij}$ , где  $j$  — номер порции,  $S_{ij}$  — получен-

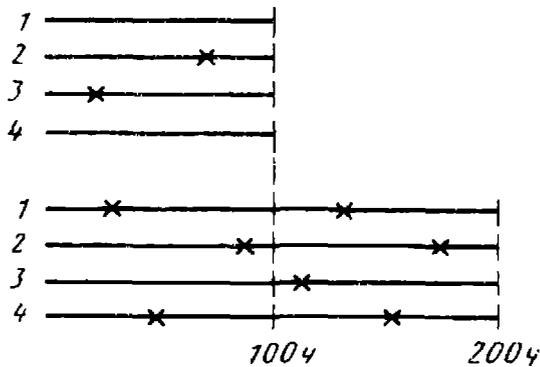


Рис. 3. Результаты первого и второго этапов испытаний

ная наработка,  $\Gamma_{ij}$  — метка, кодирующая причину прекращения наблюдений (тип отказа). Целесообразно рассматривать минимальные порции, которые нельзя разбить на две или более независимые порции.

В примере, соответствующем рис. 2, наработки  $S_1, \dots, S_{k+1}$  — взаимно зависимые, так как  $S_1 + \dots + S_{k+1} = t$ . Следовательно, весь набор чисел  $(S_1, 1; \dots; S_k, 1; S_{k+1}, -1)$  образует порцию. В примере с планом  $[N, B, T]$  каждое изделие испытывается независимо от других. Поэтому данные разбиваются на  $N$  порций  $(t_1, 1), \dots, (t_d, 1), (t, -1), \dots, (t, -1)$  без учета номеров испытанных изделий.

Проиллюстрируем понятие о порциях данных на числовом примере.

**Пример.** Испытания новых изделий проводились в два этапа. На первом этапе для испытаний подготовили четыре изделия. Для испытаний этих изделий были выделены четыре стендовых устройства, каждое из которых допускалось использовать в течение 100 ч. На стендовое устройство устанавливалось только одно изделие. В результате проведения испытаний выяснилось, что первое и четвертое изделие проработали без отказов 100 ч. Второе и третье изделия отказали соответственно через 71 и 29 ч. К моменту проведения второго этапа испытаний была подготовлена партия из 20 изделий того же типа. Для испытаний были выделены те же четыре стендовых устройства, каждое из которых использовалось в течение 200 ч. Было решено для получения большого количества данных эти стендовые уст-

ройства использовать непрерывно, мгновенно заменяя отказавшие изделия на годные новые. На первом стендовом устройстве отказы произошли после 27 и 121 ч испытаний, на втором — после 82 и 189 ч, на третьем — после 117 ч и на четвертом стендовом устройстве — после 43 и 154 ч. Оставшиеся 9 изделий на втором этапе не прошли испытаний. Результаты испытаний показаны на рис. 3. Крестики соответствуют моментам наступления отказов, а цифры 1, 2, 3, 4 — номерам стендовых устройств. Первый этап соответствует плану  $[N, B, t]$ ,  $N = 4$ ,  $t = 100$  ч. Второй этап соответствует наблюдению четырех реализаций процессов восстановления, т. е. соответствует плану  $[N, B, t]$ ,  $N = 4$ ,  $t = 200$  ч. Полученным наработкам, закончившимся отказами, сопоставим метки, равные 1, а — цензурированным наработкам в связи с исчерпанием времени испытаний — метки, равные -1. Например, на втором этапе второе изделие, испытывавшееся на первом стендовом устройстве, имело наработку 121 ч — 27 ч = 94 ч и метку  $\Gamma = 1$ . Считая продолжительности безотказной работы для разных изделий независимыми, на первом этапе испытаний получим четыре порции данных

$$X_1 = (S_{1,1} = 100, \Gamma_{1,1} = -1);$$

$$X_2 = (S_{1,2} = 71, \Gamma_{1,2} = 1);$$

$$X_3 = (S_{1,3} = 29, \Gamma_{1,3} = 1);$$

$$X_4 = (S_{1,4} = 100, \Gamma_{1,4} = -1)$$

и четыре на втором этапе испытаний

$$X_5 = (S_{1,5} = 27, \Gamma_{1,5} = 1; S_{2,5} = 94, \Gamma_{2,5} = 1; S_{3,5} = 79, \Gamma_{3,5} = -1);$$

$$X_6 = (S_{1,6} = 82, \Gamma_{1,6} = 1; S_{2,6} = 107, \Gamma_{2,6} = 1; S_{3,6} = 11, \Gamma_{3,6} = -1);$$

$$X_7 = (S_{1,7} = 117, \Gamma_{1,7} = 1;$$

$$S_{2,7} = 83, \Gamma_{2,7} = -1);$$

$$X_8 = (S_{1,8} = 43, \Gamma_{1,8} = 1; S_{2,8} = 111,$$

$$\Gamma_{2,8} = 1; S_{3,8} = 46, \Gamma_{3,8} = -1).$$

Среди пятнадцати полученных наработок две наработки  $S_{1,1}$  и  $S_{1,4}$  имеют одинаковые значения.

Разбиение накапливаемых данных на порции дает возможность стандартизовать процесс накопления и обработки данных на ЭВМ и дать четкие формулировки основных математических утверждений о свойствах статистических выводов.

Дадим краткое описание типовых моделей сбора данных, для которых допустимо применение описываемых методов.

**Модели плановых испытаний.** Данные о надежности могут накапливаться в результате последовательности испытаний. Например, из определенного объема однотипных изделий берутся выборки объема  $N$ . Отобранные изделия испытываются по плану  $[N, B, r]$ , т. е. испытания продолжаются до момента регистрации  $r$ -го отказа. Результаты испытаний  $j$ -й выборки дают порцию  $X_j = (S_{1j}, 1; S_{2j}, 1, \dots; S_{rj}, 1; S_{r+1j}, -1; \dots; S_{Nj}, -1)$ , в которой первые  $r$  значений наработок совпадают с моментами отказов и имеют метки  $\Gamma_{ij} = 1$ . Последние  $N - r$  наработок совпадают с моментом  $r$ -го отказа и снабжены метками  $\Gamma_{ij} = -1$ . Эти  $N - r$  изделий за время испытаний не имели отказов. Случай, когда данные соответствуют плану  $[N, B, T]$ , рассмотрен в примере на с. 23. К рассматриваемому классу моделей накопления данных относятся многие планы типа  $B$ , т. е. без замены отказавших во время испытаний изделий, когда момент прекращения испытаний может зависеть от уже наступивших моментов отказов. Допускается возможность снятия с испытаний заданного числа изделий в заранее запланированные моменты времени (цензурирование I рода) или в моменты отказов испытываемых изделий (цензурирование II рода). В моделях планового накопления данных возможно использование различных планов. Например, одна часть порций будет получена по планам  $[n_j, B, r_j]$ , а другая часть — по планам  $[n_j, B, t_j]$ , где  $j$  — номер испытания.

**Модели независимых конкурирующих рисков.** В таких моделях исходят из того, что испытываемые изделия

состоят из  $r$  частей — блоков  $B_1, \dots, B_r$ . Отказ любого из блоков приводит к отказу изделия. Пусть  $t_{ij}$  — момент отказа блока  $B_i$  у изделия с номером  $j$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Тогда отказ  $j$ -го изделия наступит в момент  $t_j = \min(t_{ij}; i = 1, \dots, r)$ . Считая известным тип отказавшего блока, снабдим наработку  $t_j$  меткой  $\Gamma_j = 1$ , если  $t_j = t_{1j}$ . В этом случае причиной отказа изделия является отказ блока  $B_1$ . Если испытания ведутся до наступления отказа, то в результате испытания изделия с номером  $j$  получим порцию данных  $(t_j, 1)$ . В результате испытаний  $N$  изделий получим  $N$  таких порций. В моделях независимых конкурирующих рисков предполагается, что  $t_{ij}$  — продолжительности безотказной работы блоков — являются независимыми случайными величинами.

**Модели с назначенными моментами цензурирования.** В таких моделях предполагается, что для изделия с номером  $j$  до испытаний назначается момент цензурирования  $u_j$ . Момент отказа  $t_j$  становится известным только в случае, когда  $t_j \leq u_j$ . В результате испытаний  $j$ -го изделия получается порция данных  $(S_j, 1)$ , если  $S_j = \min(t_j, u_j) = t_j$ , или порция  $(S_j, -1)$ , если  $S_j = u_j < t_j$ .

Пусть в процессе эксплуатации изделий при достижении ими заданного значения наработки  $t_{п.п}$  проводится плановая профилактика с полным восстановлением. Если до достижения наработки  $t_{п.п}$  произойдет отказ, то проводится ремонт с полным восстановлением. Тогда накопление данных соответствует модели с назначенными моментами цензурирования.

**Модели случайного поступления.** В таких моделях наблюдения за  $N$  эксплуатируемыми изделиями начинаются в момент  $t_0$  и заканчиваются в момент  $t$ . Изделия, за которыми ведется наблюдение, начинают эксплуатироваться в случайные моменты времени  $t_1, \dots, t_N$ ,  $t_0 \leq t_1 < \dots < t_N < t$ . Момент отказа  $t_j^*$  изделия, которое начало эксплуатироваться в момент  $t_i$ , становится известным, если  $t_j^* \leq t$ . В этом случае наработка до отказа равна  $S_j = t_j^* - t_j$ . Если же

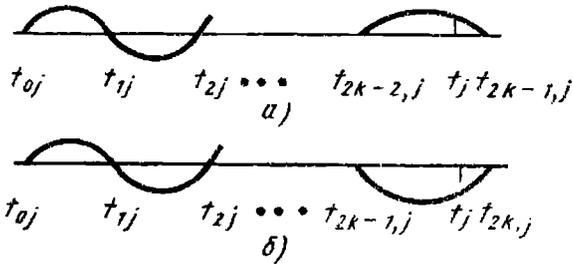


Рис. 4. Две реализации альтернирующих процессов, когда момент  $t_j$  прекращения наблюдения соответствует: а — периоду работы; б — периоду ремонта

$t_j^* > t$ , то известно лишь, что в течение времени  $S_j = t - t_j$  изделие проработало без отказа. Допустим, что продолжительность безотказной работы  $t_j^* > t_j$  не зависит от моментов  $t_1, \dots, t_N$ . Тогда наблюдение за  $i$ -м изделием дает порцию  $(S_j, \Gamma_j)$ , где  $\Gamma_j = 1$ , если  $t_j^* \leq t$ ,  $\Gamma_j = -1$ , если  $t_j^* > t$ ,  $S_j = \min(t - t_j, t_j^* - t_j)$ . Наблюдения за  $N$  изделиями дадут  $N$  порций  $(S_1, \Gamma_1), \dots, (S_N, \Gamma_N)$ .

Перечисленные выше модели сбора данных допускают получение статистических выводов в рамках теории мартингалов. Однако на практике могут быть использованы и другие модели сбора данных, для которых необходимо применение других методов. Приведем примеры таких моделей.

**Модели альтернирующих процессов.** Сбор данных в ходе эксплуатации изделий можно описать с помощью альтернирующих процессов. Допустим, что на интервале времени  $[0, t_j]$  наблюдается альтернирующий точечный процесс. Этот процесс задается последовательностью моментов времени  $t_{0j} = 0 < t_{1j} < t_{2j} < \dots < t_{nj} < \dots$ . В момент  $t_{0j} = 0$  в работу включается первое изделие, которое отказывает в момент  $t_{1j}$ . За время от момента отказа  $t_{1j}$  до момента  $t_{2j}$  производится устранение отказа — замена изделия на идентичное годное или полное восстановление (ремонт). Второе изделие отказывает в момент  $t_{3j}$ . Замена отказавшего изделия на годное или ремонт завершается в момент  $t_{4j}$  и т. д. Моменты  $t_{0j}, t_{2j}, \dots, t_{2k,j}$  соответствуют началу работы очередного восстановленного изделия. Моменты  $t_{1j}, t_{3j}, \dots, t_{2k-1,j}$  яв-

ляются моментами отказов. Предполагается, что все интервалы работы  $t_{2k-1,j} - t_{2k-2,j}$  и продолжительности ремонта  $t_{2k,j} - t_{2k-1,j}$ ,  $k = 1, 2$ , являются независимыми случайными величинами. Наблюдению альтернирующего процесса на интервале  $(0, t_j)$  соответствует порция  $X_j = (S_{ij}, \Gamma_{ij}, i = 1, \dots, l_j)$ , в которой наработки  $S_{ij} = t_{ij} - t_{i-1,j}$  снабжены метками  $\Gamma_{ij} = +1$  для  $i = 2k - 1$ ;  $\Gamma_{ij} = +2$  для  $i = 2k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  и  $t_{ij} \leq t_j$ . Если же  $t_{i-1,j} < t_j < t_{ij}$ , то  $S_{ij} = t_j - t_{i-1,j}$ ,  $\Gamma_{ij} = -1$  для  $i = 2k - 1$ ;  $\Gamma_{ij} = -2$  для  $i = 2k$ . Значение  $l_j = \max\{i : t_{ij} \leq t_j\} + 1$ . Возможные случаи расположения точек  $t_{ij}$  показаны на рис. 4 (а, б). Альтернирующие процессы являются упрощенными моделями, описывающими эксплуатацию изделий (элементов, систем и т. п.), полностью восстанавливаемых в результате ремонта или заменяемых на новые при наступлении отказов.

**Модели с кратными отказами.** Пусть система состоит из  $r$  элементов различных типов. Продолжительности работы различных элементов до наступления отказов предполагаются независимыми случайными величинами. Отказ элемента  $i$ -го типа с вероятностью  $p_i$  может привести к одновременному выводу из строя и необходимости замены элементов, тип которых принадлежит известному подмножеству  $B_i \subset (1, \dots, r)$ . Такие отказы называются кратными. С целью упрощения обозначений рассмотрим систему, состоящую из двух элементов разных типов,  $r = 2$ . Предполагается, что замены производятся мгновенно. Допустим, что наблюдения ведутся на интервале  $[0, t_j]$ . Типичная реализация наблюдаемых данных показана на рис. 5. На верхней прямой отмечены моменты отказов и замен элементов первого типа, на нижней прямой — элементов второго типа. В момент  $t_{4j}$  произошел кратный отказ элемента первого типа, который привел к отказу элемента второго типа и его замене. В момент  $t_{7j}$  произошел кратный отказ элемента второго типа. По полученным данным составляется порция  $X_j = (S_{ij}, \Gamma_{ij}, i = 1, \dots, l_j)$ , в которой  $l_j$  равно числу всех полученных

наработок. В примере данных, показанных на рис. 5,  $l_j = 7 + 2 + 2 = 11$ , т. е. равно 7 наработкам до отказов плюс две наработки до замен в результате кратных отказов, плюс две наработки без отказов до завершающего эти наблюдения момента  $t_j$ . Если наработке  $S_{ij}$  соответствует отказ, то метка  $\Gamma_{ij} = l$  определяется типом  $l$  отказавшего элемента. В рассматриваемом примере  $l = 1, 2$ . Если же наработка  $S_{ij}$  связана с заменой или завершением наблюдений, то  $\Gamma_{ij} = -l$ .

Разновидностью моделей с кратными отказами является модель вложенных процессов восстановления, в которой отказ элемента типа  $l$  с вероятностью, равной единице, приводит к отказу элементов типов  $l+1, l+2, \dots, r$ . Типичная реализация такого процесса показана на рис. 6. Цифры у дуг, соответствующих интервалам безотказной работы, обозначают тип элемента  $l = 1, 2, 3$ .

Порции данных, для которых выполняются требуемые ниже в разд. 4 и 5 условия, соответствуют результатам наблюдений систем, эволюция которых описывается полумарковскими процессами, а также результатам наблюдений систем массового обслуживания с относительными приоритетами. В модели альтернирующего процесса допустимо введение меток для полученных интервалов работы согласно модели независимых конкурирующих рисков. Это целесообразно в том случае, когда изделия имеют структуру последовательной цепочки из  $r$  независимых блоков. Длительностям интервалов работы, незавершенным в связи с прекращением наблюдений, соответствует метка, равная  $r+1$ ,

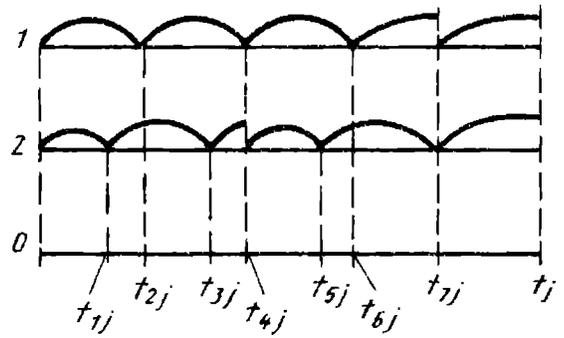


Рис. 5. Данные о работе двух устройств (1, 2) с кратными отказами

а длительностям интервалов ремонта — метка  $r+1$ .

**Образование массивов данных.** Если данные о надежности изделий, поступающие в архив, не представлены в виде порций, то преобразование этих данных к стандартному виду порций осуществляется с помощью программы предварительной обработки данных. Каждой модели накопления данных соответствует программа предварительной обработки данных. Образование порций является первым этапом машинной обработки данных.

Для расчета показателей надежности определенного типа изделий и определенного типа отказа следует отобрать только те порции, которые содержат необходимую информацию. Отбор таких порций также проводится с использованием соответствующих программ предварительной обработки данных. Для получения информации об отказах, кодированных меткой  $l$ , для каждой порции  $X_j$  должно быть определено подмножество  $A_{lj}$  значений меток  $\Gamma_{ij}$ ;  $l$  не входит в  $A_{lj}$ . Вид подмножества  $A_{lj}$  зависит от модели сбора данных и определяется на основе вводимого в разд. 3 понятия дискретной разделимости. Если в порции  $X_j$

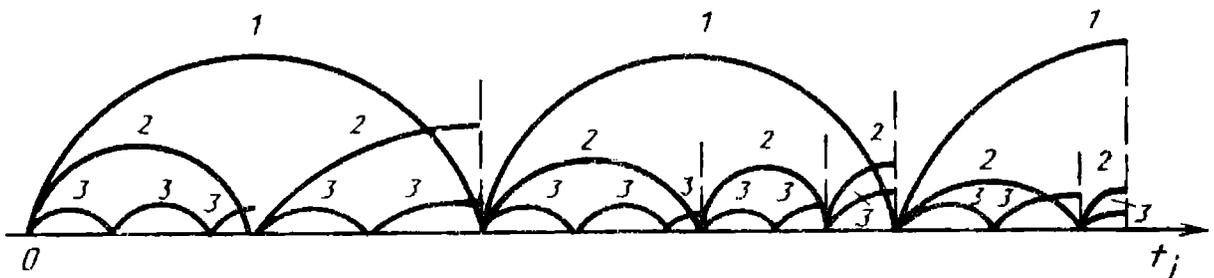


Рис. 6. Реализация модели вложенных процессов восстановления элементов трех типов  $l = 1, 2, 3$

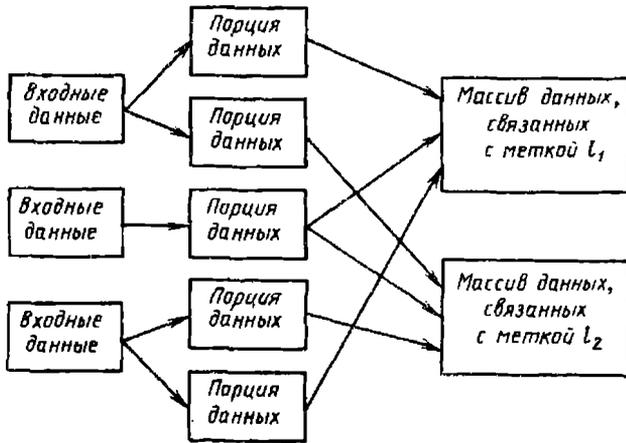


Рис. 7. Процесс формирования базы статистических данных о надежности изделий

имеется наработка  $S_{ij}$  с меткой  $\Gamma_{ij}$ , значение которой равно  $l$  или входит в  $A_{ij}$  ( $\Gamma_{ij} \in A_{ij} \cup l$ ), то такая порция содержит нужную информацию. В моделях независимых конкурирующих рисков  $A_{ij} = (1, 2, \dots, r)/l$ ; в моделях альтернирующих процессов  $A_{ij} = (-l)$ ,  $l = 1, 2$ . При расчете показателей изделий с разными типами отказов, кодированных метками  $l_1, \dots, l_k$ , информацию содержат все порции, в которых метки

$$\Gamma_{ij} \in \bigcup_{h=1}^k (A_{l_h, j} \cup l_h).$$

Массивом данных  $Y_l = (X_1, \dots, X_m)$ , связанных с меткой  $l$  (набором меток  $l_1, \dots, l_k$ ), называется последовательность всех порций  $X_j$ , в которых имеются наработки с меткой  $l$  (набором меток  $l_1, \dots, l_k$ ) или с меткой из подмножеств  $A_{ij}$  (объединения подмножеств  $A_{l_h, j}$ ,  $h = 1, \dots, k$ ,  $j = 1, \dots, m$ ).

Образование массива данных, связанного с меткой  $l$  или заданным набором меток, соответствует второму этапу машинной обработки данных.

Процесс формирования базы статистических данных о надежности изделий схематически показан на рис. 7.

### 3. ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ И ФУНКЦИИ РЕСУРСА

Дискретно-разделимые модели. Продолжительность безотказной работы каждого изделия, испытываемого до

наступления отказа, является случайной величиной, ф. р. которой определяется типом изделия. Если изделие имеет отказы разных типов, то каждому типу отказа соответствует своя случайная величина, равная времени до наступления данного типа отказа. Предполагается, что случайные величины, соответствующие различным типам отказов, являются взаимно независимыми. Если отказ изделия кодируется меткой  $l$ , то соответствующая ф. р. обозначается  $F_l(\cdot)$ , а ее значение в точке  $s$  как  $F_l(s)$ . Тогда вероятность отсутствия отказа в течение времени  $s$  равна  $\bar{F}_l(s) = 1 - F_l(s)$ . Точечные и интервальные оценки для значения ф. р. и других связанных с ними показателей надежности рассчитываются на основе соответствующих меткам  $l$  массивов данных методом максимального правдоподобия. Для того чтобы воспользоваться этим методом надо иметь достаточно полное описание исходной статической модели. Статическая модель для порции данных определена заданием возможных значений порции  $X_j = \{X_j\}$  семейства вероятностных распределений  $\mathcal{P}_j = \{P_j\}$ . Элементы, составляющие  $X_j$ , имеют вид  $X_j = (S_{ij}, \Gamma_{ij}, i = 1, \dots, l_j)$ , где  $S_{ij} > 0$ ,  $\Gamma_{ij} \in (\pm 1, \dots, \pm r)$ . Каждое распределение семейства  $\mathcal{P}_j$  определяются заданием набора ф. р.  $F = (F_1(\cdot), \dots, F_r(\cdot))$  и некоторого параметра  $\theta$ , который также может быть представлен набором других ф. р. Параметр  $\theta$  называется мешающим, так как он влияет на значения вероятностей событий  $P_{F, \theta}(X_j \in A)$ , но не представляет интереса для исследователя. На ф. р.  $F_l(\cdot) \in F$  не накладывают никаких ограничений. Эти ф. р. являются произвольными при любом возможном значении мешающего параметра. Распределение из  $\mathcal{P}_j$ , соответствующее паре  $F, \theta$ , обозначается  $P_{F, \theta}$ .

Введем следующие обозначения:  $1(A)$  — индикатор события  $A$ : если  $A$  выполнено, то  $1(A) = 1$ , в противном случае  $1(A) = 0$ ;  $g(u -) = \lim_{h \rightarrow 0} g(u - h)$  — предел слева, а  $g(u +) = \lim_{h \rightarrow 0} g(u + h)$  — предел

справа значений функции  $g$ ;  $\Delta g(u) = g(u+) - g(u-) -$  величина скачка функции  $g$  в точке  $u$ .  $F_l$  предполагаются непрерывными справа, т. е.  $F_l(u) = F_l(u+)$ . Поэтому  $\Delta F_l(u) = F_l(u) - F_l(u-) = \bar{F}_l(u-) - \bar{F}_l(u) -$  вероятность того, что отказ с меткой  $l$  наступит в момент  $u$ .

Следующее свойство ограничивает класс статических моделей для порций. Этот класс допускает построение сравнительно простой теории непараметрического оценивания.

Семейство распределений  $\mathcal{P}_j = \{P_{F, \theta, j}\}$  называется  $F_l$ -дискретно-разделимым, если для любого значения порции  $X_j \in X$  найдется пара  $F, \theta$ , что

$$P_{F, \theta, l}(X_j) > 0 \text{ и}$$

$$P_{F, \theta, l}(X_j) = \prod_{i=1}^{l_j} [\Delta F_l(S_{ij})]^{I_{ij=l}} \times$$

$$\times [\bar{F}_l(S_{ij})]^{I_{ij \in A_{lj}}} C_{F, \theta}(X_j), \quad (1)$$

где  $A_{lj} \subset (\pm 1, \dots, \pm r) \setminus l$ ,  $A_{lj} \neq \emptyset$  — непустое, сомножитель  $C_{F, \theta}(X_j)$  не зависит от ф. р.  $F_l$ ,  $F' = (F_1, \dots, F_{l-1}, F_{l+1}, \dots, F_r)$ , для любых значений скачков  $\Delta F_l(S_{ij}) > 0$ ,  $\sum_{i=1}^{l_j} \Delta F_l(S_{ij}) \leq 1$  найдется пара  $F, \theta$ , для которой выполняется условие (1).

Статическую модель накопления (сбора) данных назовем  $(l_1, \dots, l_k)$  — дискретно-разделимой моделью, если в массиве данных  $Y_l = (X_1, \dots, X_m)$ , который связан с метками  $l_1, \dots, l_k$ , для любой порции  $X_j \in Y_l$  семейство распределений  $\mathcal{P}_j$  является  $F_l$ -дискретно-разделимым для тех же значений меток  $l = l_1, \dots, l_k$ . Все приведенные в разд. 2 модели сбора данных о надежности изделий являются дискретно-разделимыми моделями.

**Пример.** Накопление данных ведется по результатам наблюдений  $m$  независимых альтернирующих процессов на интервалах  $[0, t_j]$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Такая модель накопления данных яв-

ляется дискретно-разделимой моделью. Строение порций  $X_j$  подробно описано на с. 26. Длительности безотказной работы и ремонта являются независимыми случайными величинами с ф. р., равными соответственно  $F_1(\cdot)$  и  $F_2(\cdot)$ . Рассмотрим такие ф. р., что для всех значений наработок  $S_{ij}$ ,  $\Gamma_{ij=l} > 0$  скачки  $\Delta F_l(S_{ij}) > 0$ , а для незавершенных интервалов работы и ремонта  $S_{ij, j}$ ,  $\Gamma_{ij, j} = -l$ ,  $\bar{F}_l(S_{ij}) > 0$ . Выражение

$$[\Delta F_1(S_{ij})]^{I_{ij=1}} \times$$

$$\times [\Delta F_2(S_{ij, j})]^{I_{ij=2}}$$

равно  $\Delta F_1(S_{ij})$ , если  $\Gamma_{ij} = 1$ , или равно  $\Delta F_2(S_{ij})$ , если  $\Gamma_{ij} = 2$ . На последнем интервале длины  $S_{ij, j}$  отсутствуют отказы если это интервал работы. Если же  $S_{ij, j}$  соответствует интервалу ремонта, то не происходит завершения ремонта. Вероятность таких событий записывается в виде произведения

$$[\bar{F}_1(S_{ij, j})]^{I_{ij, j=-1}} \times$$

$$\times [\bar{F}_2(S_{ij})]^{I_{ij, j=-2}}.$$

Учитывая независимость продолжительности времен работы и ремонта, получаем вероятность наблюдений порций  $X_j$

$$P_{F_1, F_2}(X_j) =$$

$$= \prod_{l=1, 2} \prod_{i=1}^{l_j} [\Delta F_l(S_{ij})]^{I_{ij=l}} \times$$

$$\times [\bar{F}_l(S_{ij})]^{I_{ij=-l}} > 0. \quad (2)$$

Если в качестве первого сомножителя в выражении (2) записать члены, определяемые  $F_l$ , то выражение (2) соответствует (1), когда

$$A_{lj} = (-l), \quad F' = (F_1, F_2) \setminus F_l =$$

$$= F_{l'}, \quad l' \neq l,$$

$$C_{F'} = [\Delta F_{l'}(S_{ij})]^{I_{ij=l'}} \times$$

$$\times [\bar{F}_{l'}(S_{ij})]^{I_{ij=-l'}} > 0.$$

Величины положительных скачков могут быть выбраны любыми. Таким образом, каждая порция  $X_j$  в модель

в целом обладает свойством  $l$ -дискретной разделимости,  $l = 1, 2$ .

Если при обработке данных необходима оценка только ф. р.  $F_1$ , то можно считать, что мешающий параметр  $\theta = F_2$ . В этом случае набор  $F = (F_1)$ . Если же надо получить выводы об обеих ф. р.  $F_1$  и  $F_2$ ,  $F = (F_1, F_2)$ , то мешающий параметр  $\theta$  отсутствует.

Обобщенный метод максимального правдоподобия. Для построения точечных оценок неизвестных ф. р.  $F_l$  следует использовать общие методы математической статистики, например метод максимального правдоподобия, требующий существования п. р. Однако непосредственно использовать этот метод нельзя, так как не все распределения  $P_j \in \mathcal{P}_j$  имеют плотности. Математики такие семейства распределений называют недоминируемыми. В связи с отсутствием плотности для массива  $Y_l$  вводится обобщенная функция правдоподобия

$$L(F_1, \theta_1; F_2, \theta_2; Y_l) = \frac{\prod_{j=1}^m P_{F_1, \theta_1}(X_j)}{\sum_{h=1,2} \prod_{j=1}^m P_{F_h, \theta_h}(X_j)},$$

где  $F_h, \theta_h$  — две пары значений наборов ф. р. и мешающих параметров. Обобщенный метод максимального правдоподобия состоит в поиске такой пары  $\hat{F}, \hat{\theta}$ , что для любой другой пары  $F, \theta$  выполняется неравенство

$$L(\hat{F}, \hat{\theta}; F, \theta; Y_l) \geq L(F, \theta; \hat{F}, \hat{\theta}; Y_l).$$

В рассматриваемых задачах нужно найти такую пару  $\hat{F}, \hat{\theta}$ , для которой

$$P_{\hat{F}, \hat{\theta}}(Y_l) = \max_{F, \theta} \prod_{j=1}^m P_{F, \theta}(X_j). \quad (3)$$

Пусть  $z_{l1}(m) < z_{l2}(m) < \dots < z_{ln}(m)$  — последовательность чисел,

$$D_l(Y_l) = \begin{pmatrix} z_{l1}(m) & z_{l2}(m) & z_{ln}(m) \\ f_{l1}(m) & f_{l2}(m) & f_{ln}(m) \\ c_{l1}(m) & c_{l2}(m) & c_{ln}(m) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

полученных упорядочением по величине всех наработок  $S_{ij}$ , входящих в массив  $Y_l$ , у которых  $\Gamma_{ij} \in l \cup A_{lj}$ ,  $n = n_l(m)$ . Каждому значению  $z_{lh}(m)$  соответствует хотя бы одна наработка с меткой  $\Gamma_{ij} \in l \cup A_{lj}$ . Выразим число наработок  $S_{ij}$ , равных  $z_{lh}(m)$ , с меткой  $\Gamma_{ij} = l$  через  $f_{lh}(m)$ , с меткой  $\Gamma_{ij} \in A_{lj}$  — через  $c_{lh}(m)$ , т. е.

$$f_{lh}(m) = \sum_{i=1}^m \sum_{t=1}^l 1(S_{ij} = z_{lh}(m), \Gamma_{ij} = l), \quad (4)$$

$$c_{lh}(m) = \sum_{i=1}^m \sum_{t=1}^{l_j} 1(S_{ij} = z_{lh}(m), \Gamma_{ij} \in A_{lj}). \quad (5)$$

Из этих выражений и формулы (1) вытекает, что вероятность наблюдения массива  $Y_l$

$$P_{F, \theta}(Y_l) = \prod_{j=1}^m P_{F, \theta}(X_j) = \prod_{h=1}^k [\Delta F_l(z_{lh}(m))]^{f_{lh}(m)} \times [\bar{F}_l(z_{lh}(m))]^{c_{lh}(m)} \times \prod_{j=1}^m C_{F, \theta}(X_j) > 0. \quad (6)$$

Из выражений (3) и (6) следует, что обобщенной оценке максимального правдоподобия  $\hat{F}_l(\cdot)$  соответствует максимум выражения

$$\prod_{h=1}^n [\Delta F_l(z_{lh}(m))]^{f_{lh}(m)} \times [\bar{F}_l(z_{lh}(m))]^{c_{lh}(m)}.$$

Статистические данные из массива  $Y_l$ , которые определяют обобщенную оценку максимального правдоподобия ф. р.  $F_l$ , удобно представить в вид таблицы

порой первая строка соответ- значениям полученных нара- а вторая образована числами лок, имеющих метку  $l$ , третья т соответствует числу наработок ами из  $\cup A_{lj}$ , т. е. наработкам, е не завершились отказом типа  $n_l(m)$ .

$$D(Y_l) = \begin{pmatrix} 11 & 27 & 29 & 43 & 46 & 71 & 79 & 82 & 83 & 94 & 100 & 107 & 111 & 117 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

им, что в этой порядковой таб- объединены результаты, полу- с использованием разных пла- испытаний.

таблица порядковых таблиц. В по- вой таблице  $D_l(Y_l)$  сконцентри- информация, имеющая отно- к ф. р.  $F_l(\cdot)$ . Если порядковая та  $D_l(Y_l)$  уже рассчитана и хра- в памяти ЭВМ, то при поступле- чередной порции данных  $X_{m+1}$  уется порядковая таблица  $m+1$ ), которая агрегируется с ей  $D_l(Y_l)$  в таблицу  $D_l(Y'_l)$  на  $Y'_l = (X_1, \dots, X_m, X_{m+1})$ . этого надо таблицы  $D_l(Y_l)$  и  $m+1$ ) рассмотреть как совокуп- столбцов. Эти столбцы, образо- значениями  $z$ ,  $f$  и  $c$ , следует дочить по величине  $z$ . Если два ка из  $D_l(Y_l)$  и  $D_l(X_{m+1})$  имеют шковые значения  $z$ , то из них следует образовать один столбец с об- щим значением  $z$ , суммируя сначала значения  $f$ , а затем значения  $c$ , вхо- дящие в эти столбцы.

Множительная оценка вероятности безотказной работы. Каждому значе- нию  $s$  поставим в соответствие цело- численную величину

$$N_l(m, s) = \sum_{h: z_{lh}(m) > s} [f_{lh}(m) + c_{lh}(m)]. \quad (9)$$

Пусть статистическая модель на- опления данных является  $l$ -дискрет- но-разделимой. Тогда обобщенная оценка максимального правдоподобия вероятности безотказной работы  $\bar{F}_l(s)$

Таблица данных, задаваемая выра- жением (7), называется порядко- вой таблицей, связанной с мет- кой  $l$ .

Пример. Порядковая таблица, по- строенная на основе восьми порций данных двухэтапных испытаний, при- веденных в примере на с. 24, имеет вид

в течение времени  $s$  задается выраже- нием

$$\widehat{\bar{F}}_l(s) = \prod_{h=1}^{n(s)} \left( 1 - \frac{f_{lh}(m)}{N_l(m, z_{lh}(m))} \right), \quad (10)$$

где  $n(s) = \max \{h : z_{lh}(m) \leq s\}$ ;  $N_l(m, z_{lh}(m))$  — число, определяемое выражением (9);  $f_{lh}(m)$ ,  $c_{lh}(m)$  — числа, входящие в столбцы порядковой таблицы (7) и определяемые по фор- мулам (4), (5).

Оценка  $\widehat{\bar{F}}_l(s)$ , заданная произведе- нием (10), и оценка  $\widehat{F}_l(s) = 1 - \widehat{\bar{F}}_l(s)$  называются множительными оценками для  $\bar{F}_l(s)$  и  $F_l(s)$  соответственно.

Выражение (10) дает значение оценки  $\widehat{\bar{F}}_l(s)$  в заданной точке  $s$ . Как функция аргумента  $s$  оценка  $\widehat{\bar{F}}_l(s)$  является непрерывной справа невозрастающей ступенчатой функцией, скачки которой происходят лишь в тех точках  $z_{lh}(m)$ , составляющих первую строку табл. (7), которым соответствуют значения  $f_{lh}(m) > 0$ . Расчет значений  $\widehat{\bar{F}}_l(z_{lh}(m))$  производится следующим образом. Если значение  $\widehat{\bar{F}}_l(z_{l, h-1}(m))$  найдено, то значение  $\widehat{\bar{F}}_l(z_{lh}(m))$  вычисляется по формуле

$$\widehat{\bar{F}}_l(z_{lh}(m)) = \widehat{\bar{F}}_l(z_{l, h-1}(m)) \times (1 - f_{lh}(m)/N_l(m, z_{lh}(m))), \quad (11)$$

где  $z_{l,0}(m) = 0$ ,  $\widehat{\bar{F}}_{l,0}(0) = 1$ ,

Величина скачка множительной оценки  $\widehat{F}_l$  в точке  $z_{lh}(m)$  согласно формуле (10)

$$\begin{aligned} p_{lh}(m) &= \Delta F_l(z_{lh}(m)) = \\ &= \widehat{F}_l(z_{l, h-1}(m)) \frac{f_{lh}(m)}{N_l(m, z_{lh}(m))}. \end{aligned} \quad (12)$$

Только в случае, когда момент самой большой наблюдаемой наработки  $z_{ln}(m)$  не совпадает с неполной наработкой, т. е.  $c_{ln}(m) = 0$ , множительная оценка  $\widehat{F}_l(\cdot)$  является собственной ф. р. Это означает, что  $\widehat{F}_l(s) \equiv 1$  для  $s \geq z_{ln}(m)$ . В противном случае максимальное значение  $\widehat{F}_l(s)$  строго меньше единицы.

Пример. Проиллюстрируем расчет множительной оценки на основе порядковой табл. (8), полученной по результатам двухэтапных испытаний. Ниже индекс  $l = 1$  опускается. На интервале  $[0, 27] \widehat{F}(s) \equiv 1$ . По формуле (11) находим  $\widehat{F}(27) = 1(1 - 1/14) = 0,9286$ . Здесь и далее результаты вычислений даны с точностью до 0,0001. Число  $N(27) = 14$  получается суммированием всех чисел во второй и третьей строках порядковой таблицы (8), начиная со второго столбца. На интервале  $[27, 29] \widehat{F}(s) = \widehat{F}(27)$ . Для значения  $s = 29$  находим  $\widehat{F}(29) = \widehat{F}(27)(1 - 1/13) = 0,8571$ , для  $s = 43$  имеем  $\widehat{F}(43) = \widehat{F}(29)(1 - 1/12) = 0,7857$ . В точке  $s = 46$  скачок отсутствует, так как  $f_5(8) = 0$ . Следовательно, для  $s \in [43, 71] \widehat{F}(s) = 0,7857$ . Далее  $\widehat{F}(71) = \widehat{F}(43)(1 - 1/10) = 0,7071$ ,  $\widehat{F}(71) = \widehat{F}(79) = 0,7071$ ,  $\widehat{F}(82) = \widehat{F}(83) = \widehat{F}(71) \times (1 - 1/8) = 0,6188$ ,  $\widehat{F}(94) = \widehat{F}(100) = \widehat{F}(82)(1 - 1/6) = 0,5156$ ,  $\widehat{F}(107) = \widehat{F}(94)(1 - 1/3) = 0,3438$ ,  $\widehat{F}(111) = \widehat{F}(107)(1 - 1/2) = 0,1719$ ,  $\widehat{F}(117) = 0$ .

Алгоритм перераспределения «весов». Для расчета величин скачков  $p_{lh}(m)$  множительной оценки  $\widehat{F}_l$  рекомендуется использовать алгоритм перераспределения «весов». Алгоритм завершается за конечное число шагов  $n$ , равное числу столбцов порядковой табл. (7). Дадим описание этого алгоритма. Пусть задана порядковая табл. (7). Числам  $z_{lh}(m)$  поставим в соответствие числа  $u_h = f_{lh}(m) + c_{lh}(m)$ , суммарные числа  $v_h = u_h + u_{h+1} + \dots + u_n$ , а также исходный «вес»  $p_{lh}(0) = u_h/v_1$ ,  $h = 1, \dots, n$ . Пусть  $p_{lh}(k)$  — «вес» точки  $z_{lh}(m)$ , полученный в результате шага с номером  $k = 1, \dots, n$ . Первый шаг связан с первым слева столбцом табл. (7). Если  $c_{l1}(m) > 0$ , то полагаем «вес» точки  $z_{l1}(m)$  равным  $p_{l1}(1) = \frac{f_{l1}(m)}{u_1} p_{l1}(0)$ . Оставшуюся часть «веса»  $\frac{c_{l1}(m)}{u_1} p_{l1}^*(0)$  распределяем между точками  $z_{lh}(m)$ ,  $h > 1$  пропорционально числам  $u_h$ , т. е. полагаем «вес» точки  $z_{lh}(m)$ ,  $h > 1$

$$\begin{aligned} p_{lh}^*(1) &= p_{lh}^*(0) + \frac{c_{l1}(m)}{u_1} p_{l1}^*(0) \times \\ &\times \frac{u_h}{v_2}, \quad h = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

На втором шаге «вес» точки  $z_{l1}(m)$  не меняем, т. е.  $p_{l1}^*(2) = p_{l1}^*(1)$ . Точке  $z_{l2}(m)$  поставим в соответствие «вес»  $p_{l2}^*(2) = \frac{f_{l2}(m)}{u_2} p_{l2}^*(1)$ . Оставшуюся часть «веса»  $\frac{c_{l2}(m)}{u_2} p_{l2}^*(1)$  распределяем между точками  $z_{lh}(m)$ ,  $h > 2$  пропорционально числам  $u_h$ , т. е. полагаем

$$\begin{aligned} p_{lh}^*(2) &= p_{lh}^*(1) + \frac{c_{l2}(m)}{u_2} p_{l2}^*(1) \times \\ &\times \frac{u_h}{v_3}, \quad h = 3, \dots, n. \end{aligned}$$

На  $k$ -м шаге «веса» точек  $z_{lh}(m)$ ,  $h < k$  не меняем, т. е.  $p_{lh}^*(k) =$

## 1. Результаты расчета по алгоритму перераспределения «весов»

$z_{lh}(m)$	$f_{lh}(m)$	$u_h$	$p_{lh}(0)$	Номер шага алгоритма				
				1—4	5, 6	7, 8	9, 10	11—14
11	0	1	1/15	0	0	0	0	0
27	1	1	1/15	1/15 + 1/210	0,07143	0,07143	0,07143	0,07143
29	1	1	1/15	1/15 + 1/210	0,07143	0,07143	0,07143	0,07143
43	1	1	1/15	1/15 + 1/210	0,07143	0,07143	0,07143	0,07143
46	0	1	1/15	1/15 + 1/210	0	0	0	0
71	1	1	1/15	1/15 + 1/210	0,07857	0,07857	0,07857	0,07857
79	0	1	1/15	1/15 + 1/210	0,07857	0	0	0
82	1	1	1/15	1/15 + 1/210	0,07857	0,08839	0,08839	0,08839
83	0	1	1/15	1/15 + 1/210	0,07857	0,08839	0	0
94	1	1	1/15	1/15 + 1/210	0,07857	0,08839	0,10312	0,10312
100	0	2	2/15	2/15 + 2/210	0,15714	0,17679	0,20625	0
107	1	1	1/15	1/15 + 1/210	0,07857	0,08839	0,10312	0,17187
111	1	1	1/15	1/15 + 1/210	0,07857	0,08839	0,10312	0,17187
117	1	1	1/15	1/15 + 1/210	0,07857	0,08839	0,10312	0,17187

$p_{lh}^*(k-1)$ ,  $h < k$ . Далее полагаем

$$p_{lh}^*(k) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{f_{lh}(m)}{u_h} p_{lk}^*(k-1); \\ p_{lh}^*(k-1) + \frac{c_{lh}(m)}{u_h} p_{lk}^*(k-1) \times \\ \times \frac{u_h}{v_{h+1}}, \quad h = k+1, \dots, n. \end{array} \right.$$

На последнем  $n$ -м шаге полагаем  $p_{lh}^*(n) = p_{lh}^*(n-1)$ ,  $h = 1, \dots, n-1$ ,

$$p_{ln}^*(n) = \frac{f_{ln}(m)}{u_n} (n-1). \text{ Искомые}$$

значения  $p_{lh}(n) = \Delta \widehat{F}_l(z_{lh}(m)) = p_{lh}^*(n)$ ,  $h = 1, \dots, n$ , т. е. скачки множительной оценки совпадают с финальными значениями «весов».

Пример. Пусть исходные данные представлены порядковой таблицей (8). Расчет значений  $p_{lh}(m)$  на основе алгоритма перераспределения «весов» приложен в табл. 1. Шагу 0 соответствуют исходные значения «весов». Так как наработке 11 соответствует значение  $f_{lh}(m) = 0$ , то на первом шаге «вес» 1/15 наработки 11 распределяется

пропорционально значениям  $u_h$  среди всех наработок, больших 11, для которых сумма значений  $u_h$  равна 14. При этом всем наработкам, кроме наработки 100, сопоставляется «вес»  $1/15 + 1/(15 \cdot 14) = 0,07143$ . Наработке 100 сопоставляется «вес»  $2/15 + 2/(15 \times 14) = 0,14286$ . На втором, третьем и четвертом шагах «веса» наработок не меняются, так как у наработок 27, 29, 43 значение  $f_{lh}(m) = 1$ . «Вес» наработки 46, деленный на 10, добавляется к «весам» больших наработок и т. д. В последнем столбце табл. 1 даны значения окончательных «весов»  $p_{lh}(m)$ .

Оценка функции ресурса. Функция ресурса, соответствующая ф. р.  $F_l(\cdot)$ , определяется соотношением

$$\Lambda_l(s) = \int_0^s \frac{dF_l(u)}{F_l(u-)} \quad (13)$$

Значения  $s$ , при которых функция ресурса  $\Lambda_l$  имеет положительные скачки  $\Delta \Lambda_l(s) > 0$ , совпадают со значениями  $s$  скачков ф. р.  $F_l$ . Если выражение (13) рассматривать как уравнение относительно  $F_l$ , считая заданной неубывающую неотрицательную

функцию ресурса  $\Lambda_l$ , то решение этого уравнения имеет вид

$$\bar{F}_l(s) = \prod_{u \leq s} (1 - \Delta \Lambda_l(u)) e^{-\Delta_l^o(u)}, \quad (14)$$

где  $\Lambda_l^o(s) = \Lambda_l(s) - \sum_{u \leq s} \Delta \Lambda_l(u)$  — непрерывная компонента функции ресурса  $\Lambda_l(\cdot)$ .

Функция ресурса  $\Lambda_l(\cdot)$  является непрерывной тогда и только тогда, когда непрерывна ф. р.  $F_l(\cdot)$ . Если  $F_l(\cdot)$  непрерывная, то соотношения (13) и (14) принимают вид

$$\Lambda_l(s) = \ln(1/\bar{F}_l(s)), \quad \bar{F}_l(s) = e^{-\Lambda_l(s)}.$$

Оценка значения функции ресурса  $\Lambda_l(s)$ , рассчитанная на основе порядковой таблицы (7), задается формулой

$$\hat{\Lambda}_l(s) = \sum_{h: z_{lh}(m) \leq s} \frac{f_{lh}(m)}{N_l(m, z_{lh}(m))}. \quad (15)$$

Так как ф. р.  $\hat{F}_l(\cdot)$  однозначно определяет функцию ресурса  $\hat{\Lambda}_l$ , то  $\hat{\Lambda}_l(\cdot)$ , задаваемая формулой (15), также является обобщенной оценкой максимального правдоподобия, если вместо набора  $F = (F_1(\cdot), \dots, F_r(\cdot))$  рассматривать набор  $\Lambda = (\Lambda_1(\cdot), \dots, \Lambda_r(\cdot))$  в качестве набора, определяющего семейства распределений  $\mathcal{P}_j, j = 1, \dots, m$ .

Оценка функции ресурса  $\Lambda_l$ , определяемая выражением (15), называется аддитивной оценкой функции ресурса.

Значения скачков  $p_{lh}(m)$  используются для построения оценок плотности распределения  $f_l(s) = dF_l(s)/ds$ .

Значения аддитивной оценки  $\hat{\Lambda}_l(\cdot)$  используются для построения ядерных оценок функции интенсивности отказа  $\lambda_l(\cdot)$ , связанной с меткой  $l$  (см. с. 40).

#### 4. СВОЙСТВА АДДИТИВНЫХ И МНОЖИТЕЛЬНЫХ ОЦЕНОК

Метод статистического моделирования. На начальном этапе исследования свойств множительных и аддитивных

оценок используется метод статистического моделирования. Для этого задают некоторую ф. р. продолжительности безотказной работы  $F_l(\cdot)$ , которая близка к ожидаемой ф. р., и выбирают подходящую модель сбора данных. С помощью датчика псевдослучайных чисел получают достаточно большое количество порций данных. Затем образуют порядковую таблицу и на ее основе рассчитывают требуемую характеристику. Например, с помощью множительной оценки рассчитывают вероятность безотказной работы  $\bar{F}_l(s)$  как функцию времени наработки  $s$ . Если значения множительной оценки  $\hat{\bar{F}}_l(s)$  окажутся близкими к оцениваемым известным значениям  $\bar{F}_l(s)$ , то этот пример будет свидетельствовать в пользу предлагаемых множительных оценок.

Пример. Допустим, что вероятность безотказной работы изделий в течение времени  $s$  задается аналитическим выражением

$$\bar{F}_1(s) = \exp(-6,008 \cdot 10^{-22}s^4 + 84,112 \cdot 10^{-9}s^3 - 3,6649 \cdot 10^{-8}s^2).$$

На рис. 8 часть кривой  $\bar{F}_1$  приведена в виде сплошной линии для значений  $s \leq 425$ . В качестве модели сбора данных выбрана модель альтернирующих процессов, соответствующая сбору данных в процессе эксплуатации. В качестве ф. р. продолжительности ремонтов  $F_2(s) = 1 - \bar{F}_2(s)$  выбираем ф. р. из семейства Вейбулла—Гнеденко

$$\bar{F}_2(s) = \exp(-s^2/50).$$

Предполагаем, что длительности интервалов наблюдения  $t_j$  являются независимыми, экспоненциально распределенными величинами

$$\bar{G}(t) = P(t_j \geq t) = \exp(-t/2000).$$

С использованием моделирующих программ из комплекса программ POD (см. разд. 8) получены 200 наблюдений реализаций альтернирующих процессов. Из них образованы 200 порций данных  $X_j$  и массив данных  $Y_l = (X_1, \dots, X_{200})$ . Нарботкам изделий ставятся метки  $\pm 1$  в зависимости от

того, чем заканчивается наработка: отказом или прекращением наблюдения. Длительностям ремонта ставятся метки  $\pm 2$ . С помощью программы предварительной обработки данных из первого раздела *POD* образована порядковая таблица  $D_1(Y_l)$ , для которой отобраны наработки с метками  $\pm 1$ . На основе порядковой таблицы  $D_1(Y_l)$  рассчитаны по формуле (10) значения множительной оценки  $\hat{F}_1(s)$  в точках  $s = kh$ ,  $h = 17,64$ ,  $k = 2, 4, \dots, 20, 22$ . Эти значения показаны на рис. 8 в виде кружков. Учитывая увеличенный масштаб графика, можно считать, что все значения множительной оценки лежат в непосредственной близости от оцениваемых значений.

**Состоятельность.** Допустим, что число порций данных  $m$ , образующих базу статистических данных, неограниченно возрастает, что соответствует математическому обозначению  $m \rightarrow \infty$ .

Оценка  $B(Y_l)$ , рассчитанная на основе массива данных  $Y_l = (X_1, \dots, X_m)$ , называется состоятельной для значения выбранного показателя надежности  $B_0$ , если для любого сколь угодно малого  $\epsilon > 0$

$$P_{F, \theta} (|B(Y_l) - B_0| > \epsilon) \rightarrow 0, \quad \text{когда } m \rightarrow \infty. \quad (16)$$

При весьма слабых ограничениях аддитивные и множительные оценки, задаваемые выражениями (10) и (14), являются состоятельными оценками соответственно для  $\Lambda_l(s)$  и  $\bar{F}_l(s)$ .

Условия, достаточные для состоятельности. Порции данных  $X_j$  поставим в соответствие случайные величины

$$N_{lj}(u) = \sum_{i=1}^{I_j} 1(S_{ij} \geq u, \Gamma_{ij} \in A_{lj} \cup l), \quad (17)$$

$$D_{lj}(u) = \sum_{i=1}^{I_j} 1(S_{ij} \leq u, \Gamma_{ij} = l), \quad (18)$$

которые при изменении параметра  $u \geq 0$  образуют случайные процессы. Заметим, что  $N_{lj}(0) \leq I_j$ . Процесс  $N_{lj}(u)$  является невозрастающим, не-

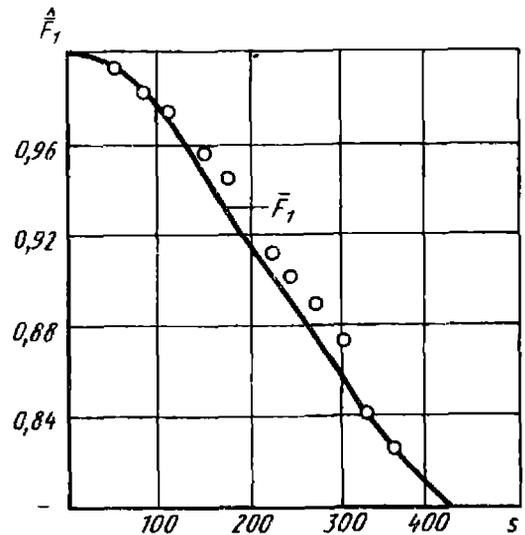


Рис. 8. График вероятности безотказной работы  $\bar{F}_1(\cdot)$  и значения оценки  $\hat{F}_1(\cdot)$

прерывным слева, а  $D_{lj}(u)$  — неубывающим, непрерывным справа. Реализации  $N_{lj}(\cdot)$ ,  $D_{lj}(\cdot)$  являются ступенчатыми функциями, принимающими целочисленные значения.

Далее вероятности событий и математические ожидания случайных величин записываются без подстрочных индексов  $F, \theta$  набора ф. р. и мешающего параметра: например, вероятность  $P_{F, \theta, j}(A)$  обозначается  $P(A)$ , математическое ожидание  $\mathcal{E}_{F, \theta, j} N_{lj}(u)$  записывается  $\mathcal{E} N_{lj}(u)$ . Положим

$$k_{lj}(u) = \mathcal{E} N_{lj}(u), \quad k_l(m, u) = \sum_{j=1}^m k_{lj}(u). \quad (19)$$

Величины  $k_{lj}(u)$  ( $k_l(m, u)$ ) равны среднему числу наблюдаемых наработок, не меньших  $u$ , которые входят в порцию  $X_j$  и имеют метки из  $A_{lj} \cup l$  (входят в массив  $Y_l$  и имеют метки из  $\bigcup_{j=1}^m A_{lj} \cup l$ ). Пусть  $S(F_l) = \sup (s : \bar{F}_l(s) > 0)$  — верхняя грань возможных наработок с меткой  $l$ . Запишем следующие условия:  $(Y_1)$  для любого  $j = 1, 2, 3, \dots$

$$\mathcal{E} N_{lj}(0)^2 \leq C_2 = C_2(F, \theta) < \infty;$$

$(Y_2)$  для значения  $s < s(F_l)$  или  $s = s(F_l)$  в случае  $\Delta F_l(s) > 0$

найдется положительная невозрастающая функция  $k_0(\cdot)$  такая, что для всех достаточно больших  $m$  выполняется неравенство

$$k_l(m, s) \geq mk_0(s) > 0;$$

( $\mathcal{Y}_3$ ) для любого  $u \leq s$  и  $j = 1, 2 \dots$  выполняется соотношение

$$\mathcal{E}D_{lj}(u) = \int_0^u \frac{k_{lj}(v) dF_l(v)}{\bar{F}_l(v-)} \quad (20)$$

На основе определения функции ресурса (13) соотношение (20) переписывается в эквивалентном виде

$$\mathcal{E}D_{lj}(u) = \int_0^u k_{lj}(v) d\Lambda_l(v) \quad (21)$$

Условие ( $\mathcal{Y}_1$ ) накладывает естественное ограничение на размер порций, а условие ( $\mathcal{Y}_2$ ) — на соизмеримость порций.

Условие ( $\mathcal{Y}_3$ ) выполнено для всех моделей сбора данных, описанных в разд. 2.

Пусть для каждой порции  $X_j$  массива  $Y_l$  выполнены условия ( $\mathcal{Y}_1$ ), ( $\mathcal{Y}_2$ ), ( $\mathcal{Y}_3$ ). Тогда аддитивная оценка  $\hat{\Lambda}_l(s)$  и множительная оценка  $\hat{\bar{F}}_l(s)$ , определяемые выражениями (15) и (10), являются состоятельными оценками  $\Lambda_l(s)$  и  $\bar{F}_l(s)$  соответственно.

В этом утверждении не используется свойство  $l$ -дискретной делимости. Это свойство использовалось лишь для получения формул, задающих оценки  $\hat{\Lambda}_l(\cdot)$  и  $\hat{\bar{F}}_l(\cdot)$ . Таким образом, состоятельность является следствием только трех условий ( $\mathcal{Y}_1$ ), ( $\mathcal{Y}_2$ ) и ( $\mathcal{Y}_3$ ). При этом допускается, что ф. р.  $F_l(\cdot)$  может как иметь скачки, так и не иметь их, т. е.  $F_l(\cdot)$  — непрерывная ф. р. Наличие скачков у ф. р.  $F_l(\cdot)$  имеет место для изделий с заранее запрограммированным способом их использования, когда после достижения определенной наработки изделие подвергается экстремальным воздействиям, например удару.

Асимптотические доверительные интервалы. Свойство состоятельности является необходимой предпосылкой воз-

можности использования оценок в условиях, когда накоплено большое число данных. Представление о точности оценок  $\hat{\Lambda}_l(\cdot)$  и  $\hat{\bar{F}}_l(\cdot)$  при заданном массиве данных  $Y_l$  можно получить, исходя из асимптотических при  $m \rightarrow \infty$   $\gamma$ -доверительных интервалов, соответствующих этим оценкам.

Значения статистик  $B_H(Y_l)$ ,  $B_B(Y_l)$  называются нижней и верхней границами асимптотического при  $m \rightarrow \infty$   $\gamma$ -доверительного интервала для величины  $B_0$ , если при  $m \rightarrow \infty$

$$P(B_H(Y_l) \leq B_0 \leq B_B(Y_l)) \rightarrow \gamma.$$

Для вывода выражений нижней и верхней границ асимптотического при  $m \rightarrow \infty$   $\gamma$ -доверительного интервала используются дополнительные условия:

( $\mathcal{Y}_0$ ) — искомая ф. р.  $F_l(\cdot)$  является непрерывной;

( $\mathcal{Y}'_1$ ) — для любого  $j = 1, 2 \dots$  и некоторого  $\alpha > 0$

$$\mathcal{E}N_{lj}(0)^{2+\alpha} \leq C_{2+\alpha} = C_{2+\alpha}(F, \theta) < \infty;$$

( $\mathcal{Y}_4$ ) — случайные процессы

$$M_{lj}(u) = D_{lj}(u) - \int_0^u N_{lj}(v) \quad (22)$$

имеют некоррелированные приращения.

Если выполнено условие ( $\mathcal{Y}_3$ ), то условие ( $\mathcal{Y}_4$ ) означает, что для любых чисел  $u \leq v \leq w$

$$\mathcal{E}[M_{lj}(v) - M_{lj}(u)][M_{lj}(w) - M_{lj}(v)] = 0.$$

Условие ( $\mathcal{Y}'_1$ ) выполнено, если выполнено условие ( $\mathcal{Y}'_1$ ).

При выполнении всех сформулированных выше условий ( $\mathcal{Y}_0$ ) — ( $\mathcal{Y}_4$ ) значения уклонений аддитивных и множительных оценок от оцениваемых величин при  $m \rightarrow \infty$  определяются интегралом

$$Q_l(s) = \int_0^s \frac{dM_l(m, u)}{k_l(m, u)}, \quad (23)$$

где  $M_l = (m, u) = \sum_{j=1}^m M_{lj}(u)$ . Математическое ожидание  $\mathcal{E}Q_l(s) = 0$ , и для  $Q_l(s)$  дисперсия

$$v_l(m, s)^2 = \int_0^s \frac{d\Lambda_l(u)}{k_l(m, u)}.$$

Если выполнены условия  $(Y_0) - (Y_4)$ , то

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P((\widehat{\Lambda}_l(s) - \Lambda_l(s))/v_l(m, s) \leq y) = \Phi(y),$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P((\widehat{F}_l(s) - F_l(s))/(v_l(m, s) \times \overline{F}_l(s)) \leq y) = \Phi(y),$$

где

$$\Phi(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^y e^{-x^2/2} dx.$$

При выполнении условий  $(Y_0) - (Y_4)$  статистика

$$\widehat{V}_l(s)^2 = \sum_{h: z_{lh}(m) \leq s} \frac{f_{lh}(m)}{N_l(m, z_{lh}(m))^2} \quad (24)$$

является эквивалентной состоятельной оценкой для  $v_l(m, s)^2$ , т. е. для любого  $\mathcal{E} > 0$

$$P(|\widehat{V}_l(s)/v_l(m, s)^2 - 1| > \mathcal{E}) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

Пусть выполнены условия  $(Y_0) - (Y_4)$ . Тогда нижние и верхние границы асимптотических при  $m \rightarrow \infty$   $\gamma$ -доверительных интервалов для значений  $\Lambda_l(s)$  и  $\overline{F}_l(s)$  задаются выражениями

$$\begin{aligned} \widehat{\Lambda}_l(s) - u \frac{1-\gamma}{2} \widehat{V}_l(s), \widehat{\Lambda}_l(s) + \\ + u \frac{1-\gamma}{2} \widehat{V}_l(s), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\overline{F}}_l(s) \left(1 - u \frac{1-\gamma}{2} \widehat{V}_l(s)\right), \\ \widehat{\overline{F}}_l(s) \left(1 + u \frac{1-\gamma}{2} \widehat{V}_l(s)\right), \end{aligned} \quad (26)$$

где  $u_p$  — квантиль уровня  $1 - p$ , т. е.  $\Phi(u_p) = 1 - p$ .

Нормированные отклонения оценок  $\sqrt{m}(\widehat{\Lambda}_l(s) - \Lambda_l(s))$  и  $\sqrt{m}(\widehat{F}_l(s) - F_l(s))$ , рассматриваемые как функции параметра  $s$ , являются случайными процессами, которые при  $m \rightarrow \infty$  сближаются с броуновскими процессами диффузии. Этот результат справедлив при выполнении условий  $(Y_0) - (Y_4)$ . Отклонения множительной оценки вероятности безотказной работы, показанные на рис. 8, приближенно соответствуют броуновскому процессу при соответствующей замене времени.

В тех случаях, когда одновременно оцениваются несколько неизвестных ф. р.  $F_l$ ,  $l \in (l_1, \dots, l_k)$ , необходимо проверить выполнение условия:

$(Y_5)$  для любых чисел  $u_1, u_2, u_3, u_4 \leq s$ ,  $a \neq b$ ,  $a, b \in (l_1, \dots, l_k)$  случайные процессы  $M_{lj}(u)$ ,  $l \in (l_1, \dots, l_k)$  имеют некоррелированные приращения

$$\mathcal{E}[M_{aj}(u_2) - M_{aj}(u_1)] [M_{bj}(u_4) - M_{bj}(u_3)] = 0.$$

Пример. Проверить условия  $(Y_3) - (Y_5)$  для порции данных  $X_j$ , соответствующей наблюдению альтернирующего процесса на интервале  $(0, t_j)$ . Для сокращения записи опустим индекс  $j$ , записывая  $t$  вместо  $t_j$ ,  $S_{2k-1}$  вместо  $S_{2k-1, j}$ , и т. д. Величины  $S_{2k-1}(S_{2k})$ , равные длительностям интервалов работы (ремонта)  $k = 1, 2, \dots$ , без ограничения на общее время наблюдений, являются независимыми случайными величинами, для которых

$$\mathcal{E}1(S_{2k-1} \leq u) = F_1(u);$$

$$\mathcal{E}1(S_{2k-1} \geq u) = \overline{F}_1(u-);$$

$$(\mathcal{E}1(S_{2k} \leq u) = F_2(u);$$

$$\mathcal{E}1(S_{2k} \geq u) = \overline{F}_2(u-).$$

Определим случайные величины

$$\begin{aligned} \Psi_{1k}(a) = 1(S_{2k-1} \leq a) - \\ - \int_0^a 1(S_{2k-1} \geq v) d\Lambda_1(v), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\Psi_{2k}(a) = 1(S_{2k} \leq a) - \int_0^a 1(S_{2k} \leq v) d\Lambda_2(v). \quad (28)$$

Для любых чисел  $0 \leq a \leq b \leq c$ ,  $l, l_1, l_2 \in (1, 2)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  выполнены соотношения

$$\mathcal{E}\Psi_{lk}(a) = 0, \mathcal{E}\Psi_{l_1k_1}(a) \times \times [\Psi_{l_2k_2}(c) - \Psi_{l_2k_2}(b)] = 0. \quad (29)$$

Докажем это.

Если  $l = 1$ , то имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\Psi_{1k}(a) &= \mathcal{E}1(S_{2k} \leq a) - \\ &- \int_0^a \mathcal{E}1(S_{2k-1} \geq v) d\Lambda_1(v) = F_1(a) - \\ &- \int_0^a \bar{F}_1(v-) dF_1(v)/\bar{F}_1(v_1-) = \\ &= F_1(a) - \int_0^a dF_1(a) = 0. \end{aligned}$$

Случай  $l = 2$  рассматривается аналогично. Допустим, что  $l_1 = l_2 = 1$ ,  $k_1 = k_2 = k$ . Тогда, используя выражения (27), (28), находим

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\Psi_{1k}(a) [\Psi_{1k}(c) - \Psi_{1k}(b)] &= \\ &= \mathcal{E}1(S_{2k} \leq a) 1(b < S_{2k-1} \leq c) - \\ &- \int_0^a \mathcal{E}1(b < S_{2k-1} \leq c) 1(S_{2k} \geq v_1) \times \\ &\times d\Lambda_1(v_1) - \int_b^c \mathcal{E}1(S_{2k-1} \leq a) 1 \times \\ &\times (S_{2k-1} \geq v_2) d\Lambda_1(v_2) + \\ &+ \int_0^a \int_b^c \mathcal{E}1(S_{2k-1} \geq v_1) 1(S_{2k-1} \geq v_2) \times \\ &\times d\Lambda_1(v_1) d\Lambda_1(v_2). \quad (30) \end{aligned}$$

Из равенств  $1(S_{2k-1} \leq a) 1(b < S_{2k-1} \leq c) = 1(S_{2k} \leq a) 1(S_{2k-1} \geq v_2) = 0$ , где  $v_2 \in [b, c]$ , получаем, что математические ожидания первого и третьего слагаемых в правой части суммы (30) равны нулю. Для любого

$v \leq a$  имеем  $\mathcal{E}1(b < S_{2k-1} \leq c) \times \times 1(S_{2k-1} \geq v_1) = \mathcal{E}1(b < S_{2k-1} \leq c) = F_1(c) - F_1(b)$ . Поэтому для математического ожидания второго слагаемого в выражении (30) имеем

$$\int_0^a [F_1(c) - F_1(b)] d\Lambda_1(v_1) = [F_1(c) - F_1(b)] \Lambda_1(a).$$

Из неравенства  $a \leq b \leq c$  следует, что  $v_1 \leq v_2$  и  $1(S_{2k-1} \geq v_1) 1(S_{2k-1} \geq v_2) = 1(S_{2k-1} \geq v_2)$ . Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_b^c \mathcal{E}1(S_{2k+1} \geq v_2) d\Lambda_1(v_1) d\Lambda_1(v_2) &= \\ &= \int_0^a d\Lambda_1(v_1) \int_b^c \bar{F}_1(v_2-) d\Lambda_1(v_2) = \\ &= \int_0^a [F_1(c) - F_1(b)] d\Lambda_1(v_1) = \\ &= [F_1(c) - F_1(b)] \Lambda_1(a). \end{aligned}$$

Следовательно, второе и четвертое слагаемые выражения (30) взаимно сокращаются, так как имеют разные знаки.

Если  $l_1 \neq l_2$  или  $k_1 \neq k_2$ , то  $\Psi_{l_1k_1}(v_1)$  и  $\Psi_{l_2k_2}(v_2)$  независимы, так как они определяются различными случайными величинами из набора  $\{S_{2k}, S_{2k-1}, k = 1, 2, 3, \dots\}$ . Отсюда согласно левому соотношению (29) имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\Psi_{l_1k_1}(a) [\Psi_{l_2k_2}(b) - \Psi_{l_2k_2}(c)] &= \\ &= \mathcal{E}\Psi_{l_1k_1}(a) \mathcal{E}[\Psi_{l_2k_2}(c) - \\ &- \Psi_{l_2k_2}(b)] = 0. \end{aligned}$$

Из выражений (17), (18) и (22) находим

$$\begin{aligned} M_1(u) &= D_1(u) - \int_0^u N_1(v) d\Lambda_1(v) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 1(T_{2k} \leq t) 1(S_{2k-1} \leq \\ &\leq u \wedge (t - T_{2k})) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^u 1(S_{2k-1} \geq \sigma_1) d\Lambda_1(\sigma_1) = \\
 & = \sum_{k=1}^{\infty} 1(T_{2k} \leq t) \Psi_{1k}(u \wedge (t - T_{2k})), \\
 M_2(u) & = \sum_{k=1}^{\infty} 1(T_{2k-1} \leq t) \Psi_{2k} \times \\
 & \quad \times (u \wedge (t - T_{2k-1})),
 \end{aligned}$$

где  $T_{2k-1}$  — моменты отказов;  $T_{2k}$  — моменты окончания ремонтов.

Используя формулу полных условных математических ожиданий ( $\mathcal{E}\xi = \mathcal{E}[\mathcal{E}[\xi|\eta]]$ ), получаем

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}M_1(u) & = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{E}[\mathcal{E}[1(T_{2k} \leq t) \Psi_{1k} \times \\
 & \quad \times (u \wedge (t - T_{2k})) | T_{2k}]] = \\
 & = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{E}[1(T_{2k} \leq t) \mathcal{E}[\Psi_{1k} \times \\
 & \quad \times (u \wedge (t - T_{2k})) | T_{2k}]] = 0.
 \end{aligned}$$

Здесь учтено, что при фиксации значения  $T_{2k}$  величины  $1(T_{2k} \leq t)$  и  $u \wedge (t - T_{2k})$  являются константами. Следовательно,  $1(T_{2k} \leq t)$  выносится за знак условного математического ожидания, а для  $\Psi_{1k}(a)$ ,  $a = u \wedge (t - T_{2k})$  применимо левое соотношение (29). Точно так же находим, что  $\mathcal{E}M_2(u) = 0$ . Таким образом, условие  $(Y_3)$  выполнено для  $l = 1, 2$ . Аналогичным способом, используя условные математические ожидания и соотношения (29), проверяется выполнение условий  $(Y_4)$  и  $(Y_5)$ .

Для примера 8 при любом  $s > 0$  выполнены все пять условий:  $(Y_1)$ — $(Y_5)$ . Следовательно, множительные оценки для ф. р.  $F_1(s)$  и  $F_2(s)$  являются состоятельными, а асимптотически при  $m \rightarrow \infty$  отклонения этих оценок имеют нормальные распределения. Из условия  $(Y_5)$  вытекает, что отклонения  $\widehat{F}_1(s) - \bar{F}_1(s)$  и  $\widehat{F}_2(s) - \bar{F}_2(s)$  являются асимптотически независимыми. Так как выполнено условие  $(Y_4)$ , то для расчета асимптотиче-

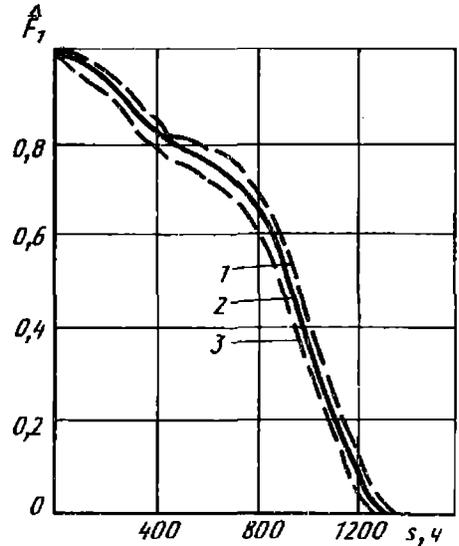


Рис. 9. График множительной оценки  $\widehat{F}_1$  (2), верхней (1) и нижней границ (3)  $\gamma$ -доверительных интервалов ( $\gamma = 0,95$ )

ских при  $m \rightarrow \infty$   $\gamma$ -доверительных интервалов применимы формулы (25) и (26). На рис. 9 показана множительная оценка  $\widehat{F}_1$  для вероятности безотказной работы  $\bar{F}_1$ , теоретическое значение которой задается выражением (16), а также границы асимптотических при  $m \rightarrow \infty$   $\gamma$ -доверительных интервалов.

### 5. ЯДЕРНЫЕ ОЦЕНКИ ФУНКЦИЙ ИНТЕНСИВНОСТЕЙ ОТКАЗОВ

Одним из основных, широко используемых в теории надежности, показателей надежности является функция интенсивности отказа. Напомним, что функцией интенсивности отказа с меткой  $l$  изделия называется первая производная функции ресурса

$$\lambda_l(s) = d\Lambda_l(s)/ds.$$

Для того чтобы  $\lambda_l(s)$  была определена для наработки  $s$ , достаточно дифференцируемости в точке  $s$  ф. р.  $F_l(s)$ . Введем следующее условие:

$(Y'_0)$  в некоторой окрестности  $(s - h(s), s + h(s))$  ф. р.  $F_l(\cdot)$  является дважды непрерывно дифференцируемой функцией.

Ядром называется ограниченная неотрицательная функция  $K(u)$ , ко-

торая равна нулю вне интервала  $[-1/2, +1/2]$  и для которой

$$\int_{-1/2}^{+1/2} K(u) du = 1, \quad \int_{-1/2}^{+1/2} uK(u) du = 0. \quad (31)$$

Примером ядра является функция

$$K(u) = \frac{3}{2} (1 - 4u^2)^+, \quad (32)$$

где  $a^+ = \max(0, a)$ . Пусть  $K_{ij} = \int_{-1/2}^{+1/2} u^i K(u)^j du$ . Для ядра, опреде-

ляемого выражением (32),  $K_{2,1} = 1/20$ ,  $K_{0,2} = 2/5$ . Уменьшение параметра  $b$  соответствует сжатию графика функции  $(1/b)K(u/b)$  вдоль оси значений параметра  $u$  и растяжению вдоль оси ординат. Чем меньше  $b$ , тем более похожа по своим свойствам функция  $1/b K(u/b)$  на обобщенную  $\delta$ -функцию.

Оценку функции интенсивности отказа  $\lambda_i$  проще построить для специальным образом подобранной функции  $\bar{\lambda}_i$ . Для этого рассматривают свертку  $\lambda_i$  со «сжатым» ядром  $K$ , т. е. функцию

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_i(s) &= 1/b \int_0^{\infty} K\left(\frac{s-u}{b}\right) \lambda_i(u) du = \\ &= \int_{-1/2}^{+1/2} K(-v) \lambda_i(s+bv) dv, \end{aligned} \quad (33)$$

где переменные интегрирования  $u$  и  $v$  связаны соотношением  $u = s + bv$ .

Если  $b(m) \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ , то из условия  $(Y'_0)$  вытекает соотношение

$$\begin{aligned} \lambda_i(s + b(m)v) &= \lambda_i(s) + \\ &+ \lambda'_i(s) b(m)v + \\ &+ \frac{1}{2} \lambda''_i(s) [b(m)v]^2 (1 + O(1)). \end{aligned} \quad (34)$$

Из выражений (33) и (34) находим величину уклонения

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(s) - \lambda_i(s) &= \int_{-1/2}^{+1/2} K(-v) [\lambda_i(s + \\ &+ bv) - \lambda_i(s)] dv = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} K_{2,1} \lambda''_i(s) b(m)^2 (1 + O(1)), \\ & \quad m \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (35)$$

Если  $b(m) \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ , то величина уклонения  $\bar{\lambda}_i - \lambda_i$  уменьшается с ростом  $m$ . Выражение (36) записывается в виде, эквивалентном выражению (33)

$$\bar{\lambda}_i(s) = \frac{1}{b} \int_0^{\infty} K\left(\frac{s-u}{b}\right) d\Lambda_i(u). \quad (36)$$

Для получения искомой оценки подставляют в выражение (36) вместо функции ресурса  $\Lambda_i(\cdot)$  ее аддитивную оценку  $\hat{\Lambda}_i(\cdot)$ . В результате такой подстановки с учетом выражения (15) получается оценка

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_i(s) &= \sum_{h: |s - z_{ih}(m)| \leq b(m)/2} \frac{1}{b(m)} \times \\ &\times K\left(\frac{s - z_{ih}(m)}{b(m)}\right) \frac{f_{ih}(m)}{N(m, z_{ih}(m))}. \end{aligned} \quad (37)$$

Статистика  $\hat{\lambda}_i(s)$ , определяемая выражением (37), называется ядерной оценкой для функции интенсивности  $\lambda_i(s)$ . Параметр  $b(m)$  называется шириной окна.

Пусть выполнены условия  $(Y'_0)$ ,  $(Y_1)$ ,  $(Y_2)$ ,  $(Y_3)$ ,  $b(m) \rightarrow 0$ ,  $b(m)^2 m \rightarrow \infty$ , когда  $m \rightarrow \infty$ . Тогда ядерная оценка  $\hat{\lambda}_i(s)$ , определяемая выражением (37), является при  $m \rightarrow \infty$  состоятельной оценкой значения функции интенсивностей  $\lambda_i(s)$ .

Ограничение снизу на скорость стремления  $b(m)$  к нулю можно ослабить, если дополнительно потребовать выполнения условия  $(Y_4)$ .

Ядерная оценка  $\hat{\lambda}_i(s)$ , определяемая выражением (37), является при  $m \rightarrow \infty$  состоятельной оценкой значения  $\lambda_i(s)$ , если выполнены условия  $(Y'_0)$ ,  $(Y_1)$ ,  $(Y_2)$ ,  $(Y_3)$ ,  $(Y_4)$ ,  $b(m) \rightarrow 0$ ,  $b(m) m \rightarrow \infty$ , когда  $m \rightarrow \infty$ .

Далее запись  $a(m) \stackrel{o}{=} O(1)$  означает строгую эквивалентность, при которой для некоторых положительных

л  $a_1 < a_2$  и всех достаточно больш-  
 $m$  выполняются неравенства  $a_1 \leq$   
 $(m) \leq a_2$ ;  $\alpha$  — значение параметра  
 в условии  $(Y'_1)$ .

Пусть выполнены условия  $(Y'_0), (Y'_1),$   
 $(Y'_2), (Y'_3), (Y'_4), \alpha > 1/2, b(m) =$   
 $= m^{-1/5} c(m), c(m) \stackrel{o}{=} O(1) \text{ и}$

$$v_l(m, s)^2 = \frac{1}{b(m)^2} \int_{s-b(m)/2}^{s+b(m)/2} \times$$

$$\times K\left(\frac{s-u}{b(m)}\right)^2 \frac{\lambda_l(u) du}{k_l(m, u)}.$$

Тогда

$$m^{4/5} v_l(m, s)^2 \stackrel{o}{=} O(1) \text{ и}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| P(m^{2/5} (\hat{\lambda}_l(s) - \lambda_l(s)) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} K_{2,1} \lambda_l''(s) c(m)^2 \leq y) - \right.$$

$$\left. - \Phi(y/m^{2/5} v_l(m, s)) \right| = 0.$$

Таким образом, при выполнении перечисленных условий систематическая составляющая нормированного уклонения асимптотически эквивалентна  $\frac{1}{2} K_{2,1} \lambda_l''(s) c(m)^2$ . Случайная составляющая определяется интегралом

$$R_l(s) = \frac{1}{b(m)} \int_0^\infty K\left(\frac{s-u}{b(m)}\right) \times$$

$$\times \frac{dM_l(m, u)}{k_l(m, u)},$$

для которого  $\mathcal{E} R_l(s) = 0, \mathcal{E} R_l(s)^2 =$   
 $= v_l(m, s)^2$ .

Пусть выполнены условия  $(Y'_0), (Y'_1),$   
 $(Y'_2) - (Y'_4), (Y'_6), b(m)^{1+2/\alpha} m \rightarrow \infty,$   
 $b(m)^5 m \rightarrow 0,$  когда  $m \rightarrow \infty$ .

Тогда выполнено соотношение

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P([\hat{\lambda}_l(s) - \lambda_l(s)]/v_l(m, s) \leq$$

$$\leq y) = \Phi(y).$$

При  $m \rightarrow \infty$  эквивалентной состоя-  
 тельной оценкой для  $v_l(m, s)^2$  яв-  
 ляется статистика

$$\hat{\theta}_l(s)^2 = \sum_{h: |s-z_{lh}(m)| \leq b(m)/2} \frac{1}{b(m)^2} \times$$

$$\times K\left(\frac{s-z_{lh}(m)}{b(m)}\right) \frac{f_{lh}(m)}{N_l(m, z_{lh}(m))}. \quad (38)$$

С целью выявления точности расчи-  
 тываемых ядерных оценок  $\hat{\lambda}_l(s)$  при  
 больших, но конечных  $m$ , следует  
 вычислить границы асимптотических  
 при  $m \rightarrow \infty$   $\gamma$ -доверительных интер-  
 валов для оцениваемых значений  
 $\lambda_l(s)$ .

Пусть выполнены условия, перечи-  
 сленные выше. Тогда нижняя  $\lambda_l^-(s)$   
 и верхняя  $\lambda_l^+(s)$  границы асимптотиче-  
 ского при  $m \rightarrow \infty$   $\gamma$ -доверительного  
 интервала для значения функции ин-  
 тенсивности отказа  $\lambda_l(s)$  задаются  
 выражениями

$$\lambda_l^-(s) = \hat{\lambda}_l(s) - u \frac{1-\gamma}{2} \hat{\theta}_l(s),$$

$$\lambda_l^+(s) = \hat{\lambda}_l(s) + u \frac{1-\gamma}{2} \hat{\theta}_l(s), \quad (39)$$

где  $\hat{\lambda}_l(s)$  — ядерная оценка, опреде-  
 ляемая выражением (37);  $\hat{\theta}_l(s)$  — вели-  
 чина, равная квадратному корню из  
 выражения (38).

Если в перечень условий, перечи-  
 сленных выше, добавить условие  
 $(Y'_5)$ , то асимптотически при  $m \rightarrow \infty$   
 нормированные уклонения  $[\hat{\lambda}_l(s) -$   
 $-\lambda_l(s)]/\hat{\theta}_l(s), l = 1, \dots, r$  будут не-  
 зависимыми, нормально распределен-  
 ными случайными величинами с нуле-  
 выми средними и единичными дис-  
 персиями.

Пример. Рассмотрим построение  
 ядерной оценки функции интенсивно-  
 стей и соответствующих ей асимпто-  
 тических доверительных границ. До-  
 пустим, что в результате наблюдений  
 в процессе эксплуатации альтерни-  
 рующего процесса накоплен массив из  
 200 порций. Вероятности безотказной  
 работы, ремонта и продолжительности  
 наблюдений соответствуют примеру на

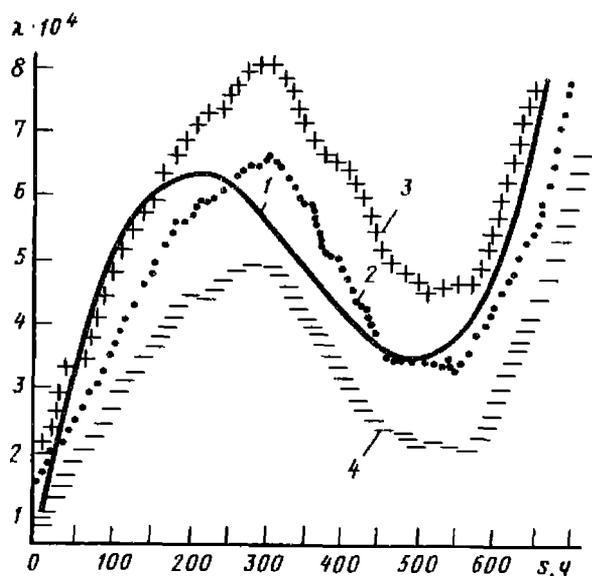


Рис. 10. Графики функции интенсивности отказа (1), ее оценки (2), верхней (3) и нижней (4) границ асимптотически  $\gamma$ -доверительных интервалов ( $\gamma = 0,95$ )

с. 34. Согласно формуле (37) функция интенсивности отказа

$$\lambda_1(s) = 2,4032 \cdot 10^{-12} s^3 - 2,52336 \cdot 10^{-9} s^2 + 7,32976 \cdot 10^{-6} s. \quad (40)$$

График функции (40) показан сплошной линией на рис. 10. На этом же рисунке точками отмечены значения ядерной оценки  $\hat{\lambda}_1$ . В качестве ядра взята функция, определяемая выражением (32). Значение ширины окна  $b = 100$  ч, что обусловлено выбором единицы времени для наработки. На оси абсцисс максимальное значение выработки равно 700 ч. На рис. 10 точки, соответствующие знакам «+» и «-», являются значениями верхних и нижних границ асимптотических при  $m \rightarrow \infty$   $\gamma$ -доверительных интервалов для значений  $\lambda_1(kh)$ . Все значения рассчитаны на ЭВМ.

В общем случае при выборе параметра ширины окна  $b$  рекомендуется исходить из того, чтобы систематическое смещение в отклонении  $\hat{\lambda}_1(s) - \lambda_1(s)$  составляло определенную долю  $q$  от корня из дисперсии случайной составляющей отклонения. При больших  $m$  такой подход приводит к сле-

дующему уравнению относительно  $b$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{b: |s - z_{1h}(m)| \leq b} \frac{1}{2b} \times \\ & \times K\left(\frac{s - z_{1h}(m)}{2b(m)}\right) \frac{f_{1h}(m)}{N_1(m, z_{1h}(m))} - \\ & - \sum_{b: |s - z_{1h}(m)| \leq b/2} \frac{1}{b} \times \\ & \times K\left(\frac{s - z_{1h}(m)}{b(m)}\right) \frac{f_{1h}(m)}{N_1(m, z_{1h}(m))} = \\ & = q \left( \sum_{b: |s - z_{1h}(m)| \leq b/2} \frac{1}{b^2} \times \right. \\ & \quad \times K\left(\frac{s - z_{1h}(m)}{b(m)}\right)^2 \times \\ & \quad \times \left. \left(\frac{f_{1h}(m)}{N_1(m, z_{1h}(m))}\right)^{1/2} \right). \end{aligned}$$

Использование оценок в задачах определения периодичности профилактических работ. Оптимальную периодичность проведения профилактических работ находят на основе соотношений, включающих ф. р. продолжительности безотказной работы, а также другие характеристики надежности системы или ее компонент. Эти соотношения определяются выбором стратегии проведения таких работ. Если данных много и статистические оценки ф. р. и других характеристик имеют значения, близкие к истинным, то эти оценки можно использовать вместо точных значений. Точность полученных значений периода проведения профилактических работ можно найти на основе асимптотических свойств отклонений оценок от истинных значений. Для перечисленных в параграфе 2 моделей сбора данных о надежности отклонения множительных оценок асимптотически при росте числа порций  $m$  соответствуют диффузионным процессам, дисперсии которых имеют порядок  $O(1/m)$  и также могут быть оценены по накопленным данным.

В качестве примера рассмотрим стратегию проведения профилактических работ  $B$ , когда полное восстановление системы проводится либо в заранее

назначенный календарный момент времени, либо в момент отказа. Пусть  $F_1(\cdot)$  — ф. р. продолжительности безотказной работы,  $F_2(\cdot)$  — ф. р. длительности планово-профилактического ремонта,  $F_3(\cdot)$  — ф. р. длительности внепланового аварийно-профилактического ремонта. За основной показатель эффективности выберем коэффициент готовности. Для нахождения оптимального периода проведения предупредительных профилактик  $T_0$ , максимизирующего коэффициент готовности системы, отбираются порции данных, содержащие наработки, относящиеся к перечисленным выше ф. р.  $F_l(\cdot)$ ,  $l = 1, 2, 3$ . Другими словами, если  $l$  рассмотреть как значение метки, то на основе базы данных образуются три массива  $Y_l$ , связанные с метками  $l = 1, 2, 3$ . Далее образуют три порядковые таблицы  $D_l$  [см. (7)]. Эти порядковые таблицы используются для расчета множительных оценок  $\hat{F}_l(\cdot)$ ,  $l = 1, 2, 3$  и ядерной оценки  $\hat{\lambda}_1(\cdot)$  функции интенсивности  $\lambda_1(\cdot)$ , соответствующей ф. р.  $F_1(\cdot)$ . В качестве приближения для среднего значения продолжительности планово-предупредительной профилактики  $T_{п.п}$  можно взять оценку

$$\hat{T}_{п.п} = \int_0^{\infty} t d\hat{F}_2(t) = \sum_{h=1}^{n_2} z_{2h}(m) \times \frac{f_{2h}(m)}{N_2(m, z_{2h}(m))},$$

а в качестве приближения средней длительности внепланового аварийно-профилактического ремонта  $T_{а.п}$  можно взять

$$\hat{T}_{а.п} = \int_0^{\infty} t d\hat{F}_3(t) = \sum_{h=1}^{n_3} z_{3h}(m) \times \frac{f_{3h}(m)}{N_3(m, z_{3h}(m))}.$$

Здесь числа  $z_{lh}(m)$ ,  $f_{lh}(m)$  соответствуют числам первой и второй строк порядковой таблицы  $D_l$ ;  $n_l$  — число столбцов в этой таблице;  $N_l(m, z_{lh}(m))$  находится по формуле (9).

Приближенное значение  $\hat{T}_0$  оптимального периода проведения предупредительных профилактик, максимизирующего коэффициент готовности, находится как корень  $\hat{T}_0$  уравнения

$$\frac{\hat{T}_{п.п}}{\hat{T}_{а.п} - \hat{T}_{п.п}} = -\hat{F}_1(\hat{T}_0) + \hat{\lambda}(\hat{T}_0) \times \int_0^{\hat{T}_0} \hat{F}_1(s) ds.$$

Если это уравнение не имеет корня, то полагают  $\hat{T}_0 = \infty$ , что соответствует исключению предупредительных профилактик.

В некоторых ситуациях большие значения наработок  $z_{lh}(m)$ ,  $h = n$ ,  $n = 1, \dots$ , могут существенно снизить точность оценок  $\hat{T}_{п.п}$  и  $\hat{T}_{а.п}$ .

Для оценки точности найденного значения  $\hat{T}_0$  можно использовать метод эмпирического моделирования (метод бутстреп, п. 7). При этом моделируется  $M$  копий троек массивов  $Y_1, Y_2, Y_3$ . Для  $i$ -й копии находится соответствующее значение  $\hat{T}_0(i)$ . Разброс полученных значений  $\hat{T}_0(i)$  связан с точностью оценки  $\hat{T}_0$ . Метод эмпирического моделирования следует рассматривать как эвристический метод.

## 6. ДАННЫЕ С КОВАРИАТАМИ

Один из путей решения сложной задачи объединения в общий массив разнородных порций данных состоит в учете дополнительных параметров — ковариат, от значений которых могут зависеть вероятности наступления отказов. Для этого необходимо обобщить понятие порции. Будем считать, что  $j$ -я порция представлена набором чисел  $X = (S_{ij}, \Gamma_{ij}; Q_{aij}, \dots, Q_{kij}, i = 1, \dots, l_j)$ , где, как и ранее,  $S_{ij}$  — полученные наработки;  $\Gamma_{ij}$  — метки;  $Q_{aij}$  — ковариаты, характеризующие условия испытаний или эксплуатации (температуру окружающей среды, вибрации и т. д.), а также параметры самого изделия, которые влияют на вероятность наступления отказа.

Формулы и рекомендации разд. 1—5 применимы для анализа однородных данных, когда либо изменения значений ковариат не влияют на вероятность безотказной работы, либо в массив отобраны данные с близкими значениями ковариат. При учете ковариат следует проверить их влияние на ф. р.  $F_l$ . Для этого нужно отобрать из массива  $Y_l = (X_1, \dots, X_m)$  два подмассива порций  $Y'_{l_1} = (X'_1, \dots, X'_{m_1})$  и  $Y'_{l_2} = (X''_1, \dots, X''_{m_2})$ ,  $m_1 + m_2 = m$ , которым соответствуют резко различающиеся значения ковариат. Далее надо рассчитать значения множительных оценок и соответствующих им асимптотических  $\gamma$ -доверительных интервалов на основе  $Y'_{l_1}$  и  $Y'_{l_2}$ . Если будут получены существенно различающиеся оценки, а доверительные интервалы окажутся неперекрывающимися, то не учитывать значения ковариат нельзя.

Предположим, что все векторы ковариат  $Q_{ij} = (Q_{i1j}, \dots, Q_{ki j})$  имеют одинаковую размерность  $k$ , а порядок расположения ковариат одинаков для всех изделий. Например, во всех векторах ковариат заданного массива  $Y_l$  первая координата  $Q_{i1j}$  вектора  $Q_{ij} \in X_j$  соответствует температуре окружающей среды, вторая координата — величине электрического напряжения и т. д. Номера компонент вектора ковариат  $Q_{ij}$  разбиваются на два подмножества. В первое подмножество входят номера «внешних» ковариат, связанных с условиями испытаний или эксплуатации. Второе подмножество образуют номера «внутренних» ковариат, характеризующих параметры и состояние каждого изделия. Таким образом, каждому изделию  $Q_i$ , представленному в порции  $X_j$  наработкой  $S_{ij}$  и меткой  $\Gamma_{ij}$ , соответствует вектор ковариат  $Q_{ij} = (Q_{i1j}, \dots, Q_{ki j})$ . Пусть  $Q_a$ ,  $a = 1, \dots, k$  есть номинальные значения компоненты с номером  $a$ . Компоненты вектора уклонений ковариат  $U_{ij} = (U_{i1j}, \dots, U_{ki j})$  определяются соотношениями  $U_{aij} = Q_{aij} - Q_a$ ,  $a = 1, \dots, k$ . Если значения ковариат изделия  $Q_i$  совпадают с номинальными, то  $U_{ij} = (0, \dots, 0) = 0_k$ . Пусть изделие с вектором ковариат  $U = (U_1, \dots, U_k)$  имеет ф. р.

продолжительности безотказной работы  $F_l(s, U)$ . Если  $U = 0_k$ , то используется обозначение  $F_{0l}(s) = F_l(s, 0_k)$ .

Ковариаты в модели аддитивного накопления повреждений. Получение статистических выводов о надежности на основе массива данных с различающимися значениями ковариат возможно в тех случаях, когда применима одна из моделей пересчета данных. Простейшей моделью пересчета является модель аддитивного накопления повреждений. Допустим, что к имеющимся неполным данным массива  $Y_l$ , связанным с меткой  $l$ , применима модель аддитивного накопления повреждений, причем вектор уклонений ковариат  $U$  определяет постоянную скорость выработки ресурса, равную единице при  $U = 0_k$ . В таком случае

$$F_l(s, U) = F_{0l}(g(U)s), \quad (41)$$

где  $g(U) > 0$  и  $g(0_k) = 1$ . Искомая ф. р.  $F_l$  определяется заданием двух неизвестных функций  $F_{0l}$  и  $g$ . Оценивание  $F_{0l}$  и  $g$  на основе массива данных  $Y_l$  является сложной статистической задачей. Задача оценивания существенно упростится, если допустить, что неизвестная функция  $g(U)$  имеет параметрический вид. В качестве функции  $g(U)$  часто рекомендуется выбрать простую функцию

$$g(U) = \exp\left(\sum_{a=1}^k b_a U_a\right), \quad (42)$$

где  $b_1, \dots, b_k$  — неизвестные параметры, подлежащие оценке. В итоге задача сводится к получению непараметрической оценки неизвестной ф. р.  $F_{0l}$  и вектора параметров  $b = (b_1, \dots, b_k)$ . Кроме этих величин, распределение данных может определяться также и заданием некоторого мешающего параметра, который не подлежит оцениванию. Такие модели называются полупараметрическими.

Ковариаты в модели пропорциональных рисков. Допустим, что влияние вектора ковариат на значения ф. р.  $F_l$  учитывается следующим образом:

$$\bar{F}_l(s, U) = (\bar{F}_{0l}(s))^g(U), \quad (43)$$

где  $g(U) > 0$ ,  $g(0_k) = 1$ . Часто предлагается в качестве функции  $g(U)$

взять функцию, задаваемую выражением (42). При выполнении соотношений (42) и (43) и существовании плотности у  $F_l(\cdot)$  функция интенсивности отказа

$$\lambda_l(s, U) = \lambda_{0l}(s) \exp \left\{ \sum_{a=1}^k b_a U_a \right\}, \quad (44)$$

где  $\lambda_{0l}(s) = F'_{0l}(s)/\bar{F}_{0l}(s)$  — функция интенсивности отказа, когда  $U = 0$  ( $k$ ).

Из выражения (44) вытекает, что соотношение  $\lambda_l(s, U_1)/\lambda_l(s, U_2)$  не зависит от  $s$  для любых векторов  $U_1, U_2$ . В связи с этим свойством модель, основанную на соотношениях (43), (44), называют моделью пропорциональных интенсивностей отказов. Эта модель также является полупараметрической. Для частных типов моделей накопления данных разработаны методы получения непараметрических состоятельных оценок ф. р.  $F_{0l}(\cdot)$  или функции интенсивности отказа  $\lambda_{0l}(\cdot)$ , а также состоятельных оценок параметров  $b_1, \dots, b_k$ , учитывающих степени влияния ковариат.

Оценивание влияния ковариат в модели пропорциональных рисков. Масштабу данных  $Y_l$  можно сопоставить обобщенную порядковую таблицу. Изделие  $Q_{ij}$  связано с  $h$ -м столбцом порядковой табл. (7), если значение наработки  $S_{ij} = z_{lh}(m)$ , а метка  $\Gamma_{ij} \in A_{ij} \cup l$ . Обобщенную порядковую таблицу получаем дополнением столбцов порядковой табл. (7) значениями векторов изделий, связанных с этими столбцами. Для простоты допустим, что все  $f_{lh}(m)$  равны 0 или 1. Всего с  $h$ -м столбцом связано  $f_{lh}(m) + c_{lh}(m)$  изделий. Пусть  $U_{lha}(m)$  значения векторов уклонений ковариат изделий, связанных с  $h$ -м столбцом,  $a = 0$  соответствует изделию  $Q_{ij}$  с меткой  $\Gamma_{ij} = l$ , когда  $f_{lh} = 1$ . Остальным изделиям соответствуют значения  $a = 1, \dots, c_{lh}(m)$ . Используя принцип инвариантности, можно получить метод оценивания вектора параметров  $b$ .

Частным отношением правдоподобия назовем функцию

$$L_p(b) = \frac{\exp \left( \sum_{h: f_{lh}(m)=1} U_{lho}(m) b^T \right)}{\prod_{h: f_{lh}(m)=1} \left( \sum_{b^a > b, g \neq 0} E'_b \right)},$$

где  $E'_b = \exp(U_{lha}(m) b^T)$ ,

$U_{lho}(m) b^T$  — скалярное произведение векторов  $U_{lho}(m)$  и  $b$ ;  $T$  — операция транспонирования вектора строки в вектор-столбец.

В качестве оценки  $\hat{b} = (\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_k)$  берется такой вектор  $\hat{b}$ , для которого

$$L_p(\hat{b}) = \max_b L_p(b).$$

Обоснование возможности использования частного отношения правдоподобия получено лишь для простейших моделей сбора данных типа модели независимых конкурирующих рисков. Если  $\hat{b}$  найдено, то далее на основе дискретной делимости строится аналог множительной оценки.

## 7. МЕТОД ЭМПИРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ — БУТСТРЕП

Недостаточная точность получаемых статистических выводов при малом количестве данных может явиться одной из основных причин принятия неправильного решения. Поэтому обоснование достаточной точности полученных оценок ф. р., функций ресурса или функций интенсивностей отказов должно предшествовать принятию решения, например решения о возможности использования конкретных изделий. В рассмотренных выше примерах на рис. 8, 10 наряду с оценками приведены истинные значения оцениваемых показателей надежности. При обработке реальных данных истинные значения оцениваемых показателей надежности неизвестны и получить величины уклонений оценок нельзя. Ча-

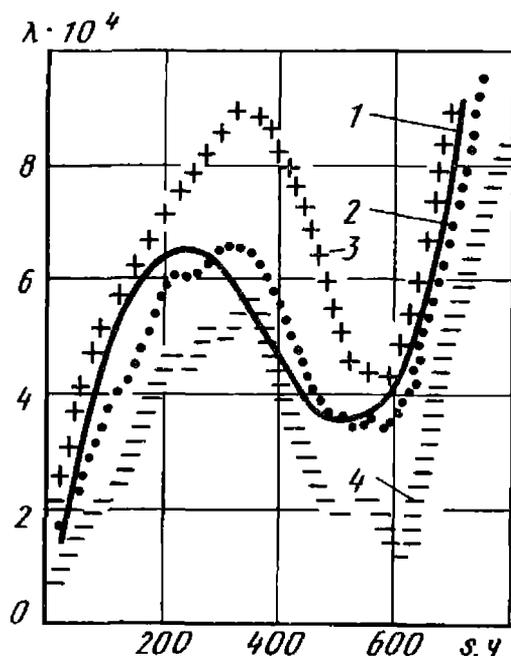


Рис. 11. Результаты эмпирического моделирования (см. обозначения в рис. 10)

стичный ответ на вопрос о точности множительных, аддитивных и ядерных оценок дают соответствующие этим оценкам асимптотические  $\gamma$ -доверительные интервалы. Как показывают результаты моделирования, фактический коэффициент доверия этих интервалов при росте числа порций  $m$  тем медленнее сходится к  $\gamma$ , чем ближе  $\gamma$  к единице. Поэтому используется еще один метод, который выявляет точность оценок.

Описание метода эмпирического моделирования. На основе массива данных  $Y_l$  нужно найти оценки всех ф. р. набора  $F = (F_1, \dots, F_r)$  и мешающего параметра  $\theta$ . Пара  $\hat{F} = (\hat{F}_1, \dots, \hat{F}_r)$ ,  $\hat{\theta}$  определяет распределение  $P_{\hat{F}, \hat{\theta}}$  в множестве  $Y_m$  возможных значений массивов данных. На ЭВМ, используя значения  $\hat{F}$ ,  $\hat{\theta}$  как истинные, получают заданное число  $M$  независимых копий массивов данных  $\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_M$ . Для получения каждой копии: а) моделируется процесс наблюдения реализаций, б) на основе реализаций образуются порции данных, в) полученные порции данных объединяются в массив данных, г) строится нужная порядковая таблица, д) на основе этой таблицы проводится расчет множительных оценок

ф. р., функции ресурса или ядерной оценки функции интенсивности отказа. Таким образом,  $k$ -й копии массива  $\tilde{Y}_k$  соответствуют оценки  $\hat{F}_{lk}(s)$ ,  $\hat{\Lambda}_{lk}(s)$ ,  $\hat{\lambda}_{lk}(s)$ . Значению наработки  $s$  ставят в соответствие вариационный ряд, образованный упорядоченными по величине значениями рассматриваемой оценки. Например, при оценивании функции интенсивности отказа получается вариационный ряд

$$\hat{\lambda}_{l(1)}(s) \leq \hat{\lambda}_{l(2)}(s) \leq \dots \leq \hat{\lambda}_{l(M)}(s). \quad (45)$$

Пусть  $M^- = \left[ M \cdot \frac{1-\gamma}{2} \right]$ ,  $M^+ = \left[ M \cdot \frac{1+\gamma}{2} \right]$ , где  $[\cdot]$  — целая часть числа. Для получения аналога  $\gamma$ -доверительного интервала для  $\lambda_l(s)$  нужно взять в качестве нижней (верхней) границы  $M^-$ -е ( $M^+$ -е) значение вариационного ряда (45), т. е. значения  $\hat{\lambda}_{l(M^-)}(s)$  ( $\hat{\lambda}_{l(M^+)}(s)$ ). В случае оценивания  $\bar{F}_l(s)$  следует взять порядковые значения  $\hat{F}_{l(M^-)}(s)$ ,  $\hat{F}_{l(M^+)}(s)$ . Есть основание считать, что величина разности  $\hat{\lambda}_{l(M^+)}(s) - \hat{\lambda}_{l(M^-)}(s)$  или  $\hat{F}_{l(M^+)}(s) - \hat{F}_{l(M^-)}(s)$  будет приблизительно соответствовать ширине  $\gamma$ -доверительного интервала для  $\lambda_l(s)$  или  $\bar{F}_l(s)$ .

Пример. Допустим, что в нашем распоряжении имеются наблюдения 200 реализаций альтернирующего процесса, полученных согласно примеру на с. 42. По этим данным рассчитываются множительные оценки  $\hat{F}_1(\cdot)$  и  $\hat{F}_2(\cdot)$  для ф. р. продолжительностей безотказной работы и ремонта. График оценки  $\hat{F}_1(\cdot)$  приведен на рис. 8. Найденные множительные оценки  $\hat{F}_1(\cdot)$  и  $\hat{F}_2(\cdot)$  полностью определяют распределение возможных значений массива  $\tilde{Y}_l \in Y_m$ . На ЭВМ были смоделированы 30 копий массивов, каждая из которых содержала 200 порций данных о наблюдениях альтернирующих процессов с ф. р.  $F_1(\cdot)$ ,  $F_2(\cdot)$  и теми же длительностями на-

блюдений  $t_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, 200$ , которые соответствуют исходным данным. Рассматривалась задача оценивания ширины  $\gamma$ -доверительных интервалов для  $\lambda_1$ , когда  $M^- = 1$ ,  $M^+ = 30$ , что соответствует  $\gamma = 0,933$ . Результаты эмпирического моделирования приведены на рис. 11, где знаки «—» и «+» соответствуют значениям  $\hat{\lambda}_{1(1)}(s)$  и  $\hat{\lambda}_{1(30)}(s)$ . На моделирование затрачено более 20 мин на ЭВМ ЕС-1045. При каждом  $s$  ширина  $\gamma$ -интервала для  $\lambda_1(s)$  оценивается шириной полосы, образованной знаками «+» и «—».

Описанный метод относится к так называемым статистическим методам с интенсивным использованием ЭВМ. Теоретическое обоснование применимости метода эмпирического моделирования для обработки больших массивов неполных данных пока еще не получено. Поэтому метод эмпирического моделирования или метод бутстрапа следует пока рассматривать как эвристический метод.

## 8. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ РАСЧЕТОВ

Хранение больших объемов данных и получение на их основе обоснованных выводов о показателях надежности невозможно без применения средств вычислительной техники. Тип ЭВМ и операционная система обуславливают использование соответствующей системы управления базами данных. Конкретные расчеты показателей надежности приводятся с использованием специально разработанных программ, комплексов программ или пакетов прикладных программ, содержащих программы, допускающие обработку данных о надежности.

В широко используемом при обработке медико-биологических данных пакете прикладных программ ВМДР содержится специальный раздел, посвященный анализу таблиц данных с временами жизни. Раздел содержит две программы. Первую программу этого раздела можно использовать для расчета множительной оценки ф. р. продолжительности безотказной работы, таблиц выживаемости для группированных данных и аналогов гисто-

грамм интенсивности отказа и плотности вероятности отказа. Вторая программа предназначена для оценивания коэффициентов  $b_a$ , определяющих влияние ковариат в модели пропорциональных рисков, когда функция интенсивности отказов определяется соотношением (44). Эта же программа дает возможность проверить гипотезу о равенстве нулю любого выбранного набора коэффициентов  $b_a$ . Если верна гипотеза  $b_a = 0$ , то значения ковариаты  $U_a$  не оказывают влияния на продолжительность безотказной работы.

Комплекс программ *POD*, разработанный в МГУ, дает возможность расчета на ЭВМ всех результатов приведенной выше теории непараметрического точечного и интервального оценивания показателей надежности. Комплекс программ *POD* поддерживается ОС ЕС. Все программы написаны на Фортране.

Комплекс программ *POD* содержит четыре раздела: I — программы предварительной обработки данных; II раздел — основные программы; III — вспомогательные программы; IV — программы моделирования.

## 9. ДАННЫЕ ТИПА ДОЗА—ЭФФЕКТ (УДАРНЫЕ ИСПЫТАНИЯ)

Неполнота данных о надежности изделий и систем может быть связана с другими схемами цензурирования данных, отличающимися от ранее описанных схем цензурирования справа.

Допустим, что у  $i$ -го изделия случайная продолжительность исправной работы до наступления отказа равна  $S_i$ . Ф. р. продолжительности безотказной работы  $F(s) = P(S_i \leq s)$  неизвестна. О моменте наступления отказа можно получить лишь неполную информацию. Изделие проверяется в случайный момент  $Z_i$ , при этом становится известным, что наступило событие ( $S_i < Z_i$ ) или событие ( $S_i > Z_i$ ). Случайная величина  $Z_i$  имеет ф. р.  $G(s) = P(z_i \leq s)$ . Таким образом, данные о надежности  $i$ -го изделия и представлены парой чисел  $X_i = (Z_i, \Gamma_i)$ , где  $\Gamma_i = 1 (S_i \leq Z_i) = -1 (S_i > Z_i)$ . В простейшей схеме данные о надежности  $m$  изделий можно

представить набором независимых пар чисел

$$X_1 = (Z_1, \Gamma_1), \dots, X_m = (Z_m, \Gamma_m). \quad (46)$$

Задача состоит в получении точечной оценки для ф. р.  $F(\cdot)$  на основе данных (46). Данные вида (46) называются двусторонне цензурированными. Типичны не только для описания надежности технических устройств, но и для некоторых медико-биологических экспериментов. Поэтому данные вида (46) называют данными типа доза—эффект. Они также могут быть получены в результате испытаний на надежность при одиночных ударных воздействиях. Здесь  $Z_i$  соответствует силе удара;  $\Gamma_i = +1$ , если изделие в результате такого удара отказало;  $\Gamma_i = -1$ , если изделие выдержало удар и осталось работоспособным.

К двусторонне цензурированным данным приводят также некоторые модели профилактических проверок систем контроля технических устройств. Предположим, что некоторая система контроля через случайные интервалы времени  $Z_i$  проходит проверку и полное профилактическое восстановление. При этом становится известным, отказала система контроля к моменту проверки или нет. Если считать время контроля и восстановления пренебрежимо малым, то за календарное время  $T$  будет проведено  $m$  проверок, когда

$$Z_1 + Z_2 + \dots + Z_m \leq T < Z_1 + \dots + Z_m + Z_{m+1}. \quad (47)$$

Пусть  $S_i$  — случайное время, отсчитываемое от момента  $(i-1)$ -й проверки до наступления отказа системы контроля. Положим  $\Gamma_i = 1$ , если к моменту  $i$ -й проверки система контроля отказала;  $\Gamma_i = -1$ , если к моменту  $i$ -й проверки система контроля не отказала. В итоге мы получим данные вида (46), где, однако, число пар  $m$  будет случайным, а значения  $Z_i$  будут зависимы, так как они должны удовлетворять неравенствам (47). Задача состоит в получении оценки для ф. р.  $F(s) = P(S_i \leq s)$ ,  $s > 0$ . Точечные оценки  $\hat{F}(\cdot)$  для ф. р.  $F(\cdot)$  можно

получить на основе обобщенного принципа максимального правдоподобия. В модели  $m$  независимых испытаний и в модели  $m$  профилактических проверок систем контроля обобщенная функция правдоподобия

$$L(F_1, G; F_2, G; X_1, \dots, X_m) = \frac{\prod_{i=1}^m F_1(Z_i)^{\Gamma_i=1} \bar{F}_1(Z_i)^{\Gamma_i=-1}}{\sum_{j=1, 2} \prod_{i=1}^m F_j(Z_i)^{\Gamma_i=1} \times \bar{F}_j(Z_i)^{\Gamma_i=-1}} \quad (48)$$

и не зависит от ф. р.  $G(\cdot)$ , играющей роль мешающего параметра.

Пусть  $Z_{(1)}, Z_{(2)}, \dots, Z_{(n)}$  — все упорядоченные по величине различные значения величин  $Z_i$ , т. е.  $Z_{(1)} < Z_{(2)} < \dots < Z_{(n)}$ . Если среди значений  $Z_i$  есть совпадающие, то  $n < m$ ,  $m - n$  — число таких совпадений. Данным (46) поставим в соответствие таблицу доз и эффектов

$$D_m = \begin{pmatrix} Z_{(1)}, \dots, Z_{(h)}, \dots, Z_{(n)} \\ f_{(1)}, \dots, f_{(h)}, \dots, f_{(n)} \\ c_{(1)}, \dots, c_{(h)}, \dots, c_{(n)} \end{pmatrix}, \quad (49)$$

где  $f_{(h)} = \sum_{i=1}^m 1(Z_i = Z_{(h)}, \Gamma_i = 1)$  — число случаев, когда  $Z_i = Z_{(h)}$  и  $\Gamma_i = 1$ ,  $c_{(h)} = \sum_{i=1}^m 1(Z_i = Z_{(h)}, \Gamma_i = -1)$ .

Табл. (49) доз и эффектов похожа на порядковую табл. (7). Однако числа  $Z_{(h)}$ ,  $f_{(h)}$  и  $c_{(h)}$  имеют отличную интерпретацию. Получение статистических выводов на основе табл. (49) принципиально отлично от получения статистических выводов на основе порядковой табл. (7). Согласно выражению (48) обобщенная оценка макси-

мального правдоподобия  $\widehat{F}(\cdot)$  должна удовлетворять соотношению

$$\prod_{h=1}^n \widehat{F}(Z_{(h)})^{f_{(h)}} \widehat{F}(Z_{(h)})^{c_{(h)}} = \max_{F(\cdot)} \prod_{h=1}^n F(Z_{(h)})^{f_{(h)}} \overline{F}(Z_{(h)})^{c_{(h)}}, \quad (50)$$

где  $\overline{F}(Z_{(h)}) = 1 - F(Z_{(h)})$ , а максимум берется в классе всех ф. р.  $F(\cdot)$  неотрицательных случайных величин, при этом допускается возможность неравенства  $F(Z_{(h)}) < 1$ . Соотношением (50) обобщенная оценка максимального правдоподобия определяется только для значений  $Z_{(h)}$ ,  $h = 1, \dots, n$ . На интервалах  $[Z_h, Z_{h+1}]$  оценку  $\overline{F}(\cdot)$  можно доопределить разными способами, например считать  $\widehat{F}(s) = F(Z_{(h)})$ , когда  $Z_{(h)} \leq s < Z_{(h+1)}$ .

Обобщенную оценку максимального правдоподобия можно получить в рамках теории изотонного оценивания [2]. Положим  $F_h = F(Z_{(h)})$ ,  $0 \leq F_1 \leq F_2 \leq \dots \leq F_n \leq 1$ . Каждому подмножеству  $Q \subset Q_0 = (1, 2, \dots, n)$  поставим в соответствие число

$$K(Q) = \sum_{h \in Q} f_{(h)} / \sum_{h \in Q} (f_{(h)} + c_{(h)}), \quad (51)$$

где  $f_{(h)}$ ,  $c_{(h)}$ —числа второй и третьей строк таблицы доз и эффектов. Формула (51) определяет функцию  $K(\cdot)$  на подмножествах целых чисел  $(1, 2, \dots, n)$ . Если  $Q_1$  и  $Q_2$ —любые непересекающиеся подмножества множества  $(1, 2, \dots, n)$ , то выполняются неравенства

$$\min(K(Q_1), K(Q_2)) \leq K(Q_1 \cup Q_2) \leq \max(K(Q_1), K(Q_2)). \quad (52)$$

Функция подмножества  $Q \subset (1, \dots, n)$ , удовлетворяющая неравенствам (52), называется функцией Коши.

Алгоритм получения изотонной оценки максимального правдоподобия. Для нахождения обобщенной оценки максимального правдоподобия применяют алгоритм объединения соседних нарушителей — алгоритм ОСН.

Алгоритм ОСН состоит из последовательности шагов. На первом шаге рассматривается разбиение  $Q_0 = (1, \dots, n)$  на  $n$  непересекающихся одноточечных подмножеств  $Q_{d,1} = (d)$ ,  $d = 1, \dots, n$ . Для этих подмножеств вычисляются значения функций Коши  $K(Q_{d,1}) = f_{(d)} / (f_{(d)} + c_{(d)})$ . Последовательно проверяется выполнение неравенств  $K(Q_{1,1}) \leq K(Q_{2,1})$ ,  $K(Q_{2,1}) \leq K(Q_{3,1})$  и т. д. Если все такие неравенства выполнены, т. е.  $K(Q_{d,1}) \leq K(Q_{d+1,1})$ ,  $d = 1, \dots, n-1$ , то полагаем  $\widehat{F}_d = K(Q_{d,1})$  и считаем алгоритм завершенным за один шаг. Если найдено первое нарушение неравенств, т. е.  $K(Q_{d,1}) \leq K(Q_{d+1,1})$  для  $d = 1, \dots, d_1 - 1$ , но  $K(Q_{d_1,1}) > K(Q_{d_1+1,1})$ , то множества  $Q_{d_1,1}$  и  $Q_{d_1+1,1}$  объявляются соседними нарушителями. В таком случае образуется новое разбиение множества  $Q_0 = (1, \dots, n)$  на непересекающиеся подмножества  $Q_{d,2} = Q_{d,1}$ , если  $d < d_1$  или  $d > d_1 + 1$ ,  $Q_{d_1,2} = Q_{d_1,1} \cup Q_{d_1+1,1} = (d_1, d_1 + 1)$ . Другими словами, новое разбиение  $Q_0$  на непересекающиеся подмножества  $Q_{d,2}$  получилось в результате объединения соседних нарушителей. Допустим, что к  $r$ -му шагу получено разбиение  $Q_0$  на непересекающиеся подмножества  $Q_{d,r}$ ,  $d = 1, \dots, n_r$ ,  $n_r < n$ . Тогда на  $r$ -м шаге последовательно проверяется выполнение неравенств  $K(Q_{1,r}) \leq K(Q_{2,r})$ ,  $K(Q_{2,r}) \leq K(Q_{3,r})$  и т. д. Если выполняются все неравенства, т. е.  $K(Q_{d,r}) \leq K(Q_{d+1,r})$ ,  $d = 1, \dots, n_r - 1$ , то считаем алгоритм завершенным на  $r$ -м шаге и полагаем  $\widehat{F}_h = K(Q_{d,r})$ , когда  $h \in Q_{d,r}$ . Если найдено первое нарушение неравенств, т. е.  $K(Q_{d,r}) \leq K(Q_{d+1,r})$ ,  $d = 1, \dots, d_r - 1$ , но  $K(Q_{d_r,r}) > K(Q_{d_r+1,r})$ , то множества  $Q_{d_r,r}$  и  $Q_{d_r+1,r}$  объявляются соседними нарушителями. В таком случае образуется новое разбиение  $Q_0$  на непересекающиеся подмножества  $Q_{d,r+1}$ ,  $d = 1, \dots, n_{r+1}$ ,  $n_{r+1} = n_r - 1$ . В этом разбиении  $Q_{d,r+1} = Q_{d,r}$ ,  $d < d_r$ ,  $Q_{d,r+1} = Q_{d+1,r}$ ,  $d > d_r + 1$ ,  $Q_{d_r,r+1} = Q_{d_r,r} \cup Q_{d_r+1,r}$ . Следующий  $(r+1)$ -й шаг аналогичен  $r$ -му шагу, но в качестве подмно-

## 2. Результаты расчета изотонной оценки

Номер шага	Результаты расчета							
	(1) 0	(2) 1	(3) 0	(4) —	(5) —	(6) —	(7) —	(8) —
1	(1) 0	(2, 3) 1/2	(4) 1	(5) 1	(6) 0	(7) —	(8) —	
2	(1) 0	(2, 3) 1/2	(4) 1	(5, 6) 1/2		(7) —	(8) —	
3	(1) 0	(2, 3) 1/2	(4, 5, 6) 2/3			(7) 1	(8) 1	
4	(1) 0	(2, 3) 1/2	(4, 5, 6) 2/3			(7) 1	(8) 1	

Примечание. В скобках, в числителе, приведены подмножества  $Q_{d,r}$  номеров столбцов таблицы доз и эффектов, в знаменателе — значения функции Коши, соответствующие этим подмножествам.

жеств разбиения берутся подмножества  $Q_{d,r+1}$ ,  $d = 1, \dots, n_r + 1$ . При переходе к следующему шагу число подмножеств, составляющих разбиение, уменьшается на единицу. Поэтому алгоритм ОСН завершается не более чем за  $n$  шагов.

Пусть в алгоритме ОСН последним является  $r$ -й шаг, а подмножества разбиения  $Q_{d,r} = (i_d, i_d + 1, \dots, i_d + j_d)$ ,  $d = 1, \dots, n_r$ . Тогда значение в момент  $s$  искомой обобщенной оценки максимального правдоподобия для ф. р.  $F(\cdot)$  находим по формуле

$$\hat{F}(s) = \begin{cases} 0, & 0 \leq s < Z_{(1)}; \\ K(Q_{d,r}), & \text{если } Z_{(h)} \leq s < Z_{(h+1)}, \\ & h \in Q_{d,r}. \end{cases} \quad (53)$$

Оценка  $\hat{F}(\cdot)$ , задаваемая формулой (53), называется изотонной оценкой максимального правдоподобия.

Точность изотонной оценки (53) исследована недостаточно. Для полу-

чения представления о разбросе значений найденной изотонной оценки можно воспользоваться эвристическим методом эмпирического моделирования, который аналогичен описанному в параграфе 7. При этом в качестве истинной ф. р.  $F(\cdot)$  берется ее изотонная оценка  $\hat{F}(\cdot)$ . Далее моделируется  $M$  независимых копий данных типа доза—эффект. Для каждой копии рассчитывается с использованием алгоритма ОСН своя изотонная оценка. Изменчивость полученных таким способом  $M$  изотонных оценок отражает возможную изменчивость найденной изотонной оценки (53).

Пример. Допустим, что данным в модели профилактических проверок систем контроля соответствует таблица доз и эффектов

$$D_8 = \begin{pmatrix} 11 & 25 & 34 & 39 & 41 & 53 & 71 & 80 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Результаты расчетов с использованием алгоритма ОСН представлены в табл. 2.

На последнем четвертом шаге алгоритма ОСН подмножества разбиения

$$Q_{1,4} = (1), Q_{2,4} = (2, 3),$$

$$Q_{3,4} = (4, 5, 6), Q_{4,4} = (7),$$

$$Q_{5,4} = (8).$$

На первом шаге  $K(Q_{1,1}) = 0$ ,  $K(Q_{2,1}) = 1 > K(Q_{3,1}) = 0$ . Следовательно, на первом шаге соседними нарушителями являются множества  $Q_{2,1} = (2)$  и  $Q_{3,1} = (3)$ . Их объединение дает множество  $Q_{2,2} = (2,3)$ , которому соответствует значение  $K(Q_{2,2}) = 1/2$ . На втором шаге выявляются соседние нарушители  $Q_{4,2} = (5)$  и  $Q_{5,2} = (6)$ , так как  $K(Q_{4,2}) = 1 > K(Q_{5,2}) = 0$ . На чет-

вертом шаге соседних нарушителей нет. Расчеты заканчиваются. Согласно формуле (53) получаем изотонную оценку максимального правдоподобия

$$\widehat{F}(s) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq s < 25; \\ 1/2, & \text{если } 25 \leq s < 39; \\ 2/3, & \text{если } 39 \leq s < 71; \\ 1, & \text{если } 71 \leq s. \end{cases}$$

При накоплении двусторонне цензурированных данных независимых наблюдений соответствующие этим наблюдениям таблицы доз и эффектов агрегируются в общую таблицу доз и эффектов по правилу, аналогичному агрегации порядковых таблиц.

# Глава 3. Управляемые марковские и полумарковские процессы в задачах эксплуатации

## 1. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Цель оптимизации технического обслуживания системы состоит в обеспечении наибольшей ее эффективности в заданном комплексе условий применения с учетом реальных ограничений на ресурсы (стоимость, габариты, энергозатраты и т. п.). Для решения задач оптимизации применяются натурные испытания, математическое моделирование, комбинированные методы. Любой метод оптимизации основывается на четко определенном наборе критериев.

Критерием называется количественный показатель, характеризующий качество выполнения системой ее функций в заданных условиях использования. Таким образом, критерий в общем случае есть функция  $w(\theta)$ , где  $\theta$  — набор параметров, определяющих условия использования системы. Усреднив условия по некоторому распределению вероятностей либо по функции, задающей относительную важность различных значений параметров, получим

$$\bar{w} = \int_{\Theta} w(\theta) \mu(d\theta), \quad (1)$$

где  $\Theta$  — пространство значений  $\theta$ . Критерии вида (1) применяются чаще всего к системам непрерывного действия, от которых требуется наибольшее значение какого-либо среднего показателя (производительности, дохода и др.). В применении к задачам надежности, особенно высокоответственных систем, играют большую роль экстремальные критерии вида

$$\max_{\theta \in \Theta} w(\theta), \quad \min_{\theta \in \Theta} w(\theta).$$

Подобные критерии задаются при проектировании систем, рассчитанных на определенный диапазон условий использования. Обычно система характеризуется не одним, а набором критериев  $w_1, w_2, \dots$ , из которых один, например  $w_1$ , подлежит максимизации (минимизации), остальные должны находиться в заданных пределах. Нередко удается рациональным образом установить относительные веса различных критериев и свести задачу к экстремуму некоторой линейной комбинации  $c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots$  при фиксированном значении  $\theta$ ; поэтому для краткости этот символ в дальнейшем опускается.

При решении задачи оптимизации математическим методом строится вероятностная модель функционирования системы в виде случайного процесса  $\xi(t) = \xi(t, \omega)$ , где  $\omega$  — элементарное событие пространства  $\Omega$ . Элементарное событие — это совокупность всех случайных воздействий, при фиксировании которых поведение системы становится вполне детерминированным. Таким образом,  $\xi(t, \omega)$  есть неслучайная функция переменных  $t, \omega$ , и лишь из-за случайности самого  $\omega$  эта функция становится случайной.

Функция времени  $\xi(t, \omega)$  при фиксированном элементарном событии  $\omega$  называется траекторией случайного процесса, которая определяет частное поведение системы при фиксированных значениях всей совокупности случайных воздействий.

Критерию  $w$  соответствует некоторый показатель качества:

$$w = Mf, \quad (2)$$

где  $f = f(\xi(t, \omega), t \in T)$ , а  $T$  есть отрезок времени (возможно, завися-

ций от  $\omega$ ), на котором рассматривается поведение системы.

Виды показателя качества в различных системах весьма разнообразны. Тем не менее существует несколько характерных типов, которые перечисляются ниже.

Средневременной эффект

$$f = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} \varphi(t) dt, \quad (3)$$

где  $\varphi(t)$  — мгновенное значение какого-либо, например, экономического показателя в момент  $t$ . Подобным образом определяется средняя мощность энергетической установки, средний удельный доход и многие другие показатели.

Средний эффект по событиям в интервале времени

$$f = \frac{1}{T} \sum_{a \leq t_i < a+T} \varphi(t_i), \quad (4)$$

где  $t_i$  — моменты наступления некоторого события (отказа элемента системы, восстановления элемента, срабатывания системы контроля, поступления требования на обслуживание и т. п.);  $\varphi(t_i)$  — эффект, характеризующий качество операции системы, связанной с событием в момент  $t_i$ . К виду (4) приводятся такие показатели, как число отказов элементов системы или самой системы в единичном интервале времени, убыток вследствие отказов и многие другие.

Средний эффект в расчете на одно событие

$$f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(t_i), \quad (5)$$

где  $t_i$  — последовательные моменты событий.

Индикатор нахождения процесса в заданной области  $A$

$$I_A(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \xi(t) \in A; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (6)$$

Максимальное отклонение процесса от номинального значения в данном интервале:

$$g(T) = \max_{a \leq t < a+T} \rho(\xi(t), \eta(t)), \quad (7)$$

где  $\rho$  — расстояние (например, обычное евклидово в  $m$ -мерном пространстве).

Индикатор выполнения операций в данном интервале с данным качеством

$$I = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi(t_i) \in A, a \leq t_i < a+T; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (8)$$

где  $\varphi(t_i)$  — показатель качества выполнения  $i$ -й операции (например, качества обслуживания  $i$ -го требования);  $t_i$  — момент соответствующего события (например, окончания обслуживания).

Индикатор выполнения операций с данным качеством

$$I_N = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi(t_i) \in A, 1 \leq i \leq N; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (9)$$

Перечисленные показатели относятся к конечному времени функционирования системы или конечному числу событий, связанных с ним. Критерии, соответствующие этим показателям, представляют собой либо средние эффекты (математическое ожидание значения случайного процесса, интенсивность потока однородных событий), либо вероятности событий. Так, например, усреднение показателя (9) по вероятностной мере дает вероятность обслуживания первых  $N$  требований с данным качеством. Данные критерии являются нестационарными. В частном случае, когда случайный процесс, определяющий функционирование системы, стационарен, критерии, соответствующие показателям (3)—(5), не зависят от длины  $T$  интервала осреднения, а следовательно, являются стационарными. Если существует стохастический предел при неограниченном увеличении интервала осреднения или числа событий, то этот предел называется стационарным критерием. Примеры стационарных

критериев: средняя производительность станка, интенсивность отказов системы. Критерии, соответствующие показателям (3)—(8), при  $T \rightarrow \infty$  обычно превращаются в заранее известные числа. Так, вероятность безотказной работы системы в бесконечном интервале равна нулю.

В расчетных методах широко используются показатели и критерии с переоценкой, которые могут быть использованы в двух вариантах.

**Дискретный вариант.** Пусть  $w_i$  — эффект, связанный с  $i$ -м событием. Этому эффекту придается вес  $\beta^{i-1}$ , где  $0 < \beta < 1$  — заданное число; тогда в качестве показателя берется величина

$$w_\beta = \sum_{i=1}^{\infty} \beta^{i-1} w_i. \quad (10)$$

Если с вероятностью единица существует стационарный показатель

$$\bar{w} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i, \quad (11)$$

причем  $w_i$  — равномерно ограниченные случайные величины, то с вероятностью единицы

$$\bar{w} = \lim_{\beta_n \uparrow 1} (1 - \beta_n) w_{\beta_n}. \quad (12)$$

**Непрерывный вариант.** Эффекту  $\varphi(\xi(t))$ , связанному со значением процесса  $\xi(t)$  в момент  $t$ , сопоставим вес  $e^{-\alpha t}$  и определим показатель

$$f_\alpha = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \varphi(\xi(t)) dt. \quad (13)$$

При широких условиях с вероятностью единицы

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha f_\alpha = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\xi(t)) dt. \quad (14)$$

Таким образом, при достаточно малых  $1 - \beta$  и  $\alpha$  критериями  $M(1 - \beta)w_\beta$ ,  $M\alpha f_\alpha$  можно пользоваться в качестве приближения стационарных критериев.

Во многих случаях переходить к пределу при  $\beta \rightarrow 1$ ,  $\alpha \rightarrow 0$  нет необ-

ходимости. Так, например,  $\alpha f_\alpha$  есть математическое ожидание. Значения процесса  $\varphi(\xi(t))$  в случайный момент времени  $\zeta$  распределены по экспоненциальному закону с параметром  $\alpha$ .

Часто задачи оптимизации решаются по приближенным критериям вместо точных, если это создает вычислительный выигрыш и не сильно искажает результат. Рассмотрим важный пример.

Пусть основным критерием системы является вероятность  $P(T)$  безотказной работы системы на отрезке  $[0, T]$ . Предположим, что поведение системы описывается случайным процессом  $\xi(t)$  с дискретным множеством состояний; если  $\xi(t) = i$ , то вероятность отказа системы в интервале  $(t, t + dt)$  равна  $\lambda_i(t) dt$ . Если  $\lambda_i(t)$  — малые величины, а  $\xi(t)$  — процесс, время корреляции которого мало по сравнению с  $T$ , то

$$P(T) \approx 1 - \sum_i \int_0^T \lambda_i(t) p_i(t) dt, \quad (15)$$

где  $p_i(t) = P(\xi(t) = i)$ . Следовательно, вместо максимизации  $P(T)$  с некоторой степенью погрешности переходим к задаче минимизации интегрального функционала, который, в свою очередь, приближенно равен  $T \sum_i \bar{\lambda}_i \bar{p}_i$ , где  $\bar{p}_i = \lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t)$ ,  $\bar{\lambda}_i$  — временные средние  $\lambda_i(t)$ .

## 2. ВЛОЖЕННЫЕ ЦЕПИ МАРКОВА И ЭРГОДИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ КРИТЕРИЕВ

Для многих систем характерно наличие вложенной цепи Маркова. Пусть поведение системы описывается случайным процессом  $\xi(t)$ . Предположим, что существует последовательность моментов времени  $t_1 < t_2 < \dots$  такая, что последовательность случайных величин  $\xi_n = \xi(t_n)$  образует однородную цепь Маркова. Тогда  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  называется вложенной цепью Маркова данного процесса  $\xi(t)$ . Вложенные цепи Маркова характерны, например, для моделей технических систем с дискретным множеством со-

стояний. Приведем достаточно общую модель функционирования системы, приводящую к вложенной цепи Маркова.

Система состоит из конечного числа элементов и может находиться в конечном числе качественно различных состояний. Последние различаются техническим состоянием элементов (исправен, неисправен), а также операциями, производимыми над элементами (восстановление, профилактический осмотр и т. п.). Длительности операций распределены по произвольным законам, в то время как длительности безотказной работы элементов — по экспоненциальному (показательному) закону. Время от времени система попадает в такие состояния, когда начинается полное восстановление или замена отказавших элементов. Состояния системы в эти моменты и образуют вложенную цепь Маркова, поскольку в любой из указанных моментов дальнейшее поведение системы зависит только от качественной переменной, а именно состава отказавших элементов.

В простейшем случае основной показатель есть сумма доходов, получаемых в моменты смены состояний цепи Маркова, а именно при попадании ее в состояние  $i$  получается доход  $f_i$ . Суммарный доход относится к числу переходов цепи Маркова. Тогда в случае существования эргодического распределения  $\{\pi_j\}$  вложенной цепи Маркова оптимизируемый критерий имеет вид

$$I = \sum_i f_i \pi_i, \quad (16)$$

как и в случае полумарковского процесса. Если доход относится к длине интервала времени, в котором он получается, имеем

$$I = \sum_j f_j \pi_j / \tau_j \pi_j, \quad (17)$$

где  $\tau_j$  — среднее время от момента  $t_i$ , когда  $\xi_i = j$ , до момента  $t_{i+1}$ . (Данная формула выполняется при существовании эргодического среднего длительностей пребывания в том или ином состоянии).

Формулы (16), (17) справедливы и в том случае, когда доход выплачивается не точно в момент  $t_i$ , а относится к отрезку  $[t_i, t_{i+1}]$  и является случайной величиной, причем  $\tau_j$  — ее математическое ожидание при условии  $\xi_i = j$ .

### 3. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЦЕПЯМИ МАРКОВА

Пусть имеется система [42], в любой момент  $n = 0, 1, 2, \dots$  находящаяся в некотором состоянии конечного множества  $S = \{1, 2, \dots, N\}$ . Без ограничения общности можно считать  $S = \{1, 2, \dots, N\}$ . Состояние системы в момент  $n$  обозначим  $\xi_n$ . К системе применяется управление, состоящее в последовательности решений  $k_0, k_1, \dots$ , где  $k_n$  — решение, принимаемое в момент времени  $n$  после наблюдения  $\xi_n$ . Если  $\xi_n = i$ , то решение  $k_n \in K_i$ , где  $K_i$  — конечные множества.

Пусть  $\xi_n = i, k_n = k$ . Тогда, независимо от  $\xi_0, \dots, \xi_{n-1}, k_0, \dots, k_{n-1}$  система переходит в состояние  $j$  с вероятностью  $p_{ij}^k$  и в момент  $n$  получается доход  $r_i^k$ .

Пусть  $K = K_1 \times \dots \times K_N$ . Данное множество называется пространством политик. Точка  $(k_1, \dots, k_N) \in K$  называется политикой. Физический смысл политики состоит в том, что при состоянии системы  $i$  принимается решение  $k_i$ .

Стратегией называется последовательность политик  $\pi = (f_0, f_1, \dots)$ , где  $f_n$  — политика, применяемая на  $n$ -м шаге. Стационарной называется стратегия вида  $f^\infty = (f, f, f, \dots)$ . При заданной стратегии  $\pi$  последовательность  $(\xi_n)$  есть неоднородная цепь Маркова с матрицей перехода за  $n$  шагов:

$$P_n(\pi) = P(f_1) \cdot \dots \cdot P(f_n),$$

где  $P(f_n) = \|p_{ij}^{f_n(t)}\|$ ;  $f_n = (f_n(1), \dots, f_n(N))$ ,  $P_0(\pi) = I$  (единичная матрица).

Обозначим  $r(f) = \begin{pmatrix} r_1^f(i) \\ \vdots \\ r_N^f(i) \end{pmatrix}$ , назвав

этот вектор вектором доходов. Компонента  $i$  этого вектора есть доход, получаемый в момент  $n$ , если  $\xi_n = i$  и применяется политика  $f_n = f$ . Поскольку в наиболее интересных случаях суммарный доход за бесконечное время бесконечен, то вводят коэффициент переоценки  $\beta$ , считая доход в момент  $n$  при сформулированных выше условиях равным  $\beta^n r_i^f(i)$ . Назовем вектором суммарных доходов вектор-столбец  $v_\beta(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n P_n(\pi) r(f_n)$ .

Назовем  $\beta$ -оптимальной стратегией стратегию  $\pi$ , максимизирующую все компоненты  $v_\beta(\pi)$ , т. е. дающую максимальный доход при любом начальном состоянии системы.

**Теорема.** При  $0 \leq \beta < 1$  существует  $\beta$ -оптимальная стратегия.

Эта стратегия находится итерационным алгоритмом Ховарда за конечное число итераций. Алгоритм Ховарда состоит в следующем. Начинаем с произвольной стационарной стратегии  $f^\infty$ .

а) Процедура определения весов. Решаем систему уравнений

$$v_i = r_i^k + \beta \sum_j p_{ij}^k v_j,$$

где  $k = f(i)$ .

б) Процедура улучшения решения. Пусть  $G(i, f)$  — множество тех  $k$ , для которых  $r_i^k + \beta \sum p_{ij}^k v_j > v_i$ . Если  $G(i, f) = \emptyset$  для всех  $i$ , то  $f^\infty$  есть  $\beta$ -оптимальная стратегия. В противном случае обозначим через  $S_+$  множество тех  $i$ , для которых  $G(i, f) \neq \emptyset$ , и построим стратегию  $g^\infty$ , где  $g(i)$  равно произвольному  $k$ , для которого  $r_i^k + \beta \sum p_{ij}^k v_j > v_i$  при  $i \in S_+$ ,  $g(i) = f(i)$  в противном случае.

Возвращаемся к процедуре определения весов.

Для  $\beta$ -оптимальной стратегии вектор  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}$  есть вектор суммарных

доходов. В качестве начального приближения можно рассмотреть, например, стратегию  $f^\infty$ , где  $f(i)$  — то значение  $k$ , для которого  $r_i^k$  максимально.

Стратегия  $\beta$ -оптимальная находится также с помощью алгоритма линейного программирования. Будем рассматривать класс стационарных рандомизированных стратегий, полагая, что при  $\xi_n = i$  решение  $k$  применяется с вероятностью, зависящей только от  $i$  и  $k$ . Обозначим  $\lambda_i^k(n) = P(\xi_n = i, f_n = k)$  и введем переменные  $x_j^k = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \lambda_j^k(n)$ . Задача максимизации

среднего суммарного дохода при начальном распределении  $a_i = P(\xi_0 = i)$  сводится к задаче линейного программирования:  $\max \sum r_j^k x_j^k$  при ограничениях  $\sum_k x_i^k - \beta \sum_k p_{ij}^k x_j^k = a_i, x_i^k \geq 0$ .

Существует решение данной задачи, для которого  $x_j^k$  равно 0 или 1, т. е. решение детерминировано.

Марковские процессы принятия решения без переоценки. При  $\beta = 1$  средний суммарный доход заменяется выражением

$$v(\pi) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{t-1} P_n(\pi) r(f_n);$$

предположим, что данный предел существует, тогда

$$v(\pi) = \lim_{\beta \uparrow 1} (1 - \beta) v_\beta(\pi).$$

Доказано существование стационарной стратегии, максимизирующей все компоненты вектора  $v(\pi)$ . Оптимальная стратегия в случае единственного класса сообщающихся состояний находится с помощью итерационного алгоритма Ховарда.

а) Процедура определения весов. Для данной стационарной стратегии  $k = f(i)$ . Решаем систему

$$g + v_i = r_i^k + \sum_{j=1}^{N-1} p_{ij}^k v_j$$

относительно переменных  $g, v_1, \dots, v_{N-1}$ , полагая  $v_N = 0$ .

б) Процедура улучшения решений. Обозначим через  $G(i, f)$  множество тех  $k$ , для которых  $r_i^k + \sum_{j=1}^{N-1} p_{ij}^k v_j > g + v_i$ . Если  $G(i, f) = \emptyset$  для всех  $i$ , то данная стратегия оптимальна. В противном случае заменяем  $f^\infty$  на  $g^\infty$ , где  $g(i)$  — любое  $k$ , для которого выполняется указанное неравенство  $G(i, f) = \emptyset$ ;  $g(i) = f(i)$  в противном случае.

Возвращаемся к процедуре определения весов. Эта же задача решается с помощью линейного программирования. Пусть  $\pi_i(f)$  — стационарная вероятность состояния  $i$  цепи Маркова  $(\xi_n)$  при стратегии  $f^\infty$ . Обозначим  $d_i^k$  вероятность принятия решения  $k$  в состоянии  $i$ .

Задача линейного программирования:

$$\max \sum_{i,k} r_i^k x_i^k$$

при ограничениях

$$\sum_k x_i^k - \sum_{i,k} p_{ij}^k x_i^k = 0, \quad \sum_{i,k} x_i^k = 1,$$

$$x_i^k \geq 0.$$

Существует нерандомизированное базисное решение, т. е.  $d_i^k$  или 1.

Процессы с поглощением. Пусть состояние 1 — поглощающее, остальные состояния невозвратные при любой стационарной стратегии. В качестве критерия возьмем средний суммарный доход до момента поглощения.

**Т е о р е м а.** Существует оптимальная стратегия, являющаяся стационарной.

Указанная стратегия находится с помощью итерационного алгоритма.

а) Процедура определения весов. Возьмем любую стационарную стра-

тегию  $f^\infty$ . Решим систему уравнений

$$v_i = r_i^k + \sum_{j=2}^N p_{ij}^k v_j, \quad i = 2, \dots, N.$$

б) Процедура улучшения стратегии. Обозначим  $G(i, f)$  множество тех  $k$ , для которых  $r_i^k + \sum_{j=2}^N p_{ij}^k v_j > v_i$ . Если хотя бы одно из этих множеств непусто, возьмем  $g(i) = k$ , где  $k$  удовлетворяет данному неравенству. Если  $G(i, f)$  пусто для данного  $i$ , положим  $g(i) = f(i)$ . Если  $g \neq f$ , то заменяем  $f^\infty$  на  $g^\infty$  и переходим к процедуре определения весов. Если  $G(i, f) = \emptyset$  для всех  $i$ , то  $f^\infty$  есть оптимальная стратегия.

Эта же задача решается методом линейного программирования:

$$\max \sum_{i=2}^N \sum_k r_i^k x_i^k$$

при ограничениях

$$\sum_k x_i^k - \sum_{i=2}^N \sum_k p_{ij}^k x_i^k = a_i,$$

$$i \leq j \leq N;$$

$$x_i^k \geq 0, \quad 2 \leq i \leq N.$$

#### 4. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОЛУМАРКОВСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

Полумарковским процессом (ПМП) называется ступенчатый случайный процесс  $\xi(t)$ , описываемый следующими условиями.

Пусть  $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$  — последовательные состояния процесса,  $z_0, z_1, z_2, \dots$  — длительности пребывания в них. Тогда при  $\xi_n = i$  и любой дополнительной информации относительно  $\xi_0, \dots, \xi_{n-1}, z_0, \dots, z_{n-1}$  событие  $\{\xi_{n+1} = j, z_n < t\}$  происходит с вероятностью  $Q_{ij}(t)$ , где  $\sum_j Q_{ij}(\infty) = 1$ . Случайная последовательность  $(\xi_n)$  называется вложенной цепью Маркова данного ПМП; эта последовательность — однородная

цепь Маркова с вероятностями перехода  $p_{ij} = Q_{ij}(\infty)$ .

Матрица  $Q = Q_{ij}(t)$  называется матрицей переходных распределений.

Функция  $H_i(t) = \sum_j Q_{ij}(t)$  есть функция распределения времени пребывания ПМП в состоянии  $i$ . Обозначим

$$P_{ij}(t) = P(\xi(t) = j | \xi(0) = i),$$

$G_{ij}(t)$  — вероятность хотя бы одного попадания процесса в состояние  $j$  в интервале  $(0, t)$  при условии  $\xi_0 = i$ ;  $M_{ij}(t)$  — математическое ожидание числа попаданий процесса в состояние  $j$  в интервале  $(0, t)$  при условии  $\xi_0 = i$ . Начало отсчета  $t = 0$ .

Далее будем применять преобразование Лапласа—Стилтьеса, для обозначения которого используются соответствующие строчные буквы: например,

$$q_{ij}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dQ_{ij}(t). \text{ Пусть также}$$

в случае, если элементы матрицы обозначены некоторой буквой с индексами, употребление этой буквы без индексов означает саму матрицу; это же относится и к векторам-столбцам.

Имеем соотношения

$$\begin{aligned} m(s) &= (I - q(s))^{-1} q(s) = \\ &= (I - q(s))^{-1} - I, \end{aligned}$$

$$q_{ij}(s) = m_{ij}(s)/(1 + m_{ij}(s)),$$

$$p_{ij}(s) = p_{ij}(s) q_{ij}(s),$$

$$p_{jj}(s) = (1 - h_j(s))/(1 - q_{jj}(s)).$$

Предположим, что средние длительности пребывания ПМП в различных состояниях конечны, и обозначим

$$\tau_{ij} = \int_0^{\infty} t dF_{ij}(t),$$

$$\tau_i = \int_0^{\infty} t dH_i(t) = \sum_j p_{ij} \tau_{ij}.$$

$$p_{ij} = \int_0^{\infty} t dG_{ij}(t),$$

$$p_{ij}^{(r)} = \int_0^{\infty} t^r dG_{ij}(t).$$

Тогда выполняются соотношения

$$p_{ij} = \sum_{k \neq i} p_{ik} p_{kj} + \tau_i,$$

$$\mu_{ij}^{(r)} = \sum_{k \neq i} p_{ik} [\mu_{kj}^{(r)} + 2\tau_{ik} \mu_{kj}^{(r-1)}] + \tau_i^{(r)},$$

где

$$\tau_i^{(r)} = \int_0^{\infty} t^r dH_i(t).$$

Если вложенная цепь Маркова обладает стационарными вероятностями  $\pi_j$ , то

$$p_{jj} = \sum_k \pi_k \tau_k / \pi_j,$$

$$\begin{aligned} \mu_{jj}^{(2)} &= \left[ \sum_k \pi_k \tau_k^{(2)} + \right. \\ &\left. + 2 \sum_{k \neq j} \pi_k \tau_{ik} \mu_{kj} \right] / \pi_j, \end{aligned}$$

$$P_{ij}(\infty) = G_{ij}(\infty) \tau_j / \mu_{jj}.$$

В случае эргодической вложенной цепи Маркова

$$P_{ij}(\infty) = \tau_j / \mu_{jj} = \pi_j \tau_j / \sum_k \pi_k \tau_k.$$

Полумарковские процессы с доходами. Пусть  $\alpha > 0$  — постоянная, называемая коэффициентом переоценки. С пребыванием ПМП в состоянии  $i$  в интервале  $(t, t + dt)$  свяжем доход, равный  $r_i e^{-\alpha t} dt$ . Обозначим  $v_i(\alpha)$  средний суммарный доход в интервале  $(0, \infty)$  при начальном состоянии  $i$  данного ПМП. Имеем

$$\begin{aligned} v_i(\alpha) &= \frac{r_i}{\alpha} (1 - h_i(\alpha)) + \\ &+ \sum_j g_{ij}(\alpha) v_j(\alpha). \end{aligned}$$

Обозначив

$$\rho_i(\alpha) = \frac{r_i}{\alpha} (1 - h_i(\alpha));$$

$$\rho(\alpha) = \begin{pmatrix} \rho_1(\alpha) \\ \vdots \\ \rho_N(\alpha) \end{pmatrix},$$

$$v(\alpha) = \begin{pmatrix} v_1(\alpha) \\ \vdots \\ v_N(\alpha) \end{pmatrix},$$

получим решение данной системы уравнений в матричном виде

$$v(\alpha) = (I - q(\alpha))^{-1} \rho(\alpha).$$

Пусть  $a = (a_1, \dots, a_N)$  — распределение  $\xi_0$ . Тогда средний суммарный доход

$$av(\alpha) = a(I - q(\alpha))^{-1} \rho(\alpha).$$

Можно также записать

$$v(\alpha) = (I + m(\alpha)) \rho(\alpha).$$

При  $\alpha \rightarrow 0$

$$v_i(\alpha) = \frac{g}{\alpha} + v_i + o(1),$$

где

$$g = \sum_j \frac{r_j \tau_j}{\mu_{jj}} = \sum_j \pi_j r_j \tau_j / \sum_j \pi_j \tau_j,$$

$$v_i = r_i \tau_i + \sum_j \tau_j r_j \left( \frac{\mu_{ij}^{(r)}}{2\mu_{jj}^{(r)}} \right).$$

Величина  $g$  есть стационарный доход за единицу времени при  $\alpha = 0$ . Имеем

$$v(\alpha) = \frac{g}{\alpha} + v + o(1).$$

Полумарковские процессы принятия решений. Управляемый полумарковский процесс — это ступенчатый случайный процесс с состояниями  $1, 2, \dots, N$ , определяемый следующими условиями. При попадании процесса в состояние  $i$  принимается решение  $k$  из конечного множества  $K_i$  допустимых решений, после чего, независимо

от предыдущего поведения процесса и принимавшихся ранее решений, вероятность  $Q_{ij}^k(t)$  того, что следующий переход произойдет через время, меньшее  $t$ , и притом в состояние  $j$ , равна  $\rho_{ij}^k F_{ij}^k(t)$ , где  $F_{ij}^k(t)$  — функция распределения. Стратегией управления называется последовательность  $\pi = (f_0, f_1, \dots)$ , где  $f_n = (f_n(1), \dots, f_n(N))$  — политика, применяемая на  $n$ -м шаге, т. е. в момент  $n$ -го перехода процесса: если в этот момент процесс попадает в состояние  $i$ , то принимается решение  $k = f_n(i)$ .

Стратегия  $f^\infty = (f, f, \dots)$  называется стационарной. При стационарной стратегии управления управляемый полумарковский процесс превращается в ПМП. Для его характеристик сохраняются те же обозначения, что и для характеристик ПМП, с индексом  $k$ , соответствующим применяемой политике.

Стратегия называется  $\alpha$  — оптимальной, если она максимизирует средний суммарный доход при коэффициенте переоценки  $\alpha$ .

Теорема. При  $\alpha > 0$  существует  $\alpha$  — оптимальная стратегия, являющаяся стационарной.

Указанная в формулировке теоремы стратегия находится методом линейного программирования. Обозначив через  $d_i^k$  вероятность принятия решения  $k$  в состоянии  $i$  и введя переменные

$$x_i^k = \sum_j a_j \mu_{ij}(\alpha) d_j^k,$$

получим задачу:

$$\max_{i, k} \rho_i^k(\alpha) x_i^k$$

при ограничениях

$$\sum_k x_i^k - \sum_{i, k} q_{ij}^k(\alpha) x_i^k = a_j,$$

$$x_i^k \geq 0.$$

Если все  $a_j$  положительны, то существует нерандомизированное базисное решение этой задачи:  $x_i^k$  равно 0 или 1.

При  $x_i^k = 1$  полагаем  $f(i) = k$  для оптимальной стратегии  $f^\infty$ .

Эта же задача решается следующим итерационным алгоритмом.

а) Процедура определения весов. Исходя из произвольной стационарной стратегии  $f^\infty$ , решаем систему уравнений

$$v_i = \rho_i^k(\alpha) + \sum_l q_{il}^k(\alpha) v_l,$$

где  $k = f(i)$ .

б) Процедура улучшения решения. Пусть  $G(i, f)$  — множество тех  $k$ , для которых

$$\rho_i^k(\alpha) + \sum_l q_{il}^k(\alpha) v_l > v_i.$$

Если для всех  $i$  множества  $G(i, f)$  пусты, то  $f^\infty$  есть  $\alpha$ -оптимальная стратегия, а вектор  $v(\alpha, f^\infty) = (v_i)$  представляет собой вектор суммарных средних доходов ( $i$  — начальное состояние процесса). В противном случае пусть  $S_+ = \{i : G(i, f) \neq \emptyset\}$ . Тогда строим улучшенную стратегию  $g$ , где  $g(i) \in G(i, f)$  при  $i \in S_+$ ;  $g(i) = f(i)$  при  $i \in \bar{S}_+$ . Переходим к процедуре определения весов.

Начальную стратегию  $f^\infty$  выбирают, например, из условия максимизации  $\rho_i^k(\alpha)$ .

Полумарковские процессы принятия решений без переоценки. Пусть

$$v(t, \pi) = \begin{pmatrix} v_1(t, \pi) \\ \vdots \\ v_N(t, \pi) \end{pmatrix} \text{ — суммарный}$$

средний доход в интервале  $(0, t)$ , связанный с применением стратегии  $\pi$ , без переоценки, т. е. при  $\alpha = 0$ ,  $i$ -я компонента данного вектора соответствует начальному состоянию  $\xi_0 = i$ . В качестве критерия рассмотрим вектор

$$u(\pi) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} v(t, \pi).$$

Оптимальной назовем стратегию, максимизирующую все компоненты вектора  $u(\pi)$ .

**Т е о р е м а.** Существует оптимальная стратегия, являющаяся стационарной.

Пусть,  $f^\infty$  — оптимальная стратегия,  $\pi_j(f)$  — стационарные вероятности

вложенной цепи Маркова соответствующего ПМП. Введем переменные

$$x_j^k = \pi_j(f) d_j^k,$$

где  $d_j^k$  — вероятность принятия решения  $k$  при попадании процесса в состояние  $j$ .

Задача дробно-линейного программирования:

$$\max_{j, k} \sum_{j, k} \tau_{ij}^k r_{ij}^k x_j^k / \sum_{j, k} \tau_{ij}^k x_j^k$$

при ограничениях

$$\sum_k x_j^k - \sum_{i, k} p_{ij}^k x_j^k = 0,$$

$$\sum_{j, k} x_j^k = 1, \quad x_j^k \geq 0.$$

Заменой переменных

$$y_j^k = x_j^k / \sum_{j, k} \tau_{ij}^k x_j^k,$$

$$y = 1 / \sum_{j, k} \tau_{ij}^k x_j^k$$

приводим эту задачу к задаче линейного программирования:

$$\max_{j, k} \sum_{j, k} \tau_{ij}^k r_{ij}^k y_j^k$$

при ограничениях

$$\sum_k y_j^k - \sum_{i, k} p_{ij}^k y_j^k = 0,$$

$$\sum_{j, k} y_j^k = y,$$

$$\sum_{j, k} \tau_{ij}^k y_j^k = 1, \quad y_j^k \geq 0.$$

Данная задача обладает допустимым базисным решением, соответствующим детерминированной стационарной стратегии:  $x_j^k$ , равным 0 или 1.

Эта же задача решается следующим итерационным алгоритмом.

а) Процедура определения весов. Возьмем произвольную стационарную стратегию  $f^\infty$ . Решим систему уравнений

$$\tau_{ij}^k g + v_i = \tau_{ij}^k r_{ij}^k + \sum_{l=1}^{N-1} p_{il}^k v_l,$$

$$k = f(i),$$

полагая  $v_N = 0$ .

б) Процедура улучшения решения. Пусть  $G(i, f)$  — множество тех  $k$ , для которых

$$r_i^k + \frac{1}{\tau_i^k} \left( \sum_{l=1}^{N-1} p_{il}^k v_l - v_i \right) > g.$$

Если все  $G(i, f)$  пусты, то  $f^\infty$  — оптимальная стратегия и  $g$  — средний доход за единицу времени. В противном случае определяем улучшенную стратегию при  $G(i, f) \neq \emptyset$ , положив  $g(i)$  равным любому такому  $k$ , для которого выполняется указанное неравенство, и  $g(i) = f(i)$  при  $G(i, f) = \emptyset$ . После этого возвращаемся к процедуре определения весов.

Оптимальная стратегия достигается за конечное число итераций.

Полумарковские процессы с поглощением. Пусть состояние 1 — поглощающее, все остальные — несущественные при любой стационарной стратегии. Задача максимизации среднего суммарного дохода при начальном распределении  $(a_j)$  сводится к задаче линейного программирования:

$$\max \sum_{l, k} \tau_l^k r_l^k x_l^k$$

при ограничениях

$$\sum_k x_l^k - \sum_{i, k} p_{il}^k x_i^k = a_l, \quad l \leq j \leq N,$$

$$x_l^k \geq 0,$$

где  $x_l^k$  имеет тот же смысл, что и в соответствующей задаче для управляемых цепей Маркова.

**Т е о р е м а.** Существует оптимальная стратегия, являющаяся стационарной.

Указанной стратегии соответствует базисное решение задачи линейного программирования:  $x_l^k$  равно 0 или 1.

Оптимальное управление марковским процессом с непрерывным временем. Пусть имеется непрерывный справа управляемый марковский процесс  $\xi(t)$  с множеством состояний  $S = \{1, 2, \dots, N\}$ . В момент  $t$  применяется решение  $u(t)$  из конечного мно-

жества  $U$ . Если  $\xi(t) = i, u(t) = k$ , то с вероятностью  $\lambda_{ij}^k dt$  в интервале  $(t, t + dt)$  происходит переход  $\xi(t)$  в состояние  $j \neq i$ ; с вероятностью  $1 - \lambda_i^k dt$  (где  $\lambda_i^k = \sum_{j \neq i} \lambda_{ij}^k$ ) процесс остается в прежнем состоянии. Указанные события не зависят от  $(\xi(\tau), u(\tau), \tau > t)$ . Функция  $u(t)$  выбирается из класса ступенчатых непрерывных справа функций. Структура доходов определяется следующими условиями. Если  $\xi(t-0) = i, u(t-0) = k$  и в момент  $t$  происходит переход процесса в состояние  $j$ , то в этот момент получается доход  $\sigma_{ij}^k$ . Если  $\xi(t) = i, u(t) = k$  в интервале  $(t_1, t_2)$ , то за этот интервал получается доход  $\theta_i^k (t_2 - t_1)$ .

Введем коэффициент переоценки  $\alpha$ , рассматривая в указанных ситуациях  $\sigma_{ij}^k e^{-\alpha t}$  вместо  $\sigma_{ij}^k, \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha t_1} - e^{-\alpha t_2}) \theta_i^k$  вместо  $\theta_i^k$ . Тогда при любой функции  $u(t)$  суммарный средний доход в бесконечном интервале будет ограничен. Стратегию, максимизирующую этот критерий, назовем  $\alpha$ -оптимальной стратегией. Стратегия, для которой  $u(t)$  постоянна в интервалах постоянства  $\xi(t)$ , а в точках скачка  $u(t)$  зависит лишь от  $\xi(t)$ , т. е. от нового состояния процесса, называется стационарной.

**Т е о р е м а.** При любом  $\alpha > 0$  существует  $\alpha$ -оптимальная стратегия, являющаяся стационарной. Если стратегия стационарна, получаем рассмотренную выше задачу об  $\alpha$ -оптимальной стратегии для управляемого ПМП. Для этого достаточно положить в случае, когда при попадании  $\xi(t)$  в состояние  $i$  значение  $u(t)$  становится равным  $k$ ,

$$dQ_{ij}^k(t) = \lambda_{ij}^k e^{-\lambda_i^k t}, \quad j \neq i,$$

$$dQ_{ii}^k(t) = 0,$$

$$r_i^k = \theta_i^k + \sum_{j \neq i} \lambda_{ij}^k \sigma_{ij}^k.$$

## 5. МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

При нестационарных критериях оптимальные стратегии могут быть отличны от стационарных. В этом случае часто оказывается полезным метод динамического программирования.

Пусть  $(\xi_n, 0 \leq n \leq N)$  — управляемая цепь Маркова с переходными вероятностями  $p_{ij}^k$  и доходом  $r_i^k(n)$ , выплачиваемым в момент  $n$  в случае решения  $k$  при  $\xi_n = i$ . Обозначим через  $v_i(n)$  максимально достижимый суммарный средний доход в моменты  $n, n+1, \dots, N$ . Тогда выполняется уравнение

$$v_i(n) = \max_{k \in K_i} \left\{ r_i^k(n) + \sum_j p_{ij}^k v_j(n+1) \right\},$$

отражающее принцип оптимальности Беллмана. Положив

$$v_i(N) = \max_{k \in K_i} r_i^k(N),$$

получим рекуррентную схему определения  $v_i(n)$ . Средний суммарный доход при оптимальной стратегии, соответствующей начальному состоянию  $\xi_0 = i$ , равен  $v_i(0)$ . Параллельно этому определяется и оптимальная стратегия: если в правой части уравнения для  $v_i(n)$  максимум достигается при  $k = k_i^*(n)$ , то оптимальная стратегия состоит в применении решения  $k_i^*(n)$  в момент  $n$  при  $\xi_n = i$ . (В случае нескольких максимумов можно выбирать любую точку максимума).

На основании данных методов решается, например, задача оптимизации управления системой обслуживания. Пусть имеется система, находящаяся в конечном числе возможных состояний: время пребывания в состоянии  $i$  — экспоненциально распределенная случайная величина с параметром  $\lambda_i > 0$ . В состоянии  $i$  в очереди имеется  $m_i$  требований, занумерованных числами  $1, 2, \dots, m_i$ . Рандомизированная стационарная стратегия состоит в том, что при освобождении

прибора в состоянии системы  $i$  из очереди выбирается  $k$ -е требование с вероятностью  $u_{ik}$ ,  $1 \leq k \leq m_i$ .

Средний доход системы в единицу времени пребывания ее в состоянии  $i$  равен  $r_i$ . Обозначим  $\lambda_{ij}$  интенсивность перехода системы из состояния  $i$  в состояние  $j$ ,  $\mu_i$  — интенсивность окончания обслуживания в состоянии  $i$ ,  $d_{ij}^k$  — вероятность (практически равная 1 или 0) перехода системы в состояние  $j$ , если в состоянии  $i$  закончилось обслуживание и принято решение направить в освободившийся канал  $k$ -е требование. Оптимизация среднего дохода в единицу времени приводится к задаче

$$\sum_i r_i \pi_i = \max$$

при ограничениях

$$\pi_i = \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} = \sum_{j \neq i} \pi_j \lambda_{ji},$$

$$\lambda_{ij} = \mu_i \sum_k d_{ij}^k u_{ik},$$

$$u_{ik} \geq 0, \quad \sum_k u_{ik} = 1.$$

Эта задача приводится к задаче линейного программирования введением новых переменных

$$x_{ij}^k = \pi_i u_{ik}.$$

Тогда имеем

$$\sum_{i, j, k} r_i x_{ij}^k = \max$$

при ограничениях

$$\mu_i \sum_{j \neq i} \sum_k d_{ij}^k x_{ij}^k - \sum_{j \neq i} \mu_j \sum_k d_{ji}^k x_{ji}^k = 0,$$

$$x_{ij}^k \geq 0, \quad \sum_{i, j, k} x_{ij}^k = 1.$$

## 6. СОКРАЩЕНИЕ МНОЖЕСТВА СТРАТЕГИЙ

Случайные процессы, описывающие функционирование сложных систем, часто имеют весьма сложную структуру

и тем не менее обладают вложенным полумарковским процессом. Пусть  $\xi(t)$  — исходный процесс,  $t_n$  — расположенные в порядке возрастания узловые моменты времени,  $\xi_n = \xi(t_n)$  — однородная цепь Маркова. Если обозначить  $\nu(t) = \max\{n : t_n \leq t\}$ , то случайный процесс  $\eta(t) = \xi_{\nu(t)}$  во многих случаях является ПМП. В описанной ситуации назовем исходный процесс  $\xi(t)$  случайным процессом с вложенным ПМП. Множество стратегий управления процессом в интервалах  $(t_n, t_{n+1})$  может быть весьма сложным. Например, стратегия может зависеть от непрерывной переменной (интервала профилактики, длительности выполнения той или иной операции и т. п.). Каждому управлению  $k$ , применяемому с момента  $t_n$  попадания  $\xi(t)$  в состояние  $i$  до следующего узлового момента  $t_{n+1}$ , соответствуют некоторый средний доход  $r_i^k$  в данном интервале, среднее значение  $\tau_i^k$  длительности  $t_{n+1} - t_n$ , а также вероятности  $p_{ij}^k$  (при  $1 \leq j \leq N$ ) перехода в состояния  $j = 1, 2, \dots, N$  в момент  $t_{n+1}$ . Таким образом, имеем множество  $Z_i$  векторов  $z_i^k = (p_{i1}^k, \dots, p_{i, N-1}^k, \tau_i^k, r_i^k)$ . Назовем  $k$  недопустимой стратегией при данном  $i$ , если существует выпуклая линейная комбинация  $z = (z_1, z_{N-1}, z_N, z_{N+1})$  векторов  $z_i^{k'}$ ,  $k' \neq k$ , для которой

$$z_j = p_{ij}^k, \quad 1 \leq j \leq N-1; \quad z_N \leq \tau_i^k; \\ z_{N+1} = r_i^k.$$

Исключив недопустимые стратегии (решения), сократим множества  $k_i$ , что ведет к сокращению перебора, например, в итерационном алгоритме оптимизации.

Соображения монотонности позволяют во многих случаях применять и более эффективные алгоритмы отсева решений.

## 7. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РЕГЕНЕРИРУЮЩИМИ ПРОЦЕССАМИ

Пусть задано пространство элементарных событий с определенной на нем

вероятностной мерой. Пара  $(\tau, z(t))$ ,  $0 \leq t < \tau$ , где  $\tau = \tau(\omega) > 0$  — случайная величина,  $z(t) = z(t, \omega)$  — случайная функция, называется обрывающимся случайным процессом. Таким образом, обрывающийся случайный процесс — это процесс, существующий в течение случайного времени.

**Примеры.** 1. Пусть  $(\xi_n)$  — цепь Маркова с множеством состояний  $X$ ;  $A$  — некоторое его подмножество, причем  $\xi_0$  не принадлежит  $A$  с вероятностью, равной единице. Обозначим  $\tau = \min\{n : \xi_n \in A\}$ . Тогда  $(\tau; \xi_n, n < \tau)$  — обрывающийся процесс с множеством состояний  $X \setminus A$ .

2. Имеется дублированная система;  $\nu(t)$  — число отказавших элементов в момент  $t$ . Система отказывает в момент, когда  $\nu(t) = 2$ . Обозначив первый такой момент через  $\tau$ , получим, что обрывающийся случайный процесс  $(\tau; \nu(t), 0 \leq t < \tau)$  описывает поведение системы до первого отказа.

Пусть  $(\omega_n)$  — последовательность независимых реализаций элементарного события. Этой последовательности соответствует последовательность независимых реализаций обрывающегося случайного процесса  $(\tau_n, z_n(t), 0 \leq t < \tau_n)$ , где  $z_n(t) = z(t, \omega_n)$ .

Регенерирующим случайным процессом называется случайный процесс  $\xi(t)$ , последовательно воспроизводящий реализации  $z_n(t)$ , а именно:

$$\xi(t) = z_1(t) \quad \text{при } 0 \leq t \leq \tau_1, \\ \xi(t) = z_2(t - \tau_1) \quad \text{при } \tau_1 \leq t < \tau_1 + \tau_2, \dots \\ \xi(t) = z_n(t - \tau_1 + \dots + \tau_{n-1}) \quad \text{при} \\ \tau_1 + \dots + \tau_{n-1} \leq t < \tau_1 + \dots + \tau_n \\ \text{и т. д.}$$

Таким образом, регенерирующий случайный процесс в вероятностном смысле возрождается (регенерирует) в моменты  $t_n = \tau_1 + \dots + \tau_n$ , называемые моментами регенерации. Это означает, что при  $t > 0$  процесс  $\xi(t + t_n)$  ведет себя так же, как  $\xi(t)$ , независимо от предыдущего.

**Пример.** Имеется система, элементы которой отказывают по экспоненциальному закону. Длительность восстановления — случайная величина; в конце восстановления все элементы исправ-

ны. Обозначив через  $t_n$  момент  $n$ -го вхождения системы в исправное состояние, получим регенерирующий процесс  $\xi(t)$  — состояние системы в момент  $t$ .

Пусть  $f = f(\omega)$  — случайная величина, связанная с обрывающимся случайным процессом. Назовем  $f$  величиной дохода на интервале длины  $\tau$ . Предположим, что всегда эта величина не превосходит  $f$  по модулю. Если  $M|f| < \infty$ ,  $M\tau < \infty$ , то средний доход в единицу времени  $v = Mf/M\tau$ .

Предположим теперь, что на интервале существования обрывающегося случайного процесса может применяться управление  $u \in U$ . Таким образом,  $\tau = \tau(\omega, u)$ ,  $z(t) = z(t, \omega, u)$ ,  $0 \leq t < \tau$ . Подчеркнем, что  $u$  может быть как однократным управлением (например, выбирается момент очередной профилактики), так и целой траекторией  $u(u(t), 0 \leq t < \tau)$  (например,  $z(t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению  $z'(t) = g(z(t), u(t), t)$  и  $\tau$  есть момент достижения траекторией  $z(t)$  заданной области). В общем случае значение  $z(t)$  определяется траекторией  $u(s)$ ,  $z(s)$ ,  $0 \leq s < t$ . Введем на множестве управлений рандомизацию: если  $u_i$  управление, то можно применить управление  $u$ , сводящееся к  $u_i$  с вероятностью  $p_i$ , где  $p_i$  — любые неотрицательные числа, в сумме равные единице. В таком случае множество пар  $(f, \tau)$ , соответствующих возможным управлениям, выпукло. Оптимальное управление, если оно существует, является стационарным, т. е. правило выбора управления одно и то же для всех интервалов  $(t_n, t_{n+1})$  и не зависит как от  $t_n$ , так и от поведения  $(\xi(t), u(t))$  при  $t < t_n$ . В таком случае  $\xi(t)$  есть регенерирующий случайный процесс и оптимальное управление определяется по отношению к обывающемуся случайному процессу  $z(t)$ , а именно решается задача

$$Mf/M\tau = \max.$$

Пусть для определенности  $Mf > 0$  при некотором управлении.

Из свойства выпуклости множества  $(Mf, M\tau)$  следует, что эта задача сводится к линейной задаче

$$M(f - c\tau) = \max$$

при некотором постоянном  $c > 0$ . Если  $c_0$  — значение  $c$ , соответствующее решению первоначальной задачи, то величина  $Mf/M\tau$ , как функция  $c$ , не убывает при  $c < c_0$  и не возрастает при  $c > c_0$ . Следовательно, значение  $c_0$ , а вместе с ним и оптимальное решение получается с помощью варьирования постоянной  $c$  и решения линейной задачи при каждом фиксированном значении  $c$ .

## 8. ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНИЧЕСКОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ВЫСОКОНАДЕЖНЫХ СИСТЕМ

Несмотря на простоту общих математических принципов оптимизации систем, реализация этих принципов в реальных случаях аналитически затруднена. Так, применение метода динамического программирования осложняется большим числом состояний процесса, метод линейного программирования — большой размерностью задач. Анализ характеристик систем и решение задач оптимизации часто эффективнее производить с помощью метода Монте-Карло. Однако часто оптимизация производится по критерию, связанному с редкими событиями в системе (например, одновременным отказом всех элементов параллельной цепочки). При непосредственном моделировании для получения надежной оценки параметра часто требуется не реально большое число реализаций. Поэтому разработаны специальные методы ускорения моделирования высоконадежных систем и их программное обеспечение.

Приведем упрощенный вариант метода, приемлемый для оптимизации.

Рассмотрим функционирование системы на периоде регенерации  $[0, \tau]$ . Как его длительность  $\tau$ , так и состояние  $z(t)$  в любой момент  $t$ ,  $0 \leq t \leq \tau$ , — случайные величины, зависящие от трех групп величин:

$$\xi_1, \xi_2, \dots; \eta_1, \eta_2, \dots; u_1, u_2, \dots$$

При этом  $u_i$  — параметры управления (например, длительности интервалов между профилактиками);  $\eta_i$  — случайные величины с фиксированными распределениями (например, длительности

восстановления элементов);  $\xi_i$  — случайные величины, рассматриваемые как «большие» (например, длительности безотказной работы элементов). Все введенные величины предполагаются независимыми.

Обозначим для краткости  $\xi = (\xi_i)$ ,  $\eta = (\eta_i)$ ,  $u = (u_i)$ . Требуется максимизировать функционал  $\varphi(u) = Mf(\xi, \eta, u)^*$ . Можно записать

$$\varphi(u) = \int dF_\eta(y) \int f(x, y, u) dF_\xi(x),$$

где  $F_\xi(x)$  и  $F_\eta(y)$  — многомерные функции распределения  $\xi, \eta$  (с вероятностью, равной единице, векторы  $\xi, \eta$  содержат конечное, хотя и случайное, число компонент  $\xi_i, \eta_i$ ). Аналитико-статистический метод состоит в том, что внутренний интеграл вычисляется или оценивается аналитически (для этого требуется простота аналитического вида распределения  $\xi_i$ : например, экспоненциальное распределение), в то время как  $\eta_i$  моделируются с помощью случайных чисел. В результате получаем случайную величину

$$\widehat{\varphi}(u) = \int f(x, \eta, u) dF_\xi(x),$$

такую, что

$$M\widehat{\varphi}(u) = \varphi(u).$$

Таким образом, величину  $\varphi(u)$  можно оценить средним арифметическим достаточно большого числа независимых реализаций величины  $\widehat{\varphi}(u)$ .

## 9. АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Пусть  $\xi(t)$  — ступенчатый случайный процесс с конечным множеством состояний. При вхождении  $\xi(t)$  в состояние  $i$  применяется управление  $f(i)$ , действующее до момента следующего скачка траектории процесса. Если  $\xi(t) = i$  и принято управление  $f(i) = k$ , то  $\xi(t)$  ведет себя, как марковский процесс с интенсивностями перехода  $\lambda_{ij}^k$ . Во многих случаях эти последние не известны. Адаптивное

управление состоит в следующем. Пусть  $t_n$  — момент  $n$ -го скачка  $\xi(t)$ . Обозначим  $f_\lambda = (f_\lambda(t))$  оптимальную стационарную стратегию при известном векторе  $\lambda = (\lambda_{ij}^k)$ . Строим оценку  $\lambda_n$  параметра  $\lambda$  по траектории процесса до момента  $t_n$  и после попадания процесса в этот момент в состояние  $i$  применяем решение  $f_{\lambda_n}(i)$ . Если оценка  $\lambda_n$  состоятельна, т. е. сходится по вероятности к  $\lambda$  при  $n \rightarrow \infty$ , а стационарные вероятности состояний процесса положительны при любой стационарной стратегии, то средний доход в единицу времени для адаптивного решения (при усреднении по бесконечному интервалу времени) равен среднему доходу для оптимального решения при известном  $\lambda$ .

В качестве компоненты  $\lambda_{nij}^k$  вектора  $\lambda_n$  можно взять оценку максимального правдоподобия с априорным весом  $\psi(\lambda)$  либо несмещенную оценку, равную отношению числа переходов из  $i$  в  $j$  при управлении  $k$  на отрезке  $[0, t_n]$  к суммарной длине  $T_i^k$  тех интервалов, в которых  $\xi(t) = i$  и применяется управление  $k$  ( $0 \leq t \leq t_n$ ).

Часто встречается случай, когда  $\lambda_{ij}^k$  известны с точностью до постоянного множителя:  $\lambda_{ij}^k = l_{ij}^k \theta$ . Для параметра  $\theta$  имеем несмещенную состоятельную оценку

$$\theta_n = n / \sum_i T_i^k \sum_{j \neq i} l_{ij}^k.$$

## 10. УПРАВЛЯЕМЫЕ ПРОЦЕССЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ ПО РЕСУРСУ

Пусть в длительную эксплуатацию поступила новая система. Режим ее эксплуатации зададим управлением  $z$  (с учетом профилактических работ, функционального контроля, ремонта системы). Обозначим через  $\xi(s)$  случайное время до отказа системы, после чего она заменяется на новую. Рассмотрим следующие характеристики системы до момента отказа: объем работ  $\eta_1(s)$ , выполненных системой;

\* Поскольку  $z(t)$  однозначно определяется  $\xi, \eta, u$ , то функционал от  $z(t)$  можно выразить в виде функционала от указанных переменных.

затраты на эксплуатацию системы  $\eta_2(s)$ .

После истечения времени  $\xi(s)$  процесс многократно повторяется (до бесконечности).

В общем случае числовых характеристик может быть больше, чем две, т. е. имеем

$$\eta(s) = (\eta_1(s), \dots, \eta_m(s)).$$

Если зафиксировать  $s_n$ , то можно предположить, что случайный вектор  $\{\xi(s_n), \eta(s_n)\}$  не зависит от совокупности  $\{\xi(s_i), \eta(s_i)\}$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ . Будем считать интервал  $(\xi(s_{n-1}), \xi(s_n))$   $n$ -м циклом работы системы,  $n = 1, 2, \dots$ . При  $s_1 = s_2 = \dots = s_n = s$  имеем дело с процессом восстановления.

Сначала рассмотрим работу системы на конечном отрезке времени  $T$ , а затем примем, что  $T$  стремится к бесконечности.

Если  $t_{NT} \leq T < t_{N_T+1}$ , то суммарные значения характеристик  $\eta_m(t)$  определим (с точностью до неопределяемого множителя  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ) как

$$\left. \begin{aligned} \eta_1(T) &= \eta_1(s_0) + \dots + \eta_1(s_{N_T}) + \\ &\quad + \theta_1 \eta_1(s_{N_T+1}); \\ \eta_m(T) &= \eta_m(s_0) + \dots + \eta_m(s_{N_T}) + \\ &\quad + \theta_m \eta_m(s_{N_T+1}), \end{aligned} \right\}$$

где  $0 \leq \theta \leq 1$ .

Сформулируем задачу оптимального управления. Пусть

$$\frac{1}{T} \eta_j(T) = z_j(u, T), \quad 1 \leq j \leq m,$$

где  $u = (s_0, s_1, \dots, s_n, \dots)$ .

Пусть  $s_0$  — подмножество множества  $s$  стратегий  $u$  таково, что для этих стратегий существуют постоянные  $z_j(u)$  такие, что для любого  $\varepsilon > 0$

$$P \{ |z_j(u, T) - z_j(u)| < \varepsilon \} \rightarrow 1$$

при  $T \rightarrow \infty$ .

Задача заключается в том, чтобы найти такую стратегию  $u \in s_0$ , для которой вектор  $\{z_1(u), \dots, z_{m-1}(u)\}$  принадлежал бы выпуклому множеству  $\Phi$ , а функция  $z_m(u)$  была бы минимальной.

Это частный случай общей задачи математического программирования, связь которой с задачами оптимального управления изложена в [36].

Предположим, что множество векторов  $\{\tau(s), \psi_1(s), \dots, \psi_m(s)\}$  выпукло, где  $\tau(s)$  — ограниченное по всему множеству  $s$  положительное математическое ожидание случайной величины  $\xi(s)$ ,

$$\psi_j(s) = M[\eta_j(s)], \quad s \in S, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Считаем, что величины  $\psi_j(s)$ ,  $1 \leq j \leq m$ , конечны для любого  $s \in S$ ; обозначим

$$\psi(s) = (\psi_1(s), \dots, \psi_m(s)).$$

Определим  $\psi_j^*(s)$  как

$$\psi_j^*(s) = \frac{\psi_j(s)}{\tau(s)}, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Пусть выполнены следующие естественные условия.

1. Последовательность случайных векторов

$$\{(\xi(s_i), \eta_1(s_i), \dots, \eta_m(s_i))\}$$

удовлетворяет для любой последовательности управлений  $\{s_n\}$  закону больших чисел в следующем виде:

$$\text{Если } \sum_{i=0}^n \tau(s_i) \rightarrow \infty, \text{ то}$$

$$P \left( \left| \sum_{i=0}^n \xi(s_i) - M \sum_{i=0}^n \xi(s_i) \right| > \varepsilon \sum_{i=0}^n \tau(s_i) \right) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty;$$

$$P \left( \left| \sum_{i=0}^n \eta_j(s_i) - M \sum_{i=0}^n \eta_j(s_i) \right| > \varepsilon \sum_{i=0}^n \tau(s_i) \right) \rightarrow 0$$

при любом  $\varepsilon > 0$  и  $n \rightarrow \infty$ .

2. Справедлива следующая оценка сверху:

$$M[|\eta_j(s)|] \leq c\tau(s); \quad s \in S,$$

где  $c$  — константа ( $c > 0$ ).

Пусть

$$\begin{aligned} \psi_m^*(s^*) &= \min_{s \in H} \frac{\psi_m(s)}{\tau(s)} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \min_{s \in H_\epsilon} \frac{\psi_m(s)}{\tau(s)}, \end{aligned}$$

где  $s^*$  — элемент множества  $S$ ;  $H$  — множество  $s$ , для которых  $(\psi_1^*(s), \dots, \psi_{m-1}^*(s))$ ;  $H_\epsilon$  — множество  $s$ , для которых  $(\psi_1^*(s), \dots, \psi_{m-1}^*(s))$  принадлежит  $\epsilon$ -окрестности  $\Phi_\epsilon$  множества  $\Phi$  ( $\epsilon$ -окрестностью  $\Phi$  называется совокупность векторов, каждый из которых либо входит в  $\Phi$ , либо находится на расстоянии, не превосходящем  $\epsilon$ , от некоторого вектора из множества  $\Phi$ ).

Известно, что стратегия  $u^* = (s^*, s^*, \dots, s^*, \dots)$  является решением поставленной задачи и принадлежит  $S_0$ .

Эта стратегия отыскивается следующим образом. Для стратегии  $u^*$  существуют такие вещественные числа  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , при которых задача минимизации  $\psi_m^*(s)$  при условии, что

$$(\psi_1^*(s), \dots, \psi_{m-1}^*(s)) \in \Phi,$$

эквивалентна задаче минимизации суммы

$$\Lambda(s) = \lambda_0 \tau + \sum_{j=1}^m \lambda_j \psi_j(s) \quad (18)$$

по множеству  $S$ .

Утверждение (18) позволяет свести задачу отыскания оптимизации с неаддитивной функцией убытка к задаче оптимизации с аддитивной функцией убытка.

Рассмотрим задачу выбора оптимального интервала предупредительной замены элемента с возрастающей интенсивностью отказа.

Пусть  $F(t) = P\{X < t\}$  — функция распределения времени безотказной работы элемента (случайной величины  $X$ ). Замены элемента могут происходить до и после отказа. Факт отказа сразу же становится известным. После отказа немедленно элемент заменяется (аварийно).

Если элемент заменяется до отказа, то в среднем на замену затрачивается время  $T_1$ , если после отказа, то среднее время замены элемента (с учетом

времени устранения последствий отказа и времени на поиск отказавшего элемента) равно  $T_2$ . Очевидно,  $T_1 < T_2$ .

Оптимальный интервал замены будем считать случайной величиной  $Y$  с функцией распределения  $G(t)$ , т. е. рассматриваем вначале общий случай.

Пусть  $\tau$  — средняя длительность цикла между заменами элемента. Тогда вероятность застать элемент в любой момент времени исправным

$$P = 1 - \frac{P\{X < Y\} T_2 + P\{X > Y\} T_1}{\tau}.$$

На основании (18) максимизация  $P$  означает максимизацию функции

$$\begin{aligned} \Lambda &= \lambda_0 \tau + \lambda_1 [P\{X < Y\} T_2 + P\{X > Y\} T_1] = \\ &= \int_0^\infty \{ \lambda_0 [1 - F(t)] + \\ &+ (\lambda_0 + \lambda_1) (T_2 - T_1) F'(t) \} \times \\ &\times [1 - G(t)] dt + (\lambda_0 + \lambda_1) T_1. \quad (19) \end{aligned}$$

В случае, когда  $\lambda_0$  и  $\lambda_0 + \lambda_1$  имеют один знак, решение уравнения (19) вырожденное. Решение вырождено и при  $\lambda_0 < 0, \lambda_0 + \lambda_1 > 0$ . Невырожденное решение будет только в случае  $\lambda_0 > 0, \lambda_0 + \lambda_1 < 0$ .

Так как рассматривается элемент с возрастающей функцией интенсивности отказов (ее всегда можно аппроксимировать монотонной кривой), то функция  $F'(t)/1 - F(t)$  — монотонно возрастающая.

Поэтому уравнение

$$\lambda_0 [1 - F(t)] + (\lambda_0 + \lambda_1) (T_2 - T_1) F'(t) = 0 \quad (20)$$

в интервале изменения  $\lambda_1/\lambda_0$  имеет единственный корень

$$\gamma = \gamma(\lambda_1/\lambda_0).$$

Так как при  $t < \gamma$  выражение (20) положительно, а при  $t > \gamma$  отрицательно, то оптимальным будет выбор

$$G(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq \gamma; \\ 1 & \text{при } t > \gamma. \end{cases} \quad (21)$$

Запишем выражение для  $P$  через функции  $F(t)$ ,  $G(t)$ :

$$P = 1 - \frac{\int_0^{\infty} F(t) dG(t) T_2 + \int_0^{\infty} [1-G(t)][1-F(t)] dt + \int_0^{\infty} G(t) dF(t) T_1}{\int_0^{\infty} F(t) dG(t) + \int_0^{\infty} G(t) dF(t)}$$

Подставив в это выражение  $G(t)$  в виде (21), дифференцировав его по  $\gamma$  и приравняв полученный результат к нулю, найдем уравнение для определения единственного экстремума функции  $P(\gamma)$ :

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{1 - F(\gamma) + \frac{F'(\gamma)}{1 - F(\gamma)} \int_0^{\gamma} [1 - F(t)] dt}$$

(22)

**Пример.** Пусть интенсивность отказов элемента

$$\lambda(t) = \frac{F'(t)}{1 - F(t)} = at^{\alpha} + b,$$

$$a = 0,00015 \frac{\text{отказ}}{\text{ч}^2},$$

$$b = 0,003 \left[ \frac{\text{отказ}}{\text{ч}} \right], \quad T_1/T_2 = 0,5,$$

$$\alpha = 0,85.$$

Решив уравнение (22), найдем  $\gamma = 140$  ч.

Таким образом, оптимальная предупредительная замена элемента осуществляется по истечении 140 ч его безотказной работы. Если же элемент отказал ранее, то он заменяется аварийно и с момента окончания замены ему назначается вновь оптимальный ресурс 140 ч, и далее описанная процедура замен повторяется.

Существуют и другие методы решения задачи об оптимальном выборе интервала предупредительной замены, связанные с неполной информацией о функции распределения  $F(t)$  — времени безотказной работы элемента. Условно их можно разделить на две группы: минимаксные и адаптивные. Приведем два результата, иллюстрирующих их применение.

Минимаксный подход применяется в следующей ситуации.

Пусть

$$s_1 = \int_0^{\infty} t dF(t), \quad s_2 = \int_0^{\infty} t^2 dF(t);$$

$k_2$  — класс функций распределений с фиксированными моментами  $s_1$  и  $s_2$ . Решается задача

$$t \min_{F \in K_s} \max \frac{c_1 F(t) + c_2 \bar{F}(t)}{\int_0^t \bar{F}(u) du}$$

Правило предупредительной замены, являющееся решением этой задачи, следующее:

$$t^* = \infty, \quad \text{если } \frac{c_2}{c_1} > 1 - \frac{2\sigma}{s_1};$$

$t^*$  лежит в интервале

$$\left[ \frac{s_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{s_1}{2}\right)^2 - \sigma^2} \right], \quad \text{или}$$

$\left[ \frac{s_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{s_1}{2}\right)^2 + \sigma^2} \right]$  — в противном случае,

где  $\sigma = \sqrt{s_2 - s_1^2}$ .

Адаптивный подход применяется в задаче минимизации выражения

$$\frac{k_1 F(t) + k_2 \bar{F}(t)}{\int_0^{\infty} \bar{F}(u) du}$$

Построим последовательность  $t_n$ , сходящуюся к  $t^*$  с вероятностью, равной единице, для произвольного начального приближения  $t_0$ .

Пусть наблюдаются случайные величины  $z_{in} = x_{in} \wedge t_n$ ,  $i = 1, 2$  (где  $x_{1n}$ ,  $x_{2n}$  — независимые реализации длительности безотказной работы).

Пусть  $a_n$  и  $c_n$  — вещественные последовательности, удовлетворяющие условиям:

$$a_n = \frac{A}{n} + o(n^{-1}),$$

$$c_n = \frac{c}{h^{1-\nu}} + o(n^{-1+\nu}),$$

где  $A, c$  — положительные постоянные.

Положим

$$F_{in}(t) = I(z_{in} \leq t),$$

$$s_{in}(t) = 1 - F_{in}(t),$$

$$f_n(t) = k\{(t - z_{1n}) | c_n\} | c_n.$$

Здесь  $I(\cdot)$  — индикатор события;  $k$  — функция, определяемая условиями:  $k$  — измерима по Борелю, ограничена и равна нулю вне  $[0; 1]$ ;

$$\int_0^1 y^j k(y) dy = I(j = 1),$$

$$j = 0, \dots, r-1.$$

Пусть также  $\tau_n = O(n^{-\nu})$  — вещественная последовательность, тогда

$$t_{n+1} = (t_n - a_n M_n(t_n)) \vee \tau_n,$$

где

$$M_n(t) = (k_1 - k_2) f_n(t) \int_0^t s_{2n}(u) du - s_{1n}(t) \{k_1 F_{2n}(t) + k_2 s_{2n}(t)\}.$$

### 11. ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ УПРАВЛЯЕМОГО ПОЛУМАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

Пусть имеется система с конечным числом состояний  $i = 0, 1, \dots, L$ . Состояние «0» — новое, состояние «L» — отказ системы.

Если процесс изменения состояний системы во времени — управляемый полумарковский, то это означает, что для каждого состояния заданы:

$\{d_{ik}\}$  — множество вероятностей-решений, т. е. вероятностей того, что в состоянии  $i$  будет выбрано решение  $k$  ( $i=0, 1, \dots, L; k=0, 1, \dots, K$ );

$\|P_{ij}\|^k$  — матрица вероятностей перехода вложенного процесса Маркова с учетом выбранного решения  $k$ ;

$\|F_{ij}\|$  — матрица распределений (функций распределений) времен пребывания процесса изменения состояний системы в состоянии  $i$  при известном следующем состоянии  $j$  с учетом выбранного решения  $k$ ;

$r_i^k$  — затраты в единицу времени, соответствующие принятому решению  $k$ .

Пусть  $D_{qi}$  — вероятность перевода параметра из состояния  $q$  в  $i$ ,  $\|q_{ij}\|$  — заданная матрица стационарных переходных вероятностей для неуправляемой цепи.

Тогда

$$P_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} q_{ik} D_{kj}.$$

Обозначим через  $\pi_j$  ( $j = 0, 1, \dots, L$ ) стационарные вероятности пребывания вложенной цепи Маркова в состоянии  $j$ .

Вероятности  $\pi_j$  удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\pi_j - \sum_{i=0}^L \sum_{k=1}^K \pi_i P_{ij}^{(k)} d_{ik} = 0;$$

$$\sum_{j=0}^L \pi_j = 1; \quad \pi_j \geq 0.$$

Пусть далее  $\eta_j^{(k)}$  — математическое ожидание безусловного времени пребывания исходного (полумарковского) процесса в состоянии  $j$  при принятом решении  $k$ . Имеем

$$\eta_j^{(k)} = \sum_{i=0}^L P_{ij}^{(k)} b_{ij}^{(k)},$$

где

$$b_{ij}^{(k)} = \int_0^{\infty} t dF_{ij}(t).$$

Введем обозначение

$$\pi_j d_{jk} = x_{jk},$$

тогда для средних удельных затрат  $u$  имеем следующее выражение:

$$u = \sum_{j=0}^L \sum_{k=1}^K \eta_j^{(k)} r_j^{(k)} x_{jk} \times \left( \sum_{j=0}^L \sum_{k=0}^K \eta_j^{(k)} x_{jk} \right)^{-1}, \quad (23)$$

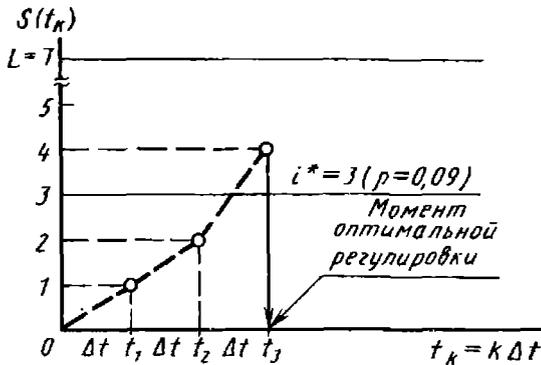


Рис. 1. К определению момента оптимальной регулировки (остановки наблюдений)

где

$$\sum_{k=1}^K x_{jk} - \sum_{i=0}^L \sum_{k=1}^K P_{ij}^{(k)} x_{jk} = 0;$$

$$x_{jk} > 0; \quad j = 0, 1, \dots, L;$$

$$k = 1, \dots, K, \quad \sum_{j=0}^L \sum_{k=1}^K x_{jk} = 1. \quad (24)$$

Задача заключается в том, чтобы минимизировать (23) при ограничениях (24). Сведем эту задачу к задаче линейного программирования. Обозначим

$$y_{jk} = \eta_j^{(k)} x_{jk} \left( \sum_{j=0}^L \sum_{k=1}^K \eta_j^{(k)} x_{jk} \right)^{-1}$$

В этом случае (23) и (24) примут вид:

$$u = \sum_{i=0}^L \sum_{k=1}^K r_i^{(k)} y_{jk},$$

$$y_{jk} > 0, \quad j = 0, 1, \dots, L;$$

$$k = 1, \dots, K; \quad (25)$$

$$\sum_{k=1}^K \sum_{i=0}^L P_{ij}^{(k)} \frac{y_{jk}}{\eta_j^{(k)}} -$$

$$- \sum_{k=1}^K \frac{y_{jk}}{\eta_j^{(k)}} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, L;$$

$$\|q_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0,30 & 0,20 & 0,20 & 0,12 & 0,10 & 0,05 & 0,03 \\ 0,10 & 0,30 & 0,20 & 0,13 & 0,12 & 0,08 & 0,07 \\ 0,08 & 0,10 & 0,30 & 0,20 & 0,12 & 0,10 & 0,10 \\ 0,05 & 0,10 & 0,10 & 0,30 & 0,20 & 0,15 & 0,10 \\ 0,05 & 0,10 & 0,10 & 0,15 & 0,30 & 0,20 & 0,10 \\ 0,02 & 0,08 & 0,10 & 0,10 & 0,20 & 0,30 & 0,20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\sum_{j=0}^L \sum_{k=1}^K y_{jk} = 1. \quad (26)$$

Рассмотрим частный случай. Пусть изменение состояний системы является управляемой цепью Маркова со стационарными переходными вероятностями. Тогда  $\eta_j^{(k)} = 1, y_{jk} = x_{jk},$

$$u = \sum_{j=0}^L \sum_{k=1}^K r_j^{(k)} x_{jk}, \quad (27)$$

а ограничениями являются выражения (24).

Пример. Пусть состояние системы полностью характеризуется одним выходным (обобщенным) параметром марковского типа  $S(t_k)$  с состояниями  $i = 0, 1, 2, \dots, L,$  контролируемым с интервалом времени  $\Delta t$  (рис. 1).

Разобьем область допустимых изменений параметра  $(0, L)$  на семь одинаковых частей. Затраты на регулировки параметра при эксплуатации системы следующие:

$$r_i^{(k)} = \begin{cases} T_{\Pi}, & i \in \overline{0, L-1} \\ & \text{и если принято решение} \\ & k - \text{предупредительно регулировать систему;} \\ T_{\text{р}}, & i = L \\ & \text{и если принято решение} \\ & k - \text{аварийно регулировать систему.} \end{cases}$$

Здесь  $T_{\Pi}$  — среднее время регулировки параметра до выхода его за аварийный уровень  $L,$   $T_{\text{р}}$  — среднее время аварийной регулировки параметра (при выходе его за уровень  $L$ ).

Обозначим через  $\rho = T_{\Pi}/T_{\text{р}}$ . Тогда (27) запишем так:

$$u = \sum_{s=0}^{L-1} x_{Ls} + \rho \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{s=0}^{L-1} x_{is},$$

где  $x_{is} = \pi_i D_{is}.$

Из статистики изменения параметра элементы матрицы

При решении задачи (27) и (24) нужно найти соответствующие составляющие матрицы  $\|D_{ij}\|, i, j = 0, 1, \dots, L$ .

При  $\rho = 0,09$  и приведенном выше виде матрицы  $\|q_{ij}\|$  в результате решения (27), (24) искомая матрица

$$\|D_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В каждой строке этой матрицы содержится один единичный элемент, остальные элементы строки нулевые. Часть единичных элементов расположены на главной диагонали матрицы, все остальные — в первом столбце. Нахождение единиц в первом столбце ука-

зывает на обязательную регулировку параметра в нулевое исходное состояние, на диагонали — отсутствие регулировки параметра.

Задача линейного программирования была решена для различных значений величины  $\rho$  для приведенного выше значения матрицы  $\|q_{ij}\|$ . Уровни оптимальной остановки наблюдений  $i^*$  (это эквивалентно видам искомым матриц — решений  $\|D_{ij}\|$ ) для фиксированных значений величин  $\rho$  представлены ниже:

$\rho \dots 0 < \rho \leq 0,05$	$0,05 - 0,09$	$0,10 - 0,4 \leq$
$\leq 0,01$	$-0,08$	$-0,20 \leq \rho < 1$
$i^* \dots 1$	2	3 5 6

На рис. 1 приведен пример использования правила оптимальной регулировки для параметра марковского типа при  $\rho = 0,09$ . Значение  $i^* = 3$  соответствует оптимальному упреждающему допуску, имеющему вид прямой, параллельной оси абсцисс.

# Глава 4. Немарковские управляемые случайные процессы в задачах оптимизации технического обслуживания

## 1. ЛЕММА ДУБА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Пусть векторный случайный процесс  $X(t)$  описывает поведение системы во времени. Составляющие процесса  $X(t)$  могут меняться непрерывно или скачкообразно (например, с единичными скачками при накоплении отказов в системе с избыточностью).

По состоянию процесса в фиксированный момент времени  $t$  можно однозначно определять факт исправности (или неисправности) системы. Чаще всего процесс  $X(t)$  наблюдается дискретно с интервалом  $\Delta t$  в моменты  $t_k = k\Delta t$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$ , т. е. наблюдается последовательность случайных векторов  $\bar{X}_0, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k, \dots$ . Значит, в каждый момент  $t_k$  становится известной вся прошлая траектория случайного процесса  $X(t)$ :

$$(x_0, x_1, \dots, x_k) = \bar{X}_k.$$

Из практики эксплуатации технических систем известно, что в момент  $t_k$  по наблюдаемой траектории  $\bar{X}_k$  можно принять только два решения: либо не вмешиваться в работу системы и продолжить наблюдение за процессом  $X(t)$ , либо прекратить работу системы и путем замен и регулировок вернуть систему в начальное состояние. В момент отказа системы, т. е. при  $X_0 \in X_+, \dots, X_{k-1} \in X_+, X_k \in X_-$  принимается второе решение (здесь  $X_+$  — пространство исправных состояний системы,  $X_-$  — пространство ее неисправных состояний  $X = X_+ \cup X_-$ , где  $X$  — все пространство состояний системы).

Введем функцию эксплуатационных потерь системы. Пусть  $C_1^*$  — средние потери в случае, когда в момент оста-

новки системы она исправна, а  $C_2^*$  — средние потери в случае, когда в момент остановки система неисправна (отказала).

В момент остановки системы ( $t_k = k\Delta t$ ) функция средних удельных потерь

$$y_k = \begin{cases} \frac{C_1}{t_k}, & \text{если система исправна;} \\ \frac{C_2}{t_k}, & \text{если система неисправна.} \end{cases} \quad (1)$$

Правилом остановки системы при наблюдении за процессом  $X(t)$  (далее просто правилом остановки) назовем случайную величину  $\nu$  со значениями  $1, 2, \dots, k, \dots$  (момент остановки определяется поведением процесса  $X(t)$ , поэтому он случаен во времени). Считаем, что решение об остановке в момент  $t_k$  зависит только от траектории процесса  $\bar{X}_k$  до момента  $t_k$ .

Для правила остановки  $\nu$  — случайной величины с распределением  $P\{\nu = k\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  средние потери

$$y(\nu) = \sum_{k=1}^{\infty} P\{\nu = k\} y_k. \quad (2)$$

При решении задач эксплуатации правило  $\nu^*$  оптимально, если

$$y(\nu^*) = \min_{\nu} y(\nu).$$

Если далее не ввести ограничений на процесс  $X(t)$ , то оптимальное пра-

\* Часто под величинами  $C_1$  и  $C_2$  понимаются соответственно средние времена регулировок исправной  $I_1$  и неисправной  $I_2$  систем.

вило остановки найти невозможно. Это ограничение заключается в следующем. Характерной чертой процессов, отображающих состояние системы при длительной эксплуатации, является их монотонность во времени (т. е. монотонность по вероятности отказа) — старение, изнашивание, разрегулирование, разбалансирование и т. д.

В этом случае удастся, используя лемму Дуба [9], найти оптимальное правило остановки.

Лемма Дуба в терминах рассматриваемой задачи формулируется так.

Правило  $v^*$  является оптимальным, если выполняются условия:

$$1) M [v^*] < \infty;$$

$$2) M [y_k \sqrt{X_{k-1}}] \times$$

$$\times \begin{cases} \leq y_{k-1} & \text{при } k \leq v^*, \\ \geq y_{k-1} & \text{при } k > v^*; \end{cases}$$

$$3) M [|y_k - y_{k-1}| \sqrt{X_{k-1}}] \leq C$$

для всех  $k$ ,

где  $C$  — некоторая постоянная.

Условия 1 и 3 на практике выполняются всегда для задач эксплуатации в силу конечности затрат и конечности времени безотказной работы технических систем, а условие 2 выполняется именно для отмеченных выше случайных процессов монотонного типа.

Рассмотрим примеры применения леммы Дуба.

**Пример.** Определить оптимальные моменты регулировок для параметра с независимыми приращениями. Пусть деградация системы (блока, элемента) в процессе длительной эксплуатации характеризуется непрерывным одномерным, монотонно возрастающим случайным процессом  $X(t)$ , который контролируется без ошибок в моменты  $t_k = k \Delta t$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Предположим, что приращения процесса  $X(t)$  по шагам контроля независимы и образуют последовательность независимых случайных величин с общей функцией распределения  $F(x) = P \{ \Delta X_k < x \}$ , где  $\Delta X_k$  — приращение процесса по шагам контроля  $k = 1, 2, \dots$  (рис. 1).

Пусть  $C_1$  — средние потери времени на регулировку параметра системы

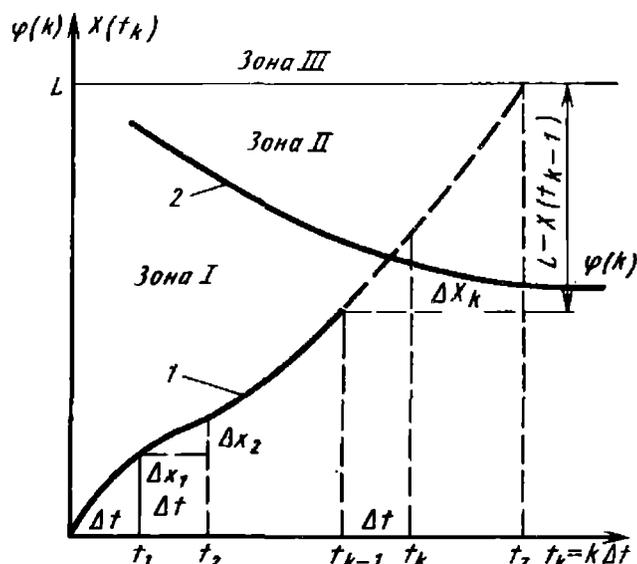


Рис. 1. К определению правил оптимальной остановки

$X(t)$ , если он находится внутри поля допуска  $(0, L)$  (предупредительная, профилактическая регулировка);  $C_2$  — средние потери времени на регулировку, если параметр вышел за пределы поля допуска  $(0, L)$  (аварийная регулировка).

Функция удельных потерь

$$y_k = \begin{cases} \frac{C_1}{t_k}, & \text{если } t_k < t_2; \\ \frac{C_2}{t_k}, & \text{если } t_k \geq t_2, \end{cases}$$

где  $t_2$  — момент выхода процесса  $X(t)$  за уровень  $L$  (см. рис. 1, штриховая кривая 1).

Задача заключается в отыскании такого правила остановки (регулировки параметра)  $v^*$ , при котором достигается  $\min M [y_k]$  в процессе длительной эксплуатации системы. Запишем выражение средних потерь для моментов  $t_{k-1}, t_k$ , считая, что процесс наблюдался до момента  $t_{k-1}$  включительно (наблюдаемая траектория процесса — сплошная кривая 1 на рис. 1), а в момент  $t_k$  он будет остановлен (подвержен либо предупредительной, либо аварийной регулировке):

$$M [y_k (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_{k-1}, \Delta X_k)] = \frac{C_1}{t_k} P \{ \Delta X_k < L - X(t_{k-1}) \} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{C_1 + A}{t_k} [1 - P\{\Delta X_k < L - X(t_{k-1})\}] = \\
 & = \frac{C_1}{t_k} + \frac{A}{t_k} [1 - P\{\Delta X_k < L - X(t_{k-1})\}], \quad (3)
 \end{aligned}$$

где  $C_2 - C_1 = A$  — некоторый штраф из-за отказа системы, а записи  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_{k-1}$  относятся к наблюдаемым значениям соответствующих случайных приращений  $\Delta X_1, \Delta X_2, \dots, \Delta X_{k-1}$ .

Убедимся в том, что в данном случае выполняется условие 2 леммы Дуба.

Покажем сначала, что

$$\begin{aligned}
 M & = [y_k(\Delta x_1, \dots, \Delta x_{k-1}, \Delta X_k)] \leq \\
 & \leq y_{k-1}(\Delta x_1, \dots, \Delta x_{k-2}, \Delta X_{k-1}), \quad (4)
 \end{aligned}$$

если наблюдения остановить не позже момента, соответствующего оптимальному значению правила остановки (номеру шага)  $v^*$ , т. е. при

$$k - 1 \leq v^*, \quad (5)$$

и если

$$\begin{aligned}
 1 - P\{\Delta X_k < L - X(t_{k-1})\} & \leq \\
 & \leq \frac{C_1}{A(k-1)}. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Подставляя (6) в (3), убеждаемся, что (4) верно.

Далее покажем, что

$$\begin{aligned}
 M & [y_k(\Delta x_1, \dots, \Delta x_{k-1}, \Delta X_k)] \geq \\
 & \geq y_{k-1}(\Delta x_1, \dots, \Delta x_{k-2}, \Delta X_{k-1}), \quad (7)
 \end{aligned}$$

если наблюдения остановить не раньше момента, соответствующего оптимальному правилу остановки (номеру шага)  $v^*$ , т. е. при

$$k - 1 \geq v^*, \quad (8)$$

и если

$$\begin{aligned}
 1 - P\{\Delta X_k < L - X(t_{k-1})\} & \geq \\
 & \geq \frac{C_1}{A(k-1)}. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Подставляя в (3) выражение (9), убеждаемся, что (7) верно.

Пусть  $k^*$  есть наименьшее  $k - 1$ , при котором впервые выполняется (9). Тогда  $v^* = k^*$ , что и следует из выполнения условия 2 леммы Дуба.

Регулировки в процессе длительной эксплуатации системы должны теперь осуществляться через время  $\min(t_{k^*}, t_z)$ , т. е. либо в моменты оптимальных

упреждающих регулировок (остановок), либо аварийно.

Найдем из (6) уравнение кривой оптимального упреждающего допуска, которое при автоматическом контроле параметра  $X(t)$  должно закладываться в ЭВМ.

Из (6) имеем

$$F(L - X(t_{k-1})) \geq \frac{C_1}{A(k-1)}.$$

Взяв от обеих частей функцию, обратную  $F$ , имеем

$$L - X(t_{k-1}) \geq F^{-1}\left(1 - \frac{C_1}{A(k-1)}\right)$$

или

$$\begin{aligned}
 X(t_{k-1}) & \leq L - F^{-1}\left(1 - \frac{C_1}{A(k-1)}\right) = \\
 & = \varphi(k).
 \end{aligned}$$

Вид кривой оптимального упреждающего допуска  $\varphi(k)$  показан на рис. 1 (кривая 2).

После построения кривой  $\varphi(k)$  процедура оптимальных регулировок параметра  $X(t)$  в процессе длительной эксплуатации формулируется так:

1) если в момент контроля параметр находится в зоне I (см. рис. 1), то он регулировке не подлежит;

2) если в момент контроля впервые обнаружено, что параметр находится в зоне II, то он подлежит упреждающей регулировке;

3) если в момент контроля параметр попал в зону III, то он регулируется аварийно.

Пример. Показать, используя допущения предыдущего примера, процедуру оптимальных регулировок параметра  $X(t)$ . Пусть  $C_1 = 1$  ед. времени,  $C_2 = 2$  ед. времени; функция  $F(x)$  задана на рис. 2,  $L = 10$  усл. ед., размерность которых совпадает с размерностью параметра  $X(t)$ .

Для того чтобы воспроизвести процесс изменения параметра  $X(t)$  во времени, воспользуемся методом статистических испытаний с помощью таблицы случайных чисел, равномерно распределенных в интервале  $[0, 1]$  (табл. 1), и функции распределения  $F(x)$  (см. рис. 2) \*.

\* В ЭВМ табл. 1 заменяет датчик случайных чисел.

По жребью определяем квадрат д4 с числом 0,35. Числу 0,35 на рис. 2 соответствует приращение  $\Delta x_1 = 3,1$  процесса  $X(t)$ .

Таким образом, в момент  $t_1$  процесс  $X(t)$  равен 3,1 единиц поля допуска (в дальнейшем единицу измерения указывать не будем).

Процесса  $X(t)$  в точках контроля будет равен

$$\Delta x_1, \Delta x_1 + \Delta x_2, \dots, \Delta x_1 + \dots + \Delta x_{k-1},$$

где  $k - 1$  — номер шага последнего наблюдения процесса. Заметим, что длина шага контроля при моделировании выбирается такой же, для которой были получены статистические данные о приращении процесса  $X(t)$ , использованные для построения функции  $F(x)$  на рис. 2. Итак,  $x(t_1) = 3,1$ .

Проверяем выполнение неравенства (6) на первом шаге контроля. Имеем  $k - 1 = 1$ ; аргумент вероятности  $P$  равен  $L - x(t_1) = 10 - 3,1 =$

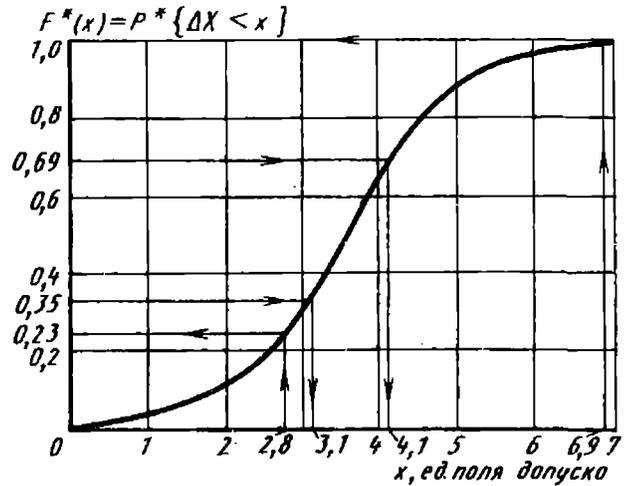


Рис. 2. Функция распределения приращений параметра  $X(t_k)$   $F^*(x)$  — статистическое значение функции  $F(x)$

$= 6,9$ . Неравенство для первого шага наблюдений запишется так:

$$1 - P\{\Delta x_2 < 6,9\} \leq \frac{1}{1,1} = 1.$$

Значение функции  $P$  (на рис. 2 обозначено через  $F$ ) при аргументе 6,9 равно 1 (см. рис. 2).

1. Таблица случайных чисел

	а	б	в	г	д	е	ж	з	и	к
1	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
2	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,20
3	0,21	0,22	0,23	0,24	0,25	0,26	0,27	0,28	0,29	0,30
4	0,31	0,32	0,33	0,34	0,35	0,36	0,37	0,38	0,39	0,40
5	0,41	0,42	0,43	0,44	0,45	0,46	0,47	0,48	0,49	0,50
6	0,51	0,52	0,53	0,54	0,55	0,56	0,57	0,58	0,59	0,60
7	0,61	0,62	0,63	0,64	0,65	0,66	0,67	0,68	0,69	0,70
8	0,71	0,72	0,73	0,74	0,75	0,76	0,77	0,78	0,79	0,80
9	0,81	0,82	0,83	0,84	0,85	0,86	0,87	0,88	0,89	0,90
10	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99	1,00

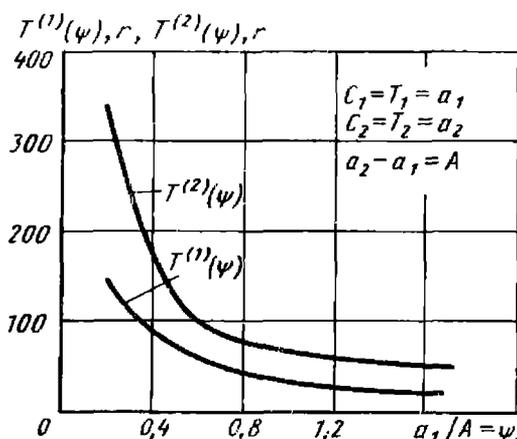


Рис. 3. К оценке эффективности правила оптимальной остановки

Поэтому имеем

$$1 - 1 < 1,$$

т. е.

$$0 < 1.$$

Неравенство (6) на первом шаге оказалось выполненным, значит, наблюдения продолжаем. Бросив жребий, получим квадрат и7, в котором находится число 0,69. Из рис. 2 ясно, что числу 0,69 соответствует приращение  $\Delta x_2$ . Это значит, что на втором шаге процесс

$$X(t_2) = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 3,1 + 4,1 = 7,2,$$

для второго шага имеем  $k - 1 = 2$ ,  $L - X(t_2) = 10 - 7,2 = 2,8$ .

Неравенство (6) для второго шага наблюдения запишется так:

$$1 - P\{\Delta x_3 < 2,8\} \leq \frac{1}{1 \cdot 2} = 0,50,$$

или

$$1 - 0,23 = 0,77 > 0,50.$$

Таким образом, неравенство (6) впервые нарушилось, значит,

$$v^* = k^* = 2.$$

В данном примере (исключительно в целях «быстрой» иллюстрации) были взяты нереально большие приращения исследуемого параметра по шагам контроля (по сравнению с допустимым уровнем  $L$ ).

Пример. Показать эффективность применения оптимального правила регулировки параметра  $X(t)$ . В рамках допущений на процесс  $X(t)$  в предыдущих примерах предположим, что

приращения  $\Delta x_k$  имеют общее экспоненциальное распределение

$$F(x) = P\{\Delta x_k < x\} = 1 - e^{-\mu x},$$

где

$$1/\mu = M[\Delta x_k], \quad k = 1, 2, \dots$$

Пусть  $1/\mu = 1$  [ед. измерения параметра  $X(t)$ ],  $L = 10$  таких же единиц. Значением отношения  $C_1/C_2$  будем варьировать.

Процесс изменения параметра  $X(t)$  с экспоненциальными приращениями был многократно воспроизведен на ЭВМ (принципиально так же, как в примере). Были зафиксированы все полученные реализации процесса, а также моменты его выхода за уровень  $L$  (моменты отказов системы). При построении функции интенсивности отказов

$$\lambda(t) = \frac{F'(t)}{1 - F(t)},$$

( $F(t)$  — распределение времени до момента первого выхода процесса  $X(t)$  за уровень  $L$ ), оказалось, что функция  $\lambda(t)$  монотонно возрастает во времени. Поэтому было подробно численно проанализировано два оптимальных управления состоянием системы: по алгоритму (27) (см. гл. 3) и с помощью леммы Дуба.

Кривая оптимального упреждающего допуска в данном случае имеет вид

$$\varphi_k = L + \frac{1}{\mu} \ln \left( 1 - \frac{C_1}{A(k-1)} \right).$$

Данные результатов моделирования приведены на рис. 3, где  $T^{(1)}$  — среднее время до выхода процесса  $X(t)$  за уровень  $L$  при управлении по алгоритму (27) гл. 3, т. е. при регулировке процесса строго через время  $\gamma$ , если за это время он не выходил за уровень  $L$ , или сразу же после его выхода за этот уровень, а  $T^{(2)}$  — среднее время до выхода процесса  $X(t)$  за уровень  $L$  при регулировках процесса по лемме Дуба [см. выражение (6)].

Затраты на эксплуатацию системы (средние суммарные, удельные, коэффициенты готовности) для двух рассмотренных оптимальных методов управления оказались примерно одинаковыми.

**Пример.** Записать левую часть выражения (6) для систем с монотонно возрастающей функцией интенсивности отказов  $\Lambda(t)$ , с нагруженным и ненагруженным резервированием, с параллельно-последовательным соединением равнонадежных элементов, с ветвящейся схемой соединения элементов.

Для системы с монотонно возрастающей функцией  $\Lambda(t)$  имеем

$$1 - \exp \left\{ - \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Lambda(t) dt \right\}.$$

Для системы с нагруженным резервированием (один основной элемент и  $n$  идентичных ему элементов в нагруженном резерве)

$$P \{x_k = n + 1/x_{k-1}, t_{k-1}\} = q_k^{n+1-x_{k-1}},$$

где  $x_k$  — число отказавших элементов в системе к моменту  $t_k$ ;

$$q_k = 1 - \frac{\bar{F}(t_k)}{\bar{F}(t_{k-1})}.$$

Здесь  $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$ ;  $F(t)$  — функция распределения времени безотказной работы элемента системы.

Для системы с ненагруженным резервированием (один основной элемент и  $n$  идентичных ему элементов в ненагруженном резерве)

$$P \{x_k = n + 1/x_{k-1}, \theta_{k-1}, t_{k-1}\} = \\ = F_1(\theta_{k-1} + \Delta t) \frac{*F(\Delta t) * \dots * F(\Delta t)}{(n - x_{k-1}) \text{ раз}},$$

где  $x_k$  — число вновь отказавших элементов к моменту  $t_k$ ;  $\theta_k$  — наработка функционирующего элемента к моменту  $t_k$ ;

$$F(\theta + \Delta t) = 1 - \bar{F}(\theta + \Delta t)/\bar{F}(\theta),$$

$$F(t) * F(t) = \int_0^t F(t-x) dF(x).$$

Для системы с параллельно-последовательным соединением равнонадеж-

ных элементов ( $N$  последовательных и  $n$  параллельных элементов)

$$1 - \left[ \prod_{j=1}^N \bar{F}_j(t_k)/\bar{F}_j(t_{k-1}) \times \right. \\ \times \left. \left\{ 1 - \prod_{i \neq i_1, \dots, i_q} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times [1 - \bar{\Phi}_i(t_k)/\bar{\Phi}_i(t_{k-1})] \right\} \right],$$

где  $i_1, \dots, i_q$  — номера отказавших элементов параллельной группы к моменту  $t_{k-1}$ , отказ системы происходит при отказе одного из последовательных элементов и более  $m$  ( $0 \leq m \leq n$ ) параллельных элементов, поэтому  $0 \leq q \leq m \leq n$ ; в этом случае не учтены надежность и инерционность переключателя, считается, что в момент контроля с вероятностью единицы известно число отказавших элементов системы;  $F_j(t)$ ,  $j = 1, N$ ;  $\Phi_i(t)$ ,  $i = 1, n$  — функции распределения элементов соответственно последовательной и параллельной групп  $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$ ;  $\bar{\Phi}(t) = 1 - \Phi(t)$ .

Для системы с ветвящейся схемой соединения равнонадежных нагруженных элементов примем:  $l$  — число одинаковых ветвящихся структур системы;  $K$  — коэффициент ветвления, одинаковый для каждой структуры;  $M$  — число рангов (пусть для определенности  $K = 4$ ,  $M = 5$ , рис. 4). В структуре допустимое число отказов выходных элементов системы равно  $m$  ( $m = bK^{M-1}$ ,  $0 < b < 1$ ). Пусть  $p(t)$  — вероятность безотказной работы любого элемента системы за время  $t$ ,  $q(t) = 1 - p(t)$ . Тогда левую часть выражения (6) можно представить в виде

$$1 - \bar{F}(t_k)/F(t_{k-1}),$$

где

$$\bar{F}(t) = \sum_{s_1=0}^{4m} \sum_{s_2=0}^{4m-s_1} \sum_{s_3=0}^{4m-s_1-s_2} \times \\ \times \sum_{s_4=0}^{4m-s_1-s_2-s_3} P_3(K, M, t) \times$$

$$\times P_{s_2}(K, M, t) P_{s_3} \times \\ \times (K, M, t) P_{s_4}(K, M, t).$$

Вероятности  $P_s(K, l, t)$  определяются рекуррентным образом ( $0 \leq s \leq K^l$ ,  $1 \leq l \leq M-1$ ):

$$P_s(K, l+1, t) = \\ = \sum_{n=0}^{\lfloor s/K \rfloor} P_n(K, l, t) C_{K^l - nk}^{s-nk} \times \\ \times p^{s-nk}(t) q^{K^l - s}(t).$$

Здесь  $\lfloor s/K \rfloor$  — целая часть  $s/K$ ,  $0 \leq s \leq K^l$ .

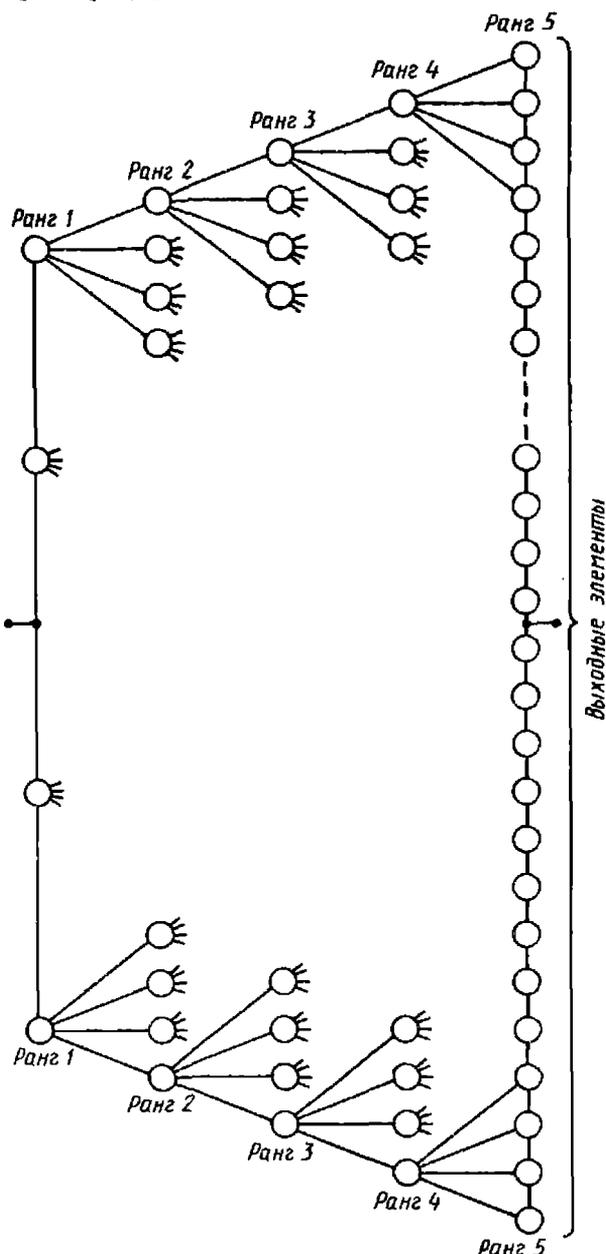


Рис. 4. Структура ветвящейся схемы соединения элементов системы ( $K=4$ )

Для  $l=1$

$$P_0(K, 1, t) = p(t);$$

$$P_1(K, 1, t) = q(t),$$

$$0 \leq s \leq K^l; 1 \leq l \leq M-1.$$

Поэтому вероятности  $P_s(K, M, t)$  и  $P_m(K, M, t)$  можно подсчитать рекуррентно.

## 2. ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНИЧЕСКОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ СИСТЕМ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ РЕЗЕРВИРОВАНИЕМ

Рассмотрим особенности определения моментов  $t_{k*}$  для систем с функциональным резервированием (СФР). Такие системы представляют собой совокупность взаимодействующих элементов, функции которых частично перекрываются.

Предположим, что моменты отказов элементов независимы; элементы могут находиться только в двух состояниях — исправном или неисправном; состояние СФР определяется состоянием элементов.

Отказ элемента в СФР может приводить к некоторому снижению выходного эффекта системы. Поэтому ее надежность целесообразно оценивать показателями эффективности функционирования (ЭФ) [5], например коэффициентом сохранения эффективности  $K_C$ , который характеризует степень влияния отказов системы на эффективность ее применения по назначению [8]. При этом под эффективностью применения СФР по назначению понимается ее свойство создавать некоторый полезный результат (выходной эффект) в течение периода эксплуатации в определенных условиях.

Пусть СФР состоит из  $N$  элементов. Ее состояние  $X_k$  известно в дискретные моменты времени  $t_k$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$ . При выполнении работ со средними затратами  $C_1$  (в случае, когда СФР в момент проведения технического обслуживания исправна) и  $C_2$  (в случае, когда она отказала) происходит обновление системы, поэтому отсчет времени начинается каждый раз с  $t_0=0$ .

В отличие от систем с резервированием в этом случае деление пространства состояний на  $X_+$  и  $X_-$  должно осуществляться по величине показателя ЭФ. Введем  $0 < K_C^+ \leq 1$ . Считаем, что состояния  $X_k$  в момент времени  $t_k$ , у которых  $K_C \geq K_C^+$ , являются исправными ( $X_k \in X_+$ ), а остальные — неисправными и принадлежащими  $X_-$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Причем  $X_+ \cup X_- = X$ , где  $X$  — пространство всех состояний СФР.

На это разбиение накладываем условие монотонности, т. е. если СФР находится в состоянии, принадлежащем  $X_-$ , то дополнительные отказы элементов не могут перевести ее в состояние  $X_+$ . Тогда (6) можно записать в виде

$$P \{X_{k+1} \in X_- / \bar{X}_k\} \leq \frac{C_1}{Ak}, \quad (10)$$

где  $X_{k+1}$  — состояние системы в течение времени  $\Delta t$ , следующего за моментом наблюдения  $t_k$ ;  $A = C_2 - C_1$ ;  $\bar{X}_k = (X_0, X_1, \dots, X_k)$  — траектория изменения состояний СФР на интервале  $[0, t_k]$ .

Выполнение условия 1) леммы Дуба обеспечивается в силу ограниченности времени работы системы, а условия 3) — конечности затрат.

Для определения левой части (10) необходимо выполнить расчет показателей ЭФ для всех состояний системы, например, по методике, приведенной в [5].

Поэтому здесь не может быть использован хорошо разработанный аппарат теории надежности для систем с произвольной структурой независимо отказывающих элементов, например метод путей и сечений или рекуррентный метод.

По результатам расчета показателей ЭФ отбираются те допустимые состояния  $S_i$ , для которых  $K_C \geq K_C^+$ . Тогда

$$X_+ = |S_1, S_2, \dots, S_I|^T,$$

где  $I$  — число допустимых состояний;  $S_i, i = \overline{1, I}$  — состояние СФР, для которого  $K_C \geq K_C^+$ .

Условные вероятности перехода системы из состояния  $S_i$  в состояние  $S_l$

за время  $(t_k, t_k + \Delta t)$ , с учетом независимости отказов элементов определяются соотношением

$$p_{il}(t_{k+1}/t_k) = \prod_{n \in N_{il}} p_n(t_{k+1})/p_n(t_k) \times \prod_{m \in M_{il}} [1 - p_m(t_{k+1})]/p_m(t_k), \quad (11)$$

где  $N_{il}, M_{il}, i, l = \overline{1, I}$  — совокупности номеров исправных и неисправных элементов, определяющих переход системы из  $S_i$  в  $S_l$  соответственно;  $p_n(t), p_m(t)$  — вероятности безотказной работы  $n$ -го и  $m$ -го элементов за время  $t$  соответственно.

Вероятность попадания  $X_{k+1}$  в момент времени  $t_{k+1}$  в пространство  $X_+$  при условии, что система в момент  $t_k$  находилась в  $S_i$  начальном состоянии, равна сумме членов  $i$ -й строки матрицы  $\|p_{il}(t_{k+1}/t_k), i, l = \overline{1, I}\|$ . Тогда для левой части (10)

$$P \{X_{k+1} \in X_- / \bar{X}_k\} = 1 - \sum_{l=i}^I p_{il}(t_{k+1}/t_k). \quad (12)$$

Таким образом, по результатам контроля СФР в момент  $t_k$  определяется ее состояние. Если это состояние принадлежит  $X_+$ , то выполняют проверку неравенства (10). В противном случае, т. е. если  $X_k \in X_-$ , необходимо выполнить работы с затратами  $C_2$ . Наибольшему значению  $k$ , для которого первый раз не выполняется (10), соответствует  $k^*$ .

Пример. Пусть СФР состоит из четырех элементов. Структурная схема соединения их по надежности приведена на рис. 5. Средние затраты составляют:  $C_1 = 1,8$  чел.-ч,  $C_2 = 3,9$  чел.-ч. Значения  $K_C$ , рассчитанные, например, по методике [5], приведены в табл. 2,  $K_C^+$  принимаем равным 0,7.

Распределения моментов отказов элементов считаем нормальными со средними наработками на отказ соответственно 500, 150, 100 и 200 ч и одинаковыми дисперсиями, равными 1 ч<sup>2</sup>.

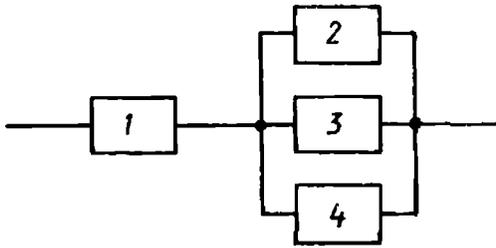


Рис. 5. Структурная схема соединения элементов СФР по надежности:

1—4 — номера элементов

Составляем матрицу всех возможных состояний системы:

$$X = \left| X_+ \cup X_- \right| = \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \\ S_8 \end{array} = \begin{array}{c} 1111 \\ 0111 \\ 1011 \\ 0011 \\ 1101 \\ 0101 \\ 1001 \\ 0001 \end{array}, \quad (13)$$

где приняты следующие обозначения: «1» — исправное состояние элемента, «0» — его неисправное состояние (причем нумерация элементов ведется по горизонтали слева направо). Из сопоставления табл. 2 и матрицы  $X$  определим

$$X_+ = |S_1 S_2 S_3 S_4|^T. \quad (14)$$

Матрица  $P(t_{k+1}/t_k)$  с учетом того, что в промежутках между моментами контроля система не восстанавливается, имеет вид

$$P(t_{k+1}/t_k) = \begin{array}{c} P_{11} \quad P_{12} \quad P_{13} \quad P_{14} \\ 0 \quad P_{22} \quad P_{23} \quad P_{24} \\ 0 \quad 0 \quad P_{33} \quad P_{34} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad P_{44} \end{array}. \quad (15)$$

## 2. Исходные данные для расчета левой части неравенства (10)

Исходное состояние	$K_C$	Исходное состояние	$K_C$
$S_1$	0,98	$S_5$	0,46
$S_2$	0,95	$S_6$	0,32
$S_3$	0,75	$S_7$	0
$S_4$	0,72	$S_8$	0

## 3. Динамика изменения левой и правой частей неравенства (10)

$k$	Часть неравенства (10)		$k$	Часть неравенства (10)	
	левая	правая		левая	правая
1	0,012	0,857	8	0,038	0,107
2	0,013	0,429	9	0,043	0,095
3	0,016	0,286	10	0,049	0,086
4	0,020	0,214	11	0,058	0,076
5	0,024	0,181	12	0,064	0,071
6	0,027	0,143	13	0,071	0,066
7	0,032	0,122	14	0,079	0,061

Примечание. Из данных табл. 3 следует, что  $k^* = 13$ .

Рассчитываем элементы этой матрицы с помощью (11), полагая  $\Delta t = 6$  ч, а затем левую и правую части (10). Определение исходного состояния системы можно осуществлять с помощью таблицы случайных чисел. Фрагмент результатов расчета приведен в табл. 3 для типичного случая, когда отсутствуют отказы элементов за время наблюдения.

## 3. ОПТИМИЗАЦИЯ ПО КРИТЕРИЮ ОТНОШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЖИДАНИЙ

Для систем длительной эксплуатации более подходящим критерием оптимизации в задачах технического обслуживания является критерий отношения математического ожидания суммарных эксплуатационных затрат к суммарному времени работы системы. Однако, пользуясь этим критерием, удалось решить более узкий круг задач, чем с использованием леммы Дуба.

Пусть наблюдаются  $N$  однотипных систем от начала работы до моментов остановок на техническое обслуживание. Обозначим через  $\tau^{(1)}, \dots, \tau^{(N)}$  времена работы систем до остановок, а через  $C^{(1)}, \dots, C^{(N)}$  соответствующие потери.

Для функции потерь при длительной эксплуатации каждой системы естественно отнести суммарные потери к суммарному времени работы, т. е.

$$\frac{C^{(1)} + \dots + C^{(N)}}{\tau^{(1)} + \dots + \tau^{(N)}}. \quad (16)$$

Разделим числитель и знаменатель этой дроби на  $N$ . При большом  $N$  в силу закона больших чисел, получим:

$$\frac{(C^{(1)} + \dots + C^{(N)})/N}{(\tau^{(1)} + \dots + \tau^{(N)})/N} \sim \frac{M [C]}{M [\tau]}. \quad (17)$$

В приложениях леммы Дуба была использована функция потерь вида  $M [C/\tau]$ . Поэтому для функции потерь (17) лемму Дуба применить нельзя.

Рассмотрим вновь монотонно возрастающий случайный процесс  $X(t)$ , характеризующий состояние системы в процессе эксплуатации.

Считаем, что последовательность наблюдений параметра  $X(t_k)$  в моменты  $t_k = k \Delta t, k = 0, 1, 2, \dots$  образует процесс восстановления, что означает — все приращения процесса

$$\Delta X_k = X(t_k) - X(t_{k-1}), k = 2,$$

3, ... независимы и одинаково распределены (см. рис. 1):

$$P \{\Delta X_k < x\} = F(x); \quad (18)$$

$$P \{X(t_k) < x\} = F_k(x), \quad (19)$$

где

$$F_k(x) = \int_0^x F_{k-1}(x-u) dF(u);$$

$$F_1(x) = F(x), \quad \bar{F}(x) = 1 - F(x).$$

В данном случае последовательность  $\{X(t_k)\}$  является марковским процессом, поэтому решение об остановке системы должно приниматься только по последнему наблюдению параметра.

Определим область исправного состояния системы как

$$X_+ = [0, L].$$

Для каждого момента контроля  $t_k$  назначаем уровень  $a_k$  и останавливаем процесс  $X(t_k)$  в момент  $t_k$ , при котором уровень  $a_k$  будет превышен в первый раз.

Рассмотрим два случайных события  $A_k$  и  $B_k$ :

$$A_k = \{X(t_1) \leq a_1, \dots, X(t_{k-1}) \leq a_{k-1}, a_k < X(t_k) \leq L\};$$

событие  $A_k$  состоит в том, что в момент остановки  $t_k$  система не отказала;

$$B_k = \{X(t_1) \leq a_1, \dots, X(t_{k-1}) \leq a_{k-1}, X(t_k) > L\};$$

событие  $B_k$  состоит в том, что в момент остановки  $t_k$  система отказала.

Тогда

$$\begin{aligned} P \{A_k\} &= \int_0^{a_{k-1}} [F(L-x) - \\ &\quad - F(a_k-x)] dF_{k-1}(x); \\ P \{B_k\} &= \\ &= \int_0^{a_{k-1}} \bar{F}(L-x) dF_{k-1}(x). \end{aligned}$$

Вычислим значения  $M [C]$  и  $M [\tau]$ .  
Имеем

$$\begin{aligned} M [C] &= C^{(')} \sum_{k=1}^{\infty} P \{A_k\} + \\ &\quad + (C' + A) \sum_{k=1}^{\infty} P \{B_k\} = \\ &= C^{(')} + A \sum_{k=1}^{\infty} P \{B_k\}; \end{aligned}$$

$$M [\tau] = \sum_{k=1}^{\infty} k \Delta t [P \{A_k\} + P \{B_k\}],$$

где  $C^{(')} + A$  — средние потери при отказе системы к моменту остановки;  $C^{(')}$  — средние потери на восстановление системы, если к моменту остановки она не отказала.

Окончательно для  $M [C]$  и  $M [\tau]$  соответственно получаем

$$\begin{aligned} M [C] &= C^{(')} + \\ &\quad + A \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{a_{k-1}} \bar{F}(L-x) dF_{k-1}(x); \\ M [\tau] &= \Delta t \sum_{k=1}^{\infty} F_k(a_k). \end{aligned}$$

Из условия

$$\frac{\partial}{\partial a_k} \left( \frac{M[C]}{M[\tau]} \right) = 0$$

получаем

$$A\bar{F}(L - a_k) M[\tau] = M[C],$$

откуда следует, что

$$a_1 = a_2 = \dots = a_k = a_0 < \alpha.$$

Поэтому

$$M[C] = C'' + A \int_0^{a_0} \bar{F}(L - x) \times \\ \times dH(x) + A\bar{F}(L); \\ M[\tau] = \Delta t H(a_0),$$

где

$$H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(x); \quad h(x) = H'(x).$$

Возьмем производную функции потерь по аргументу  $a_0$ :

$$\frac{\partial}{\partial a_0} \left( \frac{M[C]}{M[\tau]} \right) = \frac{\Delta t h(a_0)}{(M[\tau])^2} \times \\ \times \left[ A \int_0^{a_0} H(x) f(L - x) dx - C'' - \right. \\ \left. - A\bar{F}(L) \right], \quad (20)$$

где  $f(x) = F'(x)$ .

Выражение в квадратных скобках в правой части (20) монотонно возрастает на  $a_0$  и при  $a_0 = L$  равно

$$AH(L) - C'' - A. \quad (21)$$

Если выражение (21) отрицательно, то функция потерь достигает минимума при  $a_0 = L$ . Тогда процесс  $X(t)$  нужно останавливать в момент отказа. Если же выражение (21) положительно, то функция  $M[C]/M[\tau]$  достигает минимума при таком  $a_0$ , при котором

$$A \int_0^{a_0} H(x) f(L - x) dx = C'' + \\ + A\bar{F}(L). \quad (22)$$

Уравнение (22) можно решить сколь угодно точно. Однако если сделать

естественное предположение о том, что

$$L \gg M[X(t_k) - X(t_{k-1})],$$

уравнение (22) можно решить приближенно.

Приближенное решение уравнения (22). Запишем (22) в виде

$$AH(L) = C'' + A + \\ + A \int_0^L H(x) f(L - x) dx. \quad (23)$$

Обозначим  $a_0 = L - \delta$  ( $a_0$  должно быть близко к  $L$ ), поэтому (23) можно записать в виде

$$\bar{F}(\delta) H(L) \approx (C'' + A)/A. \quad (24)$$

При больших значениях аргумента функции восстановления

$$H(L) \approx L/T,$$

где  $T = \int_0^{\infty} x dF(x)$  — среднее значение приращений процесса  $X(t)$ .

Тогда из (24) получаем

$$\bar{F}(\delta) = (C'' + A)T/AL.$$

Следовательно,

$$\delta = F^{-1}[1 - (C'' + A)T/AL], \quad (25)$$

где  $F^{-1}$  — функция, обратная  $F(x)$ .

Из выражения (25) ясно, что оптимальный упреждающий допуск  $a_0$  есть прямая, параллельная предельному допуску  $L$  и отстоящая от уровня  $L$  на величину  $\delta$ .

#### 4. СРАВНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ. НЕОДНОКРАТНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ПРАВИЛА (6)

Приведем некоторые результаты статистического сравнения двух моделей длительной эксплуатации системы с одним и тем же определяющим параметром  $X(t)$ , но с различными критериями оптимизации — критериями  $M[C]/M[\tau]$  и  $M[C/\tau]$ .

Моделировалось изменение монотонно возрастающего параметра  $X(t)$

с функцией распределения приращений

$$F(x) = 1 - e^{-\mu x}.$$

В качестве оптимальных упреждающих кривых для экспоненциальных прира-

щений использовались кривая  $\varphi(k)$  и прямая  $a_0 = L - \delta$ , где  $\delta$  — определялось из (25).

Значения  $M[C]/M[\tau]$  и  $M[C/\tau]$  определялись так:

$$\frac{M[C]}{M[\tau]} \approx \frac{(C^{(1)} + \dots + C_2^{N \text{ раз}} + \dots + C^{(N)})/N}{(\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_N)/N},$$

$$M\left[\frac{C}{\tau}\right] \approx \underbrace{\left(\frac{C^{(1)}}{\tau_1} + \dots + \frac{C_2}{\tau_k} + \dots + \frac{C_2}{\tau_N}\right)}_{N \text{ раз}}/N,$$

где  $C_2 = C^{(i)} + A$ ,  $\tau_i$  ( $i = \overline{1, N}$ ,  $1 \leq k \leq N$ ) — момент  $i$ -й регулировки параметра.

При наблюдении десяти серий по 200 выходов параметра  $X(t)$  за уровень  $L$  или кривую  $\varphi(k)$  в среднем было упреждено 195 выходов процесса  $X(t)$  за уровень  $L$  из 200 рассмотренных реализаций процесса  $X(t)$  при следующих исходных данных:  $\mu = 1$ ,  $C^{(1)} = 1$ ,  $A = 2$ ,  $L = 10$ ,  $\Delta t = 1$  (в

сопоставимых единицах). При этом  $M[C/\tau] = 0,123$ .

При оптимальном управлении параметром  $X(t)$  с помощью упреждающего допуска  $a_0 L - \delta$  в процессе моделирования (при  $C^{(1)} = 1$ ,  $\mu = 1$ ,  $L = 10$ ,  $\Delta t = 1$ ) для различных значений  $A$  отношение  $M[C]/M[\tau]$  всегда оказывалось меньше значения  $M[C/\tau]$  (рис. 6), аналогичная картина (рис. 7) наблюдалась и при варьировании значениями параметра  $\mu$  (при  $C^{(1)} = 1$ ,  $A = 1$ ,  $L = 10$ ,  $\Delta t = 1$ ).

Однако по числу упрежденных выходов процесса за уровень  $L$  (при 10 сериях из 200 реализаций процесса  $X(t)$  в каждой серии) оптимальное правило эксплуатации, основанное на лемме Дуба (критерий  $M[C/\tau]$ ), оказалось более эффективным (табл. 4 и 5).

При  $C^{(1)} = 1$ ,  $A = 2$ ,  $\mu = 1$ ,  $\Delta t = 1$ ,  $M[C]/M[\tau] = 0,118$ ,  $\delta = 1,89$ .

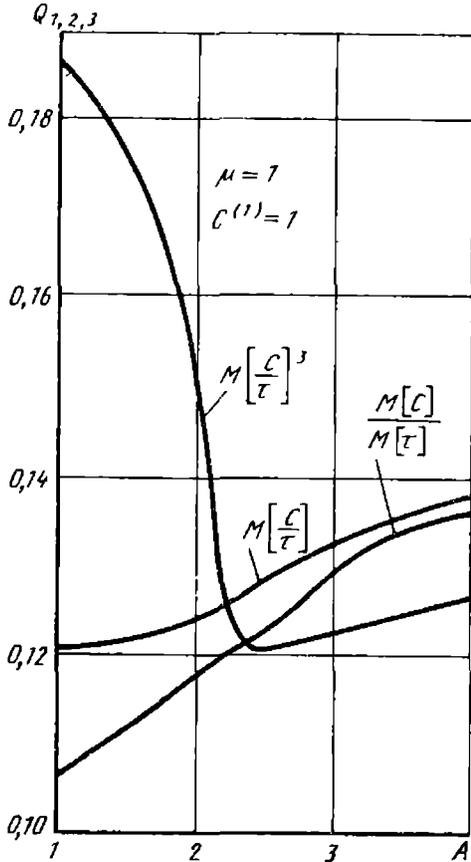


Рис. 6. Результаты процесса моделирования в зависимости от  $A$ :

$$Q_1 = M\left[\frac{C}{\tau}\right], \quad Q_2 = \frac{M[C]}{M[\tau]}; \quad Q_3 = M\left[\frac{C}{\tau}\right]^3$$

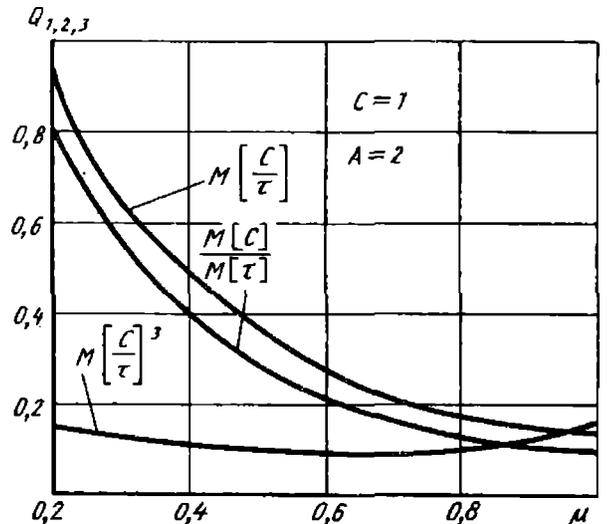


Рис. 7. Результаты процесса моделирования в зависимости от  $\mu$ :

$Q_{1,2,3}$  — то же, что и на рис. 6

#### 4. Эффективность управления по критериям $M[C/\tau]$ и $M[C]/M[\tau]$ при изменении $A$

A	Среднее число выходов параметра за $L$ при управлении по критерию	
	$M[C/\tau]$	$M[C]/M[\tau]$
0,5	35	47
1,0	14	26
1,5	6	16
2,0	8	19
2,5	3	18
3,0	3	20
3,5	1	20
4,0	1	20

Анализ результатов моделирования позволяет сделать следующий вывод: при отношении дисперсии момента выхода процесса  $X(t)$  за уровень  $L$  к математическому ожиданию его момента выхода за уровень  $L$ , не превышающему значение 0,2,

$$\left( \frac{M \left[ \frac{C}{\tau} \right] - \frac{M[C]}{M[\tau]}}{M[C]/M[\tau]} \right) 100 \% \leq 20 \%,$$

а для наиболее типовых исходных данных эта разница не превышает (5—

#### 5. Эффективность управления по критериям $M[C/\tau]$ и $M[C]/M[\tau]$ при изменении $\mu$

$\mu$	Среднее число выходов параметра за $L$ при управлении по критерию	
	$M[C/\tau]$	$M[C]/M[\tau]$
0,2	62	136
0,5	22	36
0,9	4	14
1,0	4	15

10) %. При этом правило эксплуатации, основанное на лемме Дуба (критерий  $M[C/\tau]$ ) позволяет в среднем уменьшить на 6,5 % число выходов процесса  $X(t)$  за уровень  $L$  (по сравнению с оптимальным управлением по критерию  $M[C]/M[\tau]$ ).

В ряде случаев при автономном выполнении ответственных заданий после получения сигнала о попадании параметра  $X(t)$  в зону II (рис. 8) система не может быть остановлена на профилактику и должна продолжать работать по назначению. В этих случаях естественно перейти на контроль параметра с меньшим шагом наблюдения (например, с шагом  $\Delta t_2 = 0,1 \Delta t_1$ )

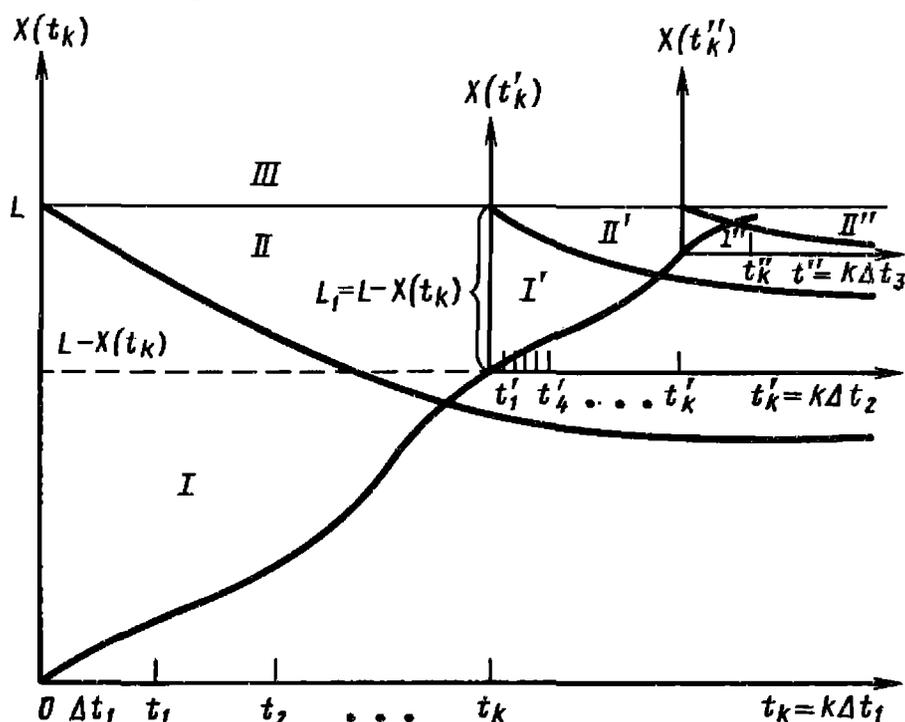


Рис. 8. К многократному применению правила остановки наблюдений

и применить вновь то же правило остановки наблюдений (см. рис. 8). В этом случае изменяется функция  $F(x)$  и значение поля допуска, которое станет равным  $L_1 = L - X(k \Delta t)$ .

При первом попадании параметра  $X(t)$  (уже в новой системе координат) в зону  $II'$  вновь переносится начало координат и выбирается меньший шаг контроля (например,  $\Delta t_3 = 0,1 \Delta t_2$ ) и рассматривается упреждающий допуск для новых значений  $F(x)$  и  $L$  (выделяются зоны  $I''$  и  $II''$  на рис. 8). Процедура перехода на контроль параметра  $X(t)$  с меньшим шагом определяется, с одной стороны, техническими возможностями (точностью контроля параметра), а с другой, — степенью риска (вероятностью выхода параметра за предельный допуск). При неоднократном применении правила (6) следует ожидать некоторого увеличения полезной наработки системы и увеличения потерь на регулировки параметра  $X(t)$ .

При моделировании неоднократного применения правила (6) к исходному процессу  $X(t)$  с экспоненциальными

приращениями значение  $C^{(1)}$  принималось равным единице, величины  $\mu$ ,  $A$  варьировались ( $\mu = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0$ ;  $A = 1, 2, 3, 4$ );  $\Delta t_1, \Delta t_2 = 0,1 \Delta t_1$ ;  $\Delta t_3 = 0,01 \Delta t_1$ . При расчетах величины  $M [C/\tau]$  затраты относились к величине  $t$ , выраженной в шагах контроля  $\Delta t_3$ , а затем приводились к шагу контроля  $\Delta t_1$ . Моделировалось, таким образом, трехкратное применение правила (6) — (см. рис. 8).

На рис. 7 и 8 показано изменение величины  $M [C/\tau]^{(3)}$ , получаемой при трехкратном применении правила (6), в зависимости от величин  $A$  и  $\mu$  соответственно.

Трехкратное применение правила (6) позволило увеличить полезную наработку системы в среднем на 20%, однако при этом вероятность выхода параметра  $X(t)$  за уровень  $L$  возросла: при  $A < 2$  — на 70%, при  $A = 2$  — на 21,5%, а при  $A > 2$  — на 5%. Это означает, что неоднократное применение правила (6) целесообразно при  $A \geq 2$ , т. е. когда велика «цена» отказа.

## Глава 5. Общая модель эксплуатации и ремонта по техническому состоянию восстанавливаемых систем

### 1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

**Физические предпосылки.** Часто при эксплуатации технической системы имеется возможность полного восстановления ее свойств. В одних случаях этого достигают путем замены ее, в других — путем ремонта или технического обслуживания. Для единообразия ниже будет применяться термин «ремонт».

В процессе эксплуатации происходит ухудшение свойств системы, что приводит как к снижению ее показателей эффективности, так и к возрастанию возможности отказа. Предполагается, что после отказа система подлежит ремонту в обязательном порядке. Кроме того, может быть проведен предупредительный ремонт до отказа системы. Обычно на практике существуют ограничения на моменты времени проведения ремонта. Система может быть доступна только в определенное время, например средства транспорта — после завершения рейса, различные производственные машины — после окончания рабочего цикла и т. п.

Задача заключается в принятии решения о моменте времени проведения ремонта. Критерием эффективности при этом является средний доход от эксплуатации системы в единицу времени. Последний формируется из доходов, получаемых от исправной работы системы, и расходов, связанных с последствиями отказа и проведением ремонта. Доходы и расходы (как и возможность отказа) зависят от фактического состояния системы. В связи с этим принимаемые решения также должны зависеть от состояния системы. Это соответствует методу ремонта (замены или технического обслуживания) по состоянию (РС).

В случае ремонта по состоянию

структура принимаемого решения достаточно сложна. Для каждого возможного состояния системы следует указать, проводить или не проводить предупредительный ремонт. При этом должно учитываться, когда такое решение будет приниматься в следующий раз. Поэтому математические модели, используемые для определения моментов времени ремонта по состоянию, являются весьма сложными.

**Математическая модель.** Рассмотрим сложную систему, возможные состояния которой образуют фазовое пространство  $E_1$ . В момент времени  $t \geq 0$  состояние системы обозначим  $Z(t)$ , ( $Z(t)$  — непрерывный справа случайный процесс со значениями из  $E_1$ ). Система подвержена отказам. Обозначим подмножество состояний отказа  $\Delta_1$ ,  $\Delta_1 \subset E_1$ . Множество работоспособных состояний системы обозначим  $E_0 = E_1 - \Delta_1$ . На восстановление (ремонт) системы после отказа затрачивается некоторое случайное время  $\theta \geq 0$ , по истечении которого функционирование системы продолжается. При этом предполагается, что восстановление является полным, т. е. процессы функционирования системы между двумя последовательными моментами устранения отказов являются вероятностными копиями. Иными словами, эти моменты являются точками регенерации рассматриваемого процесса  $Z(t)$ , а сам процесс — регенерирующим [37, 47].

Промежуток времени между двумя соседними точками регенерации называется циклом регенерации. Если отсчет времени вести от последней точки регенерации, то момент возникновения отказа  $\xi > 0$ . Общая длина цикла составляет случайное время  $\xi + \theta$ . Будем считать, что  $M(\xi + \theta) < \infty$ . Из общей теории регенерирующей про-

цессов известно, что основные стационарные характеристики таких процессов могут быть рассчитаны путем анализа одного цикла регенерации. Структура протекания процесса на одном цикле регенерации описывается следующим образом. Будем вести отсчет времени от момента регенерации, т. е. полагать для такого момента  $t = 0$ . От этого момента до момента отказа  $\xi$  имеются моменты времени  $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < \xi$ , называемые *марковскими моментами* (ММ). Физический смысл ММ таков: выявление того, наступил ли данный ММ до момента времени  $t$ , однозначно определяется траекторией процесса  $Z(t)$  до момента  $t$ . В связи с этим ММ часто называют «случайными величинами, не зависящими от будущего» [36]. Так, ММ не будут моменты времени появления в системе неисправностей, если неисправности обнаруживаются не сразу, а только при проведении осмотров, технических обслуживаний и т. п.

Предполагается, что получаемая для ММ последовательность значений «расширенного» процесса  $\{X(t_i), i = 0, 1, \dots\}$ , где  $X(t) = (Z(t), t)$  (т. е. расширенного путем дополнения компоненты  $Z(t)$  компонентой  $t$ ), образует однородную цепь Маркова (ЦМ) с фазовым пространством  $E = E_1 \times R_+$ , где  $R_+ = [0, \infty]$ , подмножеством поглощающих состояний  $\Delta = \Delta_1 \times R_+ \subset E$  и вероятностями перехода за шаг

$$P_x(\mathcal{A}) = P(X(t_i) \in \mathcal{A} / X(t_{i-1}) = x), \\ x \in E - \Delta, \mathcal{A} \subset E, i = 1, 2, \quad (1)$$

В конкретных ситуациях ММ имеют различное содержание. В одних случаях они соответствуют моментам времени, когда система доступна для наблюдения или проведения ремонта. В других случаях ими являются моменты ударов, которым подвергается система [70, 74, 76—78, 80, 89, 90].

С функционированием системы связано накопление дохода. Доход — это любой количественный показатель эффективности. Например, наличие отказа системы может учитываться доходом, полагаемым равным единице, если отказ имеет место, и нулю —

если отказа не было. Этим самым охватываются системы различного (в частности, военного) назначения. Доход начисляется в момент отказа  $\xi$  и является функцией  $g(z, \xi)$  состояния системы в этот момент  $z \in \Delta_1$  и момента отказа  $\xi$ . Случайная длительность устранения отказа  $\theta$  также является функцией этих переменных:  $\theta = \theta(z, \xi)$ .

Отказы устраняются в процессе ремонта, в результате чего восстанавливаются свойства системы. Формально это означает, что в момент регенерации  $t = 0$  система переводится в некоторое состояние из  $E$  в соответствии с фиксированным начальным распределением вероятностей

$$q(A) = P(X(0) \in A), \quad A \subset E - \Delta, \quad (2)$$

причем  $q(\mathcal{A}) \neq 0$  только для множества  $A$  вида  $A = A_1 \times \{0\}$ , где  $A_1 \subset E_1$  (поскольку после этого момента учет времени идет заново).

Доходы за различные циклы регенерации суммируются. Критерием эффективности системы является удельный доход, т. е. средний доход в единицу времени функционирования системы в стационарном режиме (см. гл. 3).

Для повышения удельного дохода в ММ  $t$  возможно проведение предупредительного ремонта (восстановления, обслуживания, замены) системы. Это соответствует РС, т. е. регенерации процесса  $Z(t)$ . В момент окончания РС состояние системы определяется начальным распределением (2), после чего начинается новый цикл регенерации. В связи с этим ясно, что моменты окончания РС также являются точками регенерации рассматриваемого процесса.

Проведение предупредительного РС возможно только в том случае, если система не находится в состоянии отказа. Осуществление РС и ММ  $t$ , в который состояние системы есть  $Z(t) = z \in E_0$ , дает доход  $g(z, t)$ . Длительность проведения ремонта является, как и ранее, случайной величиной  $\theta = \theta(z, t)$ .

Постановка задачи. Обозначим  $T$  класс возможных моментов проведения РС. По условию задачи в случае

отказа ремонт осуществляется в обязательном порядке. Следовательно, для любого момента  $\tau \in T$  ремонт производится в момент времени

$$\tau \wedge \xi = \min(\tau, \xi). \quad (3)$$

Считаем, что в качестве  $T$  могут выступать два класса:  $T_D$  и  $T_C$ .  $T_D$  — это класс ММ относительно последовательности  $X(t_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots$ ;  $T_C$  — это класс ММ относительно случайного процесса  $X(t)$ ,  $t \geq 0$ ,  $T_D$  соответствует дискретному управлению в моменты времени  $t_1, t_2, \dots$ ,  $T_C$  — непрерывному управлению в любой момент  $t \geq 0$ . В случае класса  $T_C$  дополнительно предполагается, что процесс  $X(t)$ ,  $t \geq 0$  — марковский. Обозначение  $T$  будет сохраняться для общего случая, когда конкретизация класса до  $T_D$  или  $T_C$  роли не играет. Элементы класса  $T$  будем называть стратегиями.

Наличие дохода приводит к тому, что рассматриваемый процесс становится процессом накопления [36, 37]. Известно, что удельный доход для такого процесса равняется отношению среднего дохода за цикл регенерации к средней длине цикла. Отсюда следует, что удельный доход для стратегии  $\tau \in T$  определяется следующей формулой, в которой индекс  $C$  означает начальное распределение вероятностей (2):

$$\psi(\tau) = \frac{M_{CG}(Z(\tau), \tau)}{M_C(\tau + \theta(Z(\tau), \tau))}. \quad (4)$$

Ценой системы называется

$$\psi^* = \sup_{\tau \in T} \psi(\tau). \quad (5)$$

Стратегия  $\tau_0 \in T$  называется оптимальной в классе  $T$ , если

$$\psi(\tau_0) = \psi^*. \quad (6)$$

Стратегия  $\tau_\varepsilon \in T$  называется  $\varepsilon$ -оптимальной, где  $\varepsilon > 0$ , в классе  $T$ , если

$$\psi(\tau_\varepsilon) \geq \psi^* - \varepsilon. \quad (7)$$

Оптимальная стратегия является 0-оптимальной.

Цена системы — это точная верхняя граница удельного дохода на классе всех стратегий  $T$ . Если оптимальная стратегия существует, то она обеспе-

чивает достижение этой границы. Для  $\varepsilon$ -оптимальной стратегии получаемый удельный доход меньше верхней границы не более чем на  $\varepsilon$ . С позиций практики при малых значениях  $\varepsilon$  нет ощутимой разницы между оптимальной и  $\varepsilon$ -оптимальной стратегиями. При этом имеется в виду не только незначительное (меньше чем на  $\varepsilon$ ) уменьшение удельного дохода, но и то, что исходная информация не является точной, что существенно увеличиваются затраты машинного времени на нахождение оптимальной вместо  $\varepsilon$ -оптимальной стратегии и т. п.

Задача заключается в нахождении оптимальных и  $\varepsilon$ -оптимальных стратегий.

## 2. ОБЩИЙ АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ

Метод решения. В выражении (4) числитель обозначим  $\psi_1(\tau)$ , а знаменатель  $\psi_2(\tau)$ :

$$\psi_1(\tau) = M_{CG}(Z(\tau), \tau), \quad (8)$$

$$\psi_2(\tau) = M_C(\tau + \theta(Z(\tau), \tau)), \quad (9)$$

т. е. представим (4) в виде

$$\psi(\tau) = \psi_1(\tau) / \psi_2(\tau). \quad (10)$$

Напомним, что  $\psi_2(\tau)$  — это средняя длина цикла, а  $\psi_1(\tau)$  — средний доход за цикл при стратегии  $\tau$ .

Поскольку для всех стратегий  $\tau \in T$   $\psi_2(\tau) > 0$  и  $\psi(\tau) \leq \psi^*$ , то справедливо неравенство

$$\psi_1(\tau) - \psi^* \psi_2(\tau) \leq 0, \quad \tau \in T. \quad (11)$$

Рассмотрим функционал

$$\Phi_\psi(\tau) = \psi_1(\tau) - \psi \psi_2(\tau), \quad \tau \in T, \quad (12)$$

$$\psi \leq \psi^*,$$

совпадающий с левой частью неравенства (11) при  $\psi = \psi^*$ .

Справедлива следующая теорема (см. теорему 10.1 [17]): подклассы стратегий  $T_0 = \{\tau \in T : \psi(\tau) = \psi^*\}$  и  $\{\tau \in T : \Phi_{\psi^*}(\tau) = \max_{\tau' \in T} \Phi_{\psi^*}(\tau')\}$ ,

максимизирующих соответственно (10) и (12) при  $\psi = \psi^*$ , совпадают. Для любой оптимальной стратегии  $\tau_0 \in T_0$

$\Phi_{\psi^*}(\tau_0) = 0$ . Стратегия  $\tau_0 \in T$  максимизирует (10) тогда и только тогда, когда  $\Phi_{\psi}(\tau_0)(\tau) = \psi_1(\tau) - \psi(\tau_0) \times \psi_2(\tau) \leq 0 \quad \forall \tau \in T$ .

Приведенная теорема о совпадении подклассов стратегии, максимизирующих дробный функционал  $\psi(\tau)$  и более простой функционал  $\Phi_{\psi^*}(\tau)$ , используется по двум причинам. Во-первых, для функционала  $\Phi_{\psi^*}(\tau)$  намного проще исследовать структуру оптимальных стратегий. Выявление этой структуры существенно облегчает поиск оптимальных стратегий для этих функционалов. Во-вторых, можно применять описываемый ниже алгоритм нахождения оптимальной стратегии  $\tau_0 \in T$ , основанный на многократной оптимизации функционала  $\Phi_{\psi}(\tau)$  при различных  $\psi$  и использующий хорошо развитые методы решения задачи об оптимальной остановке марковских последовательностей (для класса стратегий  $T_D$ ) или процессов (для класса  $T_C$ ).

**Описание алгоритма.** В качестве начального приближения к оптимальной стратегии примем  $\tau = \xi$ , что соответствует эксплуатации системы до отказа. Вычислим для него значение  $\psi(\tau)$  критерия (10) и рассмотрим задачу максимизации функционала (12) при  $\psi = \psi(\tau)$ . Для полученного решения  $\tau' \in T$  этой задачи найдем соответствующее ему значение функционала  $\psi' = \psi(\tau')$ . Достаточно любое решение  $\tau'$ , для которого  $\Phi_{\psi}(\tau') > 0$ . Для этого значения  $\psi'$  снова рассмотрим задачу максимизации функционала (12) при  $\psi = \psi'$  и т. д. Формальная запись этого итерационного алгоритма выглядит так.

**Шаг 0.** Полагаем  $\tau = \xi$ ,  $\psi' = -\infty$ .

**Шаг 1.** Вычисляем  $\psi = \psi(\tau)$  по формуле (10). Если  $\psi = \psi'$ , то оптимальной является стратегия  $\tau$ , максимальное значение функционала (10) равно  $\psi$  — конец работы алгоритма, иначе — переход к шагу 2.

**Шаг 2.** При фиксированном  $\psi$  решаем задачу нахождения стратегии  $\tau \in T$ , максимизирующей функционал (12). Отметим, что вместо  $\tau$  можно ограничиться любой стратегией, обеспечивающей строго положительное зна-

чение функционала (12). Полагаем  $\psi' = \psi$  и переходим к шагу 1.

**Обоснование алгоритма.** Описанная итерационная процедура сходится к оптимальной стратегии, если она существует, при следующих естественных предположениях, обычно выполняемых на практике. Во-первых, цена (5) конечна:  $\psi^* < \infty$ . Во-вторых, при любой стратегии  $\tau \in T$  средняя длина цикла  $M\psi_2(\tau)$  конечна. В-третьих, введем на классе стратегий  $T$  расстояние  $\rho$ , определив его для стратегий  $\tau$  и  $\tau'$  из  $T$  как  $\rho(\tau, \tau') = |\psi(\tau) - \psi(\tau')|$ . В результате  $T$  становится псевдометрическим пространством. Предполагается, что  $T$  является компактом относительно сходимости по метрике  $\rho$ : из любой последовательности стратегий из  $T$  можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к стратегии из  $T$ .

На основании сделанных предположений сходимость алгоритма обосновывается следующим образом. Пусть  $\psi^1, \psi^2, \dots$  — последовательность значений функционала (10), вычисляемых на шаге 1 алгоритма. Имеют место строгие неравенства  $\psi^1 < \psi^2 < \dots$  до тех пор, пока при некотором  $n = 1, 2, \dots$   $\psi^n = \psi^{n+1}$ , после чего  $\psi^i = \psi^n$  для всех  $i \geq n$ . Строгое неравенство имеет место тогда и только тогда, когда существует стратегия, обеспечивающая большее значение функционала (10), чем значение для данного шага. Это утверждение вытекает из того, что если  $\psi$  — значение функционала на данном шаге и указанная стратегия  $\tau'$ , для которой  $\psi(\tau') > \psi$ , существует, то  $\Phi_{\psi}(\tau') = \psi_1(\tau') - \psi\psi_2(\tau') > 0$ . Отсюда следует, что  $\sup_{\tau \in T} \Phi_{\psi}(\tau) > 0$  и

максимальное значение  $\psi'$ , получаемое на следующем шаге алгоритма, больше  $\psi$ .

Итак, последовательность  $\psi^1, \psi^2, \dots$  монотонно возрастает и ограничена, поэтому она имеет предел. Пусть этот предел  $\psi^\infty$  строго меньше  $\psi^*$ :  $\psi^* - \psi^\infty = a > 0$ . Покажем, что это невозможно. Поскольку  $T$  — компакт, то из соответствующей последовательности стратегий можно выбрать подпоследовательность  $\tau^1, \tau^2, \dots$ , сходящуюся к стратегии  $\tau^\infty \in T$ , причем

$\psi(\tau^\infty) = \psi^\infty$ . Пусть  $n$  такое, что для заданного  $\varepsilon > 0$   $\bar{\psi}^i \geq \psi^\infty - \varepsilon$  при  $i \geq n$ , где  $\bar{\psi}^i = \psi(\tau^i)$ . Тогда из  $\psi_1(\tau^\infty) - \psi^\infty \psi_2(\tau^\infty) = 0$  следует  $\psi_1(\tau^\infty) \leq \psi_2(\tau^\infty)(\bar{\psi}^i + \varepsilon)$ , т. е.  $\psi_1(\tau^\infty) - \bar{\psi}^i \psi_2(\tau^\infty) \leq \varepsilon \psi_2(\tau^\infty)$ . Если выбрать  $\varepsilon < a \psi_2(\tau^*) / \psi_2(\tau^\infty)$  (что возможно в силу конечности математического ожидания длины цикла  $\psi_2(\tau)$  при всех стратегиях  $\tau \in T$ ), то получаем, что  $\psi_1(\tau^\infty) - \bar{\psi}^i \psi_2(\tau^\infty) < \psi_2(\tau^*) a = \psi_1(\tau^*) - \psi^\infty \psi_2(\tau^*) \leq \psi_1(\tau^*) - \bar{\psi}^i \psi_2(\tau^*)$ . Следовательно, при всех  $\bar{\psi}^i$ , принадлежащих достаточно малой окрестности (относительно метрики  $\rho$ )  $\bar{\psi}^\infty$ , при реализации шага 2 алгоритма не может быть выбрана стратегия  $\tau^\infty$ . Более того, не может быть выбрана и любая другая стратегия  $\tau$  из окрестности  $\tau^\infty$ . Действительно, пусть теперь  $n$  такое, что  $\psi^\infty \leq \bar{\psi}^i + a \times \psi_2(\tau^*) / \psi_2$  при  $i \geq n$ , где  $\psi_2 = \sup \psi_2(\tau^i)$ . Тогда  $\psi_1(\tau) - \bar{\psi}^i \psi_2(\tau) \leq \psi_1(\tau) - \psi^\infty \psi_2(\tau) + \psi_2(\tau) a \times \psi_2(\tau^*) / \psi_2 < a \psi_2(\tau^*) = \psi_1(\tau^*) - \psi^\infty \psi_2(\tau^*) \leq \psi_1(\tau^*) - \bar{\psi}^i \psi_2(\tau^*)$ .

Итак,  $\psi^\infty = \psi^*$ , т. е. итерационный алгоритм приводит к оптимальной стратегии. Аналогичное утверждение справедливо (причем даже при более слабых предположениях) относительно  $\varepsilon$ -оптимальных стратегий.

Использование теории оптимальных правил остановки. В приведенном алгоритме наибольшие затруднения вызывает, очевидно, шаг 2, на котором решается задача максимизации функционала (12). Однако это хорошо известная задача об оптимальной остановке марковского процесса или последовательности, где под остановкой понимается восстановление (ремонт) системы. Для единообразного описания случаев марковской последовательности (для класса  $T_D$ ) и марковского процесса (для класса  $T_C$ ) будем полагать, что в случае последовательности временная переменная  $t$  принимает значения  $t_1, t_2, \dots$ . Тогда в силу (8) и (9) функционал (12) можно представить [в отличие от (10)] как ма-

тематическое ожидание некоторой функции  $g_\psi(X(t))$  от марковского процесса  $X(t)$  в ММ остановки  $\tau \in T$ :

$$\Phi_\psi(\tau) = M_C g_\psi(X(\tau)), \quad (13)$$

где  $g_\psi(x) = g(x) - \psi(t + \theta(x))$ ,  $x = (z, t) \in E$ .

Наличие индекса «С» при символе математического ожидания означает, что начальное значение марковского процесса  $X(t)$  определяется (2), соответствующим началу цикла регенерации. Запишем  $M_x g_\psi(X(\tau))$  для произвольного начального состояния  $x \in E$ , тогда

$$M_C g_\psi(X(\tau)) = \int_E M_x g_\psi(X(\tau)) dq(x). \quad (14)$$

Приведем основные факты из теории оптимальной остановки марковских последовательностей, которые будут использоваться в дальнейшем. В дополнение к предположению о конечности математического ожидания момента остановки  $\tau$ , вытекающего из  $\tau \leq \xi$  и  $M_x \xi < \infty$ , предположим, что при  $\psi < \infty$   $M_x \sup_i g_\psi(X(t_i)) < \infty$ ,  $x \in E$ .

Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Цена  $s(x)$ , определяемая формулой

$$s(x) = \sup_{\tau \in T} M_x g_\psi(X(\tau)) \quad \forall x \in E, \quad (15)$$

удовлетворяет функциональному уравнению

$$s(x) = \max \{g_\psi(x),$$

$$M_x s(X(t_1))\} \quad \forall x \in E \quad (16)$$

и является наименьшей эксцессивной мажорантой функции  $g_\psi(x)$ , т. е.

$$s(x) \geq g_\psi(x),$$

$$s(x) \geq M_x s(X(t_1)) \quad \forall x \in E.$$

2) Последовательность  $\{Q^n g_\psi(x), n = 0, 1, 2, \dots\}$ , где

$$Q^0 g_\psi(x) = g_\psi(x),$$

$$Q^{n+1} g_\psi(x) = \max \{Q^n g_\psi(x),$$

$$M_x Q^n g_\psi(X(t_1))\}, \quad (17)$$

монотонно возрастая, сходится к  $s(x)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q^n g_\psi(x) = s(x) \quad \forall x \in E.$$

Альтернативным представлением общего члена последовательности  $\{Q^n g_\psi(x)\}$  является

$$Q^{n+1} g_\psi(x) = \max \{g_\psi(x), M_x Q^n g_\psi(X(t_1))\}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (18)$$

3) Момент

$$\tau_0 = \inf \{t_i : i = 1, 2, \dots : s(X(t_i)) = g_\psi(X(t_i))\} \quad (19)$$

является оптимальным моментом остановки, т. е.

$$M_x g_\psi(X(\tau_0)) = s(x) \quad \forall x \in E.$$

Если множество состояний пространства  $E$ , для которых приращение максимально возможного дохода неположительно,

$$S_- = \left\{ x \in E : \sup_{\tau \in T} M_x g_\psi(X(\tau)) - g_\psi(x) \leq 0 \right\}, \quad (20)$$

то выражение (19) можно записать в виде

$$\tau_0 = \inf \{t_i : i = 1, 2, \dots : X(t_i) \in S_-\}. \quad (21)$$

4) Для всякого  $\varepsilon > 0$  момент

$$\tau_\varepsilon = \inf \{t_i, i = 1, 2, \dots : s(X(t_i)) - \varepsilon \leq g_\psi(X(t_i))\}$$

является  $\varepsilon$ -оптимальным моментом остановки:

$$M_x g_\psi(X(\tau_\varepsilon)) \geq s(x) - \varepsilon \quad \forall x \in E.$$

5) Пусть ММ  $\tau^* \in T$  таков, что соответствующее ему значение среднего дохода  $f(x) = M_x g_\psi(X(\tau^*))$  является эксцессивной мажорантой функции  $g_\psi(x)$ , т. е. выполняются неравенства  $f(x) \geq g_\psi(x)$  и  $f(x) \geq M_x f(X(t_1))$ . Тогда ММ  $\tau^*$  является оптимальным.

6) По условию задачи значение цены  $s(x)$  в состояниях отказа  $\Delta$  известно, поэтому функциональное уравнение (16) можно рассматривать только на множестве  $E - \Delta \in E$ . Если для

всех состояний  $x$  из этого множества вероятность (1) перехода марковской последовательности в множество  $E - \Delta$  за шаг строго меньше единицы, то уравнение (16) для  $x \in E - \Delta$  имеет единственное решение в классе всех ограниченных функций.

Поясним приведенные результаты. Соотношения (16) и (17) — это обычные соотношения динамического программирования. Фигурирующие в них функции имеют следующий физический смысл:  $s(x)$  — максимальный доход, который может быть получен за цикл, если начальное состояние есть  $x$ ;  $Q^n g(x)$  — максимальный доход, который может быть получен за  $n$  шагов рассматриваемой марковской последовательности, если начальное состояние есть  $x$ . Формулы (17) и (18) описывают практически важный численный метод нахождения цены  $s(x)$ . Зная цену  $s(x)$  для всех состояний  $x \in E$  на основании утверждений 3 и 4 находится оптимальный или  $\varepsilon$ -оптимальный моменты остановки.

Утверждение 5 позволяет иногда находить оптимальный момент остановки, не зная цены. Утверждение 6 соответствует случаю, когда решение функционального уравнения (16) единственно.

При некоторых дополнительных предположениях относительно процесса  $X(t)$  и функции  $g(x)$  приведенные утверждения остаются справедливыми и для марковских процессов  $X(t)$ ,  $t \geq 0$ , т. е. для класса стратегий  $T_C$ .

$\varepsilon$ -оптимальные стратегии. Нахождение этих стратегий сводится к определению  $\varepsilon'$ -оптимальных моментов остановки для функционала (12) при  $\psi = \psi^*$ , где  $\varepsilon' = \varepsilon\psi_\varepsilon$ ,  $\psi_\varepsilon$  — любая нижняя граница средней длительности цикла  $\psi_2(\tau)$  для всех  $\varepsilon$ -оптимальных стратегий  $\tau$  (для класса  $T_D$  в качестве  $\psi_\varepsilon$  можно взять математическое ожидание первого ММ  $t_1$ ). Действительно, поскольку при оптимальной стратегии  $\tau^* \Phi_{\psi^*}(\tau^*) = 0$ , то

$$\begin{aligned} \psi(\tau_{\varepsilon'}) &= \frac{\psi_1(\tau_{\varepsilon'})}{\psi_2(\tau_{\varepsilon'})} = \\ &= \frac{\psi_1(\tau_{\varepsilon'}) - \psi^* \psi_2(\tau_{\varepsilon'})}{\psi_2(\tau_{\varepsilon'})} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + \psi^* &= \psi^* + \frac{\Phi_{\psi^*}(\tau_{\varepsilon'})}{\Psi_2(\tau_{\varepsilon'})} \geq \\
 &\geq \psi^* + \frac{\Phi_{\psi^*}(\tau^*) - \varepsilon'}{\Psi_2(\tau_{\varepsilon'})} = \\
 &= \psi^* - \frac{\varepsilon'}{\Psi_2(\tau_{\varepsilon'})} = \psi^* - \\
 &\quad - \frac{\varepsilon\psi_{\varepsilon}}{\Psi_2(\tau_{\varepsilon'})} \geq \psi^* - \varepsilon.
 \end{aligned}$$

В большинстве практических случаев для нахождения оптимальных стратегий используются численные методы. При этом часто с учетом ошибок машинных округлений вычисления заканчиваются, как только достигнутое значение критерия  $\psi$  отличается от цены  $\psi^*$  не более чем на некоторое малое  $\varepsilon$ . Это соответствует  $\varepsilon$ -оптимальным стратегиям (моментам остановки).

### 3. МАРКОВСТЬ И МОНОТОННОСТЬ

Инфинитезимальный оператор и теорема Дынкина. Исследование структуры оптимальных стратегий, так же как и нахождение их, упрощается, когда процесс  $X(t)$  является марковским. Марковский процесс удобно задавать инфинитезимальным оператором  $\mathcal{A}$ , определяемым формулой

$$\mathcal{A}f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{M_x f(X(t)) - f(x)}{t}. \quad (22)$$

Область действия этого оператора  $D_{\mathcal{A}}$  состоит из всех функций  $f(x)$ , отображающих  $E$  в  $R = (-\infty, \infty)$ , для которых предел в правой части (22) существует равномерно по  $x \in E$ . Значение инфинитезимального оператора для функций  $f$  в точке  $x$  физически можно трактовать как среднюю скорость приращения функции в этой точке, если приращение аргумента описывается марковским процессом  $X(t)$  с начальным условием  $X(0) = x$ .

Важное значение имеет теорема Дынкина, утверждающая, что для любой ограниченной функции  $f$  из об-

ласти  $D_{\mathcal{A}}$  и любого ММ  $\tau$ , имеющего конечное математическое ожидание, справедлива формула

$$\begin{aligned}
 M_x f(X(\tau)) &= \\
 &= M_x \int_0^{\tau} \mathcal{A}f(X(u)) du + f(x). \quad (23)
 \end{aligned}$$

Эта формула имеет следующий физический смысл: среднее приращение функции  $f(X(t)) \in D_{\mathcal{A}}$  за случайное время  $t$ , определяемое ММ  $\tau$ , равно математическому ожиданию интеграла от значения инфинитезимального оператора для этой функции, взятого от 0 до  $\tau$ .

Выражение (23) позволяет в общей формуле (21) для оптимального ММ  $\tau_0$ , максимизирующего  $M_x f(X(\tau))$ , записать определение  $S_-$  в виде

$$\begin{aligned}
 S_- &= \left\{ x \in E : \right. \\
 &\left. : \sup_{\tau \in T} M_x \int_0^{\tau} \mathcal{A}f(X(u)) du \leq 0 \right\}. \quad (24)
 \end{aligned}$$

Оказывается, что анализ структуры оптимальных стратегий с помощью формул (21)—(24) существенно упрощается, если процесс  $X(t)$  и функция  $f(x)$  являются монотонными.

Предположим, что марковский процесс  $X(t)$  обладает следующим свойством монотонности: если состояние  $x'' \in E$  достижимо из состояния  $x' \in E$ , то  $x'$  недостижимо из  $x''$ . Рассмотрим на пространстве состояний  $E$  отношение частичного строгого порядка  $\alpha$ , удовлетворяющее условиям: если  $x''$  достижимо из  $x'$ , то  $x' \alpha x''$ ; если  $x' \alpha x''$ , то  $x'$  недостижимо из  $x''$ .

Состояния отказа  $\Delta \subseteq E$  являются максимальными элементами такого упорядочения, характеризующиеся тем, что для каждого  $x \in \Delta$  не существует такого  $x' \in E$ , что  $x \alpha x'$ .

Предположим далее, что функция  $h(x) = \mathcal{A}f(x)$  является монотонной по отношению к введенной упорядоченности. Для определенности будем счи-

тать, что  $h(x)$  монотонно убывает:

$$h(x') \geq h(x'') \text{ при } x' \propto x'' \text{. (25)}$$

**Основные теоремы.** Рассмотрим при сформулированных предположениях задачу нахождения оптимальной стратегии  $\tau_0 \in T_D$ , максимизирующей  $M_x f(X(\tau))$  при фиксированной  $x \in E - \Delta$ . Из формул (21), (24) и свойства монотонности функции  $h(x) = \mathcal{A}f(x)$  следует, что максимум будет достигаться при

$$\tau = \inf \left\{ t_i, i = 1, 2, \dots : M_x \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathcal{A}f(X(u)) du \leq 0 \right\}.$$

Обозначим

$$S = \left\{ x \in E : M_x \int_0^{t_1} \mathcal{A}f(X(u)) du \leq 0 \right\}. \text{ (26)}$$

Тогда оптимальный ММ  $\tau_0$  определяется как первый момент достижения процессом  $X(t)$  множества  $S$ :

$$\tau_0 = \begin{cases} \inf \{t_i, i = 1, 2, \dots : X(t_i) \in S\}, \\ \xi, \text{ если такое } \tau_0 \text{ существует;} \\ \xi, \text{ если не существует.} \end{cases} \text{ (27)}$$

Оптимальная стратегия  $\tau_0$  имеет «пороговую» структуру. Действительно, пусть  $\bar{S}$  — замыкание  $S$ , образованное добавлением к  $S$  всех пределов последовательностей  $x_1, x_2, \dots$  где  $x_{i+1} \propto x_i \forall x_i \in E, i = 1, 2$ . Назовем границей или порогом и обозначим  $S_\Gamma$  множество минимальных элементов:

$$S_\Gamma = \{x \in \bar{S} : \forall x' \in S \ x' \propto x\}. \text{ (28)}$$

Теперь оптимальный ММ  $\tau_0$  можно определить как первый момент време-

ни, в который процесс  $X(t)$  превосходит порог  $S_\Gamma$ :

$$\tau_0 = \inf \{t_i, i = 1, 2, \dots : \exists x' \in S_\Gamma \ x' \propto X(t_i)\}. \text{ (29)}$$

В важном частном случае функция  $h(x) = \mathcal{A}f(x)$  неизменна в каждом интервале  $(t_i, t_{i+1})$  между ММ  $\{t_i\}$ . Тогда (26) принимает вид

$$S = \{x \in E : \mathcal{A}f(x) \leq 0\}. \text{ (30)}$$

Для применения сформулированных результатов к задаче максимизации математического ожидания (13) осталось только заметить, что здесь в качестве функции  $f(x)$  выступает  $g\psi(x)$ :

$$f(x) = g(x) - \psi(t + \theta(x)). \text{ (31)}$$

Все полученные выше результаты могут быть сформулированы следующим образом.

**Т е о р е м а 1.** 1) Для задачи максимизации выражения (4) по всем стратегиям  $\tau$ , принадлежащим классу  $T_D$  ММ относительно последовательности  $X(t_i), i = 0, 1, \dots$ , оптимальной является пороговая стратегия  $\tau_0$ , определяемая соотношениями (26)–(29) и (31) при  $\psi = \psi^*$ .

2) Для того чтобы пороговая стратегия  $\tau_0 \neq \xi$  была оптимальной, необходимо и достаточно, чтобы с вероятностью, равной единице по распределению  $X(\tau_0)$ , выполнялось неравенство

$$M_x \int_0^{t_1} \mathcal{A}f(X(u)) du \leq 0 (\geq 0) \text{ при } X(\tau_0) \propto x \text{ (при } x \propto X(\tau_0)), \text{ (32)}$$

где  $f(\cdot)$  вычисляется по (31) при  $\psi = \psi(\tau_0)$ .

3) Для оптимальности стратегии эксплуатации системы до отказа  $\tau = \xi$  необходимо и достаточно, чтобы

$$M_x \int_0^{t_1} \mathcal{A}f(X(u)) du \geq 0, \ x \in E - \Delta. \text{ (33)}$$

4) В случае постоянства функции  $\mathcal{A}f(X(t))$  в интервалах  $(t_i, t_{i+1})$  фор-

мула (26) заменяется на (30), а (32) на формулу

$$\mathcal{A}f(x) \leq 0 (\geq 0) \text{ при } X(\tau_0) \propto x \\ (\text{при } x \propto X(\tau_0)), \quad (34)$$

а (33) на формулу

$$\mathcal{A}f(x) \geq 0, \quad x \in E - \Delta. \quad (35)$$

Первое утверждение теоремы было доказано выше. Для справедливости второго утверждения согласно теореме разд. 2 необходимо и достаточно доказать неравенство  $\psi_1(\tau) - \psi(\tau_0) \times \times \psi_2(\tau) \leq 0$ , где  $\psi(\tau) = \psi_1(\tau)/\psi_2(\tau)$  определяется соотношениями (8) и (9),  $\tau$  — любая пороговая стратегия. Максимизация по  $\tau$  левой части данного неравенства — это уже рассматривавшаяся задача максимизации выражения (13). Максимизирующая пороговая стратегия дается формулами (26)—(28). Рассмотрим подмножество траекторий  $X(t)$  (т. е. элементарных событий соответствующего вероятностного пространства), на которых  $\tau_0 \leq \tau$ . Из (26), (27) и строго марковского свойства процесса  $X(t)$  следует, что (32) является необходимым и достаточным условием выполнения с вероятностью, равной единице, неравенства  $\psi(\tau_0) \geq \geq \psi(\tau)$ . К такому же результату приводит рассмотрение подмножества траекторий  $X(t)$ , на которых  $\tau_0 > \tau$ .

Аналогичным образом формулируются результаты для класса  $T_C$  стратегии, соответствующих непрерывному управлению.

**Т е о р е м а 2.** 1) Для задачи максимизации выражения (4) по всем стратегиям  $\tau$ , принадлежащим классу  $T_C$  ММ относительно марковского процесса  $X(t)$ ,  $t \geq 0$ , оптимальной является пороговая стратегия

$$\tau_0 = \min \{ \xi, \inf \{ t \geq 0 : X(t) \in S \} \},$$

где  $S$  определяется по формулам (30), (31) при  $\psi = \psi^*$ , или

$$\tau_0 = \min \{ \xi, \inf \{ t \geq 0 : \exists x' \in S_{\Gamma} \\ x' \propto X(t) \} \},$$

где  $S_{\Gamma}$  определяется по (28).

2) Для того чтобы пороговая стратегия  $\tau_0 \neq \xi$  была оптимальной, необходимо и достаточно выполнение с вероятностью, равной единице по рас-

пределению  $X(\tau_0)$ , неравенства (34).

3) Для оптимальности эксплуатации системы до отказа необходимо и достаточно выполнение неравенства (35).

Сформулированные теоремы будут использованы далее при определении оптимальных сроков проведения ремонта изучаемых систем по техническому состоянию.

#### 4. УПРАВЛЕНИЕ РЕМОНТОМ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ПУАССОНОВСКОМ ПОТОКЕ УДАРНЫХ НАГРУЗОК

**Постановка задачи.** Рассмотрим механическую систему, подверженную ударным нагрузкам. Моменты ударов  $t_1, t_2, \dots$  образуют пуассоновский поток с интенсивностью  $\lambda > 0$ .

Каждый удар вызывает в системе повреждение, являющееся реализацией положительной случайной величины  $Y$  с функцией распределения  $F(y)$ ,  $y \geq 0$ , причем математическое ожидание  $MY > 0$ . Величины повреждений, получаемых при последовательных ударах, являются реализациями взаимно независимых случайных величин  $Y_1, Y_2, \dots$ , не зависящих также от моментов ударов  $t_1, t_2, \dots$ . Повреждения от различных ударов аддитивно накапливаются в системе. Пусть  $Z(t)$  — суммарная величина повреждений, накопленных в системе к моменту времени  $t$ :

$$Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_1; \\ Y_1 + Y_2 + \dots + Y_i & \text{при } t_i \leq \\ \leq t < t_{i+1}, \quad i = 1, 2 \end{cases}$$

После каждого удара система может отказаться. Обозначим  $\delta_1$  состояние отказа,  $r(z)$ ,  $0 \leq z \leq \infty$  — вероятность отсутствия отказа после очередного удара, если в результате удара величина накопленных повреждений в системе составляет  $z$ :

$$r(z) = P(Z(t_i^+) \neq \delta_1 | Z(t_i^-) + Y_i = z),$$

где  $Z(t_i^+)$  и  $Z(t_i^-)$  — пределы справа и слева в точке  $t$ .

Предположим, что  $r(z)$  убывает по  $z$ , причем  $r(\infty) = 0$ .

Рассматриваемая система является восстанавливаемой. После отказа система ремонтируется (восстанавливается) за среднее время  $a_1 + a_2$ , затраты на такой ремонт составляют  $c_1 + c_2$ . Кроме того, возможен предупредительный ремонт системы непосредственно после моментов ударов  $t_1, t_2, \dots$ , если только система до этого не отказала. В этом случае ремонт длится время  $a_1$  и стоит  $c_1$ . Предполагается, что  $a_1, a_2, c_1, c_2 \geq 0$ , так что  $a_2$  и  $c_2$  — это дополнительные время и стоимость ремонта, связанные с устранением отказа системы. В результате ремонта все повреждения в системе устраняются.

Каждая единица времени функционирования системы в неотказовом состоянии приносит доход  $b$  такой, что

$$c_2 + ba_2 \geq \lambda (a_2c_1 - c_2a_1). \quad (36)$$

Задача заключается в нахождении оптимального управления ремонтом системы, при котором удельный (средний в единицу времени) доход от функционирования максимален.

**Метод решения.** Данная задача является частным случаем общей задачи, описанной в разд. 1. В качестве фазового пространства исправных состояний системы  $E_0$  фигурирует неотрицательная вещественная полуось  $R_+ = [0, \infty)$ . Единственное состояние отказа есть  $\delta_1$ . Оно является поглощающим состоянием, не входящим в  $E_0$ , так что все пространство состояний системы  $E_1 = E_0 + \{\delta_1\}$ . Первая компонента расширенного процесса  $X(t) = (Z(t), t)$  является величиной накопленных повреждений  $Z(t)$ , а вторая — временем  $t$ , прошедшим после последнего восстановления.

Фазовое пространство  $X(t)$  есть  $E = E_1 \times R_+$  с выделенными поглощающими состояниями  $\Delta = \delta_1 \times R_+$ .

В результате ремонта система переходит в состояние (0), так что начальное распределение вероятностей (2) является вырожденным:

$$q(0, 0) = 1.$$

По условию задачи продолжительности восстановления равны:

$$\theta(\delta_1, t) = a_1 + a_2, \theta(z, t) = a_1 \text{ при } z \neq \delta_1.$$

Вероятности (1) перехода марковской последовательности  $\{X(t_i)\}$  за шаг выражаются формулами при  $x \neq \delta$ :

$$P_x(A) = P(Z(t_i)) \leq z',$$

$$t_i \leq t' / Z(t_{i-1}) = z, t_{i-1} = t = (1 - e^{-\lambda(t'-t)}) \times \int_0^{z'-z} r(z+y) dF(y),$$

$$P_x(\delta) = P(Z(t_i)) = \delta_1,$$

$$t_i \leq t' / Z(t_{i-1}) = z, t_{i-1} = t = (1 - e^{-\lambda(t'-t)}) \times \left( 1 - \int_0^\infty r(z+y) dF(y) \right),$$

где  $x = (z, t)$ ,  $A = (0, z') \times (0, t')$ ,  $\delta = \delta_1 \times (0, t')$ ,  $z' \geq z$ ,  $t' \geq t$ ,  $z, t, z', t' \in R_+$ .

В состоянии  $x = (z, t)$  в случае проведения ремонта система дает доход

$$g(x) = g(z, t) = bt - c_1 - c_2 \chi_{\delta_1}(z), \quad (37)$$

где  $\chi_{\delta_1}(z)$  — характеристическая функция множества:

$$\chi_{\delta_1}(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } z = \delta_1; \\ 0 & \text{при } z \neq \delta_1. \end{cases} \quad (38)$$

В качестве момента проведения ремонта могут выступать любые ММ времени относительно последовательности  $X(t_1), X(t_2), \dots$ . Обозначим класс таких моментов  $T_D$ , а сами моменты назовем стратегиями ремонта.

Будем в дальнейшем опускать при символах математического ожидания  $M$  и вероятности  $P$  нижние индексы, указывающие на начальное состояние процесса  $X(t)$ , если они являются нулевыми, т. е. писать  $M_z = M_{(z, 0)}$ ,  $P_z = P_{(z, 0)}$ ,  $M = M_0$ ,  $P = P_0$ .

Очевидно, для любой стратегии  $\tau \in T_D$

$$M_x g(Z(\tau), \tau) = bM_x \tau - c_1 - c_2 M_x \chi_{\delta_1}(Z(\tau)) = bM_x \tau - c_1 - c_2 P_x(\xi = \tau). \quad (39)$$

Следовательно, максимизации подлежит функционал

$$\psi(\tau) = (bM\tau - c_1 - c_2P(\xi = \tau)) / (M\tau + a_1 + a_2P(\xi = \tau)). \quad (40)$$

Максимизация выражения (40) по стратегиям  $\tau \in T_D$  равносильна максимизации математического ожидания (13) функционала  $g_{\psi^*}(X(\tau))$ , где  $\psi^*$  — цена (4). В рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} g_{\psi}(z, t) &= g(z, t) - \\ &- \psi(t + a_1 + a_2\chi_{\delta_1}(z)) = \\ &= bt - c_1 - c_2\chi_{\delta_1}(z) - \\ &- \psi(t + a_1 + a_2\chi_{\delta_1}(z)), \quad (41) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{(z, t)}g_{\psi}(Z(\tau), \tau) &= bM_z\tau - c_1 - \\ &- c_2P_z(\xi = \tau) - \psi(M_z\tau + a_1 + \\ &+ a_2P_z(\xi = \tau)). \quad (42) \end{aligned}$$

Преобразуем последнее выражение. Во-первых, в силу конечности математического ожидания  $\tau$  и свойств условных математических ожиданий

$$M_z\tau = M_z \int_0^{\tau} du. \quad (43)$$

Во-вторых, представим вероятность  $P_z(\xi = \tau)$  в виде математического ожидания характеристической функции (38) множества  $\Delta_1 = \{\delta_1\}$ :

$$P_z(\xi = \tau) = M_z\chi_{\delta_1}(Z(\tau)). \quad (44)$$

Поскольку фигурирующая в (44) характеристическая функция  $\chi_{\delta_1}(z)$  является ограниченной, то для вычисления ее математического ожидания можно использовать формулу Дынкина. При этом учитывается, что процесс  $Z(t)$  является марковским, так что применимы формулы разд. 3 с заменой в них  $X(t)$  на  $Z(t)$ , а  $x$  на  $z$ . Вычислим вначале по формуле (22) для рассматриваемого марковского процесса  $Z(t)$  его инфинитезимальный оператор: для  $f(z) \in D_{\mathcal{A}}, z \neq \delta_1$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}f(z) &= \lim_{t \rightarrow 0} (M_z f(Z(t)) - f(z)) / t = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ -\lambda t f(z) + \lambda t \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times \left( \int_0^{\infty} r(z+y) f(z+y) dF(y) + \right. \\ &\left. + f(\delta_1) \left( 1 - \int_0^{\infty} r(z+y) dF(y) \right) \right) / t. \end{aligned}$$

Итак,

$$\mathcal{A}f(\delta_1) = 0, \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}f(z) &= \lambda(f(\delta_1) - f(z)) + \\ &+ \lambda \int_0^{\infty} (f(z+y) - f(\delta_1)) r(z+y) dF(y), \quad z \neq \delta_1. \quad (46) \end{aligned}$$

В частности,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\chi_{\delta_1}(z) &= \\ &= \lambda \left( 1 - \int_0^{\infty} r(z+y) dF(y) \right), \quad z \neq \delta_1. \quad (47) \end{aligned}$$

При применении полученного выражения к вычислению математического ожидания (44) учитывается, что согласно (3) рассматриваются только стратегии  $\tau \in T_D$ , для которых ММ не превышает момента отказа  $\xi$ . Следовательно, для любого момента времени  $t$  из открытого справа интервала  $[0; \tau)$  состояние процесса  $Z(t) = z$  не является состоянием отказа, так что  $\chi_{\delta_1}(z) = 0$  и справедлива (47).

Из формулы Дынкина (23) следует, что

$$\begin{aligned} M_z\chi_{\delta_1}(Z(\tau)) &= \\ &= M_z \int_0^{\tau} \mathcal{A}\chi_{\delta_1}(Z(u)) du = \\ &= \lambda M_z \int_0^{\tau} \left( 1 - \int_0^{\infty} r(Z(u) + \right. \\ &\left. + y) dF(y) \right) du, \quad z \neq \delta_1. \quad (48) \end{aligned}$$

Формулы (43) и (44) позволяют записать (42) в виде

$$M_{(z, t)} g_{\psi}(Z(\tau), \tau) = -(c_1 + \psi a_1) + M_z \left( (b - \psi) \int_0^{\tau} du - (c_2 + \psi a_2) \times \chi_{\delta_1}(Z(\tau)) \right).$$

С учетом (48)

$$M_{(z, t)} g_{\psi}(Z(\tau), \tau) = -(c_1 + \psi a_1) + M_z \int_0^{\tau} \left( b - \psi - h(c_2 + \psi a_2) \times \left( 1 - \int_0^{\infty} r(Z(u) + y) dF(y) \right) \right) du, \quad z \neq \delta_1. \quad (49)$$

Из (41), (42) и (49) следует, что формула Дынкина (23) применима и в рассматриваемом частном случае, когда инфинитезимальный оператор определяется по (46), а в качестве функции  $f(x)$  фигурирует неограниченная функция  $f(z, t) = (b - \psi)t - (c_2 + \psi a_2) \times \chi_{\delta_1}(z)$ . Перепишем поэтому (49) в виде

$$M_{(z, t)} g_{\psi}(Z(\tau), \tau) = -(c_1 + \psi a_1) + M_z \int_0^{\tau} \mathcal{A} \left( (b - \psi)u - (c_2 + \psi a_2) \times \chi_{\delta_1}(Z(u)) \right) du, \quad (50)$$

где

$$\mathcal{A}((b - \psi)t - (c_2 + \psi a_2) \chi_{\delta_1}(z)) = b - \psi - h(c_2 + \psi a_2) \times \left\{ 1 - \int_0^{\infty} r(z + y) dF(y) \right\}. \quad (51)$$

Поскольку  $c_1 + \psi a_1$  от  $\tau$  не зависит, то формулы (24) и (25) позволяют

записать выражение для оптимального ММ  $\tau_0 \in T_D$ :

$$\tau_0 = \inf \{t_i, i = 1, 2, \dots : Z(t_i) \in S_-\}, \quad (52)$$

$$S_- = \left\{ z \geq 0 : \sup_{\tau \in T_D} M_z \int_0^{\tau} \left( b - \psi - h(c_2 + \psi a_2) \times \left( 1 - \int_0^{\infty} r(Z(u) + y) dF(y) \right) \right) du \leq 0 \right\}. \quad (53)$$

Структура оптимальной стратегии. Процесс  $Z(\tau)$  и функция

$$h(z) = \mathcal{A}f(z, t) = b - \psi - h(c_2 + \psi a_2) \times \left\{ 1 - \int_0^{\infty} r(z + y) dF(y) \right\} \quad (54)$$

удовлетворяют условиям монотонности (см. разд. 3). Монотонность  $Z(t)$  следует из неотрицательности величины повреждения  $Y$ , получаемого при каждом ударе, и накопления повреждений. Отношение порядка  $\infty$  следует понимать в обычном смысле — как «не больше» ( $\leq$ ). При этом состояние отказа  $\delta_1$  обозначается бесконечно удаленной точкой вещественной оси  $\infty$ .

Монотонность убывания  $h(z)$  вытекает из следующих соображений. Во-первых, согласно формуле (40)

$$c_2 + \psi a_2 = c_2 + a_2 \times \frac{bM\tau - c_1 - c_2P(\xi = \tau)}{M\tau + a_1 + a_2P(\xi = \tau)} = \frac{(c_2 + a_2b)M\tau + a_1c_2 - c_1a_2}{M\tau + a_1 + a_2P(\xi = \tau)},$$

так что из  $M\tau \geq 1/\lambda$  и (36) вытекает неотрицательность  $c_2 + \psi a_2$  при всех  $\psi$ . Во-вторых, вероятность  $r(z)$  отсутствия отказа в момент удара при

накопленной величине повреждений  $z$  убывает по  $z$ . Следовательно, фигурирующая в формуле (54) функция  $h(z)$  монотонно убывает.

Итак, в рассматриваемом случае оптимальная стратегия ремонта имеет монотонную структуру, определяемую формулами (26)–(29), в которых вместо  $X$  и  $x$  следует подставить  $Z$  и  $z$ . Более того, функция  $h(z) = Af(z, t)$ , определяемая формулой (54), неизменна в интервалах времени между ударами  $(t_i, t_{i+1})$ , так что формула (26) заменяется формулой (30). Поскольку пространство значений  $E_1 = R_+$  марковского процесса  $Z(t)$  упорядочено отношением «не больше» ( $\leq$ ), то множество  $S_\Gamma$  состоит из одной единственной точки вещественной оси  $\gamma$ , определяемой уравнением

$$\gamma = \inf \left\{ z \geq 0 : b - \psi - \lambda (c_2 + a_2 \psi) \times \left\{ 1 - \int_0^\infty r(z+y) dF(y) \right\} \leq 0 \right\}. \quad (55)$$

Оптимальный момент предупредительного ремонта  $\tau_\gamma$  находится в соответствии с (29) как первый ММ, когда процесс  $Z(t)$  достигает «порога»  $\gamma$ :

$$\tau_\gamma = \begin{cases} \inf \{t_i, i = 1, 2, \dots : Z(t_i^+) \geq \gamma\}, \\ \xi \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{если такое } \tau_\gamma \text{ существует;} \\ \text{если не существует.} \end{matrix} \quad (56)$$

Выражение (55) имеет простой физический смысл: ремонт следует проводить в тех состояниях  $z$  процесса  $Z(t)$ , в которых средние дополнительные убытки в единицу времени вследствие отказов системы

$$\lambda (c_2 + a_2 \psi) \times \left\{ 1 - \int_0^\infty r(z+y) dF(y) \right\}$$

больше дополнительных удельных доходов  $b - \psi$ , получаемых от продолжения эксплуатации системы.

Определим, когда имеет место второй случай в (56). Рассмотрим стратегию  $\tau = \xi$ , при которой система эксплуатируется до отказа. Удельный доход при этой стратегии  $\psi(\xi) = (bM\xi - c_1 - c_2)/(M\xi + a_1 + a_2)$ . Следовательно, для того чтобы эта стратегия была оптимальной, необходимо и достаточно в соответствии с теоремой 1 и формулами (35) и (54) выполнение с вероятностью, равной единице, неравенства

$$b - \psi(\xi) - \lambda (c_2 + a_2 \psi(\xi)) \times \left\{ 1 - \int_0^\infty r(Z(\tau) + y) dF(y) \right\} > 0, \quad \tau \in T_D.$$

Последнее неравенство с этой вероятностью выполняется при всех  $Z(\tau) \geq 0$ , тогда и только тогда, когда оно выполняется при  $z = \infty$ . Отсюда получаем необходимое и достаточное условие оптимальности стратегии  $\tau = \xi$ :  $b - \psi(\xi) - \lambda (c_2 + a_2 \psi(\xi)) > 0$ , т. е.

$$c_1 + c_2 + b(a_1 + a_2) + \lambda (c_1 a_2 - c_2 a_1) - \lambda (c_2 + a_2 b) M\xi > 0. \quad (57)$$

Второй крайний случай соответствует проведению ремонта сразу после первого удара:  $\tau = t_1$ . Удельный доход при этой стратегии

$$\psi(t_1) = (b/\lambda - c_1 - c_2 \rho) / (1/\lambda + a_1 + a_2 \rho),$$

где  $\rho = 1 - \int_0^\infty r(y) dF(y)$ .

Следовательно, для оптимальности этой стратегии необходимо и достаточно, чтобы с вероятностью, равной единице, выполнялось неравенство

$$b - \psi(t_1) - \lambda (c_2 + a_2 \psi(t_1)) \times \left\{ 1 - \int_0^\infty r(Z(t_1) + y) dF(y) \right\} \leq 0.$$

Оно выполняется при всех  $Z(t_1)$  тогда и только тогда, когда оно выполняется при  $z = 0$ . Отсюда получаем

необходимое и достаточное условие оптимальности стратегии  $\tau = t_1$ :

$$b - \psi(t_1) - \lambda(c_2 + a_2\psi(t_1))\rho \leq 0.$$

После несложных преобразований приходим к неравенству

$$c_1 + a_1b \leq \lambda\rho(c_2a_1 - c_1a_2). \quad (58)$$

Полученные результаты объединены в виде следующей теоремы.

**Т е о р е м а.** В классе всех стратегий  $T_D$ , являющихся ММ относительно последовательности  $Z(t_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots$ , оптимальной является пороговая стратегия  $\tau_\gamma$ , определяемая формулами (55) и (56) при  $\psi = \psi^* = \sup_{\tau \in T_D} \psi(\tau)$ . Для того чтобы уровень  $\gamma$  был оптимальным, необходимо и достаточно выполнение для всех  $z \geq \gamma$  неравенства

и

$$b - \psi(\tau_\gamma) - \lambda(c_2 + a_2\psi(\tau_\gamma)) \times \left\{ 1 - \int_0^\infty r(z+y) dF(y) \right\} \leq 0, \quad (59)$$

где  $\psi(\tau_\gamma)$  соответствует стратегии (55), (56), а при  $z \leq \gamma$  — обратного неравенства, в котором знак  $\leq$  заменяется на  $\geq$ .

При выполнении условия (57) оптимальной является стратегия  $\tau = \xi$  эксплуатации системы до отказа, а при (58) — стратегия  $\tau = t_1$  проведения ремонта после первого удара.

**Расчет удельных доходов.** Для использования приведенной теоремы необходимо уметь вычислить по формуле (40) значения удельных доходов  $\psi(\tau)$  при различных пороговых стратегиях  $\tau_\gamma \in T_D$ , т. е. при различных уровнях  $\gamma \geq 0$ . С этой целью выведем формулы для вероятности отказа  $P_z(\xi = \tau_\gamma)$  и математического ожидания времени до ремонта  $M_z\tau_\gamma$  при различных значениях  $z, \gamma \geq 0$ .

Обозначим через  $N$  номер удара, при котором наступает отказ:

$$N = \inf \{i = 1, 2, \dots : Z(t_i) = \delta_1\}. \quad (60)$$

Рассмотрим семейство субстохастических переходных функций [62]

$$K^{(i)}(z, z') = P(z + Y_1 + Y_2 + \dots + Y_i \leq z', N > i | Z(0) = z), \quad i = 1, 2, \quad (61)$$

Для  $0 \leq z \leq z'$

$$K^{(i)}(z, z') = \int_0^{z'-z} K^{(i-1)}(z+y, z') r(z+y) dF(y), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (62)$$

$$K^{(0)}(z, z') = 1. \quad (63)$$

Обозначим через  $H(z, z')$  среднее число ударов, выдерживаемых системой до отказа или достижения накопленной величиной повреждений уровня  $z'$ :

$$H(z, z') = \sum_{i=1}^{\infty} K^{(i)}(z, z'). \quad (64)$$

Функция  $H(z, z')$  возрастает по  $z'$ . Кроме того, она убывает по  $z$ , так как при  $z_1 < z_2$

$$H(z_2, z') \leq H(z_1, z_1 + (z' - z_2)) \leq H(z_1, z').$$

Покажем, что среднее число ударов  $H(z, \infty)$  выдерживаемых системой до отказа, конечно. Из условий убывания  $r(z)$  по  $z$  и  $r(\infty) = 0$  вытекает, что существуют такие  $0 < \beta < 1$  и  $0 < z_\beta < \infty$ , при которых  $r(z_\beta) < \beta$ . Тогда индукцией по  $i$  доказываем, что при всех  $z \geq z_\beta, i = 1, 2, \dots$

$$K^{(i)}(z, \infty) \leq \beta^i,$$

откуда

$$H(z, \infty) = \sum_{i=1}^{\infty} K^{(i)}(z, \infty) \leq \beta/(1 - \beta).$$

Пусть теперь  $z < z_\beta$ . Среднее число ударов, необходимых для получения величины  $z_\beta$  повреждений, по тождеству Вальда не больше  $1 + z_\beta/MY$ . Следовательно, при любых  $z \geq 0$

$$H(z, \infty) \leq 1 + z_\beta/MY + \beta/(1 - \beta) < \infty. \quad (65)$$

В дальнейшем основную роль будет играть функция  $H(z) = H(0, z)$ . Для вычисления ее по формуле (64) взамен переходных функций (61)—(63) рассмотрим несобственные функции распределения  $K^{(i)}(z) = K^{(i)}(0, z)$  для  $z \geq 0, i = 0, 1, \dots$ . Они находятся по формуле, заменяющей (62):

$$K^{(i)}(z) = \int_0^z K^{(i-1)}(du) \int_0^{z-u} r(u+y) dF(y),$$

$$i = 1, 2, \quad (66)$$

Обозначим через  $\omega(z)$  среднее время до отказа, если вначале имелись повреждения величины  $z$ :

$$\omega(z) = M_z \xi = \lambda^{-1} (1 + H(z, \infty)). \quad (67)$$

Из (67) и (65) следует конечность математического ожидания времени до отказа:  $M\xi = \omega(0) < \infty$ .

Полученные выражения позволяют для стратегии  $\tau_\gamma$  и фиксированного  $\gamma \geq 0$  вычислить вероятность отказа и математическое ожидание времени до ремонта соответственно по формулам

$$P(\xi = \tau_\gamma) = 1 - \int_0^\gamma \left( \int_{\gamma-v}^\infty r(v+y) dF(y) \right) H(dv) - \int_\gamma^\infty r(y) dF(y), \quad (68)$$

$$M\tau_\gamma = \lambda^{-1} (1 + H(\gamma)). \quad (69)$$

Теперь по формуле (40) можно вычислить удельный доход  $\psi(\tau_\gamma)$  при пороговой стратегии  $\tau_\gamma$ .

Определение оптимального уровня процесса. Оптимальный уровень процесса  $\gamma_0$  можно рассчитать двумя способами. Во-первых, использовать итерационный алгоритм, описанный в разд. 2. При этом на шаге 1 алгоритма значение  $\psi = \psi(\tau_\gamma)$  вычисляются по формулам (40), (68) и (69). При реализации шага 2 очередное приближение  $\psi'$  находится как решение уравнения (55) при данном  $\psi$ . Во-вторых, в частных случаях можно попытаться найти ре-

шение в замкнутой форме, т. е. аналитически. При этом оптимальный уровень  $\gamma_0$  находится из функционального уравнения (55), в котором  $\psi = \psi(\tau_\gamma)$  определяется формулами (40), (68) и (69).

В частности, аналитическое решение существует, когда отказы имеют пороговый характер, т. е. система отказывает при накоплении в ней величины повреждения  $L > 0$ :

$$r(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq z < L, \\ 0 & \text{при } z \geq L. \end{cases} \quad (70)$$

При  $0 \leq \gamma < L, 0 \leq z \leq z' < L$  имеем следующие выражения:

$$\int_\gamma^\infty r(z+y) dF(y) = F(L-z) - F(\gamma),$$

$$0 \leq z < L - \gamma,$$

$$\int_0^\gamma \int_{\gamma-v}^\infty r(z+y) dF(y) H(dv) = \int_0^\gamma (F(L-v) - F(\gamma-v)) H(dv) = \int_0^\gamma F(L-v) H(dv) - H(\gamma) + F(\gamma),$$

$$K^{(1)}(z, z') = F(z' - z),$$

$$K^{(i)}(z, z') = \int_0^{z'-z} K^{(i-1)}(z+y, z') dF(y).$$

Из (55) находим условие оптимальности порогового значения:

$$\gamma_0 = \inf \{ \gamma \geq 0 : b - \left[ b\lambda^{-1} (1 + H(\gamma)) - c_1 - c_2 \left\{ 1 - \int_0^\gamma F(L-v) H(dv) + H(\gamma) - F(L) \right\} \right] \times \{ \lambda^{-1} (1 + H(\gamma)) + a_1 + \}$$

$$\begin{aligned}
 &+ a_2 \left\{ 1 - \int_0^{\gamma} F(L-v) H(dv) + \right. \\
 &\quad \left. + H(\gamma) - F(L) \right\}^{-1} \times \\
 &\times \{1 + \lambda a_2 (1 - F(L-\gamma))\} - \\
 &\quad - \lambda c_2 (1 - F(L-\gamma)) \leq 0.
 \end{aligned}
 \tag{71}$$

Пример. Пусть величина повреждения  $Y$ , получаемого при одном ударе, имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\mu > 0$ :

$$F(y) = 1 - \exp(-\mu y), \quad y \geq 0. \tag{72}$$

По свойствам пуассоновского потока [26, 34, 43]  $H(v) = \mu v$  при  $L - v \geq 0$ . Подставляя это выражение для  $H(v)$  в (71), после элементарных преобразований находим следующее уравнение для определения оптимального уровня  $\gamma_0 \leq L$ :

$$\begin{aligned}
 &ba_1 + c_1 - e^{-\mu(L-\gamma)} (\gamma\mu (c_2 + a_2b) + \\
 &\quad + \lambda (a_1c_2 - a_2c_1)) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{73}$$

Левая часть последнего уравнения является монотонно убывающей по аргументу  $\gamma$  функцией, равной  $ba_1 + c_1 - e^{-\mu L} \lambda (a_1c_2 - a_2c_1)$  при  $\gamma = 0$  и  $ba_1 + c_1 - L\mu (c_2 + a_2b) - \lambda (a_1c_2 - a_2c_1)$  при  $\gamma = L$ . Следовательно, уравнение (73) имеет не более одного положительного корня. Корень существует, если

$$\begin{aligned}
 &ba_1 + c_1 - e^{-\mu L} \lambda (a_1c_2 - a_2c_1) \geq 0 \geq \\
 &\geq ba_1 + c_1 - L\mu (c_2 + a_2b) - \\
 &\quad - \lambda (a_1c_2 - a_2c_1).
 \end{aligned}$$

При  $ba_1 + c_1 - L\mu (c_2 + a_2b) - \lambda (a_1c_2 - a_2c_1) > 0$  оптимальное значение  $\gamma$  равно  $L$ , что соответствует эксплуатации системы до отказа и ранее полученному результату (57), поскольку  $M\xi = (\mu L + 1)/\lambda$ . При  $ba_1 + c_1 - e^{-\mu L} \lambda (a_1c_2 - a_2c_1) < 0$  оптимальное значение  $\gamma$  равно 0, что соответствует проведению предупредительного ремонта после первого же удара:  $\tau = t_1$  [см. (58)].

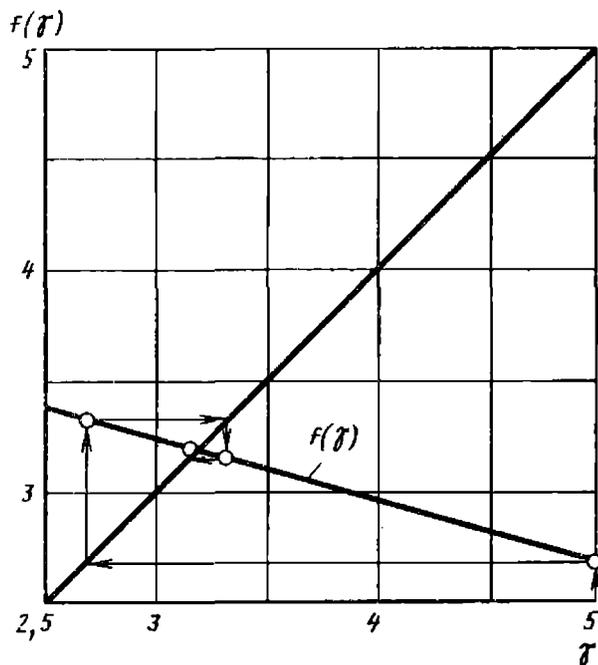


Рис. 1. Сходимость метода последовательных приближений

Решение уравнения (73) обычно находят методом последовательных приближений:

$$\begin{aligned}
 &\gamma^0 = L; \\
 &\gamma^i = L + \\
 &\quad + \frac{1}{\mu} \ln (ba_1 + c_1) - \\
 &\quad - \frac{1}{\mu} \ln \{ \gamma^{i-1} \mu (c_2 + a_2b) + \\
 &\quad + \lambda (a_1c_2 - a_2c_1) \}, \quad i = 1, 2,
 \end{aligned}
 \tag{74}$$

Метод будет сходящимся, если в интервале, которому принадлежат последовательные приближения, производная по  $\gamma$  от правой части (74) по абсолютной величине меньше единицы. Отсюда находим, что сходимость обеспечивается при

$$\gamma > \frac{|c_2 + a_2b - \lambda (a_1c_2 - a_2c_1)|}{\mu (c_2 + a_2b)}. \tag{75}$$

Сходимость метода последовательных приближений иллюстрируется рис. 1, на котором правая часть уравнения (74) обозначена  $f(\gamma)$ . Ремонт происходит мгновенно:  $a_1 = a_2 = 0$ ; доход от эксплуатации системы не начисляется:  $b = 0$ ; отношение стоимости предупредительного ремонта  $c_1$

к дополнительной стоимости ремонта вследствие отказа  $c_2$  составляет  $c_1/c_2 = 0,5$ ; среднее значение величины повреждения при одном ударе  $\mu^{-1} = 1$ ; отказ наступает при накоплении величины повреждений  $L = 5$ . При этих значениях условие (36) выполняется. Неравенство (75) сводится к виду  $\gamma > \mu^{-1} = 1$ . Приведем несколько первых приближений, вычисленных по формуле (74):  $\gamma^0 = 5$ ;  $\gamma^1 = 2,6974$ ;  $\gamma^2 = 3,3146$ ;  $\gamma^3 = 3,1085$ ;  $\gamma^4 = 3,1727$ ;  $\gamma^5 = 3,1523$ ;  $\gamma^6 = 3,1587$ ;  $\gamma^7 = 3,1567$ . Любые два последовательных приближения дают нижнюю и верхнюю границы искомого решения. Следовательно, оптимальный уровень  $\gamma_0$  лежит в интервале (3,1567; 3,1587).

### 5. УПРАВЛЕНИЕ РЕМОНТОМ САМОВОССТАНАВЛИВАЮЩЕЙСЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ПУАССОНОВСКОМ ПОТОКЕ УДАРНЫХ НАГРУЗОК

**Модель системы.** Предположим, что в каждом интервале  $(t_i, t_{i+1})$  изменение процесса  $Z(t)$  описывается детерминированной непрерывной функцией  $\varphi(t, z)$ :

$$Z(t) = \varphi(t - t_i, Z(t_i)), \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

удовлетворяющей условию при  $t' < t$

$$\varphi(t, z) = \varphi(t - t', \varphi(t', z)),$$

где  $\varphi(0, z) = z$ .

Например,

$$\varphi(t, z) = g(g^{-1}(z) - t), \quad (76)$$

где  $g(t)$  — строго возрастающая неотрицательная непрерывная функция переменной  $t$ ,  $g(t) = 0$  при  $z \leq 0$ ;  $g^{-1}(z)$  — функция, обратная  $g(t)$ ,  $z \geq 0$ .

В класс процессов  $Z(t)$ , описываемых функцией  $\varphi(t, z)$ , входят также процессы, задаваемые дифференциальным уравнением

$$\partial z / \partial t = \rho(z), \quad (77)$$

где  $\rho(z)$  — непрерывная функция  $z \geq 0$ .

Большое практическое значение имеет случай (76) при  $g(t) = -\alpha t, t \geq 0$

или (77) при  $\rho(z) = -\alpha, z \geq 0$ , когда происходит уменьшение значения  $Z(t)$  с постоянной скоростью  $\alpha > 0$ . Он соответствует наличию в системе обслуживающего аппарата, устраняющего повреждения со скоростью  $\alpha$ . Более общие случаи (76) и (77), когда функция  $\rho$  отрицательная, также могут трактоваться как наличие процессов обслуживания, заключающихся в «самоустранении» имеющихся повреждений. Такие системы называются самовосстанавливающимися.

**Структура оптимальной стратегии.** Для этого случая также справедливы формулы (37)—(45). Формула (46) для инфинитезимального оператора процесса  $Z(t)$  заменяется на формулу

$$\begin{aligned} \mathcal{A}f(z) = & \dot{f}(z) + \lambda (f(\delta_1) - f(z)) + \\ & + \lambda \int_0^\infty (f(z+y) - f(\delta_1)) r(z+y) \times \\ & \times dF(y), \quad z \neq \delta_1, \quad (78) \end{aligned}$$

где  $\dot{f}(z) = \partial f(z(t))/\partial t$ , причем предполагается, что эта производная существует и ограничена.

В рассматриваемом случае в качестве  $f(z)$  фигурирует характеристическая функция состояния отказа  $\chi_{\delta_1}(z)$ . Поскольку в открытом интервале времени между ударами  $(t_i, t_{i+1})$  отказ наступить не может, то  $\chi_{\delta_1}(z) = 0$  и остается справедливой формула (47), а вместе с ней и формулы (48)—(53). Итак, оптимальный ММ  $\tau_0$  в классе  $\tau_D$  дается выражениями (52) и (53).

Среди оптимальных стратегий имеются пороговые

$$\begin{aligned} \tau_\gamma = & \\ = & \begin{cases} \inf \{t_i, i = 1, 2, \dots : Z(t_i) \geq \gamma\}, \\ \text{если такое } \tau_\gamma \text{ существует;} \\ \xi, \text{ если не существует.} \end{cases} \quad (79) \end{aligned}$$

Для этого, очевидно, достаточно показать, что если  $0 \leq z \leq z'$ , то из  $z' \in R_+ - S_-$  следует  $z \in R_+ - S_-$ , т. е. если для состояния  $z'$  существует стратегия, обеспечивающая положительное приращение математического ожидания  $M_{z', g_\psi}(Z(\tau), \tau)$ , то такая же стратегия существует и для состояния  $z < z'$ .

Итак, пусть  $z < z' \in R_+ - S_-$  и  $\tau'$ -стратегия, для которой согласно (25) и (50)

$$M_{z'} \int_0^{\tau'} \mathcal{A}g_{\psi}(Z(u), u) du > 0. \quad (80)$$

Построим стратегию  $\tau^*$ , для которой

$$M_z \int_0^{\tau^*} \mathcal{A}g_{\psi}(Z(u), u) du > 0. \quad (81)$$

Рассмотрим траекторию процесса  $Z(t)$ , начинающуюся в момент  $t=0$  в состоянии  $z$ . Момент  $z=0$  не принимается за ММ  $\tau^*$ . Пусть  $t_1$  — момент первого удара в рассматриваемой траектории. Если для этой траектории он является моментом отказа, то полагаем  $\tau^* = t_1$ . Считаем, что отказ наступил и в описываемом ниже процессе  $Z'(t)$ . В противном случае имитируем на интервале  $(0, t_1]$  траекторию  $Z'(t)$  процесса  $Z(t)$ , если бы она начиналась с состояния  $z'$ . Если существует момент времени  $t \in (0, t_1)$ , в который значения обеих рассматриваемых траекторий совпадают, то после этого момента в силу определения функции  $\varphi(t, z)$  они будут совпадать вплоть до момента  $\tau'$ . Если совпадения нет, то из непрерывности траекторий  $Z(t)$  и  $Z'(t)$  на интервале  $(0, t_1)$  и того, что  $Z(0) = z < Z'(0) = z'$ , следует неравенство  $Z(t_1) < Z'(t_1)$ . Известно, что в момент  $t_1$  состояния отказа в траектории  $Z(t)$  не было. Разыграем теперь отказ для траектории  $Z'(t)$  в момент  $t_1$  как событие, вероятность ненаступления которого есть  $r(Z'(t_1))/r(Z(t))$ . Если в результате такого «розыгрыша» отказ наступил или если  $\tau' = t_1$ , то полагаем  $\tau^* = t_1$ . В противном случае переходим к рассмотрению следующего интервала  $(t_1, t_2]$  и т. д.

Непосредственно из построения ММ  $\tau^*$  и процесса  $Z'(t)$  вытекает совпадение следующих распределений:

$$\text{ММ } \tau^* \text{ и } \tau'$$

при любых  $z = Z(0) \leq z' = Z'(0)$ ; сконструированного случайного процесса  $Z'(t)$  и процесса  $Z(t)$  до ММ  $\tau'$

при любых  $Z(0) = Z'(0) = z' \geq 0$ . Кроме того, случайная величина  $\tau^*$

$\int_0^{\tau^*} \mathcal{A}g_{\psi}(Z(u), u) du$  при  $Z(0) = z$  не

меньше  $\int_0^{\tau^*} \mathcal{A}g_{\psi}(Z'(u), u) du$  при

$Z'(0) = z'$ , как это следует из (51) и невозрастания  $r(z)$ , так что первая случайная величина стохастически

больше  $\int_0^{\tau^*} \mathcal{A}g_{\psi}(Z(u), u) du$  при  $Z(0) =$

$= z'$ . Теперь из формулы (80) вытекает неравенство (81). Итак,  $z \in R_+ - S_-$ , т. е. требуемое доказано. Это позволяет конкретизировать формулу (53) для множества  $S_-$  в виде  $S_- = [\gamma, \infty)$ . Полученные результаты представлены в следующей теореме.

**Т е о р е м а.** Для рассматриваемой задачи в классе всех стратегий  $\tau \in T_D$ , являющихся ММ относительно последовательности  $Z(t_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots$ , и имеющих конечные математические ожидания  $M\tau$ , оптимальной является пороговая стратегия  $\tau_{\gamma}$ , определяемая формулой (79), где

$$\begin{aligned} \psi = \inf \left\{ z \geq 0; \sup_{\tau \in T_D} M_z \int_0^{\tau} \left\{ b - \right. \right. \\ \left. \left. - \psi - \lambda (c_2 + \psi a_2) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left( 1 - \int_0^{\infty} r(Z(u) + y) dF(y) \right) \right\} \times \right. \\ \left. \times du \leq 0 \right\}, \quad (82) \end{aligned}$$

а в качестве  $\psi$  берется  $\psi^*$  из формулы (5). Необходимым и достаточным условием оптимальности уровня  $\gamma$  является выполнение неравенства

$$\begin{aligned} \sup_{\tau \in T_D} M_z \int_0^{\tau} \left\{ b - \psi(\tau_{\gamma}) - \right. \\ \left. - \lambda (c_2 + \psi(\tau_{\gamma}) a_2) \times \right. \end{aligned}$$

$$\times \left( 1 - \int_0^{\infty} r(Z(u) + y) dF(y) \right) \times du \leq 0, z \geq \gamma \quad (83)$$

и противоположного неравенства ( $\leq$ ) при  $z \leq \gamma$ .

Вычисление удельных доходов. Для использования приведенной теоремы необходимо уметь находить по формуле (40) значение  $\psi(\tau_\gamma)$  при различных  $\gamma > 0$ . Для этого служат формулы (68) и (69). Фигурирующая в них функция  $H(z)$  будет, однако, вычисляться по-иному. Приведем формулы для  $H(z)$  в случае (76), когда  $g(t) = -\alpha t, \alpha > 0$ . Аналогично (61) рассмотрим семейство субстохастических переходных функций при  $0 \leq z < \gamma, z' \geq 0$ :

$$K^{(l)}(z, z') = P(Z(t_l^-) + Y_l \leq z'), N > l / Z(0) = z, l = 1, 2, \dots \quad (84)$$

Формулы (62) и (63) теперь соответственно заменяются на выражения

$$K^{(1)}(z, z') = \begin{cases} e^{-\lambda z/\alpha} \int_0^{z'} r(y) dF(y) + \\ + \int_0^{z/\alpha} \lambda e^{-\lambda u} \int_0^{z'-z+du} r(z - \\ - \alpha u + y) dF(y) du \text{ при } z \leq z'; \\ e^{-\lambda z/\alpha} \int_0^{z'} r(y) dF(y) + \\ + e^{-\lambda(z-z')/\alpha} \int_0^{z'/\alpha} \lambda e^{-\lambda u} \times \\ \times \int_0^{\alpha u} r(z' - \alpha u + y) dF(y) du \\ \text{при } z' > z, \end{cases} \quad (85)$$

$$K^{(l)}(z, z') = \int_0^{z'} K^{(l-1)}(v, z') \times \\ \times K^{(1)}(z, dv), l = 2, 3, \dots \quad (86)$$

Формула (64) для среднего числа ударов, выдерживаемых системой до отказа или достижения накопленной величиной повреждений уровня  $z'$ , остается прежней. Наконец,  $H(z') = H(0, z')$  — функция, фигурирующая в (68) и (69). Зная  $\psi = \psi(\tau_\gamma)$  при каждом  $\gamma$ , оптимизацию можно проводить с помощью итерационного алгоритма, описанного в разд. 2.

Выясним, при каких условиях математического ожидания времени до отказа  $M\xi$  конечно (это влечет конечность  $M\tau$  при  $\tau \in T_D$ ). Отметим, что  $H(z, z')$  возрастает по  $z'$ . Из доказательства теоремы можно усмотреть, что  $H(z, z')$  убывает по  $z$ . Поэтому из конечности  $H(0, \infty)$  будет следовать конечность  $H(z, z')$  при всех  $z, z' \geq 0$ . Ограничимся случаем, когда  $\lambda MY > \alpha$ . Можно интерпретировать процесс  $Z(t)$ , в котором исключается возможность отказа (т. е. при  $r(z) = 1$  для всех  $z \geq 0$ ), как процесс массового обслуживания в однолинейной системе  $M | GI | 1$ :  $M$  — пуассоновский поток требований с интенсивностью  $\lambda$ ;  $GI$  — произвольное распределение времени обслуживания со средним  $MY/\alpha$ ; 1 — один обслуживающий аппарат. В этом случае моменты ударов соответствуют поступлениям требований, устранение имеющихся повреждений от ударов — обслуживанию требований. Величина повреждения при ударе  $Y$ , поделенная на  $\alpha$ , — это длительность обслуживания требования, а  $Z(t)/\alpha$  — это длительность ожидания начала обслуживания [26, 34].

При  $\lambda MY > \alpha$  длительность ожидания  $Z(t)/\alpha$  в системе  $M | GI | 1$  неограниченно растет. Конечным является математическое ожидание  $M_z T(z_\beta)$  времени до очередного удара, при котором процесс  $Z(t)$  достигает заданного уровня  $z_\beta$ , если вначале  $Z(0) = z$ , каковы бы ни были  $z$  и  $z_\beta > 0$ . Ясно также, что  $M_{z'} T(z_\beta) \leq M_z T(z_\beta)$  при  $z \leq z'$ .

Учтем теперь возможность отказа и пусть  $0 < \beta < 1$ , а  $z_\beta$  — подобрано так, что  $r(z_\beta) \leq \beta$ . Тогда математическое ожидание времени до отказа

$$M\xi \leq M_0 T(z_\beta) + M_{z_\beta} T(z_\beta) \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{\infty} (r(z_{\beta}))^i \leq M_0 T(z_{\beta}) + Mz_{\beta} T(z_{\beta}) \frac{\beta}{1-\beta} < \infty.$$

Итак, конечность  $M\xi$  доказана. Конечность  $H(\infty) = H(0, \infty)$  следует из формулы (67).

Случай пороговых отказов. Пусть отказы имеют пороговый характер, описываемый формулой (70), а величина повреждения при ударе  $Y$  распределена по экспоненциальному закону (72) с параметром  $\mu$ . В данном частном случае проще не реализовать описанную выше общую процедуру, а использовать свойства экспоненциального распределения. Так, сразу можно записать

$$P(\xi = \tau) = e^{-\mu(L-\gamma)}, \quad \gamma \leq L. \quad (87)$$

Для нахождения  $\psi$  по формуле (40) осталось определить математическое ожидание времени до ремонта  $M\tau$ . Обозначим математическое ожидание времени до ремонта  $h(z) = M_z(\tau)$  при условии, что в текущий момент времени  $t$  имеются повреждения величины  $0 < z < \gamma$ . Рассматривая возможные события в бесконечно малом интервале времени  $(t, t + dt)$  и учитывая, что ремонт производится после удара, если система отказала или если величина повреждений достигла критического уровня  $\gamma$ , записываем равенство с точностью до  $O(dt)$ , т. е. бесконечно малых порядка выше, чем  $dt$ :

$$h(z) = dt + (1 - \lambda dt) h(z - \alpha dt) + \lambda dt \int_0^{\gamma-z} h(z+y) \mu e^{-\mu y} dy, \quad 0 < z \leq \gamma.$$

Можно показать, что функция  $h(z)$  имеет непрерывную производную, поэтому  $h(z - \alpha dt) = h(z) - h'(z) \times \alpha dt + O(dt)$ , где  $h'(z) = \partial h(z) / \partial z$ . Подставляя это в последнее равенство, получаем интегродифференциальное уравнение

$$\alpha h'(z) = 1 - \lambda h(z) + \lambda e^{\mu z} \int_z^{\gamma} h(y) \times \mu e^{-\mu y} dy, \quad 0 < z \leq \gamma. \quad (88)$$

Ясно также, что

$$h(0) = \frac{1}{\lambda} + \int_0^{\gamma} h(y) \mu e^{-\mu y} dy. \quad (89)$$

С учетом (89) формула (88) принимает вид

$$\alpha h'(z) = 1 - \lambda h(z) - e^{\mu z} (1 - \lambda h(0)) - e^{\mu z} \lambda \int_0^z h(y) \mu e^{-\mu y} dy, \quad 0 < z \leq \gamma.$$

Интегрирование по частям приводит к интегральному уравнению относительно  $h(z)$ :

$$\alpha h(z) = 1 - e^{\mu z} - \lambda e^{\mu z} \times \int_0^z h(y) e^{-\mu y} dy, \quad 0 < z \leq \gamma.$$

Непосредственной подстановкой проверяется, что решением последнего уравнения является

$$h(z) = \frac{\mu}{\mu\alpha - \lambda} \left( 1 - e^{-z \frac{\lambda - \alpha\mu}{\alpha}} \right), \quad 0 < z \leq \gamma.$$

Отсюда находим

$$h(z) = h(0) + \frac{\mu}{\mu\alpha - \lambda} z + \frac{\alpha\mu}{(\alpha\mu - \lambda)^2} \times \left( 1 - e^{-z \frac{\lambda - \alpha\mu}{\alpha}} \right), \quad 0 < z \leq \gamma. \quad (90)$$

Неизвестная константа  $h(0)$  определяется в результате подстановки (90) в (89):

$$h(0) = \left( \frac{\alpha\mu}{\alpha\mu - \lambda} \right)^2 \frac{1}{\lambda} e^{-\gamma \left( \frac{\lambda}{\alpha} - \mu \right)} - \frac{1}{\alpha\mu - \lambda} \left( 1 + \mu\gamma + \frac{\alpha\mu}{\alpha\mu - \lambda} \right). \quad (91)$$

С учетом (40), (87) и (91) получаем явное выражение для удельного дохода  $\psi(\tau_{\gamma})$  при фиксированном уровне  $\gamma$ :

$$\psi(\tau_{\gamma}) = \frac{bh(0) - c_1 - c_2 e^{-\mu(L-\gamma)}}{h(0) + a_1 + a_2 e^{-\mu(L-\gamma)}}. \quad (92)$$

## 1. Сходимость итерационных процедур

Номер итерации	$\gamma$	$\psi(\tau_\gamma)$	$\max_{\gamma} \Phi_{\psi}(\tau_\gamma)$
<i>Несамовосстанавливающаяся система (<math>\alpha = 0</math>)</i>			
1	5	-5	8,068
2	3,613	-3,251	0,349
3	3,183	-3,167	0,001
4	3,157	-3,167	0,000
<i>Самовосстанавливающаяся система (<math>\alpha = 0,5</math>)</i>			
1	5	-2,998	6,828
2	3,792	-2,100	0,315
3	3,428	-2,054	0,001
4	3,401	-2,054	0,000

Наличие явного выражения для  $\psi(\tau_\gamma)$  позволяет найти оптимальное значение  $\gamma_0$  как путем аналитического анализа этого выражения, так и с помощью итерационной процедуры разд. 2. При использовании итерационной процедуры формула (10) конкретизируется формулой (92), а (12) — формулой

$$\Phi_{\psi}(\tau_\gamma) = -(c_1 + \psi a_1) + (b - \psi) \times \\ \times h(0) - (c_2 + \psi a_2) e^{-\mu(L-\gamma)}, \\ 0 \leq \gamma \leq L. \quad (93)$$

На каждом шаге итерации максимизация последнего выражения по  $\gamma$  при фиксированном  $\psi$  может производиться любым численным методом. В частности, приравнявая производную по  $\gamma$  нулю, получаем уравнение

$$(b - \psi) \left\{ \frac{\alpha \mu^2}{(\alpha \mu - \lambda) \lambda} e^{-\gamma \left( \frac{\lambda}{\alpha} - \mu \right)} - \right. \\ \left. - \frac{\mu}{\alpha \mu - \lambda} \right\} - (c_2 + \psi a_2) \mu e^{-\mu(L-\gamma)} = \\ = 0. \quad (94)$$

Корень этого уравнения, дающий максимум  $\Phi_{\psi}(\tau_\gamma)$  по  $\gamma$ , может быть

найден, например, методом последовательных приближений.

Пример. Продолжим рассмотрение численного примера из параграфа 4. Дополнительно предположим, что  $c_2 = 20$  и  $\lambda = 1$ . Если система не является самовосстанавливающейся, то  $\alpha = 0$  и при рассматриваемых численных данных корень уравнения (94) будет  $\gamma = 2 + \ln(-\psi)$ , удельный доход  $\psi(\tau_\gamma) = (10 + 20 \exp(-(5 - \gamma)))/(1 + \gamma)$ , функция  $\Phi_{\psi}(\tau_\gamma) = -c_1 - \psi(1 + \gamma) - c_2 \exp(-(5 - \gamma))$ .

Получающиеся в результате итераций последовательности значений порогового уровня  $\gamma$ , удельного дохода  $\psi(\tau_\gamma)$  и максимальных значений функции  $\Phi_{\psi}(\tau_\gamma)$  приведены в табл. 1. Окончательный результат совпадает с ранее полученным (см. с. 102).

Пусть теперь система является самовосстанавливающейся и  $\alpha = 0,5$ . Соответствующие этому случаю результаты, вычисленные по формулам (92)–(94), приведены в той же табл. 1. Значение оптимального порогового уровня увеличилось с  $\gamma = 3,157$  до  $\gamma = 3,401$ , а максимального удельного дохода с  $\psi(\tau_\gamma) = -3,167$  до  $\psi(\tau_\gamma) = -2,054$ .

## 6. УПРАВЛЕНИЕ РЕМОНТОМ СИСТЕМЫ ПРИ ПОЛУМАРКОВСКОМ ПРОЦЕССЕ УДАРНЫХ НАГРУЗОК

Обобщение модели. Предположим, что изменение накопленной величины повреждений  $Z(t)$  описывается полумарковским процессом (см. гл. 3). Моменты ударов  $t_1, t_2, \dots$  являются моментами скачков полумарковского процесса. Обозначим через  $V(t)$  время, прошедшее после последнего к моменту  $t$  удара:

$$V(t) = t - \max \{t_i, i = \\ = 0, 1, \dots, t_i < t\},$$

где  $t_0 = 0$ .

Попав в некоторый момент  $t_i, i = 0, 1, \dots$ , в состояние  $z \in R_+$ , процесс пребывает там случайное время, имеющее конечное математическое ожи-

дание и функцию распределения  $B_{z, t_i}(v)$ , причем  $B_{z, t_i}(\infty) = 1$ ,  $B_{z, t_i}(0) = 0$ .

Интенсивность появления очередного удара в момент  $t$ , если накопленная величина повреждений составляет  $z$  и последний удар был в момент  $t - v$ ,

$$\lambda_{z, t}(v) = \left( \frac{\partial}{\partial v} B_{z, t-v}(v) \right) / (1 - B_{z, t-v}(v)), \quad v \geq 0.$$

Величина повреждения  $Y_i$ , получаемого в момент удара  $t_i$ , зависит от  $t_i$ , накопленных к этому моменту повреждений  $z \in R_+$  и времени между последними ударами  $v = t_i - t_{i-1}$ . Обозначим функцию распределения величины  $Y_i$  через

$$F_{z, v, t_i}(y) = P(Y_i \leq y / Z(t_i^-) = z, t_i - t_{i-1} = v), \quad i = 1, 2, \dots$$

Повреждения от отдельных ударов суммируются.

В каждый момент удара может возникнуть отказ  $z = \delta_1$ . Вероятность того, что после удара в момент  $t$  отказа не будет, есть функция  $r(z, v, t)$  времени  $t$ , накопленной величины повреждений  $z$  и длины  $v$  интервала между данным и предыдущим ударами.

Среднее время ремонта (восстановления) системы при отказе составляет  $a_1 + a_2$ , при предупредительном ремонте  $a_1$ . Затраты на ремонт составляют соответственно  $c_1 + c_2$  и  $c_1$ . Предполагается, что  $a_1, a_2, c_1, c_2 \geq 0$  и в результате ремонта все повреждения устраняются, так что окончание ремонта является точкой регенерации и отсчет времени идет заново.

За единицу времени функционирования системы в неотказовом состоянии начисляется в среднем доход  $b$ . Задача заключается в определении оптимального момента проведения предупредительного ремонта системы  $\tau_0$ , при котором удельный доход от функционирования системы максимален. При этом будут рассматриваться два класса ММ времени, в которые возможны предупредительные ремонты.  $T_D$  — это класс ММ относительно последовательности  $X(t_i) = (Z(t_i),$

$V(t_i), t_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , значений величины накопленных повреждений сразу после удара  $Z(t_i) = Z(t_i^+)$ , интервала между последними ударами  $V(t_i) = t_i - t_{i-1}$  и времени удара  $t_i$ . Класс  $T_D$  соответствует дискретному управлению в моменты ударов. Класс  $T_G$  соответствует непрерывному управлению в любые моменты времени, являющиеся ММ относительно процесса  $X(t) = (Z(t), V(t), t)$ ,  $t \geq 0$ . Считаем, что  $\tau \leq \xi$ .

Структура оптимальной стратегии. Основные формулы разд. 4 остаются справедливыми с соответствующими изменениями. В данном случае марковским является процесс  $X(t) = (Z(t), V(t), t)$  с пространством состояний  $R_+^3 = R_+ \times R_+ \times R_+$ . Как и прежде, максимизации подлежит функционал (40), что эквивалентно максимизации функционала

$$\begin{aligned} M_{(z, v, t)} g \psi(Z(\tau), V(\tau), \tau) = & -(c_1 + \psi a_1) + (b - \psi) M_{(z, v, t)} \tau - (c_2 + \psi a_2) P_{(z, v, t)}(\xi = \tau) = \\ = & -(c_1 + \psi a_1) + M_{(z, v, t)} \{ (b - \psi) \tau - (c_2 + \psi a_2) \chi_{\delta_1}(Z(\tau), V(\tau), \tau) \} \end{aligned} \quad (95)$$

при  $(z, v, t) = (0, 0, 0)$ ,  $\psi = \psi^*$ .

Для нахождения вероятности отказа (44) используется инфинитезимальный оператор  $\mathcal{A}$  рассматриваемого однородного марковского процесса  $X(t)$ . Для характеристической функции (38) состояния отказа  $\delta_1$

$$\mathcal{A} \chi_{\delta_1}(z, v, t) = \lambda_{z, t}(v) (1 - R(z, v, t)), \quad z \neq \delta_1,$$

где

$$R(z, v, t) = \int_0^\infty r(z + g, v, t) dF_{z, v, t}(g).$$

С учетом последней формулы (54), (51), (50) и (95) принимают вид для  $z \neq \delta_1$ :

$$\begin{aligned} h(z, v, t) = & \mathcal{A} \{ (b - \psi) t - (c_2 + \psi a_2) \chi_{\delta_1}(z, v, t) \} = b - \psi - \\ & - (c_2 + \psi a_2) \lambda_{z, t}(v) (1 - R(z, v, t)); \end{aligned}$$

$$M_{(z, v, t)} g_{\psi}(Z(\tau), V(\tau), \tau) = -(c_1 + \psi a_1) + M_{(z, v, t)} \int_0^{\tau} h(Z(u), V(u), u) du,$$

где  $z = Z(t)$ ,  $v = V(t)$ .

Рассмотрим следующее отношение частичного порядка  $\propto$  на пространстве состояний  $R_+^3$  процесса  $X(t) = (Z(t), V(t), t)$ . Для  $x_1 = (z_1, v_1, t_1) \in R_+^3$  и  $x_2 = (z_2, v_2, t_2) \in R_+^3$  будем писать  $x_1 \propto x_2$  при  $z_1 \leq z_2$ ,  $v_1 < v_2$ ; при  $z_1 < z_2$ ,  $v_1 \leq v_2$ ; при  $z_1 = z_2$ ,  $v_1 = v_2$ ,  $t_1 \leq t_2$ .

Наложим на рассматриваемые функции  $\lambda_{z, t}(v)$  и  $R(z, v, t)$  следующие естественные ограничения, отражающие факт старения системы в процессе эксплуатации.

**О г р а н и ч е н и е 1.** Функция  $\lambda_{z, t}(v)$  является неубывающей для отношения частичного порядка  $\propto$ : из  $(z_1, v_1, t_1) \propto (z_2, v_2, t_2)$  следует  $\lambda_{z_1, t_1}(v_1) \leq \lambda_{z_2, t_2}(v_2)$ .

**О г р а н и ч е н и е 2.** Функция  $R(z, v, t)$  является невозрастающей для отношения порядка  $\propto$ : из  $(z_1, v_1, t_1) \propto (z_2, v_2, t_2)$  следует  $R(z_1, v_1, t_1) \geq R(z_2, v_2, t_2)$ .

**О г р а н и ч е н и е 3.** Справедливо неравенство

$$c_2 + ba_2 \geq (a_2c_1 - a_1c_2) \int_0^{\infty} e^{-\int_0^t \lambda_{0v}(v) dv} dt. \quad (96)$$

При выполнении сформулированных ограничений имеет место монотонность процесса  $X(t) = (Z(t), V(t), t)$  и функции  $h(z, v, t)$  относительно отношения порядка  $\propto$  (см. разд. 4). Монотонность  $h(z, v, t)$  доказывается с использованием (96) вместо (36) и того, что

$$M\tau \geq \int_0^{\infty} \exp\left(-\int_0^t \lambda_{0v}(v) dv\right) dt.$$

Это показывает, что оптимальный момент предупредительного ремонта

имеет монотонную структуру, описываемую формулами (26)–(29).

Оптимизация в классе  $T_D$ . Граница  $S_{\Gamma}$  в данном случае задается параметрической функцией  $z_*(t)$ ,  $t > 0$ .

Оптимальный момент предупредительного ремонта в классе  $T_D$  определяется формулой (29), которую целесообразно переписать в виде

$$\tau_0 = \inf \{t_i, i = 1, 2, \dots : z_*(t_i) \leq Z(t_i)\},$$

т. е. ремонт проводится в первый момент после удара  $t_i$ , когда величина накопленных повреждений достигает уровня  $z_*(t_i)$ . Параметрическая функция  $z_*(t)$  определяется из (26) и (28):

$$z_*(t) = \inf \left\{ z \geq 0 : \begin{aligned} &: M_{(z, 0, t)} \int_0^{t_1} h(z(u+t), u, t+u) du \leq \\ &\leq 0 \end{aligned} \right\} = \inf \left\{ z \geq 0 : \int_0^{\infty} ((b-\psi)v - (c_2 + \psi a_2)(1 - R(z, v, t + v))) dB_{z, t}(v) \leq 0 \right\}, \quad (97)$$

где  $z_*(t) = \infty$ , если ни для какого  $z \geq 0$  неравенство в (97) не выполняется. Ясно, что  $z_*(t)$  — невозрастающая функция аргумента  $t$ . Формула (55) вытекает из (97) как частный случай, когда имеет место пуассоновская модель.

Для применения приведенных формул осталось найти значение  $\psi$  при каждой параметрической функции  $z_*(t)$ . Введем для этого несобственные функции распределения для  $z, t \geq 0$ :

$$K^{(i)}(z, t) = P(t_i \leq t, Z(t_i^-) + Y_i \leq z, \xi > t_i / Z(0) = 0, V(0) = 0), \quad i = 1, 2, \dots \quad (98)$$

Для  $t \geq 0$ ,  $0 \leq z \leq z_*(t)$  очевидны соотношения, аналогичные (63) и (66):

$$K^{(i)}(z, t) = \int_0^t \int_0^z K^{(i-1)}(dz', dt') \times \\ \times \int_0^{t-t'} \int_0^{z-z'} r(z' + y, v, t' + v) \times \\ \times dF_{z', v, t'+v}(y) dB_{z', t'}(v), \\ i = 1, 2, \dots; \quad (99)$$

$$K^{(0)}(z, t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0, \quad z \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0 \text{ или } z < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим функции  $\varphi_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , действительной переменной  $t$  и найдем математическое ожидание

$$M(\varphi_1(\tau)(1 - \chi_{\delta_1}(Z(\tau), V(\tau), \tau)) + \\ + \varphi_2(\tau)\chi_{\delta_1}(Z(\tau), V(\tau), \tau)) = \\ = \int_0^\infty \left\{ \varphi_1(v) \int_{z_*(v)}^\infty r(y, v, v) \times \right. \\ \times dF_{0, v, v}(y) + \varphi_2(v) \times \\ \left. \times \int_0^\infty (1 - r(y, v, v)) dF_{0, v, v}(y) \right\} \times \\ \times dB_{0, 0}(v) + \\ + \sum_{i=1}^\infty \int_0^\infty \int_0^{z_*(t)} K^{(i)}(dz, dt) \times \\ \times \int_0^\infty \left\{ \varphi_1(t+v) \int_{z_*(t+v)-z}^\infty r(z + \right. \\ + y, v, t+v) dF_{z, v, t+v}(y) + \\ + \varphi_2(t+v) \int_0^\infty (1 - r(z + y, v, t + \\ + v)) dF_{z, v, t+v}(y) \left. \right\} dB_{z, t}(v). \quad (100)$$

Очевидно,  $M\tau$  получается из последнего выражения подстановкой  $t$  вместо  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$ , а  $P(\xi = \tau)$  — подстановкой 0 вместо  $\varphi_1(t)$  и 1 вместо

$\varphi_2(t)$ . Теперь значение  $\psi$  для данной функции  $z_*(t)$ , находится по формуле (40). Оптимальная параметрическая функция  $z_*(t)$ , обеспечивающая максимум функции (40), определяется с помощью итерационной процедуры, описанной в параграфе 2.

Оптимизация в классе  $T_G$ . Предупредительный ремонт возможен здесь в любые моменты времени (необязательно после удара), являющиеся ММ относительно процесса  $X(t) = (Z(t), V(t), t)$ . В этом случае формула (26) уточняется формулой (30), т. е. имеет место следующее условие оптимальности:

$$\tau_0 = \inf \{t \geq 0 : b - \psi - (c_2 + \\ + \psi a_2) \lambda_{z(t), t}(V(t))(1 - R(Z(t), \\ V(t), t)) \leq 0\}.$$

Граница  $S_\Gamma$  задается двумя параметрическими функциями  $z^*(t)$  и  $v^*(z, t)$ . Если после удара в момент  $t$  система не отказала и в ней накопилось повреждений величины  $z$ , то при  $z \geq z^*(t)$  предупредительный ремонт системы начинается сразу. При  $z < z^*(t)$  он начинается в момент  $t + v^*(z, t)$ , если до этого нового удара не последовало. Функции  $z^*(t)$  и  $v^*(z, t)$  неотрицательны, не возрастают по своим переменным и удовлетворяют функциональным уравнениям

$$v^*(z, t) = \inf \{v \geq 0 : b - \psi - (c_2 + \\ + \psi a_2) \lambda_{z, t+v}(v)(1 - R(z, v, t + \\ + v)) \leq 0\}, \quad (101)$$

$$z^*(t) = \inf \{z \geq 0 : v^*(z, t) = 0\}, \quad (102)$$

причем  $v^*(z, t) = \infty$ , если ни для какого  $v \geq 0$  неравенство в (101) не выполняется, и  $z^*(t) = \infty$ , если ни для какого  $z \geq 0$  не выполняется равенство в (102). Ясно, что обе функции являются невозрастающими по своим параметрам.

Для  $t \geq 0$ ,  $0 \leq z \leq z^*(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , формулы (98) — (100) корректируются следующим образом:

$$K^{(i)}(z, t) = P(t_i \leq t, Z(t_i) + Y_i \leq \\ \leq z, \tau > t_i | Z(0) = 0, V(0) = 0),$$

$$K^{(i)}(z, t) = \begin{cases} \int_0^t \int_0^z K^{(i-1)}(dz', dt') \int_0^{\min(t-t', v^*(z', t'))} \times \\ \times \int_0^{z-z'} r(z'+y, v, t'+v) dF_{z', v, t'+v}(y) dB_{z', t'}(v) \\ \text{при } 0 \leq z \leq z^*(t), \\ 0 \text{ при } z < 0 \text{ или } z > z^*(t). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} M(\varphi_1(\tau) (1 - \chi_{\delta_1}(Z(\tau), V(\tau), \tau)) + \varphi_2(\tau) \chi_{\delta_1}(Z(\tau), V(\tau), \tau)) = \\ = \varphi_1(v^*(0, 0)) (1 - B_{0,0}(v^*(0, 0))) + \int_0^{v^*(0,0)} \left\{ \varphi_1(v) + \right. \\ \left. + \int_{z^*(v)}^{\infty} r(y, v, v) dF_{0,v,v}(y) + \varphi_2(v) \int_0^{\infty} (1 - r(y, v, v)) dF_{0,v,v}(y) \right\} \times \\ \times dB_{0,0}(v) + \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{z^*(t)} K^{(i)}(dz, dt) \left\{ \varphi_1(v^*(z, t)) (1 - B_{z,t}(v^*(z, t))) + \right. \\ \left. + \int_0^{v^*(z,t)} \left\{ \varphi_1(v) \int_{z^*(t+v)-z}^{\infty} r(y+z, v, t+v) dF_{z,v,t+v}(y) + \right. \right. \\ \left. \left. + \varphi_2(v) \int_0^{\infty} (1 - r(y+z, v, t+v)) dF_{z,v,t+v}(y) \right\} dB_{z,t}(v) \right\}. \end{aligned}$$

При  $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = t$  последняя формула дает выражение для  $M\tau$ , а при  $\varphi_1(t) = 0$ ,  $\varphi_2(t) = 1$  — для  $P(\xi = \tau)$ . Это позволяет найти значение  $\psi$  для данных параметрических функций  $z^*(t)$  и  $v^*(z, t)$  и применить итерационную процедуру разд. 2 для определения оптимальных функций  $z^*(t)$  и  $v^*(z, t)$ .

## 7. СОПОСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ АНАЛИЗА РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ

Изложенный материал обобщает известные в литературе результаты [70, 74, 76—78, 80, 87—90]. Наиболее часто в опубликованных работах изучалась модель полного ремонта системы при следующих предположениях. Процесс накопления повреждений  $X(t)$

является строго марковским непрерывным справа со значениями из множества неотрицательных действительных чисел  $R_+ = [0, \infty)$ , дополненным состоянием отказа  $\Delta$ ; вероятность отказа в любом элементарном интервале времени  $(t, t + \Delta t)$  при условии, что в интервале  $(0, t)$  отказа не было, зависит только от накопленной к моменту  $t$  величины повреждений  $x \in R_+$  и составляет  $\lambda(x) \Delta t + o(\Delta t)$ , т. е.  $\lambda(x) > 0$  — интенсивность отказов; восстановление системы происходит мгновенно и приводит к штрафу  $c + k$  в случае отказа и штрафу  $c$  — в случае предупредительного ремонта. В классе ММ относительно процесса  $X(t)$  следует указать момент предупредительного ремонта  $\tau_0$ , при котором удельный штраф от функционирования системы минимален. Известен классический результат: пусть

марковский процесс с вероятностью, равной единице, является неубывающим и интенсивность отказов  $\lambda(x)$  также не убывает; тогда оптимальной является пороговая стратегия, согласно которой предупредительный ремонт проводится в момент, когда процесс достигает значения  $\gamma^*$ , при котором интенсивность отказов превысит критический уровень:

$$\gamma^* = \inf \{x \in R_+ : \lambda(x) \geq q^*\}, \quad (103)$$

$$\tau_0 = \min(\xi, \inf \{t \geq 0 : X(t) \geq \gamma^*\}),$$

где  $\xi$  — момент отказа:  $\xi = \inf \{t \geq 0 : X(t) = \Delta\}$ .

Критический уровень  $q^* = \psi^*/k$ , где  $\psi^*$  — цена, т. е. минимально возмож-

ный удельный штраф в рассматриваемом классе стратегий. Этот результат интуитивно очевиден: ремонт следует проводить в тот момент, когда будет достигнуто состояние, для которого за элементарный интервал длины  $\Delta t$  ожидаемый дополнительный штраф из-за отказа системы  $\lambda(X(t)) \Delta t$  сравняется с ожидаемым штрафом  $\psi^* \Delta t$  при оптимальной стратегии. Этот вывод непосредственно следует из теоремы 2 разд. 3. Действительно, в данном случае в формулах (30) и (31) фигурируют функции  $\theta(x) = 0 \forall x$ ,  $g(x) = c$  при  $x \in R_+$ ,  $g(\Delta) = c + k$ . Поэтому  $\mathcal{A}f(x) = k\lambda(x) - \psi^*$  и в рассматриваемой задаче минимизации условие  $\mathcal{A}f(x) \geq 0$  сводится к  $\lambda(x) \geq \psi^*/k$ .

## Глава 6. Модели технического обслуживания системы без учета ее структуры

### 1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

При техническом обслуживании системы без учета ее структуры отсутствует возможность проведения замен ее отдельных частей и все восстановительные работы сводятся к обновлению системы в целом. Если в реальной ситуации полной замены системы не осуществляется, то необходимо предусмотреть комплекс технических мероприятий при проведении восстановительных работ, который позволил бы сделать справедливым предположение о полном обновлении системы. В соответствии с принятой терминологией и общетеоретическими положениями, изложенными в томе 2, управляемым объектом в данных моделях будет регенерирующий случайный процесс с дискретным (как правило) пространством состояний, а управление сводится к выбору оптимальных сроков проведения плановых предупредительных профилактик.

Определение показателей качества функционирования. При длительной эксплуатации коэффициент готовности  $k_T$  определяется как доля времени, которую система проводит в работоспособном состоянии. Для регенерирующего процесса

$$k_T = \frac{MX^{(0)}}{M\tilde{X}},$$

где  $X^{(0)}$  — случайное время, в течение которого регенерирующий процесс на периоде регенерации находится в множестве состояний, принятых за работоспособные;  $\tilde{X}$  — длительность периода регенерации.

При длительной эксплуатации вероятность выполнения задачи (коэффициент оперативной

готовности)  $R(z)$  определяется как доля времени, которую система проводит в состоянии  $e_z$ , когда она работоспособна и проработает еще время, большее  $z$  ( $z \geq 0$ ). Для регенерирующего процесса  $R(z) = \frac{MX^{(z)}}{M\tilde{X}}$ , где

$X^{(z)}$  — случайное время пребывания регенерирующего процесса в состоянии  $e_z$  на периоде регенерации;  $\tilde{X}$  — длительность периода регенерации.

При длительной эксплуатации средняя удельная прибыль  $S$  определяется как математическое ожидание прибыли за единицу календарного времени. Для регенерирующего процесса  $S = \frac{M\tilde{S}}{M\tilde{X}}$ , где  $\tilde{S}$  —

случайная величина, равная прибыли, полученной за период регенерации;  $\tilde{X}$  — длительность периода регенерации.

При длительной эксплуатации средние удельные затраты  $C$  определяются как математическое ожидание затрат за единицу времени исправного функционирования системы. Для регенерирующего процесса  $C = \frac{M\tilde{C}}{MX^{(0)}}$ , где  $\tilde{C}$  — случай-

ная величина, равная затратам, имеющим место на периоде регенерации;  $X^{(0)}$  — случайное время, в течение которого процесс на периоде регенерации находится в работоспособном состоянии.

Соотношения между показателями качества функционирования. Для введенных выше показателей справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} k_T &= R(0); \\ S &= k_T (\tilde{e}_0 - C), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\bar{v}_0 = \int_0^{\infty} c_0(t) dQ_0(t)$ ,  $\bar{v}_0$  — математическое

ожидание прибыли на периоде занятости;  $c_0(t)$  — прибыль, полученная на периоде регенерации, при условии, что на этом периоде процесс в течение времени  $t$  пребывал в работоспособном состоянии;  $Q_0(t)$  — функция распределения времени пребывания регенерирующего процесса в работоспособном состоянии на периоде регенерации.

## 2. ОПИСАНИЕ СТРАТЕГИИ ТЕХНИЧЕСКОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть задана система, у которой время безотказной работы распределено по закону  $F(x) = P(\xi < x)$ . Предположим, что появившийся в системе при ее функционировании отказ самостоятельно обнаруживается (проявляется) не мгновенно, а через некоторое случайное время  $\zeta$ , распределенное по закону  $\Phi(x) = P(\zeta < x)$ . В дальнейшем будем считать, что случайные величины  $\xi$  и  $\zeta$  зависимы и что их совместное распределение

$$F(x_1, x_2) = P(\xi < x_1, \zeta < x_2),$$

$$F(x_1) = \lim_{x_2 \rightarrow \infty} F(x_1, x_2),$$

$$\Phi(x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow \infty} F(x_1, x_2).$$

В начальный момент  $t = 0$  начинается эксплуатация системы и назначается плановая предупредительная профилактика через время  $\eta$ , распре-

деленное по закону  $G(x) = P(\eta < x)$ . Если к назначенному моменту  $\eta$  система не отказала (произошло событие  $\xi > \eta$ ), то в момент  $\eta$  начинается плановая предупредительная профилактика, по предположению полностью обновляющая систему. Обозначим длительность этой плановой предупредительной профилактики  $\gamma_{п. п.}$ , тогда  $F_{п. п.}(t) = P(\gamma_{п. п.} < t)$  есть функция распределения. Если к назначенному моменту  $\eta$  система отказала ( $\xi \leq \eta$ ), но отказ не обнаружился самостоятельно ( $\xi + \zeta \geq \eta$ ), то в момент  $\eta$  начинается проведение планового аварийно-профилактического ремонта, длительность которого равна  $\gamma_{а. п.}$ ; закон распределения  $F_{а. п.}(t) = P(\gamma_{а. п.} < t)$ . Наконец, если отказ системы наступил до назначенного момента ( $\xi \leq \eta$ ) и самостоятельно проявился до назначенного момента ( $\xi + \zeta < \eta$ ), то в момент обнаружения отказа  $\xi + \zeta$  начинается неплановый аварийно-профилактический ремонт, длительность которого равна  $\gamma_{а. п.}$ ; закон распределения  $F_{а. п.}(t) = P(\gamma_{а. п.} < t)$ .

После проведения возможных восстановительных работ, когда по предположению система обновляется, осуществляется перепланирование момента проведения следующей предупредительной профилактики и весь процесс обслуживания повторяется снова.

Введем в рассмотрение случайный процесс  $x(t)$ , характеризующий состояние системы в произвольный момент времени  $t$ :

- $$x(t) = \left\{ \begin{array}{l} e_z, \text{ если в момент } t \text{ система работоспособна и до отказа проработает время, большее или равное } z; \\ e_{\bar{z}}, \text{ если в момент } t \text{ система работоспособна и до отказа проработает время, меньшее } z; \\ e_{п. п.}, \text{ если в момент } t \text{ система простаивает в неработоспособном состоянии (скрытый отказ);} \\ e_{п. п.}, \text{ если в момент } t \text{ в системе проводится плановая предупредительная профилактика;} \\ e_{а. п.}, \text{ если в момент } t \text{ в системе проводится плановый аварийно-профилактический ремонт;} \\ e_{\frac{а. п.}{а. п.}}, \text{ если в момент } t \text{ в системе проводится неплановый аварийно-профилактический ремонт.} \end{array} \right.$$

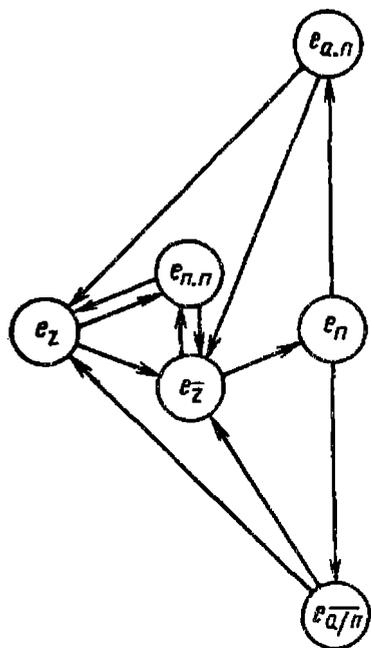


Рис. 1. Диаграмма переходов процесса  $x(t)$

Процесс  $x(t)$  — регенерирующий; состояние  $e_0 = e_z \cup e_z^-$  есть состояние работоспособности; состоянием регенерации может быть любое состояние процесса, кроме состояния  $e_n$  — скрытого отказа, моментами регенерации будут моменты попадания в выбранное состояние регенерации, период регенерации  $\bar{X}$  будет интервал между соседними моментами попадания в состояние регенерации.

Диаграмма переходов процесса  $x(t)$  приведена на рис. 1.

Постановка задачи оптимизации при полной информации о надежности системы. Задача состоит в том, чтобы определить зависимость показателей качества функционирования от функции  $G(x)$ , определяющей периодичность проведения плановых предупредительных профилактик, и найти функцию  $G_0(x)$ , при которой этот показатель принимает экстремальное значение, т. е. найти оптимальную периодичность проведения предупредительных профилактик.

Показатель качества функционирования есть функционал от характеристик надежности  $F(x_1, x_2)$  [или  $F(x)$  и  $\Phi(x)$ ], характеристик восстановления и функции распределения  $G(x)$ , определяющей периодичность проведения плановых предупредительных

профилактик. Если обозначить через  $I(F, \Phi, G)$  функционал качества, то математическая задача состоит в определении явного вида функционала  $I$ , определении экстремума (максимума или минимума) этого функционала по множеству допустимых функций распределения  $G(x)$  и определении функции  $G_0(x)$ , на которой этот экстремум достигается.

Постановка задачи оптимизации при неполной информации о надежности системы. Для технических систем, поступающих в эксплуатацию, не всегда точно известны необходимые характеристики: функции распределения времени безотказной работы  $F(x)$ , функции распределения времени восстановления (например,  $F_{ц.п}(x)$  и др.) и функции распределения времени  $\xi$  самостоятельного проявления отказа  $\Phi(x)$ . Это есть следствие того, что эти характеристики, как правило, определяются по статистическим данным, полученным в результате различных испытаний системы в целом или отдельных ее частей.

Различные планы испытаний на надежность позволяют определять оценки для различных характеристик, но часто при этом предпочтение отдается эмпирической функции распределения времени безотказной работы. Например, можно предположить, что при испытаниях на надежность наблюдения ведутся за  $N$  идентичными образцами в некоторые фиксированные моменты времени  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ . В этом случае для каждого момента  $y_k$  устанавливается, какие образцы отказали до этого момента и какие не отказали. Если число наблюдаемых образцов  $N$  велико, то по полученным статистическим данным можно построить достаточно точные оценки вероятности безотказной работы системы до моментов  $y_k$ ,  $k = 1, n$  и доверительные интервалы для этих вероятностей. Следовательно, если после таких испытаний система поступает в эксплуатацию, то можно лишь утверждать, что функция распределения времени ее безотказной работы  $F(x)$  принадлежит множеству функций распределения, которые в заданных точках  $y = (y_0 = 0, y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1} = \infty)$  при-

нимают заданные значения  $\pi = (\pi_0 = 0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n, \pi_{n+1} = 1)$  или для которых значения в заданных точках  $y = (y_0, y_1, \dots, y_n, y_{n+1})$  принадлежат числовым множествам  $A = (A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1})$  ( $A_k$  — доверительный интервал для вероятности безотказной работы системы до момента  $y_k$ ).

Обозначим через  $\Omega(n, y, \pi)$  множество функций распределения  $F(x)$ , которые в заданных точках  $y$  принимают заданные значения  $\pi$ .

В других случаях испытания на надежность предусматривают определение не эмпирических функций распределения времени безотказной работы системы, а лишь оценки различных числовых характеристик, например оценки математического ожидания и старших моментов времени безотказной работы или доверительного интервала для этих характеристик. Следовательно, если после таких испытаний система поступает на эксплуатацию, то при разработке оптимальной стратегии технического обслуживания можно лишь предполагать, что функция распределения  $F(x)$  принадлежит множеству функций распределения положительных случайных величин с фиксированными моментами или моменты принадлежат некоторым числовым множествам — доверительным интервалам. Множество функций распределения с фиксированными моментами  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  обозначим через  $\Omega(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ .

Приведенные ограничения могут быть представлены в виде неравенств для некоторых линейных функционалов от  $F(x)$ . В первом случае, например,

$$I_k(F) = \int_0^{\infty} u_k(x) dF(x) \in A_k, \\ k = \overline{1, n},$$

где

$$u_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \leq y_k; \\ 0 & \text{при } x > y_k. \end{cases}$$

Во втором случае

$$I_k(F) = \int_0^{\infty} x^k dF(x) \in A_k, \quad k = \overline{1, n},$$

где  $A_k$  — доверительный интервал.

Это же относится и к функции распределения  $\Phi(x)$  времени самостоятельного проявления отказа, влияние которой в задачах выбора оптимальных сроков проведения восстановительных работ весьма существенно. Кроме того, особенность этой функции состоит в том, что для получения необходимых статистических данных требуются дополнительные затраты, так как в этом случае нужно фиксировать при испытаниях момент появления отказа, а для этого часто приходится создавать специальное дополнительное оборудование. Если статистики, необходимой для анализа этой характеристики нет, то следует считать, что ограничений на эту функцию распределения нет, за исключением того, что она принадлежит множеству функций распределения положительных случайных величин:  $\Phi(0) = 0$ , т. е.  $\Phi(x) \in \Omega(0, y, \pi) = \Omega$ .

Для технических систем, выполняющих ответственные задания, недопустимо снижение качества функционирования. Поэтому при разработке стратегии эксплуатации нельзя ориентироваться на какого-то «среднего представителя» из возможного множества функций распределения, а следует учитывать наихудшие варианты. Налицо конфликтная ситуация, характерная для теории игр при игре с «природой» или «вездесущим и всезнающим противником». В этой ситуации предполагается, что «противник» знает нашу стратегию и свою стратегию выбирает как наихудшую для нас (наилучшую для себя) в этих условиях.

В теории игр для решения задачи выбора оптимальной стратегии игры в указанной ситуации используется принцип максимина (минимакса). Для обсуждаемого случая он может быть сформулирован в следующем виде: *стратегия обслуживания из заданного множества возможных стратегий выбирается так, чтобы максимизировать (минимизировать) минимум (максимум) показателя качества функционирования, который соответствует наихудшему варианту характеристик надежности.* Величина максимина (мини-

макса) дает гарантированное значение показателя качества функционирования.

Таким образом, математическая задача сводится к поиску максимина

$$\begin{aligned} \max_{G \in \Omega} \min_{\Phi \in \Omega} \min_{F \in \Omega} I(F, \Phi, G) &= \\ &= I(F_0, \Phi_0, G_0) = I_0; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \max_{G \in \Omega} \min_{\Phi \in \Omega} \min_{F \in \Omega} I(F, \Phi, G) &= \\ &= I(F_0, \Phi_0, G_0) = I_0 \end{aligned}$$

и функций  $F_0$ ,  $\Phi_0$  и  $G_0$ , на которых он достигается. Значение максимина  $I_0$  есть гарантированное значение показателя качества.

При исследовании средних удельных затрат определяется минимакс.

### 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ПРИ ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Определение оптимальной функции  $G_0(x)$ . Вследствие того, что для регенерирующего процесса все показатели качества функционирования являются дробно-линейными функционалами относительно функции распределения  $G(x)$ , оптимальную функцию распределения в соответствии с общей теорией (см. т. 2) можно искать в классе вырожденных функций распределения

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq \tau; \\ 1 & \text{при } x > \tau. \end{cases}$$

Дополнительные обозначения:  $c_0(t)$  — прибыль, получаемая на периоде регенерации, если на этом периоде система исправно работала время  $t$ ,  $c_0(0) = 0$ ;  $c_{п.п}(t)$  — потери (затраты), имеющие место на периоде регенерации, если на этом периоде система в течение времени  $t$  находилась в состоянии скрытого отказа,  $c_{п.п}(0) = 0$ ;  $c_{п.п}(t)$  — потери,

имеющие место на периоде регенерации, если на этом периоде в течение времени  $t$  проводилась плановая предупредительная профилактика,  $c_{п.п}(0) = 0$ ;  $c_{а.п}(t)$  — потери, имеющие место на периоде регенерации, если на этом периоде в течение времени  $t$  проводится плановый аварийно-профилактический ремонт,  $c_{а.п}(0) = 0$ ;  $c_{а.п}(t)$  — потери, имеющие место на периоде регенерации, если на этом периоде в течение времени  $t$  проводился неплановый аварийно-профилактический ремонт,  $c_{а.п}(0) = 0$ ;  $\psi(x) =$

$$\begin{aligned} &= P(\xi + \zeta < x) = \\ &= \int_0^x \int_0^{x-y} dF(y, u) \text{ — функция распределения суммы } \xi + \zeta; \quad f(x, y) = \\ &= \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} \text{ — плотность совместного} \end{aligned}$$

распределения случайного вектора  $(\xi, \zeta)$ ;  $f(x) = F'(x)$  — плотность распределения случайной величины  $\xi$  — времени безотказной работы системы;  $\lambda(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)}$  — интенсивность отказов системы; для любого распределения  $F(x)$  полагаем  $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ ;  $\varphi(x) = \Phi'(x)$  — плотность распределения случайной величины  $\zeta$  — времени самостоятельного проявления отказа.

Формулы для определения значений показателей качества.

Для коэффициента оперативной готовности имеем

$$\begin{aligned} R_{\tau}(z) &= \\ &= \frac{\int_0^{\tau} \bar{F}(x+z) dx}{\int_0^{\tau} \bar{\Psi}(x) dx + M\gamma_{п.п} +} \cdot (3) \\ &+ (M\gamma_{а.п} - M\gamma_{п.п}) F(\tau) + \\ &+ (M\gamma_{а.п} - M\gamma_{а.п}) \Psi(\tau) \end{aligned}$$

Если случайные величины  $\xi$  и  $\zeta$  независимы, то

$$R_{\tau}(z) = \frac{\int_0^{\tau} \bar{F}(x+z) dx}{\tau - \int_0^{\tau} \int_0^x F(x-y) d\Phi(y) + M\gamma_{п.п} + (M\gamma_{а.п} - M\gamma_{п.п}) F(\tau) + (M\bar{\gamma}_{а.п} - M\gamma_{а.п}) \int_0^{\tau} F(\tau-x) d\Phi(x)}. \quad (4)$$

Коэффициент готовности

$$k_{\Gamma}(\tau) = R_{\tau}(0). \quad (5)$$

Средние удельные затраты

$$C(\tau) = \frac{\int_0^{\tau} c_{п.п}(t) \left[ \int_t^{\infty} f(\tau-t, x) dx + \int_0^{\tau-t} f(x, t) dx \right] dt + \bar{c}_{п.п} + (\bar{c}_{а.п} - \bar{c}_{п.п}) F(\tau) + (\bar{c}_{а.п} - \bar{c}_{а.п}) \Psi(\tau)}{\int_0^{\tau} \bar{F}(x) dx}, \quad (6)$$

где

$$\bar{c}_{п.п} = \int_0^{\infty} c_{п.п}(t) dF_{п.п}(t); \quad \bar{c}_{а.п} = \int_0^{\infty} c_{а.п}(t) dF_{а.п}(t);$$

$$\bar{c}_{а.п} = \int_0^{\infty} c_{а.п}(t) dF_{а.п}(t) \quad (7)$$

— соответственно математические ожидания затрат на проведение плановой предупредительной профилактики, аварийно-профилактического ремонта и непланового аварийно-профилактического ремонта. Если случайные величины  $\xi$  и  $\zeta$  независимы, то

$$C(\tau) = \frac{\int_0^{\tau} c_{п.п}(t) [f(\tau-t)\bar{\Phi}(t) + \varphi(t) F(\tau-t)] dt + \bar{c}_{п.п} + (\bar{c}_{а.п} - \bar{c}_{п.п}) F(\tau) + (\bar{c}_{а.п} - \bar{c}_{а.п}) \int_0^{\tau} F(\tau-x) d\Phi(x)}{\int_0^{\tau} \bar{F}(x) dx}. \quad (8)$$

Если функции потерь линейны:

$$c_{\Pi}(t) = c_{\Pi}t; \quad c_{\Pi, \Pi}(t) = c_{\Pi, \Pi}t; \quad c_{a, \Pi}(t) = c_{a, \Pi}t; \quad c_{a, \Pi}^-(t) = c_{a, \Pi}^-t, \quad (9)$$

то

$$C(\tau) = \frac{c_{\Pi} \int_0^{\tau} \bar{\Phi}(t) F(\tau - t) dt + c_{\Pi, \Pi} M\gamma_{\Pi, \Pi} + (c_{a, \Pi} M\gamma_{a, \Pi} - c_{\Pi, \Pi} M\gamma_{\Pi, \Pi}) F(\tau) + (c_{a, \Pi}^- M\gamma_{a, \Pi}^- - c_{a, \Pi} M\gamma_{a, \Pi}) \int_0^{\tau} F(\tau - x) d\Phi(x)}{\int_0^{\tau} \bar{F}(x) dx}. \quad (10)$$

Средняя удельная прибыль

$$S(\tau) = \frac{c_0(\tau) \bar{F}(\tau) + \int_0^{\tau} c_0(t) dF(t) - \int_0^{\tau} c_{\Pi}(t) \left[ \int_t^{\infty} f(\tau - t, x) dx + \int_0^{\tau-t} f(x, t) dx \right] dt - \bar{v}_{\Pi, \Pi} - (\bar{v}_{a, \Pi} - \bar{v}_{\Pi, \Pi}) F(\tau) - (\bar{v}_{a, \Pi}^- - \bar{v}_{a, \Pi}) \Psi(\tau)}{\int_0^{\tau} \bar{\Psi}(x) dx + M\gamma_{\Pi, \Pi} + (M\gamma_{a, \Pi} - M\gamma_{\Pi, \Pi}) F(\tau) + (M\gamma_{a, \Pi}^- - M\gamma_{a, \Pi}) \Psi(\tau)}. \quad (11)$$

Если случайные величины  $\xi$  и  $\zeta$  независимы, то

$$S(\tau) = \frac{c_0(\tau) \bar{F}(\tau) + \int_0^{\tau} c_0(t) dF(t) - \int_0^{\tau} c_{\Pi}(t) [f(\tau - t) \bar{\Phi}(t) + \varphi(t) F(\tau - t)] dt - \bar{v}_{\Pi, \Pi} - (\bar{v}_{a, \Pi} - \bar{v}_{\Pi, \Pi}) F(\tau) - (\bar{v}_{a, \Pi}^- - \bar{v}_{a, \Pi}) \int_0^{\tau} F(\tau - x) d\Phi(x)}{\tau - \int_0^{\tau} \int_0^x F(x - y) d\Phi(y) dx + M\gamma_{\Pi, \Pi} + (M\gamma_{a, \Pi} - M\gamma_{\Pi, \Pi}) F(\tau) + (M\gamma_{a, \Pi}^- - M\gamma_{a, \Pi}) \int_0^{\tau} F(\tau - x) d\Phi(x)}. \quad (12)$$

Если функции потерь и прибыли линейны [см. (9) и условие  $c_0(t) = c_0 t$ ], то

$$S(\tau) = \frac{c_0 \int_0^\tau \bar{F}(x) dx - c_{п.п} \int_0^\tau \bar{\Phi}(x) F(\tau - x) dx - c_{п.п} M\gamma_{п.п} - (c_{а.п} M\gamma_{а.п} - c_{п.п} M\gamma_{п.п}) F(\tau) - (c_{а.п} M\gamma_{а.п} - c_{а.п} M\gamma_{а.п}) \int_0^\tau F(\tau - x) d\Phi(x)}{\tau - \int_0^\tau \int_0^x F(x - y) d\Phi(y) dx + M\gamma_{п.п} + (M\gamma_{а.п} - M\gamma_{п.п}) F(\tau) + (M\gamma_{а.п} - M\gamma_{а.п}) \int_0^\tau F(\tau - x) d\Phi(x)}$$

(13)

Решение задачи оптимизации. Оптимальная периодичность  $\tau_0$  проведения плановых предупредительных профилактик определяется как точка, в которой достигается максимум показателя качества функционирования (для коэффициента готовности, коэффициента оперативной готовности и средней удельной прибыли) и минимум этого показателя для средних удельных потерь.

Задача решается стандартным способом:

определяется производная показателя и приравнивается нулю;

решается полученное уравнение (необходимое условие экстремума);

среди полученных решений выбирается  $\tau_0$  — точка абсолютного экстремума.

Так как трудоемкость определения решений уравнений велика и при этом получаем только значения локальных экстремумов, можно рекомендовать для определения приближенного значения  $\tau_0$  вычисление значений показателя качества в отдельных точках с уточнением значения в точке абсолютного экстремума.

#### 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ПЕРИОДИЧНОСТИ ПЛАНОВЫХ ПРЕДУПРЕДИТЕЛЬНЫХ ПРОФИЛАКТИК ПРИ МГНОВЕННОЙ ИНДИКАЦИИ ОТКАЗА (ПОЛНАЯ ИНФОРМАЦИЯ)

Ниже приведены расчетные формулы для определения значений показателей качества функционирования си-

стемы, в которой появившийся отказ проявляется мгновенно  $P(\zeta = 0) = 1$  или

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Коэффициент оперативной готовности

$$R_\tau(z) = \frac{\int_0^\tau \bar{F}(x+z) dx}{\int_0^\tau \bar{F}(x) dx + M\gamma_{п.п} + (M\gamma_{а.п} - M\gamma_{п.п}) F(\tau)}$$

(14)

Если  $z \ll M\xi = \int_0^\infty F(x) dx$ , то

$$R_\tau(z) = \frac{\int_0^\tau \bar{F}(x) dx - zF(\tau)}{\int_0^\tau \bar{F}(x) dx + M\gamma_{п.п} + (M\gamma_{а.п} - M\gamma_{п.п}) F(\tau)}$$

(15)

Коэффициент готовности

$$k_r(\tau) = R_\tau(0) = \frac{\int_0^\tau \bar{F}(x) dx}{\int_0^\tau \bar{F}(x) dx + M\gamma_{п.п} + (M\gamma_{а.п} - M\gamma_{п.п}) F(\tau)} \quad (16)$$

Средние удельные затраты

$$C(\tau) = \frac{(\bar{v}_{а.п} - \bar{v}_{п.п}) F(\tau) + \bar{v}_{п.п}}{\int_0^\tau \bar{F}(x) dx} \quad (17)$$

Средняя удельная прибыль

$$S(\tau) = \frac{c_0(\tau) \bar{F}(\tau) + \int_0^\tau c_0(t) dF(t) - \bar{v}_{п.п} - (\bar{v}_{а.п} - \bar{v}_{п.п}) F(\tau)}{\int_0^\tau \bar{F}(x) dx + M\gamma_{п.п} + (M\gamma_{а.п} - M\gamma_{п.п}) F(\tau)} \quad (18)$$

В табл. 1 приведены формулы для определения оптимального периода  $\tau_0$  при мгновенной индикации отказа и оптимальных значений показателей качества.

Методика определения оптимальных периодов проведения плановых предупредительных профилактик и оптимальных значений показателей качества. Исходные данные следующие:

функция распределения времени безотказной работы системы  $F(x)$  или  $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ ;

среднее время работы системы до отказа  $M\xi$ ;

интенсивность отказов системы  $\lambda(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}$ ;

функция распределения длительности проведения плановой предупредительной профилактики  $F_{п.п}(t)$ ;

функция распределения длительности проведения непланового аварийно-профилактического ремонта  $F_{а.п}(t)$ ;

средняя длительность плановой предупредительной профилактики  $M\gamma_{п.п}$ ;

средняя длительность непланового аварийно-профилактического ремонта  $M\gamma_{а.п}$ ;

$c_0(t)$  — прибыль, получаемая за время  $t$  безотказной работы системы;

$c_{п.п}(t)$  — потери (затраты) за время  $t$  при проведении плановой предупредительной профилактики;

$c_{а.п}(t)$  — потери (затраты) за время  $t$  при проведении непланового аварийно-профилактического ремонта;

оперативное время  $z$  работы системы, необходимое для выполнения задачи. Расчет значений показателей качества проводится по формулам (14) — (18).

Уравнения для определения оптимальных значений периодов проведения плановых предупредительных профилактик и оптимальные значения показателей качества функционирования приведены в табл. 1. Константы  $\bar{c}_{п.п}$ ,  $\bar{c}_{а.п}$  вычисляются по формулам (7).

Примечания. 1) Рассматриваемая стратегия может быть использована только для систем, в которых происходит мгновенная индикация возникающего отказа:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

2) Для определения оптимальных периодов проведения плановых предупредительных профилактик рекомендуется приведенные в табл. 1 уравнения решать графическим методом. С этой целью уравнения выписаны в виде, удобном для графического решения: справа стоит функция от времени (периода профилактики), слева — постоянная величина. 3) Если время безотказной работы системы подчиняется экспоненциальному закону  $\bar{F}(t) = e^{-\lambda t}$ , то проведение плановых профилактик для данного случая не-

1. Расчетные формулы при мгновенной индикации отказа

Показатель качества	Уравнение для определения оптимального периода	Формулы для расчета оптимального значения показателя качества при	
		$v_0 < \infty$	$v_0 = \infty$
$R_{\tau}(z)$	$\frac{M\gamma_{п.п}}{M\gamma_{а.п} - M\gamma_{п.п}} =$ $= -F(\tau) + \frac{\lambda(\tau)\bar{F}(\tau)}{\bar{F}(\tau+z)} \times$ $\times \int_0^v \bar{F}(x) dx +$ $+ \frac{1}{M\gamma_{а.п} - M\gamma_{п.п}} \times$ $\times \left[ \frac{\bar{F}(\tau)}{\bar{F}(\tau+z)} \times$ $\times \int_0^v \bar{F}(x+z) dx -$ $- \int_0^v \bar{F}(x) dx \right]$ $\frac{M\gamma_{п.п}}{M\gamma_{а.п} - M\gamma_{п.п} + z} =$ $= -F(\tau) + \lambda(\tau) \times$ $\times \int_0^v \bar{F}(x) dx -$ $\frac{z\lambda(\tau)M\gamma_{п.п}}{M\gamma_{а.п} - M\gamma_{п.п} + z}$ <p>при <math>z \ll M\xi</math></p>	$\frac{\bar{F}(\tau_0+z)}{\bar{F}(\tau_0) [1 + \lambda(\tau_0) \times$ $\times (M\gamma_{а.п} - M\gamma_{п.п})]}$	$\frac{\int_z^{\infty} \bar{F}(x) dx}{M\xi + M\gamma_{а.п}}$
$k_{\Gamma}(\tau)$	$\frac{M\gamma_{п.п}}{M\gamma_{а.п} - M\gamma_{п.п}} =$ $= -F(\tau) + \lambda(\tau) \times$ $\times \int_0^{\tau} \bar{F}(x) dx$	$\frac{1}{1 + \lambda(\tau_0) \times$ $\times [M\gamma_{а.п} - M\gamma_{п.п}]}$	$\frac{M\xi}{M\xi + M\gamma_{а.п}}$

Продолжение табл. 1

Показатель качества	Уравнение для определения оптимального периода	Формулы для расчета оптимального значения показателя качества при	
		$\tau_0 < \infty$	$\tau_0 = \infty$
$C(\tau)$	$\frac{\bar{c}_{п.п}}{\bar{c}_{а.п} - \bar{c}_{п.п}} =$ $= -F(\tau) + \lambda(\tau) \times$ $\times \int_0^{\tau} \bar{F}(x) dx$	$(\bar{c}_{а.п} - \bar{c}_{п.п}) \lambda(\tau_0)$	$\frac{\bar{c}_{а.п}}{M\xi}$
$S(\tau)$	$\frac{\bar{c}_{п.п}}{\bar{c}_{а.п} - \bar{c}_{п.п}} =$ $= -F(\tau) + \lambda(\tau) \times$ $\times \left[ \int_0^{\tau} \bar{F}(x) dx + \right.$ $\left. + \frac{\bar{c}_{а.п} M\gamma_{п.п} - \bar{c}_{п.п} M\gamma_{а.п}}{\bar{c}_{а.п} - \bar{c}_{п.п}} \right] +$ $+ \frac{1}{\bar{c}_{а.п} - \bar{c}_{п.п}} \left\{ [-c_0'(\tau) \times \right.$ $\times \int_0^{\tau} \bar{F}(x) dx +$ $+ \bar{F}(\tau) M\gamma_{п.п} +$ $+ F(\tau) M\gamma_{а.п}] + [1 +$ $+ \lambda(\tau) (M\gamma_{а.п} -$ $- M\gamma_{п.п})] \left[ c_0(\tau) \bar{F}(\tau) + \right.$ $\left. + \int_0^{\tau} c_0(t) dF(t) \right\}$	$\frac{c_0''(\tau_0) - \lambda(\tau_0) \times$ $\times (\bar{c}_{а.п} - \bar{c}_{п.п})}{1 + \lambda(\tau_0) \times$ $\times (M\gamma_{а.п} - M\gamma_{п.п})}$	$\int_0^{\infty} c_0(t) \times$ $\times dF(t) - \bar{c}_{а.п}$ $\frac{M\xi + M\gamma_{а.п}}$

целесообразно ( $\tau_0 = \infty$ ). 4) Если интенсивность отказов  $\lambda(t)$  является неограниченно возрастающей монотонной функцией, то уравнения, определяющие оптимальный период  $\tau_0$  проведения плановых предупредительных профилактик, имеют единственный корень [при оптимизации средней удельной прибыли  $S(\tau)$  нужно еще требовать выполнения условия  $\lambda(0) < (\bar{c}_{п.п} - c_0'(0) M\gamma_{п.п}) (\bar{c}_{а.п} \times M\gamma_{п.п} - \bar{c}_{п.п} M\gamma_{а.п})^{-1}$ ]. Значит, существует конечный оптимальный период проведения плановых предупредительных профилактик. 5) Если функции потерь линейны [см. (9)], то не обязательно знать функции распределения длительностей проведения восстановительных работ, а достаточно знать их математические ожидания  $M\gamma_{п.п}$  и  $M\gamma_{а.п}$  (в этом случае  $\bar{c}_{п.п} = c_{п.п} M\gamma_{п.п}$  и  $\bar{c}_{а.п} = c_{а.п} \times M\gamma_{а.п}$ ).

**Пример.** Определим оптимальные периоды  $\tau_0$  проведения плановых предупредительных профилактик и оптимальные значения показателей качества функционирования системы, имеющей следующие исходные данные:  $\bar{F}(t) = e^{-0,00025t^2}$ ,  $\lambda(t) = 0,0005t$ ,  $M\xi = 56,5$  ч,  $c_0(t) = c_0 t$ ,  $c_{п.п}(t) = c_{п.п} t$ ,  $c_{а.п}(t) = c_{а.п} t$  ( $c_0 = 2$  ч<sup>-1</sup>,  $c_{п.п} = 1$  ч<sup>-1</sup>,  $c_{а.п} = 2$  ч<sup>-1</sup>,  $M\gamma_{п.п} = 5$  ч,  $M\gamma_{а.п} = 30$  ч,  $z = 1$  ч).

*Оптимизация показателей качества функционирования.* Используем формулы, приведенные в табл. 1.

**Коэффициент готовности.** Подставив исходные данные в уравнение для нахождения оптимального периода проведения плановой предупредительной профилактики  $\tau_0$  для  $k_T(\tau)$ , получим

$$A(\tau) = -1 + e^{-0,00025\tau^2} + 0,0005\tau \int_0^\tau e^{-0,00025t^2} dt = \frac{5}{30 - 5} = 0,2.$$

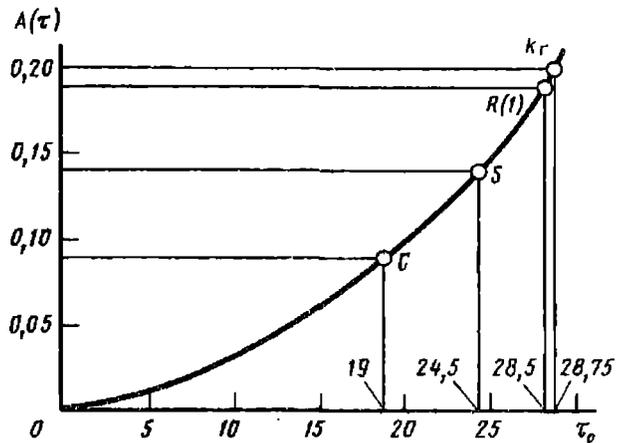


Рис. 2. График функции  $A(\tau)$  и значения оптимальных периодов  $\tau_0$

Приведенное уравнение имеет единственный корень. Этот корень определяется по графику функции  $A(\tau)$ , стоящей в правой части уравнения (график функции  $A(\tau)$  приведен на рис. 2). В этом случае  $\tau_0 = 28,75$  ч.

Определим максимальное значение коэффициента готовности

$$k_T(\tau_0) = \frac{1}{1 + \lambda(\tau_0) (M\gamma_{а.п} - M\gamma_{п.п})} = \frac{1}{1 + (30 - 5) 0,0005 \cdot 28,75} = 0,734.$$

Для сравнения приведем величину коэффициента готовности для случая, когда плановые профилактики не проводятся:

$$k_T(\infty) = \frac{M\xi}{M\xi + M\gamma_{а.п}} = \frac{56,05}{56,05 + 30} = 0,650.$$

Заметим, что выигрыш тем значительнее, чем меньше среднее время проведения плановой предупредительной профилактики. Например, при  $M\gamma_{п.п} = 2$  ч имеем  $\tau_0 = 17$  ч  $k_T(17) = 0,810$ .

**Коэффициент оперативной готовности.** С учетом исходных данных  $z \ll M\xi$ . Поэтому воспользуемся приближенным уравнением для определения оптимального

периода проведения плановых профилактик, при котором  $R_{\tau}(z)$  достигает абсолютного максимума. Подставив исходные данные в это уравнение, получим

$$\frac{5}{30 - 5 + 1} = -1 + e^{-0,00025\tau^2} + \\ + 0,0005\tau \int_0^{\tau} e^{-0,00025x^2} dx - \\ - \frac{5 \cdot 1 \cdot 0,0005\tau}{30 - 5 + 1}$$

или

$$0,192 = A(\tau) - 0,0001\tau.$$

График функции  $A(\tau) - 0,0001\tau$  в интересующем нас диапазоне изменения  $\tau$  практически совпадает с графиком функции  $A(\tau)$  (вторым членом можно пренебречь).

Следовательно, в этом случае корень уравнения  $\tau_0$  можно определить по графику  $A(\tau)$ , приведенному на рис. 2. Получаем  $\tau_0 = 28,5$  ч, а максимальный коэффициент оперативной готовности

$$R_{\tau_0}(1) = \\ = \frac{\int_0^{28,5} e^{-0,00025(x+1)^2} dx}{\int_0^{28,5} e^{-0,00025x^2} dx + 5 + \\ + (30 - 5)(1 - e^{-0,00025(28,5)^2})} = \\ = 0,730.$$

Для сравнения приведем значение коэффициента оперативной готовности, если в системе не проводятся плановые предупредительные профилактики:

$$R_{\infty}(1) = \frac{\int_1^{\infty} \bar{F}(x) dx}{M\xi + M\gamma_{a.п}} = \\ = \frac{56,05 - \int_0^1 e^{-0,00025x^2} dx}{56,05 + 30} = 0,640.$$

Заметим также, что из-за малости  $z$  оптимальное значение коэффициента оперативной готовности близко к оптимальному значению коэффициента готовности, причем близки и периоды, при которых достигается оптимум.

Средние удельные затраты. Подставив исходные данные в уравнение для нахождения  $\tau_0$  для средних удельных затрат  $C(\tau)$ , получим

$$\frac{1,5}{2 \cdot 30 - 1,5} = -1 + e^{-0,00025\tau^2} + \\ + 0,0005\tau \int_0^{\tau} e^{-0,00025x^2} dx$$

или  $0,091 = A(\tau)$ , если использовать обозначения, принятые выше.

В силу монотонности интенсивности отказов приведенное уравнение имеет один корень, который определяется по графику функции  $A(\tau)$  (см. рис. 2). Период, минимизирующий средние удельные затраты,  $\tau_0 = 19$  ч.

Определим минимальные средние удельные затраты

$$C(\tau_0) = (c_{a.п} M\gamma_{a.п} - c_{п.п} M\gamma_{п.п}) \times \\ \times \lambda(\tau_0) = (2 \cdot 30 - 1,5) \times \\ \times 0,0005 \cdot 19 = 0,523.$$

Для сравнения приведем значения средних удельных затрат для случая, когда в системе не проводятся плановые профилактики:

$$C(\infty) = \frac{c_{a.п} M\gamma_{a.п}}{M\xi} = \frac{2 \cdot 30}{56,05} = 1,07.$$

Средняя удельная прибыль. Подставив исходные данные в уравнение для нахождения  $\tau_0$  для средней удельной прибыли  $S(\tau)$ , получим

$$0,143 = -1 + e^{-0,00025\tau^2} + \\ + 0,0005\tau \int_0^{\tau} e^{-0,00025x^2} dx + \\ + 0,000715\tau$$

или

$$0,143 = A(\tau) + 0,000715\tau.$$

График функции  $A(\tau) + 0,000715\tau$  в интересующем нас диапазоне изменения  $\tau$  практически совпадает с графиком функции  $A(\tau)$  (вторым членом в уравнении можно пренебречь). Следовательно, в рассматриваемом случае корень уравнения  $\tau_0$  может быть определен по графику функции  $A(\tau)$ , приведенному на рис. 2, из которого получим, что оптимальный период  $\tau_0 = 24,5$  ч; максимальная средняя удельная прибыль

$$S(\tau_0) = \frac{c_0 - (c_{a.п} M\gamma_{a.п} - c_{п.п} M\gamma_{п.п}) \lambda(\tau_0)}{1 + \lambda(\tau_0) (M\gamma_{a.п} - M\gamma_{п.п})} = \frac{2 - (2 \cdot 30 - 1 \cdot 5) 0,0005 \cdot 24,5}{1 + 0,0005 \cdot 24,5 (30 - 5)} = 1,02.$$

Для сравнения приведем значения средней удельной прибыли, если в системе не проводятся плановые профилактики:

$$S(\infty) = \frac{c_0 M\xi - c_{a.п} M\gamma_{a.п}}{M\xi + M\gamma_{a.п}} = \frac{2 \cdot 56,05 - 2 \cdot 30}{56,05 + 30} = 0,605.$$

## 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ПЕРИОДИЧНОСТИ ПЛАНОВЫХ ВОССТАНОВИТЕЛЬНЫХ РАБОТ ПРИ ОТСУТСТВИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ИНДИКАЦИИ ОТКАЗОВ (СТРАТЕГИЯ ХРАНЕНИЯ, ПОЛНАЯ ИНФОРМАЦИЯ)

Ниже приведены расчетные формулы для определения значений показателей качества функционирования системы, в которой появившийся отказ самостоятельно не проявляется  $P(\eta = \infty) = 1$  или  $\Phi(x) = 0$  при  $x \ll \infty$ .

Коэффициент оперативной готовности

$$R_\tau(z) = \frac{\int_0^\tau \bar{F}(x+z) dx}{\tau + M\gamma_{п.п} + (M\gamma_{a.п} - M\gamma_{п.п}) F(\tau)}. \quad (19)$$

Коэффициент готовности

$$k_\Gamma(\tau) = \frac{\int_0^\tau \bar{F}(x) dx}{\tau + M\gamma_{п.п} + (M\gamma_{a.п} - M\gamma_{п.п}) F(\tau)}. \quad (20)$$

Средние удельные затраты

$$C(\tau) = \frac{\int_0^\tau c_{п.п}(\tau-x) dF(x) + \bar{v}_{п.п} + (\bar{v}_{a.п} - \bar{v}_{п.п}) F(\tau)}{\int_0^\tau \bar{F}(x) dx}, \quad (21)$$

где константы  $\bar{v}_{п.п}$  и  $\bar{v}_{a.п}$  определяются соотношениями (7).

Средняя удельная прибыль

$$S(\tau) = \frac{\int_0^\tau \bar{F}(x) dc_0(x) - \left[ \int_0^\tau c_{п.п}(\tau-x) dF(x) + \bar{v}_{п.п} + (\bar{v}_{a.п} - \bar{v}_{п.п}) F(\tau) \right]}{\tau + M\gamma_{п.п} + (M\gamma_{a.п} - M\gamma_{п.п}) F(\tau)}. \quad (22)$$

В табл. 2 приведены формулы для определения оптимального периода  $\tau_0$  при отсутствии самостоятельной индикации отказа в системе и оптимальных значений показателей качества.

Методика определения оптимальных периодов проведения плановых восстановительных работ и оптимальных значений показателей качества функционирования. Исходные данные следующие: функция распределения времени работы системы до отказа  $F(t)$ ; плотность распределения времени работы системы до отказа  $f(t) = F'(t)$ ; интен-

## 2. Расчетные формулы при отсутствии самостоятельной индикации отказа

Показатель качества	Уравнение для определения оптимального периода	Формулы для расчета оптимального значения показателя качества
$R_{\tau}(z)$	$\frac{M\gamma_{\Pi. \Pi}}{M\gamma_{a. \Pi} - M\gamma_{\Pi. \Pi}} = -F(\tau) +$ $+ \lambda(\tau) \frac{\bar{F}(\tau)}{\bar{F}(\tau + z)} \int_0^{\tau} \bar{F}(x + z) dx +$ $\int_0^{\tau} x dF(x + z)$ $+ \frac{\int_0^{\tau} x dF(x + z)}{(M\gamma_{a. \Pi} - M\gamma_{\Pi. \Pi}) \bar{F}(\tau + z)}$	$\frac{\bar{F}(\tau_0 + z)}{1 + (M\gamma_{a. \Pi} - M\gamma_{\Pi. \Pi}) f(\tau_0)}$
$k_{\Gamma}(\tau)$	$\frac{M\gamma_{\Pi. \Pi}}{M\gamma_{a. \Pi} - M\gamma_{\Pi. \Pi}} = -F(\tau) +$ $+ \lambda(\tau) \int_0^{\tau} \bar{F}(x) dx + \frac{\int_0^{\tau} x dF(x)}{(M\gamma_{a. \Pi} - M\gamma_{\Pi. \Pi}) \bar{F}(\tau)}$	$\frac{\bar{F}(\tau_0)}{1 + (M\gamma_{a. \Pi} - M\gamma_{\Pi. \Pi}) f(\tau_0)}$
$C(\tau)$	$\frac{\bar{c}_{\Pi. \Pi}}{\bar{c}_{a. \Pi} - \bar{c}_{\Pi. \Pi}} = -F(\tau) + \lambda(\tau) \int_0^{\tau} \bar{F}(x) dx +$ $+ \int_0^{\tau} \bar{F}(x) dx \int_0^{\tau} c'_{\Pi}(\tau - x) dF(x) - F(\tau) \times$ $\times \int_0^{\tau} c_{\Pi}(\tau - x) dF(x)$ $\frac{\int_0^{\tau} \bar{F}(x) dx \int_0^{\tau} c'_{\Pi}(\tau - x) dF(x) - F(\tau) \times \int_0^{\tau} c_{\Pi}(\tau - x) dF(x)}{(\bar{c}_{a. \Pi} - \bar{c}_{\Pi. \Pi}) \bar{F}(\tau)}$	$\frac{\int_0^{\tau_0} c'_{\Pi}(\tau_0 - x) dF(x)}{\bar{F}(\tau_0)} +$ $+ \lambda(\tau_0) (\bar{c}_{a. \Pi} - \bar{c}_{\Pi. \Pi})$
$S(\tau)$	$\left[ \int_0^{\tau} \bar{F}(x) dc_0(x) - \int_0^{\tau} c_{\Pi}(\tau - x) \times \right.$ $\left. \times dF(x) - \bar{c}_{\Pi. \Pi} - (\bar{c}_{a. \Pi} - \bar{c}_{\Pi. \Pi}) F(\tau) \right] \frac{1}{\tau + M\gamma_{\Pi. \Pi} + (M\gamma_{a. \Pi} - M\gamma_{\Pi. \Pi}) F(\tau)} = 0$	$\bar{F}(\tau_0) c'_0(\tau_0) -$ $- \int_0^{\tau_0} c'_{\Pi}(\tau_0 - x) dF(x) -$ $- (\bar{c}_{a. \Pi} - \bar{c}_{\Pi. \Pi}) f(\tau_0)$ $\frac{\bar{F}(\tau_0) c'_0(\tau_0) - \int_0^{\tau_0} c'_{\Pi}(\tau_0 - x) dF(x) - (\bar{c}_{a. \Pi} - \bar{c}_{\Pi. \Pi}) f(\tau_0)}{1 + (M\gamma_{a. \Pi} - M\gamma_{\Pi. \Pi}) f(\tau_0)}$

сивность отказов системы  $\lambda(t)$ ; распределение длительности плановой предупредительной профилактики  $F_{п.п}(t)$ ; средняя длительность плановой предупредительной профилактики  $M\gamma_{п.п}$ ; распределение длительности планового аварийно-профилактического ремонта  $F_{а.п}(t)$ ; средняя длительность планового аварийно-профилактического ремонта  $M\gamma_{а.п}$ ; прибыль, получаемая за время  $t$  безотказной работы системы  $c_0(t)$  на периоде регенерации; потери (затраты) за время  $t$  пребывания системы в состоянии скрытого отказа на периоде регенерации  $c_{п}(t)$ ; потери (затраты) за время  $t$  проведения плановой предупредительной профилактики на периоде регенерации  $c_{п.п}(t)$ ; потери (затраты) за время  $t$  проведения планового аварийно-профилактического ремонта на периоде регенерации  $c_{а.п}(t)$ ; оперативное время  $z$  работы системы, необходимое для выполнения задачи.

Оптимальная периодичность проведения плановых восстановительных работ  $\tau_0$  — детерминированная величина. Расчет значений показателей качества функционирования в зависимости от периодичности  $\tau$  проводится по формулам (19)—(22). Уравнения для определения оптимальных периодов  $\tau_0$  и оптимальные значения показателей качества функционирования приведены в табл. 2. Константы  $\bar{v}_{п.п}$  и  $\bar{v}_{а.п}$  вычисляются по формулам (7).

**Примечания.** 1) Рассматриваемая стратегия может быть использована для систем, в которых нет самостоятельной индикации появившихся отказов. Истинное состояние такой системы становится известным только во время проведения восстановительных работ. 2) Для определения сроков проведения восстановительных работ приведенные выше уравнения удобно решать графически. Основная трудность здесь будет заключаться в построении графиков функций, стоящих в правых частях уравнений. 3) Для рассматриваемого случая плановые восстановительные работы должны проводиться через конечное время, так как уравнения, определяющие оптимальные значения периодичности  $\tau_0$ , имеют решения.

**Пример.** Определим оптимальные пе-

риоды  $\tau_0$  проведения плановых восстановительных работ и оптимальные значения показателей качества функционирования системы, имеющей следующие исходные данные:  $\bar{F}(t) = e^{-0,01t}$ ,  $\lambda(t) = 0,01 \text{ ч}^{-1}$ ,  $M\xi = 100 \text{ ч}$ ;  $f(t) = 0,01e^{-0,01t}$ ,  $M\gamma_{п.п} = 20 \text{ ч}$ ,  $M\gamma_{а.п} = 30 \text{ ч}$ ,  $c_{п.п}(t) = c_{п.п}t$ ,  $c_{а.п}(t) = c_{а.п}t$ ,  $c_0(t) = c_0t$ ,  $c_{п}(t) = c_{п}t$  ( $c_{п.п} = 1 \text{ ч}^{-1}$ ,  $c_{а.п} = 2 \text{ ч}^{-1}$ ,  $c_{п} = 2 \text{ ч}^{-1}$ ,  $c_0 = 3 \text{ ч}^{-1}$ ,  $z = 10 \text{ ч}$ ).

**Оптимизация показателей качества функционирования.** Используем формулы, приведенные в табл. 2.

Коэффициент готовности. Подставив функцию распределения  $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$  в уравнение для нахождения  $\tau_0$  для  $k_{г}(\tau)$ , получим, что первые два слагаемых правой части уравнения тождественно равны нулю; данное уравнение преобразуется к виду

$$\frac{M\gamma_{п.п}}{M\gamma_{а.п} - M\gamma_{п.п}} = \frac{\int_0^{\tau} x dF(x)}{(M\gamma_{а.п} - M\gamma_{п.п}) \bar{F}(\tau)}$$

или

$$M\gamma_{п.п} = \frac{1}{\bar{F}(\tau)} \int_0^{\tau} x dF(x) =$$

$$= e^{\lambda\tau} \int_0^{\tau} x d(1 - e^{-\lambda x}) = \frac{1}{\lambda} (e^{\lambda\tau} - 1) - \tau$$

или

$$\lambda M\gamma_{п.п} = B(\lambda\tau),$$

где  $B(x) = (e^x - 1) - x$ .

Корень этого уравнения легко определить, если построить график функции  $B(x)$ , стоящей в правой его части (рис. 3). При  $M\gamma_{п.п} = 20 \text{ ч}$  и  $\lambda = 0,01 \text{ ч}^{-1}$  из графика функции  $B(x)$  получаем  $\lambda\tau_0 = 0,575$ . Отсюда оптимальный период проведения плановых восстановительных работ равен

$$\tau_0 = \frac{0,575}{\lambda} = 57,5 \text{ ч}.$$

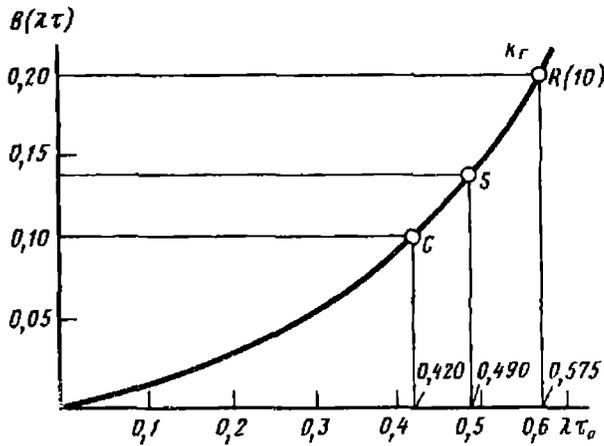


Рис. 3. График функции  $B(\lambda\tau)$  и значения оптимальных  $\lambda\tau_0$

Определяем значение максимального коэффициента готовности, соответствующего выбранному периоду профилактики,

$$\begin{aligned}
 k_{\Gamma}(\tau_0) &= \\
 &= \frac{\bar{F}(\tau_0)}{1 + (M\gamma_{a.п} - M\gamma_{п.п})f(\tau_0)} = \\
 &= \frac{e^{-0,575}}{1 + (30 - 20)10^{-2}e^{-0,575}} = \\
 &= 0,530.
 \end{aligned}$$

Коэффициент оперативной готовности. В рассматриваемом случае, когда система имеет экспоненциальное распределение времени безотказной работы, период, при котором коэффициент оперативной готовности достигает максимума, совпадает с периодом, максимизирующим коэффициент готовности:  $\tau_0 = 57,5$  ч. Подставляя  $\tau_0$  в выражение для  $R_{\tau}(z)$  (см. табл. 2) определяем максимальное значение искомой вероятности:

$$\begin{aligned}
 R_{\tau_0}(z) &= k_{\Gamma}(\tau_0)e^{-\lambda z} = \\
 &= 0,530 \cdot 0,9048 = 0,480.
 \end{aligned}$$

Средние удельные затраты. Подставив функцию распределения  $\bar{F}(t) = e^{-\lambda t}$  в уравнение для нахождения  $\tau_0$  для  $S(\tau)$  (см. табл. 2),

после простых преобразований получим

$$\begin{aligned}
 \frac{c_{п.п}}{c_{п}} M\gamma_{п.п} &= \frac{\int_0^{\tau} x dF(x)}{\bar{F}(\tau)} = \\
 &= e^{\lambda\tau} \int_0^{\tau} x d(1 - e^{-\lambda x}) = \\
 &= \frac{1}{\lambda} (e^{\lambda\tau} - 1) - \tau
 \end{aligned}$$

или

$$\lambda M\gamma_{п.п} \frac{c_{п.п}}{c_{п}} = B(\lambda\tau)$$

(график функции  $B(x)$  приведен на рис. 3). При  $M\gamma_{п.п} = 20$  ч,  $c_{п.п} = 1$  ед./ч,  $c_{п} = 2$  ед./ч и  $\lambda = 0,01$  ч<sup>-1</sup> имеем

$$B(\lambda\tau) = 0,1.$$

Из графика функции  $B(x)$  находим  $\lambda\tau_0 = 0,420$ . Отсюда оптимальный период, минимизирующий средние удельные затраты,

$$\tau_0 = \frac{0,420}{\lambda} = 42 \text{ ч,}$$

а минимальные затраты определяются из табл. 2:

$$\begin{aligned}
 C(42) &= 2 \frac{1 - e^{-0,420}}{e^{-0,420}} + \\
 &+ (2 \cdot 30 - 1 \cdot 20) 0,01 = 1,444.
 \end{aligned}$$

Средняя удельная прибыль. Подставив заданную функцию распределения  $\bar{F}(t) = e^{-\lambda t}$  в уравнение для нахождения  $\tau_0$  для  $S(\tau)$  (см. табл. 2), после преобразований получим

$$\begin{aligned}
 & \frac{(c_0 + c_{п.п}) M\gamma_{п.п} - \lambda M\gamma_{п.п} M\gamma_{a.п} \times}{\times (c_{a.п} - c_{п.п})} = \\
 & \frac{c_0 + c_{п}}{\lambda} + (c_{п} - c_{п.п}) M\gamma_{a.п} \\
 & = (e^{\lambda\tau} - 1) - \lambda\tau + \\
 & M\gamma_{a.п} (c_{a.п} - c_{п.п}) + \\
 & + M\gamma_{п.п} (c_{п} - c_{п.п}) \\
 & + \frac{c_0 + c_{п}}{\lambda} + (c_{п} - c_{п.п}) M\gamma_{a.п} \lambda\tau.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Если коэффициент

$$\frac{M\gamma_{a.п} (c_{a.п} - c_{п.п}) + M\gamma_{п.п} (c_{п.п} - c_{п.п})}{\frac{c_0 + c_{п.п}}{\lambda} + (c_{п.п} - c_{п.п}) M\gamma_{a.п}} \ll 1,$$

то последним слагаемым в правой части уравнения (23) можно пренебречь. Тогда получим уравнение вида

$$\frac{(c_0 + c_{п.п}) M\gamma_{п.п} - \lambda M\gamma_{п.п} M\gamma_{a.п} \times \times (c_{a.п} - c_{п.п})}{\frac{c_0 + c_{п.п}}{\lambda} + (c_{п.п} - c_{п.п}) M\gamma_{a.п}} = B(\lambda\tau). \quad (24)$$

В рассматриваемом случае

$$\frac{M\gamma_{a.п} (c_{a.п} - c_{п.п}) + M\gamma_{п.п} (c_{п.п} - c_{п.п})}{\frac{c_0 + c_{п.п}}{\lambda} + (c_{п.п} - c_{п.п}) M\gamma_{a.п}} = 0,0943 \ll 1.$$

Поэтому решаем уравнение (24)

$$B(\lambda\tau) = \frac{4 \cdot 20 - 0,01 \cdot 20 \cdot 30 \cdot 1}{100 \cdot 5 + 30 \cdot 1} = 0,140.$$

Далее по графику функции  $B(x)$  определим корень этого уравнения

$$\lambda\tau_0 = 0,490.$$

Отсюда оптимальный период проведения плановых восстановительных работ, максимизирующий среднюю удельную прибыль  $s$ ,

$$\tau_0 = \frac{0,490}{\lambda} = \frac{0,490}{0,01} = 49 \text{ ч.}$$

Максимальная средняя удельная прибыль определяется по формуле для  $S$  из табл. 2. В рассматриваемом примере

$$S(49) = \frac{3e^{-0,49} - 2(1 - e^{-0,49}) - (2 \cdot 30 - 1 \cdot 20) 0,01e^{-0,49}}{1 + (30 - 20) 0,01e^{-0,49}} = 0,771.$$

## 6. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕШЕНИЯ МИНИМАКСНЫХ ЗАДАЧ ТЕХНИЧЕСКОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Пусть

$$I(\Psi) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} a(x) d\Psi(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} b(x) d\Psi(x)} \quad (25)$$

— дробно-линейный функционал; функции  $a(x)$  и  $b(x)$  — кусочно-непрерывные, ограниченные на любом конечном интервале функции;  $A = (A_1, \dots, A_n)$  — набор замкнутых числовых множеств.

**Теорема 1.** Максимум (минимум) дробно-линейного функционала  $I(\Psi)$  по множеству  $\Omega(n, y, A)$  функций распределения  $\Psi(x)$ , принимающих в точках  $y$  значения из множеств  $A$ , т. е.  $\Psi(y_k) \in A_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , если он существует, достигается на множестве  $\Omega^*(n, y, A)$  ступенчатых функций распределения, имеющих не более одного скачка в каждом полуинтервале

$$\begin{aligned} \min_{\Psi \in \Omega(n, y, A)} I(\Psi) &= \\ &= \min_{\Psi \in \Omega^*(n, y, A)} I(\Psi), \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \max_{\Psi \in \Omega(n, y, A)} I(\Psi) &= \\ &= \max_{\Psi \in \Omega^*(n, y, A)} I(\Psi). \end{aligned}$$

**Теорема 2.** Пусть  $\Gamma_k$  — граница множества  $A_k$ . В условиях теоремы 1 максимум (минимум) функционала  $I(\Psi)$ , если он существует, достигается на некоторой ступенчатой функции  $\Psi_0(x)$ , имеющей не более одного скачка на любом отрезке  $[y_i, y_j)$   $0 \leq i < j \leq n+1$ , таком, что для всех  $k$ ,  $i < k < j$ ,  $\Psi(y_k) \in \Gamma_k$ .

**Следствие 1.** Пусть каждое множество  $A_i = \{\pi_i\}$  состоит из одной точки  $\pi_i$ ,  $0 = \pi_0 \leq \pi_1 \leq \pi_2 \leq \dots \leq \pi_n \leq \pi_{n+1} = 1$ . Тогда максимум

(минимум) функционала  $I(\Psi)$ , если он существует, достигается на функции  $\Psi_0(x)$  ступенчатого вида, имеющей в каждом полуинтервале  $[y_i, y_{i+1})$  один скачок  $\Delta\pi_i = \pi_{i+1} - \pi_i$ .

Приведенные теоремы и следствие будут использованы в последующих параграфах при исследовании конкретных стратегий технического обслуживания при ограниченной информации о надежности системы.

При решении минимаксной задачи (см. раздел. 2) основная сложность заключается в зависимости экстремальных функций  $G_0$  и  $(F_0, \Phi_0)$ . Если функционал качества есть дробно-линейный функционал вида

$$I(F, \Phi, G) = \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty A(x, y, v) dF(x) d\Phi(y) dG(v)}{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty B(x, y, v) dF(x) d\Phi(y) dG(v)},$$

то при решении минимаксной задачи [см. (2)] внутренние экстремумы определяются для дробно-линейных функционалов и поэтому работают теоремы 1, 2 и следствие 1. Внешние экстремумы по множеству функций распределения  $G$  и  $\Phi$  в силу зависимости  $F_0$  от  $\Phi$  и  $G$  определяются уже для более сложного функционала, и теоремы не работают.

Сформулируем простые достаточные условия независимости функций  $F_0$  от функций  $G$  и  $\Phi$ , что и позволяет упростить поиск экстремума по  $G$  и  $\Phi$ .

**Теорема 3.** Пусть исследуется на экстремум функционал (25) по некоторому множеству  $\mathcal{A}$  функций распределения, для которых он существует. Пусть в множестве  $\mathcal{A}$  найдутся две функции распределения  $\Psi_*$  и  $\Psi^*$  такие, что для любой функции  $\Psi \in \mathcal{A}$  имеет место неравенство  $\Psi_*(x) \leq \Psi(x) \leq \Psi^*(x)$  для любого  $x \in (-\infty, +\infty)$ . Тогда если функция  $a(x)$  не убывает, функция  $b(x) > 0$  и не возрастает, то

$$\begin{aligned} \max_{\Psi \in \mathcal{A}} I(\Psi) &= I(\Psi_*), \\ \min_{\Psi \in \mathcal{A}} I(\Psi) &= I(\Psi^*). \end{aligned} \quad (27)$$

Если функция  $a(x)$  не возрастает, а функция  $b(x) > 0$  и не убывает, то

$$\begin{aligned} \max_{\Psi \in \mathcal{A}} I(\Psi) &= I(\Psi^*) \\ \text{и } \min_{\Psi \in \mathcal{A}} I(\Psi) &= I(\Psi_*). \end{aligned} \quad (28)$$

В рассматриваемых задачах технического обслуживания экстремум берется по множеству  $\Omega(n, y, \pi)$ . Для этого множества существует функция распределения  $F^*$ , которая имеет скачки  $\Delta\pi_i = \pi_{i+1} - \pi_i$  в точках  $y_i$ , и не существует функции  $F_*$  (для множества функций распределения  $\Omega(n, y, \pi)$  существует мажорирующая функция  $F^*$  и не существует минорирующей функции  $F_*$  в силу непрерывности функций распределения слева). Ограничим последний интервал  $[y_n, y_{n+1} < \infty)$  и будем считать, что для функций  $\Psi \in \Omega(n, y, \pi)$  справедливо равенство  $\Psi(y_{i+1} + 0) = 1$  (в противном случае скачок  $\Delta\pi_n = 1 - \pi_n$  для  $F_*(x)$  может иметь место при  $x = \infty$ , интегралы, входящие в функционал  $I(F)$ , могут расходиться, и для  $F_*$  функционал  $I(F_*)$  не существует). Обозначим

$$F_*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < y_1; \\ \pi_k & \text{при } y_k \leq x < y_{k+1}; \\ k = \overline{1, n}; \\ 1 & \text{при } x \geq y_{n+1}. \end{cases} \quad (29)$$

Функция (29) в заданных точках  $y = (0 = y_1, y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1})$  принимает заданные значения  $\pi = (0 = \pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n, \pi_{n+1})$ , но не является функцией распределения, так как непрерывна справа. Тогда справедливо следующее следствие.

**Следствие 2.** Если функция  $a(x)$  не убывает, а функция  $b(x) > 0$  и не возрастает, то  $I(F_*) = \sup_{\Psi \in \Omega(n, y, \pi)} I(\Psi)$ .

Если функция  $a(x)$  не возрастает, а функция  $b(x) > 0$  и не убывает, то

$$I(F_*) = \inf_{\Psi \in \Omega(n, y, \pi)} I(\Psi).$$

Функция  $F_*$  не принадлежит множеству  $\Omega(n, y, \pi)$ , поэтому в условиях следствия максимум и минимум функционала  $I(\Psi)$  не существует. На функции  $F_*$  достигаются верхняя и нижняя грани.

**7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРИОДИЧНОСТИ ПЛАНОВЫХ ПРЕДУПРЕДИТЕЛЬНЫХ ПРОФИЛАКТИК ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ИНДИКАЦИИ ОТКАЗА И НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О НАДЕЖНОСТИ**

где

Пусть известны значения функции распределения  $F(x)$  времени безотказной работы системы только в точках  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ , т. е.  $F(x) \in \Omega(n, y, \pi)$ . Для выбора периодичности проведения плановых предупредительных профилактик предлагается использовать минимаксный принцип, дающий гарантированное значение показателя качества функционирования [см. (2)]. Задачу решаем в предположении линейности потерь и прибыли [выполняются равенства (9) и  $c_0(t) = c_0 t$ ], и выбор функции распределения  $G(x)$  осуществляется из множества  $\Omega^* = \Omega(0, y, \pi)$  функций распределения, имеющих одну точку роста.

Коэффициент готовности. Экстремальная функция  $F_0(x)$ , на которой достигается максимум (2), имеет вид

$$F_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ \pi_{i+1} & \text{при } y_i < x \leq y_{i+1}, \\ & i = 0, 1, \dots, n-1; \\ 1 & \text{при } x > y_n. \end{cases} \quad (30)$$

Экстремальная функция  $\Phi_0(x)$ , на которой достигается максимум (2), имеет вид

$$\Phi_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq v_0; \\ 1 & \text{при } x > v_0. \end{cases} \quad (31)$$

Ниже приведем алгоритм определения периодичности плановой предупредительной профилактики, для которой достигается максимум функционала  $k_T(\tau, F_0, \Phi)$ .

1. Вычисляются значения функции

$$k_T(\tau, F_0, v) = \frac{\sum_{i=0}^n A(\tau, y_i, v) \Delta \pi_i}{\sum_{i=0}^n B(\tau, y_i, v) \Delta \pi_i}, \quad (32)$$

$$\sum_{i=0}^n A(\tau, y_i, v) \Delta \pi_i = \sum_{i=0}^k y_i \Delta \pi_i + \tau \sum_{i=k+1}^n \Delta \pi_i$$

при  $\tau \in [y_k, y_{k+1})$ ,  $k = \overline{0, n}$ ;

$$\sum_{i=0}^n B(\tau, y_i, v) \Delta \pi_i = \begin{cases} \tau + \pi_{k+1} M \gamma_{a.п} + (1 - \pi_{k+1}) M \gamma_{п.п} & \text{при } \tau \in [y_k, y_{k+1}), v \geq \tau, \\ & k = \overline{0, n}; \\ \sum_{i=0}^k (y_i + v + M \gamma_{a.п}) \Delta \pi_i + (\tau + M \gamma_{п.п}) (1 - \pi_{k+1}) & \text{при } \tau \in [y_k, y_{k+1}); \\ 0 \leq v < \tau - y_k, & k = \overline{0, n}; \\ \sum_{i=0}^m (y_i + v + M \gamma_{a.п}) \Delta \pi_i + (\tau + M \gamma_{a.п}) (\pi_{k+1} - \pi_{m+1}) + (\tau + M \gamma_{п.п}) (1 - \pi_{k+1}) & \text{при } \tau \in [y_k, y_{k+1}), \\ v \in [\tau - y_{m+1}, \tau - y_m), & k = \overline{1, n}; \quad m = \overline{0, k-1} \end{cases} \quad (33)$$

в вершинах выпуклых многоугольников трех видов  $S_{i,j}$ :

$$\begin{cases} \tau \in [y_k, y_{k+1}), v \geq \tau, & k = \overline{0, n}; \\ \tau \in [y_k, y_{k+1}), 0 \leq v \leq \tau - y_k, & k = \overline{0, n}; \end{cases} \quad (34)$$

$$\tau \in [y_k, y_{k+1}), v \in [\tau - y_{m+1}, \tau - y_m] \\ k = \overline{1, n}; \quad m = \overline{0, k-1}.$$

Области (34) изображены на рис. 4.

2. Обозначим через  $x_1 = +0$ ,  $x_2 = y_1 - 0$ ,  $x_3 = y_1 + 0$ , ...,  $x_{2n} = y_n - 0$ ,  $x_{2n+1} = y_n + 0$ ,  $x_{2n+2} = y_{n+1} = \infty$  (проекции вершин многоугольников (34) на ось  $\tau$ ). Для каждого фиксированного  $x_k$   $k = \overline{1, 2n+2}$

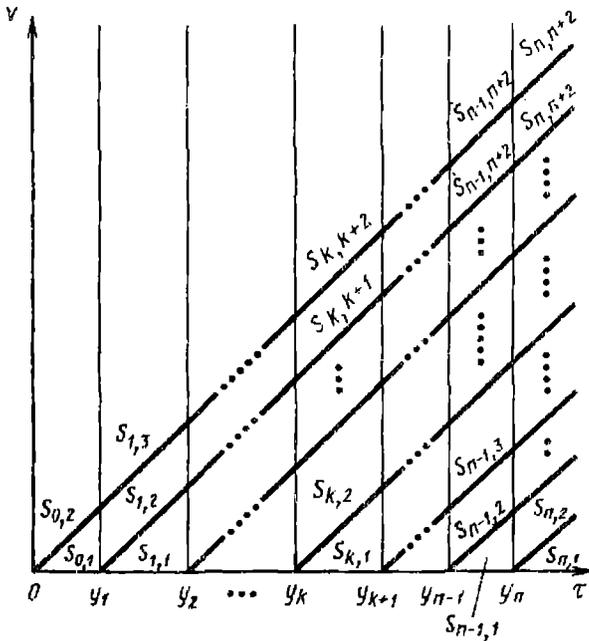


Рис. 4. Области, определяемые неравенствами (34)

определяем минимум функции (32) среди вычисленных в п. 1 значений и точку  $v_k$ , в которой этот минимум достигается. Среди полученных минимумов определяем максимум и номер  $k_0$ , для которого этот максимум достигается. Тогда  $\tau_0 = x_{k_0}$ ,  $v_0 = v_{k_0}$ . Значение полученного минимакса есть гарантированное значение коэффициента готовности, если плановые предупредительные профилактики проводить через время  $\tau_0$ .

Вероятность выполнения задачи. Экстремальные функции  $F_0(x)$  и  $\Phi_0(x)$ , на которых достигается максимум (2) для вероятности выполнения задачи, определяются равенствами (30) и (31).

Ниже приведем алгоритм определения периодичности плановой предупредительной профилактики, для которой достигается максимум вероятности выполнения задачи  $R_z(\tau, F_0, \Phi)$ .

1. Определяется максимальный номер  $m_0$ , для которого  $y_m - z < 0$ .
2. Вычисляются значения функции

$$R_z(\tau, F_0, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \tilde{A}_z(\tau, y_i) \Delta\pi_i}{\sum_{i=0}^n B(\tau, y_i, v) \Delta\pi_i} \quad (35)$$

где числитель

$$\sum_{i=0}^n \tilde{A}_z(\tau, y_i) \Delta\pi_i = \begin{cases} \sum_{i=m_0+1}^k (y_i - z) \Delta\pi_i + \\ + \tau \sum_{i=k+1}^n \Delta\pi_i \text{ при } y_k - z \leq \\ \leq \tau < y_{k+1} - z, k > m_0; \\ \tau \sum_{i=m_0+1}^n \Delta\pi_i \text{ при } \tau < y_{m_0+1} - z, \end{cases}$$

а знаменатель определяется равенством (33), в вершинах выпуклых многоугольников с границами

$$\tau = y_k, k = \overline{0, n}; \tau = y_k - z, k \geq m_0 + 1; \quad (36)$$

$$v = \tau - y_k, k = \overline{0, n}, v = 0.$$

3. Обозначим через  $x_1 = +0$ ,  $x_2 = y_1 - 0$ ,  $x_3 = y_1 + 0$ , ...,  $x_{2n} = y_n - 0$ ,  $x_{2n+1} = y_n + 0$ ,  $x_{2n+2} = y_{n+1} = \infty$ ,  $x_{2n+3} = y_{m_0+1} - z$ , ...,  $x_{3n+2-m_0} = y_n - z$  проекции вершин многоугольников (36) на ось  $\tau$ . Для каждого фиксированного  $x_k$ ,  $k = 1, 3n + 2 - m_0$  определяем минимум среди вычисленных в п. 2 значений функции (35) и точку  $v_k$ , в которой этот минимум достигается. Среди найденных минимумов определяем максимум и номер  $k_0$ , для которого он достигается. Тогда  $\tau_0 = x_{k_0}$ ,  $v_0 = v_{k_0}$ , а значение максимина есть гарантированное значение вероятности выполнения задачи при проведении плановых предупредительных профилактик через время  $\tau_0$ .

Средние удельные потери. Экстремальные функции  $F_0(x)$  и  $\Phi_0(x)$ , на которых достигается минимакс (2) для средних удельных потерь, определяются равенствами (30) и (31).

Ниже приведен алгоритм определения периодичности плановой предупредительной профилактики, для которой достигается минимакс средних удельных потерь  $C(\tau, F_0, \Phi)$ .

1. Вычисляются  $C(\tau, F_0, v) =$

$$= \frac{\sum_{i=0}^n A(\tau, y_i, v) \Delta\pi_i}{\sum_{i=0}^n B(\tau, y_i, v) \Delta\pi_i} \quad (37)$$

где

$$\sum_{i=0}^n B(\tau, y_i, v) \Delta\pi_i = \sum_{i=0}^k y_i \Delta\pi_i + \tau \sum_{i=k+1}^n \Delta\pi_i$$

при  $\tau \in [y_k, y_{k+1})$ ,  $k = \overline{0, n}$ ;

$$\sum_{i=0}^n A(\tau, y_i, v) \Delta\pi_i =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} c_{a.п} M \gamma_{a.п} \pi_{k+1} + \\ + c_{п.п} M \gamma_{п.п} (1 - \pi_{k+1}) \text{ при} \\ \tau \in [y_k, y_{k+1}), v \geq \tau, k = \overline{0, n}; \\ (c_{п} v + c_{a.п} M \gamma_{a.п}) \pi_{k+1} + \\ + c_{п.п} M \gamma_{п.п} (1 - \pi_{k+1}) \\ \text{при } \tau \in (y_k, y_{k+1}), \\ 0 \leq v < \tau - y_k, k = \overline{0, n}; \\ (c_{п} v + c_{a.п} M \gamma_{a.п}) \pi_{m+1} + \\ + c_{a.п} M \gamma_{a.п} (\pi_{k+1} - \pi_{m+1}) + \\ + c_{п.п} M \gamma_{п.п} (1 - \pi_{k+1}) \text{ при} \\ \tau \in [y_k, y_{k+1}), \\ v \in [\tau - y_{m+1}, \tau - y_m), k = \overline{1, n}, \\ m = \overline{0, k-1} \end{array} \right.$$

в вершинах многоугольников (34) (см. рис. 4).

2. Обозначим  $x_1 = +0$ ,  $x_2 = y_1 - 0$ ,  $x_3 = y_1 + 0$ , ...,  $x_{2n} = y_n - 0$ ,  $x_{2n+1} = y_n + 0$ ,  $x_{2n+2} = y_{n+1} = \infty$  [проекция вершин многоугольников (34) на ось  $\tau$ ]. Для каждого фиксированного  $x_k$ ,  $k = \overline{1, 2n+2}$ , определяем максимум функции (37) среди вычисленных в п. 1 значений и точку  $v_k$ , в которой этот максимум достигается. Среди найденных максимумов определяем минимум и номер  $k_0$ , для которого этот минимум достигается. Тогда  $\tau_0 = x_{k_0}$  и  $v_0 = v_{k_0}$ . Значение найденного минимакса есть

гарантированное значение средних удельных потерь, если плановые предупредительные профилактики проводить через время  $\tau_0$ .

Средняя удельная прибыль. Экстремальные функции  $F_0(x)$  и  $\Phi_0(x)$ , на которых достигается максимум (2) для средней удельной прибыли, определяются равенствами (30) и (31).

Ниже дан алгоритм определения периодичности плановой предупредительной профилактики, для которой достигается максимум средней удельной прибыли  $S(\tau, F_0, \Phi)$ .

1. Вычисляются  $S(\tau, F_0, v) =$

$$= \frac{\sum_{i=0}^n A(\tau, y_i, v) \Delta\pi_i}{\sum_{i=0}^n B(\tau, y_i, v) \Delta\pi_i} \quad (38)$$

где знаменатель определяется равенством (33), а числитель

$$\sum_{i=0}^n A(\tau, y_i, v) \Delta\pi_i = \left\{ \begin{array}{l} c_0 \tau - c_{a.п} M \gamma_{a.п} \pi_{k+1} - \\ - c_{п.п} M \gamma_{п.п} (1 - \pi_{k+1}) \\ \text{при } \tau \in [y_k, y_{k+1}), v \geq \tau, \\ k = \overline{0, n}; \\ \sum_{i=0}^k (c_0 y_i - c_{п} v - \\ - c_{a.п} M \gamma_{a.п}) \Delta\pi_i + \\ + (c_0 \tau - c_{п.п} M \gamma_{п.п}) (1 - \pi_{k+1}) \\ \text{при } \tau \in [y_k, y_{k+1}), 0 \leq v \leq \tau - y_k, \\ k = \overline{0, n}; \\ \sum_{i=0}^m (c_0 y_i - c_{п} v - \\ - c_{a.п} M \gamma_{a.п}) \Delta\pi_i + \\ + (c_0 \tau - c_{a.п} M \gamma_{a.п}) \times \\ \times (\pi_{k+1} - \pi_{m+1}) + \\ + (c_0 \tau - c_{п.п} M \gamma_{п.п}) (1 - \pi_{k+1}) \\ \text{при } \tau \in [y_k, y_{k+1}), \\ v \in [\tau - y_{m+1}, \tau - y_m), \\ k = \overline{1, n}, m = \overline{0, k-1} \end{array} \right.$$

в вершинах многоугольников (34) (см. рис. 4).

2. Обозначим  $x_1 = +0, x_2 = y_1 - 0, x_3 = y_1 + 0, \dots, x_{2n} = y_n - 0, x_{2n+1} = y_n + 0, x_{2n+2} = y_{n+1} = \infty$  [проекции вершин многоугольников (34) на ось  $\tau$ ]. Для каждого фиксированного  $x_k, k = 1, 2n + 2$ , определяем минимум функции (38) среди вычисленных значений в п. 1 и точку  $v_k$ , в которой он достигается. Среди найденных минимумов определяем максимальный и номер  $k_0$ , для которого этот максимум достигается. Тогда  $\tau_0 = x_{k_0}$  и  $v_0 = v_{k_0}$ , а значение найденного максимума есть гарантированное значение средней удельной прибыли, если плановые предупредительные профилактики проводить через время  $\tau_0$ .

**8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРИОДИЧНОСТИ ПЛАНОВОЙ ПРЕДУПРЕДИТЕЛЬНОЙ ПРОФИЛАКТИКИ ПРИ МГНОВЕННОЙ ИНДИКАЦИИ ОТКАЗА И НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О НАДЕЖНОСТИ**

Для коэффициента готовности имеем

$$k_{\Gamma}(F, G) = \frac{\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} A(x, y) dF(y) dG(x)}{\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} B(x, y) dF(y) dG(x)},$$

где

$$A(x, y) = \min(x, y) = \begin{cases} x & \text{при } x \leq y, \\ y & \text{при } x > y; \end{cases} \quad (39)$$

$$B(x, y) = \begin{cases} x + M\gamma_{\text{п. п}} & \text{при } x < y, \\ y + M\gamma_{\text{а. п}} & \text{при } x \geq y. \end{cases}$$

Определяем

$$\max_{G \in \Omega} \min_{F \in \Omega(n, y, \pi)} k_{\Gamma}(F, G) = k_{\Gamma}(F_0, G_0).$$

Экстремальная функция  $F_0(x)$  определяется равенством (30), экстремальная функция  $G_0(x)$  принадлежит классу вырожденных функций распределения, т. е.

$$G_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq \tau_0; \\ 1 & \text{при } x > \tau_0. \end{cases} \quad (40)$$

Для определения  $\tau_0$  необходимо.

1. Вычислить значения последовательности

$$A_k = \frac{\sum_{i=0}^k y_i \Delta\pi_i + y_{k+1} \sum_{i=k+1}^n \Delta\pi_i}{\sum_{i=0}^k (y_i + M\gamma_{\text{а. п}}) \Delta\pi_i + (y_{k+1} + M\gamma_{\text{п. п}}) \sum_{i=k+1}^n \Delta\pi_i}, \quad (41)$$

$k = \overline{0, n}$ ; при  $k = n$  полагаем

$$\sum_{i=k+1}^n \Delta\pi_i = 0 \text{ и } y_{k+1} \sum_{i=k+1}^n \Delta\pi_i = 0.$$

2. Определить  $\max_{0 \leq k \leq n} A_k = A_{k_0}$  и номер  $k_0$ , при котором этот максимум достигается.

Величина  $A_{k_0}$  есть гарантированное значение коэффициента готовности при проведении плановых предупредительных профилактик через время  $\tau_0 = y_{k_0+1} - 0$ .

Для вероятности выполнения задачи имеем

$$R_z(F, G) = \frac{\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} A_z(x, y) dF(y) dG(x)}{\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} B(x, y) dF(y) dG(x)},$$

где

$$A_z(x, y) = \min(x, \max(0, y - z)) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq y \leq z; \\ y - z & \text{при } z \leq y \leq x + z; \\ x & \text{при } y > x + z, \end{cases}$$

а функция  $B(x, y)$  определяется равенством (39).

Вычисляем

$$\begin{aligned} \max_{G \in \Omega} \min_{F \in \Omega(n, y, \pi)} R_z(F, G) &= \\ &= R_z(F_0, G_0). \end{aligned}$$

Экстремальная функция  $F_0(x)$  определяется равенством (30), экстремальная функция  $G_0(x)$  принадлежит множеству вырожденных функций распределения, т. е. имеет вид (40).

Для определения  $\tau_0$  необходимо.

1. Определить номер  $k_0$  ( $0 \leq k_0 \leq n$ ), для которого

$$y_{k_0} - z \leq 0, \quad y_{k_0+1} - z > 0.$$

2. Вычислить значения функции

$$\sum_{i=0}^n A_z(\tau, y_i) \Delta\pi_i \Big/ \sum_{i=0}^n B(\tau, y_i) \Delta\pi_i, \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n A_z(\tau, y_i) \Delta\pi_i &= \\ = \begin{cases} \tau \sum_{i=k_0+1}^n \Delta\pi_i \text{ при } \tau \in [0, y_{k_0+1} - z); \\ \sum_{i=k_0+1}^m (y_i - z) \Delta\pi_i + \tau \sum_{i=m+1}^n \Delta\pi_i \\ \text{при } \tau \in [y_m - z, y_{m+1} - z), \quad (43) \\ k_0 < m \leq n; \\ \text{при } m = n \text{ полагаем} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\sum_{i=m+1}^n \Delta\pi_i = 0, \quad y_{m+1} \sum_{i=m+1}^n \Delta\pi_i = 0,$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n B(\tau, y_i) \Delta\pi_i &= \\ &= \sum_{i=0}^k (y_i + M\gamma_{a.п.}) \Delta\pi_i + \\ &+ (\tau + M\gamma_{п.п.}) \sum_{i=k+1}^n \Delta\pi_i \end{aligned}$$

при  $\tau \in [y_k, y_{k+1}), k = \overline{0, n},$  (44)

в точках  $\tau \in \{y_k \pm 0, k = \overline{0, n};$

$$y_{l+1} - z, l = \overline{k_0, n}\}.$$

3. Среди полученных значений выбрать максимальное, которое будет гарантированным значением вероятности выполнения задачи. Точка  $\tau_0$ , при которой достигается этот максимум, есть период проведения плановых предупредительных профилактик.

Для средних удельных потерь имеем

$$\begin{aligned} C(F, G) &= \\ &= \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty A(x, y) dF(y) dG(x)}{\int_0^\infty \int_0^\infty B(x, y) dF(y) dG(x)}, \end{aligned}$$

где

$$A(x, y) = \begin{cases} c_{a.п.} M\gamma_{a.п.} & \text{при } y \leq x; \\ c_{п.п.} M\gamma_{п.п.} & \text{при } y > x; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \min(x, y) = \\ &= \begin{cases} x & \text{при } x \leq y, \\ y & \text{при } x > y. \end{cases} \end{aligned}$$

Вычисляем

$$\begin{aligned} \min_{G \in \Omega} \max_{F \in \Omega(n, y, \pi)} C(F, G) &= \\ &= C(F_0, G_0). \end{aligned}$$

Экстремальные функции  $F_0(x)$  и  $G_0(x)$  определяются соответственно равенствами (30) и (40).

Для определения периода  $\tau_0$  необходимо.

1. Вычислить значения последовательности

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{c_{a.п.} M\gamma_{a.п.} \pi_{k+1} + c_{п.п.} M\gamma_{п.п.} (1 - \pi_{k+1})}{\sum_{i=0}^k y_i \Delta\pi_i + (1 - \pi_{k+1}) y_{k+1}}, \\ k &= \overline{0, n}, \quad (45) \end{aligned}$$

причем  $y_{n+1} (1 - \pi_{n+1}) = 0.$

2. Определить  $\min_{0 \leq k \leq n} A_k = A_{k_0}$  и номер  $k_0$ , при котором этот минимум достигается. Величина  $A_{k_0}$  есть гарантированное значение средних удельных потерь при проведении пла-

новых предупредительных профилактик через время  $\tau_0 = y_{k_0+1} - 0$ .

Для средней удельной прибыли имеем

$$S(F, G) = \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty A(x, y) dF(y) dG(x)}{\int_0^\infty \int_0^\infty B(x, y) dF(y) dG(x)},$$

где

$$A(x, y) = \begin{cases} c_0 y - c_{\text{а. п}} M\gamma_{\text{а. п}} & \text{при } y \leq x; \\ c_0 x - c_{\text{п. п}} M\gamma_{\text{п. п}} & \text{при } y > x, \end{cases}$$

а функция  $B(x, y)$  находится из равенства (39).

Вычисляем

$$\begin{aligned} \max_{G \in \Omega} \min_{F \in \Omega(n, y, \pi)} S(F, G) &= \\ &= S(F_0, G_0). \end{aligned}$$

Экстремальная функция  $F_0(x)$  определяется равенством (30), экстремальная функция  $G_0(x)$  принадлежит множеству вырожденных функций распределения, т. е. имеет вид (40).

Для определения  $\tau_0$  необходимо.

1. Вычислить значения последовательности

$$\begin{aligned} A_k = & \frac{c_0(1 - \pi_{k+1})y_{k+1} + c_0 \sum_{i=0}^k y_i \Delta \pi_i - c_{\text{а. п}} M\gamma_{\text{а. п}} \pi_{k+1} - c_{\text{п. п}} M\gamma_{\text{п. п}} (1 - \pi_{k+1})}{(1 - \pi_{k+1})y_{k+1} + \sum_{i=0}^k y_i \Delta \pi_i + \pi_{k+1} M\gamma_{\text{а. п}} + (1 - \pi_{k+1}) M\gamma_{\text{п. п}}} \\ & k = \overline{0, n}, \end{aligned} \quad (46)$$

причем  $y_{n+1}(1 - \pi_{n+1}) = 0$ .

2. Определить  $\max_{0 \leq k \leq n} A_k = A_{k_0}$  и номер  $k_0$ , при котором этот максимум достигается.

Величина  $A_{k_0}$  есть гарантированное значение средней удельной прибыли при проведении плановых предупредительных профилактик через время  $\tau_0 = y_{k_0+1} - 0$ .

Методика определения минимаксных периодов проведения плановых предупредительных профилактик и гарантированных значений показателей качества функционирования. Исходные данные для расчета следующие: вектор  $y = (y_0 = 0, y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1} = \infty)$  и вектор  $\pi = (\pi_0 = 0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n, \pi_{n+1} = 1)$ ; математическое ожидание длительности плановой предупредительной профилактики  $M\gamma_{\text{п. п}}$ ; математическое ожидание длительности непланового аварийно-профилактического ремонта  $M\gamma_{\text{а. п}}$ ; потери за

единицу времени при проведении плановой предупредительной профилактики  $c_{\text{п. п}}$ ; потери за единицу времени при проведении непланового аварийно-профилактического ремонта  $c_{\text{а. п}}$ ; прибыль  $c_0$ , полученная за единицу времени безотказной работы системы; оперативное время  $z$  работы системы, необходимое для выполнения задачи.

Алгоритм вычисления показателей следующий.

Для коэффициента готовности определяем номер  $k_0$ , при котором достигается максимум функции  $A_k$  (41) при  $0 \leq k \leq n$ ; если максимум  $A_k$  достигается в точке  $k_0 < n$ , то плановые предупредительные профилактики следует проводить через время  $\tau_0 = y_{k_0+1} - 0$ ; если  $k_0 = n$ , то  $\tau_0 = \infty$ , т. е. плановые предупредительные профилактики проводить нецелесообразно; величина  $A_{k_0}$  есть гарантированное значение коэффициента готовности.

Для вероятности выполнения задачи определяем номер  $k_0$  ( $0 \leq k_0 \leq n$ ), для которого  $y_{k_0} - z \leq 0, y_{k_0+1} - z > 0$  и максимум функции (42) в точках  $\tau \in \{y_k \pm 0, k = \overline{0, n}; y_{l+1} - z, l = \overline{k_0, n}\}$ ; точка  $\tau_0$ , в которой достигается максимум функции (42), есть период проведения плановых предупредительных профилактик, при котором значение максимума функции (42)

есть гарантированное значение вероятности выполнения задачи.

Для средних удельных потерь определяем номер  $k_0$  ( $0 \leq k_0 \leq n$ ), при котором достигается минимум функции (45); величина  $\tau_0 = y_{k_0+1} - 0$  есть периодичность проведения плановых предупредительных профилактик; величина  $A_{k_0}$  — гарантированное значение средних удельных затрат; если  $k_0 = n$ , то проводить плановые предупредительные профилактики нецелесообразно.

Для средних удельных прибылей определяем номер  $k_0$  ( $0 \leq k_0 \leq n$ ), при котором достигается максимум функции (46); величина  $\tau_0 = y_{k_0+1} - 0$  есть периодичность проведения плановых предупредительных профилактик; величина  $A_{k_0}$  — гарантированное значение средней удельной прибыли; если  $k_0 = n$ , то проводить предупредительные профилактики нецелесообразно.

Пример. Определим гарантированные значения показателей качества функционирования и сроки проведения плановых предупредительных профилактик системы со следующими характеристиками:  $M\gamma_{п.п} = 1$  ч,  $M\gamma_{а.п} = 2$  ч,  $z = 25$  ч,  $c_{п.п} = 1$  ед./ч,  $c_{а.п} = 2$  ед./ч,  $c_0 = 5$  ед./ч,  $y = (y_0 = 0, y_1 = 10$  ч,  $y_2 = 20$  ч,  $y_3 = 30$  ч,  $y_4 = 40$  ч),  $\pi = (\pi_0 = 0, \pi_1 = 0,10, \pi_2 = 0,15, \pi_3 = 0,30, \pi_4 = 0,50)$ .

Коэффициент готовности. Вычисляем значения  $A_k$ :  $A_0 = 0,891$ ;  $A_1 = 0,940$ ;  $A_2 = 0,950$ ;  $A_3 = 0,952$ ;  $A_4 = 0,937$ .

Гарантированное значение коэффициента готовности равно 0,952 при проведении плановых предупредительных профилактик через время  $\tau_0 = 40 - 0$  ч.

Вероятность выполнения задачи. В соответствии с методикой определяем  $k_0$ . В данном случае  $k_0 = 2$ . Вычисляем значения функции (42) (табл. 3).

Остальные значения можно не считать, так как числитель при  $\tau > y_4 - z$  принимает постоянные значения, а знаменатель возрастает. Поэтому максимум достигается при  $\tau \leq$

3. Значения функции  $R_{\Gamma}(F_0, G_0)$

$\tau$	R	$\tau$	R
$y_0 = 0$	0	$y_2 + 0 = 10 + 0$	0,591
$y_3 - z = 5$	0,761	$y_4 - z = 15$	0,580
$y_2 - 0 = 10 - 0$	0,594		

$\leq y_4 - z = 15$  ч. Графики функций приведены на рис. 5 и 6.

Гарантированное значение вероятности выполнения задачи равно 0,761 при проведении плановых предупредительных профилактик через  $\tau_0 = 5$  ч.

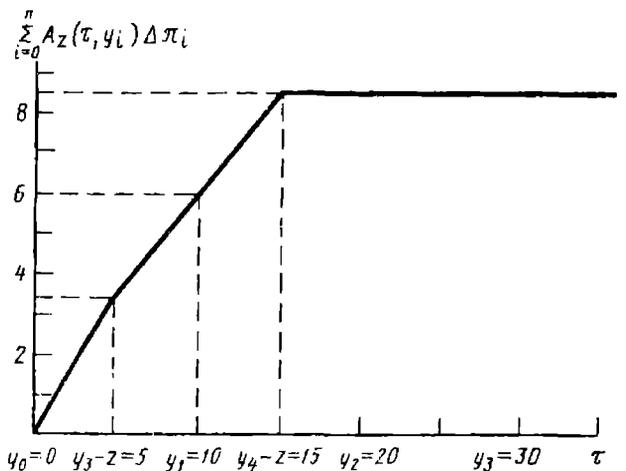


Рис. 5. График числителя выражения (42)

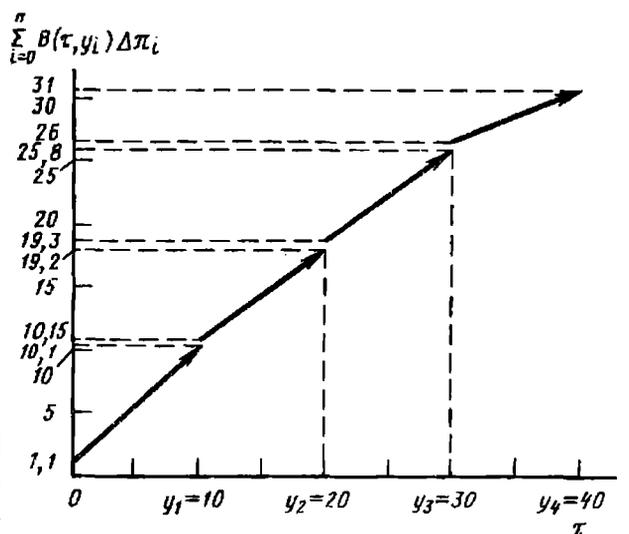


Рис. 6. График знаменателя выражения (42)

Средние удельные потери. Вычисляем значения функции (45):  $A_0 = 0,144$ ;  $A_1 = 0,081$ ;  $A_2 = 0,076$ ;  $A_3 = 0,085$ ;  $A_4 = 0,139$ .

Гарантированное значение средних удельных потерь равно  $0,076$  ед./ч при проведении плановых предупредительных профилактик через время  $\tau_0 = 30 - 0$  ч.

Средняя удельная прибыль. Вычисляем значения функции (46):  $A_0 = 4,327$ ;  $A_1 = 4,624$ ;  $A_2 = 4,674$ ;  $A_3 = 4,677$ ;  $A_4 = 4,552$ .

Гарантированное значение средней удельной прибыли равно  $4,677$  ед./ч при проведении плановых предупредительных профилактик через время  $\tau_0 = 40 - 0$  ч.

### 9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРИОДИЧНОСТИ ПЛАНОВОЙ ПРЕДУПРЕДИТЕЛЬНОЙ ПРОФИЛАКТИКИ ПРИ ОТСУТСТВИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ИНДИКАЦИИ ОТКАЗОВ И НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О НАДЕЖНОСТИ

Для коэффициента готовности имеем

$$k_{\Gamma}(F, G) = \frac{\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} A(x, y) dF(y) dG(x)}{\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} B(x, y) dF(y) dG(x)},$$

где

$$A(x, y) = \min(x, y) = \begin{cases} x & \text{при } x \leq y, \\ y & \text{при } x > y; \end{cases} \quad (47)$$

$$B(x, y) = \begin{cases} x + M\gamma_{\text{п.п}} & \text{при } x < y, \\ x + M\gamma_{\text{а.п}} & \text{при } x \geq y. \end{cases} \quad (48)$$

Определяем

$$\max_{G \in \Omega} \min_{F \in \Omega(n, y, \pi)} k_{\Gamma}(F, G) = k_{\Gamma}(F_0, G_0).$$

Экстремальная функция  $F_0(x)$  определяется равенством (30), а экстремальная функция  $G_0(x)$  принадлежит классу вырожденных распределений, т. е. имеет вид (40).

Для определения  $\tau_0$  необходимо.

1. Вычислить значения последовательности

$$A_k = \max_{s=k, k+1} \frac{\sum_{i=0}^k y_i \Delta \pi_i + y_s (1 - \pi_{k+1})}{y_s + \pi_{k+1} M\gamma_{\text{а.п}} + (1 - \pi_{k+1}) M\gamma_{\text{п.п}}} \quad (49)$$

при  $0 \leq k \leq n$  (при  $k = n$ ,  $y_{k+1} = \infty$ ,  $\pi_{k+1} = 1$ ,  $y_{k+1} (1 - \pi_{k+1}) = 0$ ).

2. Определить номер  $k_0$ , при котором  $A_{k_0} = \max_{0 \leq k \leq n} A_k$ , т. е. достигается максимум последовательности  $A_k$ .

Величина  $A_{k_0}$  есть гарантированное значение коэффициента готовности. Период проведения плановых предупредительных профилактик  $\tau_0 = y_{k_0} + 0$ , если

$$\frac{\sum_{i=0}^{k_0} y_i \Delta \pi_i + y_{k_0} (1 - \pi_{k_0+1})}{y_{k_0} + \pi_{k_0+1} M\gamma_{\text{а.п}} + (1 - \pi_{k_0+1}) M\gamma_{\text{п.п}}} > \frac{\sum_{i=0}^{k_0} y_i \Delta \pi_i + y_{k_0+1} (1 - \pi_{k_0+1})}{y_{k_0+1} + \pi_{k_0+1} M\gamma_{\text{а.п}} + (1 - \pi_{k_0+1}) M\gamma_{\text{п.п}}}, \quad (50)$$

и время  $\tau_0 = y_{k_0+1} - 0$ , если неравенство (50) не выполняется.

Для вероятности выполнения задачи имеем

$$R_z(F, G) =$$

$$\frac{\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} A_z(x, y) dF(y) dG(x)}{\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} B(x, y) dF(y) dG(x)},$$

где

$$A_z(x, y) = \min(x, \max(0, y - z)),$$

а функция  $B(x, y)$  определяется равенством (48).

Вычисляем

$$\begin{aligned} \max_{G \in \Omega} \min_{F \in \Omega(n, y, \pi)} R_z(F, G) &= \\ &= R_z(F_0, G_0). \end{aligned}$$

Экстремальные функции  $F_0(x)$  и  $G_0(x)$  определяются соответственно равенствами (30) и (40).

Для определения  $\tau_0$  необходимо.

1. Найти номер  $k_0$  ( $0 \leq k_0 \leq n$ ), для которого  $y_{k_0} - z \leq 0$ ,  $y_{k_0+1} - z > 0$ .

2. Вычислить при  $\tau \in \{y_k \pm 0, k = 0, n; y_{l+1} - z, l = k_0, n\}$  функцию

$$R = \frac{\sum_{i=0}^n A_z(\tau, y_i) \Delta \pi_i}{\sum_{i=0}^n B(\tau, y_i) \Delta \pi_i} \quad (51)$$

где числитель определяется равенством (43), а знаменатель ( $k = 0, n$ )

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n B(\tau, y_i) \Delta \pi_i &= \tau + \pi_{k+1} M \gamma_{a.п} + \\ &+ (1 - \pi_{k+1}) M \gamma_{п.п} \end{aligned}$$

при  $\tau \in [y_k, y_{k+1})$ .

3. Среди полученных значений выбрать максимальное, которое и будет гарантированным значением вероятности выполнения задачи. Точка  $\tau_0$ , при которой достигается этот максимум, есть период проведения плановых предупредительных профилактик, обеспечивающий это гарантированное значение.

Для средних удельных потерь имеем  $C(F, G) =$

$$\begin{aligned} &\frac{\int_0^\infty \int_0^\infty A(x, y) dF(y) dG(x)}{\int_0^\infty \int_0^\infty B(x, y) dF(y) dG(x)}, \end{aligned}$$

где

$$A(x, y) = \begin{cases} (x - y) c_{п.п} + c_{a.п} M \gamma_{a.п} & \text{при } y < x; \\ c_{п.п} M \gamma_{п.п} & \text{при } y \geq x. \end{cases}$$

Функция  $B(x, y)$  определяется равенством (47).

Вычисляем

$$\begin{aligned} \min_{G \in \Omega} \max_{F \in \Omega(n, y, \pi)} C(F, G) &= \\ &= C(F_0, G_0). \end{aligned}$$

Экстремальные функции  $F_0(x)$  и  $G_0(x)$  определяются соответственно равенствами (30) и (40).

Для определения  $\tau_0$  необходимо.

1. Вычислить значения последовательности

$$\begin{aligned} A_k &= \min_{s=k, k+1} (c_{a.п} M \gamma_{a.п} \pi_{k+1} + \\ &+ c_{п.п} M \gamma_{п.п} (1 - \pi_{k+1}) + \\ &+ c_{п.п} \sum_{i=0}^k (y_s - y_i) \Delta \pi_i) \times \\ &\times \left( y_s (1 - \pi_{k+1}) + \sum_{i=0}^k y_i \Delta \pi_i \right)^{-1} \quad (52) \end{aligned}$$

при  $0 \leq k \leq n$ .

2. Определить номер  $k_0$ , при котором достигается  $A_{k_0} = \min_{0 \leq k \leq n} A_k$ .

Величина  $A_{k_0}$  есть гарантированное значение средних удельных затрат. Период проведения плановых предупредительных профилактик  $\tau_0 = y_{k_0} + 0$ , если

$$\begin{aligned} &\frac{c_{a.п} M \gamma_{a.п} \pi_{k_0+1} + \\ &+ c_{п.п} M \gamma_{п.п} (1 - \pi_{k_0+1}) + \\ &+ c_{п.п} \sum_{i=0}^{k_0} (y_{k_0} - y_i) \Delta \pi_i}{y_{k_0} (1 - \pi_{k_0+1}) + \\ &+ \sum_{i=0}^{k_0} y_i \Delta \pi_i} < \\ &\frac{c_{a.п} M \gamma_{a.п} \pi_{k_0+1} + \\ &+ c_{п.п} M \gamma_{п.п} (1 - \pi_{k_0+1}) + \\ &+ c_{п.п} \sum_{i=0}^{k_0} (y_{k_0+1} - y_i) \Delta \pi_i}{y_{k_0+1} (1 - \pi_{k_0+1}) + \\ &+ \sum_{i=0}^{k_0} y_i \Delta \pi_i}, \quad (53) \end{aligned}$$

и  $\tau_0 = y_{k_0+1} - 0$ , если неравенство (53) не выполняется.

Для средней удельной прибыли имеем

$$S(F, G) = \frac{\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} A(x, y) dF(y) dG(x)}{\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} B(x, y) dF(y) dG(x)}, \quad (54)$$

где

$$A(x, y) = \begin{cases} c_0 y - (x - y) c_{п.п} - c_{а.п} M \gamma_{а.п} & \text{при } y < x; \\ c_0 x - c_{п.п} M \gamma_{п.п} & \text{при } y \geq x, \end{cases}$$

а функция  $B(x, y)$  определяется равенством (48).

Вычисляем

$$\max_{G \in \Omega} \min_{F \in \Omega(n, y, \pi)} S(F, G) = S(F_0, G_0).$$

$$\begin{aligned} & y_{k_0} [c_0 (1 - \pi_{k_0+1}) - c_{п.п} \pi_{k_0+1}] + (c_0 + c_{п.п}) \sum_{i=0}^{k_0} y_i \Delta \pi_i - \\ & \frac{-c_{а.п} M \gamma_{а.п} \pi_{k_0+1} - c_{п.п} M \gamma_{п.п} (1 - \pi_{k_0+1})}{y_{k_0} + \pi_{k_0+1} M \gamma_{а.п} + (1 - \pi_{k_0+1}) M \gamma_{п.п}} > \\ & y_{k_0+1} [c_0 (1 - \pi_{k_0+1}) - c_{п.п} \pi_{k_0+1}] + (c_0 + c_{п.п}) \sum_{i=0}^{k_0} y_i \Delta \pi_i - \\ & > \frac{-c_{а.п} M \gamma_{а.п} \pi_{k_0+1} - c_{п.п} M \gamma_{п.п} (1 - \pi_{k_0+1})}{y_{k_0+1} + \pi_{k_0+1} M \gamma_{а.п} + (1 - \pi_{k_0+1}) M \gamma_{п.п}}, \quad (55) \end{aligned}$$

и  $\tau_0 = y_{k_0+1} - 0$ , если неравенство (55) не выполняется.

Методика определения минимаксных периодов проведения плановых предупредительных профилактик и гарантированных значений показателей качества функционирования. Исходные данные для расчета следующие: вектор  $y = (y_0 = 0, y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1} = \infty)$ , вектор  $\pi = (\pi_0 = 0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n, \pi_{n+1} = 1)$ ; математическое ожидание длительности плановой предупредительной профилактики  $M \gamma_{п.п}$ ; математическое ожидание длительности плано-

Экстремальные функции  $F_0(x)$  и  $G_0(x)$  определяются соответственно равенствами (30) и (40).

Для определения  $\tau_0$  необходимо.

1. Вычислить значения последовательности

$$\begin{aligned} A_k = \max_{s=k, k+1} & (y_s [c_0 (1 - \pi_{k+1}) - \\ & - c_{п.п} \pi_{k+1}] + \\ & + (c_0 + c_{п.п}) \sum_{i=0}^k y_i \Delta \pi_i - \\ & - c_{а.п} M \gamma_{а.п} \pi_{k+1} - \\ & - c_{п.п} M \gamma_{п.п} (1 - \pi_{k+1}) \times \\ & \times (y_s + \pi_{k+1} M \gamma_{а.п} + \\ & + (1 - \pi_{k+1}) M \gamma_{п.п})^{-1} \\ & \text{при } 0 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

2. Определить номер  $k_0$ , при котором достигается  $A_{k_0} = \max_{0 \leq k \leq n} A_k$ .

Величина  $A_{k_0}$  есть гарантированное значение средней удельной прибыли. Период проведения плановых предупредительных профилактик  $\tau_0 = y_{k_0} + 0$ , если

вого аварийно-профилактического ремонта  $M \gamma_{а.п}$ ; потери за единицу времени при проведении плановой предупредительной профилактики  $c_{п.п}$ ; потери за единицу времени при проведении планового аварийно-профилактического ремонта  $c_{а.п}$ ; потери за единицу времени простоя в состоянии скрытого отказа  $c_{п.п}$ ; прибыль  $c_0$ , получаемая за единицу времени безотказного функционирования системы; оперативное время  $z$  работы системы, необходимое для выполнения задачи.

Алгоритм вычисления показателей следующий.

Для коэффициента готовности определяем номер  $k_0$  ( $0 \leq k_0 \leq n$ ), при котором достигается максимум функции  $A_k$  (49), и проверяем условие (50); если это условие выполняется, то плановые предупредительные профилактики следует проводить через время  $\tau_0 = y_{k_0} + 0$ . Если не выполняется, то плановые предупредительные профилактики следует проводить через время  $\tau_0 = y_{k_0+1} - 0$ .

Для вероятности выполнения задачи определяем номер  $k_0$  ( $0 \leq k_0 \leq n$ ), для которого  $y_{k_0} - z \leq 0$ ,  $y_{k_0+1} - z > 0$  и максимум функции (51) в точках  $\tau \in \{y_k \pm 0, k = 0, n; y_{l+1} - z, l = k_0, n\}$ ; точка  $\tau_0$ , в которой достигается максимум функции (51), есть период проведения плановых предупредительных профилактик, при котором значение максимума функции (51) есть гарантированное значение вероятности выполнения задачи.

Для средних удельных потерь определяем номер  $k_0$  ( $0 \leq k_0 \leq n$ ), при котором достигается минимум функции (52), и проверяется условие (53); если неравенство (53) выполняется, то плановые предупредительные профилактики следует проводить через время  $\tau_0 = y_{k_0} + 0$ ; если не выполняется, то плановые предупредительные профилактики следует проводить через время  $\tau_0 = y_{k_0+1} - 0$ .

Для средней удельной прибыли определяем номер  $k_0$  ( $0 \leq k_0 \leq n$ ), при котором достигается максимум функции (54), и проверяется неравенство (55); если оно выполняется, то плановые предупредительные профилактики следует проводить через время  $\tau_0 = y_{k_0} + 0$ ; если неравенство (55) не выполняется, то плановые предупредительные профилактики следует проводить через время  $\tau_0 = y_{k_0+1} - 0$ .

**Пример.** Определим гарантированные значения показателей качества функционирования и сроки проведения

плановых предупредительных профилактик системы, для которой заданы следующие характеристики:  $M\gamma_{п.п} = 1$  ч,  $M\gamma_{а.п} = 2$  ч,  $z = 25$  ч,  $c_{п.п} = 1$  ед./ч,  $c_{а.п} = 2$  ед./ч,  $c_{п} = 2$  ед./ч,  $c_0 = 5$  ед./ч,  $y = (y_0 = 0, y_1 = 10$  ч,  $y_2 = 20$  ч,  $y_3 = 30$  ч,  $y_4 = 40$  ч),  $\pi = (\pi_0 = 0, \pi_1 = 0,10, \pi_2 = 0,15, \pi_3 = 0,30, \pi_4 = 0,50)$ .

Коэффициент готовности. Вычисляем значения последовательности (49):  $A_0 = 0,811$ ;  $A_1 = 0,827$ ;  $A_2 = 0,822$ ;  $A_3 = 0,778$ ;  $A_4 = 0,702$ .

Таким образом, получаем, что предупредительную профилактику следует проводить через  $\tau_0 = 20 - 0$  ч, а гарантированное значение коэффициента готовности равно 0,827.

Вероятность выполнения задачи. Определяем номер  $k_0$ . В этом случае  $k_0 = 2$ .

Далее определяем значения функции (51) в точках  $\tau \in \{y_k \pm 0, k = 0, n; y_{l+1} - 0, l = k_0, n\}$ :  $R_0 = 0$ ,  $R_1 = 0,574$ ,  $R_2 = 0,541$ ,  $R_3 = 0,538$ ,  $R_4 = 0,526$ ,  $R_5 = 0,402$ .

Остальные значения можно не вычислять, так как при  $\tau > 20$  знаменатель функции (51) возрастает, числитель постоянен и, следовательно, при  $\tau > 20$  максимума нет.

Из расчетов следует, что гарантированное значение вероятности выполнения задачи равно  $R_0 = 0,574$ , а период плановой предупредительной профилактики  $\tau_0 = 5$  ч.

Средние удельные затраты. Вычисляем значения последовательности (52):  $A_0 = 0,367$ ;  $A_1 = 0,369$ ;  $A_2 = 0,394$ ;  $A_3 = 0,551$ ;  $A_4 = 0,847$ .

Таким образом, плановые предупредительные профилактики следует проводить через время  $\tau_0 = 10 - 0$  ч; при этом гарантированное значение средних удельных потерь равно 0,367 ед./ч.

Средняя удельная прибыль. Вычисляем значения функции (54):  $A_0 = 3,757$ ;  $A_1 = 3,832$ ;  $A_2 = 3,784$ ;  $A_3 = 3,460$ ;  $A_4 = 2,917$ .

Таким образом, гарантированное значение средней удельной прибыли равно 3,832 ед./ч при проведении плановых предупредительных профилактик через время  $\tau_0 = 20 - 0$  ч.

## 10. МИНИМАКСНАЯ СТРАТЕГИЯ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА МОМЕНТЫ

Исследуем стратегию обслуживания системы, в которой мгновенная индикация отказа (см. разд. 4) и плановые предупредительные профилактики назначаются через детерминированный период  $\tau$ :

$$G(x) = \begin{cases} 0 & x \leq \tau; \\ 1 & x > \tau. \end{cases}$$

Случай 1. Обозначим через  $\Omega(\mu_1)$  — множество функций распределения  $F(x)$  с фиксированным математическим ожиданием

$$\mu_1 = M\xi = \int_0^{\infty} x dF(x) = \int_0^{\infty} \bar{F}(x) dx.$$

Для коэффициента готовности  $k_{\Gamma}(F, G)$ , определяемого равенством (16), необходимо вычислить

$$\begin{aligned} \max_{G \in \Omega^*} \min_{F \in \Omega(\mu_1)} k_{\Gamma}(F, G) &= \\ &= k_{\Gamma}(F_0, G_0) \end{aligned}$$

и функции  $F_0(x)$  и  $G_0(x)$ , на которых максимум достигается. Решение имеет вид

$$\begin{aligned} k_{\Gamma}(F_0, G_0) &= \frac{M\xi}{M\xi + M\gamma_{\text{а.п}}} = \\ &= \frac{\mu_1}{\mu_1 + M\gamma_{\text{а.п}}}; \end{aligned}$$

этот максимум достигается при  $\tau_0 = \infty$ ,  $F_0(x) = 1 - e^{-x/\mu_1}$ ,  $x \geq 0$ . Следовательно, минимаксным правилом в ситуации, когда известно лишь математическое ожидание времени безотказной работы, является правило, при котором плановые предупредительные профилактики проводить не следует:  $\tau_0 = \infty$ . Гарантированное значение коэффициента готовности равно  $\mu_1 / (\mu_1 + M\gamma_{\text{а.п}})$ .

Для средних удельных затрат  $C(F, G)$ , определяемых

равенством (17), необходимо вычислить

$$\begin{aligned} \min_{G \in \Omega^*} \max_{F \in \Omega(\mu_1)} C(F, G) &= \\ &= C(F_0, G_0) \end{aligned}$$

и функции  $F_0(x)$  и  $G_0(x)$ , на которых минимакс достигается. Решение имеет вид

$$C(F_0, G_0) = \frac{c_{\text{а.п}} M\gamma_{\text{а.п}}}{\mu_1};$$

этот минимакс достигается при  $\tau_0 = \infty$ ,  $F_0(x) = 1 - e^{-x/\mu_1}$ ,  $x \geq 0$ .

Следовательно, минимаксная стратегия будет совпадать с пассивной стратегией (предупредительная профилактика целесообразна, обновление системы только после отказов), если качество функционирования характеризуется средними удельными затратами.

Для средней удельной прибыли  $S(F, G)$ , определяемой равенством (18), необходимо вычислить

$$\begin{aligned} \max_{G \in \Omega^*} \min_{F \in \Omega(\mu_1)} S(F, G) &= \\ &= S(F_0, G_0) \end{aligned}$$

и функции  $F_0(x)$  и  $G_0(x)$ , при которых максимум достигается. Решение имеет вид

$$S(F_0, G_0) = \frac{c_0 \mu_1 - c_{\text{а.п}} M\gamma_{\text{а.п}}}{\mu_1 + M\gamma_{\text{а.п}}};$$

этот максимум достигается при  $\tau_0 = \infty$  и  $F_0(x) = 1 - e^{-x/\mu_1}$ ,  $x \geq 0$ , если справедливо неравенство

$$\mu_1 \geq \frac{c_{\text{а.п}} - c_{\text{п.п}}}{c_0 + c_{\text{п.п}}} M\gamma_{\text{а.п}}. \quad (56)$$

Следовательно, при выполнении условия (56) минимаксная стратегия, обеспечивающая гарантированное значение средней удельной прибыли, есть пассивная стратегия, при которой плановые предупредительные профилактики проводить нецелесообразно.

Для вероятности выполнения задачи  $R_z(F, G)$  определяемой равенством (14), необходимо вычислить

$$\max_{G \in \Omega^*} \min_{F \in \Omega(\mu_1)} R_z(F, G) = R_z(F_0, G_0)$$

и функции  $F_0(x)$  и  $G(x)$ , на которых максимум достигается. Решение имеет вид

$$R_z(F_0, G_0) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu_1 \leq z, \\ \frac{\mu_1 - z}{\mu_1 + M\gamma_{\text{а.п}}}, & \text{если } \mu_1 > z; \end{cases}$$

этот максимум достигается при  $\tau_0 = \infty$  и на ступенчатой функции  $F_0(x)$ , имеющей две точки роста  $y_1 = z - 0$  и  $y_2 > z$ . Величины скачков  $p_1$  и  $p_2 = 1 - p_1$  определяются из равенства  $\mu_1 = y_1 p_1 + y_2 p_2$ .

Если  $\mu_1 \leq z$ , то при любом  $\varepsilon > 0$  и любом  $\tau$  найдется такая ступенчатая функция распределения  $F(x)$  из множества  $\Omega(\mu_1)$ , для которой

$$R_z(F, \tau) < \varepsilon.$$

Следовательно, при  $\mu_1 > z$  минимаксным правилом проведения предупредительных профилактик, обеспечивающим некоторое гарантированное положительное значение вероятности выполнения задачи, является правило, в соответствии с которым предупредительные профилактики не проводятся, т. е.  $\tau_0 = \infty$ .

При поиске максимума вероятности выполнения задачи экстремальную функцию  $F_0$  определяли из класса ступенчатых функций распределения. В остальных случаях распределение, на котором достигался минимакс (или максимум), являлось экспоненциальным (это связано с методом получения соответствующих результатов).

Случай 2. Обозначим через  $\Omega(\mu_1, \mu_2)$  множество функций распределения  $F(x)$  с фиксированными первыми двумя моментами

$$\mu_1 = M\xi = \int_0^\infty x dF(x) =$$

$$= \int_0^\infty \bar{F}(x) dx \text{ и}$$

$$\mu_2 = M\xi^2 = \int_0^\infty x^2 dF(x),$$

$$\sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2 \geq 0.$$

Для средних удельных затрат  $C(F, G)$ , определяемых равенством (17), необходимо найти

$$\min_{G \in \Omega^*} \max_{F \in \Omega(\mu_1, \mu_2)} C(F, G) = C(F_0, G_0)$$

и функции  $F_0(x)$  и  $G_0(x)$ , на которых минимакс достигается. Если  $\frac{2\sigma}{\mu_1} \geq$

$$\geq 1 - \frac{\bar{\sigma}_{\text{п.п}}}{\bar{\sigma}_{\text{а.п}}}, \text{ то минимаксное правило}$$

проведения восстановительных работ состоит только в проведении неплановых аварийно-профилактических ремонтов, т. е. замен после отказов. Плановые предупредительные профилактики проводить нецелесообразно (период  $\tau_0 = \infty$ ).

Гарантированное значение средних удельных затрат  $C(F_0, G_0) = \frac{\bar{\sigma}_{\text{а.п}}}{\mu_1}$ , достигается оно на функции  $F_0$ , которая является предельной функцией (при  $T \rightarrow \infty$ ) последовательности ступенчатых функций с двумя точками роста

$$\tau_1 = \frac{\bar{\sigma}_{\text{а.п}}}{\bar{\sigma}_{\text{п.п}}} \left( T -$$

$$- \sqrt{\left( T - \frac{\bar{\sigma}_{\text{п.п}}}{\bar{\sigma}_{\text{а.п}}} \mu_1 \right)^2 + \frac{\bar{\sigma}_{\text{п.п}}}{\bar{\sigma}_{\text{а.п}}} \sigma^2} \right),$$

$$\tau_2 = T + \left( 1 - \frac{\bar{\sigma}_{\text{п.п}}}{\bar{\sigma}_{\text{а.п}}} \right) \mu_1 +$$

$$+ \sqrt{\left( T - \frac{\bar{\sigma}_{\text{п.п}}}{\bar{\sigma}_{\text{а.п}}} \mu_1 \right)^2 + \frac{\bar{\sigma}_{\text{п.п}}}{\bar{\sigma}_{\text{а.п}}} \sigma^2}$$

со скачками  $p_1$  и  $p_2$ , которые определяются из условий

$$p_1 \tau_1 + (1 - p_1) \tau_2 = \mu_1 \text{ и } p_2 = 1 - p_1.$$

Предельная функция  $F_0(x)$  имеет одну точку роста. Поэтому нужно говорить не о минимаксе, а о минимуме супремума, т. е. максимум в рассматриваемом множестве  $\Omega(\mu_1, \mu_2)$  при  $\tau_0 = \infty$  не достигается.

Если

$$\frac{2\sigma}{\mu_1} < 1 - \frac{\bar{\sigma}_{п.п}}{\bar{\sigma}_{а.п}},$$

то минимаксное правило проведения плановых предупредительных профилактик состоит в выполнении этих работ через время  $\tau_0$ , в котором достигается минимум функции

$$\min_{T_1 < \tau < T_2} \frac{\bar{\sigma}_{а.п} \sigma^2 + \bar{\sigma}_{п.п} (\mu_1 - \tau)^2}{\tau [\sigma^2 + (\mu_1 - \tau)^2]} =$$

$$= \frac{\bar{\sigma}_{а.п} \sigma^2 + \bar{\sigma}_{п.п} (\mu_1 - \tau_0)^2}{\tau_0 [\sigma^2 + (\mu_1 - \tau_0)^2]},$$

где

$$T_{1,2} = \frac{\mu_1 \left( 1 + \frac{\bar{\sigma}_{п.п}}{\bar{\sigma}_{а.п}} \right)}{2} \pm$$

$$\pm \sqrt{\frac{1}{4} \mu_1^2 \left( 1 - \frac{\bar{\sigma}_{а.п}}{\bar{\sigma}_{п.п}} \right)^2 - \sigma^2}.$$

Величина минимума есть гарантированное значение средних удельных затрат. Достигается она на функции распределения  $F_0(x)$ , имеющей две точки роста

$$\tau_1 = \tau_0, \quad \tau_2 = \frac{\mu_2 - \mu_1 \tau_0}{\mu_1 - \tau_0}$$

со скачками

$$p_1 = \frac{\sigma^2}{\mu_2 - 2\mu_1 \tau_0 + \tau_0^2},$$

$$p_2 = \frac{(\mu_1 - \tau_0)^2}{\mu_2 - 2\mu_1 \tau_0 + \tau_0^2}. \quad (57)$$

Если положить  $c_{а.п}(t) = c_{п.п}(t) \equiv \equiv t$  (т. е.  $c_{а.п} = c_{п.п} = 1$ ,  $\bar{\sigma}_{а.п} = M\gamma_{а.п}$ ,  $\bar{\sigma}_{п.п} = M\gamma_{п.п}$ ), то  $C(F, G) = k_T^{-1}(F, G) - 1$ . Следовательно, для коэффициента готовности остаются справедливыми все результаты, сформулированные для средних удельных затрат при выполнении условий

(57). При этом гарантированное значение коэффициента готовности

$$k_T(F_0, G_0) =$$

$$= \frac{\tau_0 [\sigma^2 + (\mu_1 - \tau_0)^2]}{\sigma^2 (\tau_0 + M\gamma_{а.п}) +$$

$$+ (\tau_0 + M\gamma_{п.п}) (\mu_1 - \tau_0)^2}$$

## 11. МИНИМАКСНАЯ СТРАТЕГИЯ ТЕХНИЧЕСКОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ОШИБОК КОНТРОЛЯ

Описание стратегии и постановка задачи. Задана система, для которой время безотказной работы распределено по закону  $F(x)$ , и пусть этот закон распределения неизвестен, а известно лишь, что  $F(x)$  принадлежит классу распределений положительных случайных величин, т. е.  $F \in \Omega(0, u, \pi) = \Omega$ . Предположим, что для рассматриваемой системы появившийся отказ самостоятельно не проявится, т. е.  $\Phi(x) \equiv 0$ . Система должна эксплуатироваться в течение времени  $T > 0$ . Для определения состояния системы на периоде  $(0, T)$  назначается план проверок  $X_n = (x_0 = 0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1} = T)$ , определяемый возрастающей последовательностью моментов проверок работоспособности. Каждую проверку, длительность которой равна нулю, свяжем с определенными потерями. Обозначим стоимость каждой проверки через  $c$ . Если отказ системы произошел в момент  $\xi$ , а был обнаружен в некоторый момент  $t$ , то потери за простой системы в неработоспособном состоянии  $c_1(t - \xi) = c_1(t - \xi)$ ,  $c_1 > 0$ , при этом потери считаются аддитивными.

Предположим, что система контроля, осуществляющая проверку работоспособности, имеет ошибки двух видов: система контроля может признать с вероятностью  $1 - p$ ,  $0 \leq p \leq 1$  систему работоспособной во время проверки, хотя система уже отказала, система контроля может признать систему неработоспособной с вероятностью  $q$ , хотя она еще не отказала. Предполагается, что эти вероятности

не зависят от прошлого контроля состояний.

Обозначим через  $C(X_n, \xi)$  математическое ожидание потерь, которые будут иметь место, если выбран план  $X_n$ , а отказ системы произойдет в момент  $\xi$ . Из описания задачи следует:

$$C(X_n, \xi) = \left\{ \begin{aligned} & q \sum_{m=1}^k (1-q)^{m-1} (mc + s) + \\ & + (1-q)^k \left\{ p \sum_{m=k+1}^n (1 - \right. \\ & \quad \left. - p)^{m-k-1} \times \right. \\ & \quad \left. \times [mc + c_1(x_m - \xi)] + \right. \\ & \quad \left. + (1-p)^{n-k} [nc + c_1(T - \xi)] \right\} \\ & \text{при } x_k < \xi \leq x_{k+1}, \\ & \quad k = 0, n-1; \\ & \sum_{k=1}^n q (1-q)^{k-1} (kc + s) + \\ & + (1-q)^n [nc + c_1(T - \xi)] \\ & \text{при } x_n < \xi \leq T; \\ & \sum_{k=1}^n (1-q)^{k-1} q (kc + s) + \\ & + (1-q)^n nc \text{ при } \xi > T. \end{aligned} \right. \quad (58)$$

где  $s$  — штраф за признание системы неисправной тогда, когда она находится в работоспособном состоянии.

В формуле (58) и в дальнейшем для любой последовательности  $a_k$  считаем

$$\sum_{k=i}^l a_k = 0, \text{ если } i > l.$$

Следовательно, при  $n = 0$  имеем

$$C(X_0, \xi) = \begin{cases} c_1(T - \xi) & \text{при } 0 < \xi \leq T; \\ 0 & \text{при } \xi > T. \end{cases} \quad (59)$$

Частные случаи, когда  $p$  и  $q$  равны 0 или 1, получаются из равенства (58) предельным переходом. Тогда

математическое ожидание потерь за период  $(0, T)$  будет иметь вид

$$MC(X_n, \xi) = \int_0^T C(X_n, x) dF(x) + C(X_n, T) \bar{F}(T). \quad (60)$$

Задача заключается в определении такого плана  $X^*$ , при котором достигается минимум потерь при наилучшем возможном выборе функции  $F(x)$ , т. е.

$$C^*(X^*) = \min_{X_n} \max_{F \in \Omega} MC(X_n, \xi). \quad (61)$$

Решение задачи. Определяется такой номер  $N$  ( $N \geq 0$ ), для которого  $\Delta_N \geq 0, \Delta_{N+1} < 0$ , где

$$\Delta_N = \frac{T - \frac{s}{c_1} [1 - (1-q)^N] - \frac{1}{c_1 q^2} (spq + cp - cq) \times [Nq - 1 + (1-q)^N]}{1 + \frac{p-q}{q} [1 - (1-q)^N]}. \quad (62)$$

В области  $[0, N]$  определяются все целые  $n_k, k = 1, 2, \dots, m$ , для которых

$$\alpha_1 n_k + (1-q)^{n_k} \alpha_2 + \alpha_3 \leq 0,$$

$$\alpha_1 (n_k + 1) + (1-q)^{n_k+1} \alpha_2 + \alpha_3 > 0,$$

где

$$\alpha_1 = pq(spq - cq + cp),$$

$$\alpha_2 = (p - q)(spq - cq + cp),$$

$$\alpha_3 = spq(q - p) - c_1 T p q^2 + cp(2q - p).$$

Для каждого фиксированного  $n_k$  ( $k = 0, 1, \dots, m+1$ ) вычисляется

$$\beta_{n_k} = \sum_{n=1}^{n_k} q (1-q)^n (nc + s) +$$

$$+ (1-q)^{n_k} n_k c + c_1 (1-q)^{n_k} \Delta_{n_k},$$

где величина  $\Delta_{n_k}$  определяется равенством (62), причем  $n_0 = 0, n_{m+1} = N$ .

Среди полученных значений  $(\beta_{n_0}, \beta_{n_1}, \dots, \beta_{n_m}, \beta_N)$  выбирается минимум  $\beta_{n_{k_0}} = \min_{0 \leq k \leq m+1} \beta_{n_k}$ , определяется номер  $n_{k_0}$ , для которого этот минимум достигается.

Если  $p \neq q$ , вычисляется последовательность  $x_1, x_2, \dots, x_{n_{k_0}}$  по формуле

$$x_k = x_{k-1} + \Delta_{k-1}, k = 1, 2, \dots, n_{k_0},$$

где

$$x_0 = 0;$$

$$\Delta_{k-1} = \frac{spq}{c_1} + \frac{c}{c_1} (p - q) +$$

$$+ (1 - q) \Delta_k \text{ при } k = \overline{1, n_{k_0} - 1};$$

$$\Delta_{n_{k_0} - 1} = \frac{sp}{c_1} + (p - q) \Delta_{n_{k_0}}.$$

Здесь  $\Delta_{n_{k_0}}$  определяется равенством (62) при  $N = n_{k_0}$ .

Если  $p = q$ , то

$$\Delta_k = \frac{sq}{c_1}, k = 0, 1, \dots, n_{k_0} - 1;$$

$$\Delta_{n_{k_0}} = T - \frac{n_{k_0}sq}{c_1}.$$

Величина  $\beta_{n_{k_0}}$  есть гарантированное значение средних затрат,  $n_{k_0}$  есть минимаксный объем проверок,  $X^* = (x_1, \dots, x_{n_{k_0}})$  — план проверок, который обеспечивает величину затрат.

Частный случай. Пусть  $q = 0$ , т. е. работоспособная система с вероятностью, равной нулю, принимается за неработоспособную.

Решение задачи:

определяется номер  $N (N \geq 0)$ , для которого  $\Delta_N \geq 0, \Delta_{N+1} < 0$ , где

$$\Delta_N = \frac{T - \frac{cp}{c_1} \frac{N(N-1)}{2}}{1 + Np};$$

в области  $[0, N]$  определяется целое число  $k_0$ , для которого

$$k_0^2 + k_0 \frac{2-p}{p^2} + \frac{2(c - c_1 T p)}{cp^2} \leq 0,$$

$$(k_0 + 1)^2 + (k_0 + 1) \frac{2-p}{p^2} + \frac{2(c - c_1 T p)}{cp^2} > 0$$

(при  $c \geq c_1 T p, k_0 = 0$ );

определяем моменты проверок (план  $X^*$ ):

$$x_0 = 0;$$

$$x_i = ip \left\{ \frac{T}{pk_0 + 1} - \right.$$

$$\left. - \frac{c}{2c_1} \frac{k_0(k_0 + 1)p + 2}{2c_1 pk_0 + 1} - \right.$$

$$\left. - \frac{i+1}{2} - \frac{c}{c_1} \right\},$$

$$i = 1, 2, \dots, k_0;$$

вычисляем гарантированную величину затрат

$$C^*(X^*) =$$

$$= \frac{c_1 T + \frac{k_0 c}{2} [p(k_0 + 1) + 2]}{pk_0 + 1}.$$

## Глава 7. Модели технического обслуживания системы с учетом ее структуры

### 1. МОДЕЛЬ ТЕХНИЧЕСКОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ДВУХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО СОЕДИНЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ (ПОДСИСТЕМ)

Описание стратегии технического обслуживания. Постановка задачи. Исследуем систему, состоящую из двух последовательно соединенных подсистем. Функции распределения времен  $\xi_i$  ( $i = 1, 2$ ) безотказной работы каждой подсистемы обозначим через  $F_i(x) = P(\xi_i < x)$ . Отказ наступает тогда, когда отказывает хотя бы одна подсистема, и появившийся отказ проявляется мгновенно. Предположим, что вмешиваться в работу системы и проводить восстановительные работы можно только в моменты отказа системы, причем при восстановлении обязательно заменяется на новую отказавшая подсистема, а работоспособная подсистема обновляется, если в момент отказа ее наработка больше заданной величины. Величина  $\theta_i^{(i)}$  наработки  $i$ -й подсистемы ( $i = 1, 2$ ) в момент  $t$  есть функция, обладающая следующими свойствами:

величина  $\theta_i^{(i)} = 0$ , если в момент  $t$  обновлена  $i$ -я подсистема;

в интервалах работы  $i$ -й подсистемы функция  $\theta_i^{(i)}$  — линейно возрастает с коэффициентом, равным единице;

в интервалах восстановления  $\theta_i^{(i)}$  остается постоянной, если восстанавливается подсистема  $j \neq i$ ;

в интервалах восстановления  $\theta_i^{(i)} = \infty$ , если восстанавливается  $i$ -я подсистема.

Если в момент  $t$  отказала  $i$ -я подсистема ( $i = 1, 2$ ) и наработка неотказавшей  $j$ -й подсистемы ( $i \neq j$ ) больше  $\tau_j$ ,  $\theta_j^{(j)} \geq \tau_j$ , то проводится неплановый аварийно-профилактический ремонт всей системы (обновляются отказавшая и неотказавшая подсистемы). Если  $\theta_j^{(j)} < \tau_j$ , то проводится обновление только отказавшей подсистемы, т. е. проводится частичное обновление системы. Обозначим через  $\gamma_{\text{а.п}}$  длительность непланового аварийно-профилактического ремонта, через  $\gamma_i$  длительность обновления  $i$ -й подсистемы, через  $M\gamma_{\text{а.п}}$ ,  $M\gamma_i$ ,  $i = 1, 2$  — математические ожидания этих случайных величин.

Обозначим через  $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$  моменты начала восстановительных работ.

Процесс  $\xi(t) = (x, i)$  при  $t_k \leq t < t_{k+1}$ , если  $\theta_i^{(i)} = x$ ,  $i = 1, 2$ ,  $x \geq 0$  определяет эволюцию системы во времени; он является полумарковским, и задача формулируется как задача управления полумарковским процессом с несчетным множеством состояний.

Задача заключается в определении функционалов качества функционирования и выборе параметров  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , обеспечивающих экстремальное значение этих функционалов.

Формулы для определения значений коэффициента готовности показателей качества. Для коэф- | ф и ц и е н т а г о т о в н о с т и  
показателей качества. Для коэф- | имеем

$$k_{\Gamma}(\tau_1, \tau_2) = \frac{\sum_{\substack{i=1 \\ k \neq i}}^2 \left\{ \int_{\tau_i}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \bar{F}_i(y) \bar{F}_k(y) dy \right] p(x, i) dx + \int_0^{\tau_i} \left[ \frac{1}{\bar{F}_i(x)} \int_0^{\infty} \bar{F}_i(x+y) \bar{F}_k(y) dy \right] p(x, i) dx \right\}}{\sum_{\substack{i=1 \\ k \neq i}}^2 \left\{ \int_{\tau_i}^{\infty} \left[ M\gamma_{a.п} + \int_0^{\infty} \bar{F}_i(y) \bar{F}_k(y) dy \right] p(x, i) dx + \int_0^{\tau_i} \left[ M\gamma_k + \frac{1}{\bar{F}_i(x)} \int_0^{\infty} \bar{F}_i(x+y) \bar{F}_k(y) dy \right] p(x, i) dx \right\}}, \quad (1)$$

где

$$p(x, i) = \frac{\bar{F}_i(x) \tilde{p}(x, i)}{\sum_{k=1}^2 \int_0^{\infty} \bar{F}_k(y) \tilde{p}(y, k) dy}; \quad (2)$$

$$\tilde{p}(x, i) = f_j(x) + \int_0^{\tau_i} \tilde{p}(y, i) \times \begin{cases} \times f_j(x-y) dy + \\ + \int_0^{\tau_j} \tilde{p}(y, j) f_j(x+y) dy, \\ i = 1, 2; j \neq i; \end{cases} \quad (3)$$

$f_j(x) = F_j'(x)$  — плотность распределения времени безотказной работы  $j$ -й подсистемы,  $j = 1, 2$ .  
Для средних удельных потерь имеем

$$C(\tau_1, \tau_2) = \frac{\sum_{i=1}^2 \left( c_{a.п} M\gamma_{a.п} \int_{\tau_i}^{\infty} p(x, i) dx + c_i M\gamma_i \int_0^{\tau_i} p(x, i) dx \right)}{\sum_{\substack{i=1 \\ k \neq i}}^2 \left\{ \int_{\tau_i}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \bar{F}_i(y) \bar{F}_k(y) dy \right] p(x, i) dx + \int_0^{\tau_i} \left[ \frac{1}{\bar{F}_i(x)} \int_0^{\infty} \bar{F}_i(x+y) \bar{F}_k(y) dy \right] p(x, i) dx \right\}}, \quad (4)$$

где функция  $p(x, i)$  определяется равенством (2), в котором  $\tilde{p}(x, i)$  есть решение интегрального уравнения (3);  $c_{a.п}$  — потери за единицу времени

проведения непланового аварийно-профилактического ремонта;  $c_i$  — потери за единицу времени проведения непланового аварийно-профилактического ремонта  $i$ -й подсистемы,  $i = 1, 2$ .

Для средней удельной прибыли имеем

$$S(\tau_1, \tau_2) = \frac{\sum_{\substack{i=1 \\ k \neq i}}^2 \left\{ \int_{\tau_i}^{\infty} \left[ c_0 \int_0^{\infty} \bar{F}_i(y) \bar{F}_k(y) dy - c_{\text{а.п}} M \gamma_{\text{а.п}} \right] \rho(x, i) dx + \int_0^{\tau_i} \left[ c_0 \frac{1}{\bar{F}_i(x)} \int_0^{\infty} \bar{F}_i(x+y) \bar{F}_k(y) dy - c_i M \gamma_i \right] \rho(x, i) dx \right\}}{\sum_{\substack{i=1 \\ k \neq i}}^2 \left\{ \int_{\tau_i}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \bar{F}_i(y) \bar{F}_k(y) dy + M \gamma_{\text{а.п}} \right] \rho(x, i) dx + \int_0^{\tau_i} \left[ \frac{1}{\bar{F}_i(x)} \int_0^{\infty} \bar{F}_i(x+y) \bar{F}_k(y) dy + M \gamma_i \right] \rho(x, i) dx \right\}}, \quad (5)$$

где  $\rho(x, i)$  определяется равенством (2), в котором  $\bar{p}(x, i)$  есть решение интегрального уравнения (3);  $c_0$  — прибыль за единицу времени исправного функционирования системы.

Частный случай обслуживания двух одинаковых последовательно соединенных подсистем. Для коэффициента готовности имеем

$$k_T(\tau) = \frac{\int_0^{\tau} \rho(x) \frac{1}{\bar{F}(x)} \int_0^{\infty} \bar{F}(y) \bar{F}(x+y) dy dx + \int_{\tau}^{\infty} \rho(x) \int_0^{\infty} \bar{F}^2(y) dy dx}{\int_0^{\tau} \rho(x) \left[ \frac{1}{\bar{F}(x)} \int_0^{\infty} \bar{F}(y) \bar{F}(x+y) dy + M \gamma_{\text{а.п}} \right] dx + \int_{\tau}^{\infty} \rho(x) \left[ \int_0^{\infty} \bar{F}^2(y) dy + M \gamma \right] dx}, \quad (6)$$

$$\text{где } \rho(x) = \frac{\tilde{p}(x, \tau) \bar{F}(x)}{\int_0^{\infty} \tilde{p}(y, \tau) \bar{F}(y) dy}; \quad (7)$$

функция  $\tilde{p}(x, \tau)$  есть решение интегрального уравнения

$$\tilde{p}(x, \tau) = f(x) + \int_0^{\tau} \rho(y, \tau) \times$$

$$\times [f(x-y) + f(x+y)] dy; \quad (8)$$

$M\gamma$  — математическое ожидание длительности непланового аварийно-профилактического ремонта одной подсистемы;  $F(x) = F_1(x) = F_2(x)$  — функция распределения времени безотказной работы одной подсистемы;  $f(x) = F'(x)$  — плотность этого распределения.

Для средних удельных потерь имеем

$$C(\tau) = \frac{cM\gamma \int_0^\tau p(x) dx + c \frac{M\gamma}{a.п} \int_\tau^\infty p(x) dx}{\int_0^\tau p(x) \frac{1}{\bar{F}(x)} \int_0^\infty \bar{F}(y) \bar{F}(x+y) dy dx + \int_\tau^\infty p(x) \int_0^\infty \bar{F}^2(y) dy dx}, \tag{9}$$

где  $p(x)$  определяется равенством (7), а  $\bar{p}(x, \tau)$  есть решение интегрального уравнения (8); константа  $c$  есть потери за единицу времени непланового

аварийно-профилактического ремонта одной подсистемы.

Для средней удельной прибыли имеем

$$S(\tau) = \frac{\int_0^\tau p(x) \left[ \frac{c_0}{\bar{F}(x)} \int_0^\infty \bar{F}(y) \bar{F}(x+y) dy - cM\gamma \right] dx + \int_\tau^\infty p(x) \left[ c_0 \int_0^\infty \bar{F}^2(y) dy - c \frac{M\gamma}{a.п} \right] dx}{\int_0^\tau p(x) \left[ \frac{1}{\bar{F}(x)} \int_0^\infty \bar{F}(y) \bar{F}(x+y) dx + M\gamma \right] dx + \int_0^\infty p(x) \left[ \int_0^\infty \bar{F}^2(y) dy + M\gamma \frac{1}{a.п} \right] dx} \tag{10}$$

Решение интегрального уравнения (8). Основная трудность реализации алгоритма вычисления показателей качества функционирования заключается в решении уравнения (8).

Метод последовательных приближений. Обозначим

$$\bar{p}(t, \tau) = \begin{cases} \bar{p}'(t, \tau) & \text{при } t \leq \tau; \\ \bar{p}''(t, \tau) & \text{при } t > \tau. \end{cases}$$

Тогда из (8) имеем

$$\bar{p}'(t, \tau) = f(t) + \int_0^\tau f(t+x) \times \bar{p}'(x, \tau) dx + \int_0^t f(t-x) \bar{p}'(x, \tau) dx \tag{11}$$

при  $t \leq \tau$ ;

$$\bar{p}''(t, \tau) = f(t) + \int_0^\tau [f(t+x) +$$

$$+ f(t-x)] \bar{p}'(x, \tau) dx$$

$$\text{при } t > \tau. \tag{12}$$

Строится последовательность функций

$$\begin{aligned} \bar{p}'_{n+1}(t, \tau) &= f(t) + \int_0^\tau f(t+x) \times \\ &\times \bar{p}'_n(x, \tau) dx + \int_0^t f(t-x) \bar{p}'_n(x, \tau) dx \\ &\text{при } t \leq \tau, n = 1, 2, \dots, \\ \bar{p}'_0(t, \tau) &\equiv 0. \end{aligned} \tag{13}$$

**Т е о р е м а.** Если плотность  $f(t) = F'(t)$  ограничена и  $F(2\tau) = q < 1$ , то последовательность функций  $\bar{p}'_n(t, \tau)$ , определяемых равенством (13), равномерно сходится к решению интегрального уравнения (11) и это решение единственно.

*Алгебраический метод.* Если каждая подсистема состоит из элементов

с экспоненциальными распределениями времен безотказной работы и они соединены последовательно-параллельно, то

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\mathcal{K}} Q_{v_k}(t) e^{-\lambda_k t}, \quad (14)$$

$$\text{где } Q_{v_k}(t) = \sum_{i=0}^{v_k} a_i^{(k)} t^i -$$

многочлены степени  $v_k$ .

Тогда решение уравнения (11) имеет вид

$$\bar{v}'(t, \tau) = \sum_{l=1}^L P_{s_l}(t) e^{-\mu_l t}, \quad (15)$$

где  $\mu_l$  — корни уравнения

$$\sum_{k=1}^{\mathcal{K}} \sum_{i=0}^{v_k} a_i^{(k)} \frac{t^i}{(\lambda_k + z)^{i+1}} = 1; \quad (16)$$

$$P_{s_l}(t) = \sum_{i=0}^{s_l} b_i^{(l)} t^i$$

— многочлен степени  $s_l$ ;  $s_l + 1$  — кратность корня  $\mu_l$ ; коэффициенты  $b_i^{(l)}$  определяются как решение алгебраической системы уравнений

$$\sum_{l=1}^L \sum_{i=0}^{s_l} b_i^{(l)} \left\{ \sum_{s=n}^{v_k} C_s^n a_s^{(k)} \left[ \frac{1}{(\mu_l - \lambda_k)^{l+s-n+1}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{(\mu_l + \lambda_k)^{l+s-n+1}} - e^{-(\lambda_k + \mu_l)\tau} \left( \frac{\tau^{l+s-n}}{\lambda_k + \mu_l} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \sum_{m=1}^{l+s-n} \frac{(i+s-n)! \tau^{l+s-m-n}}{(i+s-n-m)! (\lambda_k + \mu_l)^{m+1}} \right) \right] \right\} = -a_n^{(k)}, \\ k = 1, 2, \dots, \mathcal{K}; \quad n = 0, 1, \dots, v_k. \quad (17)$$

Методика определения оптимальной величины наработки и оптимальных величин показателей качества (две равнонадежные подсистемы). Исходные данные для расчета:

функция распределения времени безотказной работы одной подсистемы  $F(t)$ ,  $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$ ;

плотность распределения  $f(t) = F'(t)$ ;

математическое ожидание длительности непланового аварийно-профилактического ремонта одной подсистемы  $M\tau_{a.п}$  и всей системы  $M\tau_{a.п}$ ;

потери за единицу времени проведения непланового аварийно-профилактического ремонта одной подсистемы  $c_{a.п}$  и всей системы  $c_{a.п}$ ;

прибыль за единицу времени исправного функционирования системы  $c_0$ .

Алгоритм определения показателей качества при произвольной плотности  $f(t)$ :

при фиксированном  $\tau$  находится решение интегрального уравнения (11) для  $t \leq \tau$  итерационным методом [см. равенства (13)]; при  $t > \tau$  искомая функция определяется равенством (12); вычисляется функция  $p(x)$  по формуле (7);

находится коэффициент готовности по формуле (6), средние удельные затраты — по формуле (9), средняя удельная прибыль — по формуле (10);

перебирая различные  $\tau$ , определяются экстремальные значения показателей качества и величины оптимальных наработок, при которых эти экстремальные значения достигаются.

Алгоритм определения показателей качества для случая, когда плотность

1. Исходные данные для расчета показателей качества

$\bar{F}(t)$	$f(t)$	$M\gamma_{\text{а.п}}$	$M\gamma$
$2e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}$	$2\lambda e^{-\lambda t} - 2\lambda e^{-2\lambda t},$ $\mathcal{K} = 2,$ $v_1 = v_2 = 0,$ $\lambda_1 = \lambda,$ $\lambda_2 = 2\lambda,$ $a_0^{(1)} = 2\lambda,$ $a_0^{(2)} = -2\lambda$	$\frac{1}{2\lambda}$	$\frac{1}{8\lambda}$

распределения  $f(t)$  определяется равенством (14):

при заданных  $\lambda_k, a_i^{(k)}$  и  $v_k, k = \overline{1, \mathcal{K}}, i = \overline{0, \mathcal{K}}$  определяются корни уравнения (16) (необходимо вычислить  $\mathcal{K} + \sum_{k=1}^{\mathcal{K}} v_k$  корней с учетом их кратности), которые обозначаем  $z_l = -\mu_l$  (кратность  $s_l + 1, l = 1, 2, \dots, L$ , где  $L$  — число различных корней уравнения (16));

находятся величины  $b_l^{(i)}$  как решение системы алгебраических уравнений (17);

при  $t \leq \tau$  полагаем  $\tilde{p}'(t, \tau) =$

$$= \sum_{l=1}^L \left( \sum_{i=0}^{s_l} b_l^{(i)} t^i \right) e^{-\mu_l t},$$

при  $t > \tau$  функция  $\tilde{p}''(t, \tau)$  определяется равенством (12); определяется функция  $p(x)$  по формуле (7).

Далее осуществляется переход к алгоритму, описанному выше.

Пример. Пусть каждая подсистема есть дублированная система с нагруженным резервом и каждый элемент имеет экспоненциальное распределение времени безотказной работы с параметром  $\lambda$  (табл. 1).

Решение задачи. Уравнение (16) имеет вид  $z(z + 3\lambda) = 0$ . Значит,  $\mu_1 = 0, \mu_2 = 3\lambda, s_1 = s_2 = 0, L = 2$ . Система уравнений (17) имеет вид

$$\begin{aligned} & \lambda^{-1} e^{-\lambda \tau} b_0^{(1)} + \\ & + \left( \frac{1}{4\lambda} e^{-\lambda \tau} - \frac{3}{4\lambda} \right) b_0^{(2)} = 1, \\ & \frac{\lambda^{-2}}{2} e^{-2\lambda \tau} b_0^{(1)} + \\ & + \left( \frac{1}{5\lambda} e^{-4\lambda \tau} - \frac{6}{5\lambda} \right) b_0^{(2)} = 1. \end{aligned}$$

Определяем решение системы

$$\begin{aligned} b_0^{(1)} &= \lambda^{-1} D^{-1} \left( -\frac{9}{20} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} e^{-4\lambda \tau} + \frac{1}{5} e^{-5\lambda \tau} \right), \\ b_0^{(2)} &= \lambda^{-1} D^{-1} \left( e^{-\lambda \tau} - \frac{1}{2} e^{-2\lambda \tau} \right), \end{aligned}$$

где  $D$  — определитель системы алгебраических уравнений. Определяем функцию  $\tilde{p}'(t, \tau)$  по формуле (15) при  $0 \leq t \leq \tau$ :

$$\tilde{p}(t, \tau) = b_0^{(1)} + b_0^{(2)} e^{-3\lambda t}.$$

Вычисляем функцию  $\tilde{p}''(t, \tau)$  по формуле (12):

$$\begin{aligned} \tilde{p}''(t, \tau) &= b_0^{(1)} (2e^{-\lambda(t-\tau)} - \\ & - e^{-2\lambda(t-\tau)}) + b_0^{(2)} e^{-\lambda(t+\tau)} \times \\ & \times (2e^{-\lambda t} - e^{-\lambda \tau}). \end{aligned}$$

Подставляем найденные функции в (6):

$$k_T(\tau) = \left[ 1 + \frac{\lambda M \gamma_{\text{а.п}} (-12e^{-6\lambda \tau} - 60e^{-2\lambda \tau} + 192e^{-\lambda \tau}) + \lambda M \gamma (24e^{-6\lambda \tau} - 96e^{-5\lambda \tau} + 120e^{-4\lambda \tau} + 120e^{-2\lambda \tau} - 384e^{-\lambda \tau} + 216)}{11e^{-6\lambda \tau} - 72e^{-5\lambda \tau} + 90e^{-4\lambda \tau} + 15e^{-2\lambda \tau} - 96e^{-\lambda \tau} + 162} \right]^{-1}$$

Обозначим  $\alpha = \frac{M\gamma}{M\gamma_{a.п}} = 0,25$  и

$$\mathcal{P}(x) = \frac{\alpha(24x^6 - 96x^5 + 120x^4 + 120x^3 - 384x^2 + 216) + (-12x^6 - 60x^3 + 192x)}{11x^6 - 72x^5 + 90x^4 + 15x^3 - 96x^2 + 162}.$$

Тогда

$$k_T(\tau) = \frac{1}{1 + \lambda M\gamma_{a.п} \mathcal{P}(e^{-\lambda\tau})} \quad \text{и}$$

максимум функции  $k_T(\tau)$  достигается в точке минимума функции  $\mathcal{P}(x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $x = e^{-\lambda\tau}$ .

$$\text{При } \alpha = \frac{1}{4} \quad \min_{0 \leq x \leq 1} \mathcal{P}(x) = \mathcal{P}(0).$$

Следовательно,  $\tau_0 = \infty$  и

$$\max_{\tau} k_T(\tau) = k_T(\infty) = 0,9375.$$

## 2. ОБСЛУЖИВАНИЕ $N$ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО СОЕДИНЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Описание стратегии технического обслуживания. Постановка задачи. Пусть система состоит из  $N$  различных последовательно соединенных элементов. Отказ системы наступает при отказе хотя бы одного элемента. Предполагается, что появившийся отказ проявляется мгновенно.

Предположим, что в системе возможно проведение неплановых предупредительных профилактик, полностью обновляющих систему, и неплановых аварийных ремонтов (замена отказавшего элемента на новый).

Устанавливается следующий порядок проведения восстановительных работ по наработке системы, которая в нулевой момент времени и в моменты обновления системы равна нулю; в периоды, когда система работает, она линейно возрастает с коэффициентом, равным единице; в периоды, когда проводится неплановый аварийный ремонт какого-то элемента, она постоянна (равна наработке в начале этого периода); в период проведения неплановой предупредительной профилактики условно она равна бесконечности.

В начале эксплуатации при  $t = 0$  назначается проведение неплановой предупредительной профилактики в момент времени, когда наработка системы достигнет величины  $\eta$ , распределенной по закону  $G(x) = P(\eta < x)$ . Если до назначенного момента произошел отказ системы (отказ одного элемента), то обновляется этот отказавший элемент, после чего процесс эксплуатации продолжается. Так поступают до тех пор, пока наработка системы не достигнет величины  $\eta$ . В этот момент начинается неплановая предупредительная профилактика, после окончания которой система полностью обновлена и весь процесс обслуживания повторяется заново.

Эволюция системы может быть описана регенерирующим случайным процессом

$$x(t) = \begin{cases} e_0, & \text{если в момент } t \text{ система работоспособна;} \\ e_1, & \text{если в момент } t \text{ в системе проводится неплановый аварийный ремонт элемента;} \\ e_2, & \text{если в момент } t \text{ в системе проводится неплановая предупредительная профилактика,} \end{cases}$$

и задача может быть сформулирована как задача управления регенерирующим случайным процессом.

Задача управления при полной информации о надежности элементов системы состоит в том, чтобы определить зависимость показателей качества функционирования от функции  $G(x)$ , определяющей периодичность проведения неплановых предупредительных профилактик, и найти функцию  $G_0(x)$ , при которой этот показатель принимает экстремальное значение.

Задача управления при неполной информации о надежности элементов состоит в том, чтобы определить значение максимина для показателя качества функционирования

$$\max_{G \in \Omega} \min_{F_i \in \Omega_i, i=\overline{1, N}} I(G, F_1, F_2, \dots, F_N)$$

и значения функций  $G_0(x)$ , и  $F_i^{(0)}(x)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , при которых этот максимум достигается.

Здесь  $I(G, F_1, F_2, \dots, F_N)$  — функционал, определяющий качество функционирования системы;  $F_i(x)$  — функции распределения времени безотказной работы  $i$ -го элемента системы,  $i = \overline{1, N}$ ;  $\Omega_i = \Omega(n_i, y_i, \pi_i)$  — множество функций распределения, которые в заданных точках  $y_i = (y_{i0} = 0, y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in_i}, y_{in_i+1} = \infty)$  принимают заданные значения  $\pi_i = (\pi_{i0} = 0, \pi_{i1}, \pi_{i2}, \dots, \pi_{in_i}, \pi_{in_i+1} = 1)$ .

Величина максимина дает гарантированное значение показателя качества, а функция  $G_0(x)$  определяет периодичность проведения предупредительных профилактик, при которой он достигается.

Решение задачи оптимизации при полной информации о надежности элементов. Так как для регенерирующего процесса все показатели качества функционирования являются дробно-линейными функционалами относительно функции  $G(x)$ , то в соответствии с общей теорией (см. т. 2) оптимальную функцию  $G_0(x)$  можно искать в классе вырожденных функций распределения

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq \tau; \\ 1 & \text{при } x > \tau. \end{cases}$$

Формулы для определения значений показателей качества следующие:

коэффициент готовности

$$k_T(\tau) = \frac{\tau}{\tau + M\gamma_{\text{п.п}} + \sum_{i=1}^N T_i H_i(\tau)}, \quad (18)$$

где  $M\gamma_{\text{п.п}}$  — математическое ожидание длительности неплановой предупредительной профилактики;  $T_i$  — математическое ожидание непланового аварийно-профилактического ремонта  $i$ -го элемента; функция  $H_i(x)$  определяется как решение интегрального уравнения восстановления

$$H_i(t) = F_i(t) + \int_0^t F_i(t-x) dH_i(x), \quad (19)$$

где  $F_i(x) = P(\xi_i < x)$  — функция распределения времени  $\xi_i$  безотказной работы  $i$ -го элемента системы,  $i = \overline{1, N}$ ;

средние удельные затраты

$$C(\tau) = \frac{c_{\text{п.п}} M\gamma_{\text{п.п}} + \sum_{i=1}^N c_i T_i H_i(\tau)}{\tau}, \quad (20)$$

где  $c_{\text{п.п}}$  — затраты за единицу времени проведения неплановой предупредительной профилактики,  $c_i$  — затраты за единицу времени проведения непланового аварийного ремонта  $i$ -го элемента;

средняя удельная прибыль

$$S(\tau) = \frac{c_0 \tau - \left[ c_{\text{п.п}} M\gamma_{\text{п.п}} + \sum_{i=1}^N c_i T_i H_i(\tau) \right]}{\tau + M\gamma_{\text{п.п}} + \sum_{i=1}^N T_i H_i(\tau)}, \quad (21)$$

где  $c_0$  — прибыль, получаемая за единицу времени исправного функционирования системы;

вероятность выполнения задачи

$$R_z(\tau) = \frac{\int_0^\tau \prod_{k=1}^N \left[ \bar{F}_k(x+z) + \int_0^x \bar{F}_k(x+z-y) dH_k(y) \right] dx}{\tau + M\gamma_{\text{п.п}} + \sum_{i=1}^N T_i H_i(\tau)}, \quad (22)$$

где  $z$  — время выполнения задачи; функция  $H_i(x)$  есть решение интегрального уравнения восстановления (19).

Алгоритм решения задачи сводится к решению интегрального уравнения восстановления (19) и определению максимума функций (18), (21) и (22) и минимума функции (20) и точек  $\tau_0$ , в которых эти экстремумы достигаются.

В табл. 2 приведены расчетные формулы для определения оптимальных периодов  $\tau_0$  и экстремальных значений показателей.

Методика определения оптимальной величины наработки и оптимальные величины показателей качества. Исходные данные для расчета:

функция распределения времени безотказной работы каждого элемента  $F_k(t) = P(\xi_k < t)$  или  $\bar{F}_k(t) = 1 - F_k(t)$ ;  $k = \overline{1, N}$ ;

математическое ожидание времени безотказной работы каждого элемента

$$M\xi_k = \int_0^{\infty} \bar{F}_k(x) dx, \quad k = \overline{1, N};$$

математическое ожидание времени непланового аварийного ремонта элемента  $T_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ ;

математическое ожидание длительности неплановой предупредительной профилактики  $M\gamma_{\text{п. п.}}$ ;

потери за единицу времени при проведении непланового аварийного ремонта  $i$ -го элемента  $c_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ ;

потери за единицу времени при проведении неплановой предупредительной профилактики всей системы  $c_{\text{п. п.}}$ ;

прибыль, получаемая за единицу времени безотказной работы системы,  $c_0$ ;

оперативное время, необходимое для выполнения задачи,  $z$ .

Определяются функции  $H_k(t)$  как решения интегральных уравнений

$$H_k(t) = F_k(t) + \int_0^t F_k(t-x) dH_k(x),$$

$$k = 1, 2, \dots, N.$$

Это можно сделать с помощью преобразования Лапласа

$$H_k^*(s) = \frac{F_k^*(s)}{1 - F_k^*(s)},$$

где

$$F_k^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dF_k(t),$$

$$H_k^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dH_k(t).$$

Оптимальная периодичность проведения неплановых предупредительных профилактик  $\tau_0$  — детерминированная величина. Расчет значений показателей качества функционирования в зависимости от периодичности  $\tau$  проводится по формулам (18), (20)—(22). Формулы для определения оптимальной периодичности  $\tau_0$  и оптимальных значений показателей качества приведены в табл. 2.

Пример. Определим оптимальные значения показателей качества и оптимальную периодичность для системы, у которой следующие исходные характеристики:  $N = 1$ ;  $F_1(t) = (1 - e^{-\lambda t})^2$ ;  $\lambda = 10^{-2}$  1/ч;  $T_1 = 10$  ч;  $M\gamma_{\text{п. п.}} = 1$  ч;  $c_1 = 2$  ед./ч;  $c_{\text{п. п.}} = 1$  ед./ч;  $c_0 = 3$  ед./ч;  $z = 2$  ч.

Определяем

$$F_1^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dF_1(t) =$$

$$= \frac{2\lambda}{s + \lambda} - \frac{2\lambda}{s + 2\lambda};$$

$$H_1^*(s) = \frac{F_1^*(s)}{1 - F_1^*(s)} =$$

$$= \frac{2\lambda^2}{s(s + 3\lambda)} = \frac{2\lambda}{3s} - \frac{2\lambda}{3(s + 3\lambda)};$$

$$H_1(t) = \frac{2}{3} \lambda t - \frac{2\lambda}{3} \frac{1 - e^{-3\lambda t}}{3\lambda};$$

$$H_1^{\prime}(t) = \frac{2}{3} \lambda (1 - e^{-3\lambda t}).$$

Для коэффициента готовности, подставив исходные данные в уравнение из табл. 2, получим

$$\frac{9}{2} \frac{M\gamma_{\text{п. п.}}}{T_1} = 1 - e^{-3\lambda\tau} (1 + 3\lambda\tau).$$

2. Расчетные формулы для определения оптимальных периодов предупредительной профилактики  $\tau_0$  и экстремальных значений показателей качества

Показатель	Уравнение для определения оптимального периода	Формула для расчета показателя	
		при единственном корне ( $\tau_0 < \infty$ )	при отсутствии корней ( $\tau_0 = \infty$ )
$k_{\Gamma}(\tau)$	$\tau \sum_{i=1}^N T_i H'_i(\tau) - \sum_{i=1}^N T_i H_i(\tau) = M\gamma_{\text{п.п}}$	$\left(1 + \sum_{i=1}^N T_i H_i(\tau_0)\right)^{-1}$	$\left(1 + \sum_{i=1}^N \frac{T_i}{M\xi_i}\right)^{-1}$
$R_z(\tau)$	$\frac{\int_0^{\tau} \prod_{k=1}^N \left[ \bar{F}_k(x+z) + \int_0^x \bar{F}_k(x+z-y) dH_k(y) \right] dx}{\tau + M\gamma_{\text{п.п}} + \sum_{i=1}^N T_i H_i(\tau)} = \frac{\prod_{k=1}^N \left[ \bar{F}_k(\tau+z) + \int_0^{\tau} \bar{F}_k(\tau+z-y) dH_k(y) \right]}{1 + \sum_{i=1}^N T_i H'_i(\tau)}$	$\frac{\prod_{i=1}^N \bar{F}_i(\tau_0+z) + \int_0^{\tau} \bar{F}_i(\tau_0+z-y) dH_i(y)}{1 + \sum_{i=1}^N T_i H'_i(\tau_0)}$	$\frac{\prod_{i=1}^N \int_0^{\infty} \bar{F}_i(x+z) dx}{M\xi_i}}{1 + \sum_{i=1}^N \frac{T_i}{M\xi_i}}$

Показатель	Уравнение для определения оптимального периода	Формула для расчета показателя	
		при единственном корне ( $\tau_0 < \infty$ )	при отсутствии корней ( $\tau_0 = \infty$ )
$C(\tau)$	$\tau \sum_{i=1}^N c_i T_i H'_i(\tau) - \sum_{i=1}^N c_i T_i H_i(\tau) = M\gamma_{\text{п.п}}$	$\sum_{i=1}^N c_i T_i H'_i(\tau_0)$	$\sum_{i=1}^N \frac{c_i T_i}{M\xi_i}$
$S(\tau)$	$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N T_i T_j H_i(\tau) H'_j(\tau) (c_j - c_i) + \\ & + M\gamma_{\text{п.п}} \sum_{i=1}^N T_i H'_i(\tau) (c_i - c_{\text{п.п}}) + \\ & + \tau \sum_{i=1}^N T_i H'_i(\tau) (c'_0 + c_i) - \\ & - \sum_{i=1}^N T_i H_i(\tau) (c_0 + c_i) = M\gamma_{\text{п.п}} (c_0 + c_{\text{п.п}}) \end{aligned}$	$\frac{c_0 - \sum_{i=1}^N c_i T_i H_i(\tau_0)}{1 + \sum_{i=1}^N T_i H'_i(\tau_0)}$	$\frac{c_0 - \sum_{i=1}^N \frac{c_i T_i}{M\xi_i}}{1 + \sum_{i=1}^N \frac{T_i}{M\xi_i}}$

Примечание. В случае нескольких корней  $\tau_1, \tau_2$  оптимальное значение находится прямой подстановкой каждого из них.

Так как

$$\frac{9}{2} \frac{M\gamma_{\text{п.п}}}{T_1} = 0,45,$$

то корень  $x_0$  уравнения

$$0,45 = \varphi(x) = 1 - e^{-x}(1+x) \quad (23)$$

равен 1,524. Отсюда

$$\tau_0 = \frac{x_0}{3\lambda} = 50,8 \text{ ч.}$$

Максимальное значение коэффициента готовности достигается при замене элемента, когда его наработка  $\tau_0 = 50,8$  ч:

$$k_T(\tau_0) = (1 + T_1 H_1'(\tau_0))^{-1} = 0,9505.$$

Для сравнения приведем значение коэффициента готовности при пассивной стратегии ( $\tau_0 = \infty$ ):

$$k_T(\infty) = \frac{M\xi_1}{M\xi_1 + T_1} = 0,9375.$$

Для средних удельных потерь, подставив исходные данные в уравнение из табл. 2, получим

$$\frac{9}{2} \frac{c_{\text{п.п}} M\gamma_{\text{п.п}}}{c_1 T_1} = \varphi(3\lambda\tau),$$

где  $\varphi(x)$  определяется равенством (23).

Так как

$$\frac{9}{2} \frac{c_{\text{п.п}} M\gamma_{\text{п.п}}}{c_1 T_1} = 0,225,$$

то корень  $x_0$  уравнения  $0,225 = \varphi(x)$  равен 0,888. Отсюда

$$\tau_0 = \frac{x_0}{3\lambda} = 29,6 \text{ ч.}$$

Минимальное значение средних удельных затрат достигается при замене элемента, когда его наработка  $\tau_0 = 29,6$  ч:

$$C(\tau_0) = c_1 T_1 H_1'(\tau_0) = 0,0786 \text{ ед./ч.}$$

Для сравнения приведем значение средних удельных затрат при пассивной стратегии обслуживания ( $\tau_0 = \infty$ ):

$$C(\infty) = \frac{c_1 T_1}{M\xi_1} = 0,1333 \text{ ед./ч.}$$

Для средней удельной прибыли, подставив исходные данные в уравнение из табл. 2, получим

$$0,36 = \varphi(3\lambda\tau) + 0,006(1 - e^{-3\lambda\tau}),$$

где функция  $\varphi(x)$  определяется равенством (23). Вторым слагаемым в правой части этого уравнения можно пренебречь. Корень  $x_0$  уравнения  $0,36 = \varphi(x)$  равен 1,248.

Отсюда

$$\tau_0 = \frac{x_0}{3\lambda} = 41,6 \text{ ч.}$$

Максимальное значение средней удельной прибыли достигается при замене элемента, когда его наработка  $\tau_0 = 41,6$  ч:

$$S(\tau_0) = \frac{c_0 - c_1 H_1'(\tau_0) T_1}{1 + T_1 H_1(\tau_0)} = 2,78 \text{ ед./ч.}$$

Для сравнения приведем значение средней удельной прибыли при пассивной стратегии обслуживания ( $\tau_0 = \infty$ ):

$$S(\infty) = \frac{c_0 - \frac{c_1 T_1}{M\xi_1}}{1 + \frac{T_1}{M\xi_1}} = 2,68 \text{ ед./ч.}$$

Для вероятности выполнения задачи, подставив исходные данные в уравнение из табл. 2, получим

$$\frac{6\lambda M\gamma_{\text{п.п}}(1 - 0,25e^{-\lambda z}) - \frac{4}{3}\lambda T_1(1 - e^{-\lambda z})}{(1 + 2\lambda T_1) - (1 + \lambda T_1)e^{-\lambda z}} = \varphi(3\lambda\tau) - \frac{3\lambda M\gamma_{\text{п.п}}(1 - e^{-\lambda z})e^{-3\lambda\tau}}{(1 + 2\lambda T_1) - (1 + \lambda T_1)e^{-\lambda z}},$$

где  $\varphi(x)$  определяется равенством (23). Вторым членом в правой части этого уравнения можно пренебречь (коэффициент при  $e^{-3\lambda\tau}$  равен  $\approx 0,006$ ). При заданных исходных данных левая часть уравнения равна

0,35. Корень  $x_0$  уравнения  $0,35 = \varphi(x)$  равен 1,236. Отсюда

$$\tau_0 = \frac{x_0}{3\lambda} = 41,2 \text{ ч.}$$

Максимальное значение вероятности выполнения задачи достигается при замене элемента, когда его наработка  $\tau_0 = 41,2$  ч:

$$R_z(\tau_0) = 0,925.$$

Решение задачи оптимизации при неполной информации о надежности. При известных характеристиках надежности элементов  $F_i(x)$ ,  $i = 1, N$  и определении величины наработки, при которой следует проводить неплановые предупредительные профилактики, как реализации случайной величины  $\eta$  с распределением  $G(x)$ , выражения показателей качества функционирования имеют вид:

$$k_\Gamma(G, F_1, F_2, \dots, F_N) = \frac{\int_0^\infty t dG(t)}{\int_0^\infty \left[ t + M\gamma_{\text{п. п}} + \sum_{i=1}^N T_i H_i(t) \right] \times dG(t)} \quad (24)$$

$$C(G, F_1, \dots, F_N) = \frac{\int_0^\infty \left[ c_{\text{п. п}} M\gamma_{\text{п. п}} + \sum_{i=1}^N c_i T_i H_i(t) \right] dG(t)}{\int_0^\infty t dG(t)} \quad (25)$$

$$S(G, F_1, \dots, F_N) = k_\Gamma(G, F_1, \dots, F_N) \times (c_0 - C(G, F_1, \dots, F_N)). \quad (26)$$

Решение минимаксной задачи при  $G \in \Omega$  и  $F_i \in \Omega(n_i, y_i, \pi_i)$ .

При поиске экстремума по  $F \in \Omega(n_i, y_i, \pi_i)$  в силу монотонной зависимости показателей от функций экстремум их достигается на мажорирующей функции

$$F_i^{(0)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ \pi_{ik} & \text{при } y_{ik-1} < x \leq y_{ik}, \\ & k = 1, n_i; \\ 1 & \text{при } x > y_{in_i}. \end{cases} \quad (27)$$

Монотонная зависимость функции восстановления  $H_i(x)$  и соответствующей ей функции  $F_i(x)$  базируется на следующей лемме.

Л е м м а. Пусть для двух функций распределения  $G_1$  и  $G_2$  положительных случайных величин  $\xi_1$  и  $\xi_2$  при любом  $x \geq 0$  выполняется неравенство

$$G_1(x) \geq G_2(x).$$

Тогда для функций восстановления  $H_1(x)$  и  $H_2(x)$  процессов восстановления, образованных последовательностями независимых случайных величин с законами распределения  $G_1(x)$  и  $G_2(x)$ , выполняется аналогичное неравенство

$$H_1(x) \geq H_2(x).$$

При поиске экстремума по  $G \in \Omega$  в силу того, что экстремальные функции  $F_i^{(0)}(x)$  не зависят от  $G(x)$ , функционалы  $k_\Gamma(G, F_1^{(0)}, \dots, F_N^{(0)})$ ,  $C(G, F_1^{(0)}, \dots, F_N^{(0)})$  и  $S(G, F_1^{(0)}, \dots, F_N^{(0)})$  являются дробно-линейными по  $G$ . Следовательно, экстремум этих функционалов достигается на вырожденной функции распределения.

Таким образом, алгоритм решения задачи сводится к следующему:

для функции  $F_i^{(0)}(x)$ , определяемой равенством (27), находится функция восстановления  $H_i^{(0)}(x)$  как решение

интегрального уравнения восстановления

$$H_i^{(0)}(t) = F_i^{(0)}(t) + \int_0^t F_i^{(0)}(t-x) dH_i^{(0)}(x);$$

$$(28)$$

вычисляется

$$\max_{G \in \Omega} \min_{F_i \in \Omega} (n_i, y_i, \pi_i) K_{\Gamma}(G, F_1, \dots, F_N) =$$

$$= \max_{\tau > 0} \frac{\tau}{\tau + M\gamma_{\text{п.п}} + \sum_{i=1}^N T_i H_i(\tau)} =$$

$$= \frac{\tau_0}{\tau_0 + M\gamma_{\text{п.п}} + \sum_{i=1}^N T_i H_i(\tau_0)}$$

— гарантированное значение коэффициента готовности, если неплановые

предупредительные профилактики проводить в тот момент, когда наработка системы достигнет величины  $\tau_0$ ; вычисляется

$$\min_{G \in \Omega} \max_{F_i \in \Omega} (n_i, y_i, \pi_i)$$

$$C(G, F_1, \dots, F_N) =$$

$$= \min_{\tau > 0} \frac{c_{\text{п.п}} M\gamma_{\text{п.п}} + \sum_{i=1}^N c_i T_i H_i^{(0)}(\tau)}{\tau} =$$

$$= \frac{c_{\text{п.п}} M\gamma_{\text{п.п}} + \sum_{i=1}^N c_i T_i H_i^{(0)}(\tau_0)}{\tau_0}$$

— гарантированное значение средних удельных потерь, если неплановые предупредительные профилактики проводить в тот момент, когда наработка системы достигнет величины  $\tau_0$ ; вычисляется

$$\max_{G \in \Omega} \min_{F_i \in \Omega} (n_i, y_i, \pi_i) S(G, F_1, F_2, \dots, F_N) =$$

$$= \max_{\tau > 0} \frac{c_0 \tau - c_{\text{п.п}} M\gamma_{\text{п.п}} - \sum_{i=1}^N c_i T_i H_i^{(0)}(\tau)}{\tau + M\gamma_{\text{п.п}} + \sum_{i=1}^N T_i H_i^{(0)}(\tau)} =$$

$$= \frac{c_0 \tau_0 - c_{\text{п.п}} - M\gamma_{\text{п.п}} + \sum_{i=1}^N c_i T_i H_i^{(0)}(\tau_0)}{\tau_0 + M\gamma_{\text{п.п}} + \sum_{i=1}^N T_i H_i^{(0)}(\tau_0)}$$

— гарантированное значение средней удельной прибыли, если неплановые предупредительные профилактики проводить в тот момент, когда наработка системы достигнет величины  $\tau_0$ .

Пример. Пусть  $n_i = 1, i = \overline{1, N}$ . Предположим, что существует такое  $\Delta > 0$ , что  $y_{i1} = l_i \Delta, i = \overline{1, N}, l_i$  —

целые числа. Тогда из (28) имеем

$$H_i^{(0)}(t) = \frac{\left[ \frac{k}{l_i} \right] + 1}{1 - \pi_{i1}} - 1,$$

$$k \Delta < t \leq (k+1) \Delta,$$

где  $\left[ \frac{k}{l_i} \right]$  — целая часть числа  $\frac{k}{l_i}, i = 0, 1, 2, \dots, N$ .

Оптимальная периодичность проведения предупредительных профилактик определяется как  $k_0 \Delta$  ( $k_0$  — целое), где

для коэффициента готовности  $k_0$  есть точка минимума выражения

$$\frac{M\gamma_{\text{п. п}} - \sum_{i=1}^N T_i}{k} +$$

$$+ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^N T_i \frac{\left[ \frac{k}{l_i} \right] + 1}{1 - \pi_{i1}};$$

для средних удельных потерь  $k_0$  есть точка максимума выражения

$$\frac{c_{\text{п. п}} M\gamma_{\text{п. п}} - \sum_{i=1}^N c_i T_i}{k} +$$

$$+ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^N c_i T_i \frac{\left[ \frac{k}{l_i} \right] + 1}{1 - \pi_{i1}};$$

для средней удельной прибыли  $k_0$  есть точка максимума выражения

$$\frac{c_0 k \Delta - \left( c_{\text{п. п}} M\gamma_{\text{п. п}} - \sum_{i=1}^N c_i T_i \right) - \sum_{i=1}^N c_i T_i \frac{\left[ \frac{k}{l_i} \right] + 1}{1 - \pi_{i1}}}{k \Delta + M\gamma_{\text{п. п}} + \sum_{i=1}^N T_i \left( \frac{\left[ \frac{k}{l_i} \right] + 1}{1 - \pi_{i1}} - 1 \right)}.$$

## Глава 8. Выбор запасного комплекта элементов для обеспечения эксплуатации по заданному ресурсу, уровню надежности и состоянию

### 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЪЕМА ЗАПАСНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ЭКСПЛУАТАЦИИ ПО ЗАДАННОМУ РЕСУРСУ

Рассмотрим элемент с монотонно возрастающей функцией интенсивности отказов  $\lambda(t)$  (стареющий элемент). Обозначим случайное время полного восстановления отказавшего элемента через  $\gamma_1$ , а через  $\gamma_2$  — случайное время предупредительной замены (или полного восстановления) неотказавшего элемента. Тогда  $M[\gamma_1] = T_1$ ,  $M[\gamma_2] = T_2$ , а величина  $\mu$  будет обозначать математическое ожидание интервала времени между двумя последующими заменами элемента.

Интервал между заменами (случайная величина) складывается из интервала времени от момента предыдущей замены до момента начала замены исправного элемента либо до начала замены отказавшего элемента плюс интервал времени, равный длительности самой замены  $\gamma_b$  (замены либо исправного, либо отказавшего элемента).

Пусть  $F_1(t) = P\{\gamma_1 < t\}$ ,  $F_2(t) = P\{\gamma_2 < t\}$ ,  $X$  — случайное время от момента включения элемента в работу до момента его отказа. Будем считать, что элемент работает непрерывно, а момент отказа мгновенно наблюдается. Система, в которой эксплуатируется рассматриваемый элемент, является системой длительной эксплуатации.

Пусть  $F(t) = P\{X < t\}$ . Очевидно, момент полного восстановления элемента на фиксированной позиции наступит через время

$$\min(X, \tau_0) + \gamma_b,$$

т. е. если

$$\min(X, \tau_0) = \tau_0, \text{ то } \gamma_b = \gamma_2;$$

если

$$\min(X, \tau_0) = X, \text{ то } \gamma_b = \gamma_1.$$

Величина  $\tau_0$  есть оптимальное значение интервала времени безотказной непрерывной работы элемента, по истечении которого элемент предупредительно заменяется в обязательном порядке. Если же до истечения времени  $\tau_0$  элемент откажет, то с момента отказа мгновенно начинается его аварийная замена. Определение величины  $\tau_0$  подробно излагается в гл. 3 [2].

Обозначим через  $\pi$  случайный интервал времени между соседними заменами элемента (ясно, что  $M[\pi] = \mu$ ).

Выпишем выражения для математического ожидания и дисперсии случайной величины  $\pi$ . Для этого сначала рассмотрим суммы случайных величин  $\gamma_b$  и  $\min(X, \tau_0)$  при  $t < \tau_0$  и  $t \geq \tau_0$ . Обозначим  $\min(X, \tau_0) = \eta$ . При  $t < \tau_0$

$$\begin{aligned} P\{\eta + \gamma_b < t\} &= \\ &= \int_0^t dF(y) P\{\gamma_b < y\} = \\ &= \int_0^t F_1(t-y) dF(y); \end{aligned}$$

при  $t \geq \tau_0$

$$\begin{aligned} P\{\eta + \gamma_b < t\} &= \\ &= \int_0^{\tau_0} F_1(t-y) dF(y) + \\ &+ [1 - F(\tau_0)] F_2(t - \tau_0). \end{aligned}$$

Из этих выражений

$$\mu = \int_0^{\tau_0} [1 - F(y)] dy + T_1 F(\tau_0) + T_2 [1 - F(\tau_0)].$$

Для дисперсии случайной величины  $\pi_2$  имеем окончательное выражение

$$D[\pi] = M[\gamma_1^2] F[\tau_0] + 2T_1 \int_0^{\tau_0} y f(y) dy + \int_0^{\tau_0} y^2 f(y) dy + [1 - F(\tau_0)] M[\gamma_2^2] + 2\tau_0 T_2 [1 - F(\tau_0) + \tau_0^2 [1 - F(\tau_0)] - (M[\pi])^2],$$

где  $f(t) = F'(t)$ ,  $M[\gamma_0^2] = D[\gamma_0] + (M[\gamma_0])^2$ .

Примем  $\sigma^2 = D[\pi]$ ;  $v(t)$  — случайное число восстановлений (замен) элемента за заданное время эксплуатации  $t$ ;  $n$  — рассчитываемое (при заданной доверительной вероятности) число запасных элементов на время эксплуатации  $t$ .

Для окончательного расчета используем результат А. Д. Соловьева:

$$P\{v(t) \leq n\} = P\left\{\frac{v(t) - t/\mu}{\sigma/\mu \sqrt{t/\mu}} \leq \frac{n - t/\mu}{\sigma/\mu \sqrt{t/\mu}}\right\} = \Phi\left(\frac{n - t/\mu}{\sigma/\mu \sqrt{t/\mu}}\right).$$

Для доверительной вероятности 0,975, например, имеем

$$\Phi\left(\frac{n - t/\mu}{\sigma/\mu \sqrt{t/\mu}}\right) = \Phi(2)$$

(см. таблицы нормального распределения), откуда

$$n = 1/[\mu(t + 2\sigma \sqrt{t/\mu})].$$

Таким образом, выбор числа  $n$  позволяет в процессе длительной эксплуатации системы обеспечить максимальный коэффициент ее оперативной готовности.

Примеры расчетов объемов запасных элементов для различных параметров надежности и эксплуатации элемента стареющего типа приведены в [6].

## 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ

### ОПТИМАЛЬНОГО КОЛИЧЕСТВА ЗАПАСНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ ЭКСПЛУАТАЦИИ СИСТЕМЫ ПО УРОВНЮ НАДЕЖНОСТИ

Имеем систему, элементы которой соединены последовательно по надежности, и каждый элемент системы работает до отказа. Рассматриваемый заданный календарный интервал работы системы  $(0, t)$ . Система содержит  $d_i$  элементов типа  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), работающих одновременно.

Внутри фиксированного типа элементы характеризуются различной надежностью. Обозначим через  $F_{ij}(t)$  функцию распределения времени безотказной работы  $j$ -го элемента  $i$ -го типа ( $j = 1, 2, \dots, d_i$ ;  $i = 1, 2, \dots, k$ ), а через  $f_{ij}(t)$  — соответствующую ей плотность распределения. На календарном интервале  $(0, t_0)$  каждый элемент системы используется в течение времени  $t_{ij}$ .

Обозначим среднюю стоимость одного запасного элемента типа  $i$  через  $C_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), тогда общая средняя стоимость запасных элементов всех типов (для системы в целом)

$$C(n_1, \dots, n_k) = \sum_{i=1}^k n_i C_i,$$

где  $n_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) — первоначальное количество запасных элементов типа  $i$ . Будем считать, что средняя стоимость элемента типа  $i$  отличается достаточно мало от стоимости каждого элемента типа  $i$ . Точное решение приводимой ниже задачи соответствует случаю равенства стоимостей каждого элемента типа  $i$  ( $i = 1, \dots, k$ ).

Пусть  $Q_i(n)$  — вероятность того, что за период календарной работы системы  $(0, t_0)$  произойдет  $n_i$  или менее отказов элементов типа  $i$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Обозначим искомое число запасных элементов для системы в целом через вектор

$$n = (n_1, n_2, \dots, n_k),$$

а через  $Q(n)$  — вероятность того, что не будет нехватки для любого из  $k$  типов запасных элементов за время

$(0, t_0)$ , если фиксировано начало вектора  $n$  при  $t = 0$ .

Пусть  $C(n)$  — общая стоимость запасных элементов системы.

Считаем, что элементы в системе работают независимо и отказ каждого элемента приводит к отказу системы. Поэтому вероятность бесперебойной (по наличию запасных элементов) работы системы за время  $(0, t_0)$

$$Q(n) = \prod_{i=1}^k Q_i(n) \quad (1)$$

и общая их стоимость

$$C(n) = \sum_{i=1}^k n_i C_i. \quad (2)$$

Задача оптимального выбора комплекта запасных элементов системы для интервала времени ее календарной работы  $(0, t)$  сводится к максимизации нелинейной функции  $Q(n)$  при наличии следующего линейного ограничения по стоимости:

$$\sum_{i=1}^k n_i C_i \leq C_0, \quad n_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

где  $C_0$  — заданная (допустимая) величина общей стоимости запасных элементов.

Максимизация величины  $Q(n)$  эквивалентна максимизации величины  $\ln Q(n) = R(n)$  с теми же ограничениями (2).

Приведем алгоритм решения сформулированной задачи нелинейного дискретного программирования для функции  $R(n)$  с ограничениями (2) [7].

Определим

$$\Delta R_i(n) = R_i(n+1) - R_i(n)$$

для  $n = 0, 1, 2, \dots; i = 1, 2, \dots, k$ .

Будем считать, что  $\Delta R_i(n)$  — уменьшающаяся по  $n$  функция для  $i = 1, 2, \dots, k$ . Тогда определим

$$n_i^*(r) = 0$$

для произвольного  $r > 0$  и всех  $i$  таких, что

$$\Delta R_i(0) < r C_i.$$

Для оставшихся  $i$  определим  $n_i^* = 1$  плюс наибольшее  $n$  такое, при котором

$$\Delta R_i(n) \geq r C_i.$$

Вычислим

$$C[n^*(r_0)] = \sum_{i=1}^k C_i n_i^*(r),$$

где  $r_0$  — величина  $r$ , приводящая к максимуму

$$C[n^*(r)] \leq C_0.$$

В этом случае  $n^*(r_0)$  является комплектом запасных элементов, соответствующим ограничению  $C_0$ .

Вектор  $n^*$  является оптимальным, когда  $C_0$  — одна из величин  $C[n^*(r)]$  при изменении  $r$  от 0 до  $\infty$ , т. е.  $n^*$  максимизирует  $R(n)$  среди всех  $n$  таких, что

$$C(n) \leq C(n^*), \quad n \geq 0.$$

Вследствие дискретной природы переменных  $n_1, \dots, n_k$  при отыскании вектора  $n^*$  возможны ошибки. Они оцениваются следующим образом.

Для  $C_0 \neq C[n^*(r)]$  при всех  $r > 0$

$$\max_{\substack{C(n) \leq C_0 \\ n \geq 0}} Q(n) - Q[n^*(r_0)] \leq$$

$$\leq Q(n') - Q[n^*(r_0)],$$

где

$$C(n') = \min_{C(n^*) > C_0} C(n^*),$$

а  $n'$  соответствует оптимальному комплекту запасных элементов, определяемому по приведенному алгоритму для стоимости, большей  $C(n^*)$ .

Покажем, как применить приведенный алгоритм для наиболее распространенного на практике случая — экспоненциальных плотностей распределений  $f_{ij}(t)$ .

Итак, для элемента  $ij$  системы имеем

$$f_{ij}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ \mu_{ij} e^{-\mu_{ij} t} & \text{при } t = t_{ij} > 0, \end{cases}$$

где  $\mu_{ij}$  — среднее число отказов элемента  $ij$  в единицу времени ( $j = 1, \dots, d_i, i = 1, \dots, k$ ).

Покажем, что в данном случае  $\Delta R_i(n)$  есть убывающая по  $n$  функция.

Опустив индексы, запишем

$$\Delta R(n) = \ln \left[ \frac{Q(n+1)}{Q(n)} \right] = \ln \left[ \frac{1 + \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}}{\sum_{j=0}^n \frac{\lambda^j}{j!}} \right],$$

где

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^{d_i} \mu_{ij} t_{ij}.$$

Далее достаточно показать, что

$$\frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} = g(n, \lambda) - \sum_{j=0}^n \frac{\lambda^j}{j!}$$

есть убывающая функция по  $n$  для всех  $\lambda > 0$ .

Можно убедиться, что разность  $g(n, \lambda) - g(n-1, \lambda)$  имеет такой же знак, как и функция

$$f(n, \lambda) = \lambda \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda^j}{j} - (n+1) \sum_{j=0}^n \frac{\lambda^j}{j!}.$$

Можно показать, что

$$\frac{df(n, \lambda)}{d\lambda} = f(n-1, \lambda). \quad (3)$$

Кроме того,  $f(1, \lambda) = -2 - \lambda < 0$  для  $\lambda > 0$ .

Пусть  $f(n, \lambda) < 0$  для  $n = 1, 2, \dots, n_0 - 1$ .

Тогда согласно (3)

$$\frac{df(n_0, \lambda)}{d\lambda} < 0$$

для  $\lambda > 0$ . Так как

$$f(n_0, 0) = -(n_0 + 1) < 0$$

$$\text{и } df(n_0, \lambda)/d\lambda < 0,$$

то  $f(n_0, \lambda) < 0$  для всех  $\lambda > 0$ . По индукции заключаем, что  $f(n, \lambda) < 0$  для  $n = 1, 2, \dots; \lambda > 0$ . Таким образом,  $g(n, \lambda)$ , а значит, и  $\Delta R(n)$  есть убывающие функции по  $n$  для всех  $\lambda > 0$ .

При практическом использовании экспоненциального распределения в большинстве случаев для  $\Delta R_i(n)$  можно пользоваться следующим удобным приближенным выражением:

$$\Delta R_i(n_i) \approx \frac{\lambda_i^{n_i+1} e^{-\lambda_i}}{(n_i + 1)!}. \quad (4)$$

Выражение (4) может быть табулировано. Поэтому вычисления по приведенному выше алгоритму в случае даже сложной системы являются довольно простыми.

**Пример.** Рассмотрим работу системы, состоящей из четырех типов микросхем ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Микросхему внутри каждого типа будем, как и выше, обозначать индексом  $j$  (для рассматриваемого примера  $j = 1, 2$ ). Бесперебойная работа системы планируется в течение трех месяцев.

Данные для расчета оптимального числа запасных элементов для рассматриваемой системы приведены в табл. 1.

1. Данные для расчета оптимального числа запасных элементов

i	Среднее число отказов в час элементов j-го типа $\mu_{ij}$	Стоимость элемента i-го типа $C_i^z$ , усл. ед.	Число элементов, планируемых для использования в течение		Ожидаемое число отказов элементов i-го типа $\lambda_i$
			332 ч	2160 ч	
			$i1 (j = 1)$	$i2 (j = 2)$	
1	1/2500	240	4	4	4,0
2	1/4000	1025	2	5	2,9
3	1/800	1158	4	0	1,7
4	1/6000	750	2	0	0,11

Величины  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) в табл. 1 определялись следующим образом:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2500} (4 \cdot 332 + 4 \cdot 2160) \cong 4,0;$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{4000} (2 \cdot 332 + 5 \cdot 2160) \cong 2,9;$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{800} 4 \cdot 332 \cong 1,7;$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{6000} 2 \cdot 332 \cong 0,11.$$

Задача остается прежней: максимизировать в данном случае (1) при ограничениях (2).

Воспользуемся приведенным выше алгоритмом решения.

Первый возможный шаг в определении числа  $r$  заключается в вычислении  $\lambda_1 + 3\sqrt{\lambda_1}$  и округлении полученного результата до ближайшего целого числа. Получаем  $n_1^* = 10$ . Это означает, что  $n_1^* = 10$  соответствует величине трех стандартных отклонений от среднего (при пуассоновском распределении стандартное отклонение равно корню квадратному из среднего).

Определим величину  $r$ :

$$r = \left[ \frac{1}{C_1} e^{-\lambda_1} \right] \left( \frac{\lambda_1^{10}}{10!} \right) = 0,000022.$$

Далее найдем  $n_2^*$  как наибольшую величину  $n$  такую, что

$$\frac{1}{C_2} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^n}{n!} \geq 0,000022. \quad (5)$$

После вычислений получаем  $n_2 = 6$ .

Заменив индекс 2 в (5) на 3 и 4, аналогично найдем  $n_3^* = 4$  и  $n_4^* = 1$ . Таким образом,  $n^*$  равно 10, 6, 4 и 1.

Поэтому

$$Q(n^*) = \prod_{i=1}^4 \sum_{x=1}^{n_i^*} e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^x}{x!} = 0,935$$

и

$$C(n^*) = \sum_{i=1}^4 C_i n_i^* = \\ = 13\,932 \text{ ед. стоимости.}$$

Выше предполагалось, что элементы типа  $i$  обладают одинаковой надежностью и стоимостью.

### 3. ОЦЕНКА КОЛИЧЕСТВА ЗАПАСНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ ЭКСПЛУАТАЦИИ ПО СОСТОЯНИЮ

Восстановление работоспособности или исправности технических объектов в ходе их эксплуатации или ремонта по состоянию связано с проведением операций по уравнению техническим состоянием (ОПУТС), при которых улучшается качество работы технического объекта, т. е. возрастает уровень его безотказности. Сами операции носят характер замен или регулировок. Для современных объектов (особенно радиоэлектронных) характерно использование *типовых элементов замены* (ТЭЗ), среди которых имеются и неремонтируемые. Вместе с тем сложные технические системы содержат также и органы регулировки, которые должны обеспечить, с одной стороны, взаимозаменяемость ТЭЗ, а с другой — исключить часть замен, что может оказаться целесообразным по экономическим причинам. Отсюда следует, что задача определения числа запасных элементов (ЗЭ) применительно к восстановлению по состоянию является частью комплексной задачи оценки общего числа ОПУТС, которое послужит основой для выделения части, связанной с заменами, т. е. с определением числа ЗЭ.

Помимо этого, число запасных элементов должно быть выбрано с учетом обеспечения требуемых показателей эффективности процесса восстановления.

Физическую модель эксплуатации по состоянию и проводимые при этом восстановления можно представить так. Техническая система состоит из  $N$  ТЭЗ. Во времени техническое состояние каждого ТЭЗ изменяется случайным образом, независимо от технического состояния остальных ТЭЗ. Обслуживающий персонал получает информацию о техническом состоянии на основе результатов измерения

параметров  $X_j(t)$ ,  $j = 1, \overline{N}$ , причем для каждого из измеряемых параметров, помимо границы области работоспособности  $F$ , внутри области работоспособности определено оптимальное значение  $i^* \leq F$ . Вычисление значения  $i^*$  производится по различным алгоритмам [8] в зависимости от того, какой математической моделью описывается изменение технического состояния во времени, какой выбран показатель оптимизации.

Обозначим область  $[i^*, F] = \Gamma^*$ . При контроле производится сравнение текущего результата измерения параметра  $X_j(t)$  с величинами  $F$  и  $i^*$ . Если  $X_j(t) > F$ , то  $j$ -й ТЭЗ считается отказавшим и заменяется на новый. Если  $X_j(t) < i^*$ , то никаких работ по управлению техническим состоянием не производится. Если  $i^* \leq X_j(t) \leq F$ , то считается, что техническое состояние  $j$ -го ТЭЗ нуждается в улучшении, что может быть выполнено заменой ТЭЗ либо его регулировкой. Улучшение технического состояния регулировкой обеспечивается с вероятностью  $q$ , заменой —  $(1 - q)$ . Регулировка может быть выполнена немедленно, а замена — в случае, если имеется запасной ТЭЗ. Любая операция по управлению техническим состоянием приводит к простоя системы.

Введем следующие обозначения средних времен простоя:  $c_1$  — при регулировке;  $c_2$  — при замене в работоспособном состоянии;  $c_3$  — при замене при устранении отказа;  $c_4$  — запаздывание из-за доставки.

Для установившегося режима рассматриваемого процесса восстановления обозначим вероятность отказа через  $\pi_F$ , а вероятность того, что результат измерения будет в области

$$i^* \leq X(t) \leq F, \text{ — через } \pi_{\Gamma^*}.$$

Для большого класса технических систем, рост показателя эффективности которых обусловлен сокращением простоев, распространенным показателем качества процесса эксплуатации и ремонта является величина удельных затрат — математическое ожидание простоя на одно восстанов-

ление. При введенных обозначениях

$$C = \frac{\pi_F}{\pi_{\Gamma^*}} (c_3 + c_4) + \frac{\pi_{\Gamma^*} - \pi_F}{\pi_{\Gamma^*}} [qc_1 + (1 - q)(c_2 + c_4)]. \quad (6)$$

Задача заключается в том, чтобы оценить общее число ОПУТС и выделить число ЗЭ с учетом их влияния на показатель эффективности системы восстановления  $C$ . Поскольку техническое состояние одного ТЭЗ не зависит от другого, расчеты возможно производить только для  $j$ -го ТЭЗ.

Оценка числа ОПУТС, необходимого для обеспечения эксплуатации объекта на интервале  $[0, t]$ , для случая восстановления работоспособности после отказа ( $X(t) > F$ ) с заданной гарантийной вероятностью замен  $(1 - \alpha)$ ,  $1 > \alpha > 0$ , определяется из выражения [43]

$$n(t) = \frac{t}{T} + U_\alpha \frac{\sigma \sqrt{t}}{T^{3/2}}, \quad (7)$$

где  $T$  — среднее время между отказами;  $\sigma^2$  — дисперсия времени между отказами;  $U_\alpha$  — квантиль нормального распределения.

Если восстановительные работы производятся с учетом уровня  $i^*$  ( $X(t) \geq i^*$ ), то в выражение (7) необходимо подставить величины  $T_{\Gamma^*}$  и  $\sigma_{\Gamma^*}^2$ , отличающиеся от  $T$  и  $\sigma^2$ . Эти величины представляют собой соответственно среднее значение времени попадания в область  $\Gamma^*$  и его дисперсию. Способы их определения зависят от вида случайного процесса, описывающего изменение технического состояния во времени: для гауссовских, марковских процессов эти характеристики могут быть определены аналитически, для более сложных — на основе моделирования. Число ОПУТС, необходимое для обеспечения восстановления с учетом уровня  $i^*$ ,

$$n_1(t) = \frac{t}{T_{\Gamma^*}} + U_\alpha \frac{\sigma_{\Gamma^*} \sqrt{t}}{T_{\Gamma^*}^{3/2}}. \quad (8)$$

Целесообразность разделения общего числа ОПУТС  $n(t)$  на число замен

и число регулировок зависит, в частности, от соотношения  $c_1$  и  $(c_2 + c_4)$ .

Пусть  $c_1 - (c_2 + c_4) = \varepsilon \geq 0$ . Тогда (6) примет вид

$$C = \frac{\pi_F}{\pi_{\Gamma^*}} (c_3 + c_4) + \frac{\pi_{\Gamma^*} - \pi_F}{\pi_{\Gamma^*}} [c_1 - \varepsilon (1 - q)]. \quad (9)$$

Так как (9) линейно возрастает по  $q$ , то минимум  $C$  достигается при  $q = 0$ . При  $c_1 - (c_2 + c_4) < 0$  минимум достигается при  $q = 1$ . Отсюда следует: при  $c_1 - (c_2 + c_4) \geq 0$  наиболее эффективным способом управления техническим состоянием является замена. В этом случае все операции по изменению технического состояния осуществляются только заменой, а число запасных элементов определяется только необходимостью замены при фиксации отказа. Если  $c_1 - (c_2 + c_4) < 0$ , то управление в работоспособном состоянии целесообразно вести только с помощью регулировок. При  $c_1 = c_2 + c_4$  способы управления техническим состоянием регулировкой или заменой с точки зрения минимума среднего времени простоя равнозначны.

Если выбран способ управления техническим состоянием с помощью регулировок, то все оценки ЗЭ совпадают со случаем  $c_1 < c_2 + c_4$ . При выборе способа управления заменой оценки ЗЭ совпадают с оценками для случая  $c_1 > c_2 + c_4$ .

Если в практике эксплуатации существует вероятность восстановления регулировкой  $q \geq 0$ , то оценка общего числа ЗЭ

$$n_q(t) = n_1(t) \left[ 1 - q \left( 1 - \frac{\pi_F}{\pi_{\Gamma^*}} \right) \right]. \quad (10)$$

Для случая  $q = 0$   $n_q(t) = n_1(t)$ , а при  $q = 1$

$$n_q(t) = n_1(t) \frac{\pi_F}{\pi_{\Gamma^*}}.$$

Таким образом, исходными данными для расчета числа ЗЭ являются средние времена простоя  $c_i$ ,  $i = 1, 4$ , характеристики безотказности ТЭЗ и

вероятность восстановления регулировкой  $q$ . Значения вероятностей  $\pi_F$ ,  $\pi_{\Gamma^*}$ , средних времен  $T$  и  $T_{\Gamma^*}$ , а также дисперсии  $\sigma^2$  и  $\sigma_{\Gamma^*}^2$  рассчитываются в общем случае с помощью метода статистических испытаний при моделировании процесса восстановления. Если процесс изменения технического состояния может быть аппроксимирован марковским процессом, то эти значения определяются аналитически.

Последовательность операций по оценке числа запасных элементов, достаточных для обеспечения процесса эксплуатации по состоянию, представлена в виде алгоритма (рис. 1).

Блок 1 обеспечивает ввод исходных данных в виде затрат  $c_i$ ,  $i = 1, 4$ . В блоке 2 проверяется соотношение между  $c_1$  и  $c_2 + c_4$ . Если  $c_1 < (c_2 + c_4) < 0$ , то выбирается  $q = 1$  (блок 3). При обратном знаке неравенства между  $c_1$  и  $c_2 + c_4$  выполняется операция блока 4 ( $q = 0$ ). Если  $c_1 = c_2 + c_4$ , то в блоке 5 уточняется значение  $q$ : оно может быть выбрано из условия  $1 \geq q \geq 0$ . При выбранном значении  $q$ , структуре ограничений (блок 7) и данных о безотказности (блок 8) в блоке 6 определяются величины  $\pi_F$  и  $\pi_{\Gamma^*}$ , с использованием которых в блоке 9 вычисляется величина среднего простоя. Она необходима либо для того, чтобы при сравнении с допустимым значением  $C_{\text{доп}}$  (блок 11) выяснить, согласуются ли требования по готовности с возможностями системы эксплуатации, либо если таких требований не задано, определить достигнутый уровень. Если  $C > C_{\text{доп}}$ , то возможности системы эксплуатации не согласуются с требованиями по готовности. Необходимо (блок 10) либо улучшить характеристики безотказности (блок 8), либо уменьшить затраты на простои  $c_i$  (блок 1). Если  $C < C_{\text{доп}}$  или требования по  $C_{\text{доп}}$  не задано, то в блоке 12 производится расчет общего числа ОПУТС на основе (7) или (8). Полученное значение  $n(t)$ , а также найденные ранее значения  $q$ ,  $\pi_F$ ,  $\pi_{\Gamma^*}$  используются в блоке 13 для расчета числа запасных элементов на основе (10).

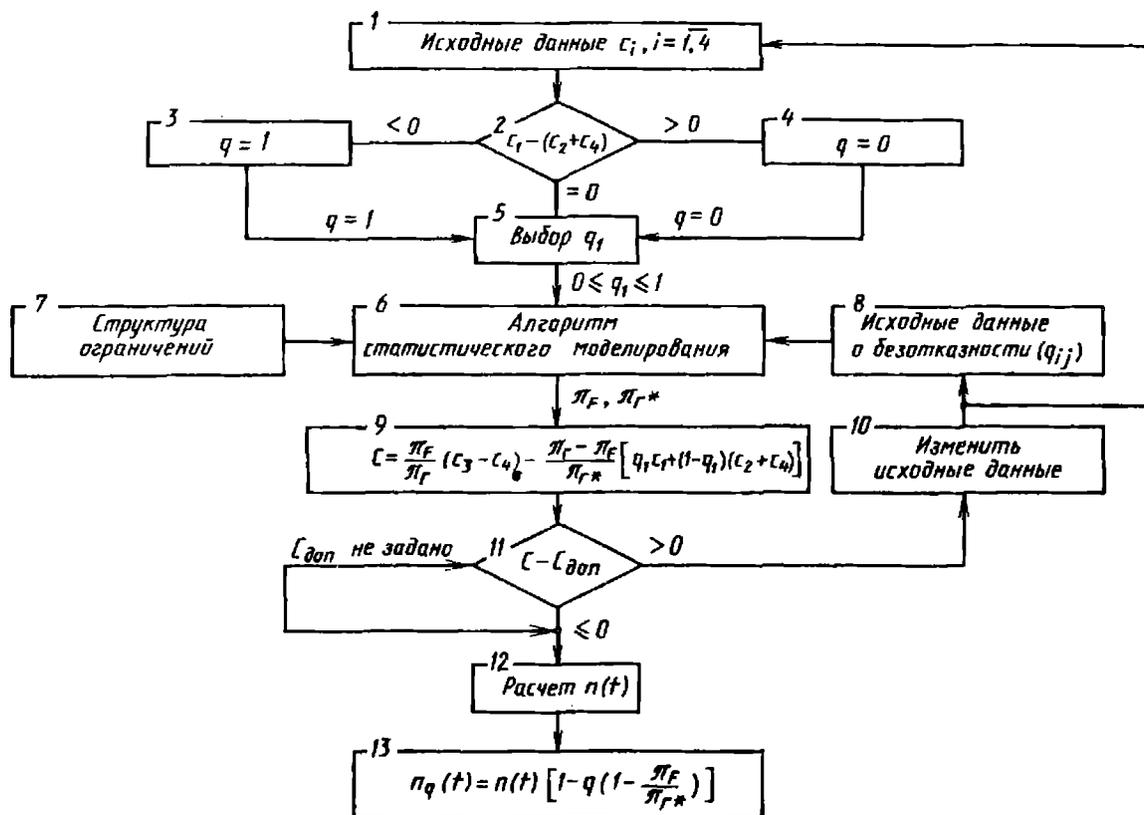


Рис. 1. Алгоритм оценки числа запасных элементов

Пример. Рассмотрим ТЭЗ, процесс изменения технического состояния которого аппроксимирован цепью Мар-

кова 1-го порядка. Пусть матрица вероятностей переходов имеет следующий вид:

	1	2	3	4	5	6	7
1	0,30	0,20	0,20	0,12	0,10	0,05	0,03
2	0,10	0,30	0,20	0,13	0,12	0,08	0,07
3	0,08	0,10	0,30	0,20	0,12	0,10	0,10
4	0,05	0,10	0,10	0,30	0,20	0,15	0,10
5	0,05	0,10	0,10	0,15	0,30	0,20	0,10
6	0,02	0,08	0,10	0,10	0,20	0,30	0,20
7	0	0	0	0	0	0	1

Цифрами слева и сверху обозначены номера состояний.

Заданием этой матрицы полностью определены характеристики безотказности.

Для процесса восстановления ТЭЗ установлено, что средние значения простоя  $c_1 = 0,5$ ;  $c_2 = 3,0$ ;  $c_3 = 5$ ;  $c_4 = 10$  усл. ед.

Необходимо рассчитать число запасных элементов для эксплуатации

в течение  $t = 1000$  усл. ед. с гарантированной вероятностью 0,95 при условии, что ТЭЗ в работоспособном состоянии может восстанавливаться регулировкой с вероятностью  $q = 0,8$ .

Решение. Задание матрицы  $Q$  означает, что вся область работоспособности разделена на семь частей—состояний, при этом состояние 7 есть состояние отказа ( $q_{77} = 1$ ). В случае описания поведения технического со-

стояния цепью Маркова необходимые данные для расчетов получаются на основе использования стандартного алгоритма линейного программирования [8], а также на базе теории цепей Маркова [8, 68].

Для рассматриваемого примера задача линейного программирования формулируется следующим образом: выбрать значения  $D_{is}$  такие, чтобы величина среднего простоя

$$C = (c_3 + c_4) \sum_{s=1}^6 \pi_7 D_{7s} +$$

$$+ [c_1 q + (1 - q)(c_2 + c_4)] \sum_{s=1}^6 \sum_{i=1}^6 \pi_i D_{is}$$

была минимальна при выполнении условий

$$\begin{cases} \pi_j - \sum_{i=1}^7 \sum_{s=1}^7 \pi_i q_{is} D_{sj} = 0, & j = 1, \bar{7}, \\ \sum_{j=1}^7 \pi_j = 1. \end{cases}$$

Решением этой задачи при заданных исходных данных является матрица решения

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & 1 & & & & & \\ & 1 & & & & & \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Она означает, что в состояниях 1—5 никаких работ проводить не следует (единицы расположены на главной диагонали), а состояния 6 и 7 включены в область  $\Gamma^*$  (при обнару-

жении этих состояний изменение обязательно, причем из каждого этого состояния наиболее целесообразно переводить ТЭЗ в состояние 1). Уровень  $i^*$  в данном случае соответствует состоянию 6.

Помимо матрицы  $D$  в результате решения определяются также значения  $\pi_F$  и  $\pi_{\Gamma^*}$ . Численно они равны  $\pi_F = 0,095$ ;  $\pi_{\Gamma^*} = 0,177$ .

Расчет характеристик  $T_F$ ,  $T_{\Gamma^*}$ ,  $\sigma_{F1}^2$ ,  $\sigma_{\Gamma^*}^2$  осуществляется на основе следующих формул:

$$\tau_1 = G\xi, \quad (11)$$

$$\tau_2 = [2G^{-1} - I] G^{-1} - \tau_{sq}, \quad (12)$$

где  $\tau_1$  — вектор, элементы которого представляют собой оценки среднего времени до попадания в состояние  $F$  при условии, что начальное состояние есть 1;  $\tau_2$  — вектор значений дисперсий;  $G^{-1} = (I - \hat{Q})^{-1}$  — обратное значение фундаментальной матрицы  $G$ ;  $I$  — единичная матрица;  $\xi$  — единичный вектор;  $\hat{Q}$  — матрица, получаемая из  $Q$  вычеркиванием строки и столбца с номером  $F$ ;  $\tau_{sq}$  — вектор-столбец, каждый элемент которого равен квадрату соответствующего элемента вектора  $\tau_1$ .

В случае, когда  $F = 7$ , все матрицы ( $G$ ,  $I$ ,  $\hat{Q}$ ) имеют размер  $6 \times 6$ , а векторы  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\tau_{sq}$ ,  $\xi$  имеют по шесть элементов. Для этого случая определяются значения  $T_F$  и  $\sigma_F^2$ . При определении  $T_{\Gamma^*}$  и  $\sigma_{\Gamma^*}^2$  формулы (11), (12) остаются справедливыми, но необходимо изменить размер матриц  $I$ ,  $Q$  и вектора  $\xi$ . Это выполняется следующим образом.

В матрице  $Q$  вычеркиваются строки и столбцы с номерами, входящими в область  $\Gamma^*$  (в примере это состояния 6 и 7). Определяется число оставшихся строк и столбцов — их пять. Поэтому единичная матрица  $I$  и вектор  $\xi$  имеют размер 5. Размер остальных матриц и векторов получается автоматически при вычислениях по формулам (11), (12).

При расчетах получено

$$T_F = 10,49; \quad T_{\Gamma^*} = 5,64;$$

$$\sigma_F^2 = 79,30; \quad \sigma_{\Gamma^*}^2 = 18,72.$$

Величина среднего простоя  $C \cong 9,44$  усл. ед. Число запасных элементов по (7), необходимых для замены только при отказах,

$$n(t) = \frac{1000}{10,49} + \\ + 1,645 \frac{\sqrt{79,30 \cdot 10^3}}{10,49^{3/2}} \cong 109.$$

Число операций ОПУТС по (8) при наличии области  $\Gamma^* = \{6, 7\}$

$$n_1(t) = \frac{1000}{5,64} + \\ + 1,645 \frac{\sqrt{18,72 \cdot 10^3}}{5,64^{3/2}} \approx 194.$$

Число запасных элементов по (10) с учетом возможностей регулировки

$$n_q(t) = \\ = 194 \left[ 1 - 0,8 \left( 1 - \frac{0,095}{0,177} \right) \right] \cong 122.$$

## Глава 9. Организация групповой эксплуатации сложных технических систем большого масштаба

### 1. ОСОБЕННОСТИ ОРГАНИЗАЦИИ ЭКСПЛУАТАЦИИ СИСТЕМ

Современное общественное производство включает многочисленные системы большого масштаба, представляющие собой объединение значительного числа однотипных сложных технических систем, например машин, называемое парком (таксомоторный парк города, парк тракторов совхоза, самолетный парк эксплуатационного предприятия гражданской авиации, парк ткацких станков текстильной фабрики и пр.). Характерная особенность парка заключается в том, что каждая отдельная сложная техническая система (СТС) может работать автономно, полностью выполняя возложенные на нее функции. Многочисленность парка обусловлена только необходимостью выполнения заданного объема работ.

Каждая СТС парка эксплуатируется по определенным правилам. Обычно жизненный цикл СТС содержит периоды использования по назначению, оперативное и периодическое (профилактическое) техническое обслуживание, ремонт и т. д.

*В процессе использования по назначению СТС создает продукцию.*

*Оперативное техническое обслуживание СТС (иначе техническое обслуживание при использовании) осуществляется в процессе использования по назначению, а также непосредственно перед или после использования. Например, перед и после рейса (использования по назначению) осуществляется заправка топливом такси и самолетов, их осмотр и устранение мелких неисправностей.*

*Периодическое (профилактическое) техническое обслуживание является бо-*

*лее трудоемкой формой обслуживания по сравнению с оперативным. Оно проводится или после определенной наработки СТС или по техническому состоянию — при достижении некоторыми параметрами критических значений.*

*Ремонт характеризуется значительной трудоемкостью по сравнению с техническим обслуживанием. При проведении ремонта СТС в течение длительного времени не используется по назначению.*

Условия проведения и содержание различных форм технического обслуживания и ремонта определяются соответствующими ресурсами, регламентами и технологиями.

В процессе эксплуатации СТС находятся в различных состояниях: использования по назначению, оперативного и периодического технического обслуживания, ремонта и пр. Эффективность эксплуатации СТС в первую очередь связана с использованием ее по назначению. Поэтому задача заключается в повышении доли времени использования СТС по назначению при приемлемых затратах на техническое обслуживание и ремонт.

Эта задача решается при организации эксплуатации парка СТС. Наличие не одной СТС, а парка приводит к следующим особенностям организации эксплуатации.

1) Многочисленность парка. Каждая СТС функционирует автономно, переходя из одного состояния эксплуатации в другое. Пусть число состояний эксплуатации отдельной СТС равно  $M$ , а число СТС парка  $N_T$ . Если все СТС парка идентичны, т. е. не делается различие между отдельными СТС, то состояние парка определяется

числом СТС, находящихся в каждом состоянии. Состояние парка определяется  $M$ -мерным вектором  $n = (n_1, n_2, \dots, n_M)$ , где  $n_1 + n_2 + \dots + n_M = N_T$ ,  $n_i$  — число СТС в состоянии  $i = \overline{1, M}$ . Общее число состояний парка равно  $C_{M+N_T-1}^{N_T}$ , т. е. числу сочетаний из  $M + N_T - 1$  по  $N_T$ . Например, если число состояний  $M = 5$ , а число СТС  $N_T = 9$ , то число состояний парка  $C_{13}^9 = 17\ 160$ . Значительное число состояний парка позволяет отнести его к системам большого масштаба и осложняет эффективную организацию эксплуатации.

Нетривиальной является даже проблема учета состояния парка. Обычно парк рассредоточен по некоторой территории. В центральный орган по каналам связи поступает информация о состоянии каждой СТС. На основании этой информации принимаются решения по использованию СТС парка, их техническому обслуживанию и ремонту.

2) Наличие общих ресурсов, централизованное планирование и управление. Часто потребность в использовании СТС по назначению (спрос на СТС) ограничена. Если число СТС, готовых к использованию по назначению, превышает потребность, то лишние СТС будут простаивать (например, простой такси вследствие отсутствия пассажиров, неполная коммерческая загрузка самолетов и т. п.). В связи с этим возникает понятие коммерческой эксплуатации парка, связанное с процессом использования по назначению. Термин техническая эксплуатация парка относится к процессу смены различных состояний. Возможен также случай, когда спрос настолько велик, что используются все возможные СТС. В этом случае понятие коммерческой эксплуатации не вводится и под эксплуатацией понимается техническая.

Если спрос ограничен, то выделение СТС на его удовлетворение производит некоторый центральный орган управления. Очень важна роль этого органа при проведении технического обслуживания и ремонта СТС. Обычно ресурсы, необходимые для проведения

технического обслуживания и ремонта, являются общими для всего парка и ограниченными. В качестве таких ресурсов могут выступать бригады технического обслуживания и используемые при этом средства механизации, контроля, диагностики и пр., а также ремонтные органы (мастерские, лаборатории, цеха и пр.).

Центральный орган осуществляет планирование и управление процессами технического обслуживания и ремонта СТС парка. Возникающие при этом задачи отличаются значительной сложностью из-за ограниченности имеющихся ресурсов и большой размерности задач (определяемой числом состояний парка).

3) Случайный характер процесса эксплуатации СТС парка. Процесс эксплуатации каждой СТС сопровождается случайными изменениями: отказы и неисправности СТС, случайная длительность пребывания в отдельных состояниях и пр. В связи с этим для описания и анализа процессов эксплуатации парка СТС применяются вероятностные методы.

4) Требование высокой эффективности эксплуатации. Парк, как система большого масштаба, имеет огромные материальные, трудовые и финансовые ресурсы. В связи с этим предъявляются повышенные требования к эффективности его использования. Это достигается путем решения задач проектирования организации эксплуатации парка, планирования и управления его работой. При проектировании принимаются решения о структуре, составе и характеристиках СТС парка, производительности и численности органов, производящих техническое обслуживание и ремонт, и пр. Характерно, что принимаемые решения остаются постоянными в течение всего периода эксплуатации парка.

Решения, принимаемые при планировании и управлении работой парка, существенным образом зависят от текущего или ожидаемого состояния парка. Например, решение о проведении ремонта данной СТС принимается с учетом состояния как парка в целом, так и данной СТС. Основная разница в задачах управления по сравнению с задачами планирования

включается в большей оперативности первых.

Эффективность эксплуатации определяется рядом показателей. Для многих систем большого масштаба важнейшими из них являются показатели безопасности (для транспортных средств, объектов атомной энергетики и объектов с вредными условиями труда и пр.). Первостепенное значение имеют также экономические показатели (себестоимость продукции, удельные капитальные вложения и пр.), показатели качества и т. п. Многообразие показателей, оценивающих эффективность эксплуатации, и высокие требования, предъявляемые к ним, — это существенная особенность систем большого масштаба.

Перечисленные особенности групповой эксплуатации СТС приводят к значительным трудностям при решении задач проектирования организации, планирования и управления. Для эффективного их решения используется современная техническая база: встроенные в СТС датчики, системы преобразования, передачи и коммутации информации, ЭВМ и пр. Не менее важным при решении задач является наличие математических моделей, позволяющих описывать процесс эксплуатации парка СТС, проводить его анализ и оптимизацию.

## 2. ФИЗИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКСПЛУАТАЦИИ СИСТЕМ

Показатели, характеризующие эффективность коммерческой эксплуатации, оценивают интенсивность ис-



Рис. 1. Диаграмма распределения фонда времени самолетного парка по состояниям эксплуатации

пользования СТС. Таковыми показателями являются: загрузка и скорость транспортных средств (самолетов, автобусов, поездов) при выполнении рейса, производительность и качество продукции станков и пр.

Основная цель *технической эксплуатации* заключается в обеспечении возможности использования СТС по назначению. Показатели, характеризующие эффективность *технической эксплуатации*, оценивают экстенсивность использования СТС. Таковыми показателями являются доли располагаемого фонда времени парка, которые СТС проводят в различных состояниях эксплуатации, среднее время пребывания и среднее число СТС в различных состояниях и т. п. В качестве примера на рис. 1 приведена диаграмма распределения фонда времени парка самолетов одного из эксплуатационных предприятий гражданской авиации.

Модели коммерческой и технической эксплуатации парка обычно отличаются друг от друга. Если первые описывают в основном только процесс использования СТС по назначению, то вторые рассматривают все состояния эксплуатации и позволяют определять показатели экстенсивности использования парка. (В этой главе рассматриваются вопросы только *технической эксплуатации* парка СТС).

Общее описание моделей эксплуатации. В качестве них обычно применяются модели теории массового обслуживания. Основными понятиями этой теории являются «обслуживание», «обслуживающий аппарат», «требование на обслуживание». С каждым состоянием эксплуатации связывается некоторый процесс «обслуживания». Для состояний *технического обслуживания* и *ремонта* «обслуживание» трактуется в прямом смысле — как *техническое обслуживание* или *ремонт*. Для состояния использования СТС по назначению под «обслуживанием» понимается занятость СТС в процессе использования.

Обслуживающие аппараты — это объекты, производящие обслуживание (бригады и средства *технического обслуживания* и *ремонта*, пользователи СТС и т. п.).

Требование на обслуживание (далее просто «требование») — это СТС, которая нуждается в определенном виде обслуживания.

Совокупность требований и обслуживающих аппаратов называется *системой массового обслуживания* (СМО). Множество всех требований СМО и образует парк СТС.

Если в модели рассматриваются все состояния эксплуатации СТС (обозначим их числом  $M$ ), то ее называют замкнутой СМО. Число требований в замкнутых СМО считается постоянным. Обозначим его  $N_T$ . При этом каждое состояние эксплуатации СТС (использование по назначению, техническое обслуживание, ремонт и пр.) называется узлом обслуживания. В каждом узле имеются свои обслуживающие аппараты, производящие обслуживание определенного вида. В связи с этим вместо термина СМО применяется термин «*сеть массового обслуживания*» (СеМО), подчеркивающий факт наличия СМО в каждом узле. Замкнутая СеМО (ЗСеМО) характеризуется постоянным числом требований в сети.

Смене состояний эксплуатации СТС отвечает циркуляция требований по узлам сети, описываемая случайным процессом  $n(t) = (n_1(t), n_2(t), \dots, n_M(t))$ , где  $t$  — временной параметр;  $n(t)$  —  $M$ -мерный вектор,  $i$ -я компонента которого  $n_i(t)$  равна числу требований в узле  $i$  (СТС в состоянии  $i$ ) в момент времени  $t$ ;  $M$  — число узлов в сети (состояний эксплуатации СТС). Поскольку общее число требований в сети (СТС парка) равно  $N_T$ , то в любой момент времени  $n_1(t) + n_2(t) + \dots + n_M(t) = N_T$ .

Наибольший практический интерес представляет стационарный (установившийся) режим функционирования СеМО (парка), т. е. режим, при котором распределение вероятностей случайного вектора  $n(t)$  (требований по узлам сети или СТС по состояниям эксплуатации) не зависит от времени  $t$ . Стационарный режим обычно достигается спустя некоторое время после начального момента, за которым следует переходный режим. Важность стационарного режима определяется

тем, что он значительно более длительный, чем переходный, в результате чего именно он определяет показатели эффективности эксплуатации. В дальнейшем рассматривается только стационарный режим.

Основная задача анализа ЗСеМО заключается в нахождении распределения вероятностей состояний сети. Отдельные состояния сети описываются  $M$ -мерным вектором  $n = (n_1, n_2, \dots, n_M)$ , где  $n_i$  — число требований в узле  $i$ .

Указанное распределение задано, если для всех возможных состояний известны вероятности  $P(n_1, n_2, \dots, n_M)$  того, что в первом узле находится  $n_1$  требование, во втором —  $n_2, \dots$ , в  $M$ -м —  $n_M$ .

В ряде случаев достаточно знать только маргинальные распределения и числовые характеристики, относящиеся к одному узлу: вероятность нахождения в  $i$ -м узле  $n$  требований  $P_i(n)$ , среднее число требований в узле

$$\bar{n}_i = \sum_{n=0}^{\infty} n P_i(n). \quad (1)$$

Отношение  $\bar{n}_i/N_T$  равно доле времени всех требований, которые они проводят в этом узле. Значения этого отношения для различных узлов (состояний эксплуатации) позволяют построить диаграмму, представленную на рис. 1.

Часто рассматриваются не все состояния эксплуатации СТС, а только одно из них или несколько. Например, выделяется состояние «периодическое (профилактическое) техническое обслуживание» с целью более детального анализа и последующей оптимизации этого обслуживания. Для рассматриваемого состояния определяются понятия «обслуживание» и «обслуживающий аппарат» (как и в случае замкнутых СеМО). Предполагается, что на этот аппарат (или аппараты, если их несколько) поступает «поток требований на обслуживание». Отличие от случая замкнутых СеМО заключается в том, что если ранее этот поток формировался автоматически (как совокупность требований, поступающих из других узлов в дан-

ный узел), то теперь его необходимо задавать специально (априори). Соответствующие СеМО называются разомкнутыми или открытыми (ОСеМО). В узлы ОСеМО требования могут поступать «извне». После окончания обслуживания требования могут покидать сеть. Состояние ОСеМО описывается  $M$ -мерным вектором с неотрицательными целочисленными координатами, определяющими число требований в узлах:  $n = (n_1, n_2, \dots, n_M)$ . Общее число требований в ОСеМО  $n_1 + n_2 + \dots + n_M$  — случайная величина.

При рассмотрении отдельного узла (состояния эксплуатации СТС) интерес представляют распределение числа требований, среднее число требований  $\bar{n}_i$  и среднее время пребывания требования  $\bar{v}_i$  в СМО. Для ОСеМО с несколькими узлами важны те же показатели, что и для ЗСеМО. Необходимо, однако, учитывать, что общее число требований в таких СеМО — величина переменная.

Для математического анализа СМО и СеМО необходимо ввести ряд уточнений. Первое из них относится к механизму обслуживания. Обычно исходят из предположения, что длительность обслуживания требования имеет экспоненциальное распределение. Физически это означает, что информация о том, сколько уже длилось обслуживание, не влияет на то, сколько еще времени это обслуживание будет продолжаться.

Предположение об экспоненциальном распределении позволяет существенно упростить анализ СМО и СеМО. Без такого предположения аналитические результаты в явном виде известны только для немногих случаев. Предположение об экспоненциальном распределении не приводит к заметным ошибкам (до 6—10 %). Если это является неприемлемым, то следует прибегнуть к методу имитационного (статистического) моделирования [47].

Однородная экспоненциальная ЗСеМО. Под однородностью ЗСеМО понимается, что все  $N$  требований, циркулирующих в сети, являются идентичными, т. е. считается, что они принадлежат одному классу.

Требование, покидающее узел  $i$ , поступает в узел  $j$  с вероятностью  $P_{ij}$ , где  $i, j = \overline{1, M}$ ,  $P_{i1} + P_{i2} + \dots + P_{iM} = 1$ ,  $P_{ij} \geq 0$ . Предполагается, что вероятности  $\{P_{ij}\}$  соответствуют эргодической цепи Маркова.

Механизм обслуживания в узлах сети следующий. Если в узле  $i$  имеется  $n_i$  требований, то продолжительность времени до первого окончания обслуживания требования в узле имеет экспоненциальное распределение с интенсивностью  $\mu_i(n_i)$ . Обслуженное требование покидает узел.

В частности, пусть в узле  $i$  имеется  $m_i$  идентичных аппаратов, каждый из которых одновременно обслуживает одно требование, причем длительность этого обслуживания имеет экспоненциальное распределение с интенсивностью  $\mu_i$ . Если число  $n_i$  находящихся в узле требований больше числа аппаратов  $m_i$ , то  $m_i$  требований обслуживаются, а остальные  $n_i - m_i$  (поступившие позже) ожидают начала обслуживания (дисциплина FIFO — «первым пришел — первым обслужен»). В этом случае введенная выше интенсивность  $\mu_i(n_i)$  определяется так:

$$\mu_i(n_i) = \begin{cases} \mu_i n_i & \text{при } n_i \leq m_i; \\ \mu_i m_i & \text{при } n_i > m_i. \end{cases} \quad (2)$$

Основные показатели эффективности данной ЗСеМО выражаются через решение системы линейных алгебраических уравнений

$$x_i = x_1 P_{1i} + x_2 P_{2i} + \dots + x_M P_{Mi}, \\ i = \overline{1, M}, \quad (3)$$

которое единственно с точностью до постоянного сомножителя.

Пусть  $S$  — множество состояний сети:  $S = \{(n_1, n_2, \dots, n_M) : n_1 + n_2 + \dots + n_M = N_T, n_i = 0, 1, \dots, \forall i = \overline{1, M}\}$ . Распределение вероятностей состояний для  $(n_1, n_2, \dots, n_M) \in S$

$$P(n_1, n_2, \dots, n_M) = \\ = \prod_{i=1}^M C_i(n_i) / G(N_T, M), \quad (4)$$

где

$$C_i(n_i) = x_i^{n_i} \prod_{j=1}^{n_i} \mu_i(j), \quad (5)$$

$G(N_T, M)$  — нормирующая константа, определяемая из условия равенства единице суммы вероятностей всех состояний:

$$G = \sum_{(n_1, \dots, n_M) \in S} \prod_{i=1}^M C_i(n_i). \quad (6)$$

Общее число состояний сети  $C_{N_T+M-1}^{N_T}$ .

Даже при небольших значениях  $N_T$  и  $M$  это очень большая величина.

Поэтому непосредственное суммирование по формуле (6) для нахождения  $G(N_T, M)$  практически неприемлемо. Существуют специальные алгоритмы, позволяющие более эффективно вычислять значение этой константы.

Первый такой алгоритм был предложен Бузеном [10, 25, 72]. Ниже приводится алгоритм [3], который определяет кроме нормирующей константы  $G(N_T, M)$  решение  $x_1, x_2, \dots, x_M$  системы уравнений (3) и маргинальные распределения числа требований в каждом из узлов. В алгоритме используются семейства констант

$$G(n, k) = \sum_{n_1+n_2+\dots+n_k=n} \prod_{v=1}^k C_v(n_v),$$

$$n = \overline{0, N_T}, \quad k = \overline{1, M};$$

$$\bar{G}(n, k) = \sum_{n_k+n_{k+1}+\dots+n_M=n} \prod_{v=1}^k C_v(n_v),$$

$$n = \overline{0, N_T}, \quad k = \overline{M, 1}.$$

Алгоритм вычисления семейства констант и маргинальных распределений состоит в следующем.

Шаг 1. Вычисление переменных  $\{r_{ij}^v\}$  по формулам:

$$r_{ij}^M = P_{ij}, \quad i, j = \overline{1, M},$$

$$r_{ij}^v = r_{ij}^{v+1} + r_{i, v+1}^{v+1} r_{v+1}^{v+1} / (1 - r_{v+1}^{v+1}),$$

$$v = \overline{M-1, 1}, \quad i, j = \overline{1, v}.$$

Шаг 2. Организация цикла по  $v = \overline{1, M}$ :

определение  $x_v$  по формулам:

$$x_1 = 1,$$

$$x_v = \frac{1}{1 - r_{vv}^v} \sum_{i=1}^{v-1} x_i r_{iv}^v, \quad v = \overline{2, M};$$

организация цикла по  $n = \overline{0, N_T}$ :  
вычисление  $C_v(n)$  по формуле (5) и  $G(n, v)$  по формулам:

$$G(n, 1) = C_1(n),$$

$$G(n, v) = \sum_{j=0}^n C_v(j) G(n-j, v-1),$$

$$v = \overline{2, M};$$

конец цикла по  $n$ ;

конец цикла по  $v$  [на последней итерации цикла определяется нормирующая константа  $G(N_T, M)$ ].

Шаг 3. Вычисление констант по следующим формулам для  $n = \overline{0, N_T}$ :

$$\bar{G}(n, M) = C_M(n),$$

$$\bar{G}(n, v) = \sum_{j=0}^n C_v(j) \bar{G}(n-j, v+1),$$

$$v = \overline{M-1, 1}.$$

Шаг 4. Нахождение маргинальных вероятностей  $P_k(n)$  пребывания в  $k$ -м узле  $n$  заявок ( $n = \overline{0, N_T}$ ):

$$P_M(n) = \frac{C_M(n) G(N_T - n, M - 1)}{G(N_T, M)};$$

$$P_1(n) = \frac{C_1(n) \bar{G}(N_T - n, 2)}{G(N_T, M)};$$

$$P_k(n) = C_k(n) \sum_{j=0}^{N_T-n} G(j, k-1) \times$$

$$\times \bar{G}(N_T - n - j, k + 1) / G(N_T, M),$$

$$k = \overline{2, M-1}.$$

Определение маргинальных числовых характеристик для отдельных узлов осуществляется по следующим формулам. Интенсивность потока (среднее в единицу времени число) требований, проходящих через  $i$ -й узел ( $i = \overline{1, M}$ ):

$$\lambda_i = x_i G(N_T - 1, M) / G(N_T, M). \quad (7)$$

## 1. Состояния процесса эксплуатации самолетного парка

Номер состояния $i$	Наименование состояния	Среднее время обслуживания $1/\mu_i$ , ч	Число аппаратов $m_i$
1	Оперативное техническое обслуживание в базовом аэропорту	1	4
2	Периодическое техническое обслуживание	10	1
3	Рейс	6	6
4	Задержка вылета в базовом аэропорту по метеоусловиям аэропорта назначения	10	10
5	Задержка в рейсе	10	10

2. Вероятности переходов между состояниями  $\{P_{ij}\}$ 

Номер текущего состояния $i$	Номер следующего состояния $j$				
	1	2	3	4	5
1	0	0,05	0,9	0,05	0
2	0,95	0	0	0,05	0
3	0,7	0,2	0	0	0,1
4	0,8	0	0,2	0	0
5	0,8	0,2	0	0	0

Среднее число требований в узле подсчитывается по формуле (1).

Если в узле  $i$  имеется  $m_i$  аппаратов и справедлива формула (2), то: коэффициент загрузки аппаратов узла

$$\rho_i = \lambda_i / (m_i \mu_i); \quad (8)$$

среднее число ожидающих начала обслуживания требований

$$\bar{r}_i = \bar{n}_i - \rho_i m_i; \quad (9)$$

среднее время ожидания требованием начала обслуживания

$$\bar{w}_i = \bar{r}_i / \lambda_i; \quad (10)$$

среднее время пребывания требования в узле

$$\bar{v}_i = \bar{w}_i + 1/\mu_i = \bar{n}_i / \lambda_i. \quad (11)$$

Пример. Рассматривается процесс эксплуатации самолетного парка одного предприятия гражданской авиации. Парк насчитывает 10 самолетов (без учета самолетов, находящихся в капитальном ремонте). Выделено пять состояний эксплуатации, которые перечислены в табл. 1.

В табл. 1 указаны также среднее время обслуживания и число обслуживающих аппаратов в каждом состоянии эксплуатации (узле ЗСеМО).

В процессе оперативного технического обслуживания осуществляется подготовка самолета к рейсу. Она проводится четырьмя комплексными бригадами. Периодическое техническое обслуживание производится одной бригадой. В состоянии «Рейс» под обслуживающими аппаратами понимаются рейсы, которые одновременно может выполнить предприятие. Для рассматриваемого примера их число равно шести (учитывается только дневная часть суток). Очередь самолетов, ожидающих обслуживания в этом состоянии, — это резервные самолеты, готовые к выполнению рейса.

Задержка вылета по метеоусловиям аэропорта назначения (состояние 4) происходит, если конечный аэропорт не принимает самолеты. «Обслуживание» в этом случае заключается в ожидании летной погоды в районе этого аэропорта. Число «обслуживающих аппаратов» следует принять равным числу самолетов, т. е. десяти. Это же справедливо и для состояния 5.

В табл. 2 приведена матрица вероятностей переходов между состояниями. Она была получена по фактическим данным методами статистики марковских процессов [47].

Задача заключается в определении следующих показателей эффективности процесса эксплуатации самолетного парка: среднее число самолетов, пребывающих в каждом состоянии; среднее число самолетов, ожидающих

3. Показатели эффективности процесса эксплуатации самолетного парка

Номер состояния $i$	$\bar{n}_i$	$\bar{r}_i$	$\rho_i$	$\bar{n}_i$	$\bar{r}_i$	$\rho_i$	$\bar{n}_i$	$\bar{r}_i$	$\rho_i$
	Одна бригада ПТО			Две бригады ПТО			Три бригады ПТО		
1	0,4	0	0,10	0,7	0	0,18	0,9	0	0,23
2	6,8	5,8	1,00	4,0	2,1	0,91	2,7	0,6	0,7
3	2,2	0	0,37	4,2	0,2	0,67	5,1	0,4	0,78
4	0,2	0	—	0,4	0	—	0,5	0	—
5	0,4	0	—	0,7	0	—	0,8	0	—

того или иного вида обслуживания; коэффициенты загрузки обслуживающих аппаратов; процент выполнения рейсов. На языке ЗСеМО этими величинами являются среднее число требований в  $i$ -м узле  $\bar{n}_i$ ,  $i = \overline{1,5}$ , средняя длина очереди  $\bar{r}_i$ , а также коэффициент загрузки аппаратов  $\rho_i$ . Процент выполнения рейсов соответствует значению коэффициента загрузки аппаратов  $\rho_3$  для состояния 3.

Результаты реализации алгоритма, приведенного на с. 177, содержатся в табл. 3.

Неоднородные ЗСеМО. В неоднородных сетях предполагается наличие нескольких классов требований. Так, парк может состоять из СТС различных типов, отличающихся друг от друга производительностью, выполняемыми функциями и т. п. Необходимость одновременного рассмотрения СТС разных типов может быть вызвана тем, что СТС работают не взаимно независимо (например, если ремонт СТС всех типов осуществляется одним ремонтным органом).

Различным классам требований могут соответствовать СТС с различной наработкой с начала эксплуатации или после последнего ремонта. Например, первый класс образуют СТС, имеющие наработку до 1000 ч, второй — 1000 ÷ 2000 ч и т. д. В процессе эксплуатации СТС их наработка изменяется, чему отвечает изменение класса требований. В связи с этим при анализе неоднородных ЗСеМО различают два случая: постоянное и переменное число требований одного класса. Во втором случае предполагаются известными вероятности  $P_{i, j, l, k}$  с которыми тре-

бование  $l$ -го класса, покидающее узел  $i$ , становится требованием  $k$ -го класса и поступает в узел  $j$ .

При рассмотрении некоторых задач возникают ЗСеМО с блокировкой. В этом случае требование не может поступить в некоторый узел или подмножество узлов, если число находящихся в них требований превосходит заданную величину. Этому соответствует, например, ситуация, когда СТС не направляется на ремонт или техническое обслуживание, если соответствующие аппараты перегружены.

Обобщением рассмотренной выше экспоненциальной ЗСеМО являются сети, в которых распределение времени обслуживания в узлах имеет распределение Кокса [10].

В условиях многих перечисленных обобщений продолжают оставаться справедливыми приведенные выше свойства и схема анализа сетей. В частности, имеет место мультипликативная форма (4) распределения вероятностей состояний сети, аналогичную структуру имеет алгоритм вычисления семейства нормирующих констант и маргинальных распределений и пр. [10, 25, 72].

Открытые сети массового обслуживания. В такие сети извне поступает поток требований с интенсивностью  $\lambda$ . Вероятность того, что требование будет направлено в  $i$ -й узел, есть  $P_{0i}$ , где  $i = \overline{1, M}$ ,  $P_{01} + P_{02} + \dots + P_{0M} = 1$ ,  $P_{0i} \geq 0$ . Следовательно, интенсивность потока требований, поступающего извне в  $i$ -й узел, равна  $\lambda P_{0i}$ .

Требование, убывающее из узла, может покинуть сеть. Обозначим соответствующую вероятность для  $i$ -го узла  $P_{i0} \geq 0$ , где  $i = \overline{1, M}$ ,  $P_{i0} + P_{i1} + \dots + P_{iM} = 1$ .

Обычно исходят из того, что поступающий поток требований является пуассоновским. Этот поток может быть охарактеризован двумя эквивалентными способами: 1) промежутки времени между поступлениями требований взаимно независимы и имеют одно и то же экспоненциальное распределение с интенсивностью  $\lambda$ ; 2) для потока выполняются условия ординарности, отсутствия последействия и стационарности. Ординарность означает невозможность одновременного поступления более одного требования. Отсутствие последействия — это взаимная независимость числа требований, поступающих за непересекающиеся интервалы времени. Стационарность означает, что число требований, поступающих за некоторый интервал времени, не зависит от расположения этого интервала на временной оси.

На практике наиболее часто нарушается условие стационарности потока требований. Интенсивность потока существенно меняется в течение суток, года и т. п. На рис. 2 представлена гистограмма интенсивности по-

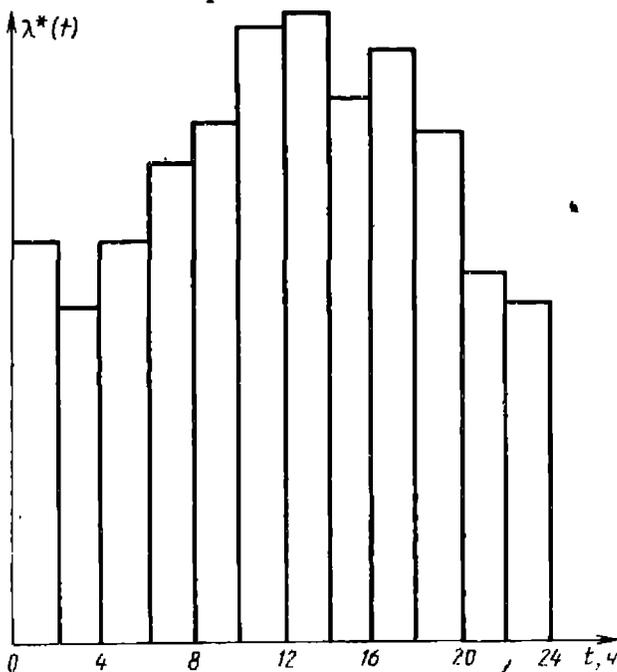


Рис. 2. Гистограмма интенсивности поступления потока требований:

$\lambda^*(t)$  — среднее число самолетов, поступающих в  $t$ -м часу

ступления самолетов на оперативное техническое обслуживание в Московском аэропорту в течение одних суток августа. Хотя в целом поток нестационарен, нетрудно выделить периоды, в течение которых можно принять предположение о стационарности: с 8 по 20 и с 20 по 8.

Для пуассоновского потока с интенсивностью  $\lambda$  вероятность поступления  $n$  требований за интервал времени  $t$

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n = 0, 1,$$

Пуассоновский поток имеет наибольшее распространение на практике. Этому имеется теоретическое обоснование, заключающееся в том, что данный поток является предельным в двух ситуациях. Во-первых, он возникает как результат наложения большого числа независимых или слабо зависимых потоков, каждый из которых удовлетворяет весьма общим условиям. Например, каждая отдельная СТС генерирует поток требований на определенные виды обслуживания. Если парк насчитывает большое число СТС, то суммарный поток на данный вид обслуживания будет близок к пуассоновскому.

Во-вторых, он возникает как результат прореживания потока достаточно общей структуры. Прореживание осуществляется в несколько этапов. На первом этапе каждое требование составляется с определенной вероятностью и сбрасывается с противоположной вероятностью. Для каждого последующего этапа эта же процедура повторяется с потоком, полученным на предыдущем этапе. Уже при небольшом числе этапов результирующий поток близок к пуассоновскому. В условиях эксплуатации парка СТС эта ситуация возникает, когда несколько аппаратов последовательно осуществляют поиск и устранение неисправностей СТС, причем этот процесс заканчивается, как только неисправность устранена. Тогда поток требований на поиск и устранение неисправностей, поступающий после первых нескольких аппаратов, приблизительно пуассоновский.

В дальнейшем поступающий в ОСеМО поток требований будет при-

ниматься пуассоновским. В случае неприемлемости такого предположения следует применять, как правило, метод имитационного моделирования.

Анализ открытых СеМО существенно проще анализа замкнутых СеМО. В большинстве случаев оказывается, что функционирование отдельных узлов можно рассматривать независимо друг от друга. При этом каждый узел — это СМО с пуассоновским входящим потоком требований [10], характеристики которой легко подсчитываются по известным формулам теории массового обслуживания. Следовательно, отпадает необходимость определения нормирующих констант, создающая основные вычислительные трудности при анализе ЗСеМО.

Далее приводятся подробные сведения об однородных экспоненциальных ОСеМО. Обобщения на случаи неоднородных требований, возможности блокировки и неэкспоненциального распределения длительности обслуживания содержатся в работах [10, 25, 72].

Однородные экспоненциальные ОСеМО. Их отличие от аналогичной ЗСеМО состоит только в том, что на любой узел  $i$  поступает внешний пуассоновский поток требований с интенсивностью  $\lambda P_{0i}$ . При покидании узла  $i$  требование убывает из сети с вероятностью  $P_{i0}$ . Предполагается, что вероятности  $\{P_{ij}\}$  соответствуют неразложимой цепи Маркова.

Система линейных алгебраических уравнений

$$x_i = P_{0i} + x_1 P_{1i} + x_2 P_{2i} + \dots + x_M P_{Mi}, \quad i = \overline{1, M},$$

имеет единственное решение. Это решение строго положительно и позволяет выразить интенсивность потока требований, проходящих через любой  $i$ -й узел, в виде  $\lambda_i = \lambda x_i$ ,  $i = \overline{1, M}$ .

Как и для ЗСеМО,  $\mu_i(n)$  — интенсивность обслуживания в  $i$ -м узле при наличии в нем  $n$  требований. Тогда стационарное распределение числа требований в узле  $i$

$$P_i(n) = \lambda_i^n / \left( G_i \prod_{j=1}^n \mu_i(j) \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $G_i$  — нормирующая константа, которая определяется так:

$$G_i = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_i^n / \prod_{j=1}^n \mu_i(j).$$

Указанное стационарное распределение существует для всех узлов, если для всех  $i = \overline{1, M}$  нормирующие константы конечны:  $G_i < \infty$ .

В частности, если имеет место условие (2), то справедлива формула Эрланга для СМО типа  $M/M/m/\infty$ :

$$P_i(n) = \begin{cases} P_i(0) \rho_i^n m_i^n / n!, & n = 0, 1, \dots, m_i; \\ P_i(0) \rho_i^n m_i^{m_i} / m_i!, & n = m_i + 1, m_i + 2, \end{cases}$$

где  $\rho_i = \lambda_i / (\mu_i m_i)$  — коэффициент загрузки обслуживающих аппаратов  $i$ -го узла;

$$P_i(0) = G_i^{-1} = \left( \sum_{j=0}^{m_i-1} (\rho_i m_i)^j \frac{1}{j!} + (\rho_i m_i)^{m_i} \frac{1}{m_i! (1 - \rho_i)} \right)^{-1} \quad (12)$$

Среднее число требований в узле

$$\bar{n}_i = \frac{\rho_i m_i + P_i(0) m_i^{m_i} \rho_i^{m_i+1}}{m_i! (1 - \rho_i)^2}. \quad (13)$$

Остальные средние характеристики подсчитываются по формулам (9) — (11).

Вследствие взаимной независимости состояний различных узлов распределение вероятностей числа требований в сети

$$P(n_1, n_2, \dots, n_M) = P_1(n_1) P_2(n_2) \dots P_M(n_M), \quad n_i = 0, 1, \dots, i = \overline{1, M}.$$

Пример. Рассматривается процесс ремонта некоторых однотипных СТС. Поступающие на ремонт СТС образуют пуассоновский поток требований с интенсивностью  $\lambda$ . Каждая СТС вначале проходит дефектацию (узел 1 на рис. 3). В результате дефектации

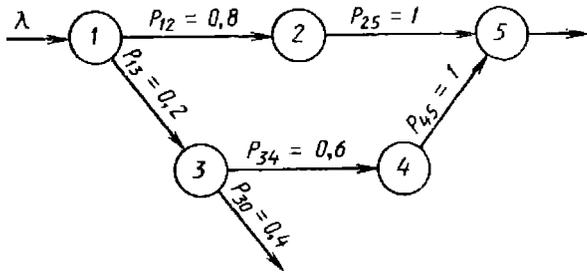


Рис. 3. Граф переходов требований между узлами

устанавливается, что СТС требует обычного или повышенного ремонта. На рис. 3 обычному ремонту соответствует узел 2, а повышенному — узлы 3 и 4. Вероятности этих ремонтов соответственно составляют  $P_{12} = 0,8$  и  $P_{13} = 1 - P_{12} = 0,2$ .

На первом этапе повышенного ремонта (узел 3) СТС с вероятностью  $P_{30} = 0,4$  может быть признано не подлежащим ремонту. С вероятностью  $P_{34} = 1 - P_{30} = 0,6$  СТС проходит повышенный ремонт (узел 4).

После окончания ремонтов обоих видов СТС поступает на заключительные операции (узел 5) и затем покидает систему ремонта.

Предполагается, что в каждом узле процесс описывается СМО типа  $M/M/m/\infty$ : пуассоновский поток требований,  $m$  обслуживающих аппаратов, экспоненциальное распределение времени обслуживания, неограниченное число мест для ожидания. Обозначим для  $i$ -го узла интенсивность обслуживания одного требования через  $\mu_i$ , а число аппаратов через  $m_i$ . Числовые значения этих величин:  $\mu_1 = 1,5$ ;

#### 4. Показатели эффективности системы ремонта

Номер узла $i$	$\rho_i$	$\bar{r}_i$	$\bar{n}_i$	$\bar{v}_i$	$\bar{w}_i$
1	0,83	4,57	6,24	2,50	1,83
2	0,50	1,10	2,10	1,05	0,55
3	0,71	1,79	2,50	5,00	3,58
4	0,67	0,38	2,38	7,93	1,23
5	0,77	2,19	3,73	1,62	0,95

$\mu_2 = 2$ ;  $\mu_3 = 0,7$ ;  $\mu_4 = 0,15$ ;  $\mu_5 = 1,5$ ;  
 $m_1 = 2$ ;  $m_2 = 2$ ;  $m_3 = 1$ ;  $m_4 = 3$ ;  
 $m_5 = 2$ .

Необходимо найти средние значения числа требований в системе ремонта  $\bar{n}$ , времени прохождения ремонта  $\bar{v}$ , коэффициенты загрузки аппаратов и т. п.

Вначале находятся интенсивности потоков требований, поступающих в узлы:  $\lambda_1 = \lambda = 2,5$ ;  $\lambda_2 = \lambda_1 P_{12} = 2$ ;  $\lambda_3 = \lambda_1 P_{13} = 0,5$ ;  $\lambda_4 = \lambda_3 P_{34} = 0,3$ ;  $\lambda_5 = \lambda_2 + \lambda_4 = 2,3$ . Затем по формулам (8), (12), (13), (9)—(11) для каждого узла  $i$  определяются коэффициенты загрузки аппаратов  $\rho_i$ , среднее число требований  $\bar{n}_i$ , среднее число ожидающих начала обслуживания требований  $\bar{r}_i$ , среднее время ожидания  $\bar{w}_i$  и среднее время пребывания требования в узле  $\bar{v}_i$  (табл. 4).

Среднее число требований, находящихся в системе,  $\bar{n} = \bar{n}_1 + \bar{n}_2 + \bar{n}_3 + \bar{n}_4 + \bar{n}_5 = 6,24 + 2,10 + 2,50 + 2,38 + 3,73 = 16,95$ .

Средняя длительность прохождения ремонта  $\bar{v}$  — это среднее время пребывания в сети требований, покидающих сеть из узла 5. Доля таких требований составляет  $P = P_{12} + P_{13} \times P_{34} = 0,8 + 0,2 \times 0,6 = 0,92$ . Поэтому (см. рис. 3)

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \bar{v}_1 + (P_{12} (\bar{v}_2 + \bar{v}_5) + \\ &+ P_{13} (\bar{v}_3 + P_{34} (\bar{v}_4 + \bar{v}_5))) / P = \\ &= 2,50 + (0,8 (1,05 + 1,62) + \\ &+ 0,2 (5,00 + 0,6 (7,93 + \\ &+ 1,62))) / 0,92 = 7,16. \end{aligned}$$

Пакеты прикладных программ для ЭВМ. Реализация алгоритмов анализа СеМО требует больших объемов вычислений и информации для хранения промежуточных результатов. Поэтому она осуществляется обычно на ЭВМ. В стране имеются пакеты прикладных программ для ЭВМ, предназначенные для этой цели. Один из них входит в пакет прикладных программ по теории массового обслуживания, хранящийся в лаборатории статистических методов МГУ им. М. В. Ломоносова. Другой имеется в Институте проблем управления (ИПУ АН СССР).

# Глава 10. Управляемые системы массового обслуживания как основа исследования эксплуатации систем большого масштаба

## 1. ОПИСАНИЕ И ФОРМАЛИЗАЦИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

В процессе эксплуатации систем большого масштаба осуществляются различного рода управления. Если процесс описывается на языке теории массового обслуживания, то это приводит к рассмотрению *управляемых систем массового обслуживания* (УСМО). В качестве элементов управления могут выступать: порядок принятия требований на обслуживание, назначение конкретного аппарата для проведения обслуживания данному требованию и т. п.

Ниже приводится несколько задач групповой эксплуатации СТС, показывающих, что наиболее естественным и простым способом они формализуются на языке УСМО.

**Задача 1.** Имеется одна бригада, производящая ремонт СТС. В зависимости от характера ремонтных работ и типа СТС различают  $L$  видов ремонта. Интенсивность поступлений СТС в ремонт  $l$ -го вида составляет  $\lambda_l$ . Бригада одновременно может производить только один ремонт. Среднее значение и дисперсия длительности ремонта  $l$ -го вида есть  $a_l$  и  $\sigma_l^2$ . Если в момент поступления очередной СТС бригада занята, то эта СТС простаивает в ожидании начала ремонта. При этом за каждую единицу времени простоя СТС в ожидании  $l$ -го вида ремонта начисляется штраф  $c_l$ .

Возможна конфликтная ситуация, когда после завершения очередного ремонта оказывается, что в ожидании ремонта простаивает несколько СТС. Задача управления заключается в выборе определенной СТС для проведения ремонта. Критерием оптимальности управления является средний

суммарный убыток от простоя СТС в единицу времени

$$u = \sum_{l=1}^L \lambda_l c_l \omega_l, \quad (1)$$

где  $\omega_l$  — среднее время ожидания СТС начала  $l$ -го вида ремонта.

Поставленная задача относится к классу задач УСМО: требованием является СТС, обслуживание заключается в ремонте, аппаратом служит бригада. Возможные виды ремонта соответствуют различным классам требований. Пусть потоки поступающих требований пуассоновские. Тогда рассматриваемая СМО описывается как  $\vec{M}_L | G | 1 | \infty : L$  входящих пуассоновских потоков, произвольное время обслуживания, один обслуживающий аппарат, неограниченная очередь ожидающих требований. Предполагается,

что выполняется неравенство  $\sum_{l=1}^L \lambda_l a_l < 1$ , обеспечивающее существование стационарного режима УСМО.

Оптимальное управление обеспечивает [34] приоритетная дисциплина обслуживания, при которой каждому классу ставится в соответствие определенный приоритет. В конфликтной ситуации на обслуживание принимается требование с большим приоритетом, а если таких требований несколько, то любое из них.

Пусть номер класса соответствует приоритету, так что первый класс имеет наивысший приоритет. Тогда среднее время ожидания начала обслуживания требований  $l$ -го класса

$$\omega_l = \frac{\theta}{2\rho_l \rho_{l-1}}, \quad l = \overline{1, L}, \quad (2)$$

где

$$\theta = \sum_{i=1}^L \lambda_i (a_i^2 + \sigma_i^2); \quad (3)$$

$$\rho_l = 1 - \sum_{i=1}^l \lambda_i a_i, \quad l = \overline{1, L}; \quad \rho_0 = 1. \quad (4)$$

Алгоритм оптимального управления, обеспечивающего минимум критерия (1), состоит в назначении требованиям приоритета в соответствии со значением отношения  $c_l/a_l$ : чем оно больше, тем больше должен быть приоритет. Если перенумеровать классы согласно уменьшению отношения  $c_l/a_l$ , то приведенные формулы позволяют найти значение критерия (1).

Пример. Пусть  $L = 3$ ;  $\lambda_1 = 0,1$ ;  $\lambda_2 = 0,1$ ;  $\lambda_3 = 0,2$ ;  $a_1 = 2$ ;  $a_2 = 1$ ;  $a_3 = 3$ ;  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 0$  (это соответствует постоянному времени обслуживания);  $c_1 = 22$ ;  $c_2 = 10$ ;  $c_3 = 15$ . Сравнение отношений показывает, что

$$\frac{c_1}{a_1} = \frac{22}{2} > \frac{c_2}{a_2} = \frac{10}{1} > \frac{c_3}{a_3} = \frac{15}{3},$$

поэтому нумерация классов требований соответствует оптимальным приоритетам: первый класс обслуживается раньше второго, а второй — раньше третьего.

Вычисления по формулам (2)—(4) показывают, что  $\theta = 2,3$ ;  $\rho_1 = 0,8$ ;  $\rho_2 = 0,7$ ;  $\rho_3 = 0,1$ ;  $\omega_1 = 1,437$ ;  $\omega_2 = 2,053$ ;  $\omega_3 = 16,428$ . Средний убыток (1) составляет 54,498. Это — наименьшее значение критерия (1). При любых других приоритетах оно больше. Например, если изменить приоритеты на противоположные по сравнению с оптимальными (наивысший — у третьего класса, наинизший — у первого), то средний убыток (1) возрастет до 149,5.

**Задача 2.** В условиях предыдущей задачи предполагается, что существуют ограничения на число требований каждого класса, которые могут ожидать начала обслуживания. Пусть число мест ожидания для требований  $l$ -го класса равно  $N_l$ ,  $l = \overline{1, L}$ . Тогда рассматриваемая СМО описывается как  $\vec{M}/G/1/N_i$ ,  $i = \overline{1, L}$ . Очередное требование, поступающее

в СМО и застающее все места своего класса занятыми, получает отказ и теряется. При этом за отказ в обслуживании одного требования  $l$ -го класса начисляется штраф  $d_l$ . Критерий эффективности (1) с учетом отказов принимает вид

$$u = \sum_{i=1}^L \lambda_i (c_i \omega_i + d_i q_i), \quad (5)$$

где  $q_l$  — вероятность отказа в обслуживании требования  $l$ -го класса.

Управление, как и прежде, заключается в назначении очередности принятия требования на обслуживание в моменты освобождения аппаратов. Однако, в отличие от задачи 1, оптимальные управления не являются приоритетными и имеют более сложную структуру.

**Задача 3.** Автоматизированная система диагностирования состояния СТС способна хранить в своей памяти информацию не более чем по  $N_c$  задачам. Задачи делятся на  $L$  классов, определяющих характер диагностических процедур. Поток задач  $l$ -го класса является пуассоновским с интенсивностью  $\lambda_l$ . Диагностирование осуществляется на  $m$  лабораторных установках ( $m < N_c$ ). Продолжительность диагностирования одной СТС является случайной величиной, имеющей экспоненциальное распределение со средним значением  $a$ .

За решение задачи  $l$ -го класса начисляется доход  $d_l$ , за каждую единицу времени ожидания или решения этой задачи — штраф  $c_l$ , а за работу лабораторной установки в течение единицы времени — расход  $b$ .

Управление заключается в возможности отказа от решения задач некоторых классов. Принятые задачи решаются в порядке их поступления.

В данном случае имеется СМО типа  $\vec{M}_L | M | m | N_c - m$ :  $L$  пуассоновских потоков требований (задач),  $m$  аппаратов (лабораторных установок), проводящих обслуживание (решение задач) в течение экспоненциально распределенного времени,  $N_c - m$  мест для ожидания требований в СМО. Состояние такой СМО описывается переменной  $n$ , принимающей целочис-

ленные неотрицательные значения от 0 до  $N_c$  и равной числу требований в СМО. Управление состоит в том, что для каждого состояния  $n$  указывается множество номеров входящих потоков  $K(n) \subset (1, 2, \dots, L)$ , требования которых принимаются на обслуживание.

Целью управления является максимизация среднего дохода в единицу времени, определяемого формулой

$$u = \sum_{n=0}^{N_c} P_n \sum_{l \in K(n)} \lambda_l (d_l - (c_l + b) a) - \sum_{n=m}^{N_c} P_n (n + 1 - m) \times \sum_{l \in K(n)} \lambda_l c_l a / m, \quad (6)$$

где  $P_n$  — стационарная вероятность состояния  $n$  СМО.

**Задача 4.** Имеется пуассоновский поток требований с интенсивностью  $\lambda$ , поступающий в СМО. Ограничений на число требований в СМО нет. Обслуживание требований может проводиться с различными интенсивностями, множество значений которых конечно и есть  $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ . Предполагается, что интенсивности пронумерованы в порядке возрастания:  $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k$ , причем  $\lambda < \mu_k$ . Длительности обслуживания при всех интенсивностях — взаимно независимые и экспоненциально распределенные случайные величины, не зависящие также от входящего потока требований. За каждую единицу времени пребывания в СМО  $n$  требований начисляется штраф  $c(n) \geq 0$  ( $n = 0, 1, \dots$ ). Функция  $c(n)$  является неубывающей по  $n$ , стремящейся к бесконечности при  $n \rightarrow \infty$ . За каждую единицу времени, в течение которой используется интенсивность  $k = \overline{1, K}$ , начисляется штраф  $h(k)$ . Предполагается, что с ростом интенсивности штраф увеличивается:  $h(1) \leq h(2) \leq \dots \leq h(K)$ .

Управление заключается в назначении интенсивности обслуживания, которую следует использовать при наличии в СМО требований  $n > 0$ . В ка-

честве критерия при этом служат средние расходы от функционирования СМО в единицу времени стационарного режима:

$$u = c(0) P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n (c(n) + h(k(n))), \quad (7)$$

где  $P_n$  — стационарная вероятность нахождения в СМО  $n$  требований ( $n = 0, 1, \dots$ );  $k(n)$  — номер интенсивности обслуживания, используемый при наличии в СМО  $n$  требований.

Состояние СМО определяется числом находящихся в ней требований. Пространство состояний  $S = (0, 1, 2, \dots)$ . Управления необходимо принимать для подпространства состояний  $S = (1, 2, \dots) \subset S$ . Его следует разбить на непересекающиеся множества  $S_1, S_2, \dots, S_K$ , причем для состояний из  $S_k$  использовать интенсивность обслуживания  $\mu_k$ .

Если выполняется условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} c(n) (\lambda / \mu_k)^n < \infty,$$

то оптимальное управление, минимизирующее выражение (7), задается набором  $k + 1$  чисел  $0 = i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_{k+1} = \infty$ . Эти числа определяют управление следующим образом: если число требований  $n$  в СМО находится в пределах  $i_k \leq n < i_{k+1}$ , то используется интенсивность  $\mu_k$ . Если  $i_k = i_{k+1}$ , то интенсивность  $\mu_k$  не используется. Такое управление называется монотонным: используемая интенсивность обслуживания — неубывающая функция  $k(n)$  числа требований  $n$  в СМО.

Тот факт, что оптимальное управление обладает свойством монотонности, существенно облегчает поиск такого управления. Однако и при известной структуре управления, задаваемой условием неубывания последовательности  $i_1, i_2, \dots, i_{k+1}$ , поиск этой последовательности является довольно трудоемкой задачей. Ввиду отсутствия окончательных аналитических результатов необходим численный алгоритм нахождения оптимального управления.

## 2. МОДЕЛИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Классификация задач УСМО. Задачи оптимизации групповой эксплуатации СТС делятся на два класса: задачи проектирования организации эксплуатации и задачи управления эксплуатацией. Этому соответствуют два класса оптимизационных задач теории массового обслуживания, с помощью которой описываются процессы групповой эксплуатации: оптимальное проектирование СМО и оптимальное управление процессами обслуживания.

При проектировании выбираются структура и параметры СМО, которые в процессе работы СМО являются неизменными (число обслуживающих аппаратов, закрепление классов требований за аппаратами, интенсивность поступления и обслуживания требований и пр.). Критерием оптимизации служит математическое ожидание некоторого функционала  $F$  от состояния СМО, взятое по стационарному распределению:

$$u = \sum_i P_i F(i), \quad (8)$$

где  $P_i$  — стационарная вероятность состояния  $i$  СМО.

Критерии оптимизации (6) и (7) непосредственно имеют структуру, аналогичную (8). Эту же структуру имеют критерии (1) и (5), но в неявном виде: величины  $\omega_i$  и  $q_i$  являются линейными функциями вероятностей  $\{P_i\}$ .

Если известен аналитический вид критерия, то проблема оптимизации сводится к задаче нелинейного программирования.

Отличительной особенностью управления является то, что принимаемые решения обычно зависят от состояния СМО. В теории управляемых систем массового обслуживания различают задачи управления: 1) дисциплиной обслуживания; 2) потоком поступающих требований; 3) механизмом обслуживания. Критерий оптимальности имеет вид (8) и обычно носит стоимостной характер, учитывающий штраф за отказ в обслуживании требований, за ожидание в течение каждой единицы времени и т. п.

Управление дисциплиной обслуживания. Типичные примеры такого управления содержатся в описанных выше задачах 1 и 2. Управление заключается в принятии решения об очередности обслуживания требований, имеющихся в СМО, т. е. решения о дисциплине обслуживания.

Наиболее распространенными являются *приоритетные* дисциплины обслуживания. В этом случае предполагается, что поступающие требования делятся на  $L$  классов. За каждым классом требований закрепляется определенный приоритет, задаваемый числами от 1 до  $L$  (по числу классов), причем разным классам соответствуют разные приоритеты. Чем меньше номер класса, тем выше приоритет. Если требование при поступлении в СМО застает хотя бы один аппарат свободным, то требование сразу принимается на обслуживание. В противном случае вступает в силу дисциплина приоритетов.

Приоритетные дисциплины бывают двух типов: относительные и абсолютные. В случае относительных приоритетов управление допускается только в момент окончания обслуживания. В каждый из таких моментов на обслуживание принимается то из ожидающих требований, которое имеет наивысший приоритет (меньший номер класса приоритета). Если требований с наивысшим приоритетом несколько, то из них берется то, которое раньше поступило в СМО. Требование, заставшее при своем поступлении в СМО все аппараты занятыми, ожидает начала обслуживания, так что в случае относительных приоритетов прерывание обслуживания не происходит.

Относительные приоритеты рассмотрены применительно к задаче 1. Были приведены алгоритм назначения оптимальных приоритетов и формулы для вычисления критерия эффективности.

В случае абсолютных приоритетов управление допускается как в момент окончания обслуживания, так и в момент поступления требований. В моменты окончания обслуживания действует правило относительных приоритетов. В момент поступления требования, имеющего больший приоритет,

чем приоритет обслуживаемого требования, происходит прерывание обслуживания и принятие на обслуживание поступившего требования. Требование, обслуживание которого было прервано, возвращается в очередь и принимается на обслуживание после того, как в СМО не останется требований более высокого приоритета. При этом возможны следующие варианты: «дообслуживание» требования, т. е. продолжение обслуживания требования; обслуживание требования заново. Следовательно, в случае абсолютных приоритетов возможно прерывание обслуживания, причем в каждый момент времени обслуживается то требование из находящихся в СМО, которое имеет наивысший приоритет.

В задачах групповой эксплуатации абсолютные приоритеты возникают, если возможны поломки (отказы) обслуживаемых аппаратов. Поломка трактуется как требование наивысшего приоритета, прерывающее проводимое обслуживание до момента восстановления работоспособности аппарата.

В условиях задачи 1 в случае «дообслуживания» требований формула (2) принимает вид

$$\omega_l = \frac{\theta_l}{\rho_l \rho_{l-1}}, \quad l = \overline{1, L},$$

где

$$\theta_l = \sum_{i=1}^l \lambda_i (a_i^2 + \sigma_i^2).$$

Если, кроме того, продолжительность обслуживания имеет экспоненциальное распределение, то оптимальным будет то же правило назначения приоритетов, что и для относительных приоритетов: большему значению  $c_l/a_l$  должен соответствовать более высокий приоритет.

В условиях задачи 1 относительные приоритеты являются оптимальными в широком классе стационарных марковских управлений, не допускающих прерывания обслуживания. Однако это не всегда так. В частности, не будут они оптимальными в условиях задачи 2. В этом случае приходится применять динамические при-

оритеты, образующие более широкий класс управлений.

В условиях задач 1 и 2 состояние СМО описывается  $L$ -мерным вектором  $n = (n_1, n_2, \dots, n_L)$ , компоненты которого принимают целочисленные неотрицательные значения  $0, 1, 2, \dots$  и трактуются как число требований соответствующих классов, имеющих в СМО. Если число мест в СМО для требований  $l$ -го класса ограничено величиной  $N_l$ , то  $n_l$  меняется от 0 до  $N_l$ . Если такого ограничения нет (как в задаче 1), то  $n_l$  может принимать любые целые неотрицательные значения.

Пространство  $S$  состояний СМО — это множество всех векторов с указанными выше ограничениями. Выделим из этого пространства состояние  $0 = (0, 0, \dots, 0)$ , когда требований в СМО нет и никакого управления не требуется. Обозначим  $S' = S - \{0\}$ . Разобьем  $S'$  на  $L$  непересекающихся множеств  $S_1, S_2, \dots, S_L$  таких, что в множество  $S_l$  могут входить только те состояния  $n$ , у которых  $l$ -я компонента отлична от 0 ( $n_l > 0$ ). Каждому рассматриваемому разбиению соответствует следующее управление: в состоянии  $n$ , принадлежащем множеству  $S_l$ , следует принимать на обслуживание требования  $l$ -го класса. Momentами времени, в которые осуществляется управление, могут быть или моменты окончания обслуживаний (динамические относительные приоритеты), или моменты окончания обслуживаний и поступления требований в СМО (динамические абсолютные приоритеты).

Обычные приоритеты являются статическими: каждому классу требований присваивается постоянный приоритет. Динамические (ситуационные) приоритеты предусматривают возможность изменения приоритетов в зависимости от текущего состояния СМО, т. е. от ситуации.

Динамические приоритеты включают как частный случай обычные приоритеты. Действительно, если при обычных приоритетах классы требований пронумерованы по убыванию приоритетов, то их можно описать как динамические приоритеты следующего вида: в множество  $S_l$  входят

те и только те состояния СМО, которые соответствуют наличию требований  $l$ -го класса в СМО и отсутствию требований классов с первого по  $(l - 1)$ -й включительно.

В общей теории управляемых случайных процессов динамические приоритеты являются частным случаем управлений в марковских и полумарковских процессах. В связи с этим все методы нахождения оптимальных управлений для последних (см. гл. 3) пригодны для определения оптимальных динамических приоритетов.

Управление потоком поступающих требований. Пример такого управления описан в задаче 3. Управление заключается в принятии решения об отказе некоторым требованиям в обслуживании или, в более общем случае, в изменении интенсивности входящего потока требований.

Принимаемые решения зависят от состояния СМО. При этом значение имеет не только общее число требований в СМО, но и то, к каким классам принадлежат эти требования.

Управление механизмом обслуживания. Пример такого управления дает задача 4. Управление заключается в принятии решения об интенсивности обслуживания поступающих требований (путем подключения дополнительных аппаратов, изменения скорости обслуживания и т. п.).

Обычно задачи управления СМО (как и рассмотренные задачи) описываются в рамках теории *управляемых цепей Маркова* (УЦМ), *марковских и полумарковских процессов* (УМП и УПМП).

Методы решения задач. Из рассмотренных выше задач только задача 1 имеет простое аналитическое решение. В остальных случаях приходится прибегать к численным алгоритмам нахождения оптимальных управлений. Эта ситуация является типичной для УСМО: получить аналитическое решение в замкнутой форме удается очень редко.

Поскольку процессы, протекающие в УСМО, являются частным случаем управляемых случайных процессов, то в качестве численных алгоритмов используются универсальные алгоритмы, описанные в гл. 3 и работах

[14, 21, 42, 68]. В частности, если процесс массового обслуживания является марковским или полумарковским, то применяются алгоритмы Ховарда, линейного программирования и др.

Для применения указанных алгоритмов УСМО описывается как УЦМ, УМП или УПМП. Специфика конкретной задачи УСМО выражается в том, что возможность применения альтернативных решений существует только для определенных состояний и моментов времени: в моменты поступления или окончания обслуживания требований, в произвольные моменты времени и т. п.

Основная трудность, возникающая при использовании универсальных алгоритмов в задачах УСМО, заключается в наличии большого числа состояний процесса обслуживания (десятки и сотни тысяч). Во-первых, это приводит к значительным затратам времени и памяти ЭВМ. Во-вторых, вследствие округлений при машинных вычислениях это приводит к такому накоплению ошибок, что окончательные результаты становятся неверными.

Свободен от перечисленных недостатков итерационный алгоритм Уайта—Швейцера нахождения оптимальных управлений, специально приспособленный для решения задач большой размерности. Однако отмеченные выше вычислительные проблемы остаются. Часто они преодолеваются путем использования особенностей конкретной УСМО. В результате возникают специальные алгоритмы нахождения оптимальных управлений.

Специальные алгоритмы разрабатываются на основе выявления свойств или структуры оптимальных управлений в рассматриваемой УСМО. В результате устанавливается, что в классе возможных управлений оптимальные управления содержатся в более узком подклассе, характеризуемом данными свойствами или структурой. Например, в задаче 1 класс динамических приоритетов сужен (без ущерба для значения критерия эффективности) до подкласса относительных и абсолютных приоритетов. Часто удается доказать свойство монотонности управления. Соответствующий пример содержится в задаче 4.

Специальные алгоритмы необходимы также в тех случаях, когда на допустимые управления накладываются особые ограничения. Например, решения, принимаемые в состояниях некоторого подмножества, должны быть одинаковыми и т. п. Эти ограничения нельзя учесть при использовании универсальных алгоритмов, поскольку в них предполагается, что для каждого состояния решение выбирается независимо от решений в других состояниях.

Основным достоинством универсальных алгоритмов нахождения оптимальных управлений в марковских и полумарковских процессах является их широкая сфера применения и наличие программных реализаций на современных ЭВМ. Соответствующие программы имеются в фонде прикладных программ по теории массового обслуживания, хранящемся в лаборатории статистических методов МГУ им. М. В. Ломоносова. Можно рекомендовать также пакет программ СТРАТЕГ, предназначенный для оптимизации УСМО.

**Пример.** Проиллюстрируем на задаче 2, как процессы в УСМО описываются в виде управляемых полумарковских процессов (УПМП). Для такой формализации необходимо: 1) описать множество состояний процесса  $S$ , предполагаемое конечным; 2) для каждого состояния  $i \in S$  указать множество принимаемых в нем решений  $K_i$ ; 3) для каждого состояния  $i \in S$  и решения  $k \in K_i$  в этом состоянии определить средний доход  $r_i^k$ , получаемых за единицу времени пребывания в этом состоянии, и среднее время  $\tau_i^k$  пребывания в состоянии  $i$ , а также вероятность переходов  $p_{ij}^k$  в другие состояния  $j \in S$ . При стационарной стратегии  $\Pi = (k(1), k(2), \dots)$  для каждого состояния  $i \in S$  выбирается решение  $k(i) \in K_i$ , принимаемое в этом состоянии. Стратегия называется оптимальной, если она максимизирует средний доход (8), получаемый за единицу времени функционирования процесса. Такая стратегия и определяет оптимальное управление.

В условиях задачи 2 управление осуществляется в моменты окончания обслуживаний. В каждый из таких моментов состояние описывается  $L$ -мерным вектором  $n = (n_1, n_2, \dots, n_L)$ , где  $n_l$  — число требований  $l$ -го класса, находящихся в СМО (без учета обслуженного требования),  $n_l = 0, 1, \dots, N_l, l = \overline{1, L}$ .

Если в некоторый рассматриваемый момент  $\sum_{l=1}^L n_l > 0$ , т. е. в СМО имеется хотя бы одно требование, то следует принять решение о назначении обслуживания. Требование  $l$ -го класса может быть назначено на обслуживание в том случае, если оно имеется в системе, т. е.  $n_l > 0$ . Предполагаем также, что какое-то из имеющихся требований должно быть назначено на обслуживание обязательно. Поэтому множество решений  $K_n$ , принимаемых в состоянии  $n = (n_1, n_2, \dots, n_L)$ , описывается номерами классов требований, имеющихся в СМО:  $K_n = \{l : n_l > 0, l = \overline{1, L}\}$ .

Пусть в состоянии  $n = (n_1, n_2, \dots, n_L)$ , где  $n_k > 0$ , принимается решение  $k \in K_n$ . Это означает, что на обслуживание принимается требование  $k$ -го класса. Поскольку возможны относительные приоритеты, то среднее время пребывания конструируемого полумарковского процесса (ПМП) в данном состоянии  $n$  при решении  $k$  есть  $\tau_n^k = a_k$ .

Для выражения других характеристик УПМП через заданные характеристики СМО обозначим

$$V(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Предположим, что длительность обслуживания рассматриваемого требования равняется  $y$ . Поскольку требования различных классов поступают взаимно независимо в соответствии с пуассоновскими потоками, то вероятность перехода из состояния  $n = (n_1, n_2, \dots, n_L)$  в состояние  $n' =$

$= (n'_1, n'_2, \dots, n'_L)$ , где  $n_k \geq 0$  и  $n_l \leq n'_l \leq N_l$ , за время  $y$

$$\prod_{l=1}^L \left\{ V(N_l - n'_l) (\lambda_l y)^{n'_l - n_l} \times \right. \\ \times e^{-\lambda_l y} / (n'_l - n_l)! + \\ \left. + (1 - V(N_l - n'_l)) \times \right. \\ \left. \times \sum_{t=N_l - n_l}^{\infty} (\lambda_l y)^t e^{-\lambda_l y} / t! \right\}. \quad (9)$$

Пусть функция распределения продолжительности обслуживания требований  $k$ -го класса есть  $B_k(y)$ . С учетом математического ожидания величины, определяемой (9) по этому распределению, и факта окончания обслуживания этого требования находим вероятности переходов между состояниями при выбранном решении  $k \in K_n$ :

$$P_{nn'}^k = \int_0^{\infty} \prod_{l=1}^L \left\{ V(N_l - n'_l) \times \right. \\ \times (\lambda_l y)^{n'_l - n_l + \delta_k(l)} \times \\ \times e^{-\lambda_l y} / (n'_l - n_l + \delta_k(l))! + \\ \left. + (1 - V(N_l - n'_l)) \times \right. \\ \left. \times \sum_{t=N_l - n_l + \delta_k(l)}^{\infty} (\lambda_l y)^t e^{-\lambda_l y} / t! \right\} \times \\ \times dB_k(y), \quad n_k > 0; \\ n_l - \delta_k(l) \leq n'_l \leq N_l, \quad l = \overline{1, L};$$

$$P_{0n'} = \sum_{k=1}^L \lambda_k P_{e_k n'}^k \left/ \sum_{l=1}^L \lambda_l, \quad 0 \leq n'_l \leq \right. \\ \left. \leq N_l, \quad l = \overline{1, L}, \right.$$

где  $\delta_k(l) = 1$  при  $l = k$  и  $0$  при  $l \neq k$ ,  $e_k$  —  $L$ -мерный вектор, у которого  $k$ -я компонента равна единице, а остальные — нулю.

Не оговоренные выше вероятности переходов равны нулю. Отметим, что поскольку в состоянии  $0 = (0, 0, \dots, 0)$

решение не принимается, то переменная  $k$  для соответствующей вероятности  $P_{0n'}$  опущена.

Аналогичным образом подсчитываются средние убытки от отказа в обслуживании и ожидания требований, приходящиеся на единицу времени:

$$r_n^k = \sum_{l=1}^L \left\{ (n_l - \delta_k(l)) c_l + \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} \left\{ \sum_{t=N_l - n_l + \delta_k(l)}^{\infty} (d_l(t - N_l + \right. \right. \\ \left. \left. + n_l - \delta_k(l)) + c_l y (N_l - n_l + \right. \right. \\ \left. \left. + \delta_k(l))/2 \right) (\lambda_l y)^t e^{-\lambda_l y} / t! + \right. \\ \left. + c_l y \sum_{t=0}^{N_l - n_l - 1 + \delta_k(l)} \frac{t}{2} (\lambda_l y)^t \times \right. \\ \left. \times e^{-\lambda_l y} / t! \right\} dB_k(y) / a_k,$$

$$n_k > 0, \quad 0 \leq n_l \leq N_l, \quad l = \overline{1, L},$$

$$r_0 = \sum_{k=1}^L \lambda_k r_{e_k}^k \left/ \sum_{l=1}^L \lambda_l. \quad (10) \right.$$

Итак, все составляющие управляемого полумарковского процесса заданы, и задача определения оптимального управления в рассматриваемой СМО сводится к нахождению оптимальной стратегии для этого процесса. Необходимо только учитывать, что универсальные алгоритмы приводят к максимизации показателя эффективности (дохода). Поэтому в задачах минимизации необходимо изменить на противоположный знак величины дохода  $r_i^k$ , получаемого в различных состояниях. Так, в рассмотренной задаче правые части равенств (10) должны быть взяты со знаком минус.

Пример. Рассмотрим следующие числовые данные для условий задачи 2: количество классов требований  $L = 2$ ; число мест ожидания для требований первого класса  $N = 2$ , второго

класса  $N_2 = 4$ ; длительности обслуживания всех требований имеют экспоненциальное распределение с одним и тем же средним  $a_1 = a_2 = 1$ ; штраф за ожидание начала обслуживания не начисляется:  $c_1 = c_2 = 0$ ; штрафы за отказ в обслуживании требования первого и второго класса одинаковы:  $d_1 = d_2$ .

На рис. 1 представлена диаграмма оптимального управления при интенсивностях потоков требований первого класса  $\lambda_1 = 0,2$  и второго класса  $\lambda_2 = 0,5$ . Клетка с координатами  $n_1$  и  $n_2$  соответствует состоянию СМО в момент окончания очередного обслуживания, когда в очереди находится  $n_1$  требований первого класса и  $n_2$  второго. Выделенная жирной линией граница разделяет состояния, при которых на обслуживание принимаются требования первого и второго классов. Например, при  $n_1 = 1$  и  $n_2 = 3$  на обслуживание принимается требование второго класса.

Эффективность использования оптимального управления по сравнению с фиксированными приоритетами иллюстрируется графиком рис. 2. На нем ось абсцисс соответствует интенсивности потока требований второго класса  $\lambda_2$ . На оси ординат отмечена относительная эффективность, вычисляемая по формуле

$$\eta = \frac{u^* - u_{\Phi}}{u_{\Phi}} 100 \%,$$

где  $u^*$  и  $u_{\Phi}$  — значения критерия эффективности (5) при оптимальном управлении и фиксированных приоритетах соответственно.

На рис. 2 штриховые линии, имеющие в обозначении букву *a*, показывают сравнительную эффективность по отношению к фиксированным (постоянным) приоритетам требований первого класса; имеющие букву *b* — требований второго класса. Сплошные линии показывают минимальную эффективность, когда фиксированные приоритеты выбираются оптимальным образом. Различные кривые графика соответствуют различным значениям интенсивности потока требований первого класса  $\lambda_1$ .



Рис. 1. Диаграмма оптимального управления:

$n_i$  — число требований  $i$ -го класса ( $i = 1, 2$ )

Из графика (см. рис. 2) видно, что при  $\lambda_1 = 0,2$  и  $\lambda_2 = 0,5$  эффективность введения оптимального управления составляет не менее 17 %.

Оптимальные управления рассмотренного примера найдены с помощью алгоритмов, приведенных ниже.

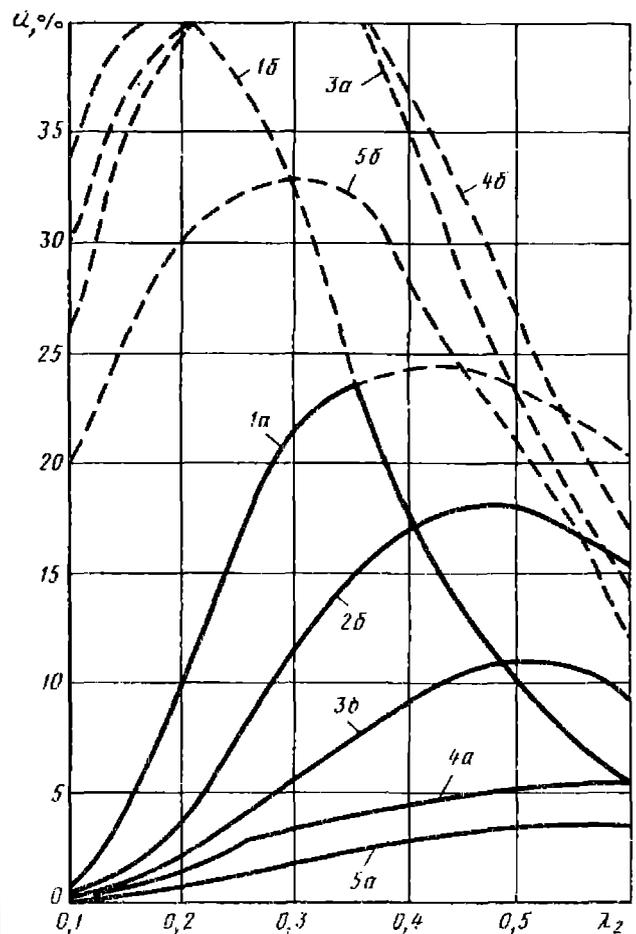


Рис. 2. Эффективность введения оптимальных управлений:

1 —  $\lambda_1 = 0,1$ ; 2 —  $\lambda_1 = 0,2$ ; 3 —  $\lambda_1 = 0,3$ ; 4 —  $\lambda_1 = 0,4$ ; 5 —  $\lambda_1 = 0,5$

### 3. АЛГОРИТМЫ УАЙТА—ШВЕЙЦЕРА НАХОЖДЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ

Решение задач УСМО, характеризующихся очень большим числом состояний, с помощью алгоритмов Ховарда и линейного программирования часто оказывается невозможным вследствие потребности в огромной памяти ЭВМ и наращивании ошибок вычислений. Уайт и Швейццер [86] предложили итерационный алгоритм, специально приспособленный для решения задач большой размерности.

Итерационный алгоритм Уайта для цепей Маркова (ЦМ). Задача линейного программирования для марковских процессов принятия решений без переоценки (см. гл. 3) эквивалентна задаче нахождения переменных  $v_1, v_2, \dots, v_N, g$ , минимизирующих значение  $g$  при ограничениях

$$r_i^{k(i)} + \sum_{j=1}^N P_{ij}^{k(i)} v_j \leq g + v_i, \\ i = \overline{1, N}, \quad k(i) \in K_i. \quad (11)$$

Действительно, последняя задача является двойственной к исходной задаче. Из теории двойственности линейного программирования известно, что набор переменных  $\{x_i^k\}, \{v_i\}$  и  $g$ , одновременно удовлетворяющий ограничениям прямой и двойственной задач, дает оптимальные решения этих задач, причем оптимальное значение критерия эффективности прямой задачи равно  $g$ . Алгоритм Ховарда, обеспечивая на каждом шаге допустимость решения прямой задачи, последовательно уменьшает «невязку» для ограничений двойственной задачи, вплоть до выполнения этих ограничений.

Система ограничений (11) эквивалентна системе

$$v_i = \max_{k \in K_i} \left\{ r_i^k - g + \sum_{j=1}^N P_{ij}^k v_j \right\}, \\ i = \overline{1, N}. \quad (12)$$

Если при любой стратегии  $\Pi \in \mathcal{K} = K_1 \times K_2 \times \dots \times K_N$  матрица переходных вероятностей соответствует наличию только одного существенного

класса состояний, то имеется решение последнего уравнения, единственное для  $g$ , а для  $\{v_i\}$  — с точностью до постоянного слагаемого [86]. Для исключения этой неоднозначности полагают  $v_N = 0$ .

Алгоритмы Ховарда и алгоритмы линейного программирования — это специальные алгоритмы решения последнего функционального уравнения. В вычислительной математике их относят к прямым алгоритмам (методам). Идея их заключается в том, что при каждой стратегии  $\Pi$  ищется точное решение системы линейных алгебраических уравнений. Процедура нахождения решения системы уравнений чередуется с процедурой улучшения стратегии. В отличие от прямых алгоритмов в итерационных алгоритмах обе эти процедуры совмещаются, т. е. при данной стратегии решение системы не находится, а делается только один шаг итерационной процедуры нахождения решения, после чего снова делается попытка улучшения стратегии и т. д.

Итерационный алгоритм нахождения оптимальных стратегий в УМЦ впервые предложил Уайт, представив систему уравнений (12) с учетом  $v_N = 0$  в виде

$$g = \max_{k \in K_N} \left\{ r_N^k + \sum_{j=1}^{N-1} P_{Nj}^k v_j \right\}; \quad (13) \\ v_i = \max_{k \in K_i} \left\{ r_i^k - g + \sum_{j=1}^{N-1} P_{ij}^k v_j \right\}, \\ i = \overline{1, N-1}.$$

Пусть  $g(t)$  и  $v_i(t)$ ,  $i = \overline{1, N-1}$  — приближения, получаемые на  $t$ -м шаге. Итерационная процедура записывается для  $t = 0, 1, 2, \dots$  так:

$$g(t) = \max_{k \in K_N} \left\{ r_N^k + \sum_{j=1}^{N-1} P_{Nj}^k v_j(t) \right\}; \quad (14) \\ v_i(t+1) = \max_{k \in K_i} \left\{ r_i^k - g(t) + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{N-1} P_{ij}^k v_j(t) \right\}, \quad i = \overline{1, N-1},$$

причем начальные условия  $\{v_i(0)\}$  могут быть произвольными.

Если для каждой оптимальной стратегии (тем более, если для каждой стратегии  $\Pi \in K$ ) матрица переходных вероятностей соответствует наличию одного существенного класса состояний, причем все ее возвратные состояния неперiodичны, то итерационная процедура сходится, причем  $g(t) \rightarrow g$ ,  $v_i(t) \rightarrow v_i$ ,  $i = \overline{1, N-1}$ , где  $g$  и  $\{v_i\}$  — значения, соответствующие оптимальной стратегии [86].

Самую оптимальную стратегию образуют решения, выбираемые для различных состояний согласно (14).

При применении итерационных методов важна точность полученного на данном шаге решения. Если ввести замену переменных  $g(t) = y_N(t)$ ,  $v_i(t) = y_i(t-1) - y_N(t-1)$ ,  $i = \overline{1, N-1}$ , то итерационная процедура (14) записывается в виде

$$y_i(t) = \max_{k \in K_i} \left\{ r_i^k + \sum_{j=1}^N P_{ij}^k (y_i(t-1) - y_N(t-1)) \right\}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Очевидно, что  $y_N(t) \rightarrow g$ ,  $y_i(t) \rightarrow v_i + g$ ,  $i = \overline{1, N-1}$ .

Одони показал, что вычисляемые на  $t$ -м шаге по формулам

$$g^+(t) = \max_{i=\overline{1, N}} \{y_i(t) - y_i(t-1) + y_N(t-1)\}, \quad (15)$$

$$g^-(t) = \min_{i=\overline{1, N}} \{y_i(t) - y_i(t-1) + y_N(t-1)\}$$

значения  $g^+(t)$  и  $g^-(t)$  являются соответственно верхней и нижней границами максимального дохода  $g$ , т. е.

$$g^-(t) \leq g \leq g^+(t), \quad t = 1, 2,$$

В обозначениях переменных  $g(t)$  и  $\{v_i(t)\}$ , используемых в процедуре

(14), эти границы вычисляются по формулам  $g^+(t) =$

$$= \max \left\{ g(t), \max_{i=\overline{1, N-1}} \{v_i(t+1) - v_i(t) + g(t)\} \right\},$$

$$g^-(t) = \min \{g(t),$$

$$\min_{i=\overline{1, N-1}} \{v_i(t+1) - v_i(t) + g(t)\} \}.$$

Следовательно, на любом шаге  $t$  итерационной процедуры (14) и (15) значение максимального дохода может быть оценено, например, по формуле  $g^* = (g^+(t) + g^-(t))/2$ . Как только разница  $g^+(t) - g^-(t)$  становится меньше заданной точности  $\varepsilon > 0$ , итерационная процедура прекращается.

Практика применения алгоритма Уайта показывает, что обычно оптимальная стратегия  $\Pi$  находится за небольшое число итераций. Намного больше итераций требуется, чтобы при неизменной стратегии  $\Pi$  сузить до необходимой величины  $\varepsilon$  разницу между верхней  $g^+(t)$  и нижней  $g^-(t)$  границами для  $g$ .

При решении практических задач большой размерности, когда число состояний  $N$  насчитывает несколько тысяч, осложнение вызывает, как правило, не скорость сходимости, а объем потребной памяти ЭВМ. Итерационный алгоритм Уайта для своей реализации требует минимального объема памяти (порядка  $N$ ): только для хранения текущих значений переменных  $g(t)$  и  $\{v_i(t)\}$ . Это намного меньше, чем в рассмотренных в гл. 3 алгоритмах Ховарда и линейного программирования.

Итерационный алгоритм Швейцера для полумарковских процессов (ПМП). Задача линейного программирования для ПМП эквивалентна двойственной ей задаче нахождения переменных  $v_1, v_2, \dots, v_{N-1}$  и  $g$ , минимизирующей значение  $g$  при ограничениях

$$r_i^k(t) \tau_i^k(t) + \sum_{j=1}^{N-1} P_{ij}^k(t) v_j \leq v_i + g \tau_i^k(t), \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Последняя система неравенств эквивалентна системе

$$v_i = \max_{k \in K_i} \left\{ r_i^k \tau_i^k - g \tau_i^k + \sum_{j=1}^{N-1} P_{ij}^k v_j \right\}, \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Непосредственное применение алгоритма Уайта для решения последнего функционального уравнения (для нахождения оптимальных стратегий в управляемых полумарковских процессах) невозможно, поскольку возможны случаи отсутствия сходимости. П. Швейцера [86] модифицировал этот алгоритм, добавив в соответствующие формулы член, обеспечивающий сходимость.

Итерационный алгоритм Швейцера выглядит следующим образом. Выбирается положительная постоянная  $\theta$  из условия

$$(1 - P_{ii}^k) \theta / \tau_i^k < 1, \quad i = \overline{1, N}, \quad (16)$$

$$k \in K_i.$$

Отправляясь от произвольных начальных значений  $\{v_i(0)\}$  (обычно полагаемых равными нулю), проводятся последовательные итерации по формулам для  $t = 0, 1, 2, \dots$

$$g(t) = \max_{k \in K_N} \left\{ r_N^k \tau_N^k + \sum_{j=1}^{N-1} P_{Nj}^k v_j(t) \right\}; \quad (17)$$

$$v_i(t+1) = v_i(t) + \theta \max_{k \in K_i} \left\{ \left( r_i^k \tau_i^k + \sum_{j=1}^{N-1} P_{ij}^k v_j(t) - g(t) \tau_i^k \right) / \tau_i^k \right\}.$$

Постоянная  $\theta$  определяет величину изменения  $g(t)$  и  $\{v_i(t)\}$  за одну итерацию. Если  $\theta$  выбрано очень малым, то сходимость итерационной процедуры будет медленной. Если  $\theta$  очень большое, так что условие (16) нарушено, то процесс может расходиться.

Если для любой оптимальной стратегии (тем более для любой стратегии) матрица переходных вероятностей со-

ответствует наличию одного существенного класса состояний, то итерационный алгоритм (17) будет сходиться при любых положительных  $\theta$ , удовлетворяющих условию (16). При этом матрица переходных вероятностей может иметь периодические и несущественные состояния.

В случае ЦМ, когда  $\tau_i^k = 1$  для всех  $i = \overline{1, N}$ ,  $k \in K_i$ , сходимость будет иметь место для любого  $\theta < 1$ . Полагая  $\theta = 1$ , получаем из (17) алгоритм Уайта (14). Необходимо, однако, отметить, что алгоритм Швейцера для ЦМ с  $\theta < 1$  является более предпочтительным по сравнению с алгоритмом Уайта, если нет уверенности в отсутствии периодических состояний ЦМ: в этом случае алгоритм Уайта может расходиться, в то время как алгоритм Швейцера гарантирует сходимость при любом  $\theta < 1$ .

Для значения максимального дохода справедливы следующие верхняя  $g^+(t)$  и нижняя  $g^-(t)$  границы, получаемые на шаге  $t$ :

$$g^+(t) = \max \left\{ g(t), \max_{i=\overline{1, N-1}} \max_{k \in K_i} \left\{ \left( r_i^k \tau_i^k + \sum_{j=1}^{N-1} P_{ij}^k v_j(t) - v_i(t) \right) / \tau_i^k \right\} \right\};$$

$$g^-(t) = \min \left\{ g(t), \min_{i=\overline{1, N-1}} \max_{k \in K_i} \left\{ \left( r_i^k \tau_i^k + \sum_{j=1}^{N-1} P_{ij}^k v_j(t) - v_i(t) \right) / \tau_i^k \right\} \right\}.$$

Как и для ЦМ, последовательность  $g^+(t)$  монотонно убывает к  $g$ , а  $g^-(t)$  — монотонно возрастает. Для достаточно большого числа итераций они обеспечивают узкие границы для  $g$ .

Для алгоритма Швейцера справедливо все то, что и для алгоритма Уайта. Алгоритм, аналогичный рассмотрен-

ным итерационным алгоритмам и основанный на функциональном уравнении (12), был предложен применительно к марковским процессам В. В. Мова. Приведенный пример был рассчитан на ЭВМ с помощью описанных алгоритмов.

#### 4. СРАВНЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАЗЛИЧНЫХ АЛГОРИТМОВ НАХОЖДЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ

Основными критериями вычислительной эффективности алгоритмов являются: объем информации, используемой в процессе работы алгоритма; точность вычислений; потребное время (или число арифметических операций) для нахождения оптимальных стратегий. При решении задач даже небольшой размерности значения этих критериев таковы, что для успешной реализации алгоритмов необходимо применение ЭВМ. В дальнейшем это будет предполагаться и эффективность различных алгоритмов будет сравниваться путем сопоставления необходимых объемов памяти и времени работы ЭВМ, а также точности получаемого решения.

Потребный объем информации (памяти ЭВМ). В процессе работы алгоритмов используются объемы информации следующих порядков ( $N$  — число состояний МЦ, МП или ПМП):

$N^2$  — алгоритм Ховарда (для решения системы линейных алгебраических уравнений);

$N^3$  — алгоритм модифицированного симплекс-метода [46] (для хранения матрицы  $B^{-1}$ , обратной к базисной);

$N \sum_{i=1}^N |K_i|$  — алгоритм симплекс-метода (для хранения симплексной таблицы), где  $|K_i|$  — число возможных решений в состоянии  $i$ ;

$N$  — итерационные алгоритмы (Уайта и Швейцера) (для хранения вычисляемых по формулам (14) и (17) значений  $g(t)$  и  $\{v_i(t)\}$  для текущего шага).

Для хранения исходных данных необходим дополнительный объем. Исключение составляет только сим-

плекс-метод линейного программирования, поскольку симплексная таблица содержит всю необходимую информацию. Тем не менее обычно оказывается, что объем информации, описывающий исходные данные, очень незначителен (см., например, задачу 2), а на основании этой информации вычисление значений характеристик УМЦ, УМП и УПМП (вероятностей переходов  $\{P_{ij}^k\}$ , средних времен пребывания  $\{\tau_i^k\}$  и средних доходов  $\{r_i^k\}$ ) осуществляется по простым формулам и практически не требует дополнительного объема памяти. В этом случае «вычислимой» информации приведенные объемы информации являются достаточными.

Сопоставление приведенных алгоритмов показывает, что минимальный объем памяти требуется для итерационных алгоритмов Уайта и Швейцера, а максимальный — для алгоритма симплекс-метода. При решении практических задач число состояний рассматриваемых процессов насчитывает несколько тысяч [42]. В связи с этим итерационные алгоритмы являются фактически единственно пригодными для таких задач. По этой же причине алгоритм симплекс-метода практического применения не находит.

Точность вычислений. Наихудшим по точности является алгоритм симплекс-метода. Это обусловлено необходимостью пересчета на каждом шаге симплексной таблицы, содержащей всю исходную информацию, и накоплением ошибок округления. Во избежание последнего все вычисления необходимо проводить с двойной точностью.

При применении стандартных пакетов линейного программирования для ЭВМ [46] при больших размерностях задачи часто получаются недопустимые решения: для некоторых состояний выбирается по два решения, а для других — вообще ни одного решения. Это объясняется тем, что в стандартном симплекс-методе не учитывается отмечавшаяся в гл. 3 особенность базисных решений задачи; постоянно нарастают ошибки округления.

В модифицированном симплекс-методе опасность наращивания ошибок округления существенно меньше, по-

скольку на каждом шаге пересчитывается только обратная матрица  $B^{-1}$  (а не все исходные данные, как в симплекс-методе). Кроме того, обратную матрицу можно после определенного числа шагов корректировать по следующему хорошо известному в вычислительной математике методу. Пусть  $D$  — квадратная невырожденная матрица, для которой имеется обратная матрица  $D^{-1}$ . Если  $D^{-1}(0)$  исходное приближение к обратной матрице  $D^{-1}$ , то итерационная процедура уточнения обратной матрицы такова:

$$D^{-1}(t+1) = D^{-1}(t) (I - DD^{-1}(t)), \quad t = 0, 1, \dots,$$

где  $I$  — единичная матрица.

Указанная процедура повторяется до получения наперед заданной точности  $0 < \varepsilon < 1$ . Сама точность определяется через норму  $\|D\|$  матрицы  $D = (d_{ij})$ , где  $d_{ij}$  —  $(i, j)$ -й элемент матрицы  $D$ , например

$$\|D\| = \max_i \left\{ \sum_j d_{ij} \right\}.$$

Как только достигнута заданная точность, т. е.  $\|I - DD^{-1}(t)\| < \varepsilon$ , итерационная процедура прекращается и в качестве уточненного значения обратной матрицы  $D^{-1}$  принимается  $D^{-1}(t)$ .

Далее, если известна верхняя граница точности  $\varepsilon_0$ , соответствующая исходному приближению  $D^{-1}(0)$ :  $\|D^{-1}(0) - D^{-1}\| < \varepsilon_0$ , то точность вычисленной на  $t$ -й итерации обратной матрицы  $D^{-1}(t)$  оценивается неравенством

$$\|D^{-1}(t) - D^{-1}\| \leq \|D^{-1}(0)\| \varepsilon_0^{2^t} / (1 - \varepsilon_0).$$

Отсюда следует, что потребное число итераций  $t^*$  оценивается неравенством

$$t^* \leq (\ln(\ln(\varepsilon(1 - \varepsilon_0) / \|D^{-1}(0)\|)) / \ln \varepsilon_0) / \ln 2.$$

Для алгоритмов Ховарда, Уайта и Швейцера опасность наращивания ошибок округления существенно меньше, чем для алгоритмов линейного программирования.

Потребное время (число арифметических операций) для нахождения оп-

тимальной стратегии. Оптимальная стратегия в принципе может быть найдена простым перебором, поскольку общее число стратегий конечно и равно  $|K_1| |K_2| \dots |K_N|$ , где  $|K_i|$  — число решений в состоянии  $i \in S$ . Однако полный перебор в реальных задачах практически невозможен в связи с большим числом стратегий: для каждой стратегии необходимо решить систему из  $N$  линейных алгебраических уравнений для нахождения стационарных вероятностей состояний  $\{P_i\}$  и затем найти значение критерия (8). При переходе от одной стратегии к другой нет уверенности, что новая стратегия лучше или хуже, что приводит к необходимости полного перебора. В противоположность этому в алгоритме Ховарда и линейного программирования каждая новая рассматриваемая стратегия улучшает значение критерия эффективности. Этим и определяется их вычислительная эффективность.

Недостатком алгоритма Ховарда является необходимость многократного решения системы из линейных алгебраических уравнений. В отличие от него в стандартных методах линейного программирования в каждый момент времени в памяти ЭВМ хранится или симплексная таблица (для симплекс-метода) или обратная к базису матрица  $B^{-1}$  (для модифицированного симплекс-метода). Кроме того, в базис каждый раз вводится ровно один столбец. После ввода его пересчет элементов симплексной таблицы или матрицы  $B^{-1}$  и вектора текущих цен происходит с помощью одной итерации процедуры Гаусса. Последнее требует значительно меньше вычислений, чем решение системы  $N$  линейных алгебраических уравнений, необходимое в алгоритме Ховарда.

Сравним вычислительную эффективность алгоритмов Ховарда и модифицированного симплекс-метода. Наиболее трудоемким этапом алгоритма Ховарда является решение системы  $N$  линейных алгебраических уравнений. При применении наиболее эффективного алгоритма Гаусса для этого потребуется число операций умножения, имеющее порядок  $N^3/2$ . Пусть при этом вводится  $m$  новых решений (век-

торов-столбцов). Для ввода одного нового решения в модифицированном симплекс-методе необходимо около  $2N^2$  операций умножения, а для  $m$  решений —  $2mN^2$ . Следовательно, алгоритм модифицированного симплекс-метода заведомо более эффективен, если  $N/4m > 1$ . В алгоритме Ховарда вводятся все  $m$  решений, для которых относительные оценки оказываются положительными. После ввода  $m' < m$  из  $m$  намеченных решений может оказаться, что ввод некоторых (или всех) оставшихся решений приводит к ухудшению критерия. Однако в алгоритме Ховарда вводятся все намеченные решения. В алгоритме модифицированного симплекс-метода эта возможность исключается, поскольку каждому вводу решения предшествует операция оценивания.

Чем ближе к окончанию решения задачи, тем «в среднем» все меньше и меньше число вводимых в стратегию новых решений (столбцов в базис). Этим и объясняется низкая эффективность алгоритма Ховарда: отношение  $N/4m$  при этом будет существенно больше единицы.

Приведенный анализ показывает, что более эффективным в вычислительном отношении по сравнению с алгоритмом Ховарда является алгоритм модифицированного симплекс-метода.

Сходимость итерационных алгоритмов Уайта и Швейцера в существенной степени зависят от выбранной точности вычислений  $\varepsilon$ , а также от параметра  $\theta$  (для алгоритма Швейцера). Существуют различные приемы ускорения сходимости [основанные, например, на экстраполяции значений среднего дохода  $g(t)$ ]. В общем подходящие значения  $\varepsilon$  и  $\theta$  подбираются экспериментально.

Таким образом при большом числе состояний процесса (до тысячи и более) итерационные алгоритмы Уайта и Швейцера вследствие приемлемых объемов необходимой памяти являются единственно пригодными. При небольшом и среднем числе состояний рекомендуется применять модифицированный симплекс-метод линейного программирования. При использовании его следует исключить возможность ввода в базис двух решений для одного

состояния, а также периодически корректировать обратную базисной матрицу  $B^{-1}$ , как это было описано выше.

## 5. АЛГОРИТМ ДЛЯ ПОЛУМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ ТИПА РАЗМНОЖЕНИЯ И ГИБЕЛИ

Использование особенностей конкретных процессов позволяет предложить алгоритмы нахождения оптимальных стратегий, существенно более эффективные по сравнению с универсальными алгоритмами. Примером может служить полумарковский процесс размножения и гибели, находящий широкое применение при решении задач эксплуатации и ремонта различных технических систем [1].

УПМП размножения и гибели характеризуется тем, что, находясь в любом состоянии, он может непосредственно перейти только в соседние состояния. Точнее, из состояния  $i = 2, \overline{N-1}$  при решении в этом состоянии  $k \in K_i$  процесс переходит в состояние  $i-1$  с вероятностью  $p_i^k$  и в состояние  $i+1$  с дополнительной вероятностью  $q_i^k = 1 - p_i^k$ , причем  $p_i^k \geq 0$  и  $q_i^k \geq 0$  при всех  $k \in K_i$ .

Из «крайних» состояний 1 и  $N$  процесс с вероятностью единица переходит соответственно в состояния 2 и  $N-1$  при всех решениях. Пусть  $\tau_i^k$  и  $r_i^k$  — соответственно среднее время пребывания и средний доход за единицу времени пребывания в состоянии  $i$  при решении  $k \in K_i$ . Необходимо найти стратегию, максимизирующую доход в единицу времени стационарного режима  $g$ .

Метод решения. Для произвольной стратегии  $\Pi = (k(1), k(2), \dots, k(N))$  окрестность — это множество стратегий, отличающихся от данной не более чем одной компонентой. Справедливо следующее утверждение [1]: для любого конечного УПМП, такого, что при любой стратегии имеет место один эргодический класс состояний, каждый локальный оптимум среднего дохода  $g(\Pi)$  совпадает с глобальным. Этот факт позволяет искать оптимальную

стратегию методом локального поиска, заменяя на каждом шаге решение только для одного состояния.

Для фиксированной стратегии  $\Pi$  обозначим  $M_i^+(\Pi)$  и  $R_i^+(\Pi)$  средние значения времени и дохода от момента попадания процесса в состояние  $i+1$  до первого попадания в состояние  $i$ , где  $i = \overline{1, N-1}$ ;  $M_i^-(\Pi)$  и  $R_i^-(\Pi)$  — то же для состояний  $i-1$  и  $i$ , где  $i = \overline{2, N}$ :  $M_N^+(\Pi) = R_N^+(\Pi) = M_1^-(\Pi) = R_1^-(\Pi) = 0$ . Поскольку рассматривается процесс размножения и гибели, то  $M_i^+(\Pi)$  и  $R_i^+(\Pi)$  не зависят от решений  $k(1), k(2), \dots, k(i)$ , а  $M_i^-(\Pi)$  и  $R_i^-(\Pi)$  — от  $k(i), k(i+1), \dots, k(N)$ .

Если в стратегии  $\Pi$  для состояния  $i$  заменить решение  $k(i)$  на  $k \in K_i$ , то новые средние значения времени и дохода между соседними попаданиями процесса в состояние  $i$  можно вычислить по формулам

$$\begin{aligned} M_i(\Pi, k) &= \tau_i^k + P_i^k M_i^-(\Pi) + \\ &+ q_i^k M_i^+(\Pi), \quad (18) \\ R_i(\Pi, K) &= \tau_i^k r_i^k + P_i^k R_i^-(\Pi) + \\ &+ q_i^k R_i^+(\Pi). \end{aligned}$$

Попадание процесса в фиксированное состояние  $i$  можно трактовать как точку регенерации процесса, поэтому средний доход от функционирования в единицу времени

$$g(\Pi) = R_i(\Pi, k(i))/M_i(\Pi, k(i)). \quad (19)$$

Замена в состоянии  $i$  текущего решения  $k(i)$  на  $k$  приведет к росту среднего дохода тогда и только тогда, когда

$$g(\Pi) < R_i(\Pi, k)/M_i(\Pi, k). \quad (20)$$

Эта формула позволяет последовательно просматривать состояния и решения в них с целью улучшения стратегии. Просмотр состояний целесообразно организовать вначале в одну сторону (например, от 1 до  $N$ , чему будет соответствовать значение переменной  $\delta = 1$ ), а потом в другую (от  $N$  до 1, причем  $\delta = -1$ ). Если в течение

просмотра в одну сторону стратегия улучшится, то будем полагать  $\chi = 1$  и продолжать поиск оптимальной стратегии. Если стратегия не улучшится, то она является оптимальной.

Формальная запись алгоритма такова.

**Шаг 0.** Выберем некоторую стратегию  $\Pi = (k(1), k(2), \dots, k(N))$ . Положим  $M_N^+(\Pi) = R_N^+(\Pi) = M_1^-(\Pi) = R_1^-(\Pi) = 0$ . Вычислим рекуррентно для  $i = N-1, N-2, \dots, 1$  значения

$$\begin{aligned} M_i^+(\Pi) &= (\tau_{i+1}^{k(i+1)} + q_{i+1}^{k(i+1)} \times \\ &\times M_{i+1}^+(\Pi))/P_{i+1}^{k(i+1)}, \\ R_i^+(\Pi) &= (\tau_{i+1}^{k(i+1)} r_{i+1}^{k(i+1)} + \\ &+ q_{i+1}^{k(i+1)} R_{i+1}^+(\Pi))/P_{i+1}^{k(i+1)}. \end{aligned}$$

Найдем  $g(\Pi)$  по формулам (18) и (19) при  $i = 1, k = k(1)$ . Положим  $i = 2, \delta = -1, \chi = 1$ .

**Шаг 1.** Вычислим  $i = i + \delta$ . Найдем  $k \in K_i$ , для которого выполняется условие (20). Если такого  $k$  нет, то переходим к шагу 2.

**Шаг 2.** Если  $i = N$ , то

$$\begin{aligned} M_{N-1}^+(\Pi) &= \tau_N^{k(N)}, \quad R_{N-1}^+(\Pi) = \\ &= \tau_N^{k(N)} r_N^{k(N)}, \end{aligned}$$

а если  $i = 1$ , то

$$\begin{aligned} M_2^-(\Pi) &= \tau_1^{k(1)}, \quad R_2^-(\Pi) = \\ &= \tau_1^{k(1)} r_1^{k(1)}, \end{aligned}$$

и в обоих случаях переходим к шагу 4. В противном случае переходим к шагу 3.

**Шаг 3.** Если  $\delta = 1$ , то

$$\begin{aligned} M_{i+1}^-(\Pi) &= (\tau_i^{k(i)} + \\ &+ P_i^{k(i)} M_i^-(\Pi))/q_i^{k(i)}, \\ R_{i+1}^-(\Pi) &= (\tau_i^{k(i)} r_i^{k(i)} + \\ &+ P_i^{k(i)} R_i^-(\Pi))/q_i^{k(i)} \end{aligned}$$

и перейдем к шагу 1. При  $\delta = -1$  вычислим

$$M_{i-1}^+(\Pi) = (\tau_i^{k(i)} + q_i^{k(i)} M_i^+(\Pi)) / P_i^{k(i)}, R_{i-1}^+(\Pi) = \tau_i^{k(i)} r_i^{k(i)} + q_i^{k(i)} R_i^+(\Pi) / P_i^{k(i)}$$

и перейдем к шагу 1.

Шаг 4. Если ни для какого состояния не было изменено решение, т. е.  $\chi \neq 1$ , то оптимальная стратегия найдена и есть  $\Pi = (k(1), k(2), \dots, k(N))$ , а максимальный доход в единицу времени составляет  $g(\Pi)$ . Если  $\chi = 1$ , то  $\chi = 0$ ,  $\delta = -\delta$  и перейдем к шагу 1.

Для уменьшения объема вычислений целесообразно запоминать массивы  $M_i^+(\Pi)$ ,  $R_i^+(\Pi)$ ,  $M_i^-(\Pi)$  и  $R_i^-(\Pi)$ , отвечающие текущей стратегии  $\Pi$ . При этом массивы  $M_i^+(\Pi)$  и  $M_i^-(\Pi)$ , а также  $R_i^+(\Pi)$  и  $R_i^-(\Pi)$  можно совместить. Действительно, если  $\delta = 1$  (просмотр состояний идет с первого по  $N$ -е) и в данный момент исследуется состояние  $i$ ,  $i = \overline{2, N-1}$ , то значения  $M_j^+(\Pi)$  и  $R_j^+(\Pi)$  для  $j = \overline{1, i-1}$  не определены и не используются. Если  $\delta = -1$ , то не определены и не используются значения  $M_j^-(\Pi)$  и  $R_j^-(\Pi)$  для  $j = \overline{i+1, N}$ .

Пример. Решим с помощью этого алгоритма задачу 3. Рассматриваемая СМО находится в состоянии  $i$ , если число требований (занятых мест) в ней равно  $i-1$ ,  $i = \overline{1, 2, \dots, N_c + 1}$ . Число состояний ПМП  $N = N_c + 1$ . В каждом состоянии возможны  $2^L - 1$  решений:  $K_i = K = (1, 2, \dots, 2^L - 1)$ ;  $i = \overline{1, N}$ . Двоичное разложение номера решения  $k(i) \in K$  указывает номера потоков требований, принимаемых на обслуживание в данном состоянии: если на  $l$ -м месте двоичного разложения стоит 1, то требования  $l$ -го потока принимаются на обслуживание, а если 0 — не принимаются. (В состоянии  $N$  любое решение будет фиктивным, так как все требования получают отказ.) Например, пусть  $k = 5$ . Число 5 в двоичной записи есть 101. Следовательно, на обслуживание принимаются требования первого и третьего потока, но не второго.

Обозначим через  $k_l(i)$  коэффициент, стоящий на  $l$ -м месте двоичного разложения числа  $k(i) \in K$ . По условию задачи 3 для  $k \in K$   $\tau_N^k = am$ ,  $P_N^k = 1$ ,  $r_N^k = -bm$ . В обозначениях ПМП размножения и гибели для  $\mathcal{I} = \overline{1, N-1}$ ,  $k \in K$ :

$$\tau_i^k = \left( \theta_i + \sum_{l=1}^L k_l(i) \lambda_l \right)^{-1}$$

$$P_i^k = \theta_i \tau_i^k$$

$$r_i^k = \sum_{l=1}^L k_l(i) \lambda_l (d_l - c_l a \times (1 + \omega_i/m)) - b m_i$$

где  $m_i = \min(i-1, m)$ ,  $\theta_i = m_i/a$ ,  $\omega_i = \max(0, i-m)$ .

Итак, задача 3 сформулирована в терминах ПМП типа размножения и гибели и, следовательно, для нее можно применять описанный выше алгоритм. В качестве численных значений параметров возьмем следующие:  $N_c = 9$ ,  $L = 3$ ,  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 4$ ,  $\lambda_3 = 4$ ,  $d_1 = 5$ ,  $d_2 = 3$ ,  $d_3 = 1$ ,  $c_1 = 3$ ,  $c_2 = 1$ ,  $c_3 = 0$ ,  $m = 4$ ,  $b = 0,5$ ,  $a = 2/3$ .

Решение было получено на ЕС ЭВМ с помощью специально составленной программы на алгоритмическом языке ПЛ/1, реализующей описанный алгоритм. В качестве исходной была выбрана стратегия, при которой в любом состоянии обслуживаются требования всех потоков. Ей соответствует средний доход, равный 5,8084. Оптимальной является стратегия  $\Pi = (7, 3, 3, 3, 3, 1, 1, 2, 2, x)$ , где для последнего состояния в качестве решения  $x$  может фигурировать любое решение. Максимальное значение среднего дохода составило 9,6753. Отметим, что оптимальная стратегия не является приоритетной: в первом состоянии  $k(1) = 7$  (111 в двоичной системе счисления), т. е. на обслуживание принимаются требования всех потоков, в состояниях 6 и 7  $k = 1$ , т. е. на обслуживание принимаются только требования первого потока, а в состояниях 8 и 9  $k = 2$  (=10), т. е. только второго потока.

# Глава 11. Формирование процедуры контроля при эксплуатации сложных технических систем

## 1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ КОНТРОЛЯ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В процессе эксплуатации технических систем вследствие их ограниченной безотказности целесообразность применения системы по назначению зависит от ее технического состояния. Задача определения вида технического состояния есть задача контроля, она не является изолированной от процесса эксплуатации в целом, так как должна решаться с учетом возможности (и целесообразности) последующего восстановления.

Для обоснования процедуры контроля при эксплуатации технических систем необходимы:

математическая модель функционирования объекта контроля (ОК), которая количественно описывает связи между входными воздействиями и решениями на них;

показатели качества или эффективности функционирования ОК, позволяющие судить о целесообразности его применения по назначению.

Математическая модель функционирования ОК в общем случае имеет вид

$$F\{X, K, U, t\} = 0, \quad (1)$$

где  $X = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)]$  — вектор-функция выходных реакций;  $K = [k_1, k_2, \dots, k_n]$  — вектор параметров математической модели;  $U = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_l(t)]$  — вектор-функция входных воздействий.

Математическая модель (1) считается полностью известной, если определены вид модели (например, дифференциальные, разностные уравнения, логические соотношения и т. п.) и численные значения ее параметров.

Показатель качества и эффективности функционирования ОК представляется векторным функционалом  $\Phi = [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_p]$ , где компоненты  $\Phi_i, i = 1 \dots p$  — технические характеристики (ТХ) ОК, определяющие его способность выполнять установленный перечень задач при практическом применении.

Показатель  $\Phi$  задается двумя способами:

на множестве входных воздействий и параметров ОК

$$\Phi = \Phi\{K, U\}; \quad (2)$$

на множестве входных воздействий и выходных реакций

$$\Phi = \hat{\Phi}\{X, U\}. \quad (3)$$

Форма зависимости (2) характерна для этапа проектирования, так как вытекает из логики создания технической системы — в ходе проектирования известны входные воздействия  $U$ , выбираются параметры создаваемой системы  $K$ , а следовательно, и математическая модель ее функционирования (1).

Задание показателя в форме (3) целесообразно для случаев, когда входные и выходные характеристики ОК могут быть относительно легко измерены. Такой способ задания удобен для эксплуатации и ремонта. Представление показателя  $\Phi$  в форме (3), помимо входных воздействий  $U$ , в общем случае также предполагает знание вида модели (1) и наличие однозначного соответствия между параметрами  $K$  и выходными сигналами  $X$ . При выполнении этих условий способы задания  $\Phi$  в форме (2) и (3) являются эквивалентными.

Целесообразность использования ОК по назначению определяется на основе сравнения текущего значения показателя  $\Phi$  с некоторыми граничными значениями  $\Phi_0$ , которые выделяют подобласть  $Q_\Phi$ . Если  $\Phi \in Q_\Phi$ , то считают, что ОК применять целесообразно.

Пример. Пусть математическая модель функционирования ОК (1) имеет вид дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + kx(t) - ku(t) &= 0, \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \quad (4)$$

в котором  $k$ ,  $u(t)$  и  $x_0$  известны. Качество работы ОК оценивается по величине  $|x(T) - u(T)|$  в фиксированный момент времени  $T \in [t_0, t]$ .

В этом случае показатель качества и форма его записи

$$\Phi = |x(T) - u(T)| \quad (5)$$

соответствует виду (3).

Зависимость  $\Phi$  в форме (2) через  $k$  и  $u(t)$  возможно получить, если в данном примере решить уравнение (4), а затем подставить значение этого решения в (5) при  $t = T$ .

Так как решение уравнения (4) имеет вид

$$x(t) = x_0 e^{-kt} + k \int_{t_0}^T e^{-k(t-\tau)} u(\tau) d\tau,$$

то после замены  $t = T$  получим

$$\begin{aligned} \Phi = & \left| x_0 e^{-kT} + k \int_{t_0}^T e^{k(t-\tau)} \times \right. \\ & \left. \times u(\tau) d\tau - u(T) \right|. \end{aligned} \quad (6)$$

В обоих случаях на  $\Phi$  задается ограничение, например, в виде  $\Phi \leq \Phi_0$ , когда ОК считается работоспособным либо неработоспособным при его практическом применении.

## 2. ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ К МЕТОДИКЕ ФОРМИРОВАНИЯ ПРОЦЕДУРЫ КОНТРОЛЯ ТЕХНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ

Для синтеза процедуры контроля при эксплуатации технических систем необходимо решить ряд взаимосвязанных задач:

определить пространство технических состояний ОК и вектор технического состояния в этом пространстве; разбить пространство технических состояний ОК на множества, соответствующие заданному виду технического состояния;

выбрать параметры для контроля (измерения), позволяющие однозначно определить вид технического состояния;

обосновать критерий принятия решения о виде технического состояния, минимизирующий заданную функцию потерь по информации, полученной в процессе измерения параметров;

разработать математическую модель, позволяющую количественно оценить характеристики перехода системы из одного технического состояния в другое. В случае, если решается только задача определения вида технического состояния в текущий момент времени, знание этой модели не является необходимым. Она используется в случае решения задачи прогнозирования состояния или построения правил управления техническим состоянием на интервале времени.

Вектор технического состояния определяется на каждом из этих множеств с учетом специфики решаемой задачи либо путем разложения по базисным векторам, либо выделением в бесконечномерном пространстве конечного набора векторов.

Разбиение пространства технических состояний на множества, характеризующие виды технических состояний, вытекает из анализа практических требований к показателям качества и сводится к решению вопроса о том, какие состояния для данной системы в рассматриваемой ситуации ее применения следует считать работоспособными, а какие нет. Формирование понятия отказа не является формали-

вваемым процессом и выполняется специалистами с учетом задач, решаемых системой. Выбор параметров для контроля обусловлен требованиями однозначного определения положений вектора технического состояния в выбранном пространстве. Существует обширный перечень методов выбора таких параметров, зависящих от пространства состояний, решаемых задач, используемого математического аппарата и т. п. [18, 41, 48, 56].

Математическая модель, позволяющая количественно описать переход ОК из одного технического состояния в другое, основывается на априорных сведениях о физической природе причин изменения вектора технического состояния по величине и направлению, а также на статистических данных, полученных в процессе эксплуатации однотипных технических систем.

Первое требование, которое предъявляется к математической модели, состоит в том, что переход из состояния в состояние происходит во времени. Поэтому эта математическая модель — прежде всего модель процесса (случайного, квазидетерминированного) с известным статистическим описанием (непрерывнозначного, дискретного и т. п.).

Вторым важным требованием является простота описания таких процессов, позволяющая решать перечисленные выше задачи с достаточной точностью. Эти требования объясняются, с одной стороны, необходимостью получения желаемого результата, а с другой — практическими ограничениями на объем информации, необходимый для определения характеристик такого процесса.

Следующее требование заключается в том, что целесообразно выбирать такие модели, для которых математический аппарат хорошо разработан. Одной из статистических моделей, широко применяемых для описания эволюции технического состояния систем в процессе эксплуатации, являются марковские процессы вообще и их подкласс — марковские цепи [8]. Более общим типом процесса является полумарковский процесс, который позволяет проводить анализ эволюции технических систем при меньших пред-

положениях, чем при марковском процессе [39]. Но этот тип процесса требует информацию большего объема [39].

Результатом решения задач, определяющих структуру процедуры контроля, является информация, достаточная для решения основной задачи эксплуатации — задачи управления вектором технического состояния с целью достижения заданного технического состояния ОК. Существенным элементом, определяющим процесс решения этих задач, является способ задания пространства технических состояний. Поэтому дальнейшее изложение проведем с учетом классификации процедур контроля по этому признаку.

### 3. МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ ПРОЦЕДУР КОНТРОЛЯ

Задание технических состояний в пространстве  $\{\Phi\}$ . Элементом  $\Phi$  этого пространства является любая совокупность  $\Phi = [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_p]$ , где  $\Phi_i, i = 1, p$  — значения показателей качества функционирования ОК (его ТХ) — действительные числа. Пространство действительных чисел является линейным, и для него существуют базис и размерность.

Вектор технического состояния формируется на основе разложения любого элемента пространства по базисным векторам:

$$\Phi = \Phi_1 e_1 + \Phi_2 e_2 + \dots + \Phi_p e_p, \quad (7)$$

где  $e = [e_1, e_2, \dots, e_p]$  — ортогональный базис линейного пространства  $\{\Phi\}$ . Тем самым вектор технического состояния в этом пространстве является полностью определенным.

Разбиение пространства технических состояний  $\{\Phi\}$  на множества, характеризующие виды технических состояний, определяется практическими требованиями на показатели качества (технические характеристики), которые задаются в виде неравенств на координаты вектора технического состояния

$$\tilde{\Phi}_i \leq \Phi_i \leq \bar{\Phi}_i, \quad i = \overline{1, p}. \quad (8)$$

Множество работоспособных состояний  $Q_\Phi$  представляет собой  $p$ -мерный

параллелепипед, так как допуски на  $\Phi_i$  задаются независимо друг от друга:

$$Q_\Phi = \{\Phi_i, i = \overline{1, p}, \rho/\Phi_i \leq \Phi_i \leq \tilde{\Phi}_i\}.$$

Выбор параметров для контроля в  $\{\Phi\}$  из условия однозначного определения положения вектора технического состояния  $\Phi$  в этом пространстве приводит к необходимости измерять все координаты  $\Phi_i, i = \overline{1, p}$ , т. е. все выбранные показатели качества. Измерения координат  $\Phi_i$  производятся прямыми и косвенными методами на основе соотношения (2) и (3), в результате которых из-за ошибок измерения получается оценочное значение вектора технического состояния  $\Phi^*$ .

Если  $\Phi^* \in Q_\Phi$ , то ОК признается работоспособным (все ТХ удовлетворяют требуемым) и пригодным к дальнейшей эксплуатации. В противном случае ( $\Phi^* \notin Q_\Phi$ ) ОК не работоспособен, и возникает задача его восстановления, т. е. задача управления положением вектора технического состояния в пространстве  $\{\Phi\}$ .

Рассмотрим связь процедуры контроля с процессом восстановления. Пусть по данным контроля принято следующее решение: оценочное значение вектора технического состояния  $\Phi^*$  не принадлежит  $Q_\Phi$  ( $\Phi^* \notin Q_\Phi$ ), т. е. зафиксирован отказ ОК. При известных допусках на каждую координату  $\Phi_i, i = \overline{1, p}$ , можно управлять вектором технического состояния, чтобы изменить его положение в пространстве  $\{\Phi\}$  путем изменения тех координат, вектор технического состояния которых не удовлетворяет условию (8). Но так как  $\Phi_i, i = \overline{1, p}$ , есть функционал, то его величину можно изменить лишь косвенным методом — варьированием аргументов в выражениях (2) и (3). При управлении положением вектора технического состояния путем варьирования аргументов в (2) или (3) возможны два случая: 1) координаты вектора технического состояния являются независимыми; 2) координаты  $\Phi(K, U)$  зависимы между собой. Этот факт устанавливается на основе вычисления определителя функциональной матрицы

$$|\partial^2 \Phi(K, U) / \partial K \partial U|.$$

Если он отличен от нуля, то координаты независимы. Если же функциональный определитель тождественно равен нулю, то имеется зависимость между координатами.

В случае 1) изменение величины отдельной координаты вектора технического состояния возможно независимо от значений других координат; при таком изменении вышедших за поле допуска показателей качества функционирования ОК остальные показатели изменяться не будут.

В случае 2) изменения показателей, вышедших за поле допуска, не будут независимы; при изменении значений их аргументов могут изменяться и другие показатели, которые в силу наличия зависимости могут выйти за поле допуска, хотя первоначально они были в допуске.

Пример. Пусть на ОК, функционирование которого задано уравнением (4), воздействует входное воздействие  $U1(t)$ , где

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t \geq 0, \\ 1, & t < 0, \end{cases}$$

а область определения  $U \in [0, U_0]$ .

Тогда выходная реакция ОК согласно (6) при  $t_0 = 0, x_0 = 0$  примет вид

$$x(T) = U(1 - e^{-kT}).$$

Качество работы ОК характеризуется двумя показателями, т. е. вектор технического состояния в пространстве  $\{\Phi\}$  представляет собой двумерный вектор  $\Phi = \Phi_1 e_1 + \Phi_2 e_2$ . Координата  $\Phi_1$  соответствует выражению (5), т. е.

$$\Phi_1 = |-Ue^{-kT}| = Ue^{-kT},$$

а  $\Phi_2$  представляет собой отношение производной выходной реакции в момент времени  $T \in [0, t)$  к величине отклонения (5), откуда  $\Phi_2 = k$ . На обе координаты заданы допуски, характеризующие область работоспособности

$$Q_\Phi = \{\Phi_1, \Phi_2/\Phi_1 \leq \Phi_1 \leq \tilde{\Phi}_1, \Phi_2 \leq \Phi_2 \leq \tilde{\Phi}_2\}.$$

Проверим, имеется ли зависимость между показателями  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ .

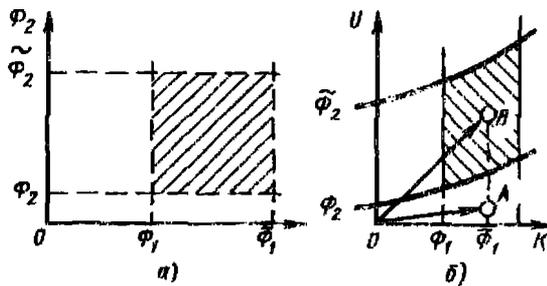


Рис. 1. Область работоспособности:  
а — в координатах  $\Phi_1, \Phi_2$ ; б — в координатах  $K, U$

Определитель функциональной матрицы

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial k} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial k} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} -UTe^{-kT} & e^{-kT} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \\ = -e^{-kT} \neq 0,$$

поэтому показатели качества изменяются независимо один от другого при варьировании  $k$  и  $u$ .

На рис. 1, а и б заштрихованы области работоспособности ОК соответственно в координатах показателей  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ ,  $K$  и  $U$ . Пусть, например, техническое состояние определяется вектором  $OA$ . Это соответствует случаю, когда  $\Phi_2$  вышел за поле допуска,

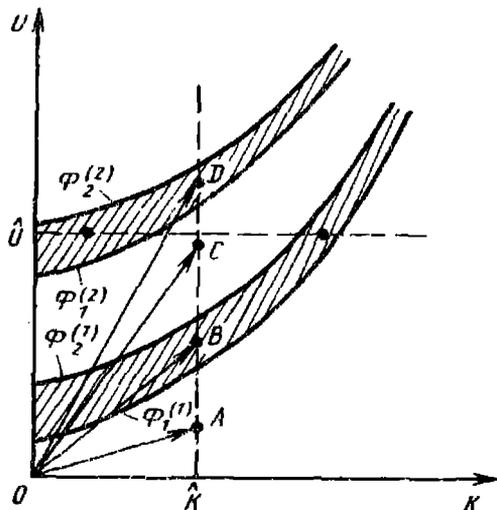


Рис. 2. Область работоспособности при зависимых показателях качества  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$

а  $\Phi_1$  находится в допуске. При этом возможно, независимо от значения  $\Phi_1$ , за счет увеличения параметра  $U$  обеспечить перевод вектора  $OA$  в положение  $OB$  и достичь работоспособного состояния. Причем значение  $\Phi_1$  при изменении  $U$  останется прежним.

Предположим, что показатель  $\Phi_1$  сохранится прежним, а вторым показателем ОК является квадрат отклонения выходной реакции от входного воздействия, т. е.  $\Phi_2 = U^2 e^{-2kT}$ . В этом случае определитель функциональной матрицы будет тождественно равен нулю, что свидетельствует о наличии зависимости между  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ . Для случая зависимых показателей на рис. 2 заштрихованы области работоспособности в координатах  $K$  и  $U$  при тех же ограничениях на каждый показатель. При одном и том же значении параметра  $\hat{k}$  ОК может быть как работоспособным (точки  $B, D$ ), так и неработоспособным (точки  $A, C$ ). Аналогичная ситуация возникает при фиксированном значении  $\hat{U}$ , когда изменяется  $k$ . Следовательно, допуски на  $k$  и  $u$  представляют собой не единственную область (как на рис. 1, а), а совокупности интервалов на области определений  $k$  и  $u$ . В этом случае задачи управления техническим состоянием существенно усложняются.

Задание технических состояний в пространстве  $\{K\}$ . Элемент  $K$  этого пространства — любая совокупность  $K = [k_1, k_2, \dots, k_n]$  из поля действительных чисел. Это пространство является линейным и для него существуют базис и размерность. В ортогональном базисе вида (7) размерность этого пространства определяется известными методами. Вектор технического состояния по аналогии с (7) имеет вид

$$K = k_1 e_1 + k_2 e_2 + \dots + k_n e_n.$$

Однако решение задачи разбиения пространства технических состояний на множества, характеризующие вид технического состояния, уже не является таким простым, как в пространстве  $\{\Phi\}$ , так как в результате такого разбиения необходимо по известным допускам на  $\Phi$  определить допуски на параметры  $k_i, i = \overline{1, n}$

Сложность решения этой задачи состоит в том, что сначала надо определить номинальную точку  $K^n$  в пространстве  $\{K\}$ , в которой показатели качества достигают оптимальных значений, и затем относительно этой точки найти допуски на каждый параметр  $k_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  (на каждую координату вектора состояния  $K$ ).

Пусть по-прежнему для ОК заданы показатели качества и ограничения на них. Тогда область работоспособности  $Q_K$  в пространстве  $\{K\}$  описывается совокупностью неравенств

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(1)} &\leq \Phi_1(K, U) \leq \Phi_1^{(2)}, \\ \Phi_2^{(1)} &\leq \Phi_2(K, U) \leq \Phi_2^{(2)}, \\ &\dots \\ \Phi_p^{(1)} &\leq \Phi_p(K, U) \leq \Phi_p^{(2)}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $U \in [U_1, U_2]$  — область определения входных воздействий.

Требуется определить номинальное значение  $K^n$  вектора технического состояния и допуски на каждую координату этого вектора, в пределах которых ОК является работоспособным.

Если показатель качества ОК — скаляр ( $p = 1$ ), то решается задача математического программирования, которая формулируется следующим образом: найти

$$\Phi(K, U) \rightarrow \text{ext } \Gamma \quad (10)$$

при  $\Phi_1^{(1)} \leq \Phi(K, U) \leq \tilde{\Phi}_2^{(2)}$ ,  $U \in [U_1, U_2]$ .

В результате ее решения находится глобальный экстремум, которому соответствует  $K^n$  и оптимальное значение входного воздействия  $U^*$ ; относительно этих точек определяются допуски на  $k_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Если показатель  $\Phi$  — вектор, то может оказаться, что экстремальные значения  $K^n$  и  $U^*$  для одного показателя  $\Phi_2$  не являются экстремальными для других показателей  $\Phi_j$ ,  $j \neq 2$ .

Для решения такого вида задач используются следующие основные способы.

а) Показатели качества  $\Phi_2$ ,  $i = \overline{1, p}$  «формируют», если это возможно фи-

зически, так, чтобы в (2) они не имели общих аргументов:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_1(k_1, \dots, k_i, u_1, \dots, u_j), \\ \Phi_2 &= \Phi_2(k_{i+1}, \dots, k_{i+n}, \\ &u_{j+1}, \dots, u_{j+n}), \end{aligned}$$

Тогда экстремальные значения  $K_i^*$ ,  $U_i^*$  возможно определить в результате скалярной оптимизации каждого  $\Phi_i$ ,  $i = \overline{1, p}$  по аналогии с задачей (10).

Такое формирование показателей качества можно обеспечить: за счет аппаратной избыточности при конструировании ОК; путем отсеивания незначимых параметров  $k_i$  и  $u_j$  в выражениях для показателя  $\Phi_i$ , например, методами теории чувствительности [60].

Первый путь приводит к увеличению массы и габаритов ОК; при втором, вследствие разрыва связей, объективно существующих в ОК, уменьшается достоверность контроля.

б) Применительно к заданному вектору  $\Phi$  формулируется задача математического программирования, в которой в качестве целевой функции используется один из показателей  $\Phi_i$  [8], а на другие показатели  $\Phi_j$ ,  $j \neq 2$ , накладываются ограничения типа неравенств

$$\Phi_i^* = \text{ext } \Gamma \Phi_i(K, U); \quad \{K, U\}$$

$$\Phi_j(\cdot) \leq \Phi_j(K, U) \leq \tilde{\Phi}_j(\cdot), \quad j \neq i, \quad (11)$$

$$U \in [U_1, U_2].$$

Такая постановка задачи означает, что существует несколько режимов работы ОК, в каждом из которых выделяется основной показатель качества, который и оптимизируется. Число режимов в этом случае пропорционально числу оптимизируемых показателей  $\Phi_i$ .

Поверхность согласованного оптимума совместно с ограничениями на показатели качества (9) образует множество номинальных точек, относительно которого определяются допуски на отдельные координаты  $k_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

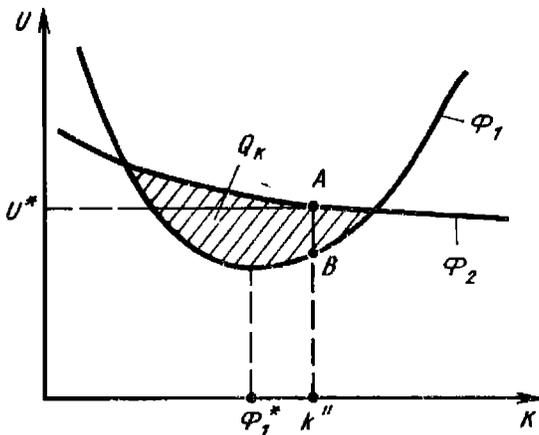


Рис. 3. Область работоспособности и линия согласованного оптимума при зависимых показателях

Пример. Пусть для ОК, заданного уравнением (4), имеются два показателя качества с ограничениями

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_1 &\leq \Phi_1 = Ue^{-kT} \leq \tilde{\Phi}_1; \\ \tilde{\Phi}_2 &\leq \Phi_2 = Uke^{-kT} \leq \tilde{\Phi}_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Первый показатель по-прежнему характеризует отклонение выходной реакции от входного воздействия в фиксированный момент времени  $T \in [0, t)$ , а  $\Phi_2$  — величину производной в этот же момент времени.

Система уравнений (12) для этих показателей примет вид

$$\begin{cases} d\Phi_1 = -UTe^{-kT} dk + e^{-kT} dU = 0; \\ d\Phi_2 = U(e^{-kT} - Te^{-kT}) dk + \\ + ke^{-kT} dU = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Поверхность согласованного оптимума представляет собой линию, уравнение которой удовлетворяет соотношению

$$-UkTe^{-2kT} - U(e^{-2kT} - Te^{-2kT}) = 0$$

или

$$kT - 1 + T = 0, \quad k = \frac{1-T}{T}.$$

На рис. 3 показаны область работоспособности  $Q_K$  (заштрихована) ОК в координатах  $K, U$ , соответствующая уравнению (13), и линия согласован-

ного оптимума, не зависящая от  $U$  и пересекающая  $Q_K$  отрезком  $AB$ .

В результате решения нескольких различных задач математического программирования будут получены решения, которые в общем случае отличаются друг от друга, т. е. наборы параметров  $K$  и  $U$  будут различны. Однако для настройки системы требуется единственная комбинация этих параметров. Она должна быть выбрана среди полученной совокупности решений. Один из возможных путей — использование алгоритмов с последовательно применяемыми критериями.

в) Решается многокритериальная задача оптимизации и ищется согласованный оптимум, который означает, что противоречивые показатели  $\Phi_i$  приводятся к таким значениям на множестве  $K$  и  $U$ , когда ни один из показателей  $\Phi_i$  нельзя улучшить, не ухудшая остальных показателей  $\Phi_j$ ,  $j \neq i$ .

Согласованный оптимум существует, если существует не равное нулю решение системы

$$\begin{aligned} d\Phi_i &= \frac{\partial \Phi_i}{\partial k_1} dk_1 + \dots + \frac{\partial \Phi_i}{\partial k_n} dk_n + \\ &+ \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_1} du_1 + \dots + \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_e} du_e = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

относительно дифференциалов  $dk_1, dk_n, du_1, \dots, du_e$ .

Однородная система уравнений (14) имеет не равное нулю решение, если ее строки (столбцы) линейно зависимы. Условия линейной зависимости строк (столбцов) позволяют получить уравнение поверхности согласованного оптимума. В случае двух показателей качества  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  поверхность согласованного оптимума представляет собой линию, соединяющую экстремумы  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , и имеет физический смысл «гребня», соединяющего две вершины абсолютных максимумов  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ .

Линия согласованного оптимума однозначно определяет номинальное значение параметра  $K^n$  и множество значений  $\{U^*\}$  входных воздействий (отрезок  $C \cdot D$  — см. рис. 2), обеспечивающих согласованный оптимум показателей качества. После того как определена область работоспособности  $Q_K$ , номинальные характеристики

входных воздействий  $U^*$ , номинальные значения координат вектора параметров и допуски на них, входные воздействия фиксируются и решается задача контроля технического состояния, т. е. измеряются действительные значения координат  $K$ .

Действительные значения координат вектора параметров  $K$  можно получить с помощью прямых и косвенных измерений. При прямых измерениях координат  $K$  число измерений соответствует размерности вектора  $K$  (число измерений соответствует числу неизвестных  $k_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ ). При косвенных измерениях, когда значения  $k_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , вычисляются по результатам измерения выходных реакций, эти выходные реакции должны удовлетворять двум основным требованиям: измеренные реакции  $X$  должны обеспечивать однозначное определение координат вектора технического состояния; число измеряемых выходных реакций при этом должно быть минимальным.

Под однозначным определением координат  $K$  понимается взаимно однозначное отображение пространства  $\{K\}$  в пространство измерения значений  $X$ . Естественно, при этом число измеряемых реакций должно быть минимально возможным, чтобы не было дублирования измерений.

Существуют два вида измерений  $X$ : статические, когда в ОК закончены переходные процессы, вызванные входными воздействиями  $U^*$ , и он функционирует в стационарном режиме работы;

динамические, когда ОК функционирует в переходном режиме от момента времени  $t = t_0$  поступления  $U^*$  до наступления стационарного режима.

При статических измерениях характеристики  $X$  не зависят от времени и, следовательно, для однозначного определения  $K$  необходимо измерять  $n$  характеристик  $X$ . Число измеряемых выходных реакций можно уменьшить за счет измерения различных характеристик в одной выходной реакции (например, для выходной реакции вида  $A \sin(\omega t + \varphi_0)$  такими характеристиками являются амплитуда, частота, фаза), а также за счет последователь-

ного измерения во времени значений отдельных компонентов  $K$ , их совокупностей и комбинаций.

На принципе измерения статических характеристик базируются информационные, комбинационные методы поиска неисправностей, в которых при выборе измеряемых реакций оптимизируется либо количество информации, получаемой при каждом измерении, либо время контроля, трудозатраты и т. п. [54, 55].

Недостатки этих методов следующие: низкая достоверность определения технического состояния, особенно для ОК, имеющих обратные, перекрестные связи между своими элементами;

разнородность измеряемых характеристик выходных реакций  $X$ , что приводит к громоздкой аппаратной реализации этих методов.

При динамических измерениях оцениваются характеристики  $X$ , которые зависят не только от  $K$ , но и от времени. Чтобы минимизировать число измеряемых выходных реакций, надо выбрать такие реакции, в которых измеренные значения  $X$  в различные моменты времени переходного режима обеспечивали бы однозначное определение  $K$ . Для линейных и линеаризуемых систем, функционирование которых описывается дифференциальными или разностными уравнениями, выбор минимального числа выходных реакций целесообразно проводить, опираясь на критерий полной управляемости и наблюдаемости [18].

Задача управления техническим состоянием в пространстве  $\{K\}$  не вызывает принципиальных затруднений. Так как координаты вектора технического состояния  $K$  являются независимыми, то, если  $K \in Q_K$ , ОК признается работоспособным. Если же  $K \notin Q_K$ , то те координаты  $K$ , которые вышли за поле допуска, изменяются до своих номинальных значений независимо друг от друга.

Задание технических состояний в пространстве  $\{X\}$ . Для определения технического состояния используются непосредственно выходные реакции ОК  $X(t)$ . Определяется совокупность номинальных выходных реакций  $X^n$ , характеризующая наилучшее техническое состояние ОК, относительно

## 1. Результаты сравнения процедур контроля

Операция	Характеристика трудоемкости при задании технических состояний в виде		
	<i>U</i>	<i>K</i>	<i>X</i>
Задание: показателей качества границ на параметр	М М	Б Б	С С
Измерение контролируемого параметра	Б	С	С
Достоверность оценки технического состояния при параметрах: зависимых независимых	Высокая Высокая	Низкая Высокая	Высокая Высокая
Построение правила управления техническим состоянием при параметрах: зависимых независимых	Б М	Б М	Б М

Примечание. М, Б, С — соответственно малая, большая и средняя трудоемкости выполнения операций процедуры контроля.

которых осуществляется управление техническим состоянием. Элемент этого пространства — любая совокупность выходных реакций  $X = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)]$ . Если это функции произвольного вида, то в этом пространстве может не существовать ни базиса, ни размерности.

Для технических систем эти функции, как правило, непрерывны, что позволяет построить базис конечной размерности. Методика выбора совокупности измеряемых параметров для данного случая и примера изложены

в [18]. Сравнительная оценка описанных способов построения процедур контроля приведена в табл. 1. Выбор способа задания технических состояний зависит от структуры системы (наличие зависимости между составляющими вектора технического состояния), а также ее назначения. Для простых систем целесообразно использовать метод задания технических состояний в пространстве параметров  $K$ , для сложных — в пространстве  $\Phi$  или  $X$ .

## Глава 12. Контроль параметров систем в процессе эксплуатации

### 1. ОБЩИЕ МЕТОДЫ КОНТРОЛЯ. ДИСТАНЦИОННЫЙ КОНТРОЛЬ, КОНТРОЛЬ АНАЛОГОВЫХ И ЦИФРОВЫХ СХЕМ

Методы контроля определяют правила применения определенных принципов и средств контроля, которые, в свою очередь, зависят от цели контроля, а именно:

проверки работоспособности (соответствия объекта контроля установленным техническим требованиям в момент осуществления контрольных операций);

проверки запаса работоспособности (соответствия объекта контроля установленным требованиям в будущем — прогнозирование);

диагностики неисправностей объекта контроля;

локализации неисправностей объекта контроля;

анализа неисправностей с целью предотвращения их возникновения в данном объекте и разработки новых образцов;

исследования процесса функционирования в заданных условиях с целью выработки рекомендаций для последующей эксплуатации.

Средства контроля (аппаратное обеспечение) следующие: универсальные (стандартные) измерительные средства (приборы) и специализированное измерительное оборудование (включая встроенные средства контроля).

Программное обеспечение определяет стратегию и тактику осуществления контрольных операций.

Существуют прямые и косвенные методы контроля. Прямые методы осуществляют достижение цели контроля непосредственными измерениями иско-

мых характеристик объекта. В основе косвенных методов заложена заранее установленная связь (детерминированная или вероятностная) измеряемых величин с искомыми показателями, например, путем анализа электрических характеристик (шумы, вольт-амперные и вольт-фарадные характеристики, м-фактор, ток потребления и др.), получаемых с помощью зондового контроля или через внешние выводы, анализа теплового излучения и распределения температуры рабочего тела объекта контроля и реконструктивной томографии и распознавания образцов.

Косвенные методы в ряде случаев оказываются единственно возможными; они позволяют осуществить дистанционный контроль. В связи со значительным ростом сложности объектов контроля, количества выполняемых ими функций, номенклатуры используемых материалов косвенные методы являются наиболее перспективными.

Дистанционный контроль заключается в проведении контролирующих операций при отсутствии доступа к объекту контроля. Дистанционный контроль осуществляется с использованием каналов передачи контрольной информации (механического, акустического, оптического, электрического, химического, биологического и др.).

Дистанционный контроль возможен, если получаемая с его помощью информация достоверна, т. е. погрешности, вносимые преобразователями информации и каналами ее передачи, существенно меньше величины контролируемого признака.

Использование результатов контроля возможно на этапах технологического процесса производства объекта и его эксплуатации (рис. 1).

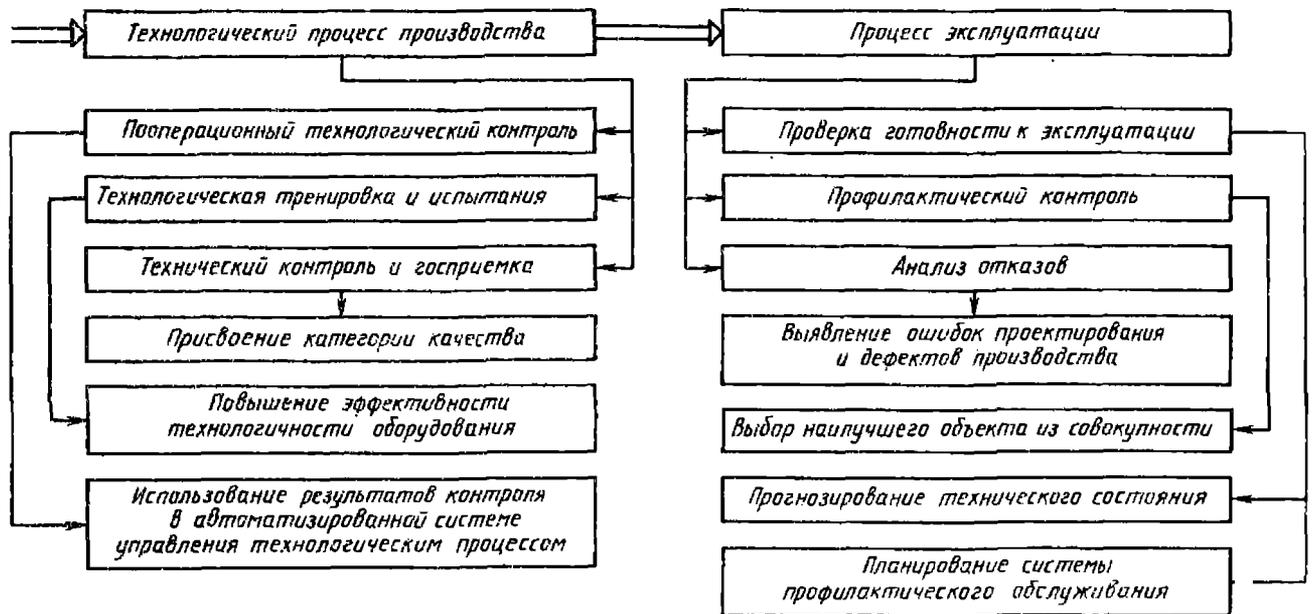


Рис. 1. Этапы производства объекта и его эксплуатации

Требования к методам контроля: неразрушающее действие операций контроля, обеспечивающее достижение цели контроля без вскрытия и повреждения объекта и позволяющее продолжить эксплуатацию или испытания после проведения контроля;

достоверность контроля, определяемая как достаточно малое отличие измеряемой величины от ее истинного значения при заданном уровне доверительной вероятности;

экономичность контроля, определяемая необходимыми затратами ресурсов (времени, средств, труда, интеллекта и т. п.);

произвольное состояние объекта контроля (который может находиться во включенном или выключенном режиме, полностью собранном или технологически незавершенном виде, в исправном или отказовом состояниях);

возможность использования для контроля стандартных измерительных средств и систем;

обеспечение метрологического единства контрольных операций и математического аппарата обработки результатов измерений на различных этапах производства и эксплуатации объекта.

Наиболее сложен контроль аналоговых объектов. Это касается состава и содержания контрольных операций. Он включает измерение характеристик частотной и временной областях.

Контроль цифровых объектов контроля заключается в проверке их реакции на заданные последовательности входных сигналов, варьируемых по амплитуде, частоте, форме и числу импульсов.

Производственный контроль делится на пооперационный контроль технологически незавершенной продукции и контроль готовой продукции. Отличительными особенностями методов контроля технологически незавершенной продукции являются необходимость прямого доступа к исследуемой поверхности материала, а также повышенная опасность внесения микродефектов в объект контроля.

К методам контроля готовой продукции технологически завершенных объектов относятся: допусковый контроль внешних характеристик объекта и его дополнительных (вспомогательных) внешних характеристик, измеряемых в специальных контрольных точках.

Перечисленные методы используются во время испытаний объектов в заданных диапазонах внешних воздействий.

Методы эксплуатационного контроля используют два вида показателей качества функционирования:

мгновенные, численно характеризующие случайный уровень качества

на данный момент времени эксплуатации;

интервальные, численно характеризующие за интервал времени изменение качества как случайного процесса.

Известны следующие методы определения количественных показателей качества: экспериментальные, использующие результаты измерений технических характеристик объекта контроля; расчетные и опросов (экспертных оценок).

Достижение такой цели контроля как определение запаса работоспособности имеет специфическую особенность: требуется углубленный контроль для обнаружения и оценки скоростей изменения свойств материалов объекта во время испытаний или эксплуатации.

Углубленность контроля аналоговых схем РЭА может быть достигнута, например, применением экзоэмиссионных методов, измерением шумовых характеристик и параметрической идентификацией. Углубленность контроля цифровых схем РЭА может быть достигнута, например, применением метода критических напряжений и тока потребления.

## 2. КОНТРОЛЬ ПАРАМЕТРОВ ЧАСТИЧНО НАБЛЮДАЕМОЙ СИСТЕМЫ В СЛУЧАЕ ДИСКРЕТНОГО ВРЕМЕНИ

Косвенный контроль параметров. Одной из целей эксплуатационного контроля является проверка запаса (прогнозирование) работоспособности.

Результатом такого контроля является решение о снятии объекта с эксплуатации или о следующем моменте времени контроля.

Более предпочтительными по сравнению с прямыми являются косвенные методы контроля, основанные на заранее установленной (обычно вероятностной) связи измеряемых величин с искомыми показателями. Далее приводятся две наиболее распространенные математические схемы таких связей, а также расчетные методы, позволяющие по замерам контролируемых величин вычислять значения показателей. Первая схема соответствует слу-

чаю, когда контроль осуществляется в отдельные (дискретные) моменты времени, второй — когда осуществляется непрерывно.

Примером первой схемы является модель системы, которая может находиться в трех состояниях: исправном (1), неисправном, но работоспособном (2), отказа (3). В процессе эксплуатации система переходит из исправного состояния в неисправное, а затем в состояние отказа, который проявляется мгновенно. Из соображения эффективности следует прекратить эксплуатацию системы в момент времени перехода ее в неисправное состояние. Однако этот момент не известен, поскольку внешне исправное и неисправное состояния неразличимы. Об этих состояниях судят косвенно, по потоку повреждений, появляющихся в системе: интенсивность потока повреждений для исправного состояния  $\lambda_1$  меньше интенсивности для неисправного  $\lambda_2$ . Сами повреждения практического влияния на переходы системы между состояниями не оказывают, они только являются следствием того или иного состояния. Эта ситуация характерна для механических систем (например, силовых установок), когда такие повреждения, как потертости, помятости, обрывы контролок, подтеки, небольшие трещины, свидетельствуют о внутренних изменениях в металлических конструкциях, повышении вибрации, усталостных напряжениях и пр. На практике эти повреждения оперативно устраняются без изменения состояния системы.

В данном случае косвенный контроль заключается в замере интенсивности потока повреждений. По его результатам необходимо определить состояние системы и следующий момент времени контроля.

Предполагается, что времена пребывания системы в состояниях 1 и 2 — взаимно независимые случайные величины, имеющие экспоненциальные распределения с интенсивностями  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Потоки повреждений являются пуассоновскими с интенсивностями  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , причем  $\lambda_1 < \lambda_2$ .

В каждый момент контроля известна вероятность  $P(1)$  того, что система

находится в исправном состоянии. Эта вероятность пересчитывается на основе информации о числе повреждений, появившихся между двумя последними моментами контроля. На основе значения вероятности  $P(1)$  принимается решение о прекращении эксплуатации системы (когда  $P(1)$  впервые станет меньше некоторой величины) или о моменте времени следующего контроля.

Формулы для пересчета вероятности  $P(1)$  определяют связь между измеряемыми величинами (числами повреждений) и искомыми показателями (состояниями системы).

Рассмотренный пример является частным случаем приведенной ниже общей математической схемы, описывающей модель контроля при косвенных наблюдениях.

**Математическая модель.** Фактическое состояние системы полностью описывается некоторой совокупностью параметров. Под этим понимается, что зафиксированные значения всех этих параметров однозначно определяют состояние системы, а также решение вопроса о дальнейшей эксплуатации системы или ее замене. Наблюдению, однако, подлежит только часть параметров. По зарегистрированным значениям этих параметров и следует сделать вывод о значениях ненаблюдаемых параметров, что соответствует методу косвенного контроля параметров.

Множество состояний системы предполагается дискретным. Отдельное состояние описывается парой случайных компонент (переменных)  $\xi$  и  $\eta$ . Первая случайная компонента соответствует наблюдаемым параметрам, а вторая — ненаблюдаемым. Пусть  $I$  обозначает дискретное множество значений наблюдаемой компоненты  $\xi$ , а  $J$  — ненаблюдаемой компоненты  $\eta$ . Множество всех состояний есть прямое произведение  $I \times J$ . Далее отдельные значения компонент будут обозначаться  $i \in I$  и  $j \in J$ , а отдельное состояние  $(i, j) \in I \times J$ .

Зависимость значений компонент  $\xi$  и  $\eta$  от времени указывается так:  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$ . Процесс  $(\xi(t), \eta(t))$  является марковским со множеством значений  $I \times J$ . Предполагаются известными переходные вероятности этого

процесса — вероятность перехода из состояния  $(i, j)$  в момент времени  $t$  в состояние  $(i', j')$  в следующий момент времени  $t + \tau$ :

$$\begin{aligned} P(i, j; i', j'; t, t + \tau) &= \\ &= P(\xi(t + \tau) = i', \eta(t + \tau) = \\ &= j' / \xi(t) = i, \eta(t) = j), \tau > 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Расчет вероятностей состояний. В начальный момент времени  $t_0$  известно значение  $i_0$  наблюдаемой компоненты  $\xi(t_0)$ , а также распределение вероятностей состояний ненаблюдаемой компоненты  $\eta(t_0)$ :

$$\begin{aligned} P_{i_0, t_0}(j) &= P(\eta(t_0) = j / \xi(t_0) = \\ &= i_0) \quad \forall j \in J. \end{aligned} \quad (2)$$

Аналогичная информация будет иметься в каждый рассматриваемый момент времени  $t$  — значение наблюдаемой компоненты  $\xi(t)$  и распределение вероятностей  $p$  состояний ненаблюдаемой компоненты  $\eta(t)$ :

$$\begin{aligned} p: P_{i, t}(j) &= P(\eta(t) = j / \xi(t) = i) \\ &\quad \forall j \in J. \end{aligned} \quad (3)$$

Эта информация для момента времени  $t + \tau$ , являющегося очередным моментом контроля (наблюдения за системой) после момента времени  $t \leq t + \tau$ , определяется следующим образом. В момент времени  $t + \tau$  становится известным значение наблюдаемой компоненты  $\xi(t + \tau)$ . Вероятность того, что за промежуток времени  $(t, t + \tau)$  система перейдет из состояния  $(i, j)$  в состояние  $(i', j')$ , определяется формулой (1). Вероятность того, что значение наблюдаемой компоненты будет равно  $i' \in I$  (безотносительно к тому, какое значение примет ненаблюдаемая компонента), есть

$$\begin{aligned} P(i, j; i', \cdot; t, t + \tau) &= \\ &= \sum_{i' \in I} P(i, j; i', j'; t, t + \tau). \end{aligned} \quad (4)$$

Условная вероятность того, что в момент времени  $t + \tau$  значение ненаблюдаемой компоненты  $\eta$  будет  $j'$ , если имел место зарегистрированный переход  $(\xi(t) = i) \rightarrow (\xi(t + \tau) = i')$  и условное распределение ненаблюдае-

мой компоненты  $\eta$  в момент  $t$  было  $\{P_{it}(j) \forall j \in J\}$ ,

$$P_{i', t+\tau}(j') = \left( \sum_{j \in J} P(i, j; i', j'; t, t+\tau) P_{it}(j) \right) \times \left( \sum_{j \in J} P(i, j; i'; t, t+\tau) P_{it}(j) \right)^{-1} \times \forall j' \in J. \quad (5)$$

Формулы (2)—(5) позволяют для каждого рассматриваемого момента времени пересчитывать (на основании значений наблюдаемой компоненты  $\xi$ ) распределение вероятностей состояний ненаблюдаемой компоненты  $\eta$ .

Последовательность значений наблюдаемой компоненты не является марковской, а пара  $(\xi(t), \{P_{\xi(t), t}(j), j \in J\})$  — это марковский процесс. Однако это процесс с непрерывным множеством состояний  $I \times F$ , что существенно усложняет задачу.  $F$  — семейство всевозможных распределений вероятностей на множестве  $J$ ; каждое такое распределение задается совокупностью неотрицательных чисел  $\{P(j), j \in J\}$ , сумма которых равна единице.

Итак, пусть в рассматриваемый момент времени контроля известна пара  $(\xi(t), \{P_{\xi(t), t}(j), j \in J\})$ . Это позволяет на основе формулы (1) рассчитывать вероятность того, что в момент времени  $t + \tau$  процесс  $(\xi, \eta)$  окажется в состоянии  $(i', j') \in I \times J$ :

$$P_{t, p}(\xi(t+\tau) = i', \eta(t+\tau) = j' / \xi(t) = i) = \sum_{j \in J} P_{t, t}(j) P(i, j; i', j'; t, t+\tau). \quad (6)$$

Формулы (1)—(6) решают в принципе задачу прогнозирования состояний и принятия решений по частично наблюдаемым данным. В частности, пусть процессы изменения состояний ненаблюдаемой и наблюдаемой компонент являются монотонными. Это значит, что состояния  $I$  и  $J$  пронумерованы натуральными числами, так

что переходы  $i \rightarrow i'$  и  $j \rightarrow j'$  возможны, если только  $i \leq i'$  и  $j \leq j'$ . Пусть в момент  $t$  следует спланировать следующий момент времени контроля  $t + \tau$  так, чтобы вероятность безотказной работы за это время, деленная на  $\tau$ , не превышала  $q$ ,  $0 < q < 1$ . При малых  $q$  значение  $1 - q$  приблизительно равно допустимому среднему числу отказов в единицу времени.

Обозначим  $\Omega_0$  подмножество состояний множества  $I \times J$ , трактуемых как отказ. Если в момент  $t$  наблюдаемая компонента есть  $i \in I$ , а распределение вероятностей ненаблюдаемой компоненты  $p = \{P_{i, t}(j), j \in J\}$ , то вероятность отказа в момент  $t + \tau$  составит согласно формуле (6)

$$P_{t, p}((\xi(t+\tau), \eta(t+\tau)) \in \Omega_0 / \xi(t) = i) = \sum_{(i', j') \in \Omega_0} P_{t, p}(\xi(t+\tau) = i', \eta(t+\tau) = j' / \xi(t) = i). \quad (7)$$

Поэтому для очередного момента времени контроля  $t + \tau$  необходимо выбрать в качестве значения  $\tau$  решение уравнения

$$P_{t, p}((\xi(t+\tau), \eta(t+\tau)) \in \Omega_0 / \xi(t) = i) = \tau q. \quad (8)$$

В более общей ситуации следует применить известные из теории формулы, позволяющие находить вероятность того, что, исходя из состояния  $(i, j)$  в момент времени  $t$ , марковский процесс до момента времени  $t + \tau$  не попадает в подмножество  $\Omega_0$ .

Методика назначения срока контроля. Исходными являются вероятности  $P(i, j; i', j'; t, t+\tau)$  перехода двумерного процесса  $(\xi(t), \eta(t))$  из состояния  $(i, j)$  в момент времени  $t$  в состояние  $(i', j')$  в момент  $t + \tau$ , где  $\tau > 0$ . Эти вероятности оцениваются известными методами статистики марковских процессов [47]. Задано малое значение  $q$  ( $0 < q < 1$ ), такое, что  $1 - q$  приблизительно равно допустимому среднему числу отказов в единицу времени. В первоначальный

момент времени  $t = t_0$  достоверно известно состояние  $i$  наблюдаемой компоненты процесса  $\xi(t)$  и вероятности  $P = \{p_i, t_0(j), j \in J\}$  того, что ненаблюдаемая компонента  $\eta(t)$  имеет состояние  $j$ .

Последовательность выполнения методики следующая.

1) Для текущего момента времени  $t$  находится очередной срок контроля  $t + \tau$ , для которого выполняется условие (8).

2) Если время  $\tau$  до очередного контроля меньше приемлемого из условий эксплуатации значения  $\tau_0$ , то осуществляется замена системы.

3) В случае отказа системы до момента  $t + \tau$  она заменяется и расчеты возобновляются с п. 1). В случае отсутствия отказа устанавливается состояние  $i'$  наблюдаемой компоненты  $\xi(t + \tau)$ .

4) По формулам (4) и (5) пересчитываются вероятности  $P = \{P_{i', t+\tau}(j'), j' \in J\}$  состояний ненаблюдаемой компоненты в момент времени  $t + \tau$ . Осуществляется переход к п. 1).

Пример. Для рассмотренного выше примера множество  $J$  состоит из трех состояний:  $J = \{1, 2, 3\}$ , причем состояние 3 трактуется как отказ и является поглощающим:  $\Omega_0 = \{3\}$ . Множество значений наблюдаемой компоненты  $I = \{0, 1, 2, \dots\}$ . Состояние  $i \in I$  означает, что в системе зарегистрировано  $i$  повреждений. Если ненаблюдаемая компонента  $\eta = j$ , то процесс возникновения повреждений является пуассоновским с параметром  $\lambda_j$ , причем  $\lambda_{j'} > \lambda_j$  при  $j' > j$ , и поэтому при  $\tau > 0, i' \geq i$

$$\begin{aligned} P(\xi(t + \tau) = i' / \xi(t) = i, \eta(t) = \\ = \eta(t + \tau) = j) = \\ = \frac{(\lambda_j \tau)^{i' - i}}{(i' - i)!} e^{-\lambda_j \tau}, \quad i' - i = \\ = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

причем эта вероятность не зависит от реализации процесса  $(\xi, \eta)$  до момента  $t$ .

Задача заключается в прогнозировании момента отказа (достижения компонентой  $\eta(t)$  состояния 3) по наблюдениям за процессом  $\xi(t)$  в моменты контроля. Предполагается, что

в первоначальный момент времени  $\xi(0) = 0$  и известны вероятности

$$P_{0,0}(1) = P(\eta(0) = 1 / \xi(0) = 0),$$

$$P_{0,0}(2) = P(\eta(0) = 2 / \xi(0) = 0),$$

сумма которых равна единице.

Справедливы следующие формулы при  $t, \tau \geq 0, j = 1, 2$ :

$$P(\eta(t + \tau) = j / \eta(t) = j) = e^{-\mu_j \tau};$$

$$\begin{aligned} P(\eta(t + \tau) = 3 / \eta(t) = 1) = \\ = \frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu_2} (e^{-\mu_2 \tau} - e^{-\mu_1 \tau}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\eta(t + \tau) = 2 / \eta(t) = 1) = \\ = 1 + \frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} e^{-\mu_1 \tau} - \\ - \frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu_2} e^{-\mu_2 \tau}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\eta(t + \tau) = 3 / \eta(t) = 2) = \\ = 1 - e^{-\mu_2 \tau}. \end{aligned}$$

Кроме того, при  $i' \geq i, j' \geq j, j = 1, 2$

$$\begin{aligned} P(i, j; i', j; t, t + \tau) = \\ = e^{-\mu_j \tau} \frac{(\lambda_j \tau)^{i' - i}}{(i' - i)!} e^{-\lambda_j \tau}; \quad (9) \end{aligned}$$

$$P(i, 1; i', 2; t, t + \tau) =$$

$$= \int_0^\tau \mu_1 e^{-\mu_1 z} e^{-\mu_2 (\tau - z)} \times$$

$$\times \sum_{l=0}^{i' - i} \frac{(\lambda_2 z)^l}{l!} e^{-\lambda_2 z} \times$$

$$\times \frac{(\lambda_2 (\tau - z))^{i' - i - l}}{(i' - i - l)!} e^{-\lambda_2 (\tau - z)} dz =$$

$$= \mu_1 e^{-\tau(\mu_1 + \lambda_1)} \sum_{l=0}^{i' - i} \frac{\lambda_1^l \lambda_2^{i' - i - l}}{l!} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{i' - i - l} \tau^k \frac{1}{k! (i' - i - l + k)! (l + k + 1)!} \quad (10)$$

Поскольку  $\Omega_0 = \{3\}$ , то формула (7) принимает вид

$$P_{t,p}((\xi(t+\tau), \eta(t+\tau)) \in \Omega_0/\xi(t) = i) = \sum_{j=1}^2 P_{i,t}(j) P(\eta(t+\tau) = 3/\eta(t) = j) \forall i \in I. \quad (11)$$

Как видно из последней формулы, вероятность отказа зависит только от распределения  $p = \{P_{i,t}(j), j = 1, 2\}$ .

Приведенные формулы дают решение поставленной задачи.

Методика назначения срока контроля для рассматриваемого примера конкретизируется следующим образом. Исходя из значения  $i$  наблюдаемой компоненты и распределения вероятностей  $p$  ненаблюдаемой компоненты, по формулам (11) и (8) находится очередной момент контроля  $t + \tau$ . Если в момент  $t + \tau$  система не отказала и  $\tau > \tau_0$ , то с учетом значений  $i, p$  и числа повреждений  $i' - i$ , зарегистрированных в интервале  $(t, t + \tau)$ , пересчитывают распределение вероятностей  $p = \{P_{i',t+\tau}(j'), j' = 1, 2\}$  для ненаблюдаемой компоненты по формулам (9), (10), (4), (5). Затем описанная процедура повторяется.

Пусть, например,  $\mu_1 = 0,001, \mu_2 = 0,01, \lambda_1 = 0,1, \lambda_2 = 0,3, q = 1 \times 10^{-4}, P_{0,0}(1) = 1, P_{0,0}(2) = 1 - P_{0,0}(1) = 0$ . Зависимость вероятности отказа  $P(\eta(t) = 3/\eta(0) = 1)$  в интервале  $(0, \tau)$  от времени  $\tau$  показана в табл. 1. Эта зависимость построена по формуле (11) при  $i = 0, t = 0, P_{0,0}(1) = 1$ .

Из данных табл. 1 видно, что согласно уравнению (8) заданному значению  $q = 0,0001$  соответствует первый момент контроля  $\tau = 21$ . Предположим теперь, что до момента  $\tau = 21$  система не отказала и в интервале  $(0, 21)$  было зарегистрировано  $i = 2$  повреждения. Как показывают подсчеты по формулам (9), (10), (4) и (5), распределение вероятностей ненаблюдаемой компоненты в момент  $\tau = 21$  при этом условии составит  $P_{2,21}(1) = 0,996, P_{2,21}(2) = 1 -$

1. Зависимость вероятности отказа  $P(\eta(\tau) = 3/\eta(0) = 1)$  от  $\tau$

$\tau$	$P(\eta(\tau) = 3/\eta(0) = 1)$	$P(\eta(\tau) = 3/\eta(0) = 1)/\tau$
10	0,000482	0,000048
14	0,000935	0,000067
15	0,001065	0,000071
20	0,001860	0,000093
21	0,002045	0,000097
22	0,002235	0,000102

—  $P_{2,21}(1) = 0,004$ . Эта информация позволяет назначить новый срок контроля и т. д.

### 3. КОНТРОЛЬ ПАРАМЕТРОВ ПРИ НЕПРЕРЫВНОМ ВРЕМЕНИ НАБЛЮДЕНИЯ

Непрерывный косвенный контроль параметров. Автоматическая эксплуатация сложных систем предполагает наличие тракта измерения, преобразования, коммутации и ЭВМ, встроенных в систему. Во многих случаях это обеспечивает такую частоту регистрации параметров, что можно рассматривать процесс регистрации как непрерывный. Например, бортовые системы регистрации параметров современных пассажирских самолетов фиксируют значения сотен параметров с периодичностью в одну сотую секунды.

Математический анализ методов контроля в случае непрерывной регистрации параметров принципиально отличен от дискретного случая. Проведем такой анализ для системы, рассмотренной в параграфе 2. Система может находиться в трех состояниях: исправном 1, неисправном 2, отказа 3. После состояния 1 следует состояние 2, а после состояния 2 — состояние 3. Времена пребывания в состояниях 1 и 2 — взаимно независимые случайные величины, имеющие экспоненциальное распределение с параметрами  $\mu_1$  и  $\mu_2$  соответственно. В системе, находящейся в состоянии  $j = 1, 2$ , возникает пуассоновский поток повреждений с интенсивностью  $\lambda_j$ , при-

чем  $\lambda_2 > \lambda_1$ . Предполагается, что возникающие повреждения не влияют на смену состояний системы.

В то время как возникающие повреждения обнаруживаются сразу, состояние системы не наблюдается. О нем можно судить косвенно: поскольку интенсивность повреждений в состоянии 2 больше интенсивности в состоянии 1, то увеличение числа повреждений говорит в пользу состояния 2. Отказ системы проявляется мгновенно.

В первоначальный момент времени известна вероятность  $z_0$  того, что система находится в состоянии 1, так что  $1 - z_0$  — вероятность состояния 2. Для каждого последующего момента времени в результате пересчета, проводимого на основе регистрации повреждений, известна вероятность  $z$  того, что система находится в состоянии 1. Система эксплуатируется до тех пор, пока вероятность  $z$  больше критического значения  $z^*$ . В данном случае косвенный контроль параметров заключается в получении информации о вероятности  $z$  состояния 1 системы. Задача заключается в получении формул для пересчета и вероятности  $P(z_0)$  того, что система не откажет до окончания эксплуатации, и средней длительности эксплуатации  $T(z_0)$ . Решение этой задачи позволит назначить критическое значение  $z^*$ , оптимальное для поставленной цели.

В общем случае рассматривается средний доход  $c(z_0)$ , получаемый от эксплуатации системы. При этом предполагается, что за единицу времени эксплуатации в состоянии  $j$  насчитывается доход  $c_j$ ,  $j = 1, 2$ . Прекращение эксплуатации в связи с достижением вероятностью  $z$  значения  $z^*$  дает доход  $d$ . Тогда вероятность безотказной работы  $P(z_0)$  и средняя длительность эксплуатации  $T(z_0)$  выражаются через доход  $c(z_0)$  так:

$$P(z_0) = c(z_0) \text{ при } c_1 = c_2 = 0, d = 1;$$

$$T(z_0) = c(z_0) \text{ при } c_1 = c_2 = 1, d = 0.$$

Пересчет вероятностей состояний. Пересчет в процессе эксплуатации вероятности  $z$  состояния 1 системы осуществляется следующим образом. Для бесконечно малого интервала  $(t, t + dt)$  времени безотказной работы рас-

сматриваются гипотезы  $H_{ij}$ : система в момент времени  $t$  находится в состоянии  $i$ , а в момент  $t + dt$  — в состоянии  $j$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j \leq 2$ .

Согласно условиям задачи можно записать, опуская члены порядка малости  $o(dt)$  (как это будет делаться далее):

$$z = P(H_{11}) + P(H_{12}),$$

$$1 - z = P(H_{22}) + P(H_{23}),$$

$$P(H_{11}) = z(1 - \mu_1 dt), \quad P(H_{12}) = z\mu_1 dt,$$

$$P(H_{22}) = (1 - z)(1 - \mu_2 dt).$$

Для условных вероятностей гипотез, вычисленных при условии, что к моменту времени  $t + dt$  отказа не было, справедливы выражения

$$P(H_{11}/H_{11} + H_{12} + H_{22}) = \frac{P(H_{11})}{P(H_{11}) + P(H_{12}) + P(H_{22})} =$$

$$= z(1 - (\mu_1 - (1 - z)\mu_2) dt);$$

$$P(H_{12}/H_{11} + H_{12} + H_{22}) = z\mu_1 dt;$$

$$P(H_{22}/H_{11} + H_{12} + H_{22}) = (1 - z)(1 - z\mu_2 dt).$$

Пусть  $A$  — событие «в интервале  $(t, t + dt)$  повреждений не было»;  $\bar{A}$  — событие «в интервале  $(t, t + dt)$  повреждения были». В силу свойств ординарности пуассоновского потока в интервале  $(t, t + dt)$  с вероятностью  $1 - o(dt)$  возникает не более одного повреждения, так что событие  $\bar{A}$  означает возникновение в интервале  $(t, t + dt)$  одного повреждения. По условиям задачи

$$P(A/H_{11}) = 1 - \lambda_1 dt, \quad P(\bar{A}/H_{11}) = \lambda_1 dt, \quad P(A/H_{12}) = 1 - O(dt),$$

$$P(\bar{A}/H_{12}) = O(dt), \quad P(A/H_{22}) = 1 - \lambda_2 dt, \quad P(\bar{A}/H_{22}) = \lambda_2 dt,$$

где  $O(dt)$  — величина порядка малости  $dt$ .

Условные вероятности событий  $A$  и  $\bar{A}$ , вычисленные при условии, что к моменту времени  $t + dt$  система не

отказала, определяются формулами

$$\begin{aligned}
 & P(A/H_{11} + H_{12} + H_{22}) = \\
 & = P(H_{11}/H_{11} + H_{12} + H_{22}) \times \\
 & \times P(A/H_{11}) + P(H_{12}/H_{11} + H_{12} + \\
 & + H_{22}) P(A/H_{12}) + P(H_{22}/H_{11} + \\
 & + H_{12} + H_{22}) P(A/H_{22}) = 1 - \\
 & - ((1 - z) \lambda_2 + z \lambda_1) dt; \\
 & P(\bar{A}/H_{11} + H_{12} + H_{22}) = \\
 & = ((1 - z) \lambda_2 + z \lambda_1) dt.
 \end{aligned}$$

Теперь по формуле Байеса можно найти вероятности состояния 1 системы в момент времени  $t + dt$ , вычисленные при условии, что к этому моменту система не отказала (событие  $H_{11} + H_{12} + H_{22}$ ) и в интервале  $(t, t + dt)$  повреждения не было (событие  $A$ ) или повреждения были (событие  $\bar{A}$ ):

$$\begin{aligned}
 & P(H_{11}/A, H_{11} + H_{12} + H_{22}) = \\
 & = \frac{P(AH_{11}/H_{11} + H_{12} + H_{22})}{P(A/H_{11} + H_{12} + H_{22})} = \\
 & = z(1 - (\mu_1 - (1 - z) \mu_2 + \lambda_1 - \\
 & - (1 - z) \lambda_2 - z \lambda_1) dt), \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & P(H_{11}/\bar{A}, H_{11} + H_{12} + H_{22}) = \\
 & = \frac{1 - (\mu_1 - (1 - z) \mu_2) dt}{z \lambda_1 + (1 - z) \lambda_2} z \lambda_1. \quad (13)
 \end{aligned}$$

Итак, если в момент времени  $t$  вероятность состояния 1 равна  $z$  и к моменту времени  $t + dt$  система не отказала, то для момента  $t + dt$  вероятность состояния 1 пересчитывается по формуле (12), если в интервале  $(t, t + dt)$  повреждений не было, и по формуле (13) — если они были. Мгновенный пересчет вероятностей практически необходим только в моменты возникновения повреждений. Если до этого момента вероятность состояния 1 есть  $z$ , то после него она вычисляется по формуле (13). В случае отсутствия повреждений вероятность состояния 1 может быть пересчитана не сразу после интервала  $(t, t + dt)$ , а после любого интервала  $(t, t + \tau)$ , не содержащего неисправностей, где  $\tau > 0$ . Если в момент  $t$  вероятность состояния 1 есть  $z$ , то в момент  $t + \tau$  она будет равна реше-

нию  $v(\tau)$  дифференциального уравнения

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v}{\partial t} = & v((1 - v)(\mu_2 + \lambda_2) - \\
 & - (\mu_1 + \lambda_1) + v \lambda_1),
 \end{aligned}$$

удовлетворяющего условию  $v(0) = z$ . Этим решением является

$$\begin{aligned}
 v(\tau) = & \left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_2 + \lambda_2 - \lambda_1}\right) \times \\
 & \times \left(1 - \frac{z - \left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_2 + \lambda_2 - \lambda_1}\right)}{z}\right) \times \\
 & \times e^{-(\mu_2 + \lambda_2 - \mu_1 - \lambda_1) \tau} \quad (14)
 \end{aligned}$$

Расчет среднего дохода. Рассматриваемая система эксплуатируется до отказа или до тех пор, пока вероятность исправного состояния  $z$  остается больше критического уровня  $z^*$ . Интерес представляет среднее значение  $c(z_0)$  получаемого дохода при этом условии.

Пусть  $c_i(z)$  при  $i = 1, 2$  и  $z^* \leq z \leq 1$  — среднее значение дохода, получаемого от эксплуатации, если первоначально система находится в состоянии  $i$  и подсчитанное значение вероятности состояния 1 равнялось  $z$ . Формулы (12) и (13) приводят к следующей системе дифференциальных уравнений для  $c_i(z)$ :

$$\begin{aligned}
 & \dot{c}_1(z) z(\mu_1 + (1 - z) \mu_2 + \lambda_1 - \\
 & - (1 - z) \lambda_2 - z \lambda_1) = \\
 & = \lambda_1 c_1 \left(\frac{z \lambda_1}{z \lambda_1 + (1 - z) \lambda_2}\right) - \\
 & - (\lambda_1 + \mu_1) c_1(z) + \mu_1 c_2(z) + c_1; \quad (15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \dot{c}_2(z) z(\mu_1 - (1 - z) \mu_2 + \lambda_1 - \\
 & - (1 - z) \lambda_2 - z \lambda_1) = \\
 & = \lambda_2 c_2 \left(\frac{z \lambda_1}{z \lambda_1 + (1 - z) \lambda_2}\right) - \\
 & - (\lambda_2 + \mu_2) c_2(z) + c_2, \quad (16)
 \end{aligned}$$

где

$$\dot{c}_i(z) = \frac{\partial}{\partial z} c_i(z).$$

В качестве искомым функций  $c_1(z)$  и  $c_2(z)$  при  $z^* \leq z \leq 1$  следует взять решения уравнений (15) и (16), удовлетворяющие начальным условиям

$$c_1(z) = c_2(z) = d \text{ при } z \leq z^*. \quad (17)$$

Приведем численный метод решения уравнения (16) с начальным условием (17) [уравнение (15) решается затем аналогично].

Уравнение переписывается в виде 
$$\dot{c}_2(z) = (\lambda_2 c_2(z \lambda_1 / (\lambda_2 - (\lambda_2 - \lambda_1) z)) - (\lambda_2 + \mu_2) c_2(z) + c_2) / (\mu_1 + \lambda_1 - \mu_2 - \lambda_2 + (\mu_2 + \lambda_2 - \lambda_1) z) z. \quad (18)$$

Справедливы неравенства

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} < \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - (\lambda_2 - \lambda_1) z} < 1 \text{ при } 0 < z < 1, \quad (19)$$

причем  $(\lambda_2 - (\lambda_2 - \lambda_1) z)^{-1}$  монотонно возрастает по  $z$  в интервале  $(0, 1)$ . Уравнение (18) решается методом прогонки, начиная с граничного условия

$$c_2(z) = d \text{ при } z \leq z^*. \quad (20)$$

Для этого выбирается настолько большое целое  $N$ , что шаг  $\varepsilon = (1 - z^*)/N$  изменения значений  $z$  достаточно мал. Значения  $c_2(z^* + n\varepsilon)$  рассчитываются по рекуррентной формуле (18). Последняя с этой целью преобразуется путем представления (с точностью до  $O(\varepsilon)$ )

$$c_2(z + \varepsilon) = c_2(z) + \dot{c}_2(z) \varepsilon, \quad z \geq z^*.$$

Упомянутая рекуррентная процедура выглядит так. Для  $n = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned} \dot{c}_2(z^* + n\varepsilon) = & (\lambda_2 c_2 \left( (z^* + n\varepsilon) \times \right. \\ & \left. \times \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - (\lambda_2 - \lambda_1) (z^* + n\varepsilon)} \right) - \\ & - (\lambda_2 + \mu_2) c_2(z^* + n\varepsilon) + c_2) / (\mu_1 + \\ & + \lambda_1 - \mu_2 - \lambda_2 + (\mu_2 + \lambda_2 - \lambda_1) \times \\ & \times (z^* + n\varepsilon)) (z^* + n\varepsilon); \quad (21) \end{aligned}$$

$$c_2(z^* + (n+1)\varepsilon) = c_2(z^* + n\varepsilon) + \dot{c}_2(z^* + n\varepsilon) \varepsilon. \quad (22)$$

Важно подчеркнуть, что при вычислении по формуле (21) значения

$\dot{c}_2(z^* + n\varepsilon)$  используется значение  $c_2((z^* + n\varepsilon) \lambda_1 / (\lambda_2 - (\lambda_2 - \lambda_1) (z^* + n\varepsilon)))$ , которое было вычислено ранее, как это следует из формулы (19). В частности, при  $n = 0$  из этой формулы находится

$$c_2(z^* \lambda_1 / (\lambda_2 - (\lambda_2 - \lambda_1) z^*)) = d.$$

При реализации рекуррентной процедуры (20)–(22) может иметь место неустойчивость, вызванная равенством нулю или близостью к нему знаменателя  $\mu_1 + \lambda_1 - \mu_2 - \lambda_2 + (\mu_2 + \lambda_2 - \lambda_1) z$  в формуле (21). Неустойчивость определяется корнем

$$z_k = \frac{\mu_2 + \lambda_2 - \mu_1 - \lambda_1}{\mu_2 + \lambda_2 - \lambda_1}$$

и возникает при  $z_k \geq z^*$ .

По условию задачи производная  $\dot{c}_2(z)$  в точке  $z = z_k$  ограничена, поэтому из формулы (18) следует:

$$c_2(z_k) = \left( c_2 + \lambda_2 c_2 \left( z_k \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - (\lambda_2 - \lambda_1) z_k} \right) \right) / (\lambda_2 + \mu_2). \quad (23)$$

Из формулы (18) по правилу Лопиталля находится производная

$$\begin{aligned} \dot{c}_2(z_k) = & (\lambda_2 + \mu_2 + z_k (\mu_2 + \lambda_2 - \\ & - \lambda_1))^{-1} \frac{\lambda_1 \lambda_2^2}{(\lambda_2 - (\lambda_2 - \lambda_1) z_k)^2} \times \\ & \times \dot{c}_2 \left( z_k \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - (\lambda_2 - \lambda_1) z_k} \right). \quad (24) \end{aligned}$$

По формуле (23) вычисляется  $c_2(z)$  в точке корня  $z = z_k$ , а по формуле (24) — в соседних точках:

$$c_2(z_k \pm \varepsilon) = c_2(z_k) \pm \dot{c}_2(z_k) \varepsilon,$$

что позволяет избежать отмеченной неустойчивости.

После нахождения решения  $c_2(z)$ ,  $z^* \leq z \leq 1$ , аналогично находится решение  $c_1(z)$  уравнения (15), удовлетворяющее начальному условию (17).

Методика расчета показателей эффективности и контроля параметров. Приведенные формулы решают, в принципе, как задачу анализа, так и задачу оптимизации рассматриваемого процесса эксплуатации системы. В

частности, средний доход от функционирования за один цикл эксплуатации, начинающийся в условиях априорной информации «вероятность состояния 1 есть  $z$ » и заканчивающийся отказом или достижением этой вероятностью уровня  $z^*$ ,

$$c(z_0) = z_0 c_1(z) + (1 - z_0) c_2(z), \quad (25)$$

если истинная вероятность состояния 1 в начале цикла есть  $z_0$ .

Пусть обслуживание системы после отказа длится в среднем время  $\theta_0$ , а профилактическое обслуживание, проводимое при достижении вероятностью уровня  $z^*$ , — в среднем время  $\theta$ . Тогда при  $z = z_0$  средняя длительность одного цикла эксплуатации системы, включающего безотказную работу и последующее обслуживание,

$$R(z_0, z^*) = T(z_0) + P(z_0)\theta + (1 - P(z_0))\theta_0,$$

где полагаются равными  $c(z_0)$ :  $T(z_0)$  при  $c_1 = c_2 = 1, d = 0$ , а  $P(z_0)$  при  $c_1 = c_2 = 0, d = 1$ .

Удельный (средний в единицу времени) доход от эксплуатации системы

$$r(z_0, z^*) = c(z_0)/R(z_0, z^*). \quad (26)$$

В частности, коэффициент готовности системы определяется из последнего выражения, если положить  $c(z_0) = T(z_0)$ .

Задача оптимизации значения  $z^*$ , при котором выбранный критерий эффективности (25) или (26) максимален, может решаться простым перебором значений  $z^*$  в интервале (0, 1). При каждом фиксированном значении  $z^*$  значения  $c(z_0)$  и  $r(z_0, z^*)$  вычисляются по формулам (25) и (26).

В процессе эксплуатации косвенный контроль параметров (пересчет вероятностей  $z$  состояния 1) осуществляется по следующему алгоритму.

1) В текущий момент времени  $t$  известна вероятность  $z$  состояния 1.

2) Если в этот момент появилось повреждение, то вероятность  $z$  состояния 1 пересчитывается и принимается равной правой части формулы (13).

## 2. Зависимость критериев эффективности от критического уровня $z^*$ при $z_0 = 0,9$

$z^*$	Значения критериев			
	$P(z_0)$	$T(z_0)$	$R(z_0, z^*)$	$r(z_0, z^*)$
0,5	0,698	1,491	7,999	0,186
0,6	0,833	1,016	6,850	0,148
0,7	0,929	0,566	5,921	0,095
0,8	0,978	0,250	5,362	0,047

3) Если в интервале  $(t, t + \tau)$ , где  $\tau > 0$ , не было ни отказа, ни повреждений, то вероятность  $z$  состояния 1 пересчитывается и принимается равной правой части формулы (14).

4) Если произошел отказ или вероятность состояния 1 после пересчета стала меньше критического уровня  $z^*$ , то система снимается с эксплуатации.

Пример. Рассматриваются следующие исходные данные:  $\mu_1 = \mu_2 = 0,2$ ;  $\lambda_1 = 1$ ;  $\lambda_2 = 1,5$ ;  $z_0 = z = 0,9$ ;  $\theta_0 = 10$ ;  $\theta = 5$ . Расчеты для этих данных проводились на ЕС ЭВМ по специально составленной программе. В табл. 2 приведены полученные зависимости вероятности безотказной работы системы за цикл  $P(z_0)$ , средних длительностей цикла  $R(z_0, z^*)$  и безотказной работы за цикл  $T(z_0)$ , а также коэффициента готовности системы  $r(z_0, z^*)$  от установленного критического уровня  $z^*$ . В табл. 3 содержатся значения критериев эффективности при  $z^* = 0,5$  в разных  $z_0$ .

## 3. Зависимость критериев эффективности от $z_0$ при $z^* = 0,5$

$z_0$	Значения критериев			
	$P(z_0)$	$T(z_0)$	$R(z_0, z^*)$	$r(z_0, z^*)$
0,6	0,820	0,675	6,574	0,102
0,65	0,777	0,864	6,977	0,123
0,7	0,745	1,040	7,316	0,142
0,8	0,715	1,278	7,702	0,165
0,9	0,698	1,490	8,000	0,187

Из табл. 2 следует, например, что если вначале вероятность  $z_0$  исправного состояния равняется 0,9 и профилактическое обслуживание проводится при достижении этой вероятностью значения  $z^* = 0,5$ , то вероятность безотказной работы за цикл составляет 0,698, средняя длительность цикла 7,999, а коэффициент готовности системы 0,186.

#### 4. ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ КОНТРОЛЯ ПАРАМЕТРОВ

Рассмотренные выше математические модели контроля параметров позволяют формулировать и решать ряд оптимизационных задач, например определять оптимальные периодичности и состав контролируемых параметров, а также принимать решения о прекращении эксплуатации. Все эти вопросы могут быть сформулированы на языке числовых характеристик частично наблюдаемой марковской системы.

Ограничившись случаем дискретного времени, рассмотрим следующую задачу. Для двумерного марковского процесса  $(X(t), Y(t))$ , наблюдаемого по первой компоненте  $X(t)$ , с дискретным множеством состояний  $I \times J$  предположим дополнительно, что в момент времени  $t = 0, 1, \dots$  может быть принято одно из решений конечного множества  $K_t$ . При принятии в момент  $t$  (на  $t$ -м шаге) решения  $k \in K_t$  изменяются вероятности (1) переходов за шаг, что отмечается добавлением верхнего индекса  $k$ :  $P^k(i, j; t', t; t, t+1)$ . Кроме того, начисляется доход за шаг, обозначаемый  $C^k(i, j, t)$ , и доходы за отдельные шаги суммируются. Задача заключается в максимизации ожидаемого дохода за  $T+1$  шагов.

Сформулированная задача — классическая задача управления цепью Маркова на конечном интервале времени [14, 42, 47, 68]. Специфика рассматриваемой задачи заключается в том, что одна из компонент цепи (а именно  $Y(t)$ ) ненаблюдаема. В данном случае следует работать с парой  $(X(t), P)$ , где  $P = P_{X(t), t}(j) \forall j$  —

распределение (3) вероятностей состояний ненаблюдаемой компоненты на  $t$ -м шаге. Эта пара образует марковский процесс.

Применим стандартную процедуру динамического программирования. В этом случае стратегия определена, если для каждого номера шага  $t = 0, 1, \dots, T$ , состояний  $i$  наблюдаемой компоненты  $X(t)$  и распределения вероятностей состояний (3) ненаблюдаемой компоненты  $Y(t)$  указано решение  $k_t(i, P)$ , принимаемое на данном шаге. Введем следующие обозначения:  $R_t(i, P)$  — максимальный ожидаемый доход, получаемый с  $t$ -го по  $T$ -й шагу (т. е. за  $T - t + 1$  оставшихся шагов), если текущее значение наблюдаемой компоненты есть  $i$ , а условное (при условии  $X(t) = i$ ) распределение состояний ненаблюдаемой компоненты есть  $P$ ;  $k_t(i, P)$  — оптимальное решение на  $t$ -м шаге при тех же условиях.

По условию задачи предполагаются известными начальное состояние  $i_0$  наблюдаемой компоненты  $X(0)$  и условное распределение  $P_0$  для ненаблюдаемой компоненты  $Y(0)$ .

Значения  $R_t(i, P)$ ,  $t = 0, 1, \dots, T$ ,  $i \in I$  вычисляются по рекуррентным формулам динамического программирования

$$\begin{aligned}
 R_T(i, P) &= \\
 &= \max_{k \in K_T} \sum_{j \in J} C^k(i, j, T) P_{i, T}(j), \\
 R_t(i, P) &= \max_{k \in K_t} \sum_{j \in J} P_{i, t}(j) \times \\
 &\times \left\{ C^k(i, j, t) + \sum_{i' \in I} \sum_{j' \in J} P^k \right. \\
 &\quad \left. (i, j; i', j'; t, t+1) R_{t+1}(i', P') \right\}, \\
 &t = T - 1, T - 2, \dots, 1, 0. \quad (27)
 \end{aligned}$$

Здесь  $P'$  является апостериорным распределением вероятностей состояний ненаблюдаемой компоненты  $Y$  на  $(t+1)$ -м шаге, если на  $t$ -м шаге соответствующее априорное распределение было  $P$ , наблюдаемая компонента имела состояние  $i$  и было принято решение  $k$ , а на  $(t+1)$ -м шаге зарегистрировано состояние  $i'$  наблюдаемой ком-

компоненты. Перерасчет этих вероятностей осуществляется от шага к шагу по формуле (5).

Приведенные формулы позволяют найти  $R_t(i, P)$  для всех  $i$ , начиная с  $t = T$  и кончая  $t = 0$ . Очевидно,  $R_0(i_0, P_0)$  есть искомое максимальное значение ожидаемого дохода за  $T + 1$  шаг, если  $X(0) = i_0$  и условное распределение компоненты  $Y(0)$  есть  $P_0$ .

Значения  $R_t(i, P)$  должны запоминаться для всех шагов  $t = 0, T$ , состояний наблюдаемой компоненты  $i \in I$  и распределений вероятностей состояний ненаблюдаемой компоненты  $P \in \mathcal{P}$ , где  $\mathcal{P}$  — семейство всевозможных таких распределений. Обычно семейство  $\mathcal{P}$  является несчетным, в связи с чем приходится прибегать к его квантованию. Для этого можно выбрать достаточно малое  $\varepsilon > 0$ , такое, что  $1/\varepsilon$  — целое. Теперь семейство  $\mathcal{P}$  заменяется на подсемейство  $\mathcal{P}_0 =$

$$= \left\{ (l_1\varepsilon, l_2\varepsilon, \dots, l_m\varepsilon) \sum_{v=1}^m l_v = 1/\varepsilon, \right.$$

$\forall l_v$  — целые неотрицательные, где  $m = |J|$ . Число элементов семейства  $\mathcal{P}_0$  равно  $C_{m+\varepsilon-1}^{m-1}$ .

Одновременно со значениями максимальных доходов должны находиться и запоминаться значения оптимальных решений  $k_t(i, P)$ , для которых выполняются равенства в (27). Для любой реализации  $X(0), X(1), \dots, X(T)$  состояний наблюдаемой компоненты и для заданного распределения вероятностей  $P_0$  ненаблюдаемой компоненты в начальный момент времени оптимальная последовательность принимаемых решений (т. е. стратегия) определяется рекуррентно: для начального шага — решение  $k_0(i_0, P_0)$ ; для последующих шагов —  $k_t(X(t), P)$ , где  $P$  — апостериорное распределение вероятностей состояний ненаблюдаемой компоненты, вычисляемое после  $(t - 1)$ -го шага по формуле (5).

Приведенные формулы полностью описывают алгоритмы нахождения оптимальной стратегии управления в рассматриваемом случае частично наблюдаемой марковской системы.

## 5. ДОСТОВЕРНОСТЬ КОНТРОЛЯ РАБОТОСПОСОБНОСТИ ИЗДЕЛИЙ

Оценка достоверности контроля работоспособности изделия. Важнейшим звеном в обеспечении качества продукции на этапах производства и эксплуатации является контроль работоспособности изделий. Основным критерием оценки качества контроля является достоверность контроля — показатель степени объективного отображения результатами контроля действительного технического состояния изделия.

По результатам контроля работоспособности (КР) изделий принимается одно из двух решений — «годен» (изделие работоспособно) и «не годен» (изделие не работоспособно).

Ввиду несовершенства системы контроля (СК) возникают ошибки при принятии решений о работоспособности изделий, т. е. работоспособное изделие может быть забраковано, а неработоспособное признано годным.

Формирование решений при КР графически может быть представлено в виде стохастического графа (рис. 2).

Широкое распространение на практике получили следующие количественные показатели достоверности КР:

достоверность решения «годен» — апостериорная вероятность того, что изделие, признанное работоспособным, в действительности работоспособно:

$$D_{\Gamma} = P(E/F) = \frac{P - A}{P - A + B}; \quad (28)$$

достоверность решения «не годен» — апостериорная вероятность того, что изделие, признанное неработоспособным, в действительности неработоспособно:

$$D_{\bar{\Gamma}} = P(\bar{F}/\bar{E}) = \frac{1 - P - B}{1 - P + A - B}; \quad (29)$$

достоверность разбраковки — вероятность принятия правильного решения «годен» или «не годен»:

$$D_P = 1 - A - B. \quad (30)$$

Из формул (28)—(30) следует, что показатели достоверности определяются величинами  $P, A$  и  $B$ .

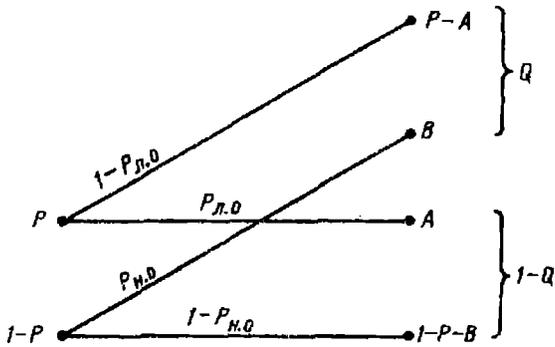


Рис. 2. Формирование решений при контроле работоспособности изделий:

$P = P(E)$  — априорная вероятность работоспособности изделия ( $E$  — событие заключающееся в том, что изделие работоспособно);  $A = P(\bar{E}, F)$  — вероятность признать неработоспособным работоспособное изделие — риск изготовителя ( $F$  — событие, заключающееся в том, что изделие по результатам контроля принято работоспособным);  $B = P(\bar{E}, \bar{F})$  — вероятность признать работоспособным неработоспособное изделие — риск изготовителя;  $Q = P(F)$  — вероятность признать изделие работоспособным;  $P_{л.о} = P(\bar{F}/E)$  — условная вероятность получения решения «не годен» при контроле работоспособного изделия — вероятность «ложного отказа»;  $P_{н.о} = P(F/\bar{E})$  — условная вероятность получения решения «годен» при контроле неработоспособного изделия — вероятность «необнаруженного отказа»

В случае, когда работоспособность изделия определяется взаимно независимыми параметрами  $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\}$ , величины  $P$ ,  $A$  и  $B$  вычисляются по формулам

$$P = \prod_{i=1}^N p_i; \quad (31)$$

$$A = \prod_{i=1}^N p_i - \prod_{i=1}^N (p_i - \alpha_i); \quad (32)$$

$$B = \prod_{i=1}^N (p_i - \alpha_i + \beta_i) - \prod_{i=1}^N (p_i - \alpha_i), \quad (33)$$

где  $p_i = P(\xi_i \in [a_i, b_i])$  — априорная вероятность того, что значения  $i$ -го контролируемого параметра находятся в пределах гарантийного допуска  $[a_i, b_i]$ ;  $\alpha_i$  ( $\beta_i$ ) — риск изготовителя (заказчика) по  $i$ -му контролируемому параметру. Поскольку

на практике всегда  $\alpha_i \ll p_i$  и  $\beta_i \ll p_i$ , то имеют место приближенные соотношения, вытекающие из (32), (33):

$$A \approx \sum_{i=1}^N \alpha_i; \quad (34)$$

$$B \approx \sum_{i=1}^N \beta_i. \quad (35)$$

Величины  $P$ ,  $A$  и  $B$  определяются по формулам (в дальнейшем индекс  $i$  опущен):

$$P = \int_a^b f(\xi) d\xi; \quad (36)$$

$$\alpha = \int_a^b f(\xi) d\xi - \int_a^b f(\xi) \times \times \left[ \int_{a_k}^{b_k} \varphi(y/\xi) dy \right] d\xi; \quad (37)$$

$$\beta = \int_{a_k}^{b_k} \psi(y) dy - \int_a^b f(\xi) \times \times \left[ \int_{a_k}^{b_k} \varphi(y/\xi) dy \right] d\xi, \quad (38)$$

где  $f(\xi)$  — плотность вероятности параметра;  $\varphi(y/\xi)$  — условная плотность вероятности результата измерения параметра при фиксированном значении параметра;  $\psi(y)$  — плотность вероятности результатов измерения параметра;  $[a_k, b_k]$  — контрольный допуск параметра.

При нормальных законах распределения вероятностей контролируемого параметра  $\xi$  и аддитивной погрешности его измерения  $\delta$  выражения (34)–(36) имеют следующий вид:

$$P = \Phi_0(x) + \Phi_0(kx); \quad (39)$$

$$\alpha = \Phi_0(x) + \Phi_0(kx) -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-kx}^{x_k} e^{-t^2/2} \left[ \Phi_0\left(\frac{x-t}{z}\right) +$$

$$+ \Phi_0 \left( \frac{kx + t}{z} \right) \Big] dt; \quad (40)$$

$$\beta = \Phi_0 \left( \frac{x_k}{\sqrt{1+z^2}} \right) + \Phi_0 \left( \frac{k_k x_k}{\sqrt{1+z^2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \int_{-k_k x_k}^{x_k} e^{-t^2/2} \left[ \Phi_0 \left( \frac{x-t}{z} \right) + \Phi_0 \left( \frac{kx+t}{z} \right) \right] dt, \quad (41)$$

где

$$x = \frac{b - m_\xi}{\sigma_\xi}; \quad k = \frac{m_\xi - a}{b - m_\xi};$$

$$z = \frac{\sigma_\delta}{\sigma_\xi};$$

$$x_k = \frac{b_k - m_{\xi k}}{\sigma_{\xi k}}; \quad k_k = \frac{m_{\xi k} - a_k}{b_k - m_{\xi k}};$$

$m_\xi, \sigma_\xi$  — математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение параметра;  $\sigma_\delta$  — среднее квадратическое отклонение случайной погрешности измерения (предполагается, что неисключенный остаток систематической погрешности измерений пренебрежимо мал);

$$\Phi_0(g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^g e^{-t^2/2} dt -$$

нормированная функция Лапласа.

В случае, когда контрольный допуск совпадает с гарантийным, т. е.  $[a, b] = [a_k, b_k]$ , значения  $\alpha$  и  $\beta$  могут быть определены с помощью табл. 4 по формулам

$$\alpha = 0,5 [\alpha(v_1) + \alpha(v_2)]; \quad (42)$$

$$\beta = 0,5 [\beta(v_1) + \beta(v_2)], \quad (43)$$

где  $v_1 = x; v_2 = kx$ .

**Пример.** Исходные данные: контролируемый параметр имеет допуск  $[8,5 \text{ В}; 11,5 \text{ В}]$  и распределен по нормальному закону;  $m_\xi = 10,0 \text{ В}; \sigma_\xi = 1,0 \text{ В}$ ; случайная погрешность измерения также распределена по нормальному закону с  $\sigma_\delta = 0,3 \text{ В}$ . Опре-

4. Значения  $\alpha(v), \beta(v)$  в зависимости от  $v$  и  $z$

$v$	$z$	$\alpha(v)$	$\beta(v)$
1,00	0,02	0,0039098	0,0038130
1,00	0,04	0,0079161	0,0075293
1,00	0,06	0,0120189	0,0111493
1,00	0,08	0,0162172	0,0146735
1,00	0,10	0,0205104	0,0181026
1,00	0,15	0,0316502	0,0262663
1,00	0,20	0,0433503	0,0338613
1,50	0,02	0,0021060	0,0020283
1,50	0,04	0,0042918	0,0038811
1,50	0,06	0,0065598	0,0058603
1,50	0,08	0,0089102	0,0076683
1,50	0,10	0,0113464	0,0094073
1,50	0,15	0,0178201	0,0134675
1,50	0,20	0,0248570	0,0171452
1,50	0,25	0,0324709	0,0204750
1,50	0,30	0,0407130	0,0235184
2,00	0,02	0,0008835	0,0008404
2,00	0,04	0,0018124	0,0016396
2,00	0,06	0,0027886	0,0023995
2,00	0,08	0,0038144	0,0031223
2,00	0,10	0,0048921	0,0038096
2,00	0,15	0,0078276	0,0053848
2,00	0,20	0,0111359	0,0067758
2,00	0,25	0,0148511	0,0080062
2,00	0,30	0,0190058	0,0090967
2,00	0,35	0,0236292	0,0100653
2,50	0,02	0,0002887	0,0002711
2,50	0,04	0,0005961	0,0005259
2,50	0,06	0,0009235	0,0007653
2,50	0,08	0,0012724	0,0009905
2,50	0,10	0,0016440	0,0012022
2,50	0,15	0,0026828	0,0016790
2,50	0,20	0,0038986	0,0020898
2,50	0,25	0,0053195	0,0024454
2,50	0,30	0,0069752	0,0027545
2,50	0,35	0,0088973	0,0030241
2,50	0,40	0,0111178	0,0032606
2,50	0,45	0,0136690	0,0034689
3,00	0,02	0,0000735	0,0000681
3,00	0,04	0,0001527	0,0001314
3,00	0,06	0,0002383	0,0001902
3,00	0,08	0,0003307	0,0002448
3,00	0,10	0,0004306	0,0002956
3,00	0,15	0,0007174	0,0004083
3,00	0,20	0,0010669	0,0005029
3,00	0,25	0,0014930	0,0005833
3,00	0,30	0,0020119	0,0006520
3,00	0,35	0,0026430	0,0007108
3,00	0,40	0,0034077	0,0007618
3,00	0,45	0,0043299	0,0008061

Продолжение табл. 4

$\sigma$	$z$	$\alpha(v)$	$\beta(v)$
3,00	0,50	0,0054355	0,0008448
3,50	0,02	0,0000146	0,0000133
3,50	0,04	0,0000305	0,0000256
3,50	0,06	0,0000479	0,0000368
3,50	0,08	0,0000670	0,0000471
3,50	0,10	0,0000879	0,0000667
3,50	0,15	0,0001498	0,0000774
3,50	0,20	0,0002283	0,0000944
3,50	0,25	0,0003284	0,0001087
3,50	0,30	0,0004566	0,0001206
3,50	0,35	0,0004566	0,0001206
3,50	0,40	0,0008294	0,0001393
3,50	0,45	0,0000957	0,0001467
3,50	0,50	0,0014330	0,0001531
3,50	0,55	0,0018555	0,0001587
3,50	0,60	0,0023874	0,0001637
4,00	0,02	0,0000022	0,0000020
4,00	0,04	0,0000047	0,0000039
4,00	0,06	0,0000075	0,0000055
4,00	0,08	0,0000106	0,0000075
4,00	0,10	0,0000140	0,0000085
4,00	0,15	0,0000240	0,0000115
4,00	0,20	0,0000382	0,0000138
4,00	0,25	0,0000567	0,0000158
4,00	0,30	0,0000816	0,0000174
4,00	0,35	0,0001152	0,0000188
4,00	0,40	0,0001607	0,0000199
4,00	0,45	0,0002222	0,0000209
4,00	0,50	0,0003050	0,0000217
4,00	0,55	0,0004160	0,0000225
4,00	0,60	0,0005634	0,0000231
4,00	0,65	0,0007575	0,0000236
4,00	0,70	0,0010102	0,0000241

делить риск заказчика и изготовителя. Вычисляем величины  $x$ ,  $k$  и  $z$ :

$$x = \frac{11,5 - 10,0}{1,0} = 1,5;$$

$$k = \frac{10,0 - 8,5}{11,5 - 10,5} = 1;$$

$$z = \frac{0,3}{1,0} = 0,3.$$

По табл. 4 находим

$$\alpha(v_1) = \alpha(v_2) = \alpha(1,5) = 0,0407130;$$

$$\beta(v_1) = \beta(v_2) = \beta(1,5) = 0,0235184.$$

Подставляя эти значения в формулы (42), (43), получаем  $\alpha = 0,0407$ ,  $\beta = 0,0235$ .

Алгоритмы контроля работоспособности изделий. Одним из наиболее эффективных и широко распространенных на практике методов повышения достоверности контроля работоспособности изделий является введение информационной избыточности, заключающееся в многократном измерении (многократной проверке) контролируемого параметра. Совокупность правил, по которым проводится обработка результатов измерений (проверок) и принятие решения о годности или негодности параметра, называется алгоритмом контроля.

В этом случае задачу контроля работоспособности изделий можно идентифицировать с известной в теории статистических решений задачей проверки сложной гипотезы  $H_0: \xi \in [a, b]$  против сложной альтернативы  $H_1: \xi \notin [a, b]$ , а качество контроля оценивать средним риском  $R$ , который при отсутствии потерь от правильных решений определяется по формуле

$$R = c_1 A + c_2 B + c_k, \quad (44)$$

где  $c_1, c_2$  — потери от ложного и необнаруженного отказов соответственно;  $c_k$  — затраты на проведение контроля.

Алгоритмы контроля, минимизирующие средний риск, называются оптимальными алгоритмами контроля.

Учитывая приближенные выражения (34) и (35), можно записать

$$R \approx \sum_{i=1}^N (c_1 \alpha_i + c_2 \beta_i) + c_k. \quad (45)$$

Поэтому с достаточной для практических расчетов точностью для достижения  $\min R$  при контроле многопараметрического изделия необходимо осуществлять оптимальный алгоритм контроля по каждому параметру.

Алгоритмы контроля работоспособности делятся на два класса: с фиксированным числом измерений (проверок) и последовательные.

Широкое распространение также получили мажоритарные алгоритмы контроля. Их применение вызвано,

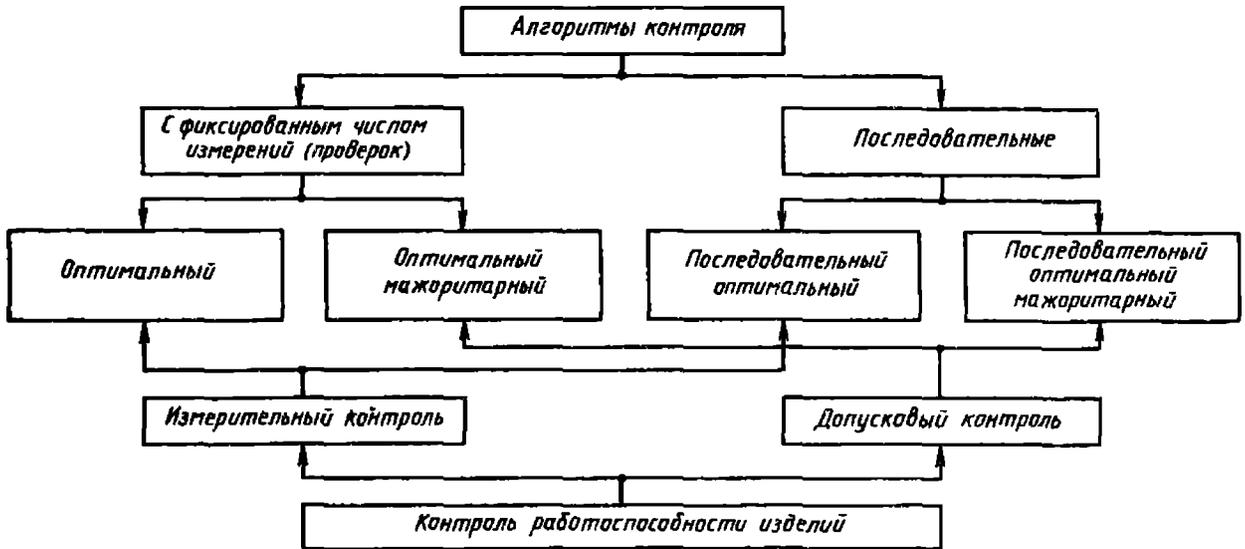


Рис. 3. Классификация алгоритмов контроля работоспособности изделий

в первую очередь, тем, что наряду с измерительным контролем, дающим возможность получить информацию в виде выборки результатов измерений  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ , на практике часто применяется допусковый контроль [4], который устанавливает факт нахождения контролируемого параметра в допуске или вне допуска без измерения. Получаемая в этом случае информация после  $n$  проверок может быть представлена только в виде чисел исходов  $m$  «параметр в допуске» и  $n-m$  «параметр вне допуска».

Классификация алгоритмов контроля работоспособности приведена на рис. 3.

Оптимальный алгоритм контроля заключается в следующем. Проводится  $n$ -кратное измерение параметра; на основании полученных результатов измерений  $y_1, \dots, y_n$  вычисляется отношение правдоподобия по формуле

$$\Lambda(y_1, \dots, y_n) = \frac{\int_{\xi \in [a, b]} f(\xi) \psi(y_1, \dots, y_n / \xi) d\xi}{\int_{\xi \notin [a, b]} f(\xi) \psi(y_1, \dots, y_n / \xi) d\xi}, \quad (46)$$

где  $\psi(y_1, \dots, y_n / \xi)$  — условная плотность вероятности выборки (результатов измерения) при фиксированном

значении параметра. Если результаты измерений взаимно независимы, то

$$\psi(y_1, \dots, y_n / \xi) = \prod_{i=1}^n \varphi(y_i - \xi),$$

где  $\varphi(\cdot)$  — плотность вероятности погрешности измерений.

Далее отношение правдоподобия сравнивается с порогом  $v = \frac{c_2}{c_1}$ ; если  $\Lambda \geq v$ , принимается решение «годен»; в противном случае — решение «не годен».

Оптимальный алгоритм значительно упрощается, когда параметр и погрешность измерения имеют нормальные плотности вероятности. В этом случае вычисляется оценка параметра в виде среднего значения

$$y^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (47)$$

и принимается решение «годен», если она находится внутри контрольного допуска  $[a_{k0}, b_{k0}]$ , границы которого определяются по формулам

$$a_{k0} = m_{\xi} + x_1 \sigma_{\xi}; \quad (48)$$

$$b_{k0} = m_{\xi} + x_2 \sigma_{\xi}, \quad (49)$$

где

$$x_1 = -kx \left( 1 + \frac{z^2}{n} \right) +$$

$$+ \Phi_0^{-1} \left( \frac{c_2}{c_1 + c_2} - 0,5 \right) \times \\ \times \frac{z}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{z^2}{n}}; \quad (50)$$

$$x_2 = x \left( 1 + \frac{z^2}{n} \right) + \Phi_0^{-1} \times \\ \times \left( \frac{c_2}{c_1 + c_2} - 0,5 \right) \times \\ \times \frac{z}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{z^2}{n}}, \quad (51)$$

где  $\Phi^{-1}(\cdot)$  — функция, обратная функции Лапласа. Риски заказчика и изготовителя вычисляются соответственно по формулам

$$\alpha_0 = \Phi_0(x) + \Phi_0(kx) - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} e^{-t^2/2} \left[ \Phi_0 \left( \sqrt{n} \frac{x-t}{z} \right) + \right. \\ \left. + \Phi_0 \left( \sqrt{n} \frac{x+t}{z} \right) \right] dt; \quad (52)$$

$$\beta_0 = \Phi_0 \left( \frac{x_1}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{n}}} \right) + \\ + \Phi_0 \left( \frac{x_2}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{n}}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \\ \times \int_{x_1}^{x_2} e^{-t^2/2} \left[ \Phi_0 \left( \sqrt{n} \frac{x-t}{z} \right) + \right. \\ \left. + \Phi_0 \left( \sqrt{n} \frac{x+t}{z} \right) \right] dt. \quad (53)$$

**Пример.** Исходные данные — см. в примере на с. 223. Потери от ошибочных решений  $c_1 = c_2 = 1$ ; затратами на проведение контроля можно пренебречь. Допускается трехкратное увеличение времени контроля, т. е.  $n = 3$ .

По формулам (48)–(51) вычисляем границы контрольного допуска

$$x_1 = -10 \cdot 1,5 \left( 1 + \frac{0,3}{3} \right) + \\ + 0 \frac{0,3}{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \frac{0,3^2}{3}} =$$

$$= -1,545; \quad x_2 = 1,545;$$

$$a_{k0} = 10,0 - 1,545 = 8,455 \text{ В};$$

$$b_{k0} = 10,0 + 1,545 = 11,545 \text{ В}.$$

По формулам (24) и (25) вычисляем значения рисков изготовителя и заказчика  $\alpha = 0,0147$ ;  $\beta = 0,0204$ . Минимальное значение среднего риска  $R_{\min} = 0,0147 + 0,0204 = 0,0351$ . Для сравнения определим значение среднего риска при однократном измерении параметра и контроле по гарантийному допуску [8,5 В; 11,5 В]  $R = 0,0407 + 0,0235 = 0,0642$  (см. пример на с. 223).

Следовательно, применение оптимального алгоритма приводит к уменьшению среднего риска почти вдвое.

Таким образом, следует проводить трехкратное измерение параметра, вычислять оценку параметра  $y^* = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$  и принимать решение «годен», если  $y^* \in [8,455 \text{ В}, 11,545 \text{ В}]$ .

*Последовательный оптимальный алгоритм контроля* отличается от рассмотренного выше оптимального алгоритма тем, что после каждого измерения параметра производится обработка результатов измерений и по определенному правилу принимается одно из трех решений: «годен», «не годен» или «выполнить еще измерение». При этом процесс контроля может закончиться после любого  $i$ -го измерения ( $i = 1, \infty$ ), т. е. число измерений, необходимых для принятия решения о годности параметра, является случайной величиной. Поэтому продолжительность контроля характеризуют средним числом измерений  $\bar{n} = M[i]$ . Если считать, что затраты на проведение контроля пропорциональны числу выполненных измерений, то выражение (44) для среднего риска примет следующий вид:

$$R_{\Pi} = c_1 A + c_2 B + c \bar{n}, \quad (54)$$

где  $c$  — затраты на проведение одного измерения.

На практике обычно ограничиваются максимально возможным числом измерений  $n$ . Тогда на последнем  $n$ -м этапе контроля принимается одно из двух решений: «годен» или «не годен».

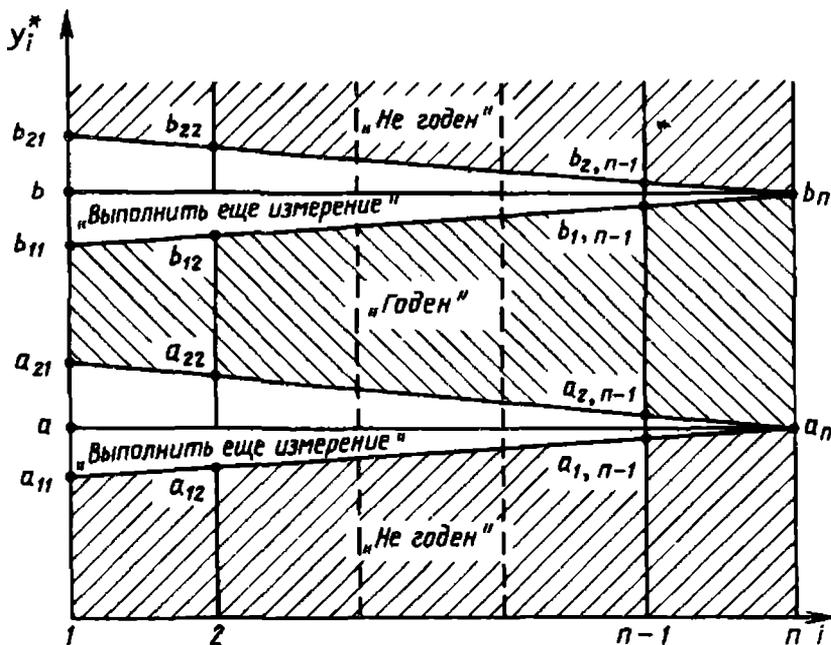


Рис. 4. Области принятия решений при последовательном алгоритме контроля с усечением

и процесс контроля заканчивается. Такой алгоритм контроля называется последовательным алгоритмом с усечением.

Синтез оптимального по критерию среднего риска последовательного алгоритма контроля с усечением в общем случае является сложной задачей. Она решена и доведена до инженерных методик при следующих ограничениях: результаты измерений параметра взаимно независимы; условная плотность вероятности результата измерения при фиксированном значении контролируемого параметра относится к экспонентным (например, нормальному) законам распределения вероятностей.

В этом случае после каждого  $i$ -го измерения вычисляется оценка параметра

$$y_i^* = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i y_j, \quad i = \overline{1, n} \quad (55)$$

и определяется ее местонахождение относительно границ  $a_{1i}, a_{2i}, b_{1i}, b_{2i}$  ( $i = \overline{1, n-1}$ ) (рис. 4). Если  $y_i^* \in [a_{2i}, b_{1i}]$ , принимается решение «годен»; если  $y_i^* \in [a_{1i}, a_{2i}] \cup [b_{1i}, b_{2i}]$ , принимается решение «не годен»; если  $y_i^* \in [a_{1i}, a_{2i}] \cup [b_{1i}, b_{2i}]$ , принимается решение «выполнить еще измерение». Для  $n$ -го измерения устанавливается допуск  $[a_n, b_n]$  и, если

оценка  $y_n^* \in [a_n, b_n]$ , принимается решение «годен», в противном случае — решение «не годен».

Границы допуска  $a_n$  и  $b_n$  определяются по формулам (48) и (49) соответственно. Процедура определения границ  $a_{1i}, a_{2i}, b_{1i}, b_{2i}$  ( $i = \overline{1, n-1}$ ) изложена в [33]. Риск изготовителя и заказчика, а также среднее число измерений вычисляются по формулам:

$$\alpha_n = \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \int_{\xi \in [a, b]} f(\xi) \times \right. \\ \times \prod_{j=1}^{i-1} \left[ \int_{\substack{y_j^* \in [a_{1j}, a_{2j}] \vee \\ \vee [b_{1j}, b_{2j}]}} \varphi_j(y_j^*/\xi) dy_j^* \right] \times \\ \times \int_{y_i^* \in [a_{1i}, b_{2i}]} \varphi_i(y_i^*/\xi) dy_i^* d\xi \left. \right\} + \\ + \int_{\xi \in [a, b]} f(\xi) \times \\ \times \prod_{j=1}^{n-1} \left[ \int_{\substack{y_j^* \in [a_{1j}, a_{2j}] \vee \\ \vee [b_{1j}, b_{2j}]}} \varphi_j(y_j^*/\xi) dy_j^* \right] \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \int_{y_n^* \in [a_n, b_n]} \varphi_n(y_n^*/\xi) dy_n^* d\xi; \\
 & \beta_n = \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \int_{\xi \in [a, b]} f(\xi) \times \right. \\
 & \times \prod_{l=1}^{i-1} \left[ \int_{\substack{y_l^* \in [a_{1l}, a_{2l}] \\ \vee [b_{1l}, b_{2l}]}} \varphi_j(y_l^*/\xi) dy_l^* \right] \times \\
 & \times \left. \int_{y_i \in [a_{2i}, b_{1i}]} \varphi_i(y_i^*/\xi) dy_i^* d\xi \right\} + \\
 & + \int_{\xi \in [a, b]} f(\xi) \times \\
 & \times \prod_{l=1}^{n-1} \left[ \int_{\substack{y_l^* \in [a_{1l}, a_{2l}] \\ \vee [b_{1l}, b_{2l}]}} \varphi_j(y_l^*/\xi) dy_l^* \right] \times \\
 & \times \int_{y_n^* \in [a_n, b_n]} \varphi_n(y_n^*/\xi) dy_n^* d\xi; \quad (57)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\alpha} &= \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \times \\
 & \times \prod_{l=1}^{i-1} \left[ \int_{\substack{y_l^* \in [a_{1l}, a_{2l}] \\ \vee [b_{1l}, b_{2l}]}} \varphi_j(y_l^*/\xi) dy_l^* \right] d\xi, \quad (58)
 \end{aligned}$$

где  $\varphi_j(y_j^*/\xi)$  — условная плотность вероятности оценки  $y_j^*$  при фиксированном значении параметра.

Пример. Исходные данные — см. в примере на с. 226, за исключением того, что затраты на одно измерение  $c = 0,01$ .

Применяя методику, изложенную в [33], а также формулы (48)—(51), определяем значения границ допусков: для 1-го измерения:  $a_{11} = 7,92$  В,

$a_{21} = 8,824$  В;  $b_{11} = 11,176$  В;  $b_{21} = 12,08$  В;

для 2-го измерения:  $a_{21} = 8,23$ ,  $a_{22} = 8,64$  В;  $b_{12} = 11,36$  В;  $b_{22} = 11,77$  В;

для 3-го измерения:  $a_3 = 8,455$  В;  $b_3 = 11,545$  В.

Условная плотность вероятности  $\varphi_j(y_j^*/\xi)$  является нормальной с нулевым математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением  $\sigma_{\delta_j} = \sigma_{\delta}/\sqrt{l}$ . С учетом этого по формулам (56)—(58) вычисляем:  $\alpha = 0,0089$ ;  $\beta = 0,0215$ ;  $\bar{n} = 1,28$ . Средний риск  $R_{\Pi \min} = 0,0089 + 0,0215 + 0,01 \times 1,28 = 0,0432$ . При однократном измерении по гарантийному допуску  $R = 0,0407 + 0,0235 + 0,01 \cdot 1 = 0,0742$ . Следовательно, применение последовательного алгоритма контроля позволяет существенно уменьшить средний риск при небольшом (в среднем на 28 %) увеличении продолжительности контроля.

Оптимальный мажоритарный алгоритм контроля состоит в следующем. Проводятся  $n$  проверок параметра, каждая из которых состоит в установлении факта нахождения результата измерения в контрольном допуске  $[a_k, b_k]$ . После этого подсчитывается число проверок  $\mu$ , дающих результат «в допуске». Если  $\mu \leq s$ , где  $s$  — заданный целочисленный порог ( $s = \bar{1}, n$ ), то принимается решение «годен»; если  $\mu < s$ , — решение «не годен». При таком алгоритме контроля риски изготовителя и заказчика вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
 \alpha_M &= \sum_{i=0}^{s-1} c_n^i \int_{\xi \in [a, b]} f(\xi) \times \\
 & \times \left[ \int_{y \in [a_k, b_k]} \varphi(y/\xi) dy \right]^i \times \\
 & \times \left[ \int_{y \in [a_k, b_k]} \varphi(y/\xi) dy \right]^{n-i} d\xi; \quad (59) \\
 \beta_M &= \sum_{i=s}^n c_n^i \int_{\xi \in [a, b]} f(\xi) \times
 \end{aligned}$$



численным порога  $s$  и  $n - s + 1$  и после каждой проверки подсчитываются числа исходов «в допуске»  $\mu$  и «вне допуска»  $i - \mu$  ( $\mu = \overline{1, i}; i = \overline{1, n}$ ). Если  $\mu = s$ , то принимается решение «годен», если  $i - \mu = n - s + 1$ , — решение «не годен»; если  $s + i - n - 1 < \mu < s$ , — решение «выполнить еще проверку». Очевидно, что на  $n$ -м этапе могут быть приняты только решения «годен» или «не годен».

Риски изготовителя и заказчика при применении этого алгоритма контроля вычисляются по формулам (59) и (60) соответственно. Среднее число проверок вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \bar{n}_M = & \sum_{i=s}^n ic_{i-1}^{s-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \times \\ & \times \left[ \int_{y \in [a_k, b_k]} \varphi(y/\xi) dy \right]^s \times \\ & \times \left[ \int_{y \in [a_k, b_k]} \varphi(y/\xi) dy \right]^{i-s} d\xi + \\ & + \sum_{i=n-s+1}^n ic_{i-1}^{n-s} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \times \\ & \times \left[ \int_{y \in [a_k, b_k]} \varphi(y/\xi) dy \right]^{i-(n-s+1)} \times \\ & \times \left[ \int_{y \in [a_k, b_k]} \varphi(y/\xi) dy \right]^{n-s+1} d\xi. \end{aligned} \tag{65}$$

Процедура оптимизации последовательного мажоритарного алгоритма по критерию среднего риска, который определяется формулой (26), аналогична процедуре оптимизации мажоритарного алгоритма. Для фиксированного значения  $s$ , начиная с  $s = 1$  и до  $s = n$ , решается система трансцендентных уравнений

$$\begin{cases} c_1 \frac{\partial \alpha_M}{\partial a_k} + c_2 \frac{\partial \beta_M}{\partial a_k} + c \frac{\partial \bar{n}}{\partial a_k} = 0; \\ c_1 \frac{\partial \alpha_M}{\partial b_k} + c_2 \frac{\partial \beta_M}{\partial b_k} + c \frac{\partial \bar{n}}{\partial b_k} = 0. \end{cases} \tag{66}$$

Затем вычисляются значения среднего риска  $\min R_{п.м}(s)$  и определяется

$a_k, b_k$   
 $R_{\min п.м} = \min_s \min_{a_k, b_k} R_{п.м}$ , а соответствующие ему значения  $s, a_k$  и  $b_k$  являются оптимальными.

Пример. Исходные данные — см. пример на с. 228. Применить последовательный оптимальный мажоритарный алгоритм контроля.

Так как гарантийный допуск на параметр симметричен относительно математического ожидания, система (66) так же, как в примере 4, сводится к одному уравнению относительно величины

$$v = \frac{b_k - m_\xi}{\sigma_\xi} = \frac{m_\xi - a_k}{\sigma_\xi}.$$

Решая его при  $s = 1, 2, 3$  и вычисляя соответствующие значения  $R_{п.м}(1), R_{п.м}(2), R_{п.м}(3)$ , находим, что минимальный средний риск достигается при  $s = 1, v = 1,33$ . При этом  $\alpha_M = 0,0161, \beta_M = 0,0276; \bar{n}_M = 1,34; R_{\min п.м} = 0,0571$ . Обычный контроль дает значение среднего риска  $R = 0,0742$ . Следовательно, при увеличении в среднем на 34 % времени контроля рассматриваемый алгоритм дает существенное уменьшение среднего риска.

Таким образом, реализация последовательного оптимального мажоритарного алгоритма в условиях данного примера сводится к следующему. Каждая проверка состоит в установлении факта нахождения контролируемого параметра в контролируемом допуске [8,67 В; 11,33 В] или вне его. Значение первого порога  $s = 1$ , а второго  $n - s + 1 = 3$ . Если исход первой проверки «в допуске», то принимается решение «годен» и контроль прекращается, если «вне допуска», то выполняется вторая проверка. Если исход второй проверки «в допуске», то принимается решение «годен» и контроль прекращается, если «вне допуска», то выполняется третья проверка. Наконец, если исход третьей проверки «в допуске», принимается решение «годен», если «вне допуска», — решение «не годен».

Сравнительный анализ алгоритмов контроля работоспособности изделий дает основание сделать следующие выводы:

оптимальный и последовательный оптимальный алгоритмы контроля являются более эффективными по сравнению с мажоритарными алгоритмами;

по мере увеличения сложности аппаратной реализации алгоритмы контроля располагаются в следующем порядке: мажоритарный, последовательный мажоритарный, оптимальный, последовательный оптимальный;

чем выше затраты на проведение дополнительных измерений (проверок) параметра, тем эффективнее становятся последовательные алгоритмы по сравнению с алгоритмами с фиксированным числом измерений;

при наличии требований к ограничению времени контроля (производительности средств контроля) существенным достоинством последовательных алгоритмов становится небольшое (в среднем) увеличение числа измерений (проверок) параметра;

в то время как для средств измерительного контроля принципиально возможно применение любого алгоритма контроля, средства допускового контроля позволяют использовать только мажоритарные алгоритмы.

Методика определения требуемой точности средств контроля. Выражения (37) и (38) для риска изготовителя и риска заказчика позволяют решать следующие важные задачи, возникающие в процессе эксплуатации технических изделий:

если известны характеристики объекта контроля (заданы закон распределения контролируемого параметра и допуски на эти параметры), а также характеристики средств измерений, используемых в процессе контроля (задан закон распределения погрешности измерения), то по формулам (37) и (38) могут быть определены значения  $\alpha$  и  $\beta$ , определяющие достоверность контроля;

если известны характеристики объекта контроля (заданы закон распределения контролируемого параметра и допуски на эти параметры), а также заданы требования к качеству контроля (заданы допустимые значения  $\alpha$  и  $\beta$ ), с помощью выражений (37) и (38) может быть определена требуемая точность средств контроля, при которой

обеспечивается заданное качество контроля.

Решение указанных задач при конкретных видах распределений погрешности измерения и контролируемого параметра осуществляется с помощью ЭВМ или графоаналитическим способом с помощью номограмм.

## 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОГРАММЫ КОНТРОЛЯ ТЕХНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ

Задачу рациональной организации контроля технического состояния системы, наиболее полно учитывающую противоречия между технической реализацией системы и средств ее контроля, с одной стороны, и оперативными требованиями, с другой, можно решить на основе определения приемлемого соотношения между количественными оценками технического состояния систем по результатам контроля на работоспособность и на правильность функционирования.

Пусть в качестве исходных данных заданы:

модель технической системы как объекта контроля

$$M(T_{\beta}) = \| R_{v, \xi(v)} \quad x_{v, \xi(v)} \|, \quad v = \overline{1, k}, \quad (67)$$

где  $R_{v, \xi(v)}$  — результаты контроля  $v$ -й функциональной подсистемы (ФП) при применении  $\xi(v)$ -го теста контроля;

$$\xi(v) \in F_v = \{1, 2, \dots, \xi(v+1) - \xi(v)\},$$

$$\text{здесь } \bigcup_{v=1}^k F_v = \{1, 2, \dots, \xi(v),$$

$$\xi(v) + 1, \quad \xi(v+1) - 1,$$

$$\xi(v+1), \quad \xi(v+1) + 1, \dots,$$

$$\xi(v+2) - 1, \quad \xi(v+2),$$

$$\xi(v+2) + 1, \dots, n\};$$

$$\xi(1) = 1; \quad \xi(k+1) = n + 1;$$

$$F_v \cap F_{\mu} = \emptyset \text{ при } v \neq \mu;$$

набор тестов контроля  $v$ -й ФП

$$T_{\beta} = \bigcup_{v=1}^k T_v;$$

здесь

$$T_v = \{T_{\xi(v)}, \dot{T}_{\xi(v)}\};$$

$T_{\xi(v)}$  — тест, позволяющий осуществить контроль работоспособности  $v$ -й ФП;  $\dot{T}_{\xi(v)}$  — тест, позволяющий осуществить контроль правильности функционирования  $v$ -й ФП; вероятности  $p_v, s_v, q_v, k_v, \forall v = \overline{1, k}$ ; вероятность безотказной работы  $v$ -й ФП на момент контроля  $p_{v\xi}$ ; вероятность невовникновения отказов в  $v$ -й ФП из-за отрицательного влияния операций и методов контроля  $s_{v\xi}$ ; вероятности обнаружения отказа в  $v$ -й ФП при контроле ее на работоспособность и на правильность функционирования  $q_v, k_v$  соответственно.

Взаимосвязь вероятностей, характеризующих безотказность объекта контроля ( $p_v, s_v$ ) и достоверность результатов контроля ( $q_v, k_v$ ), можно представить в аналитической форме.

Если  $v$ -я ФП контролируется на работоспособность, то вероятность работоспособного состояния ее после проведения контроля технического состояния и операций восстановления

$$P_{v, \xi(v)} = P_{v, \xi(v)} (T_{\xi(v)}) = p_v s_v + (1 + p_v) q_{v, \xi(v)} + p_v (1 - s_v) q_{v, \xi(v)}. \quad (68)$$

Из (68) имеем

$$P_{v, \xi(v)} = q_{v, \xi(v)} (1 - p_v s_v) + p_v s_v. \quad (69)$$

Если ФП контролируется на правильность функционирования, то по аналогии с (69)

$$P_{v, \xi(v)} = P_{v, \xi(v)} (\dot{T}_{\xi(v)}) = k_{v, \xi(v)} (1 - p_v s_v) + p_v s_v. \quad (70)$$

Если контроль  $v$ -й ФП не проводится, то вероятность ее работоспособного состояния

$$P_{v, \xi(v)} = P_{v, 0} = p_v. \quad (71)$$

При допущении о независимости параметров различных ФП вероятность работоспособного состояния технической системы после проведения контроля и операций восстановления опре-

деляется произведением (69), (70) и (71) для всех

$$P_0 = \prod_{v=1}^k P_{v, \xi(v)}^{x_{v, \xi(v)}}, \quad (72)$$

где

$$x_{v, \xi(v)} =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } v\text{-я ФП не контролируется } \xi(v)\text{-м тестом;} \\ 1, & \text{если } v\text{-я ФП контролируется } \xi(v)\text{-м тестом,} \end{cases} \quad (73)$$

$$\sum_{\xi(v) \in \delta(v)} x_{v, \xi(v)} = 1, \quad \forall v = \overline{1, k}; \quad (74)$$

здесь  $v = 1, 2, \dots, k$ ;  $\xi(v) \in \delta(v) = F_v \cup 0 = \{1, 2, \dots, \xi(v+1) - \xi(v)\}$ ,  $F_v \cap F_\mu = \emptyset$  при  $v \neq \mu$ . Используем линейный эквивалент (72):

$$c_{v, \xi(v)} = \ln P_0 = \sum_{v=1}^k \sum_{\xi(v) \in \delta(v)} x_{v, \xi(v)} \ln P_{v, \xi(v)}. \quad (75)$$

Показатель (75) количественно учитывает особенности задачи определения программы контроля технического состояния эксплуатируемых систем, состоящие в том, что множество доступных для контроля параметров может быть неполным, а возможности проведения проверок ограничены характеристиками имеющихся на эксплуатации средств эксплуатационного контроля и конструктивными особенностями объектов контроля, изменить которые в эксплуатации нельзя. Поэтому показатель в виде вероятности работоспособного состояния системы после проведения контроля ее технического состояния и операций восстановления может быть использован в качестве целевой функции, так как он отражает цель контроля при подготовках технических систем к применению.

Так как для технических систем, находящихся на эксплуатации, заранее определен состав средств контроля, то в этом случае главным условием решения задачи является ограничение

во времени, которое должно быть менее заданного времени  $t_3$ .

Продолжительность подготовки системы  $t_r$  зависит от ряда факторов, воздействующих на процесс эксплуатации: точности, безотказности и эксплуатационной технологичности объектов контроля, достоверности контроля и т. п. Процесс подготовки рассматривается как некоторая упорядоченная последовательность операций контроля, отбраковки и восстановления, продолжительность выполнения которых в общем случае является случайным событием.

Каждому  $i$ -му комплексу работ соответствует определенное время подготовки  $t_{ri}$  и вероятность  $\Gamma_i = P(t_{ri} \leq t_3)$ .

Безусловная вероятность подготовки системы за заданное время

$$\Gamma = P(t_p \leq t_3) = \sum_{\forall i} H_i \Gamma_i,$$

где  $H_i$  — вероятность того, что для подготовки системы достаточно выполнения  $i$ -го комплекса работ, а для суммы вероятностей этих событий выполняется условие нормировки  $\sum_{\forall i} H_i = 1$ .

Каждому  $i$ -му комплексу операций соответствует определенное среднее время  $\bar{t}_{ri}$ . Среднее время подготовки  $v$ -й ФП при контроле ее с применением  $\xi(v)$ -го теста

$$\bar{t}_{r v, \xi(v)} = \sum_{\forall i} H_i \bar{t}_{ri}. \quad (76)$$

Если считать, что временные затраты на реализацию тестов взаимонезависимые, а последовательность выполнения элементарных проверок, образующих каждый из тестов, установлена, то с учетом (76) и при условиях (73), (74) ограничение записываем в виде

$$\sum_{v=1}^k \sum_{\xi(v) \in \delta(v)} \bar{t}_{r v, \xi(v)} x_{v, \xi(v)} \leq t_3. \quad (77)$$

Введем обозначение  $\ln P_0 = g(Z)$ , где  $Z$  — время, необходимое на контроль и восстановление технической системы по выбранным на рассматри-

ваемом этапе решения задачи тестам контроля каждой из  $v = \overline{1, k}$  ФП. Тогда задача определения программы контроля технического состояния системы описывается как

$$g(Z) = \sum_{v=1}^k \sum_{\xi(v) \in \delta(v)} c_{v, \xi(v)} x_{v, \xi(v)} = \max \quad (78)$$

при ограничениях

$$b = \sum_{v=1}^k \sum_{\xi(v) \in \delta(v)} \bar{t}_{r v, \xi(v)} x_{v, \xi(v)} \leq t_3; \quad (79)$$

$$\sum_{\xi(v) \in \delta(v)} x_{v, \xi(v)} = 1, \quad \forall v = \overline{1, k}, \quad (80)$$

где  $x_{v, \xi(v)} = 0$  или  $1$ , (81)

$$v = \overline{1, k}; \quad \xi(v) \in \delta(v) = F_v \cup 0 = \{0, 1, 2, \dots, \xi(v+1) - \xi(v)\};$$

$$\bigcup_{v=1}^k F_v = \{1, 2, \dots, \xi(v),$$

$$\xi(v) + 1, \dots, n\};$$

$$\xi(1) = 1; \quad \xi(k+1) = n + 1;$$

$$F_v \cap F_\mu = \emptyset$$

при  $v \neq \mu$ .

Содержательное описание задачи (78)–(81) состоит в следующем: к применению готовится техническая система для выполнения « $k$ » функциональных задач; время подготовки ограничено и равно  $t_3$ ; подсистема, предназначенная для решения  $v$ -й функциональной задачи, может быть проконтролирована одним из  $(\xi(v+1) - \xi(v))$  возможных тестов, характеризующихся соответствующей достоверностью результатов контроля; каждый тест контроля в свою очередь характеризуется «полезностью»  $c_{v, \xi(v)}$  и временными затратами  $\bar{t}_{r v, \xi(v)}$ ; необходимо для каждой ФП указать такой тест контроля, чтобы суммарное время подготовки системы не превосходило  $t_3$ , а «полезность» контроля была бы максимальной.

5. Значения коэффициентов целевой функции  $\{c_{v, \xi(v)} \times (-1) 10^{-3}\}$ 

Функциональная подсистема	Тест контроля $\xi(v)$						
	1	2	3	4	5	6	7
1	0,00002	—	—	—	—	—	—
2	10,95984	0,10001	—	—	—	—	—
3	7,02462	4,00802	0,10001	—	—	—	—
4	0,01100	0,00200	0,00053	0,00002	0,00001	—	—
5	17,96033	10,75766	3,60650	0,20002	—	—	—
6	1,00050	0,02000	—	—	—	—	—
7	10,05034	0,02000	—	—	—	—	—
8	10,17564	0,04743	0,03172	0,00825	0,00680	0,00050	0,00030
9	0,14901	0,03608	0,02673	0,00053	0,00026	0,00012	—
10	3,00451	0,10001	—	—	—	—	—
11	26,96018	6,21930	3,80724	1,20072	—	—	—
12	25,01016	5,21357	3,80724	1,10061	—	—	—
13	10,05034	0,03000	—	—	—	—	—
14	10,05035	6,21930	4,51016	2,20242	0,50013	—	—
15	0,10001	0,00100	—	—	—	—	—
16	10,05034	6,01807	4,00802	2,30265	0,03000	—	—
17	5,01254	1,50113	0,50013	0,05000	—	—	—
18	3,00451	0,10001	—	—	—	—	—
19	66,99487	39,67682	19,59065	13,08524	7,12533	0,70025	—
20	0,03600	0,00864	0,00288	0,00014	0,00001	—	—
21	0,00286	0,00137	0,00129	0,00041	0,00038	0,00023	—
22	50,03039	14,70763	9,84834	5,41463	0,50013	—	—
23	33,03985	3,30546	2,60339	—	—	—	—
24	0,10001	0,01000	—	—	—	—	—
25	3,00451	2,00200	0,30005	—	—	—	—
26	0,10001	0,07000	—	—	—	—	—
27	5,01254	3,20513	0,50013	—	—	—	—

Сформулированная задача является типичной задачей исследования операций и решается методами целочисленного программирования.

Пусть в качестве исходных данных решения задачи определения программы контроля технической системы при подготовке к применению заданы: матрица значений коэффициентов целевой функции  $c_{v, \xi(v)} = \ln P_{v, \xi(v)}$  (табл. 5), матрица значений коэффициентов ресурсного ограничения  $i_{v, \xi(v)}$  (табл. 6), время  $t_3 = 45$  мин.

Специфика условий задачи состоит в следующем:

тесты контроля каждой  $v$ -й ФП ранжированы так, что

$$i_{v, 0} \leq i_{v, 1} \leq i_{v, 2} \leq \dots \leq i_{v, \xi(v+1) - \xi(v)}$$

выполняются условия

$$\sum_{v=1}^k i_{v, 0} \leq t_3;$$

$$\sum_{v=1}^k i_{v, \xi(v+1) - \xi(v)} > t_3; k > 1;$$

$$(i_{v, \xi(v)} - i_{v, j(v)}) \times (c_{v, \xi(v)} - c_{v, j(v)}) \geq 0,$$

$$\xi(v), j(v) \in \delta(v);$$

$$j(v) \neq \xi(v), j(v) < \xi(v).$$

Алгоритм решения задачи основан на методе «ветвей и границ» в комбинации с оценками целевой функции, полученными при решении методом линейного программирования [2].

Общий алгоритм решения задачи содержит самостоятельный блок —

алгоритм Б, который позволяет получить нижние оценки целевой функции.

Алгоритм Б. 1. Найти такую пару индексов  $(s, \xi(s))$  переменной, что

$$\frac{c_{s, \xi(s)} - c_{s, 0}}{a_{s, \xi(s)} - a_{s, 0}} = \max_{v, \xi(v); \xi(v) \neq 0} \frac{c_{v, \xi(v)} - c_{v, 0}}{a_{v, \xi(v)} - a_{v, 0}},$$

причем  $(s, \xi(s))$  и  $(s, 0) \in \delta(s)$ .

2. Положить  $\theta := 1; t_{\theta+1} := t_\theta - a_{s, 0} + a_{s, \xi(s)}$ ,

где  $t_1 = \sum_{v=1}^k a_{v, 0}; r; = s; \xi := 1;$

$\xi(v) := 1; v := \overline{1, k}; v := r; \xi(r) := \xi(s)$ .

3. Для всех  $Z$ , принадлежащих интервалу  $(t_1, t_2)$ , принять решение

$$\begin{aligned} x_{v, \xi(r)} &= 1; v = \overline{1, k}; v \neq r; \\ x_{r, \xi} &= \frac{a_{r, \xi}(r) - Z + t_\theta - a_{r, \xi}}{a_{r, \xi}(r) - a_{r, \xi}}; \\ x_{r, \xi}(r) &= 1 - x_{r, \xi}; \\ x_{v, \xi}(v) &= 0 \end{aligned}$$

для остальных  $x$  с индексами  $v, \xi(v)$ .

4. Если  $b > t_{\theta+1}$ , положить  $\theta := \theta + 1$  и перейти к операции 1. В другом случае — конец вычислениям.

Для формальной записи общего алгоритма введен в рассмотрение двумерный массив  $M$ . Строки этого массива будут соответствовать функциональным подсистемам, а элементы строк, число которых переменное, — тестам контроля:  $M = \{m_{v, \xi(v)}; v = \overline{1, k} \in \delta(v), \text{ где } \delta(v) = \{0, 1, \dots, \xi(v+1) - \xi(v)\}$ .

6. Значения коэффициентов ресурсного ограничения  $\{t_{v, \xi(v)}, c$

Функциональная подсистема	Тесты контроля $\xi(v)$						
	1	2	3	4	5	6	7
1	5	—	—	—	—	—	—
2	2	450	—	—	—	—	—
3	10	1320	1590	—	—	—	—
4	11	430	670	710	1100	—	—
5	2	100	340	380	—	—	—
6	10	1200	—	—	—	—	—
7	10	1200	—	—	—	—	—
8	10	370	590	1040	1260	1880	2100
9	10	370	590	1580	3380	4810	—
10	2	50	—	—	—	—	—
11	5	540	780	1100	—	—	—
12	5	540	780	1100	—	—	—
13	2	20	—	—	—	—	—
14	5	300	380	420	500	—	—
15	2	40	—	—	—	—	—
16	5	300	380	420	500	—	—
17	2	60	300	540	—	—	—
18	2	45	—	—	—	—	—
19	2	60	498	600	798	900	—
20	4	340	580	620	1400	—	—
21	7	242	272	420	450	817	—
22	5	180	780	1380	1980	—	—
23	2	95	125	—	—	—	—
24	2	150	—	—	—	—	—
25	2	60	320	—	—	—	—
26	2	250	—	—	—	—	—
27	5	90	1200	—	—	—	—

Каждый элемент массива может принимать три значения 0, 1 или 2. Если  $m_{v, \xi(v)} = 1$ , то это значит, что переменная  $x_{v, \xi(v)}$  входит в решение, просматриваемое в настоящий момент, т. е. равна 1; если  $m_{v, \xi(v)} = 2$ , то эта переменная не может войти ни в одно решение, в которое входят все переменные  $x_{\mu, \xi(\mu)}$ , где  $\mu < v$ ,  $m_{\mu, \xi(\mu)} = 1$ .

Массив  $M$  будет фиксироваться так, чтобы в каждой строке было не более одного элемента, равного единице. Совокупность пар  $(v, \xi(v))$ , для которых  $m_{v, \xi(v)} = 1$ , идентифицируют переменные  $x_{v, \xi(v)}$ , входящие в просматриваемое решение. Произойдет «прорыв», если какому-либо элементу последней строки присвоено значение, равное единице. Каждый «прорыв» приводит к нахождению допустимого целочисленного решения задачи, обеспечивающего не меньшее значение целевой функции, чем ранее достигнутое. Для описания общего алгоритма обозначен через  $x$   $k$ -мерный вектор — наилучшее решение задачи, достигнутое к настоящему моменту, а  $f(Z)$  — соответствующее значение нижней оценки целевой функции (78). Пусть далее  $D = \{d_{v, \rho}\}$  — матрица порядка  $k \times 2$ , где  $d_{v, 1}$  и  $d_{v, 2}$  — суммарные «полезность» и временные затраты на контроль и восстановление ФП, выбранных к данному моменту решения задачи. Обозначим  $y = \{y_v\}$  как  $k$ -мерный вектор, у которого  $v$ -я компонента  $y_v$  есть номер теста контроля  $v$ -й ФП, выбранного к данному моменту решения задачи ( $y_v = 0$ , если  $v$ -я ФП не контролируется). Обозначим через  $B_v(Z)$  задачу (78)–(81), в которой вместо  $b$  в неравенстве (79) используется  $Z$  и рассматриваются не все  $k$  ФП, а  $(k - v + 1)$  последних в матрицах исходных данных, начиная с  $v$ -й. Соответствующее оптимальное значение целевой функции  $g_v(Z)$  задачи  $B_v(Z)$  находится по алгоритму Б. Введем также в рассмотрение массив  $G = \{\Psi_{v, \xi(v)}(Z)\}$  такой же размерности, что и  $M$ . Элемент его  $\Psi_{v, \xi(v)}$  равен верхней оценке целевой функции для такого решения задачи, у которого первые  $v$  переменных, вошедших в решение, есть  $y_1, y_2, \dots, y_{v-1}$  и  $y_v$ .

Общий алгоритм. 1. Решить по алгоритму Б ( $k - 1$ ) задач  $B_v(Z)$ ,  $v = \overline{1, k - 1}$ ,  $B_1(Z) = B_1(b)$ .

2. Определить по результатам операции 1 значения функции  $g_v(Z)$  для всех  $Z$  из интервала

$$\left\{ \sum_{v=1}^k a_{v, 0}, b - \sum_{v=1}^{v-1} a_{v, 0} \right\}, \\ v = \overline{1, k-1}.$$

3. Положить  $g_k(Z) :=$

$$= \max_{\xi(k) \in F_k \cup 0} (C_{k, \xi(k)};$$

$$a_{k, \xi(k)} \leq Z).$$

4. Определить уточненную нижнюю оценку целевой функции для задачи  $B_1(b)$   $g_1(b) =$

$$= \sum_{v=1}^k c_{v, \xi(v)} - c_{r, \xi(r)} + c_{r, \xi}, \text{ где } \xi$$

такое, что  $c_{r, \xi} = \max_{\xi=0, \xi(v+1)-\xi(v)} \left\{ c_{r, \xi};$

$$a_{r, \xi} \leq b - \sum_{v=1}^k a_{v, \xi(v)} +$$

$$+ a_{r, \xi(r)} \right\}; \quad v = \overline{1, k}.$$

5. Определить  $T_v = \sum_{v=1}^{k-1} a_{v, \xi(v)}$ ,

$$v = \overline{2, k-1}.$$

6. Принять  $T_k = a_{k, \xi(k)}$ .

7. Ввести в массивы  $M$  и  $G$  нулевые значения.

8. Принять  $v := 1$ ;  $d_{0, 1} := d_{0, 2} := 0$ .

9. Для каждого  $\xi(v) \in \delta(v)$ , такого, что  $m_{v, \xi(v)} \neq 2$ , вычислить

$$\Psi_{v, \xi(v)}(Z) := d_{v-1, 1} + c_{v, \xi(v)} + \\ + \frac{g_{v+1}(Z)}{T_{v+1}} (b - a_{v, \xi(v)} - d_{v-1, 2}).$$

Положить  $f(Z) := g_v(Z)$ ,  $m_{v, \xi(v)} := 2$  для таких  $\xi(v)$ , что  $\Psi_{v, \xi(v)}(Z) \leq f(Z)$ .

10. Найти такое  $\xi(v)^*$ , что  $m_{v, \xi(v)} \neq 2$  и  $\Psi_{v, \xi(v)^*}(Z) = \max_{\xi(v) \in \delta(v)} g_{v, \xi(v)}(Z)$ . Если указанного  $\xi(v)^*$  нет, то перейти к операции 15, а если есть, то — к операции 11.

7. Результаты решения задачи по определению программы контроля системы

Функциональная подсистема	Тесты контроля $\xi(v)$							$c_{v, \xi(v)} \times \times (-1) 10^{-2}$	$t_{v, \xi(v)}, \text{с}$
	1	2	3	4	5	6	7		
1	1	0	0	0	0	0	0	0,0000002	5
2	1	0	0	0	0	0	0	0,1095984	2
3	1	0	0	0	0	0	0	0,0702462	10
4	1	0	0	0	0	0	0	0,0001100	11
5	0	1	0	0	0	0	0	0,1075766	100
6	1	0	0	0	0	0	0	0,0100050	10
7	1	0	0	0	0	0	0	0,1005034	10
8	1	0	0	0	0	0	0	0,1017564	10
9	1	0	0	0	0	0	0	0,0014901	10
10	0	1	0	0	0	0	0	0,0010001	50
11	0	1	0	0	0	0	0	0,0621930	540
12	0	1	0	0	0	0	0	0,0521357	540
13	0	1	0	0	0	0	0	0,0003000	20
14	1	0	0	0	0	0	0	0,1005034	5
15	1	0	0	0	0	0	0	0,0010001	2
16	1	0	0	0	0	0	0	0,1005034	5
17	0	1	0	0	0	0	0	0,0150113	60
18	0	1	0	0	0	0	0	0,0010001	45
19	0	0	0	0	0	0	0	0,0070025	900
20	1	0	0	0	0	0	0	0,0003600	4
21	1	0	0	0	0	0	0	0,0000286	7
22	0	1	0	0	0	0	0	0,1470763	180
23	0	1	0	0	0	0	0	0,0330546	95
24	1	0	0	0	0	0	0	0,0010001	2
25	0	1	0	0	0	0	0	0,0200200	60
26	1	0	0	0	0	0	0	0,0010001	2
27	1	0	0	0	0	0	0	0,0501254	5
Общий результат								1,0946010	44 мин 57с

11. Принять  $m_{v, \xi(v)} := 1, d_{v-1, 1} := d_{v-1, 1} + c_{v, \xi(v)}^*$ ,  $d_{v, r} := d_{v-1, 2} + d_{v, \xi(v)}^*$ ,  $y_v := \xi(v)^*$ .

12. Присвоить  $v := v + 1$ . Если  $v = k$ , то произошел «прорыв» — перейти к операции 13, если  $k \neq v$ , то — к операции 9.

13. Принять

$$y_k := \max_{\xi(v) \in F_k \cup \emptyset} (c_{k, \xi(k)}; a_{k, \xi(k)} \leq \leq b - d_{k-1, 2}); \underline{f}(Z) := d_{k-1, 1} + + c_{y_k}; x := y.$$

14. Принять  $m_{k-1}, y_{k-1} := 2$  и перейти к операции 8.

15. Если  $v \neq 1$ , то принять

$$m_{v-1}, y_{k-1} := 2;$$

$$m_{v, \xi(v)} := 0 \text{ для } \xi(v) \in \delta(v); v := = v - 1$$

и перейти к операции 10; если  $v = 1$ , то — окончание вычислений.

Применение этого алгоритма для исходных данных, приведенных в табл. 5, 6, дало результаты, помещенные в табл. 7.

# Глава 13. Показатели ремонтпригодности технических систем и их определение

## 1. ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ. СВЯЗЬ МЕЖДУ ВИДАМИ РЕМОНТА

Под видом ремонта понимают ремонт, выделенный по одному из существенных признаков: этапу существования, периодичности, объему работ, условиям эксплуатации, регламентации и т. д.

Классификация видов ремонта и связь между ними представлена на рис. 1. Указанные виды ремонта можно выполнить с помощью различных методов, т. е. совокупности технологических и организационных правил выполнения операций ремонта. Классификация методов ремонта приведена в [47].

## 2. ПОКАЗАТЕЛИ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИЕ РЕМОНТОПРИГОДНОСТЬ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Под ремонтпригодностью понимают свойство объекта, заключающееся в приспособленности к предупреждению и обнаружению причин возникновения

отказов, повреждений и устранению их последствий путем проведения технического обслуживания и ремонтов. Техническое обслуживание входит в тот или иной вид ремонта.

Количественные характеристики ремонтпригодности технических систем можно разделить на две группы: оперативные (временные) и экономические.

Оперативные характеристики определяют время, в течение которого система находится в работоспособном или неработоспособном состоянии в какой-то период эксплуатации в связи с проведением восстановительных работ.

Экономические характеристики позволяют оценить затраты труда и материальных средств на восстановление работоспособности системы.

Количественные характеристики ремонтпригодности, в свою очередь, можно разделить на основные и дополнительные. Основные характеристики позволяют оценить систему с точки зрения выполнения заданных требований к ее ремонтпригодности в целом и получить оценки этих показателей при проектировании, изго-

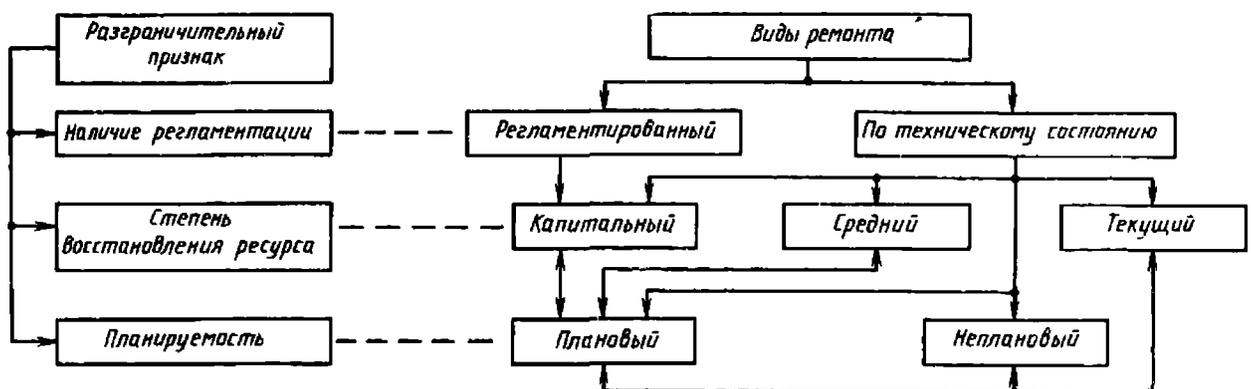


Рис. 1. Классификация ремонта

товлении и эксплуатации. Дополнительные характеристики количественно определяют отдельные свойства ремонтпригодности с целью оценки полноты их учета в конструкции.

К группе основных оперативных характеристик ремонтпригодности относят среднюю оперативную продолжительность планового (непланового) текущего ремонта данного вида, среднюю оперативную продолжительность планового (непланового) капитального ремонта данного вида и др.

К группе дополнительных оперативных характеристик относят показатели контролепригодности (средняя продолжительность поиска отказов, вероятность обнаружения отказов за время, не превышающее заданное), показатели взаимозаменяемости составных частей и др.

К группе основных экономических характеристик ремонтпригодности относят стоимость ремонтов, среднюю стоимость ремонтов, среднюю оперативную трудоемкость планового (непланового) ремонта данного вида и др.

К группе дополнительных экономических характеристик относят показатели эффективности использования рабочего времени при ремонте, показатели удобства выполнения ремонта (коэффициент доступности, легкосъемности и др.), коэффициенты унификации, стандартизации и др.

Показатели ремонтпригодности и расчетные формулы для них приведены в табл. 1.

### 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ РЕМОНТОПРИГОДНОСТИ

Количественные оценки показателей ремонтпригодности определяются по результатам наблюдений за изделиями. Результаты наблюдений могут быть получены при испытаниях изделий на ремонтпригодность или на надежность при проведении технических обслуживаний в процессе эксплуатации, проведения ремонтов. К этим наблюдениям предъявляются следующие требования:

информация должна быть получена в заданных условиях выполнения технического обслуживания и ремонта по организации, технологии, материально-техническому обеспечению, квалификации обслуживающего персонала, условиям окружающей среды при соблюдении в процессе эксплуатации требований эксплуатационной документации.

В наибольшей степени эти условия удовлетворяются при проведении специальных испытаний на ремонтпригодность.

Методами испытаний по разграничительному признаку — формирование необходимости проведения технического обслуживания и ремонта — являются методы с возникающей необходимостью проведения *технического обслуживания и ремонта* (ТО и Р), с создаваемой необходимостью проведения ТО и Р, с предполагаемой необходимостью ТО и Р, комбинированный.

Метод испытания на ремонтпригодность с возникающей необходимостью проведения ТО и Р состоит в проведении натурных испытаний и накоплений исходной информации в ходе выполняемых плановых ТО и Р, а также устранения возникающих отказов.

Создаваемая необходимость в проведении ТО и Р, по существу, представляет собой физическое моделирование ситуаций, в которых реально необходимо выполнять и выполняются операции по ТО и Р. От этого метода отличается метод с предполагаемой необходимостью в проведении ТО и Р, в которой выполнение операций ТО и Р контролируется.

Комбинированный метод представляет собой сочетание указанных выше методов в любой их последовательности.

Подготовка исходных данных и порядок расчета показателей ремонтпригодности. При расчете показателей ремонтпригодности по результатам испытаний изделий на ремонтпригодность и надежность в качестве исходных данных используются: затраты времени и труда на элементы операций ремонтов каждого вида, расход запасных частей, горю-

# 1. Показатели ремонтпригодности

№ по пор.	Показатель	Исходные данные	Формула или порядок расчета показателя	Дополнительные данные
1	Средняя оперативная продолжительность планового (непланового) текущего ремонта данного вида — $T_{\text{в. р. } i}^{(п)}$ [ $T_{\text{в. р. } i}^{(н)}$ ], ч	Число рабочих мест и исполнителей текущего ремонта данного вида — $F$ ; перечень и число операций в текущем ремонте данного вида — $L$ ; среднее оперативное время, затрачиваемое исполнителями $f$ на выполнение операции $l$ текущего ремонта данного вида — $t_{fl}$	—	$t_{fl} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m t_{flj} \quad (1)$ <p>В (1) и (2) <math>t_{flj}</math> — значение оперативного времени, затрачиваемого <math>f</math>-исполнителем на выполнение <math>l</math>-операции текущего ремонта данного вида при <math>j</math>-м наблюдении; <math>m</math> — число наблюдений</p>
2	Средняя оперативная трудоемкость планового (непланового) текущего ремонта данного вида — $S_{\text{в. р. } i}^{(п)}$ [ $S_{\text{в. р. } i}^{(н)}$ ], чел-ч	Перечень и число операций в плановом (неплановом) текущем ремонте данного вида — $L$ ; среднее оперативное время, затрачиваемое исполнителем $f$ на выполнение операции $l$ текущего ремонта данного вида — $t_{fl}$	$S_{\text{в. р. } i}^{(п)} = \frac{1}{m} \sum_{f=1}^F \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^m t_{flj} \quad (2)$	
3	Средняя оперативная стоимость планового (непланового) текущего ремонта данного вида — $C_{\text{в. р. } i}^{(п)}$ [ $C_{\text{в. р. } i}^{(н)}$ ], руб.	Стоимость оперативных затрат на проведение планового (непланового) текущего ремонта данного вида — $C_{\text{в. в. } i}^{(п)}$ ; средняя стоимость запасных частей, используемых при текущем ремонте данного вида — $C_{\text{в. ч. } i}^{(п)}$	$C_{\text{в. р. } i}^{(п)} = C_{\text{в. в. } i}^{(п)} + C_{\text{в. ч. } i}^{(п)} \quad (3)$	—

4	Гамма-процентная оперативная продолжительность планового (непланового) текущего ремонта данного вида — $T_{\text{т.р.}\nu}^{(\text{п})} (T_{\text{т.р.}\nu}^{(\text{н})})$ , ч	Статистические данные об оперативной продолжительности текущего ремонта данного вида — $(T_{\text{т.р.}j}^{(\text{п})})$ , $j = \overline{1, m}$	—	—
5	Гамма-процентная оперативная трудоемкость планового (непланового) текущего ремонта данного вида — $S_{\text{т.р.}\nu}^{(\text{п})} (S_{\text{т.р.}\nu}^{(\text{н})})$ , чел.-ч	Статистические данные об оперативной трудоемкости текущего ремонта данного вида — $S_{\text{т.р.}j}^{(\text{п})} (S_{\text{т.р.}j}^{(\text{н})})$ , $j = \overline{1, m}$	—	—
6	Гамма-процентная оперативная стоимость планового (непланового) текущего ремонта данного вида — $C_{\text{т.р.}\nu}^{(\text{п})} (C_{\text{т.р.}\nu}^{(\text{н})})$ , руб.	Статистические данные об оперативной стоимости текущего ремонта данного вида — $C_{\text{т.р.}j}^{(\text{п})} (C_{\text{т.р.}j}^{(\text{н})})$ , $j = \overline{1, m}$	—	—
7	Средняя суммарная оперативная продолжительность текущих ремонтов — $T_{\text{т.р.}}$ , ч	<p>Число видов плановых текущих ремонтов <math>r</math>;</p> <p>число плановых текущих ремонтов <math>i</math>-го вида за заданную наработку — <math>n_i</math>;</p> <p>средняя оперативная продолжительность планового текущего ремонта данного вида — <math>T_{\text{т.р.}i}^{(\text{п})}</math>;</p> <p>число неплановых текущих ремонтов за заданную наработку — <math>s</math>;</p> <p>средняя оперативная продолжительность непланового текущего ремонта — <math>T_{\text{т.р.}i}^{(\text{н})}</math></p>	$T_{\text{т.р.}} = T_{\text{т.р.}}^{(\text{н})} s + \sum_{i=1}^r T_{\text{т.р.}i}^{(\text{п})} n_i$ <p style="text-align: right;">(4)</p>	$T_{\text{т.р.}j}^{(\text{п})}$ определяются в порядке, изложенном в п. 1. Значение $s$ определяется с учетом вероятности возникновения потребности в проведении неплановых ремонтов

№ по пор.	Показатель	Исходные данные	Формула или порядок расчета показателя	Дополнительные данные
8	Средняя суммарная оперативная трудоемкость текущих ремонтов — $S_{т.р}$ , чел.-ч	<p><b>Вариант I</b></p> <p>Число видов плановых текущих ремонтов — <math>r</math>;  число плановых текущих ремонтов <math>i</math>-го вида за заданную наработку — <math>n_i</math>;  средняя оперативная трудоемкость планового текущего ремонта <math>i</math>-го вида — <math>S_{т.р_i}^{(п)}</math>;  число unplanned текущих ремонтов за заданную наработку — <math>s</math>;  средняя оперативная трудоемкость unplanned текущего ремонта — <math>S_{тр}^{(н)}</math></p> <p><b>Вариант II</b></p> <p>Перечень и число сборочных единиц изделия — <math>D</math>;  средняя суммарная оперативная трудоемкость текущих ремонтов каждой сборочной единицы — <math>S_{т.р_d}</math></p>	$S_{т.р} = \sum_{i=1}^r S_{т.р_i}^{(п)} n_i + S_{т.р}^{(н)} s \quad (5)$ $S_{т.р} = \sum_{d=1}^D S_{т.р_d} \quad (6)$	<p><math>S_{т.р_i}^{(п)}</math> и <math>S_{т.р_i}^{(н)}</math> определяют по формуле (2). Порядок определения тот же, что и в п. 7</p> <p><math>S_{т.р_d}</math> определяют по формуле 5</p>
9	Средняя суммарная оперативная стоимость текущих ремонтов — $C_{т.р}$ , руб.	<p><b>Вариант I</b></p> <p>Число видов плановых текущих ремонтов — <math>r</math>;  число плановых текущих ремонтов <math>i</math>-го вида за задан-</p>		<p><math>C_{т.р}^{(п)}</math> и <math>C_{т.р}^{(н)}</math> определяют по формуле (3). Порядок определения тот же, что в п. 7</p>

ную наработку —  $n_i$ ;  
 средняя оперативная стоимость планового текущего ремонта  $i$ -го вида —  $C_{т.р. i}^{(п)}$ ;  
 среднее число неплановых текущих ремонтов за заданную наработку —  $s$ ;  
 средняя оперативная стоимость непланового текущего ремонта —  $C_{т.р}^{(н)}$

**Вариант II**

Перечень и число сборочных единиц изделия —  $D$ ;  
 средняя суммарная оперативная стоимость текущих ремонтов каждой сборочной единицы —  $C_{т.р. d}$

$$C_{т.р} = C_{т.р}^{(н)} s + \sum_{i=1}^r C_{т.р. i}^{(п)} n_i \quad (7)$$

$$C_{т.р} = \sum_{d=1}^D C_{т.р. d} \quad (8)$$

$C_{т.р. d}$  определяется по формуле (7), где  $r$  — число видов плановых текущих ремонтов по каждой сборочной единице;  $n_i$  — число плановых текущих ремонтов  $i$ -го вида за заданную наработку каждой сборочной единицы;  
 $C_{т.р. i}^{(п)}$  — средняя оперативная стоимость планового текущего ремонта  $i$ -го вида каждой сборочной единицы;  
 $s$  — число неплановых текущих ремонтов каждой сборочной единицы за заданную наработку;  $C_{т.р}^{(н)}$  — средняя оперативная стоимость непланового текущего ремонта каждой сборочной единицы. Порядок определения  $s$  тот же, что и в п. 7

№ по пор.	Показатель	Исходные данные	Формула или порядок расчета показателя	Дополнительные данные
10	Удельная суммарная оперативная продолжительность текущих ремонтов — $\bar{T}_{т.р}$ , ч/ед. наработки	Средняя суммарная оперативная продолжительность текущих ремонтов — $\bar{T}_{т.р}$ ; заданная наработка — $t$	$\bar{T}_{т.р} = \frac{T_{т.р}}{t} \quad (9)$	$T_{т.р}$ определяют по формуле (4)
11	Удельная суммарная оперативная продолжительность трудоемкости текущих ремонтов — $\bar{S}_{т.р}$ , чел.-ч/ед. наработки	Средняя суммарная оперативная трудоемкость текущих ремонтов — $\bar{S}_{т.р}$ ; заданная наработка — $t$	$\bar{S}_{т.р} = \frac{S_{т.р}}{t} \quad (10)$	$S_{т.р}$ определяют по формулам (5), (6)
12	Удельная суммарная оперативная стоимость текущих ремонтов — $\bar{C}_{т.р}$ , руб/ед. наработки	Средняя суммарная оперативная стоимость текущих ремонтов — $\bar{C}_{т.р}$ ; заданная наработка — $t$	$\bar{C}_{т.р} = \frac{C_{т.р}}{t} \quad (11)$	$C_{т.р}$ определяют по формулам (7), (8)
13	Вероятность выполнения непланового текущего ремонта в заданное время — $P_{т.р}^{(н)}$	Статистические данные об оперативной продолжительности устранения последствий отказов, требующих текущего ремонта — $T_{т.рj}^{(н)}$ , $j = \overline{1, m}$ ; заданная продолжительность непланового текущего ремонта — $T_{зад}$	Имеющиеся значения оперативной продолжительности неплановых текущих ремонтов располагают в порядке возрастания в вариационный ряд; каждому значению из вариационного ряда присваивают порядковый номер; находится эмпирическая функция распределения $F_j = j/m$ , $j = \overline{1, m}$ ; находится максимальное	—

			значение $T_{\text{в.р}}^{(\text{п})} \leq T_{\text{зад}}$ ; значение, соответствующее $T_{\text{в.р}}^{(\text{п})}$ , принимается в качестве оценки показателя	
14	Средняя оперативная продолжительность планового (непланового) капитального ремонта данного вида — $T_{\text{к.р}}^{(\text{п})}$ ( $T_{\text{к.р}}^{(\text{н})}$ ), ч	Статистические данные об оперативной продолжительности капитального ремонта данного вида — $T_{\text{к.р}j}^{(\text{п})}$ , $j = \overline{1, m}$	$T_{\text{к.р}}^{(\text{п})} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m T_{\text{к.р}j}^{(\text{п})} \quad (12)$	Здесь и далее используются данные только по первому капитальному ремонту
15	Средняя трудоемкость планового (непланового) капитального ремонта данного вида — $S_{\text{к.р}}^{(\text{п})}$ ( $S_{\text{к.р}}^{(\text{н})}$ ), чел.-ч	Перечень и число операций в капитальном ремонте данного вида — $L$ ; среднее оперативное время, затрачиваемое исполнителем $f$ на выполнение операции $l$ капитального ремонта данного вида — $t_{fl}$ ; число исполнителей капитального ремонта данного вида — $F$	$S_{\text{к.р}}^{(\text{п})} = \sum_{f=1}^F \sum_{l=1}^L t_{fl} \quad (13)$	—
16	Средняя оперативная стоимость планового (непланового) капитального ремонта данного вида — $C_{\text{к.р}}^{(\text{п})}$ ( $C_{\text{к.р}}^{(\text{н})}$ ), руб.	Стоимость оперативных затрат на проведение капитального ремонта данного вида — $C_{\text{т.з}}$ ; стоимость запасных частей, используемых при капитальном ремонте данного вида — $C_{\text{з.ч}}$	$C_{\text{к.р}}^{(\text{п})} = C_{\text{т.з}}^{(\text{п})} + C_{\text{з.ч}}^{(\text{п})} \quad (14)$	—

№ по пор.	Показатель	Исходные данные	Формула или порядок расчета показателя	Дополнительные данные
17	Гамма-процентная оперативная продолжительность планового (непланового) капитального ремонта данного вида — $T_{к.р.ν}^{(п)} (T_{к.р.ν}^{(н)}), ч$	Статистические данные об оперативной продолжительности капитального ремонта данного вида — $T_{к.р.j}^{(п)} (T_{к.р.j}^{(н)}), j = \overline{1, m}$	—	—
18	Гамма-процентная оперативная трудоемкость планового (непланового) капитального ремонта данного вида — $S_{к.р.ν}^{(п)} (S_{к.р.ν}^{(н)}), чел.-ч$	Статистические данные об оперативной трудоемкости капитального ремонта данного вида — $S_{к.р.j}^{(п)} (S_{к.р.j}^{(н)}), j = \overline{1, m}$	—	—
19	Гамма-процентная оперативная стоимость планового (непланового) капитального ремонта данного вида — $C_{к.р.ν}^{(п)} (C_{к.р.ν}^{(н)}), руб.$	Статистические данные об оперативной стоимости капитального ремонта данного вида — $C_{к.р.j}^{(п)} (C_{к.р.j}^{(н)}), j = \overline{1, m}$	—	—
20	Средняя суммарная оперативная продолжительность капитальных ремонтов — $T_{к.р}, ч$	Средняя оперативная продолжительность планового капитального ремонта — $T_{к.р}^{(п)}$ ; число неплановых капитальных ремонтов за заданную наработку — $s$ ; средняя оперативная продол-	$T_{к.р} = T_{к.р}^{(п)} + T_{к.р}^{(н)} s \quad (15)$	$T_{к.р}^{(п)}$ определяют по формуле (12). Порядок определения тот же, что и в п. 7

жительность непланового  
капитального ремонта —  
 $T_{к.р.}^{(н)}$

21 Средняя суммарная оперативная трудоемкость капитальных ремонтов —  $S_{к.р.}$ , чел. ч

**Вариант I**

Средняя оперативная трудоемкость первого капитального ремонта —  $S_{к.р.}^{(п)}$ ;  
число неплановых капитальных ремонтов за заданную наработку —  $s$ ;  
средняя оперативная трудоемкость непланового капитального ремонта —  $S_{к.р.}^{(н)}$

$$S_{к.р.} = S_{к.р.}^{(п)} + S_{к.р.}^{(н)} s \quad (16)$$

$S_{к.р.}^{(п)}$ ,  $S_{к.р.}^{(н)}$  определяют по формуле (13)

**Вариант II**

Число сборочных единиц изделия —  $D$ ;  
средняя суммарная оперативная трудоемкость капитальных ремонтов каждой сборочной единицы —  $S_{к.р.d}$

$$S_{к.р.} = \sum_{d=1}^D S_{к.р.d} \quad (17)$$

$S_{к.р.d}$  определяют по формуле (16)

22 Средняя суммарная оперативная стоимость капитальных ремонтов —  $C_{к.р.}$ , руб.

**Вариант I**

Средняя оперативная стоимость планового капитального ремонта —  $C_{к.р.}^{(п)}$ ;  
число неплановых капитальных ремонтов за заданную наработку —  $s$ ;  
средняя оперативная стоимость  $j$ -го непланового капитального ремонта —  $C_{к.р.}^{(н)}$

$$C_{к.р.} = C_{к.р.}^{(п)} + C_{к.р.}^{(н)} s \quad (18)$$

$C_{к.р.}^{(п)}$ ,  $C_{к.р.}^{(н)}$  определяют по формуле (14),  $s$  — как в п. 7

№ по пор.	Показатель	Исходные данные	Формула или порядок расчета показателя	Дополнительные данные
	Средняя суммарная оперативная стоимость капитальных ремонтов — $C_{к.р}$ , руб.	<p align="center"><b>Вариант II</b></p> Число сборочных единиц изделия — $D$ ; средняя суммарная оперативная стоимость капитальных ремонтов каждой сборочной единицы — $C_{к.р_d}$	$C_{к.р} = \sum_{d=1}^D C_{к.р_d} \quad (19)$	$C_{к.р_d}$ определяют по формуле (18)
23	Средняя удельная суммарная оперативная продолжительность капитальных ремонтов — $\bar{T}_{к.р}$ , ч/ед. наработки	Средняя суммарная оперативная продолжительность капитальных ремонтов — $T_{к.р}$ ; заданная наработка — $t$	$\bar{T}_{к.р} = \frac{T_{к.р}}{t} \quad (20)$	$T_{к.р}$ определяют по формуле (15)
24	Средняя удельная суммарная оперативная трудоемкость капитальных ремонтов — $\bar{S}_{к.р}$ , чел.-ч/ед. наработки	Средняя суммарная оперативная трудоемкость капитальных ремонтов — $S_{к.р}$ ; заданная наработка — $t$	$\bar{S}_{к.р} = \frac{S_{к.р}}{t} \quad (21)$	$S_{к.р}$ определяют по формулам (16), (17)
25	Средняя удельная суммарная оперативная стоимость капитальных ремонтов — $\bar{C}_{к.р}$ , руб/ед. наработки	Средняя суммарная оперативная стоимость капитальных ремонтов — $C_{к.р}$ ; заданная наработка — $t$	$\bar{C}_{к.р} = \frac{C_{к.р}}{t} \quad (22)$	$C_{к.р}$ определяют по формулам (18), (19)

26	Вероятность выполнения непланового капитального ремонта в заданное время — $P_{к.р}^{(н)}$	Статистические данные об оперативной продолжительности устранения последствий отказов, требующих капитального ремонта, — $T_{к.р}^{(н)}$ ; заданная продолжительность непланового капитального ремонта — $T_{зад}$	Порядок определения показателя тот же, что и в п. 13	—
27	Объединенная удельная оперативная продолжительность технических обслуживаний и ремонтов — $T$ , ч/ед. наработки	Удельная суммарная оперативная продолжительность технического обслуживания — $\bar{T}_{т.о}$ ; удельная суммарная оперативная продолжительность текущих ремонтов — $\bar{T}_{т.р}$ ; удельная суммарная оперативная продолжительность капитальных ремонтов — $\bar{T}_{к.р}$	$T = \bar{T}_{т.о} + \bar{T}_{т.р} + \bar{T}_{к.р}$ (23)	$\bar{T}_{т.р}$ определяют по формуле (9); $\bar{T}_{к.р}$ — по формуле (20)
28	Объединенная удельная оперативная трудоемкость технических обслуживаний и ремонтов — $S$ , чел.-ч/ед. наработки	Удельная суммарная оперативная трудоемкость технических обслуживаний — $\bar{S}_{т.о}$ ; удельная суммарная оперативная трудоемкость текущих ремонтов — $\bar{S}_{т.р}$ ; удельная суммарная оперативная трудоемкость капитальных ремонтов — $\bar{S}_{к.р}$	$S = \bar{S}_{т.о} + \bar{S}_{т.р} + \bar{S}_{к.р}$ (24)	—

№ по пор.	Показатель	Исходные данные	Формула или порядок расчета показателя	Дополнительные данные
29	Объединенная удельная оперативная стоимость технических обслуживаний и ремонтов — $C$ , руб/ед. наработки	Удельная оперативная суммарная стоимость технических обслуживаний — $\bar{C}_{т.о}$ ; удельная суммарная оперативная стоимость текущих ремонтов — $\bar{C}_{т.р}$ ; удельная суммарная оперативная стоимость капитальных ремонтов — $\bar{C}_{к.р}$	$C = \bar{C}_{т.о} + \bar{C}_{т.р} + \bar{C}_{к.р} \quad (25)$	—
30	Коэффициент доступности — $k_D$	Основная трудоемкость выполнения операции текущего ремонта — $S_{т.р}^{(o)}$ ; вспомогательная трудоемкость выполнения операции текущего ремонта — $S_{т.р}^{(B)}$	$k_D = \frac{S_{т.р}^{(o)}}{S_{т.р}^{(o)} + S_{т.р}^{(B)}} \quad (26)$	—
31	Коэффициент взаимозаменяемости — $k_B$	Оперативная трудоемкость демонтно-монтажных работ по замене сборочных единиц и деталей изделия в процессе ремонта без пригоночных, регулировочных и селективных работ — $S_{дм}$ ; оперативная трудоемкость пригоночных, регулировочных и селективных работ при замене сборочных единиц и деталей в процессе технического обслуживания (ремонта) изделия — $S_{п}$	$k_B = \frac{S_{дм}}{S_{дм} + S_{п}} \quad (27)$	—

32	Коэффициент легкосъемности — $k_L$	Оперативная трудоемкость демонтажно-монтажных работ (ремонта) той или иной сборочной единицы или детали изделия — $S_{DM}^{(п)}$ ; оперативная трудоемкость аналогичных работ на прототипе — $S_{DM}^{(п)}$	$k_L = \frac{S_{DM}^{(п)}}{S_{DM}} \quad (28)$	—
33	Коэффициент унификации изделия (сборочных единиц, деталей) — $k_y$	Число унифицированных сборочных единиц изделия и его унифицированных деталей, не вошедших в состав сборочных единиц, — $M_{y_i}$ ; общее число соответствующих составных частей изделия без учета стандартизованных крепежных деталей — $M_{сб_i}$	$k_y = \frac{\sum_i M_{y_i}}{\sum_i M_{сб_i}} \quad (29)$	—
34	Коэффициент стандартизации изделия (сборочных единиц, деталей) — $K_C$	Число стандартных сборочных единиц изделия и его стандартных деталей, не вошедших в состав сборочных единиц, — $M_{C_i}$ ; общее число соответствующих составных частей изделия без учета крепежных деталей — $M_{сб_i}$	$k_C = \frac{\sum_i M_{C_i}}{\sum_i M_{сб_i}} \quad (30)$	—

Примечание. Вследствие простоты расчетов показателей ремонтпригодности примеры не приводятся. Требования к объему статистических данных, корректности их обработки изложены в т. 1 и 2.

## 2. Первичная хронокарта № \_\_\_\_\_

Изделие \_\_\_\_\_

Вид и операция ремонта \_\_\_\_\_

Предприятие-изготовитель \_\_\_\_\_

Дата проведения хронометража \_\_\_\_\_

Заводской номер \_\_\_\_\_

Характеристика рабочего места \_\_\_\_\_

Дата выпуска \_\_\_\_\_

Наработка с начала эксплуатации \_\_\_\_\_

Эксплуатирующая организация \_\_\_\_\_

Наименование операций и элементов операций	Исполнители (разряд)	Время выполнения элементов операции				Продолжительность выполнения элементов операций		Время выполнения элементов операции по каждому испытателю и трудоемкость					Расход запасных частей		Расход горючих, смазочных и вспомогательных материалов	
		суммарное		оперативное		суммарная	оперативная	основное	вспомогательное	подготовительно-заключительное	дополнительное	суммарное	Наименование	Количество	Наименование	Количество
		Начало	Конец	Начало	Конец											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

Итого по операции \_\_\_\_\_

Подписи \_\_\_\_\_

3. КАРТА-НАКОПИТЕЛЬ СВЕДЕНИЙ О РЕМОНТАХ ИЗДЕЛИЙ ЗА РАСЧЕТНЫЙ ПЕРИОД

Изделие \_\_\_\_\_

Предприятие-изготовитель \_\_\_\_\_

Эксплуатирующая организация \_\_\_\_\_

Вид ремонта — наименование операции	Количество ремонтов, операций за расчетный период		Продолжительность ремонта, операции		Трудоёмкость ремонта, операции		Запасные части, горючесмазочные и вспомогательные материалы, расходуемые при проведении ремонта, операции		Заработная плата	Общая стоимость
	суммарная	оперативная	суммарная	оперативная	суммарная	оперативная	суммарная	оперативная	на всю	на одну
	одного	одного	одного	одного	одного	одного	на всю	на одну	на всю	на одну
	всех	всех	всех	всех	всех	всех	на всю	на одну	на всю	на одну
	наименование	наименование	наименование	наименование	наименование	наименование	наименование	наименование	наименование	наименование

Подписи

чих, смазочных материалов — по данным первичных хронокарт и число ремонтов за заданную наработку — по данным эксплуатационных и ремонтных документов.

При расчете показателей ремонтпригодности по результатам ремонтов изделий в процессе ремонта в ремонтных подразделениях в качестве исходных используют следующие данные карт-накопителей сведений о ремонте изделий за расчетный период: оперативные продолжительность и трудоёмкость ремонтов каждого вида; расход запасных частей, горючих, смазочных и вспомогательных материалов; число ремонтов каждого вида за расчетный период.

В качестве расчетного периода (заданной наработки) принимается одна из следующих величин:

- назначенный ресурс до первого капитального ремонта включительно;
- наработка за установленный срок службы до списания;
- один цикл всех видов технического обслуживания.

Исходные данные удобно накапливать с помощью первичных, сводных хронокарт (табл. 2) и карт-накопителей (табл. 3) сведений о ремонтах за расчетный период.

Сводная хронокарта имеет подобную табл. 2 структуру, но отличается наименованием столбца 1, где вместо «наименование операций и элементов операций» указываются «номера наблюдений», а вместо «итого по операции» приводятся «средние значения». Остальные столбцы 2—17 имеют прежние наименования. Несколько изменяется также верхняя часть сводной хронокарты: слева вверху оставляются только надписи «изделие» и «эксплуатирующая организация», а справа — только надпись «операция (элементы операции) технического обслуживания (ремонта)».

Формулы для расчета показателей ремонтпригодности приведены в табл. 1. При проведении расчетов необходимо учитывать, что если имеется несколько вариантов расчета показателя, то вариант следует выбирать в зависимости от имеющихся исходных данных.

## Глава 14. Анализ, планирование и управление процессом ремонта технических систем

### 1. ЭКОНОМИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ ЦЕЛЕСООБРАЗНОСТИ РЕМОНТА

Целесообразность ремонта технических систем вытекает, как правило, из того, что для восстановления их качеств в силу неравномерного износа, а также случайного характера отказов и повреждений элементов требуется восстановление или замена лишь некоторой части узлов и элементов. Вследствие этого материальные затраты на выполнение ремонта, как правило, меньше, чем при изготовлении новых систем.

Стоимость ремонта технической системы определяется стоимостью постоянных работ, которая не зависит от фактического технического состояния системы (разборка, сборка, испытания после ремонта и др.), и стоимостью переменных работ, объем которых зависит от состояния составных частей системы. В процессе эксплуатации системы число ее составных частей, ресурс которых уже исчерпан, возрастает. Поэтому число таких составных

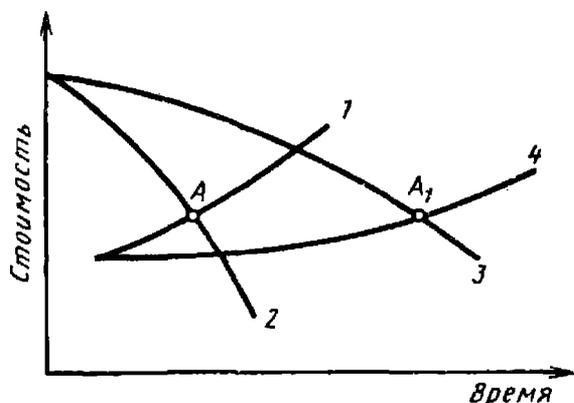


Рис. 1. Зависимость стоимости изготовления и ремонта от времени эксплуатации

частей, подлежащих ремонту или замене при ремонте, меньше, чем их число при следующих ремонтах. Поэтому стоимость переменных работ возрастает с каждым ремонтом. Стоимость же новых систем со временем снижается в связи с совершенствованием технологии производства, повышением производительности труда и другими факторами. На рис. 1 приведены типовые кривые, характеризующие зависимости стоимости ремонта системы и стоимости их изготовления от времени. На рис. 1 видно, что кривые 1 (стоимость ремонта) и 2 (стоимость изготовления новой системы) пересекутся в точке  $A$ , в которой стоимость ремонта и стоимость нового изделия равны между собой. Следовательно, экономически целесообразно производить ремонт системы только до этого момента. Совершенствованием технологического процесса ремонта, повышением производительности труда, внедрением достижений научно-технического прогресса в практику ремонта можно существенно снизить стоимость ремонта системы (кривая 1). Кроме того, можно замедлить интенсивность снижения стоимости новой системы путем интенсивной эксплуатации, уменьшая таким образом моральный износ (кривая 3). При этом кривая 4 пересечется с кривой 3 в точке  $A_1$ . Поэтому число экономически выгодных ремонтов увеличивается, а так как оно определяет срок службы системы, то это приведет к уменьшению расходов на эксплуатацию и ремонт системы в целом.

Таким образом, для экономического обоснования целесообразности ремонта необходимо иметь зависимости стоимости ремонта и стоимости изготовления новой техники в функции от продолжительности эксплуатации [27, 54].

## 2. ТИПОВЫЕ СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ РЕМОНТА ИЗДЕЛИЙ ТЕХНИКИ

Ремонт изделий производится как на местах их эксплуатации (текущий ремонт, который, как правило, является *неплановым*), так и в условиях специализированных организаций — на *ремонтных предприятиях (РП)*.

Ремонт изделий на ремонтных предприятиях имеет стабильную организацию, является в основном *плановым* и играет существенную роль в обеспечении показателей надежности изделий.

Технологический процесс ремонта изделий в РП определяется прежде всего стратегией ремонта, т. е. совокупностью правил управления техническим состоянием изделий в процессе ремонта. В РП применяются две основные стратегии ремонта: по наработке и по техническому состоянию; причем более широко распространена стратегия ремонта по наработке.

Под стратегией ремонта по наработке понимается стратегия, согласно которой объем разборки изделия и дефектации его составных частей назначается единым для парка однотипных изделий в зависимости от наработки с начала эксплуатации и после капитального или среднего ремонта, а перечень операций восстановления определяется с учетом результатов дефектации составных частей изделия.

Физическим обоснованием целесообразности проведения такого периодического по времени ремонта является ухудшение от времени основных параметров, определяющих работоспособность технической системы (старение, изнашивание и т. п.). Если техническое состояние изделия в полной мере определяется функцией распределения времени безотказной работы  $F(t)$ , то необходимым условием целесообразности ремонта является  $\lambda'(t) \geq 0$ , причем

$$\lambda(t) = \frac{F'(t)}{1 - F(t)} \text{ — интенсивность от-}$$

казов.

Если техническое состояние изделия характеризуется набором параметров, для каждого из которых зависимость математического ожидания от времени имеет явно выраженную тенденцию и

убыванию (возрастанию), а дисперсия достаточно мала, то в этом случае также целесообразен периодический ремонт. Вместе с тем единая периодичность приводит к тому, что выбранные сроки могут и не согласовываться с требуемыми сроками, зависящими от технического состояния (например, если скорости изменения математических ожиданий параметров будут существенно отличаться друг от друга).

Применение стратегии ремонта по наработке означает, что изделие, поступающее в ремонт, независимо от его фактического технического состояния, подвергается разборке в объеме, предусмотренном заранее заданным перечнем обязательных работ. Аналогично (вне зависимости от технического состояния) производится и дефектация (диагностирование). В зависимости от объема ремонта, глубины разборки и степени восстановления ресурса в рамках стратегии ремонта по наработке различают два основных вида ремонта — капитальный и средний, хотя четкой границы между объемами среднего и капитального ремонта не существует.

Технологические процессы среднего и капитального ремонтов в связи с многообразием конструктивного исполнения изделий техника отличаются специфическими особенностями, но у них имеется и общая типовая последовательность основных операций.

Рассмотрим усредненную типовую структурную схему технологического процесса, характеризующую специфику среднего и капитального ремонтов (рис. 2). Она содержит 17 основных операций, часть которых при среднем ремонте будет отсутствовать.

Приемка в ремонт включает: оформление соответствующей документации, проверку комплектности, общего технического состояния (внешнего вида), оценку наработки изделия с начала эксплуатации или после последнего ремонта. После проверки изделие подвергается внешней очистке либо продувкой сжатым воздухом, либо промывкой моющими средствами в случае сильных эксплуатационных загрязнений, а затем поступает на участок предварительной оценки работоспособности. Данный этап, характерный для капи-

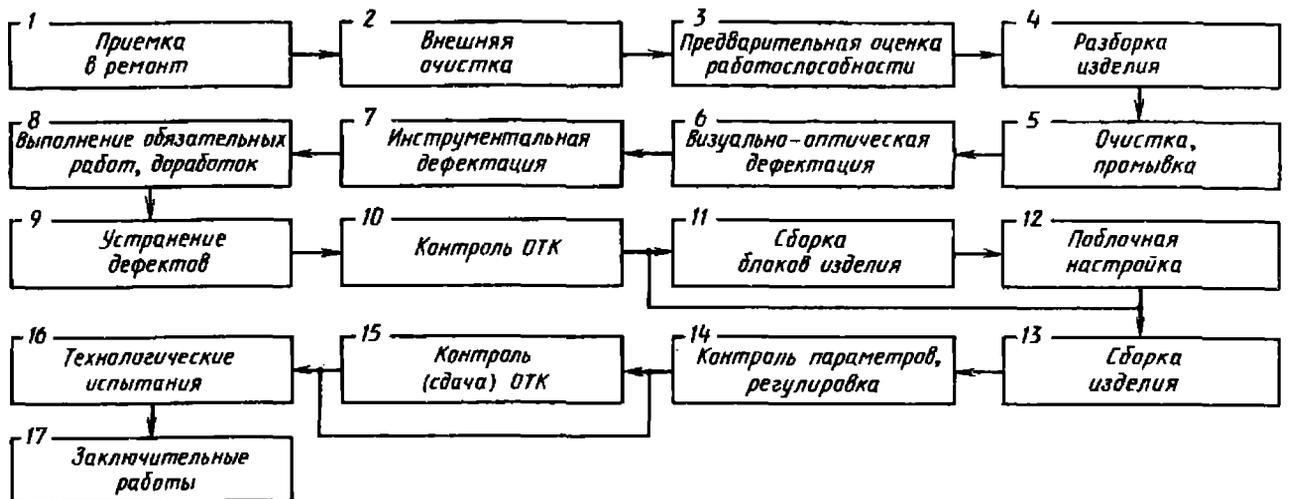


Рис. 2. Схема технологического процесса, соответствующего стратегии ремонта по наработке (средний и капитальный ремонты)

тального ремонта, проводится с целью облегчения настройки или регулировки изделия после ремонта. При среднем ремонте предварительная оценка работоспособности, как правило, не предусматривается.

Операция «разборка изделия» характеризуется таким параметром, как объем разборки, причем он для изделия каждого типа строго регламентирован, т. е. зависит только от наработки изделия с начала эксплуатации (после последнего ремонта) и не зависит от технического состояния конкретного изделия. Объем разборки среднего ремонта, как правило, меньше, чем для капитального, хотя в ряде случаев может быть одинаков. Разборка изделия производится до уровня, позволяющего выполнить обязательные работы, оговоренные в их перечне, и необходимые доработки по действующей *нормативно-технической документации* (НТД). Этот уровень определяется конструктивными особенностями изделия.

После разборки блоки, узлы, детали изделий (т. е. сборочные единицы) поступают на очистку и промывку. На РП эта операция выполняется на отдельном участке. В зависимости от степени и характера загрязнений последние могут удаляться сжатым воздухом, промывкой, в ультразвуковых ваннах и т. п. В качестве моющих средств используются спирт, бензин, синтетические моющие средства.

После очистки блоки, узлы поступают на визуальную-оптическую дефектацию, целью которой является выявление дефектов в виде обрывов, подгаров, трещин, износов и т. д. Для повышения достоверности дефектации используется оптический инструмент (лупа, специальные дефектоскопы типа микроскопов и т. п.). Выявленные дефекты заносятся в ведомость дефектации.

При капитальном ремонте с целью углубленной оценки технического состояния применяется инструментальная дефектация с помощью средств неразрушающего контроля внутреннего состояния элементов конструкции на наличие трещин, раковин и т. п. Технология среднего ремонта обычно не предусматривает проведение инструментальной дефектации. Дефекты, выявленные в процессе визуально-оптической и инструментальной дефектации, заносятся в ведомость дефектации для их последующего устранения.

Собственно ремонт (восстановление) включает (см. рис. 2, операции 8, 9): выполнение обязательных работ, оговоренных в технологии ремонта данного изделия (замена составных частей, регулировка, смазывание и другие работы, которые необходимо выполнить для поддержания послеремонтной надежности на заданном уровне); доработки по действующим и нормативно-технологическим документам; устра-

нение дефектов согласно ведомости дефектации.

После ремонта производится сборка изделия до уровня, обеспечивающего возможность проверки его параметров и проведения работ по настройке и регулировке.

Для относительно простых изделий (механических, электромеханических) после операции «контроль ОТК» выполняются операции «сборка изделия» и «контроль параметров, регулировка». Для более сложных изделий предварительно выполняются сборка блоков и поблочная настройка и только после этого операция «сборка изделия».

Капитальный ремонт включает также проведение послеремонтных технологических испытаний, цель которых — выявить дефекты, внесенные при проведении ремонта (ошибки исполнителей), а также обеспечить «приработку» замененных деталей и узлов с другими частями конструкции. Наиболее часто используемые послеремонтные технологические испытания следующие: в нормальных климатических условиях, в условиях воздействия повышенных и пониженных температур, испытания на виброустойчивость.

К заключительным работам относят: оформление необходимой документации, работы по консервации, упаковке изделия и передаче его по назначению.

ОТК контролирует качество выполнения ремонтных работ и соответствие отремонтированного изделия требованиям технических условий на ремонт. На рис. 2 показано типовое расположение контрольных операций, выполняемых ОТК.

Ремонт, проводимый по изложенной выше технологии, применяют не только из-за изнашивания изделий, но и из-за отсутствия надежных методов контроля их технического состояния без полной разборки. По мере повышения надежности изделий, совершенствования методов контроля и анализа диагностической информации необходимость в разборке изделий для проверки их технического состояния постепенно уменьшится.

Повышение общего технического уровня конструирования изделий, совершенствование технологии их изготовления, применение новой, более на-

дежной элементной базы и материалов, средств диагностирования, обеспечивающих обнаружение отказов и неисправностей без разборки изделия, значительное расширение возможностей встроенных систем контроля, существенный запас различного вида ресурсов — это основа для перехода на систему ремонта по техническому состоянию, что приведет к сокращению объема ремонта и увеличению пропускной способности РП.

При стратегии *ремонта по техническому состоянию* (РТС) перечень операций по разборке и восстановлению работоспособности определяется по результатам диагностирования изделия в момент начала ремонта.

В отличие от стратегии ремонта по наработке (среднего и капитального ремонтов) перечень обязательных работ при РТС содержит только указания по объему диагностирования и некоторым вспомогательным работам, обеспечивающим его проведение.

Объем же собственно ремонта (разборка, восстановление, контроль и регулировка, испытания) полностью зависит от результатов полученной при диагностировании оценки технического состояния поступившего в ремонт изделия.

Ремонт по техническому состоянию основан на том, что в данном конкретном устройстве проводятся только те работы, которые необходимы для поддержания его послеремонтной надежности на заданном уровне, и не делается ничего лишнего. Ремонтные работы, не обусловленные фактическим состоянием системы, особенно разборочно-сборочные и регулировочные, могут ухудшить техническое состояние изделий (за счет естественно происходящего изнашивания и старения, за счет дефектов, вносимых исполнителями при ремонте, и т. п.).

Схема построения типового технологического процесса, соответствующего стратегии РТС, приведена на рис. 3.

Рассмотрим технологический процесс по этапам.

Этапы приемки в ремонт 1, внешней очистки 2, сдачи ОТК 8, заключительных работ 9 аналогичны соответствующим операциям стратегии ремонта по наработке (см. рис. 2).

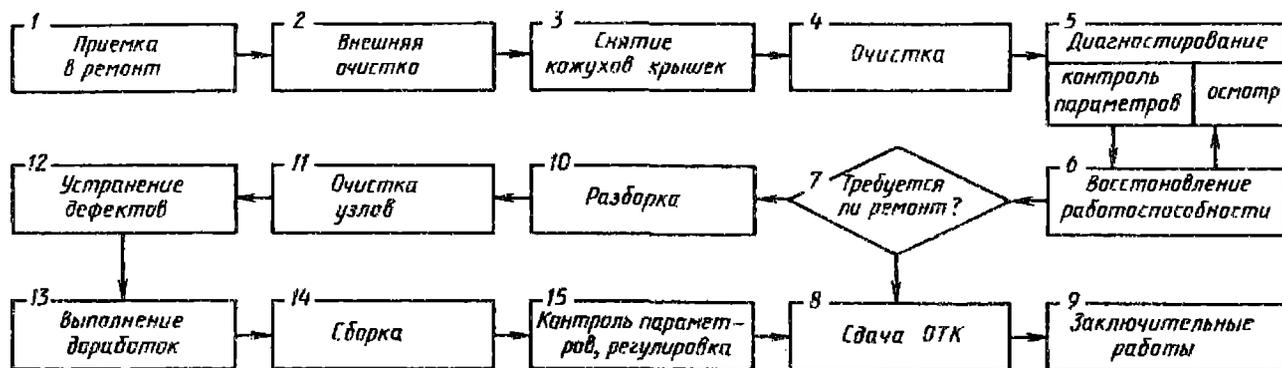


Рис. 3. Схема технологического процесса, соответствующего стратегии ремонта по техническому состоянию

После внешней очистки на изделии проводятся вспомогательные работы, обеспечивающие возможность проведения диагностирования с требуемой глубиной и достоверностью: снятие легкоъемных кожухов, крышек, технологических заглушек для возможности осмотра, подключения диагностической аппаратуры и проведения регулировочных работ. Одновременно производится удаление эксплуатационных загрязнений (очистка монтажа), что облегчает проведение визуального осмотра. Одним из основных этапов ремонта по стратегии РТС является диагностирование 5 (см. рис. 3), заключающееся в осмотре элементов конструкции и монтажа и проверке параметров, обеспечивающих оценку технического состояния ремонтируемого устройства с заданной глубиной. При наличии соответствующей аппаратуры диагностирования последующие решения о необходимости и объеме выполнения ремонтных работ могут осуществляться в автоматическом режиме с фиксацией их в стандартной ведомости дефектации.

При ручном диагностировании проверки производятся на стендах с заполнением ведомости дефектации. В эту ведомость специалист, осуществляющий диагностирование, заносит выявленные (визуально и по приборам) дефекты, после чего совместно с мастером и специалистом ОТК принимает решение о необходимости ремонта изделия.

В процессе проведения диагностирования производится устранение дефектов, влияющих на работоспособность 6. Простейшие дефекты устраня-

ются на месте. Если обнаружить дефект, приведший к отказу, сразу не удастся, отказавший блок может заменяться на заведомо исправный (технологический), и диагностирование продолжается.

Если дефектов, подлежащих устранению в процессе диагностирования, не выявлено (в отличие от среднего и капитального ремонта при РТС устраняются только те дефекты, которые привели или могут привести в эксплуатации к потере работоспособности изделия), изделие признается не нуждающимся в ремонте, предъявляется ОТК и поступает на заключительные работы 9.

Если диагностирование показало необходимость проведения в изделии ремонтных работ (углубленной очистки, замены смазки, устранения дефектов, выполнения доработок и т. д.), его при необходимости подвергают дополнительной разборке 10 в объеме, обеспечивающем возможность проведения таких работ, а затем оно поступает на участок ремонта, где производятся указанные работы.

Проверка по блокам при РТС не предусмотрена, однако при необходимости она может применяться для поиска места отказа и регулировок блоков, для которых проведение этих операций в составе изделия затруднено.

После выполнения ремонтных работ изделие поступает на участок контроля параметров и регулировку. Количество проверяемых параметров на этом участке может быть меньше, чем при диагностировании: проверяются только определяющие общую работоспособность параметры и параметры, значения ко-

торых могли измениться в процессе ремонта.

Проведение послеремонтных технологических испытаний при РТС, как правило, не предусматривается. Единственным рекомендуемым видом испытаний является приработка, которая проводится в случае, если в изделии пришлось выполнять ремонтные работы, охватывающие практически весь объект.

Анализ проведения ремонта по техническому состоянию летательных аппаратов гражданской авиации показал, что его внедрение позволяет уменьшить примерно на 30—40 % трудозатраты на ремонт некоторых бортовых устройств без снижения уровня послеремонтной надежности. Это достигается за счет того, что стратегия РТС позволяет отказаться от ремонта части устройств (поступивших в ремонт в хорошем состоянии), которые при среднем и капитальном ремонте требовали обязательной разборки, регулировки, сборки, а следовательно, и последующей настройки и испытаний, т. е. выполнения излишних работ. Кроме того, исключается ряд проверок и других работ, которые необоснованно закладывались в первоначальную технологию ремонта. Такие операции в последующем не влияли на показатели безотказности, но требовали дополнительных трудозатрат, что приводило к снижению экономичности ремонта, а иногда и к снижению эксплуатационных свойств объектов вследствие ошибок персонала.

### 3. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЭЛЕМЕНТЫ СЕТЕВОГО ГРАФИКА

Основу системы сетевого планирования и управления составляет сетевая модель (сетевой график) — графическое изображение технологического процесса ремонта как совокупности определенных событий и работ, находящихся в логической и временной связях. На сетевом графике события принято обозначать кружками, а работы — стрелками. Применительно к технологическому процессу ремонта технических систем на основе исходных

данных и тщательного изучения технологии ремонта целесообразно составить перечень основных событий.

Перечень основных событий включает все значительные события *технологического процесса ремонта (ТПР)*, расположенные в строгой последовательности. Под событием понимается итог какой-то деятельности, результат выполнения предшествующей работы (операции). Событие не является процессом, не имеет длительности и не сопровождается затратами времени и средств. Событие означает итог свершения одних работ и в то же время начало каких-либо других. Событие должно быть сформулировано точно, конкретно и ясно. Различают начальное и конечное события, исходные и завершающие.

Рассмотрим случай, когда исходным событием может быть «изделие поступило в цех № 1» или «монтаж изделия в цехе № 3 закончен». Завершающее событие, представляющее собой конечную цель комплекса работ, может быть сформулировано так: «изделие представителями эксплуатирующих организаций принято». Исходное и завершающее события определяют границы анализируемого ТПР. Между ними располагаются промежуточные события, число которых зависит от степени детализации планируемой сети.

Полный перечень событий, расположенных в строгой последовательности, обычно представляют в виде таблицы, приведенной ниже.

Номер события		Наименование события
порядковый	предшествующий	

Для перехода от одного события к другому необходимо совершить определенное действие или работу. Работа (операция ремонта) — это трудовой процесс, действие, для выполнения которого требуются затраты времени и ресурсов. Каждая работа начинается и кончается событием. Одно и то же событие может быть началом или результатом нескольких работ. Следова-

тельно, для составления сетевого графика необходимо выяснить и точно сформулировать, какие работы предшествуют каждому событию и следуют за ним. Для этого используется описание технологического процесса ремонта объекта. Кроме того, каждая работа оценивается в часах.

Различают детерминированные и стохастические *сетевые графики* (СГ). Детерминированные СГ характеризуются тем, что продолжительность каждой работы точно известна. Для стохастических сетевых графиков продолжительность работ описывается с помощью функций распределения времени выполнения работы.

При построении сети события в виде кружков располагают на листе бумаги с соблюдением технологической последовательности. Затем соединяют события стрелками, получая таким образом сетевой график. Длина стрелок не имеет значения, но последовательность соединения кружков стрелками, их взаимное расположение должны давать полное представление о выполняемых работах.

При вычерчивании сети необходимо соблюдать общие правила построения сетевых графиков: на графике не должно быть «тупиковых» событий и работ, замкнутых контуров (петель), все стрелки должны быть по возможности направлены слева направо, между двумя событиями может быть проведена только одна стрелка. Каждое событие в сети должно иметь свой номер. При нумерации сети очень важно придерживаться правила: данное событие не может наступать до тех пор, пока не наступили все события с меньшими номерами, а стрелки, обозначающие работы в сетевом графике, должны идти от событий с меньшими номерами к событиям с большими номерами.

Построением логической сетевой модели заканчивается начальный этап анализа сетевого графика.

#### 4. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО СЕТЕВОГО ГРАФИКА

Сетевой график позволяет установить, от каких операций и в какой

степени зависит достижение конечной цели.

Исследование модели технологического процесса ремонта в виде СГ и расчет его параметров позволяют определить работы на критическом пути и провести корректировку технологического процесса с целью сокращения затрат времени на ремонтный цикл.

Для описания математической модели ТПР введем обозначения:  $T_{pi}$  — ранний срок наступления события  $i$ ;  $T_{pi}$  — поздний срок наступления события  $i$ ;  $t_{ij}$  — время операции  $(ij)$ ;  $i$  — номер предшествующего события;  $j$  — номер последующего события;  $R_{pi}(i, j)$  — полный резерв времени операции  $(ij)$ ;  $R_c(i, j)$  — свободный резерв времени операции  $(ij)$ ;  $R_i$  — резерв времени события  $i$ ;  $t_p(ij)$  — ранний срок окончания операции  $(ij)$ ;  $t_{pi}(ij)$  — поздний срок начала операции  $(ij)$ .

Алгоритм расчета сетевого графика с детерминированным временем выполнения операций включает следующие основные этапы:

расчет ранних сроков окончания операций

$$t_p(ij) = T_{pi} + t_{ij};$$

расчет ранних сроков наступления событий

$$T_{pj} = \max \{t_p(ij)\};$$

расчет поздних сроков начала операций

$$t_{pi}(ij) = T_{pi} - t_{ij};$$

расчет поздних сроков наступления событий

$$T_{pi} = \min \{t_{pi}(ij)\};$$

расчет резервного времени события

$$R_i = T_{pi} - T_{pi};$$

расчет полного резерва операции  $R_{pi}(ij)$ , т. е. максимального времени, на которое можно увеличить продолжительность работы  $(ij)$ , не изменяя раннего срока наступления завершающего события;

расчет свободного резерва  $R_c(ij)$ , т. е. максимального времени, на которое можно отсрочить начало или увеличить продолжительность работы  $(ij)$

при условии, что все события сети наступают в свои ранние сроки;

определение критического пути, т. е. законченной последовательности работ, продолжительность которой имеет максимальное значение.

Критический путь на сетевом графике — это путь с нулевым полным резервом. Любая операция, имеющая нулевой резерв времени, является критической по отношению к сроку завершения процесса в целом. Отсутствие резервов на операциях критического пути означает то, что невыполнение срока окончания для любой из этих операций приведет к невыполнению в срок ремонта в целом. Поэтому именно операции (этапы) ремонта на критическом пути требуют их безусловного выполнения, немедленного вмешательства при угрозе их срыва.

1. Перечень событий технологического процесса

Номер события		Наименование события
порядковый	предшествующий	
1	1	Изделие поступило в цех
2	1	Изделие принято в ремонт
3	2	Изделие разобрано
4	3	Агрегат А продефектирован
5	3	Прибор В продефектирован
6	3	Блок С продефектирован
7	4	Агрегат А восстановлен
8	7	Агрегат А испытан
9	5	Прибор В восстановлен
10	9	Прибор В испытан
11	6	Блок С испытан
12	8, 10, 11	А, В, С сданы ОТК
M=12		

2. Исходные данные для расчета сетевого графика

Шифр работы	Краткое содержание	Трудоемкость, чел.-ч	Число исполнителей	Продолжительность, дни
1	Приемка изделий в ремонт	20	4	0,5
2	Разборка изделия	30	3	1
3	Дефектация агрегата А	10	1	1
4	Дефектация прибора В	8	1	0,8
5	Дефектация блока С	15	1	1,5
6	Восстановление агрегата А	20	2	1
7	Восстановление прибора В	30	2	1,5
8	Испытание блока С	20	1	2
9	Испытание агрегата А	10	1	1
10	Испытание прибора В	15	1	1,5
11	Сдача ОТК агрегата А	5	1	0,5
12	Сдача ОТК прибора В	5	1	0,5
13	Сдача ОТК блока С	5	1	0,5
N=13				

Пример. Пусть имеется изделие, состоящее из агрегата А, прибора В и блока С. Ремонт осуществляется на основе стратегии по ресурсу. Необходимо построить сетевой график технологического цикла и рассчитать длину критического пути. Перечень событий представлен в табл. 1.

Будем считать, что заданы продолжительности каждой операции, их трудоемкость и необходимое число исполнителей (табл. 2).

На основе данных табл. 1 и 2 строится сетевой график (рис. 4). Критический путь, обозначенный двойными стрелками, проходит через события 1, 2, 3, 5, 9, 10, 12 и равен 5, 8 дней.

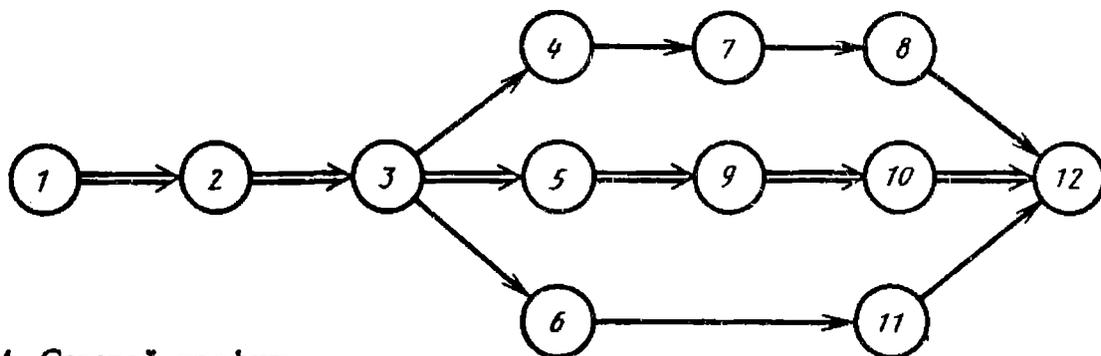


Рис. 4. Сетевой график

## 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ РЕМОНТА

Система ремонта относится к классу больших систем, и вследствие этого ее анализ связан с построением моделей, отражающих различные аспекты ее функционирования (организационные, структурные, технологические и др.). Это многообразие вызывает необходимость использования различных математических моделей. К наиболее распространенным относятся модели теории массового обслуживания (ТМО), математического программирования, статистического моделирования и др.

Модели ТМО используют для определения эффективности структуры ремонтной сети; они позволяют решать задачи распределения сил и средств при ремонте и обоснования необходимости проведения ремонтных работ заданного объема. Наибольший учет многообразия сторон системы ремонта обеспечивает метод статистического моделирования. Он позволяет сравнивать различные структуры ремонтной сети, выявлять и оценивать влияние различных факторов на показатели эффективности системы ремонта, но требует необходимых исходных данных и построения неформальных моделей.

Обоснование структуры системы ремонта. При ремонте технических систем типовой является следующая ситуация. Имеется несколько рабочих мест (ремонтных бригад, ремонтных групп), на которые в случайные моменты времени поступают для ремонта отказавшие системы, образующие входной поток требований. Если рабочее место свободно, то ремонт начинается немедленно. Если все рабочие места заняты, то отказавший объект ожидает

неограниченно долго освобождения места для ремонта. После ремонта техническое состояние объекта считается новым.

Если известны характеристики входного потока требований, производительность каждого рабочего места и их число, то необходимо определить выходные показатели такой системы ремонта (процент исправных объектов, среднее число систем, ожидающих ремонта, вероятность того, что не будет ремонтироваться ни одна система, т. е. что система ремонта простаивает и т. п.) в зависимости от возможной ее структуры. Общая методика решения таких задач заключается в следующем. Задается пространство состояний системы, оцениваются интенсивность входного потока и интенсивность обслуживания. Для выбранных состояний составляется система дифференциальных уравнений, которая решается. Ее решение определяет характеристики системы ремонта как в переходном режиме, так и в стационарных режимах. Наиболее часто решение ищется для стационарного режима.

Пусть в ремонтной системе имеется  $n$  независимых рабочих мест, предназначенных для ремонта  $m$  технических систем. Входной поток является пуассоновским с интенсивностью  $\lambda$ , интенсивность обслуживания на одном рабочем месте  $\mu$ . Обозначим через  $k$  текущее значение числа отказавших систем. Для рассматриваемой системы ремонта справедлива следующая система дифференциальных уравнений относительно вероятностей состояний  $p_k(t)$  [26]:

$$p'_0(t) = -m\lambda p_0(t) + \mu p_1(t);$$

$$\vdots$$

$$p'_k(t) = -[(m-k)\lambda + k\mu] p_k(t) + (m-k+1)\lambda p_{k-1}(t) + (k+1) \times \mu p_{k+1}(t), \quad 0 < k < n;$$

$$p'_k(t) = -[(m-k)\lambda + n\mu] p_k(t) + (m-k+1)\lambda p_{k-1}(t) + n\mu p_{k+1}(t), \quad n \leq k \leq m; \quad (1)$$

$$p'_m(t) = -\lambda p_{m-1}(t) + n\mu p_m(t).$$

Для стационарного случая ( $t \rightarrow \infty$ ) система (1) преобразуется в систему алгебраических уравнений, решение которой обеспечивает получение искомым показателей.

Для рассматриваемой системы доля исправных систем

$$k_{из} = 1 - \frac{M}{m}, \quad (2)$$

где среднее число объектов, находящихся на ремонте,

$$M = M_{ож} + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha^k m!}{k! (m-k)!} p_0. \quad (3)$$

Среднее число объектов, ожидающих ремонта,

$$M_{ож} = \sum_{k=n+1}^m \frac{(k-n) m! \alpha^k}{n^{k-n} n! (m-k)!} p_0.$$

Вероятность простоя системы ремонта

$$p_0 = \left[ \sum_{k=0}^n \frac{m!}{k! (m-k)!} \alpha^k + \sum_{k=n+1}^m \frac{m!}{n^{k-n} n! (m-k)!} \alpha^k \right]^{-1}, \quad (4)$$

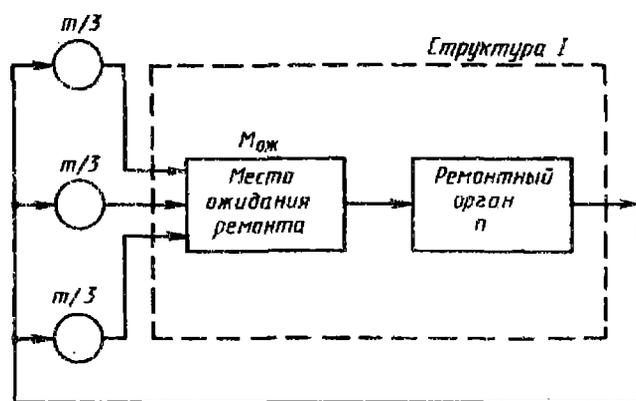
$$\alpha = \lambda/\mu.$$

Приведенная модель является простейшей типовой моделью [26]. Более сложные модели (в которых наложены ограничения на длину очереди, указаны приоритеты обслуживания, входные потоки не являются пуассоновскими и др. [26]) позволяют точнее описать реальную обстановку организации ремонта. Выбор соответствующей модели производится после анализа конкретной физической ситуации, складывающейся в системе ремонта.

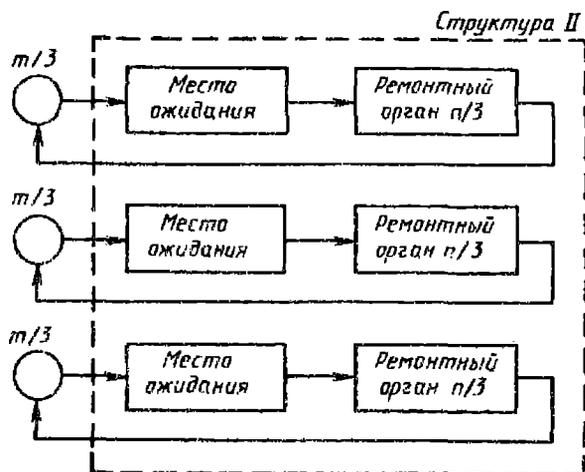
Пример. Имеется две структуры системы ремонта: I и II (рис. 5). В обеих структурах входной поток одинаков и определяется тремя источниками отказавших объектов, в каждом из которых находится  $m/3$  объектов.

В структуре I имеется одно место ожидания ремонта и один ремонтный орган, содержащий  $n$  рабочих мест. По мере освобождения рабочего места ожидающий ремонта объект начинает восстанавливаться.

В структуре II для каждого источника отказавших объектов имеется



а)



б)

Рис. 5. Структура ремонтного органа: а — централизованная; б — децентрализованная

### 3. Результаты расчетов показателей ремонтного органа

Структура	Показатель		
	$p_0$	$M$	$k_H$
I	0,22	1,11	0,97
II	0,33	1,21	0,91

свое место ожидания и собственный ремонтный орган, содержащий  $n/3$  рабочих мест. Необходимо оценить, какая из этих систем эффективнее по таким показателям, как  $k_H$ ,  $M$ ,  $p_0$ .

Для случая  $n = 6$ ,  $m = 40$  результаты расчетов представлены в табл. 3.

Из табл. 3 следует, что организация ремонта по структуре I является более целесообразной, так как она обеспечивает более высокую долю исправных систем и меньше простаивает.

Распределение сил и средств при ремонте. При организации ремонта характерной задачей является задача распределения наличных сил при заданном общем объеме ремонта (например, ремонт парка автомашин на автобазе, парка самолетов в авиаремонтном предприятии и т. п.).

Имеется ремонтный орган, состоящий из  $m$  бригад (рабочих мест). Предполагается, что бригады по своим ремонтным возможностям одинаковы. Необходимо выполнить ремонт  $n$  объектов, отличающихся по значимости (например, по доходу, который получает ремонтный орган за выполнение работы). Обозначим выигрыш от выполнения ремонта (доход)  $j$ -го объекта  $c_j$ . Для всех  $n$  объектов значения дохода задаются совокупностью  $\{c_j, j = \overline{1, n}\}$ . В силу того, что все объекты различны, ремонт каждого из них будем характеризовать вероятностью успешного выполнения ремонта  $p_j$  для любой бригады. Задача распределения сводится к тому, чтобы определить, сколько бригад необходимо поставить на каждый объект, чтобы ремонтный орган получил наибольший доход.

Если выделить на ремонт  $j$ -го объекта  $k_j$  бригад, то вероятность успешного ремонта

$$P_j = 1 - (1 - p_j)^{k_j},$$

а доход

$$\varphi_j(k_j) = c_j [1 - (1 - p_j)^{k_j}].$$

Тогда задача сводится к выбору такого распределения  $k = \{k_j, j = \overline{1, n}\}$ , чтобы суммарный доход

$$F(k) = \sum_{j=1}^n c_j [1 - (1 - p_j)^{k_j}] \quad (5)$$

был бы максимальным. В задаче существуют следующие ограничения: 1) все  $k_j$  — целые, положительные числа,

$k_j \geq 0$ ; 2)  $\sum_{j=1}^n k_j = m$ , т. е. при любом

распределении суммарное число выделенных для ремонта бригад должно быть равно имеющемуся их количеству.

Сформулированная задача является нелинейной целочисленной задачей математического программирования, заключающаяся в таком выборе набора  $\{k_j\}$ , чтобы целевая функция  $F(k)$  была бы максимальна при выполнении ограничений 1) и 2). Метод ее решения итерационный; он сводится к следующему:

задается начальный вектор  $k^{(0)} = \{0 \dots 0\}$ ;

на каждом шаге оценивается приращение функции  $F(k)$ , которое получается от добавления единицы (одной бригады) к каждому из компонентов начального вектора;

выбирается тот компонент  $j_0$ , приращение которого дает наибольшее приращение целевой функции  $F(k)$ .

Формализованный алгоритм содержит следующие операции:

вводится начальный вектор  $k^{(0)} = \{0, \dots 0\}$ ;

на первом шаге итерации определяется компонент  $j_0$  ( $j_0 \in \overline{1, n}$ ), подлежащий улучшению, из условия

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{j_0}(0) &= \varphi_{j_0}(1) - \varphi_{j_0}(0) = \\ &= \max_{j=\overline{1, n}} \{\varphi_j(1) - \varphi_j(0)\}; \end{aligned}$$

для  $s + 1$  итерации определяется компонент  $j_0$  ( $j_0 \in \overline{1, n}$ ) из условия

$$\Delta\varphi_{j_0}(k_{j_0}^{(s)}) = \varphi_{j_0}(k_{j_0}^{(s)} + 1) - \varphi_{j_0}(k_{j_0}^{(s)}) = \max_{j=\overline{1, n}} \{ \varphi_j(k_j^s + 1) - \varphi_j(k_j^{(s)}) \}.$$

Для целевой функции (5)

$$\Delta\varphi_{j_0}(k_{j_0}^{(s)}) = \max_l \{ c_l [1 - (1 - p_l)^{k_l + 1}] - c_j [1 - (1 - p_j)^{k_l}] \} = \max_{j=\overline{1, n}} \{ c_j (1 - p_j)^{k_j} p_j \}.$$

Алгоритм удобен для использования с применением ЭВМ.

Пример. В ремонтном органе имеется пять бригад ( $m = 5$ ), ремонтируется три образца техники ( $n = 3$ ), для которых

$$c = \{c_1 = 2; c_2 = 4; c_3 = 3\};$$

$$p = \{p_1 = 0,8; p_2 = 0,8; p_3 = 0,9\}.$$

Найти распределение бригад.

Решение заключается в следующем.

1. Вводим нулевой набор

$$k^{(0)} = \{k_1^{(0)}, k_2^{(0)}, k_3^{(0)}\} = \{0, 0, 0\}.$$

2. Первая итерация:

$$\Delta\varphi_1(0) = c_1 p_1 = 1,6;$$

$$\Delta\varphi_2(0) = c_2 p_2 = 3,2;$$

$$\Delta\varphi_3(0) = c_3 p_3 = 2,7;$$

$$\Delta\varphi_{j_0}(k_{j_0}^{(0)}) = \max \{1, 6; 3,2; 2,7\} = 3,2 \rightarrow j_0 = 2;$$

$$k^{(1)} = \{k_1^{(1)}, k_2^{(1)}, k_3^{(1)}\} = \{0, 1, 0\}.$$

3. Вторая итерация:

$$\Delta\varphi_1(0) = 1,6;$$

$$\Delta\varphi_2(1) = c_2 p_2 (1 - p_2) = 0,64;$$

$$\Delta\varphi_3(0) = 2,7;$$

$$\Delta\varphi_{j_0}(k_{j_0}^{(1)}) = \max \{1,6; 0,64; 2,7\} = 2,7 \rightarrow j_0 = 3;$$

$$k^{(2)} = \{0, 1, 1\}.$$

4. Третья итерация:

$$\Delta\varphi_1(0) = c_1 p_1 = 1,6;$$

$$\Delta\varphi_2(1) = c_2 p_2 (1 - p_2) = 0,64;$$

$$\Delta\varphi_3(1) = c_3 p_3 (1 - p_3) = 0,27;$$

$$\Delta\varphi_{j_0}(k_{j_0}^{(2)}) = \max \{1,6; 0,64; 0,27\} = 1,6 \rightarrow j_0 = 1;$$

$$k^{(3)} = \{1, 1, 1\}.$$

5. Четвертая итерация:

$$\Delta\varphi_1(1) = c_1 p_1 (1 - p_1) = 0,32;$$

$$\Delta\varphi_2(1) = 0,64;$$

$$\Delta\varphi_3(1) = 0,27;$$

$$\Delta\varphi_{j_0}(k_{j_0}^{(3)}) = \max \{0,32; 0,64; 0,27\} = 0,64 \rightarrow j_0 = 2;$$

$$k^{(4)} = (1, 2, 1).$$

6. Пятая итерация:

$$\Delta\varphi_1(1) = 0,32;$$

$$\Delta\varphi_2(2) = c_2 p_2 (1 - p_2)^2 = 0,128;$$

$$\Delta\varphi_3(1) = 0,27;$$

$$\Delta\varphi_{j_0}(k_{j_0}^{(4)}) = \max \{0,32; 0,128; 0,27\} = 0,32 \rightarrow j_0 = 1;$$

$$k^{(5)} = (2, 2, 1).$$

Таким образом, на первый и второй объекты следует направить по две бригады, на третий — одну.

При этом функция выигрыша

$$F(k) = c_1 (1 - (1 - p_1)^2) + c_2 (1 - (1 - p_2)^2) + c_3 (1 - (1 - p_3)) = 8,46 \text{ усл. ед.}$$

Для данного примера возможно определить распределение бригад и прямым перебором (табл. 4).

Модель проведения ремонтных работ. Деление ремонта на текущий, средний и капитальный условно, так как отсутствует четкий количественный признак, позволяющий отделить один вид ремонта от другого. В ходе эксплуатации сложно отличить текущий ремонт от мероприятий по предупреждению отказов (особенно для сложных систем), так как наличие функциональ-

#### 4. Результаты решения задачи распределения бригад

Распределение	Функция выигрыша
500	1,99936
005	2,99997
050	3,99872
410	5,1968
401	4,6968
014	6,1997
041	6,6936
104	4,5997
140	5,5936
320	5,824
302	4,954
032	6,938
023	6,816
230	5,888
203	4,917
221	<b>8,46</b>
212	8,09
122	8,41
113	7,797
131	8,268
311	7,884

**Примечание.** Оптимальным является распределение **221**, что совпадает с результатом расчета по итерационному алгоритму.

ной избыточности не приводит к явному отказу, а вызывает лишь определенное снижение качества функционирования. Кроме того, для современных технических устройств часто изменение технического состояния осуществляется заменой на новый отказавшего функционального элемента (ФЭ) или ФЭ с ухудшившимися характеристиками. Эти обстоятельства не позволяют четко отделить этап эксплуатации технической системы от ее ремонта и заставляют рассматривать модели управления техническим состоянием, пригодные как для предупреждения отказов, так и для их устранения. Одна из таких моделей — управляемые марковские процессы. При формировании модели управления техническим состоянием целесообразно учитывать реальные эксплуатационные факторы: ограниченную достоверность кон-

троля, неполное восстановление, ограничения на допустимое значение вероятности отказа.

**Учет достоверности контроля.** Рассмотрим техническую систему, работоспособность которой оценивается на основе анализа обобщенного диагностического параметра. Область определения этого параметра разделена на непересекающиеся отрезки — состояния, образующие конечное множество  $\{I\} = 1, 2, \dots$  (здесь 1 — новое состояние;  $F$  — состояние, соответствующее отказу). Поведение этого параметра полностью определяет поведение технической системы, поэтому в дальнейшем термин параметр и система имеют одинаковый смысл.

В дискретные равноотстоящие моменты времени  $t = 0, 1, \dots$ , определяющие интервал (шаг) контроля, параметр проверяется, в результате становится известным одно из его состояний  $I_t \in \{I\}$ . Во времени последовательность измеряемых величин  $I_t, t = 0, 1, \dots$ , описывается марковской цепью со стационарными вероятностями переходов

$$P \{I_{t+1} = j / I_t = i\} = q_{ij}, \quad (6)$$

удовлетворяющими условиям

$$\sum_j q_{ij} = 1, \quad q_{ij} \geq 0. \quad (7)$$

В каждый момент времени  $t = 1, 2, \dots$  на основании результатов проверки принимается решение о мерах воздействия на техническое состояние системы. Обозначим  $D_{is}$  решение изменить состояние системы от  $i$  до  $s$  при условии, что в момент контроля зафиксировано состояние  $i$ . Выберем решения такими, что

$$\sum_{s=1}^F D_{is} = 1, \quad D_{is} \geq 0. \quad (8)$$

С учетом (8) поведение системы во времени становится управляемым и описывается эргодическим марковским процессом [8] со стационарными вероятностями переходов

$$v_{ij} = \sum_s q_{is} D_{sj}, \quad i, j = \overline{1, F}. \quad (9)$$

Для полученного управляемого процесса справедлива система уравнений

$$\begin{cases} \sum_i \pi_i v_{ij} - \pi_j = 0; & j = \overline{1, F}; \\ \sum_i \pi_i - 1 = 0, & \pi_i \geq 0. \end{cases} \quad (10)$$

Решения (8) могут привести к следующим исходам: 1) оставить систему в наблюдаемом состоянии  $i$ ; 2) изменить ее состояние от  $i$  до  $s$ . При осуществлении решений второго типа проводятся работы различного объема  $V_i$  (индекс  $i$  соответствует номеру состояния), при этом  $V_F > V_i, i = \overline{1, F-1}$ .

Проверка системы (определение ее состояния  $i$ ) требует некоторых затрат  $t_0$ . Выполнение работ объема  $V_i$  требует затрат  $c_i$ , причем

$$c_i = \begin{cases} T_{\Pi}, & i = \overline{1, F-1}, s = \overline{1, F-1}; \\ T_{\rho}, & i = F, s = \overline{1, F-1}; \\ 0, & i = s = \overline{1, F}. \end{cases}$$

Физически это соответствует следующему: в состояниях  $i = \overline{1, F-1}$  возможно проведение текущего ремонта, устраняющего мелкие повреждения путем замены отдельных элементов и проведения регулировок; в состоянии  $F$  производится средний ремонт, при котором объем работ более существенный — замена отдельных подсистем и агрегатов.

На практике достоверность контроля любой системы меньше единицы, поэтому при контроле состояния  $i$  с вероятностью  $p < 1$  фиксируется состояние  $i$  и с вероятностью  $(1-p)$  — одно из состояний  $0, 1, \dots, i-1, i+1, \dots, F$ . На основании теоремы о полном математическом ожидании средние удельные затраты, соответствующие введенному процессу,

$$M[c] = pM_1[c] + (1-p)M_2[c], \quad (11)$$

где  $M_1[c]$  — математическое ожидание затрат, соответствующее случаю, когда измеренное и истинное состояния системы совпадают;  $M_2[c]$  — математическое ожидание затрат при ошибках системы контроля.

Ошибки, допущенные при контроле, приводят к увеличению затрат в системе ремонта. Это обусловлено необходимостью получения дополнительной информации при повторных проверках, ликвидацией ущерба при пропусках отказов, излишними работами по предупреждению отказов, когда в этом нет необходимости, и т. п. Поэтому в общем случае при  $p < 1$

$$c_i = c_{i0} + \Delta c_i,$$

где  $c_{i0}$  — затраты при  $p = 1$ ;  $\Delta c_i$  — дополнительные затраты при  $p < 1$ .

Зависимость дополнительных затрат от достоверности контроля всегда можно представить в виде

$$\Delta c = f(p)c,$$

где  $f(p)$  — неотрицательная, кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая на интервале  $0 < p \leq 1$  условиям Дирихле;  $f(p) = f(1) = 0$ .

В зависимости от номера состояния функция  $f(p)$  может иметь различные формы. Пусть для случая оценки дополнительных затрат при контроле в любом из состояний  $\overline{1, F}$   $f_i(p) = f_0(p)$ ; при принятии решений для  $i = \overline{1, F-1}$   $f_i(p) = f_1(p)$ , для  $i = F$   $f_F(p) = f_2(p)$ . С учетом сделанных обозначений

$$\begin{aligned} M[c] = & t_0 [1 + (1-p)f_0(p)] + [1 + \\ & + (1-p)] f_2(p) T_{\rho} \sum_{s=1}^F \pi_F D_{Fs} + \\ & + [1 + (1-p)f_1(p)] T_{\Pi} \times \\ & \times \sum_{i=1}^{F-1} \sum_{s=1}^{F-1} \pi_i D_{is}. \end{aligned} \quad (12)$$

Задача состоит в том, чтобы выбрать такие значения  $D_{is}$ , при которых величина  $M[c]$  была бы минимальной. Тем самым будет получено значение минимальных затрат при восстановлении, необходимых для обеспечения одного часа безотказной работы системы.

Эти значения  $D_{is}$  должны быть определены с учетом ограничений вида (9) и (10). Численное решение сформулированной задачи можно получить, используя стандартный алгоритм линейного программирования. Эта воз-



Слева и сверху цифрами 1—7 обозначены номера состояний. Пусть  $t_0 = 0,05$ ;  $T_{II} = 0,20$ ;  $T_p = 1$  усл. ед.,  $f_0(p) = 5(1-p)$ ,  $f_1(p) = 5(1-p)$ ,  $f_2(p) = 20(1-p)$ .

Используем для расчета методику, приведенную на с. 268.

В результате решения задачи линейного программирования для  $p = 0,6$  были получены следующие значения  $x_{is}$ :  $x_{11} = 0,2116$ ,  $x_{22} = 0,1975$ ,  $x_{33} = 0,2222$ ,  $x_{41} = 0,1397$ ,  $x_{51} = 0,1084$ ,  $x_{61} = 0,0671$ ,  $x_{71} = 0,0535$ . Остальные  $x_{is} = 0$ . Вычислим значения  $D_{is}$  на основе (16) Так, элемент

$$D_{11} = \frac{x_{11}}{\sum_s x_{1s}} = \frac{0,2116}{0,2116 + 0 + \dots + 0} = 1.$$

По аналогии были вычислены и остальные элементы  $D_{is}$ . Элементы  $D_{22} = D_{33} = D_{41} = D_{51} = D_{61} = D_{71} = 1$ . Располагая их в матрицу, получим

$$D_{is} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \left( \begin{array}{ccccccc} 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . \\ 1 & . & . & . & . & . & . \end{array} \right) \end{matrix} \quad (18)$$

Все нулевые элементы заменены точками. Слева и сверху указаны номера состояний. Для  $p = 0,9$  матрица решений имеет вид

$$D_{is} = \left( \begin{array}{ccccccc} 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . \\ 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . & . & . \end{array} \right) \quad (19)$$

Сравнение матриц (18) и (19) показывает, что достоверность контроля влияет на характер принимаемых решений в том смысле, что ремонтные работы для матрицы (18) следует проводить, если

состояние имеет номер 4 и более, а для (19) — номера 6 и 7.

**Учет неполного восстановления.** При восстановлении работоспособности систем возможна ситуация, когда значение параметра после восстановления отличается от первоначального, т. е. восстановление является неполным. Неполное восстановление характеризуется функцией качества восстановления (ФКВ), под которой понимают распределение значений параметров по полю допуска после восстановления. Это распределение задает вероятности пребывания значения параметра в заданной части области работоспособности. После восстановления оно определяется по данным ремонта или моделированием.

Пусть вероятность того, что значение параметра после восстановления может оказаться в наилучшем состоянии (состоянии 1), не превышает  $\omega$  ( $0 \leq \omega \leq 1$ ). Тем самым задается ограничение на возможности восстановления. Формально это условие имеет вид

$$\sum_{i=1}^F \pi_i D_{i1} \leq \omega. \quad (20)$$

С учетом этого условия задача определения правил восстановления так же, как и ранее, формулируется как задача линейного программирования: выбрать такие значения элементов матрицы решения  $D_{is}$ , чтобы значение  $M[c]$  было минимальным при соблюдении условий (14), (20).

Особенность получаемой матрицы решений заключается в том, что некоторые ее элементы могут принимать значения, отличные от нуля или единицы. Типовой вид такой матрицы решения следующий:

$$D_{is} = \left( \begin{array}{cccc} & 1 & & \\ & & 1 & \\ 1 - a_i & & a_i & \dots \\ & 1 & & \\ & \vdots & & \\ & 1 & & \end{array} \right).$$

Кроме того, введение этого ограничения приводит к изменению уровня оп-

тимальной остановки  $i^*$  и увеличению значения  $M$  [с] (по сравнению со случаем, когда такого ограничения нет). Методика решения задачи совпадает с примером на с. 269. Дополнительные исходные данные сводятся к заданию значения  $w$ .

**Пример.** Для исходных данных примера, приведенного на с. 268, получены решения при учете ограничения на возможность восстановления до состояния 1 (наилучшего). Значения  $w$  выбирались равными 1 и 0,1. Первое из них означает, что ограничений нет и восстановление может быть полным всегда, второе значение  $w = 0,1$  означает, что вероятность перевода параметра в состояние не может быть больше 0,1 — восстановление неполное. Матрицы решений имеют вид (указаны только элементы, отличающиеся от нуля):

$$w = 1,0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & . & . & . \\ . & 1 & . & . \\ . & . & 1 & . \\ 1 & . & . & . \\ 1 & . & . & . \\ 1 & . & . & . \end{pmatrix};$$

$$w = 0,1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & . & . & . \\ . & 1 & . & . \\ . & . & 1 & . \\ . & . & . & 1 \\ 0,213 & 0,787 & . & . \\ 1 & 0 & . & . \end{pmatrix}.$$

Сравнение матриц показывает, что введение ограничения (20) приводит к изменению уровня оптимальной остановки (от  $i^* = 4$  до  $i^* = 6$ ) и рандомизации элементов матрицы решения (см. шестую строку сверху в матрице решений при  $w = 0,1$ ).

**Допустимый уровень отказа.** При проведении технического обслуживания и ремонта систем иногда возникает задача удовлетворения требования, состоящего в том, чтобы вероятность отказа системы  $Q_0$  после восстановления не превышала некоторого уровня  $b$  на заданном интервале времени.

Дополнительное ограничение, соответствующее условию, чтобы вероятность отказа  $Q_0$  за единицу времени не превышала некоторого заданного значения  $b$ , можно записать в виде [8]

$$Q_0 = \sum_{i, j} \pi_i D_{ij} q_{jF} \leq b. \quad (21)$$

Задача определения правила проведения восстановительных работ с учетом указанного условия сводится к решению задачи линейного программирования: минимизировать значение целевой функции при ограничениях (14) и (21).

Область определения  $b$  такова:

$$q_{1F} \leq b \leq 1. \quad (22)$$

Возможными следствиями введения ограничения (21) являются рандомизация элементов матрицы решения и возрастание значения целевой функции.

**Пример.** Рассмотрим систему примера на с. 268. В соответствии с (22) область возможных значений величин есть  $0,03 \leq b \leq 1,00$ .

Результаты решения задачи линейного программирования по минимизации (12) при ограничениях (14), (21) представлены в табл. 5, в которой приведены значения величин  $\rho$  и отношения  $\kappa = g/g_0$ , где  $g_0$  — значение целевой функции при  $b = 1,0$  для заданного  $\rho$ .

Как следует из табл. 5, введение ограничения (21) приводит к возрастанию значения целевой функции, причем степень влияния зависит как от  $\rho$ , так и от  $b$ . При заданном  $\rho$  с уменьшением  $b$  значения  $g$  возрастают. Отсюда следует, что обеспечение малых значений вероятностей отказа требует увеличения затрат (времени, стоимости). Затраты тем больше, чем больше значения  $\rho$ .

Зависимость уровня оптимальной остановки  $i^*$  от величины  $b$  для  $\rho = 0,8$  приведена ниже:

$b \dots 1,0$	$0,09$	$0,07$	$0,06$	$0,05$
$0,1$	$0,08$			$0,04$
$i^* \dots 6$	$5$	$4$	$3$	$2$

Приведем две матрицы решений ( $\rho = 0,08$ ;  $b$  равно 0,1 и 0,05), в которых



что или величина  $b$ , или величина  $w$  (или обе вместе) выбраны малыми.

Решение может существовать при больших  $b$  и  $w$ . Увеличение значения  $w$  влечет за собой организационно-технические мероприятия, направленные на улучшение условий труда, повышение его эффективности и т. п. Решение задачи при большем значении  $b$  означает, что допускается больший риск появления неблагоприятных событий, связанных с отказом. Если это недопустимо, то возможность обеспечить функционирование системы с заданным значением  $b$  состоит в повышении ее характеристик безотказности, т. е. в уменьшении значений элементов матрицы переходных вероятностей  $q_{iF}$ .

Рассмотренная модель позволяет решить задачу о целесообразности передачи технической системы в ремонт с большим (чем средний) объемом работ (в частности, в капитальный). Выберем в качестве целевой функции

$$Q = \sum_i \sum_l x_{ij} q_{jF}, \quad (23)$$

а систему ограничений представим в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_s x_{js} - \sum_i \sum_s x_{is} q_{sj} = 0, \quad j = \overline{1, F}; \\ \sum_l \sum_s x_{js} = 1; \end{array} \right. \quad (24)$$

$$\sum_{i=2}^F x_{i1} \leq w; \quad (25)$$

$$M[c] = g(x_{is}) \leq G, \quad (26)$$

где  $g(x_{is})$  имеет вид (12);  $G$  — допустимое значение средних удельных затрат.

Тогда момент передачи системы в ремонт определяется как такой момент времени, когда первый раз не может быть решена задача (23) — (26) из-за невыполнения ограничения по допустимым средним удельным затратам. Физически это объясняется тем, что характеристики безотказности стали таковы, что восстановление приходится производить часто, а это приводит к возрастанию величины  $g(x_{is})$ . Поэтому, когда первый раз выполняется условие  $g(x_{is}) > G$ , на системе целесообразно производить ремонт большего объема (например, капитальный).

---

## Глава 15. Принципы организации математического обеспечения автоматизированных систем эксплуатации и ремонта техники

---

### 1. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭВМ ПРИ ЭКСПЛУАТАЦИИ ТЕХНИКИ

Электронно-вычислительные машины применяют не только для проведения расчетов в исследовательских работах, но и используют как элемент автоматизированных систем управления эксплуатацией и ремонтом. Современные АСУ отрасли или предприятия, эксплуатирующей технику, решают как информационно-справочные и учетные задачи, так и задачи управления эксплуатацией и ремонтом. Если в ЭВМ заложить алгоритмы, определяющие объем и сроки обслуживания в зависимости от результатов контроля состояния, то весь процесс эксплуатации может строиться по выдаваемым машиной рекомендациям.

Рассмотрим типовые задачи, возлагаемые на ЭВМ, в автоматизированных системах эксплуатации и ремонта техники.

Первыми были реализованы в АСУ крупных предприятий (особенно предприятий транспорта) задачи учета наличия оборудования, наработки его и данных из технических паспортов.

Наработка объекта в эксплуатации является весьма важной характеристикой его технического состояния. Под наработкой следует понимать не только время  $t$ , в течение которого объект использовался по назначению, но и календарное время, прошедшее с начала его эксплуатации, и число включений и выключений объекта, и время, в течение которого объект работал в форсированных режимах, и т. д. Зачастую наработка сложной технической системы в эксплуатации описывается несколькими десятками показателей, характеризующих режимы использования ее составных частей.

Подробный учет наработок сложных технических систем одного типа, сведенный в едином центре управления их эксплуатацией, дает возможность планировать проведение мероприятий по их техническому обслуживанию. Управляя заданиями на использование конкретных изделий, и, следовательно, расходом их ресурса, можно добиться равномерного поступления объектов на предприятия капитально-восстановительного ремонта или на техническое обслуживание. Можно также согласовать потребность в дефицитных агрегатах ограниченного ресурса и график их поставки.

Однако опыт создания АСУ эксплуатацией в США (там они называются информационными системами по технической эксплуатации и ремонту) свидетельствует, что АСУ, обеспечивающая помощь в управленческой работе и сборе информации, не дает преимуществ при выполнении работ непосредственно исполнителем. Наблюдается также объективная тенденция к расширению возможностей контроля технического состояния сложных систем специально создаваемыми для этого средствами, но использовать полученные при контроле данные трудно из-за слишком большого их объема.

Среди задач, возлагаемых на АСУ эксплуатацией и ремонтом, должна быть увеличена доля задач, помогающих решать непосредственно технические вопросы, на фоне задач учета, отчетности и планирования работ. Из них следует выделить прогнозирование технического состояния объектов на основе данных эксплуатационного контроля и поиск места неисправности в сложной системе по результатам анализа замеренных параметров. Прогнозирование технического состояния по-

зволяет своевременно провести мероприятия, исключающие отказы наиболее важных элементов технических изделий, которые могут быть опасны для человека.

Решение задачи поиска неисправностей с помощью АСУ эксплуатацией и ремонтом позволяет резко сократить время простоя техники в неисправном состоянии, так как затраты времени на поиск места неисправности зачастую больше, чем на их устранение.

Разработанные в технической диагностике методы позволяют указать отказавший элемент как в тех случаях, когда техническая система функционирует, так и в случае явного отказа. В первом случае диагностика основана на идентификации параметров динамических систем, а во втором — на анализе функционально-логических моделей с использованием дополнительного контроля внутренних параметров объекта диагностирования. Формальные методы прогнозирования и диагностирования нетрудно реализовать в АСУ эксплуатацией, если в памяти машины накапливается информация о динамических и статических параметрах, характеризующих работу технических объектов.

Включаются в АСУ также задачи диспетчерского типа, позволяющие создавать технологические графики работ по обслуживанию и ремонту и контролировать ход их выполнения. Обработка накопленных при их решении результатов позволяет дать объективный анализ трудозатрат на выполнение разного рода операций в процессе эксплуатации.

Большой круг задач АСУ связан со сбором, обобщением и анализом сведений о надежности технических систем. Автоматизация учета неисправностей, выявленных при выполнении контрольных операций, позволяет решить проблему достоверности и объективности исходных данных, используемых в анализах надежности. Сведения об отказах, накапливаемые в АСУ предприятий, легко могут быть переданы непосредственно в память ЭВМ межотраслевой системы сбора и анализа данных о надежности. Работу межотраслевой системы регламентирует в СССР серия специальных государственных

стандартов, являющихся составной частью комплексной системы оценки качества.

В соответствии с действующими стандартами министерство-потребитель собирает на своих предприятиях и передает министерствам-поставщикам, предприятия которых изготавливают технические системы, первичную информацию о надежности. Эта первичная информация включает данные о неисправностях и наработке конкретных технических систем. По принятым в СССР правилам первичное сообщение имеет единую в отрасли форму, приспособленную для обработки сведений на ЭВМ.

Первичные сообщения о неисправностях обрабатываются и анализируются в подсистемах министерств-потребителей и нескольких министерств-поставщиков. Таким образом, множество заинтересованных предприятий накапливают информацию о надежности технических систем. Как правило, у каждого предприятия накапливается лишь часть данных. Так, в эксплуатируемых подразделениях скапливаются сведения о неисправностях, которые они обнаружили; на предприятиях генеральных и главных конструкторов — сведения об отказах технических систем определенного типа, и т. д. Только головные, ответственные за надежность в отрасли предприятия поставщика и потребителя имеют информацию о всех неисправностях за несколько лет. Число накапливаемых сообщений, например, по надежности авиационной техники гражданской авиации, исчисляется многими сотнями тысяч.

Головным предприятием отрасли проводится анализ надежности в интересах потребителей, в том числе руководства отраслью, научно-исследовательских, а иногда и международных организаций. Как правило, роль головного предприятия выполняют отраслевые информационно-вычислительные центры. Несколько центров объединяются в межведомственные системы сбора, обработки и реализации информации о надежности технических систем.

Межведомственные системы проводят обработку первичной информации о неисправностях с целью:

вычисления значения показателей надежности, а также вероятностных характеристик потоков отказов; в процессе выполнения этих работ получают справочные данные о надежности составных частей и комплектующих элементов, необходимые как для проектирования, так и для обоснования порядка обслуживания технических систем;

выявления конструктивных и конструктивно-технологических недостатков, снижающих надежность и затрудняющих обслуживание, для принятия мер по их устранению;

повышения эффективности технического обслуживания, совершенствования средств и методов выявления отказов;

определения зависимости надежности технических систем от времени, а также от условий и режимов их использования.

Оперативное управление состоянием технической системы в эксплуатации по получаемой АСУ текущей информации требует решения многих проблем. Ключевой проблемой является создание математического обеспечения обслуживания, т. е. разработка алгоритмов обработки исходных данных, определения оптимальных объемов и сроков профилактики, выбора запасных элементов и т. д. Создание необходимых алгоритмов базируется на математических моделях эксплуатации и ремонта.

## 2. ПАКЕТЫ ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЭКСПЛУАТАЦИИ И РЕМОНТА

При создании АСУ наиболее распространен метод *типовых проектных решений* (ТПР), позволяющий использовать преимущества как индивидуального, так и типового проектирования. ТПР является одной из разновидностей пакета прикладных программ. На начальном этапе естественным является включение в АСУ эксплуатацией тех задач, в которых могут быть использованы существующие ТПР. Поэтому первая очередь создаваемых АСУ эксплуатации и ремонта предназна-

ется для обработки информации, обеспечивающей планирование работ по техническому обслуживанию и ремонту, а также контроль их проведения. При решении задач первой очереди проводится детальный учет наличия эксплуатируемых технических изделий и их состояния.

Организация обработки обширного динамического массива статистических данных о состоянии технических систем и о их надежности во многом сходны. Рассмотрим проблему обработки больших массивов данных на примере межведомственной системы, обрабатывающей первичные сообщения о неисправностях. Головное предприятие отрасли, работающее в такой системе, будет обрабатывать ежегодно сотни тысяч первичных сообщений.

Из-за динамичности методик анализа надежности требования к обслуживающему их пакету прикладных программ часто меняются, что приводит к отставанию математического обеспечения АСУ от требований пользователей. Чтобы уменьшить отставание, необходимо при отработке математического обеспечения ориентироваться на широкое использование средств автоматизации программирования, в частности универсальных информационных систем (банков данных, представляющих собой совокупность базовых информационных массивов и программных средств, реализующих управление информационными массивами и обработку их). Таких систем к настоящему времени применяется несколько, хотя основные принципы их построения и использования во многом схожи.

Решение разных задач на основе единого банка данных заставляет уделять особое внимание выбору структуры базовых информационных массивов. От того, насколько рационально построены массивы, во многом зависят временные характеристики процедур записи, поиска, обобщения и сортирования информации. Именно время счета является лимитирующим фактором при обработке столь больших массивов, с которыми приходится работать межведомственным системам анализа сообщений о неисправностях. Так, современные универсальные информационные системы могут анализировать до

100 документов в секунду. С их помощью получение справки в массиве из 600 тыс. первичных сообщений займет около 1,5 ч. Уменьшить это время удастся путем построения нескольких дублирующих массивов с различными структурами, подробностью фиксации сообщений и ключевыми словами. Тогда разные запросы будут удовлетворяться быстрее за счет использования специфически организованных данных.

Поскольку типовых проектных решений для большинства задач автоматизации управления эксплуатацией и ремонтом нет, приходится идти по пути индивидуального проектирования программного обеспечения частных специфических задач.

Первоочередной специфической задачей, которую надо включить в АСУ эксплуатацией сложных технических систем уже на начальном этапе создания, является вычисление показателей надежности. Решение ее на основании сообщений об отказах в эксплуатации связано с некоторыми трудностями. В силу постоянного пополнения парка эксплуатируемых объектов имеют место большие отличия в наработке технических систем, об отказах которых поступают сведения. Поэтому сообщения об отказах относятся к агрегатам с разной степенью старения. Как правило, от момента отказа до его обнаружения проходит значительное время. Это связано с тем, что достаточно полная проверка состояния сложной технической системы, выявляющая все ее отказы, проводится при работах, выполняемых через большие интервалы наработки  $\Delta t$ . Некоторые отказы остаются невыявленными до очередных таких работ, поэтому в расчетах принимается, что наработка отказавшего технического изделия указана в первичном сообщении о его отказе с точностью  $\Delta t$ . Наконец, в эксплуатации при устранении отказа возможны разные уровни восстановления свойств отказавшего изделия. Оно может быть заменено на новое или на изделие, прошедшее ремонт на специализированном предприятии; может быть отремонтировано путем замены отказавшего узла или просто отрегулировано обслуживающим персоналом. Разные уровни восстановления оказывают

влияние на возникновение последующих отказов.

Большинство существующих математических моделей эксплуатации и ремонта требуют для практического применения проведения расчетов на ЭВМ. Как правило, программы для этих расчетов имеют мало общего, что затрудняет создание специализированного пакета прикладных программ для задач эксплуатации и ремонта. Вместе с тем часть задач, особенно связанных с подбором параметров вероятностных моделей для времени безотказной работы или случайного процесса изменения состояний, являются во многом стандартными. В этом случае автоматизация программирования может оказаться полезной для исследований эксплуатации и ремонта технических систем.

Кроме обработки информации о состоянии технических систем, пакеты прикладных программ для решения задач эксплуатации и ремонта должны содержать следующее.

1. Программы создания имитационных моделей эксплуатации на основе универсальных систем моделирования. Так, общецелевой пакет моделирования дискретных систем (GPSS) позволяет описать процесс прохождения запросов на обслуживание и формирования очередей. В нем используются специально вводимые «объекты», «описания» и «операционные блоки». Особенностью этого пакета является возможность использования эмпирических функций распределения случайных величин, полученных в результате натурного эксперимента, для формирования потоков в системе.

2. Программы решения оптимизационных задач (в форме задач линейного, динамического и целочисленного программирования). Такие программы позволят решать широкий круг проблем, связанных с назначением состава запасных частей, периодичности замен элементов и выбором объемов профилактических и контрольных работ.

3. Программы статистического анализа многомерных случайных величин и процессов, позволяющие обосновать уменьшение размерности пространства параметров, описывающих состояние технических систем.

Наличие всех этих пакетов прикладных программ значительно облегчает обработку специального математического обеспечения для решения конкретных задач эксплуатации и ремонта.

### 3. ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ УПРАВЛЕНИЯ ЭКСПЛУАТАЦИЕЙ С ПОМОЩЬЮ ЭВМ И ПЕРЕХОДА НА АДАПТИВНУЮ СИСТЕМУ ТЕХНИЧЕСКОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Применение ЭВМ для организации эксплуатации сложных технических систем позволяет решить проблему адаптации программы технического обслуживания под изменение условий применения технических объектов.

С накоплением опыта эксплуатации, как правило, уточняются знания о надежности объектов и меняется программа их технического обслуживания, приспособляясь к новым знаниям. Таким образом, система эксплуатации практически является адаптивной. Адаптируется она вследствие учета информации о работе технических объектов и уточнения знаний об условиях внешней среды, влияющих на надежность. Адаптация системы эксплуатации, выражающаяся в изменении инструкций по техническому обслуживанию, происходит медленно.

Инструкции при эксплуатации по состоянию должны будут содержать много альтернативных работ, иногда с очень различающимися трудозатратами, которые надо выполнять или не выполнять в зависимости от результатов контроля состояния объектов. Решение о выборе варианта обслуживания будет зачастую приниматься не просто на основании сравнения результатов контроля одного параметра с границей, а на основании вычислений, содержащих результаты контроля нескольких параметров.

Упростить процедуру принятия решения о необходимых операциях по техническому обслуживанию и облегчить организацию и планирование работ можно, если соответствующие расчеты выполнять с помощью ЭВМ. Примером могут служить расчеты прогноза значений параметров, определяю-

щих техническое состояние эксплуатируемых объектов [9].

Включение прогнозирования технического состояния в перечень задач АСУ эксплуатацией и ремонтом дополнительно к информационно-учетным задачам позволяет перейти к централизованному управлению техническим обслуживанием по следующей схеме. Результаты эксплуатационного контроля всех объектов сложной системы вводятся в память ЭВМ и хранятся в ней до тех пор, пока объект не исчерпал установленный ресурс. На основании этих данных прогнозируется техническое состояние объекта на время до момента очередного контроля. Необходимые для прогнозирования данные о характере случайного процесса изменения технического состояния подсчитываются в головном звене АСУ на основании сведений о контроле всех однотипных объектов в разных эксплуатирующихся подразделениях.

Если вероятность отказа высока, то проводится техническое обслуживание, восстанавливающее состояние системы. В случае отказа анализируются результаты контроля для выявления отказавшего сменного модуля. Факт отказа фиксируется и передается в головное звено АСУ для получения характеристик надежности и назначения на их основе периодичности эксплуатационного контроля. Функции головного звена АСУ могут выполнять отраслевые вычислительные центры. Однако для сложных технических систем, управляемых с помощью входящих в их состав ЭВМ, эти функции могут выполнять и вычислители, входящие в состав самой эксплуатируемой системы. Такой вариант структуры подходит, например, для управления эксплуатацией территориально распределенных автоматизированных систем сбора, обработки и реализации данных о воздушном движении.

Более высокий уровень адаптации системы эксплуатации можно обеспечить при дальнейшем развитии АСУ. Так, для определения допустимой величины вероятности отказа объекта необходимо решать оптимизационные задачи, минимизирующие потери от отказов системы с учетом затрат на восстановление ее технического состояния. Если

АСУ учитывает все типы затрат на техническое обслуживание (это часто реализуется в первой очереди системы) и потери от отказов, то за определенное время в ней накапливаются исходные данные, необходимые для перерасчета как допустимых пределов вероятности отказа, так и оптимальных интервалов эксплуатационного контроля. Периодический пересчет этих параметров системы эксплуатации приспособливает ее к изменяющимся внешним условиям.

Адаптируемая АСУ сможет выдавать рекомендации по техническому обслуживанию в виде перечня операций, которые необходимо провести, чтобы техническая система выполняла свои функции с наибольшей эффективностью.

Такая АСУ обеспечит и автономную автоматическую эксплуатацию, если восстановление свойств технических объектов будет проводиться без участия операторов. Например, система сможет в течение длительного времени успешно функционировать, если восстановление ее свойств проводится подключением резервных элементов. Система сможет функционировать сколько угодно эффективно, если обеспечить еще и восстановление отключенных элементов, т. е. ее ремонт.

Автоматическая автономная эксплуатация целесообразна, например, для технических систем, работающих в космосе, на атомных электростанциях или для технических транспортных систем.

---

# Глава 16. Основы построения технических средств автоматизированного контроля и диагностики сложных систем

---

## 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Стратегия эксплуатации сложной системы по состоянию предполагает накопление с помощью средств контроля и обработку текущей информации в целях постоянной выдачи обслуживающему персоналу рекомендаций о принятии необходимых мер по обеспечению надежности системы. Эта стратегия позволяет исключить нецелесообразный демонтаж аппаратуры или отдельных агрегатов системы и выполнение трудоемких профилактических работ, не являющихся необходимыми по истечении какого-либо срока службы. Требуемые показатели надежности обеспечиваются путем выполнения следующих мероприятий: выбора, отбора и тренировки компонент, элементов, агрегатов, узлов и систем в целом, уменьшения нагрузочных режимов работы, введения аппаратурной и информационной избыточности, организации тестовых и функциональных средств контроля и диагностики, процедур восстановления работоспособности и т. д. [7].

Успешный переход к эксплуатации сложных систем по состоянию требует наличия оперативных систем сбора и анализа статистической информации о системе, получаемой в процессе измерений ее параметров.

Появление и широкое развитие микропроцессорной техники на основе интегральной технологии обеспечили построение необходимых систем контроля, диагностики, обработки информации и управления.

## 2. ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К АППАРАТУРЕ

Требования к аппаратуре контроля и диагностики определяются следующими факторами:

сложностью проверяемой системы; такой объект требует более полных и детальных проверок, что связано с необходимостью увеличения в системе контрольных точек или разработки новых методов контроля и диагностики;

допустимыми затратами времени на проверку; при создании алгоритмов обработки информации и аппаратуры контроля и диагностики сложной системы важным фактором является время выполнения этих процедур обслуживания, требования к которому зависят от стадий жизненного цикла (производство, испытания, эксплуатация), назначения системы и т. д.;

полнотой контроля; требования к полноте контроля (количество и глубина проверок) зависят от стадий разработки и эксплуатации сложной системы и должны учитываться в каждом конкретном случае;

надежностью системы контроля и диагностики;

временем ремонта системы; этот фактор зависит от стратегии эксплуатации, места проведения ремонта, количества запасных частей и квалификации обслуживающего персонала;

окружающей средой, определяющей конструкцию аппаратуры контроля и диагностики системы;

квалификацией обслуживающего персонала; система контроля и диагностики должна быть проста и удобна в эксплуатации и удовлетворять определенным эргономическим требованиям и соответствующим психофизиологическим условиям работы оператора;

экономической эффективностью аппаратуры контроля и диагностики; этот фактор определяет структуру и состав средств контроля и диагностики и должен обеспечивать выполнение

следующих требований: сокращение обслуживающего персонала и снижение требований к квалификации обслуживающего персонала; уменьшение износа и ускорение ремонта за счет ускорения контроля и диагностики; сокращение необходимого количества запасных частей за счет улучшения достоверности диагностирования.

Выполнить поставленные требования можно, если применить в аппаратуре контроля и диагностики современные средства вычислительной техники.

### 3. СРЕДСТВА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ В АППАРАТУРЕ

Применение современных средств вычислительной техники позволяет создавать высокопроизводительную аппаратуру контроля и диагностики, используемую на стадиях производства и эксплуатации сложных систем.

Реализация средств вычислительной техники в аппаратуре контроля и диагностики осуществляется по следующим основным направлениям: 1) универсальные ЭВМ; 2) специализированные ЭВМ; 3) мини-ЭВМ; 4) микроЭВМ и микропроцессоры; 5) интегрированное применение средств вычислительной техники (иерархическая аппаратура контроля и диагностики).

По способу обработки информации различают следующие ЭВМ:

*цифровые электронные вычислительные машины*, т. е. ЭВМ дискретного действия, в которых обрабатывается информация (данные и команды), представленная в виде цифровых кодов;

*аналоговые вычислительные машины (АВМ)*, т. е. ЭВМ непрерывного действия, в которых обрабатывается информация, представленная в аналоговой форме (математические величины изображаются в виде непрерывных значений физических величин);

*гибридные (комбинированные) вычислительные машины (ГВМ)*, т. е. ЭВМ цифроаналогового действия, в некоторых узлах которых обрабатывается информация в виде цифровых кодов, а в других — в аналоговом виде.

Наибольшее распространение в практике получили цифровые ЭВМ, как наиболее универсальные, с более высокой точностью вычислений и удобные в работе.

По степени универсальности в обработке информации различают универсальные ЭВМ (с гибким программным управлением, предназначенные для решения широкого класса задач) и специализированные ЭВМ (с жестким программным управлением, предназначенные для решения одной задачи или сравнительно узкого класса задач).

Современными средствами вычислительной техники являются: микропроцессоры, микрокалькуляторы, микроЭВМ (персональные ЭВМ), мини-ЭВМ, большие ЭВМ (средней производительности, быстродействующие и сверхбыстродействующие) и сети ЭВМ.

Создание *микропроцессоров (МП)*, построенных на одной (или нескольких) *большой интегральной схеме (БИС)*, послужило основой для построения универсальных, малогабаритных, надежных вычислительных средств, а также применения их в различных системах контроля и управления.

Использование микропроцессоров сокращает затраты средств и времени на разработку систем, а также расширяет возможности средств вычислительной техники, повышает ее надежность и соответственно снижает затраты на эксплуатационное обслуживание. По существу, функции, выполняемые МП, полностью определяются *устройством управления (УУ)*, которое реализовано в виде управляющей программы (микропрограммы), хранимой в *постоянном запоминающем устройстве (ПЗУ)*, т. е. в *управляющей памяти (УП)*. При этом команды программы (микрокоманды микропрограммы) определяют настройку связей и блоков МП.

Зависимость функций МП от изменяемой программы (микропрограммы) открывает широкие перспективы в применении микропроцессоров, которые рассматриваются как элементная база для построения мини- и микроЭВМ, вычислительных систем и сетей. Возможности программирования (перепрограммирования) МП на выполнение произвольной логической функ-

ции делают микропроцессор гибким и универсальным, что создает перспективы построения микропроцессорных систем автоматизированного контроля и диагностики, отличающихся универсальностью, размерами, потребляемой мощностью и надежностью, а также аппаратурной реализацией ряда функций *программного обеспечения* (ПО) путем замены программ микропрограммами, записанными в ПЗУ или в программируемые ПЗУ (ППЗУ), и получения таким образом «твердых» программ — «кремниевого матобеспечения». Наблюдается увеличение размеров таких ПЗУ (ППЗУ) и размещение в них не только управляющих программ, но и мониторов баз данных, протоколов телеобмена, что обеспечивает гибкость применения микропроцессорных БИС и микроЭВМ, а также позволяет микропрограммно реализовать системное и прикладное ПО для решения различных задач, в том числе задач контроля и диагностики сложных систем.

Современные средства микропроцессорной техники, применяемые во встроенной автоматизированной аппаратуре контроля и диагностики, позволяют выдавать инструкции по ремонту (замене съемных блоков) непосредственно в процессе или после применения объекта контроля по назначению. Например, мультипроцессорная система контроля и диагностики состояния оборудования самолета может выдавать инструкции по ремонту непосредственно в полете или после посадки. При этом возможна телеметрическая передача данных на наземные приемники стационарных пунктов и аппаратуру контроля и диагностики, где осуществляется накапливание, анализ принимаемой информации и выдача по результатам контроля необходимых рекомендаций на обслуживание. Для решения подобных задач используются универсальные (или специализированные) ЭВМ.

Специализированные ЭВМ осуществляют сбор, первичную обработку и регистрацию информации, поступающей от датчиков, обнаруживают выход за допустимые пределы измеряемых параметров, их индикацию и регистрацию. При этом управляющие ЭВМ

выполняют еще функции управления пуском, остановом и режимами функционирования сложной системы.

Универсальные ЭВМ выполняют, кроме всех функций специализированных ЭВМ, процессорную обработку информации по разработанным алгоритмам анализа накапливаемой информации с целью выдачи по результатам более глубокого анализа состояния системы и ее диагностики, необходимых рекомендаций на обслуживание системы.

Мини- и микроЭВМ, благодаря гибкости своей структуры позволяют подключать к ним большое число каналов связи и периферийных устройств; наращивать емкость *оперативно-запоминающего устройства* (ОЗУ) и внешних ЗУ; устанавливать прямую связь (минуя процессор) с ОЗУ по одному или нескольким каналам; осуществлять прерывание по приоритету, используя развитую систему прерываний; образовывать мультипроцессорные системы; строить дублированные системы; вести эффективную обработку символьной информации и работать с массивами данных; использовать принцип микропрограммирования; работать с различными языками низкого и высокого уровней и т. д.

Использование в мини- и микроЭВМ микропрограммирования расширяет структурные свойства машины, т. е. позволяет ее программно совмещать с другими ЭВМ и повышать производительность ЭВМ с помощью микропрограммной реализации системного и прикладного ПО.

В зависимости от характера решаемых задач в автоматизированных средствах контроля и диагностики сложных систем используется соответствующая вычислительная техника, которая на современном уровне развития позволяет обеспечить требования к автоматизированным средствам контроля и диагностики по универсальности, адаптации к различным системам, обнаружению места неисправности с точностью до сменного блока системы, выдаче в результате контроля и диагностики необходимых рекомендаций по обслуживанию.

#### 4. СТРУКТУРА АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СРЕДСТВ КОНТРОЛЯ И ДИАГНОСТИКИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Современные автоматизированные средства контроля и диагностики по характеру взаимодействия с системой делятся на активные и пассивные средства.

Активные автоматизированные средства контроля и диагностики (тестовые средства) в соответствии с алгоритмом выполняемой тестовой программы формируют стимулирующие воздействия, подаваемые на проверяемую систему с целью получения от нее ответной информации согласно задачам контроля или диагностики. Тестовые воздействия в таких средствах могут подаваться на проверяемую систему как в периоды, когда система не используется по прямому назначению, так и в процессе ее рабочего функционирования [55].

В пассивных автоматизированных средствах контроля и диагностики (средства функционального контроля и диагностики) отсутствуют тестовые воздействия на проверяемую систему. Эти средства регистрируют информацию о состоянии системы в процессе ее рабочего функционирования. Однако возможно применение этих средств перед или после применения системы по назначению. В этом случае необходима имитация режима функционирования системы [55].

Аппаратурные средства системы функционального контроля, как правило, конструктивно объединены с объектом контроля. Эти встроенные сред-

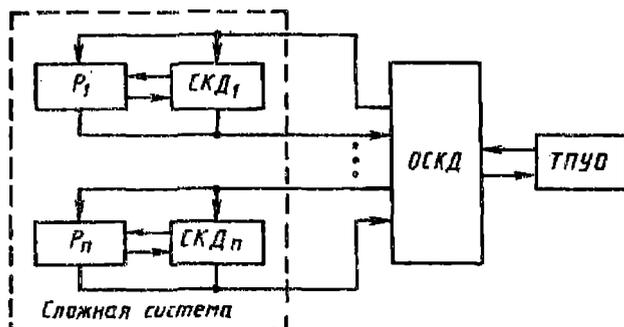


Рис. 1. Структура средств функционального контроля и диагностики непрерывной системы

ства в вычислительной технике называются *схемами встроенного контроля* (СВК), в подвижных объектах — бортовыми средствами контроля, в технологических объектах — средствами оперативного (централизованного) контроля и т. д. [55]. Самопроверяемые средства встроенного контроля [55] обнаруживают не только неисправности проверяемой системы, но и свои собственные. Это особенно важно для обеспечения высокой надежности ядра той части системы, от работоспособности которой зависит возможность и достоверность контроля технического состояния остальной части системы.

Типовая структура автоматизированных средств функционального контроля и диагностики технического состояния сложной системы, состоящей из сменных блоков  $P_1, \dots, P_i, \dots, P_n$ , изображена на рис. 1. Каждый сменный блок содержит встроенные средства контроля и диагностики (СКД). Контролируемые параметры сменного блока и его СКД поступают непрерывно или по запросу на общие средства контроля и диагностики системы (ОСКД). Эта структура средств функционального контроля и диагностики может использоваться для технического обслуживания как дискретных, так и непрерывных систем. При этом будут отличаться в принципах построения только СКД сменных блоков. СКД непрерывной системы задают предельные допустимые значения контролируемых параметров и сравнивают их с измеренными значениями.

СКД дискретной системы представляют собой встроенные вычислительные средства контроля и диагностики, в качестве которых в современных и перспективных системах наиболее часто используются микропроцессоры и микроконтроллеры. ОСКД современных дискретных систем выполняются на базе микро- и мини-ЭВМ, которые связываются с объектами контроля (сложной системой) с помощью устройств связи и обеспечивают выдачу информации на терминальный пульт управления оператора (ТПУО).

В зависимости от характера взаимодействия между системой и средствами контроля и диагностики различают два

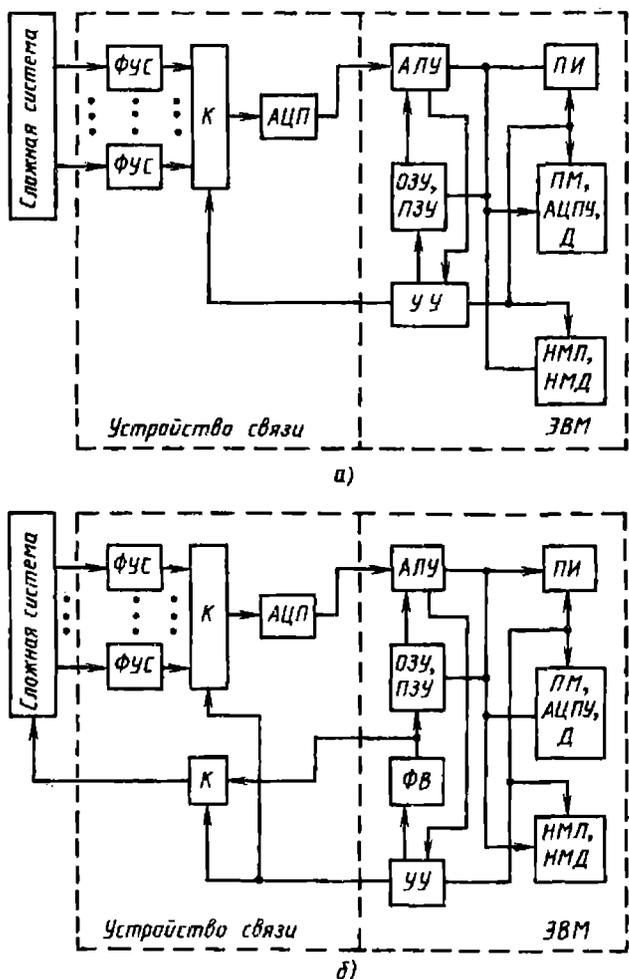


Рис. 2. Структура автоматизированных средств контроля и диагностики:

а — пассивных; б — активных; К — коммутатор; ФУС — формирователь унифицированных сигналов; АЦП — аналого-цифровой преобразователь; ФВ — формирователь воздействий; ПИ — панель индикации; ПМ — пишущая машинка; Д — дисплей; АЦПУ — алфавитно-цифровое печатающее устройство; НМЛ — накопитель на магнитной ленте; НМД — накопитель на магнитном диске; УУ — устройство управления; АЛУ — арифметическо-логическое устройство

вида устройств связи: без обратной связи по воздействию — в пассивных средствах контроля (рис. 2, а); с обратной связью по воздействию — в активных средствах контроля (рис. 2, б).

В устройствах измерительной части без обратной связи (см. рис. 2, а) стимулирующее воздействие на систему остается в процессе контроля неизменным или изменяется независимо от информации о системе. В устройствах измерительной части с обратной связью (см. рис. 2, б) тестовые воздействия состоят из воздействий, которые не зависят от информации о си-

стеме (как правило, в начале процесса контроля), и воздействий, зависимых от информации о системе.

Автоматизированные (автоматические) средства контроля и диагностики на микропроцессорах позволяют удовлетворить требования в отношении универсальности, надежности и т. д. Многопроцессорные (многомашинные) средства контроля и диагностики обладают высокой производительностью, универсальностью и легко адаптируемы к различным системам. Перспективны иерархические структуры многопроцессорных (многомашинных) средств контроля и диагностики (двухуровневые, трехуровневые и т. д.). При этом количество уровней системы зависит от ряда факторов: характеристик объекта контроля, решаемых задач и т. д.

### 5. СТРУКТУРНАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ ТРЕХУРОВНЕВОГО МУЛЬТИМИКРОПРОЦЕССОРНОГО КОМПЛЕКСА КОНТРОЛЯ, ДИАГНОСТИКИ И УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНИЧЕСКИМ СОСТОЯНИЕМ СЛОЖНОЙ СИСТЕМЫ

Структурная схема трехуровневого мультимикропроцессорного комплекса показана на рис. 3.

Мультимикропроцессорный комплекс включает три уровня цифровой обработки и преобразования информации. На первом уровне устанавливается микропроцессор или *микроконтроллер специальный (МКС)*, которые предназначены для первичной обработки информации, поступающей с объекта контроля. Как правило, МКС этого уровня встраивается (конструктивно объединяется с объектом контроля) в аппаратуру объекта контроля. На втором уровне иерархии устанавливается микро- или миниЭВМ, которые предназначены для обработки информации, поступающей с вычислительных средств первого уровня, и управления техническим состоянием сложной системы. На третьем уровне иерархии устанавливается мультимикропроцессорная система. Схема подключения микрокон-

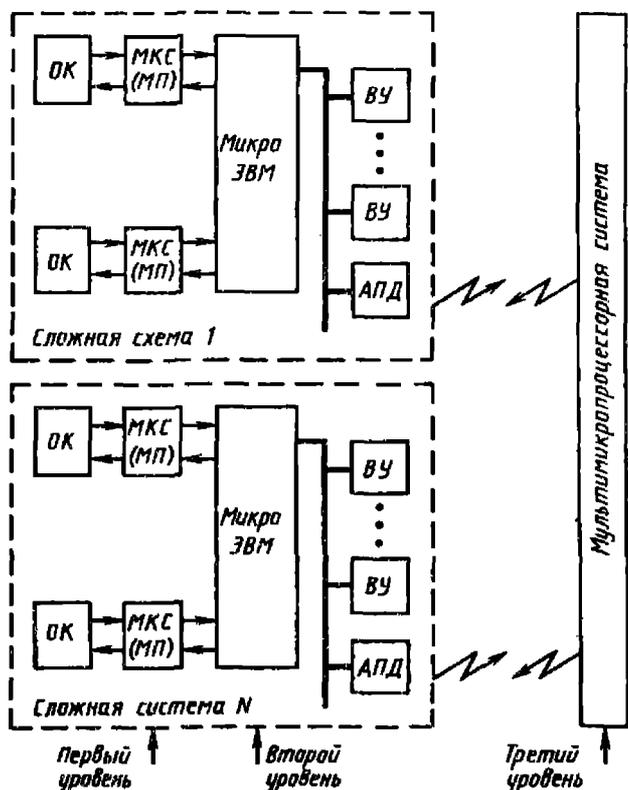


Рис. 3. Трехуровневая структура мультимикропроцессорного комплекса контроля и диагностики сложных систем:

ОК — объект контроля; МКС — микроконтроллер специальный; МП — микропроцессор; ВУ — внешние устройства ЭВМ; АПД — аппаратура передачи данных

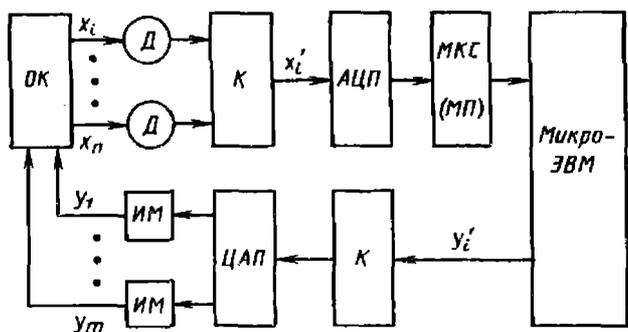


Рис. 4. Схема подключения микроконтроллера к объекту контроля и микроЭВМ:

Д — датчик; К — коммутатор; АЦП — аналогово-цифровой преобразователь; ЦАП — цифроаналоговый преобразователь; ИМ — исполнительный механизм;  $\{x_i\}$  — измеряемые параметры;  $\{x'_i\}$  — измеряемые параметры в цифровой форме,  $i = \overline{1, n}$ ;  $\{y_i\}$  — управляющие воздействия в цифровой форме;  $\{y'_i\}$  — управляющие воздействия в аналоговой форме ( $i = \overline{1, m}$ )

троллера к объекту контроля и микроЭВМ показана на рис. 4.

МКС первого уровня предназначен для решения следующих задач:

контроля в автоматическом режиме до 1000 таких параметров, как дискретные (малоразрядный двоичный код); интегральные (сумма одиночных импульсов); аналоговые постоянные величины (малоразрядный двоичный код); аналоговые переменные величины (малоразрядный двоичный код);

выполнения операции сравнения контролируемых параметров с допустимыми значениями;

выполнения функциональных преобразований контролируемых параметров в соответствии с алгоритмом;

обработки результатов контроля как аппаратурными, так и программными средствами;

выработки сигнала «объект контроля исправен — неисправен»;

минимизации информации о состоянии объекта контроля и передачи ее на второй уровень обработки (микроЭВМ).

Оценка сложности микроконтроллера показывает возможность его реализации в виде БИС в одном корпусе с числом выводов до 48 и допустимой степенью интеграции 4000 вентиляей.

МикроЭВМ второго уровня иерархии предназначена для решения следующих основных задач:

выработки управляющих воздействий на объекты контроля;

управления вычислительными средствами первого уровня иерархии;

выработки сигнала «сложная система исправна — неисправна»;

исключения неисправных вычислительных средств первого уровня и решения задачи реконфигурации системы контроля;

выполнения диагностирования неисправного объекта контроля (локализация неисправности);

управления действиями оператора;

статистической обработки результатов контроля, диагностирования и технического обслуживания объектов контроля;

отображения результатов контроля, диагностирования и технического обслуживания на внешних устройствах;

оценки технического состояния сложной системы в целом и выбора режима обслуживания;

управления вводом-выводом информации с внешними устройствами и вычислительными средствами третьего уровня;

минимизации информации о состоянии сложной системы и передачи ее на вычислительные средства третьего уровня;

накопления информации и формирования банка знаний о состоянии сложной системы.

МикроЭВМ позволяет использовать синхронный и асинхронный принципы связи с объектами контроля: при синхронном принципе процесс управления техническим состоянием объектов контроля разбивается на циклы равной продолжительности сигналами электронных часов; при асинхронном — в микроЭВМ поступают от МКС сигналы прерывания. Каждый сигнал прерывания эквивалентен требованию о прекращении выполнения текущей программы и переходе к выполнению программы, обслуживающей данный тип прерывания. МикроЭВМ должна реагировать на сигналы прерывания с учетом их приоритетов. Наибольший приоритет принадлежит сигналам, связанным с авариями объектов контроля. Как правило, микроЭВМ второго уровня должна использовать комбинированный способ связи с объектами контроля.

МикроЭВМ второго уровня может работать в двух режимах управления техническим состоянием сложной системы: 1) в режиме прямого управления, когда воздействия на исполнительные механизмы непосредственно управляют объектом; 2) в режиме советчика, когда микроЭВМ обрабатывает информацию, поступающую с объектов контроля, и рассчитывает вспомогательную информацию, которая служит рекомендацией обслуживающему персоналу.

Мультимикропроцессорная система третьего уровня иерархии показана на рис. 5. Мультимикропроцессорная система в общем случае включает микроЭВМ двух типов ( $ЭВМ_1$  и  $ЭВМ_2$ ), исходя из их функционального назначения. МикроЭВМ<sub>1</sub> предназначены для

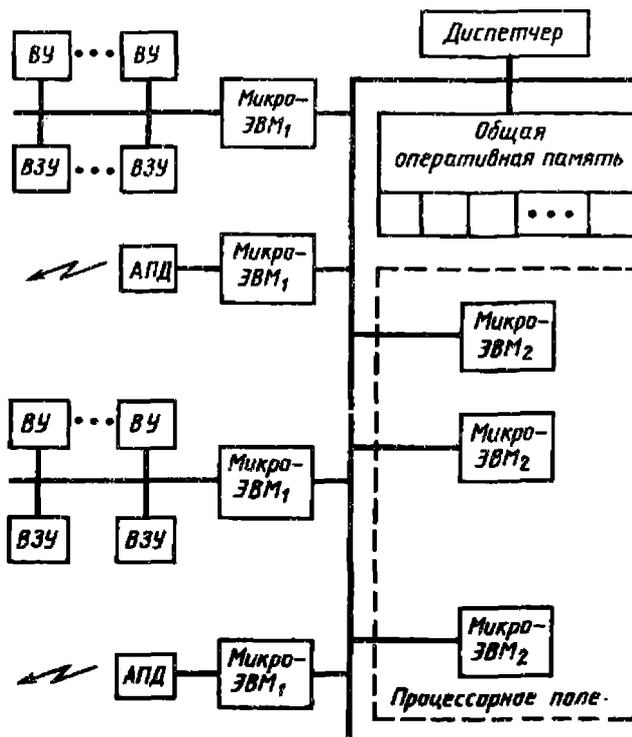


Рис. 5. Мультимикропроцессорная система третьего уровня:

ВУ — внешнее устройство; ВЗУ — внешнее запоминающее устройство; АПД — аппаратура передачи данных; микроЭВМ<sub>1</sub> ( $ЭВМ_2$ ) — микроЭВМ первого (второго) типа

решения одной задачи — организации обмена информации мультимикропроцессорной системы, а именно ее центрального ядра, включающего процессорное поле и общую оперативную память с внешними устройствами, ВЗУ и удаленными микроЭВМ<sub>2</sub> сложных систем.

Мультимикропроцессорная система предназначена для решения следующих основных задач:

статистической обработки результатов контроля, диагностирования и технического состояния сложной системы в целом;

формирования и поддержания рационального состава и номенклатуры ЗИПа сложных систем;

контроля вычислительных средств всех уровней и реконфигурации модулей вычислительных средств;

прогнозирования поведения сложных систем и системы в целом;

генерации оптимальных режимов обслуживания и вывода системы из состояния «авария»;

автоматизации оценки технического состояния системы в любой момент и за любой взятый интервал времени;

создания банков знаний (гносеобаз) о состоянии и эволюции системы;

создания экспертных систем.

В мультимикропроцессорной системе (см. рис. 5) отдельным блоком выделен диспетчер, что вызвано важностью его функций. Мультимикропроцессорная система может быть построена на современных штатных отечественных микроЭВМ, однако для организации ее работы необходима разработка специального аппаратурно-программного диспетчера. Основными функциями диспетчера являются планирование вычислительного процесса, распределение ресурсов и организация очередей.

Трехуровневая структура мультимикропроцессорного комплекса применима для обслуживания сложных систем в различных сферах народного хозяйства. В каждом конкретном случае отдельные составляющие приведенного комплекса могут отсутствовать.

Создание трехуровневого мультимикропроцессорного комплекса контроля, диагностики и управления техническим состоянием сложных систем возможно на современной элементной базе с использованием средств микропроцессорной техники. Для построения рациональной системы контроля, диагностики и технического обслуживания повышенной надежности необходимо обеспечить решение следующих задач: разработать систему автоматизации проектирования (САПР) конфигурации мультимикропроцессорного комплекса и программное обеспечение (пакетов системных, прикладных и инструментальных программ); перенести наиболее популярные алгоритмы в аппаратуру с разработкой эффективных спецпроцессоров; разработать алгоритмы динамического удержания баланса загрузки мультимикропроцессорного комплекса и алгоритмы накопления баз знаний и генерации рациональных программ обслуживания сложных систем.

## 6. СТРУКТУРА ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СРЕДСТВ КОНТРОЛЯ И ДИАГНОСТИКИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

\* Автоматизированные средства контроля и диагностики сложных систем включают техническое и программное обеспечение. Техническое обеспечение является аппаратурной частью автоматизированных средств контроля и диагностики. Программное обеспечение (ПО) состоит из *общего программного обеспечения (ОПО)* и *специального программного обеспечения (СПО)*. ОПО — это совокупность программ, обеспечивающих исполнение программ СПО, их разработку, а также управление средствами контроля и диагностики в различных режимах работы. СПО — это совокупность программ, обеспечивающих контроль и диагностирование сложных систем, самоконтроль, диагностирование и техническое обслуживание непосредственно средств контроля и диагностики, а также изготовление и испытание конкретных средств контроля и диагностики в процессе производства на заводах-изготовителях.

Для создания конкретных версий ОПО разрабатывается *базовое программное (БПО)*, позволяющее генерировать ОПО конкретных средств контроля и диагностики.

В практике проектирования и эксплуатации средств контроля и диагностики существуют два основных подхода к созданию ОПО [58]: построение ОПО на основе программного обеспечения используемой в них ЭВМ (например, известны ОПО средств контроля и диагностики, разработанные на основе языков БЕЙСИК или ФОРТРАН) и создание специализированного ОПО средств контроля и диагностики. ПО ЭВМ средств контроля и диагностики рассматривается как вспомогательное и используется для создания и обеспечения функционирования специализированного ОПО, ориентированного на задачи контроля и диагностики; в таком ОПО учтены потребности инженеров-испытателей, эксплуатирующих средства контроля

и диагностики и, как правило, не являющихся программистами-профессионалами. Эти особенности учтены в проблемной ориентации языков для описания задач контроля и диагностики, в специальных программах, помогающих создавать тексты программ и проводить отладку программ контроля и диагностики в терминах проблемно-ориентированного языка, и т. п.

В БПО выделяют следующие основные компоненты, т. е. средства операционных систем, автоматизации программирования, отладки, генерации и контроля функционирования.

Средства операционных систем (операционная система) представляют собой комплекс связанных между собой программ, обеспечивающих выбор и ввод необходимых программ и данных и автоматическое управление всем ходом выполнения процесса контроля и диагностики. В операционных системах средств контроля и диагностики можно выделить функции, свойственные любым другим операционным системам, например пакетного типа для ЭВМ общего назначения, и функции, отражающие определенную технологию использования средств контроля и диагностики.

В соответствии с этим в составе БПО выделяют базовую операционную систему контроля и диагностики и базовую обслуживающую операционную систему. Первая служит базой для создания управляющего программного обеспечения — операционных систем контроля и диагностики конкретных средств контроля и диагностики, вторая — базой для создания обслуживающих операционных систем конкретных средств контроля и диагностики, которые должны быть основой функционирования всего обслуживающего программного обеспечения, т. е. средств программирования, отладки, генерации и т. п.

Средства автоматизации программирования представляют собой совокупность языков и программ различного назначения для автоматизации этапа программирования. Это наиболее многочисленная группа средств БПО. В общем случае в нее входят входные языки программирования различного назна-

чения, средства конструирования текстов программ на входном языке программирования (в первую очередь для проблемно-ориентированных языков типа ОКА, имеющих обширный словарь терминов), трансляторы и компиляторы с входных языков программирования, средства компоновки и редактирования программ и данных, программы для автоматической генерации тестов, анализаторы синтаксиса, средства выпуска документации программного обеспечения и т. п.

Средства автоматизации программирования, используемые в аппаратуре контроля и диагностики, принято подразделять на машинно-ориентированные, в основе которых лежит использование языка Ассемблера для ЭВМ средств контроля и диагностики, и проблемно-ориентированные, в основе которых лежит применение специализированных языков программирования, ориентированных на задачи контроля и диагностики.

Средства отладки представляют собой совокупность программ, предназначенных для автоматизации отладки программ различного назначения. В общем случае данная группа средств включает: отладчик программ контроля и диагностики на проблемно-ориентированном языке, отладчик программ на языке Ассемблера, моделирующие программы различного назначения, обеспечивающие предварительную отладку программ контроля и диагностики при отсутствии внешних контрольно-измерительных устройств средств контроля и диагностики.

Средства генерации предназначаются для генерации рабочего комплекса ОПО конкретных средств контроля и диагностики на основе средств базового программного обеспечения, а также для решения задач адаптации ранее созданного ОПО к новым требованиям к средствам контроля и диагностики, возникающим в ходе их эксплуатации. Одним из основных компонентов является генератор данных, обеспечивающий получение в удобной форме описания конкретной версии проблемно-ориентированного языка программирования средств контроля и диагностики, описание ресурсов средств контроля и диагностики и их соедине-

ний с контролируемым оборудованием. Эти данные необходимы для работы таких средств базового программного обеспечения, как операционная система контроля и диагностики, компилятор, конструктор текстов программ контроля и диагностики.

Средства контроля функционирования представляют собой совокупность программ, предназначенных для проверки исправности непосредственно средств контроля и диагностики, обнаружения и локализации отказов и сбоев. Они позволяют проверять состояние отдельных устройств аппаратуры контроля и диагностики, выполнять диагностические процедуры при обнаружении отказов и сбоев, а также тестовые проверки аппаратурных и программных средств аппаратуры контроля и диагностики при проведении различного рода профилактических работ.

Эти средства служат для создания специальных программ самоконтроля, диагностики и технического обслуживания, входящих в СПО средств контроля и диагностики.

В зависимости от связи с техническими средствами [58] базовое программное обеспечение разделяется на средства управляющего и обслуживающего программного обеспечения. Управляющее программное обеспечение всегда реализуется техническими средствами аппаратуры контроля и диагностики. Как составная часть исполнительной системы аппаратуры контроля и диагностики оно неотделимо от аппаратурных средств и вместе с ними образует новую, виртуальную среду, в которой функционируют программы контроля и диагностики и с которой общается человек-оператор в процессе проверки и диагностирования сложной системы.

Наиболее распространены средства управляющего программного обеспечения на основе перфоленточных устройств ввода-вывода (перфоленточное программное обеспечение) и на основе накопителей на магнитных дисках (дискетное программное обеспечение). Перфоленточное программное обеспечение характеризуется низкой стоимостью, достаточно высокой скоростью замены программ контроля и диагностики,

устойчивой работой в различных условиях эксплуатации и т. п. Такое обеспечение наиболее широко применяется в средствах контроля и диагностики, обеспечивающих выполнение задач контроля и диагностики по заранее созданным и отработанным программам. Дискетное программное обеспечение отличается более высоким уровнем комфортности работы человека-оператора за счет исключения манипуляций перфолентами при смене программ контроля и диагностики. Однако из-за технических особенностей диска, а также большей его стоимости по сравнению с перфоленточными средствами дискетное обеспечение используется в основном в диалоговых средствах контроля и диагностики.

Известны примеры использования магнитных лент в качестве основного системного носителя данных.

Обслуживающее программное обеспечение средств контроля и диагностики в отличие от управляющего может быть реализовано как на технических средствах аппаратуры контроля и диагностики, так и на внешней, автономно используемой технологической ЭВМ или технологическом комплексе. Для реализации функционально полного обслуживающего программного обеспечения в составе средств контроля и диагностики должна быть соответствующая аппаратура (процессор с высоким быстродействием и необходимым объемом памяти, внешнее запоминающее устройство большой емкости, терминал человека-оператора, соответствующие устройства ввода-вывода).

Другим способом реализации технических средств для обслуживающего программного обеспечения является вариант, при котором на период подготовки программ контроля и диагностики и испытаний непосредственно средств контроля и диагностики для увеличения вычислительной мощности им придается (или к ним подключается) технологическая ЭВМ с требуемым аппаратурным составом. В общем случае технологическая ЭВМ может быть удалена от средств контроля и диагностики на значительное расстояние.

В соответствии с установившейся практикой в составе СПО средств контроля и диагностики выделяют три

группы программ: контроля и диагностирования сложных систем, самоконтроля, диагностирования и технического обслуживания непосредственно средств контроля и диагностики, а также для изготовления и испытания конкретных средств контроля и диагностики в процессе производства на заводе-изготовителе.

Разработке программ контроля и диагностирования сложных систем предшествует анализ методик проверки параметров сложной системы и методик диагностирования. При анализе всегда можно выделить (в первую очередь для сложных систем) группы параметров (методик диагностирования), проверяемых в близких исходных режимах функционирования сложной системы, и оформить их, как этапы проверки. Каждому такому этапу присваивается определенное имя (номер). В конце этапа состояние средств контроля и диагностики и проверяемой сложной системы должно быть таким же, как и в начале этапа. Поэтапный контроль и диагностирование сложной системы позволяет уплотнить время контроля группы родственных параметров за счет уменьшения времени на переходные процессы в сложной системе, сократить объем программы исключением одних и тех же команд и сигналов на разных участках программы, обеспечить выборочный контроль и диагностирование четким началом и концом этапа с одними и теми же исходными режимами сложной системы и средств контроля и диагностики.

Наиболее рациональной является модульная структура программ контроля и диагностики. В соответствии с логическими уровнями программ контроля и диагностики могут быть установлены следующие типы модулей: программа проверки сложной системы (главный модуль), модули этапов, параметров и типовых задач контроля и диагностики. При таком представлении программы контроля и диагностики обеспечиваются возможности для многократного использования модулей и их независимой проверки. Наличие комплекта модулей упрощает разработку новых программ и модернизацию имеющихся за счет использования

готовых модулей и простоты внесения изменений в программу. Корректировку можно осуществить изменением фактических значений переменных параметров модулей и заменой одних модулей другими или введением новых модулей при необходимости внесения изменений. Комплект модулей может создаваться для использования в программах контроля одной или группы родственных сложных систем. Для конкретной программы проверки в этом случае выбираются необходимые модули (в общем случае всех уровней) и на их основе создается программа. При необходимости для разрабатываемой программы создаются новые модули или модифицируются имеющиеся.

Специальное программное обеспечение самоконтроля, диагностирования и технического обслуживания непосредственно средств контроля и диагностики позволяет оценивать техническое состояние, выделять (локализовать) отказы при их обнаружении и обеспечивать техническое обслуживание при проведении регламентных работ. Для решения этих задач, как правило, создаются программы самоконтроля, диагностирования и технического обслуживания. Программа самоконтроля предназначается для проверки функционирования средств контроля и диагностики, включая проверку ЭВМ, средств связи ЭВМ с периферийными устройствами, в том числе устройствами ввода-вывода, измерительными преобразователями, генераторами, коммутаторами и т. п. Эта программа должна гарантировать, что вся программируемая аппаратура реагирует на команды. Структурно программа самоконтроля обычно аналогична программам проверки сложной системы. Программа диагностирования непосредственно средств контроля и диагностики обеспечивает поиск и локализацию неисправных элементов средств контроля и диагностики.

Программа технического обслуживания предназначается для обеспечения технического обслуживания устройств средств контроля и диагностики, проверки функционирования средств кон-

троля и диагностики с привлечением внешней аппаратуры эталонирования и калибровки. В связи со спецификой проведения этих работ такая программа создается с учетом проведения технического обслуживания в полуавтоматическом режиме с большим числом приостановов для участия че-

ловека-оператора в проверке средств контроля и диагностики.

Программное обеспечение для производства средств контроля и диагностики решает задачу проверки как составляющих, так и средств контроля и диагностики в целом на соответствие требованиям технических условий.

---

## Глава 17. Примеры современных автоматизированных систем эксплуатации и ремонта техники

---

### 1. ЭКСПЛУАТАЦИЯ И ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБСЛУЖИВАНИЕ БОЛЬШИХ СИСТЕМ С МОНИТОРИНГОМ

Для обеспечения эксплуатационной надежности и безопасности современные большие технические системы (машины и конструкции) снабжаются, как правило, *системами мониторинга (СМ)*.

Под мониторингом машин понимается научно спроектированная система (средства и методы) непрерывных наблюдений и измерений с применением соответствующих оценочных процедур (идентификации, анализа текущего состояния, распознавания особых ситуаций, краткосрочного (1—2 с) и долговременного (минуты, часы) прогнозирования) и автоматического принятия оперативных и тактических решений.

Общая схема аппаратурной реализации СМ представлена на рис. 1. СМ состоит из датчиков и сенсоров с интерфейсами, устройств буферного хранения информации, *компьютера остаточного ресурса* изделия (КОР) с математическим обеспечением и *пакетом прикладных программ* (ППП), осуществляющим соответствующие оценочные процедуры, в том числе в реальном масштабе времени, терминала с дисплеем и человеком-оператором, каналов обратной связи с сервомеханизмами и системами предотвращения и защиты.

Современные СМ позволяют непрерывно отслеживать фактическое состояние каждой индивидуальной машины; оперативно диагностировать ее узлы и агрегаты; прогнозировать остаточный ресурс; осуществлять на

этой основе эксплуатацию и техническое обслуживание по состоянию; исключить необходимость в капитальных ремонтах и возникновение аварийных ситуаций; резко уменьшить процент брака и расходы на ресурсные испытания (на стадии доводки изделия).

Рассмотрим некоторые современные системы мониторинга.

Характерная для авиационных конструкций (в частности, авиационных двигателей) СМ представлена на рис. 2. Она состоит из системы сенсоров и датчиков, регистрирующих основные параметры изделия; бортового 16-разрядного компьютера (остаточного ресурса), изделия модульной конструкции (КОР) с оперативной памятью 80 Мб; устройства быстрого доступа, осуществляющего непрерывную запись диагностирующих параметров; устройств передачи информации (в том числе ручных), позволяющих осуществлять связь между КОР и наземным централизованным оборудованием повтора и анализа. Для обеспечения надежности СМ вероятность его отказа не должна превышать  $10^{-12}$ . Такая система позволяет регистрировать расход ресурса важнейших элементов конструкции, производить запись функционирования со скоростью 1 фрейм/с, фиксировать выбросы за предупреждающий и критический уровни (отклонения от нормы и происшествия), осуществлять вибрационный анализ системы, самодиагностику и внешнюю связь.

СМ отслеживает в реальном масштабе времени расход ресурса в результате мало- и многоциклового усталости, термоусталости, ползучести, износа. Кроме того, СМ позволяет непрерывно изучать газовую динамику двигателя, записывать кривые «время—темпера-

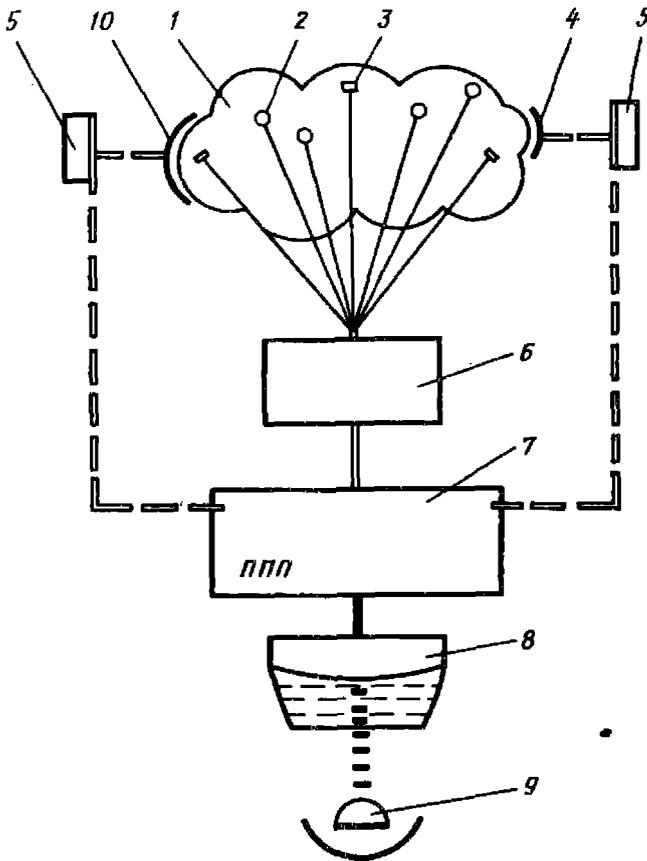


Рис. 1. Общая схема системы мониторинга:

1 — большая механическая система (БМС); 2 — сенсоры; 3 — датчики; 4 — устройство предотвращения; 5 — сервомеханизмы; 6 — буферное устройство хранения информации; 7 — компьютер остаточного ресурса изделия в пакетах ПП; 8 — терминал в дисплее; 9 — человек-оператор; 10 — устройство защиты

тура (скорость)», осуществлять математическое моделирование функционирования двигателя, фюзеляжа, коробки передач и т. д.

Другим примером является СМ инструмента на токарных, сверлильных, фрезерных и многооперационных станках с управлением типа CNC. Эти системы сигнализируют об износе или поломке инструмента, осуществляют необходимую корректировку режимов обработки. Основные принципы действия таких СМ заключаются в регистрации «рабочих часов» инструмента, а также в измерении тем или иным способом выходной мощности, усилий резания и геометрии инструмента или изделия.

СМ позволяет осуществлять эксплуатацию по состоянию, ресурсу или уровню надежности и на этой основе

использовать концепцию обслуживания по состоянию (ОПС).

ОПС — наиболее экономичный, гибкий и эффективный метод эксплуатации заводского оборудования и транспортных машин. ОПС является основным компонентом процесса эксплуатации, ориентированного на максимум безопасности и надежности.

Центральным элементом обслуживания по состоянию является система управления информацией об обслуживании (СУИО) — автоматизированное устройство сбора данных и передачи информации для интеграции СМ в структуру технического обслуживания изделий.

СУИО является современным средством реализации стратегии (ОПС), основанное на миникомпьютерах, за

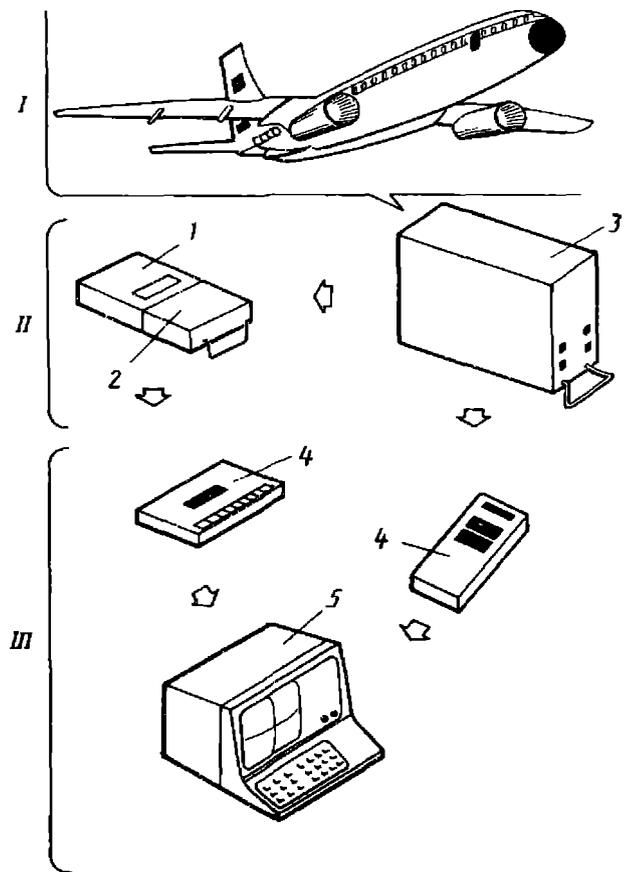


Рис. 2. Типовая система мониторинга:

I — изделие, оснащенное датчиками и сенсорами для контроля расхода топлива, температуры, давления масла, вибрации и др.; II — бортовые устройства; 1 — устройство быстрого доступа (УБД); 2 — устройство для непрерывной записи трендов; 3 — бортовой компьютер остаточного ресурса (КОР); III — устройства для передачи информации; 4 — ручное устройство передачи информации (РУПИ); 5 — централизованное наземное устройство анализа

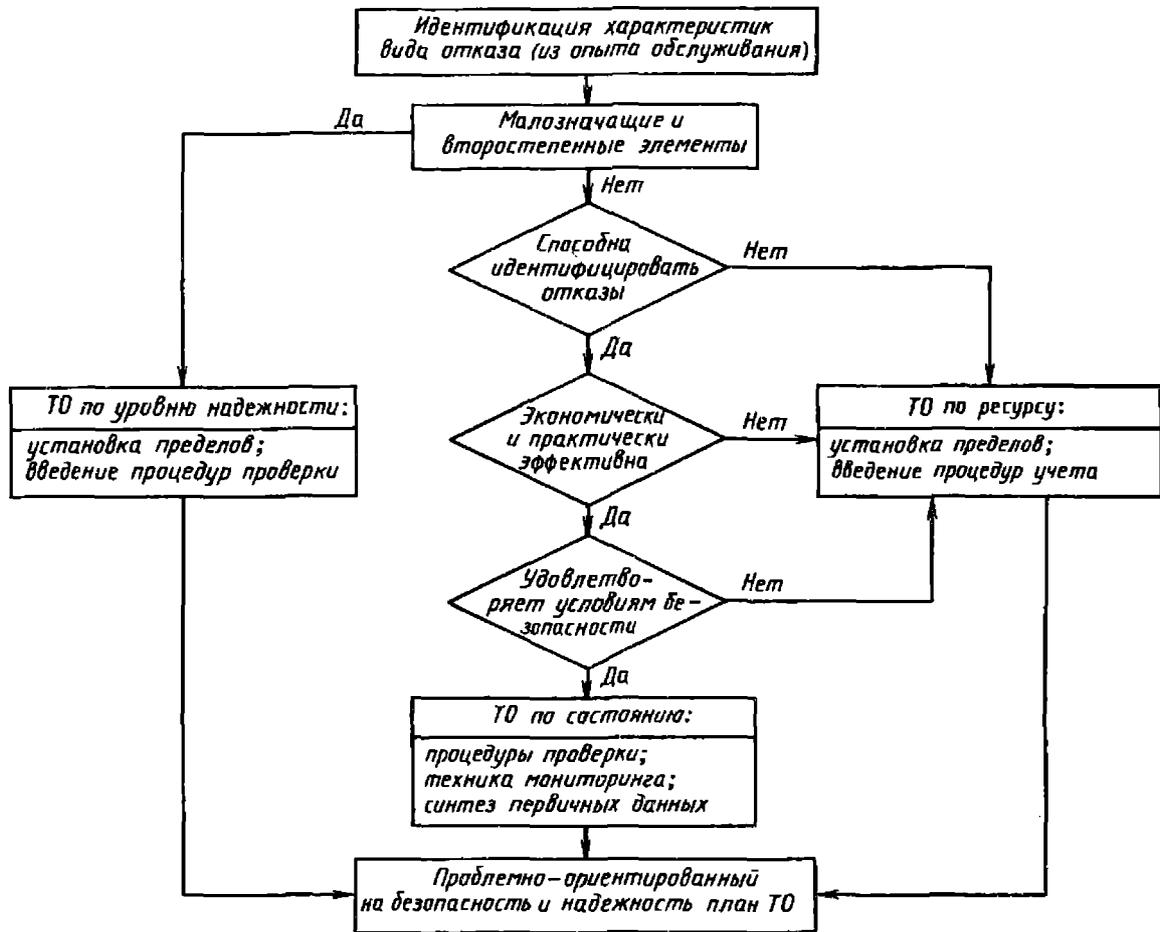


Рис. 3. Блок-схема алгоритма создания плана ТО, проблемно-ориентированного по безопасности и надежности

счет предоставления доступа к необходимой информации эксплуатационщиков, ремонтников, конструкторов и управляющих в форме, пригодной для практического применения. СУИО позволяет осуществлять обслуживание методом исключения, проводить мониторинг ансамбля изделий. Например, для газотурбинных двигателей концепция *технического обслуживания* (ТО) основана на модульном принципе (отслеживание расхода ресурса модуля, использование техники обнаружения дефекта изделия и его выделения на уровне модуля). Она позволяет исключить процесс капитального ремонта двигателя и идентифицировать снижение сопротивления отказу.

Блок-схема алгоритма создания проблемно-ориентированного на обеспечение безопасности и надежности плана ТО представлена на рис. 3. Основная идея алгоритма заключается в вычленении элементов, эксплуатирующихся по ресурсу, по состоянию и по

уровню надежности и обеспечению адекватности, экономичности и безопасности процедур проверки, техники мониторинга и синтеза первичных данных (прогнозирования, принятия решений).

Очень важен учет требований конкретного пользователя к исходным данным мониторинга. Следует различать следующие категории пользователей и уровни поддержки: 1) оператор (экипаж, команда); 2) руководство цеха (маршрута, линии); 3) руководство ремонтных мастерских; 4) руководство ремонтного завода; 5) инженерный состав завода-изготовителя; 6) руководство завода-изготовителя.

Эти потребители со своими требованиями к информации определяют ее состав, способы обработки, содержание пакета прикладных программ (ППП) и процедуру доступа к информации. В рамках сценария на уровне 1 (пилот, экипаж) требуется минимум информации, позволяющей обеспечить

безопасность персонала и выполнения задания (рейса). В цехе (уровень 2) требуется информация для возможности быстрой идентификации дефектов на модульном уровне и определения состава ТО. В мастерских (уровень 3) нужны данные об испытательных стендах, предыдущая информация об условиях эксплуатации изделия и знание местных ресурсов, что позволяет принять правильное решение, в том числе о выполнении превентивного ТО. На заводе-изготовителе (уровень 4) бригада по ТО должна руководствоваться знаниями предыстории, причинами снятия изделия с эксплуатации и непосредственными записями его функционирования. Инженерный состав ремонтного завода (уровень 5) принимает решения логического характера. Он осуществляет мониторинг ансамбля изделий; обеспечивает экспертизу задач идентификации надежности и ремонтпригодности, которые можно решить с помощью улучшения компонент изделия; определяет политику управления запасными частями и их распределения между складами.

На уровне руководства завода (уровень 5) ТО изделий связано с широким кругом управленческих проблем в процессе поддержания изделий (влияние нового компонента, создание новых ППП и т. п.).

Вся перечисленная информация в конечном счете получается с помощью ППП из решения соответствующих задач статистической обработки исходной информации, механики, надежной оптимизации и математического моделирования.

Программы, входящие в состав СМ и СУИО, должны удовлетворять требованиям модульности, совместимости по иерархии вверх и гибкости (для возможности осуществлять мониторинг ансамбля изделий).

Хранение данных должно предусматривать их агрегатирование по типам изделий; учитывать конкретные нужды используемых систем ТО и эксплуатации по состоянию; быстрый и эффективный поиск суммарной цифровой или графической информации для всех изделий в ансамбле.

Состав информации зависит от тех задач надежной оптимизации, ко-

торые решаются в ходе ТО и эксплуатации ансамбля изделий.

Таким образом, задача мониторинга механических систем в первом приближении сводится к следующему: сбору, обработке и идентификации первичной статистической информации;

решению задач об оптимальном расходовании ресурса за счет управления случайным процессом нагружения (динамическим или квазистатическим), оператором системы (например, изменять общую конфигурацию элемента, его граничные условия, накладывать или снимать связи, варьировать во времени жесткость демпферов), восстановлением качества системы по определенному правилу (выполнять техническое обслуживание и ремонт, наносить защитные покрытия, заменять смазку, детали, узлы, агрегаты); диагностике узлов и агрегатов машин;

прогнозированию остаточного ресурса;

решению задачи об оптимальной остановке эксплуатации технической системы;

оптимизации объемов технического и сервисного обслуживания, среднего и капитального ремонта, объемов запасных частей и складов и др.

Практически система мониторинга аппаратно реализует на уровне технических средств системный подход к проблеме надежности, обеспечивая оценку и прогнозирование ресурса, принятие решений по управлению надежностью и их реализацию в реальном масштабе времени.

Многие из этих задач успешно решаются с помощью моделей, изложенных в т. 8 и 9.

## 2. АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ СИСТЕМА ЭКСПЛУАТАЦИИ И РЕМОНТА САМОЛЕТОВ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Одной из важных научных и технических проблем гражданской авиации является эксплуатация авиационной техники по состоянию.

Оценка текущего состояния такого сложного объекта, каким является

современный пассажирский самолет, требует сбора и обработки больших объемов информации. Например, на борту самолета Ил-86 за один час полета регистрируется и записывается на магнитный носитель до 1 Мб данных о состоянии параметров важнейших систем самолета. В будущем объем автоматически регистрируемых в полете и запоминаемых данных будет возрастать. Обработка и анализ такого количества данных нуждается в бортовых и наземных компьютерах.

Тем не менее строгое формальное описание процессов функционирования сложных авиационных систем затруднено. В результате даже при наличии достаточной информации и хороших средств ее обработки бывает сложно определить состояние системы с помощью автоматизированных комплексов. Альтернативным решением этой проблемы является создание человеко-машинной системы принятия решения о техническом состоянии объекта. В такой автоматизированной системе диагностирования (АСД) авиационной техники во всех сложных и противоречивых ситуациях решение о состоянии объекта принимается экспертами. Основой для этого служит информация, выданная АСД, в результате обработки полетных данных.

Примером системы, нашедшей распространение в гражданской авиации, является АСД «Анализ-86», предназначенная для самолета Ил-86. Отличительная черта этой системы — обработка информации, накопленной в полете на наземных вычислительных комплексах. Опыт, накопленный в процессе эксплуатации системы на предприятиях гражданской авиации, позволяет определить ее некоторые типичные черты.

Особенности наземных автоматизированных систем диагностирования изделий авиационной техники. Важной особенностью АСД в гражданской авиации является ограниченность времени, в течение которого может проводиться наземная обработка и анализ данных, накопленных во время полета самолета.

Необходимость наиболее полно использовать самолет для удовлетворения спроса на перевозки вынуждает

минимизировать (с учетом ограничений, накладываемых требованиями безопасности) время пребывания его в аэропорту. Кроме того, не все время пребывания в аэропорту самолет может быть доступен контролю АСД. Примерное распределение доли времени пребывания самолета такого класса, как Ил-86, в различных состояниях иллюстрируется ниже.

Вне базового аэропорта.	0,35
В аэропорту:	
недоступном для АСД	0,40
доступном для АСД	0,25

Следующей особенностью является объем информации, который накоплен в процессе полета. Количество задаваемых и регистрируемых бортовыми датчиками параметров таково.

Параметры:	Аналоговые	Разовые
полета . . . . .	19	15
органов управления	17	17
силовых установок .	68	16
прочих систем	42	18

В результате за один час полета на борту самолета (с учетом частоты регистрации значений параметров) накапливается немного менее 1 Мб данных, которые требуется обработать вычислительными средствами наземной АСД.

Технология работы АСД «Анализ-86» предусматривает участие в ней ряда подразделений авиационного предприятия, эксплуатирующего самолет Ил-86.

Взаимодействие эксплуатационных подразделений с АСД. Показанные на рис. 4 связи означают: 1 и 2 — до-

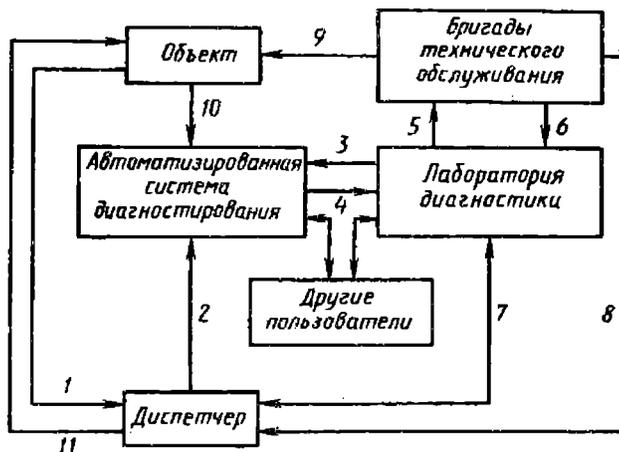


Рис. 4. Схема взаимодействия эксплуатационных подразделений с АСД



Рис. 5. Относительные затраты времени (%) на цикл диагностирования

ставка от самолета съемного носителя зарегистрированных в полете данных в систему; 3 — формирование задания на очередную обработку системой данных, основанного на предыстории технического состояния самолета и сообщениях экипажа; задание формируется в виде заполненного на дисплее шаблона и по каналу связи поступает в вычислительный комплекс системы; 4 — передача результатов диагностирования, полученных АСД в виде распечаток диагностических сообщений, в лабораторию диагностики для принятия решения о состоянии объекта; оперативные сообщения при этом передаются по каналу связи, диагностические сообщения, не требующие остановки эксплуатации самолета и не препятствующие его вылету, — обычным способом; потребитель может запросить дополнительную распечатку значений требующихся ему параметров и дополнительную экспертную информацию; 5 — задания на выполнение технического обслуживания объекта по результатам анализа; 6 — уточнение задания на техническое обслуживание объекта, подтверждение или опровержение диагноза выполненного системой; 7 и 8 — информирование о возможных сроках готовности самолета к очередному рейсу; 9 — техническое обслуживание объекта; 10 — дополнительная информация экипажа о поведении техники в процессе полета; 11 — постановка самолета на подготовку к очередному рейсу.

Длительность одного цикла диагностирования включает затраты времени всех участвующих в этом процессе эксплуатационных подразделений. Примерные относительные затраты времени цикла приведены на рис. 5.

Структура информационного обеспечения системы определяет временные затраты используемого комплекса технических средств, включая входную

внутримашинную и выходную информацию (рис. 6).

Входной информацией являются полетные данные, занесенные на съемный магнитный носитель. Объемы этих данных колеблются в широких пределах в зависимости от продолжительности прямого и обратного рейсов. В среднем этот объем  $3 \cdot 10^6$  б, однако в отдельных случаях он может быть на порядок больше. Кроме полетной информации, на входе требуются тарифовочные характеристики датчиков, позволяющие перевести коды данных в данные физической размерности, и нормативно-справочная информация, идентифицирующая конкретный самолет и рейс.

Входная информация системы, занесенная на магнитную ленту, при считывании ее в ЭВМ проходит предварительную обработку. При этом из всех данных, зарегистрированных в полете, выделяются только те, которые необходимы для решения диагностических задач, перечисленных в задании на диагностирование. Это позволяет сократить машинное время, так как обычно не все задачи должны обязательно решаться после каждого возвращения самолета на базу.

Таким образом, после предварительной обработки полетной информации в системе создаются массивы данных только для перечисленных в задании диагностических задач. Данные в массивах раскодированы, при этом отбракованы все статистически недостоверные значения; методом интерполяции восстановлены все пропуски данных. Данные сжаты и помещены в специализированную базу данных со страничной организацией дисковой памяти.

Внутримашинная информация состоит из трех групп массивов. Массивы значений параметров образованы после предварительной обработки полетной информации и являются входными для задач диагностирования изделий авиационной техники. Каждая задача имеет свой массив данных. Решения всех задач функциональной диагностики перед выдачей их потребителям помещаются в универсальную базу данных в виде готовых документов. Массивы нормативно-справочной

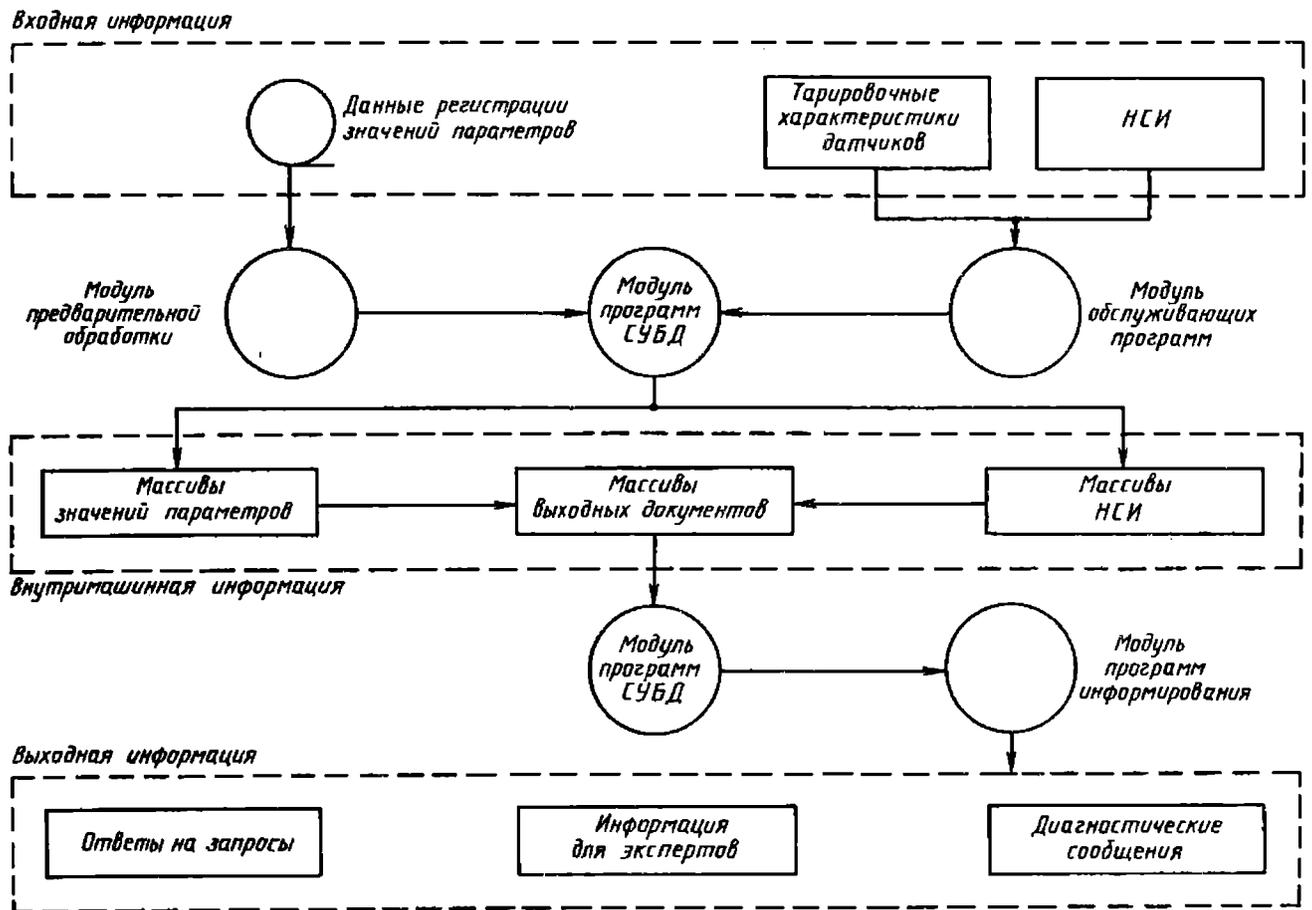


Рис. 6. Структура информационного обеспечения автоматизированной системы диагностирования:

СУБД — система управления базой данных; НСИ — нормативно-справочная информация

информации являются общими для всех задач, решаемых в данном цикле диагностирования.

Выходная информация образована программными модулями оперативного и стандартного информирования, она предназначена для трех групп пользователей системы. Первая группа пользователей — персонал лаборатории диагностики. Для них предназначена информация в виде формальных документов, содержащих диагностические и информационные сообщения о техническом состоянии самолета. Диагностические сообщения не требуют дополнительного анализа и используются для выдачи заданий на ТО самолета. Информационные сообщения обычно выдаются системой в том случае, когда какая-либо задача не может быть решена. Такая ситуация возникает в том случае, когда отсутствуют необходимые данные. Напри-

мер, по причине невозможности восстановления информации при записи ее в полете. Кроме того, возможна отбраковка полетных данных статистическими критериями на стадии предварительной обработки.

Вторая группа пользователей — эксперты. Это наиболее квалифицированные сотрудники лаборатории диагностики, которые должны принять решения о состоянии изделия авиационной техники в случае диагностического сообщения системы, требующего замены изделия или прекращения его эксплуатации. В этом случае эксперты получают подробную информацию, содержащую серии физических значений параметров, средних величин этих значений на различных этапах полета и другие данные.

Информация для экспертов является наиболее подробной. Объемные доли

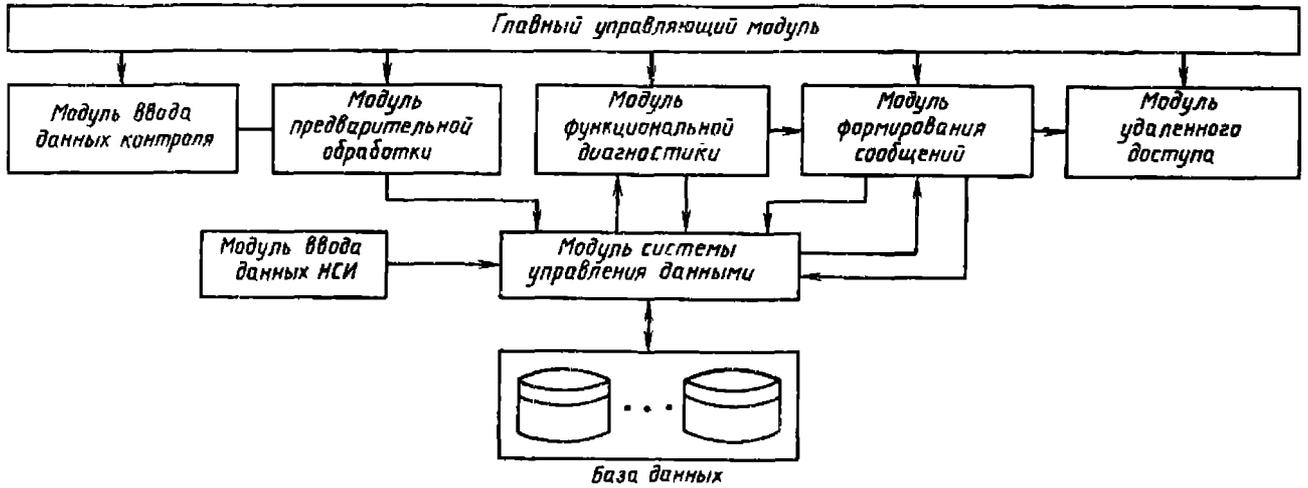


Рис. 7. Структура программного обеспечения автоматизированной системы диагностирования

выходных данных в зависимости от их типа приведены ниже.

Сообщения:

диагностические	0,20
информационные . . . . .	0,05
информация для экспертов в случае отрицательного диагноза	0,75

Общее число сообщений, которые могут быть выданы системой за один цикл, по задачам диагностирования только силовых установок самолета может достичь ста. Это те сообщения, которые предусмотрены методикой и алгоритмами функциональных задач. Обычное число сообщений, которые система выдает после каждого полета, значительно меньше.

Третья группа пользователей — пользователи, обращающиеся к си-

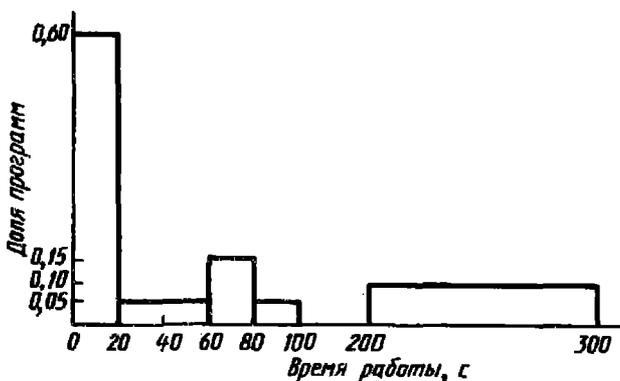


Рис. 8. Гистограмма временных характеристик управляющей части программного обеспечения

стеме с нестандартными запросами. Запросы этих пользователей обслуживаются средствами универсальной базы данных с СУБД «Спектр». Ограничениями на состав запроса является специализированный язык запросов этой базы данных. Ответы на нестандартные запросы могут выдаваться в виде распечатки либо на дисплей пользователя.

Состав программного обеспечения. Состав этого обеспечения показан на рис. 7.

На рис. 8 приведена гистограмма временных характеристик управляющей части программного обеспечения.

Представить размер программного обеспечения системы можно следующим образом:

Общее число строк полного программного модуля системы . . . . .	100 000
Среднее число символов в строке . . . . .	25
Общее число символов . . . . .	2 500 000

Доля:

системных программ	0,3
функциональных программ . . . . .	0,7
языка ПЛ-1 . . . . .	0,95
языка Ассемблера	0,05

Временные затраты на этапах предварительной обработки и решения задач диагностики приведены в табл. 1.

Из табл. 1 видно, что доля предварительной обработки полетных данных в общем времени диагностирования самолета весьма существенна.

Комплекс технических средств автоматизированной системы диагностирования определяется тремя факторами: временем, в течение которого необходимо произвести диагностирование, набором функциональных задач, обеспечивающим качество технического обслуживания и уровень безопасности, и объемом предварительной обработки данных. С учетом этих факторов предпочтение было отдано ЕС ЭВМ модели типа ЕС-1045.

Однако развитие ЭВМ серии СМ-4 создало возможность использования и этого комплекса технических средств.

При различных вариантах построения комплекса технических средств необходимо учитывать перспективу создания единой комплексной системы инженерного обеспечения (поддержки) производства. Кроме задач технической эксплуатации, этот комплекс должен включать задачи оптимального планирования перевозок, материально-техническое снабжение и задачи других видов инженерной деятельности. В этом случае технические средства автоматизированной системы диагностирования должны быть согласованной частью общей системы.

Особенности разработки и внедрения автоматизированных систем диагностирования вытекают из их сложности и недостаточности опыта.

Распределение затрат ресурсов разработки на отдельную функциональную задачу показано на рис. 9. Затраты ресурсов на тестирование комплексных программ при включении отдельной задачи в систему весьма значительны.

Существенными являются затраты на доработку задач диагностирования в процессе эксплуатации. Практика показала, что даже при хорошем исходном варианте алгоритмов функциональных задач и приемлемой их работоспособности на первых стадиях эксплуатации доработка задач продолжается длительное время. Эксплуатационные условия позволяют выявить те свойства объектов сложных систем, которые трудно определить при проектировании, стендовых испытаниях, опытной эксплуатации. Распределение затрат ресурсов на доработку функциональных задач показано на рис. 10.

### 1. Временные затраты на обработку информации

Задача	Доля общего времени	
	Предварительная обработка	Решение задач
Подсистемы: «Силовая установка»	0,30/0,46	0,70/0,54
«Экипаж»	0,80/0,82	0,20/0,18
Полный набор задач	0,40/0,60	0,60/0,40

Примечание. В числителе приведены данные при 2-часовом полете, в знаменателе — при 4-часовом полете.

В АСД «Анализ-86» решаются следующие задачи оценки состояния силовых установок самолета Ил-86.



Рис. 9. Относительные затраты ресурсов на разработку задачи и включение ее в систему

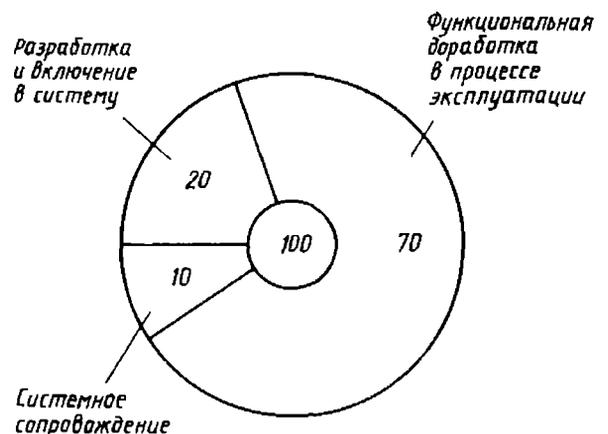


Рис. 10. Относительные затраты ресурсов на разработку и доработку функциональной задачи

Контроль тяги двигателя в эксплуатации.

Контроль параметров газоздушного тракта двигателя: в наборе высоты, на этапе горизонтального полета.

Контроль функционирования системы автоматического управления двигателем: во время запуска и на режиме малого газа до взлета; на взлете; в наборе высоты; на режиме реверса тяги.

Контроль правильности срабатывания элементов системы автоматического регулирования двигателя: при выдаче сигнала электронной системы управления двигателем «Номинал»; при срабатывании клапанов перепуска воздуха и регулируемого направляющего аппарата; при переключении регулируемого направляющего аппарата; высотной настройки электронного регулятора оборотов.

Контроль расходования топлива в полете.

Оценка эквивалентной наработки двигателей.

Оценка нагруженности и ресурса планера ЛА.

Контроль системы электроснабжения ЛА.

### 3. АВТОМАТИЗИРОВАННЫЕ СРЕДСТВА КОНТРОЛЯ АВИАЦИОННОГО ОБОРУДОВАНИЯ

Перспективное направление совершенствования системы технической эксплуатации авиационного оборудования — внедрение в процессы его технического обслуживания и ремонта автоматизированных средств контроля.

Современная контрольно-поверочная аппаратура представляет совокупность узкоспециализированных стендов с большой номенклатурой наименований, оснащенных измерительными приборами и коммутационными устройствами с ручным управлением. Специализированные стенды, как правило, разрабатываются под конкретное оборудование и не могут использоваться для проверки других видов оборудования. При проверке сложных блоков число элементарных операций (включений, переключений, измерений, сравнений

простейших арифметических вычислений, выключений и т. д.) достигает нескольких десятков, а время проверки до 2—3 ч. При этом происходит значительный расход ресурса аппаратуры. Для эксплуатации стендов требуется большое число специалистов с достаточно высокой квалификацией.

Невысокая точность измерительных приборов и существенные субъективные ошибки операторов, связанные с большим числом элементарных операций, выполняемых при проверках, обуславливают низкую достоверность контроля, что снижает уровень безопасности полета. Ручной режим управления стендами существенно снижает производительность труда и усложняет документирование результатов контроля.

Перечисленные недостатки в значительной степени устраняются при замене «ручных» автоматизированными средствами контроля.

При переходе от ручных к автоматизированным средствам контроля можно либо создавать сугубо специализированные средства контроля по видам оборудования на базе спецвычислителей с жесткой программой, либо автоматизированные системы контроля на базе управляющих ЭВМ. Первый путь целесообразен для построения систем контроля оборудования в условиях серийного производства, второй (наиболее рациональный и перспективный) — для эксплуатационных подразделений гражданской авиации, поскольку обеспечивает минимизацию специальной контрольно-измерительной и вычислительной аппаратуры, организацию параллельного контроля блоков вследствие развитой системы приоритетных прерываний, улучшение условий обслуживания из-за гибкости программного обеспечения, реализацию режима диалога между оператором и объектом контроля.

Принцип построения автоматизированной системы контроля авиационного оборудования (АСК АО) взаимосвязан с принципом организации процесса контроля блоков. При автоматизации контроля целесообразно выделить участки по типам блоков, имеющих общую специфику как объекты контроля (ОК).

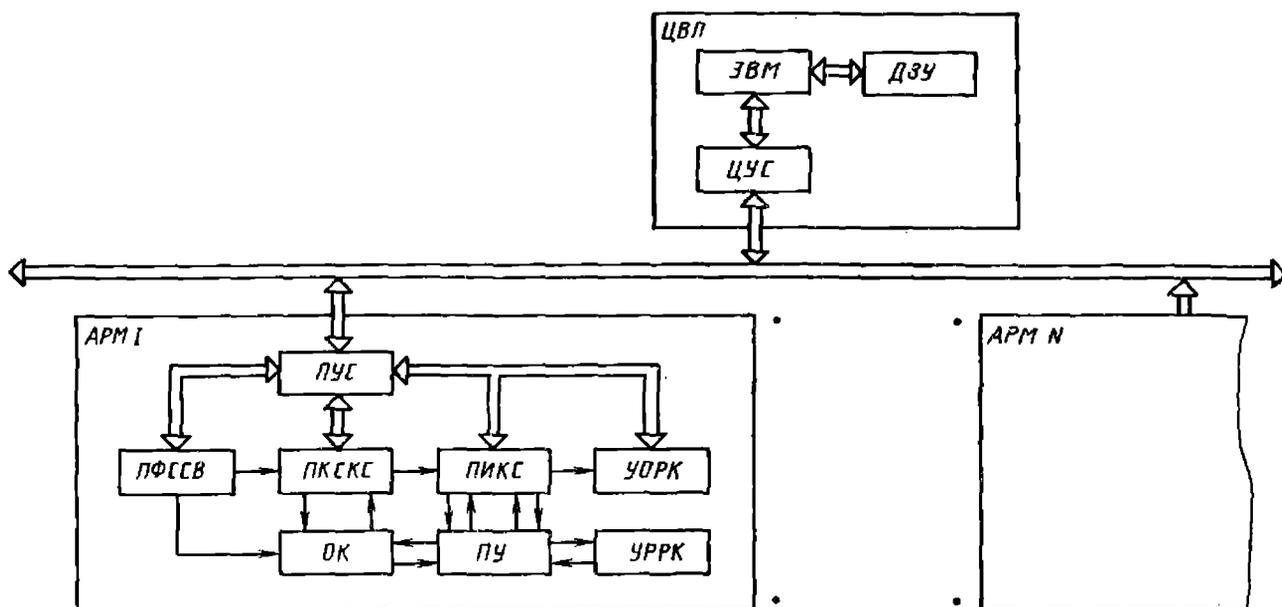


Рис. 11. Структурная схема автоматизированной системы контроля демонтированных блоков

АСК АО строится по централизованному принципу (рис. 11), при котором ЭВМ располагается в центральной вычислительной лаборатории (ЦВЛ) и взаимодействует через устройства обмена информацией с автоматизированными рабочими местами (АРМ), расположенными на специализированных участках.

В качестве основного устройства управления процессом контроля и обработки информации выбирается ЭВМ, работающая в режиме коллективного пользования с распределением времени по запросам АРМ. В этом случае все АРМ могут одновременно работать с ЭВМ, причем результирующее время ожидания процессора компенсируется относительно медленным вводом и выводом информации. При отсутствии запросов ЭВМ работает по программам самоконтроля и проверки оборудования АРМ. Долговременное запоминающее устройство (ДЗУ) содержит программы контроля блоков, а также данные о результатах контроля, необходимые в процессе эксплуатации.

Обмен информацией между центральной ЭВМ и автоматизированными рабочими местами контроля оборудования на специализированных участках осуществляется линией связи и обеспечивается взаимодействием центрального и периферийных устройств со-

гласования. Устройства согласования и линия связи образуют канал передачи информации (КПИ).

Через центральное устройство согласования (ЦУС) из ЭВМ к АРМ передается управляющая информация и информация о результатах обработки контролируемых сигналов. От АРМ через периферийные устройства согласования (ПУС) к ЦВЛ передается информация об измеренных значениях контролируемых сигналов.

Все АРМ имеют типовую структуру, включающую подсистему формирования стимулирующих сигналов и воздействий (ПФССВ), подсистему коммутации стимулирующих и контролируемых сигналов (ПКСКС), подсистему измерения контролируемых сигналов (ПИКС), устройства отображения результатов контроля (УОРК), устройства регистрации результатов контроля (УРРК) и пульт управления (ПУ).

Наиболее перспективен агрегативный метод технической реализации АСК АО на базе унифицированных средств, выпускаемых промышленностью. Этот метод позволяет при сохранении централизованного принципа построения средства контроля, заданной основной структуре и выбранных способах ее технической реализации комплектовать систему из совокупности типовых устройств в ва-

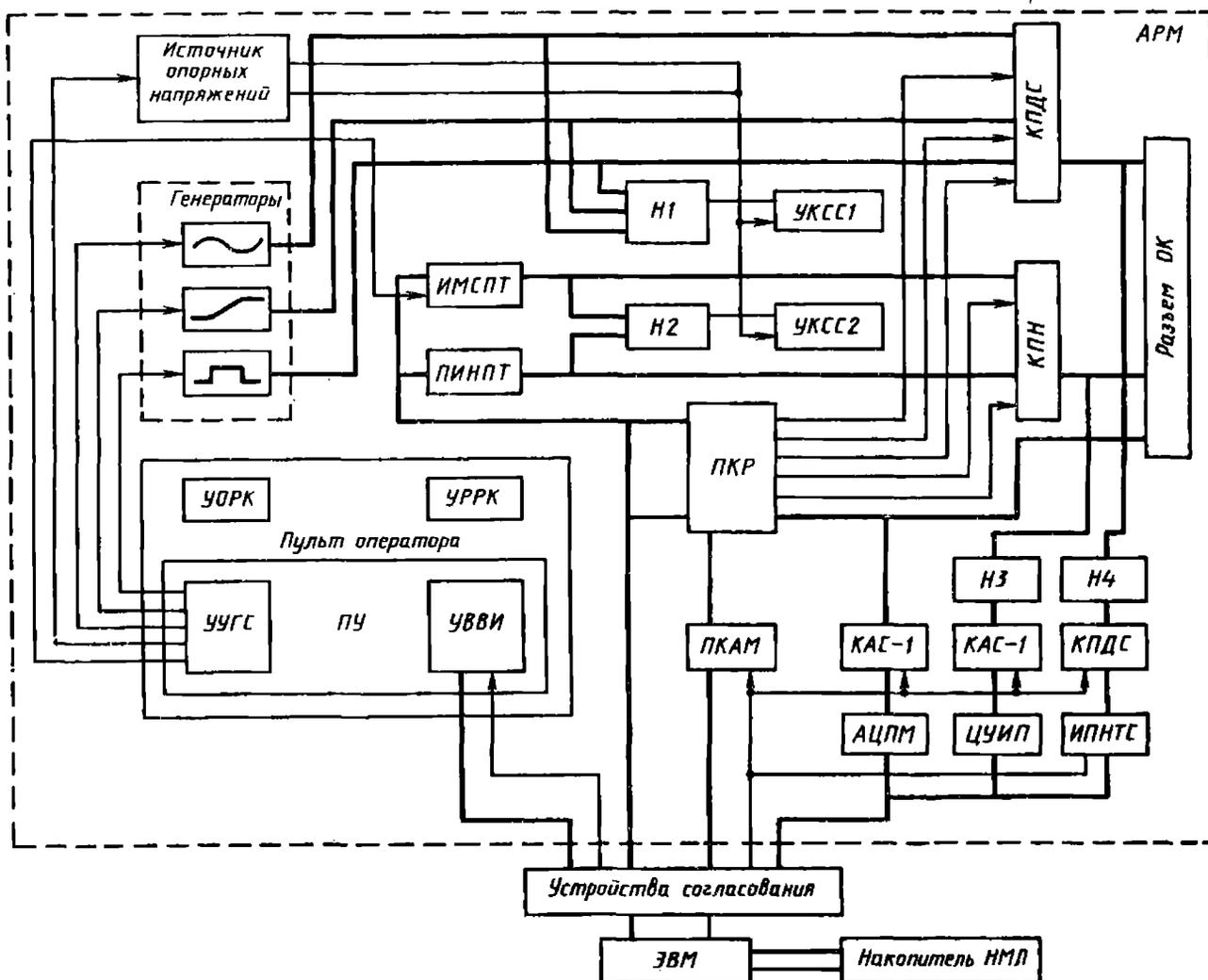


Рис. 12. Блок-схема АРМ контроля электронных блоков автоматики

висимости от объема работ по контролю оборудования.

Автоматизированные рабочие места (АРМ) контроля блоков для всех специализированных участков имеют идентичную структуру и технически реализуются по практически аналогичной схеме.

На рис. 12 приведена блок-схема АРМ контроля электронных блоков автоматики АСК АО, реализованного на базе мини-ЭВМ.

В состав АРМ контроля электронных блоков автоматики входят:

подсистема формирования стимулирующих сигналов воздействий (ПФССВ), включающая генераторы синусоидальных, линейно изменяющихся и импульсных сигналов, преобразователь код—аналог многоканальный (ПКАМ), программируемый источник напряжений постоянного тока (ПИНПТ), источник мощных сигналов

постоянного тока (ИМСПТ), нормализаторы (Н1, Н2), устройства контроля стимулирующих сигналов (УКСС);

подсистема коммутации стимулирующих и контролируемых сигналов (ПКСКС), включающая коммутаторы постоянного напряжения (КПН), коммутаторы аналоговых сигналов (КАС-1), коммутаторы переменных и дискретных сигналов (КПДС);

подсистема измерения контролируемых сигналов (ПИКС), включающая нормализаторы (Н3, Н4), аналогово-цифровой преобразователь многоканальный (АЦПМ), цифровой управляемый измерительный прибор (ЦУИП), измерители-преобразователи нетиповых сигналов (ИПНТС);

пульт оператора, включающий устройство управления генераторами стимулов (УУГС), устройство ввода-вывода информации (УВВИ), устройство отображения результатов контроля

(УОРК) и устройство регистрации результатов контроля (УРРК).

Изложенные принцип и схема технической реализации АРМ контроля электронных блоков выполнены в виде экспериментального образца, на базе которого разработано техническое задание на изготовление в промышленности систем контроля авиационного оборудования. Система функционирует в соответствии с разработанными алгоритмами и программным обеспечением. Ввод программ может быть осуществлен как с УВВИ пульта оператора, так и из ЭВМ, вызывающей программу по запросу с АРМ из накопителя на магнитных дисках (НМД). Текущие программы контроля хранятся в оперативном запоминающем устройстве ЭВМ. В программное обеспечение АСК АО входит как тестовый, так и непрерывный самоконтроль системы в процессе проверки оборудования.

При завершении контроля блока на регистрацию выводится следующая информация: дата проверки и ФИО проверяющего; бортовой номер самолета, с которого снят блок; наименование и заводской номер блока; налет блока к моменту проверки; количество произведенных ремонтов; причина проверки; номер контролируемого параметра; отклонение величины измеряемого параметра от номинала, выраженное двухзначным числом в процентах от допускаемого отклонения; знак отклонения параметра от номинального значения; оценка годности параметра в виде цифрового и буквенного признака; результирующая оценка годности блока.

Применение АСК АО позволяет ускорить процесс контроля блоков в среднем в 8—10 раз по отношению к существующей КПА; существенно увеличить точность измерений; исключить субъективные ошибки оператора; осуществить сбор, обработку и хранение статистических данных в виде, удобном для дальнейшего использования; снизить затраты на техническую эксплуатацию.

Целесообразность внедрения разрабатываемых средств контроля определяется их экономической эффективностью в процессе эксплуатации. Экономический эффект при переходе от

«ручных» средств контроля блоков к автоматизированным получается в результате повышения производительности средства контроля; сокращения установленного количества ЗИПа; повышения достоверности результатов контроля; сокращения выработки технического ресурса блоков при контроле; уменьшения производственных площадей.

#### 4. ПРИНЦИПЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИЕМНИКАМИ

Управляющее воздействие, поступающее на систему в процессе эксплуатации, осуществляется по программе эксплуатации либо на основании априорных сведений о системе, либо в виде позиционной стратегии управления по принципу обратной связи. Эта стратегия реализуется с помощью технических средств в соответствии со схемами на рис. 13.

Во время эксплуатации системы проводится непрерывный контроль вектора ее параметров  $x$ , который преобразуется с помощью аналого-цифрового преобразователя (АЦП) в цифровую форму (вектор  $X$ ) и поступает на ЭВМ. В соответствии со схемой, изображенной на рис. 13, а, в ЭВМ производится сравнение измеренных и требуемых значений параметров, имеющихся в ее памяти. При выходе измеренных параметров за пределы упреждающих допусков из ЭВМ поступает команда оператору либо на автоматизированный склад на выдачу запасного устройства, определяющего параметры системы, вышедшие за пределы норм. Далее в ручном или автоматизированном режиме производится замена устройства системы на запасное. В ряде случаев на ЭВМ может поступать сигнал управления  $X_{упр}$  требуемыми значениями параметров с заданным законом управления.

Наиболее явно позиционная стратегия управления реализуется по функциональной схеме, представленной на рис. 13, б, где ЭВМ включена в контур регулирования параметров эксплуатируемой системы и работает в реальном масштабе времени. Алгоритм

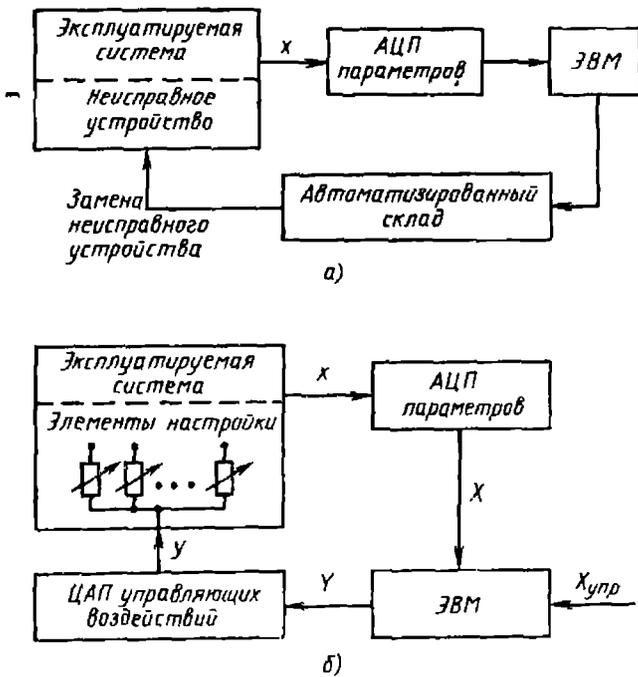


Рис. 13. Функциональная схема реализации позиционной стратегии управления:

а — ЭВМ выполняет функции контроля и оповещения; б — ЭВМ включена в контур регулирования

позиционной стратегии программируется в памяти ЭВМ, на выходе которой в соответствии с алгоритмом появляется вектор сигналов управляющих воздействий  $Y$  в цифровой форме. После преобразования этих сигналов цифроаналоговым преобразователем (ЦАП) в аналоговую форму сигналы управляющих воздействий  $y$  поступают на элементы настройки, имеющиеся в эксплуатируемой системе и определяющие ее контролируемые параметры  $x$ .

Успехи современной технологии в части обеспечения малого энергопотребления и габаритных размеров позволяют на стадиях проектирования и изготовления конструктивно включить в состав эксплуатируемой системы все блоки, а именно АЦП, ЦАП, ЭВМ в виде микроЭВМ или микроконтрол-

лера. Это, в отличие от применяемых ранее технических решений, обеспечивает стабилизацию параметров в процессе производства и при эксплуатации инвариантно к виду и времени действия дестабилизирующих факторов.

Однако полная реализация позиционной стратегии управления всеми параметрами по схеме, изображенной на рис. 13, б, со встроенными в систему блоками нецелесообразна, так как выделение элементов настройки для воздействия на все контролируемые параметры  $x$  эксплуатируемой системы приведет к излишнему увеличению ее конструктивной сложности и снижению надежности. Поэтому дальнейшим развитием позиционной стратегии управления может явиться принцип вложенности, заключающийся в том, что для части контролируемых параметров управляющие воздействия реализуются по схеме на рис. 13, б, а для остальных — по схеме на рис. 13, а, где внутри эксплуатируемой системы вложена часть управляющих воздействий. Принцип вложенности позволяет при решении задач ремонтпригодности снизить количество запасных элементов и перейти к комплексному решению вопросов эксплуатации и ремонта с позиций оптимального распределения выделенных для этого конструктивных, энергетических и стоимостных ресурсов.

Проиллюстрируем принципы применения позиционной стратегии управления при эксплуатации радиосистем с включением ЭВМ в замкнутый контур регулирования на примерах синтезатора частоты телевизионного приемника и радиоприемника аналогового сигнала. На рис. 14 представлена функциональная схема цифрового синтезатора частоты телевизионного приемника, являющаяся частным случаем

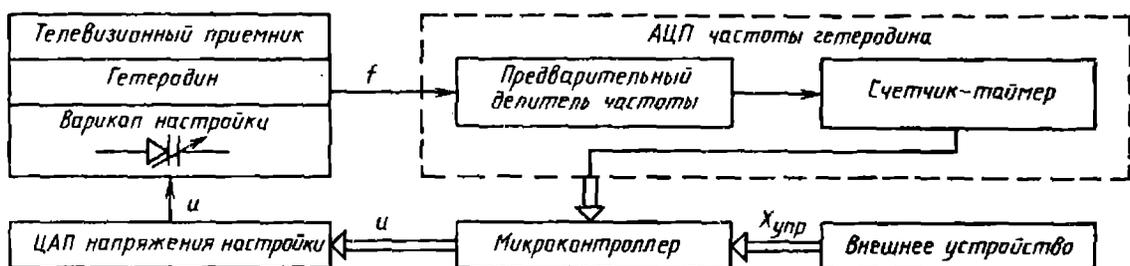


Рис. 14. Функциональная схема цифрового синтезатора частоты

общей функциональной схемы реализации позиционной стратегии управления, изображенной на рис. 13, б. В этом случае параметром устройства является частота гетеродина  $f$ , управляющим воздействием — напряжение настройки  $u$ , а элементом настройки — варикап, т. е. конденсатор, емкость которого зависит от напряжения настройки. Сигнал управления  $X_{упр}$  с заданным законом изменения частоты настройки или номера канала телевизионного приемника вырабатывается внешним устройством, в частности, клавиатурой управления, либо ЭВМ, управляющей всем комплексом, в который входит телевизионный приемник. АЦП частоты гетеродина содержит специальное устройство счетчик-таймер, которое измеряет частоту гетеродина, считая количество импульсов сигнала, поступающих на его вход за заданный промежуток времени. Для снижения частоты гетеродина до значений, при которых может работать счетчик-таймер, служит предварительный делитель частоты. Измеренное таким образом текущее значение частоты гетеродина в цифровом виде поступает в микроконтроллер, где оно сравнивается с требуемым значением, заданным сигналом управления  $X_{упр}$ . Результат сравнения (ошибка) обрабатывается микроконтроллером по алгоритму, определяемому выбранным типом системы авторегулирования (статическая, астатическая) и передается в ЦАП напряжения настройки в виде двоичного числа. Управляющее воздействие, поступающее с выхода ЦАП на варикап настройки, изменяется таким образом, чтобы частота гетеродина соответствовала принимаемой станции телевизионного вещания.

На рис. 15 приведена принципиальная электрическая схема наиболее сложных узлов цифрового синтезатора частоты — микроконтроллера и АЦП. Основой системы является однокристалльная микроЭВМ К1816ВЕ35, включающая все основные узлы ЭВМ, кроме программной памяти. Последняя выполнена на отдельной микросхеме (PROM), которая обменивается информацией по основной шине данных (ДВ0—ДВ7) через вспомогательные универсальные регистры (RG). По этой

же шине происходит обмен информацией с АЦП, выполненном на универсальном программируемом счетчике-таймере (УСЧ) К580ВИ53. Сигнал гетеродина поступает сначала на предварительный делитель (ПрСЧ), выполненный на интегральной схеме (ИС) КФ1036ПЦ1, где частота гетеродина снижается в 64 раза, а затем уже на программируемый счетчик УСЧ. Управление поиском по заранее заданному закону  $X_{упр}$  и настройка на станцию может осуществляться вручную от клавиатуры, сигналы которой через коммутатор КМ поступают на входы микроконтроллера (P20—P27, P10, P11). Сигнал автоматического управления  $X_{упр}$  от внешней управляющей ЭВМ может поступать через мультиплексор (МХ) на вход Т0 микроконтроллера К1816ВЕ35. Тактовый генератор расположен внутри микроконтроллера. Для стабилизации частоты используется кварцевый резонатор, подключаемый к выводам XTAL1 и XTAL2.

На рис. 16 изображена сложная радиосистема, а именно функциональная схема радиоприемника с синтезатором частоты и настройкой избирательных цепей по параметрам принимаемого сигнала на основе одного микроконтроллера. Это адаптивная система, которая производит настройку параметров по непосредственным условиям приема. Так как работа микропроцессорной системы и особенно ее высокочастотной части приводит к появлению значительного уровня помех на частотах приема, то должны быть приняты меры по электромагнитной развязке. Радиоприемник выполняется в виде двух отдельных блоков — приемника сигнала и микропроцессорного устройства, которые должны быть экранированы друг от друга. Электрическая связь между блоками осуществляется только с помощью низкочастотных аналоговых сигналов настройки и сигналов переключения поддиапазонов.

Структурно блок радиоприемника состоит из стандартных узлов: усилителя радиочастоты (УРЧ), смесителя, гетеродина, фильтра сосредоточенной селекции (ФСС), усилителя промежуточной частоты (УПЧ) и детектора. В отличие от стандартного исполнения

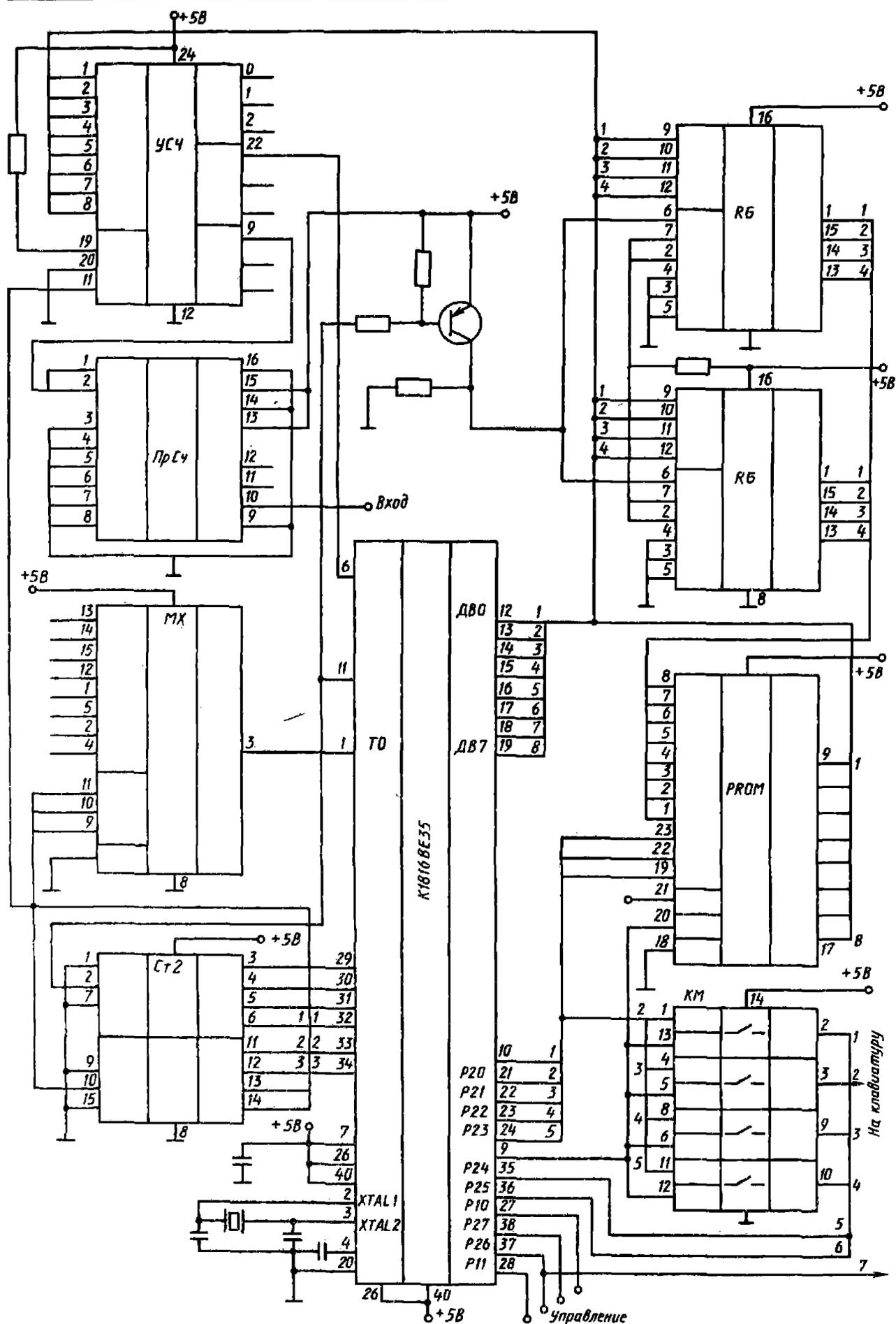


Рис. 15. Принципиальная электрическая схема узлов цифрового синтезатора частоты:

1-40 — номера выводов ИС

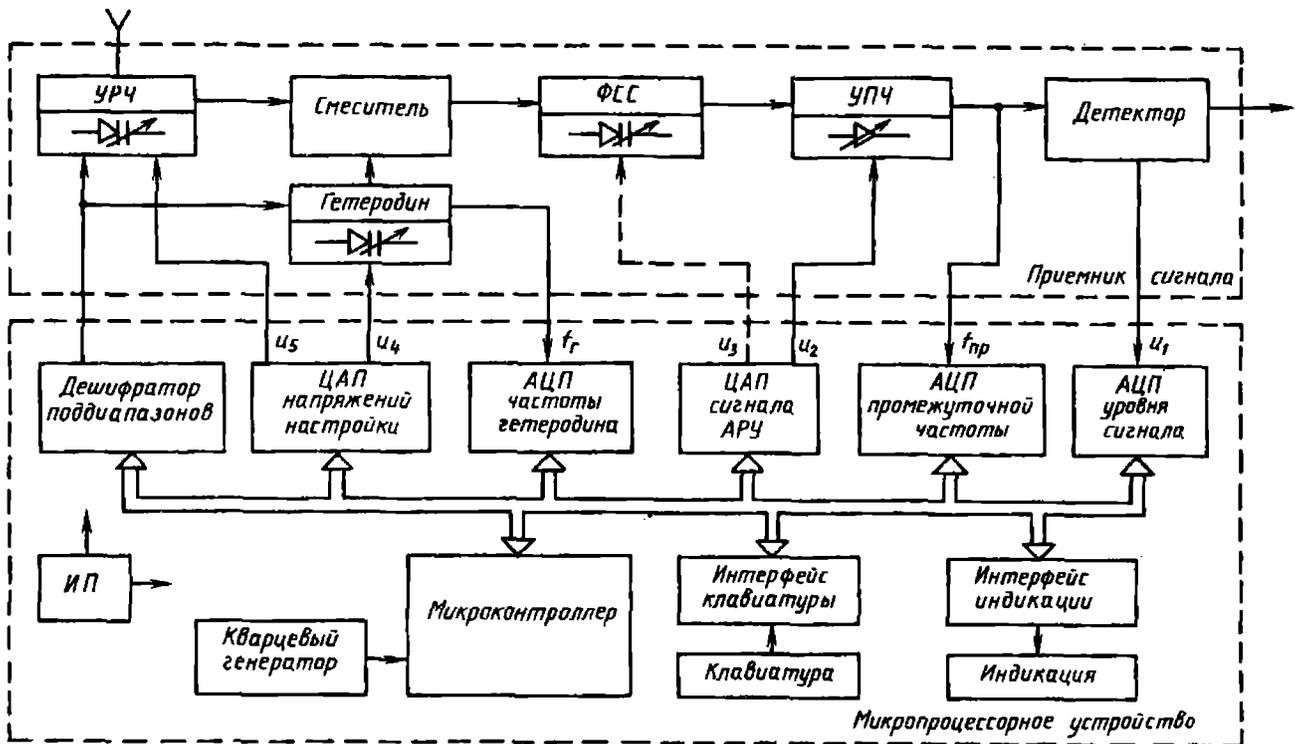


Рис. 16. Функциональная схема радиоприемника с автоматической настройкой

данные узлы имеют свои особенности обеспечения автоматической регулировки усиления и избирательных характеристик, для чего в качестве элементов настройки в узлах (УРЧ, гетеродин, ФСС) использованы варикапы, а в УПЧ — электронный регулятор, позволяющий изменять сигнал на выходе УПЧ в зависимости от сигнала настройки. Компонентами вектора контролируемых параметров  $x = (u_1, f_{\text{Пр}}, f_{\text{Г}})$  являются напряжение сигнала на выходе детектора, промежуточная частота  $f_{\text{Пр}}$ , частота гетеродина  $f_{\text{Г}}$ . Компонентами вектора управляющих воздействий  $y = (u_2, u_3, u_4, u_5)$  являются напряжения настройки, поступающие на элементы настройки соответствующих блоков. Микропроцессорное устройство, как и в общей схеме (см. рис. 14), содержит АЦП и ЦАП контроля параметров и выдачи управляющих воздействий, собственно микроконтроллер, а также источник питания (ИП) и программно-аппаратные средства — интерфейс клавиатуры и индикации, предназначенные для сопряжения микроконтроллера с внешними устройствами. Алгоритм работы микроконтроллера позволяет во время эксплуатации реализовать режим автоматического поиска и выбора требу-

мой станции, обеспечить в режиме авторегулирования высокую стабильность частоты гетеродина, реализовать адаптивный режим работы радиоприемника, при котором настройка избирательных цепей зависит от частоты и уровня мешающего сигнала и меняется автоматически, обеспечивая максимальное отношение сигнал—шум.

## 5. ПЕРСПЕКТИВНАЯ СИСТЕМА АВТОМАТИЧЕСКОЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ И РЕМОНТА ТЕХНИКИ

Эксплуатация и ремонт действующего и особенно «устаревшего» оборудования (которое своевременно не было заменено) обходятся часто во много раз дороже стоимости нового оборудования.

Реализация автоматической эксплуатации сложных технических систем позволит в определенной степени решить и проблему лучшего использования основных производственных фондов и оптимизации их воспроизводства.

Современный уровень фундаментальных исследований в области естествознания, системотехники, вычислительной техники и информатики позволяет

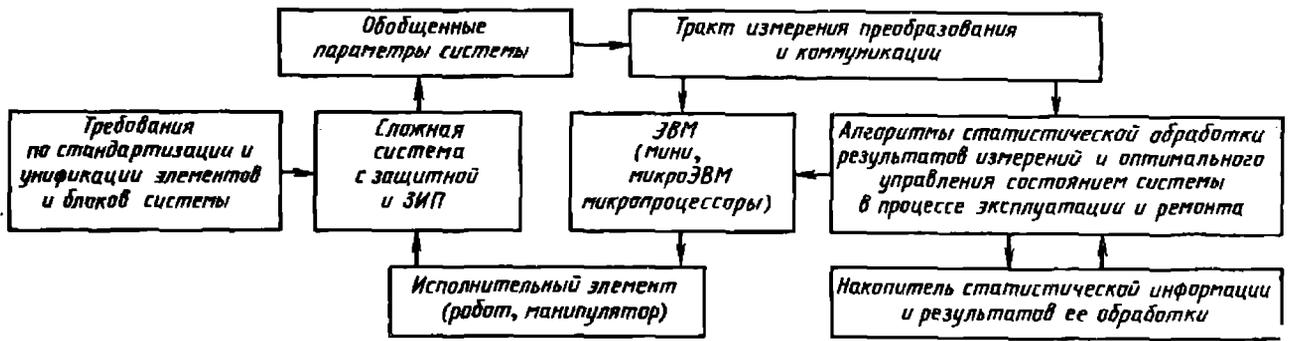


Рис. 17. Схема автоматической эксплуатации сложной системы

описать в принципе практически реализуемую обобщенную схему автоматической эксплуатации сложных технических систем различного назначения. Приведенная схема *автоматической эксплуатации и ремонта (АЭР)* (рис. 17) называется обобщенной, так как в нее укладываются все существующие схемы эксплуатации и ремонта сложных технических систем и комплексов.

Обобщенные параметры выбираются таким образом, чтобы обеспечить заданную глубину контроля и диагностики и заданную степень достоверности.

Средства контроля и диагностирования, включающие в себя тракт измерения, преобразования, коммутации и ЭВМ (скорее всего микропроцессоры), должны встраиваться в контролируемую систему, а измерительный тракт должен отвечать современным метрологическим требованиям. ЭВМ может быть в отдельных случаях полностью ориентирована на работу в системе АЭР, а в ряде случаев она может выполнять еще и другие задачи.

Контроль обобщенных параметров (электрический, неразрушающий и любой другой) сопровождается их количественным измерением. Например, в системах электроники и автоматики наибольшее распространение получил кон-

троль энергетических (электрических) параметров, а в механических системах — контроль состояния машин в наиболее нагруженных местах, подверженных воздействию высоких напряжений, вибраций, коррозии, износа.

Алгоритмы статистической обработки результатов измерений представлены на рис. 18.

Часто при описании изменения состояний технической системы или составляющих ее частей рассматривается это изменение с позиции случайных процессов. Однако это не всегда реально. Лучше иметь согласованную систему моделей оптимизации для решения задач эксплуатации сложных систем. При этом можно опереться на следующие математические модели: стохастической аппроксимации; факторного анализа; оптимизации с помощью имитационного моделирования; численных методов оптимизации; асимптотических методов малого параметра, ориентированных на расчет и оптимизацию высоконадежных систем; оптимального управления процессами в условиях неопределенности; адаптивного управления.

Классификация этих моделей и области их технических приложений (типы систем) применительно к оптимальному управлению состоянием системы в процессе эксплуатации и ре-

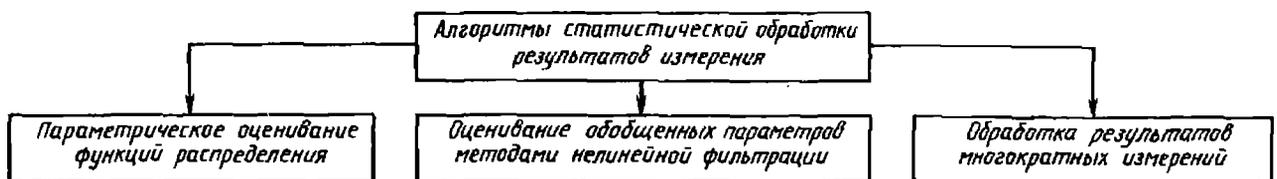


Рис. 18. Алгоритмы статистической обработки результатов измерений

монта даны на рис. 19. По указанным алгоритмам планируется работа ЭВМ.

В процессе накопления опыта использования систем автоматической эксплуатации и ремонта техники, сбора и обработки больших и постоянно пополняемых массивов статистические данные об изменении обобщенных параметров оборудования во времени будут меняться и создаваться вновь математические схемы оптимального управления случайными процессами. Это потребует более тесного сотрудничества математиков и инженеров. На рис. 19 представлены практически все известные сейчас математические модели (схемы) управляемых процессов. Во всех этих схемах даны рецепты отыскания оптимальных и единственных управлений по критериям, связанным с надежностью и готовностью современных сложных технических систем различного назначения. Как правило, вне эксплуатируемой системы (см. рис. 18) располагается накопитель статистической информации и результатов ее обработки (например, на магнитных дисках). По мере поступления новых данных измерений происходит объединение этой информации и информации с накопителя с последующей обработкой суммарной накопленной информации.

В результате решения оптимальных задач управления текущим состоянием системы (работоспособным или нера-

ботоспособным) ЭВМ выдает однозначные решения программируемому исполнительному элементу (в автоматической системе это робот, в автоматизированной — манипулятор и оператор, в традиционной, существующей в настоящее время, — оператор) о предупредительной замене (регулировке) того или иного элемента, блока или о замене также конкретного отказавшего элемента или блока.

Сложная система должна быть сконструирована с учетом современных требований к стандартизации и унификации ее элементов и блоков, что позволит иметь однотипные блоки или группы однотипных блоков, составляющих систему. Это позволяет при наличии в системе специально расположенных запасных блоков (ЗИПа) автоматически с помощью исполнительного элемента восстанавливать (в основном путем замен) систему, а при отсутствии ЗИПа после отказа какого-либо блока ставить на его место другой однотипный блок, выполняющий в системе менее важные функции, чем отказавший блок. Такая манипуляция должна быть предусмотрена при конструировании современных сложных технических систем.

Вся работа автоматической системы эксплуатации и ремонта нацелена на наивысшие конечные результаты — получение высокого уровня надежности сложной системы при наименьших

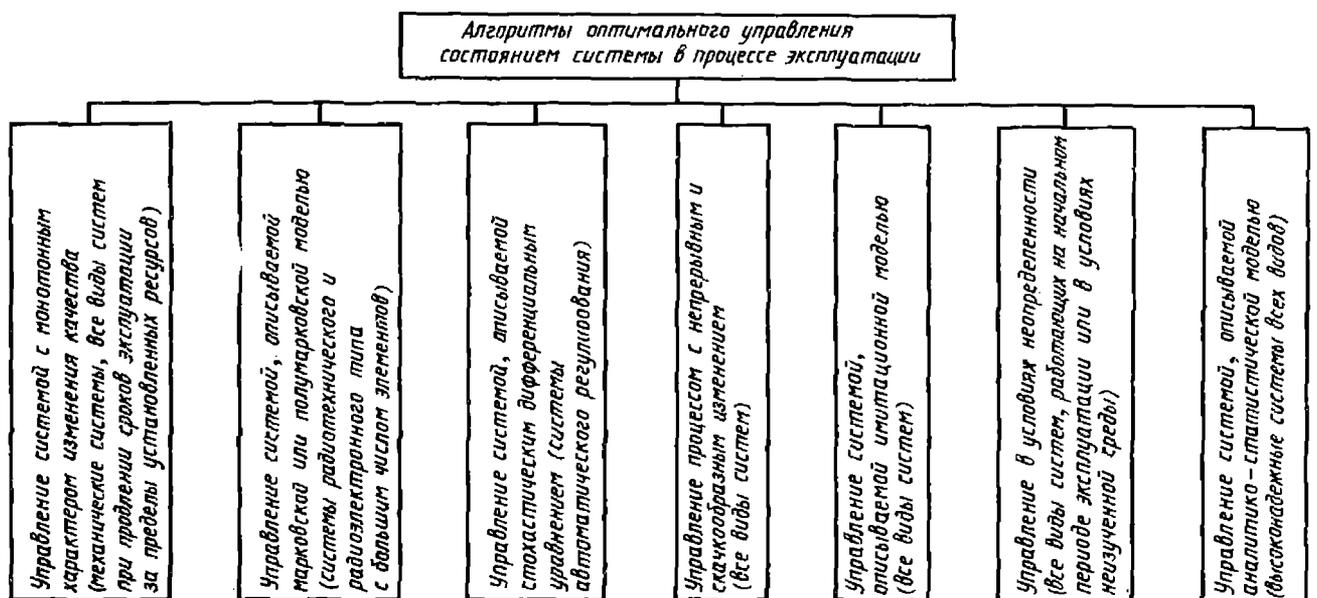


Рис. 19. Классификация моделей управления состоянием системы в процессе эксплуатации

в среднем эксплуатационных затратах или на получение максимальной ее надежности при фиксированных средних эксплуатационных затратах.

Выбор количества запасных блоков осуществляется на основании тех же общих критериев — надежности (и бесперебойности) работы системы и средних эксплуатационных затрат оптимально по алгоритмам, изложенным в гл. 8. Эти алгоритмы также являются алгоритмами математического обеспечения ЭВМ, и получаемые с их помощью результаты (оптимальный объем ЗИПа) могут зависеть от объема измеряемой и накопленной по ранее проведенным измерениям информации.

Методы и средства обеспечения и поддержания высокой надежности сложной системы, представленные на рис. 17—19, обеспечивают безопасность, удобства эксплуатации и продление срока ее службы. Они должны быть реализованы с учетом эргономических и экологических факторов на основе результатов глубоких исследований системы человек—машина—среда.

Естественно, что предпосылки к нарушению правил эксплуатации в системе автоматической эксплуатации и ремонта практически исключаются, а временные (и другие) затраты, связанные с внезапными, постепенными отказами; текущим, средним и капитальным ремонтами, будут резко уменьшены (по сравнению с существующими затратами для многих массовых видов машин и оборудования) и доведены до предельного минимального значения.

В накопителе информации (рис. 17) должна содержаться вся имеющаяся априорная информация о надежности и ремонтнопригодности нужных для анализа элементов, блоков системы.

Информация с накопителей в системах АЭР по однотипным изделиям, работающим в примерно одинаковых внешних условиях, должна поступать в единые межотраслевые или союзные центры и там обобщаться и выдаваться потребителю в нужном виде.

Сами средства измерения, преобразования, коммутации, вычислительной техники, исполнительный элемент и система математического обеспечения

должны обладать очень высокой надежностью (по сравнению с надежностью эксплуатируемой сложной системы) и элементами самоконтроля по тем же (или частично по тем же) алгоритмам, по которым осуществляется автоматическая эксплуатация сложной системы.

Внедрение систем АЭР позволит с единых позиций подойти к техническому обслуживанию и ремонту сложных систем в процессе их длительной эксплуатации и расширить практику ремонта машин и оборудования, помимо ремонтных предприятий, непосредственно в эксплуатирующих подразделениях, возможно и с участием заводов-изготовителей.

Отдельные практические апробации элементов систем АЭР и теоретические (методы моделирования) исследования предполагаемой эффективности систем АЭР по отдельным обобщенным параметрам показали значительное количественное ожидаемое повышение надежности и готовности сложных технических систем.

Накопленный в нашей стране опыт показывает, что реализация оптимизационных задач позволяет в народном хозяйстве экономить до 10—15 % затрат.

Реализация систем АЭР позволила бы в оперативном режиме осуществлять проверку и корректировку используемых в системах АЭР технических средств и математических моделей и одновременно получать экономический эффект непосредственно в процессе внедрения.

Можно указать на следующие этапы эксплуатации и ремонта техники, на которых применение АЭР весьма эффективно: диагностика; слежение за процессом деградации (разрегулировка, износа) крупного изделия ответственного назначения; расчет момента остановки и вывод системы на техническое обслуживание; сбор статистики отказов; распределение ресурсов (многоуровневая система снабжения ЗИП).

Хотя в системах АЭР участие человека-оператора сведено к минимуму, оно тем не менее становится все более ответственным.

В контуре управления (см. рис. 17) возможно и применение персональной

ЭВМ. В этом случае роль исполнительного элемента выполняет персональная ЭВМ-оператор. Выход ЭВМ системы и вход персональной ЭВМ-оператора должны быть сопряжены.

Практика показывает, что по мере усложнения машин, оборудования, систем управления все более отчетливо выявляется недостаточность учета человеческого фактора, особенно в сфере эксплуатации и ремонта. Создание

систем АЭР и в этом отношении является весьма перспективным.

Как правило, одними из основных функций работ человека в процессе эксплуатации сложных технических систем являются работы по техническому обслуживанию. Создание систем АЭР позволит не только резко сократить объем этих работ, но и шире использовать интеллектуальные возможности человека.

## Список литературы

1. Андронов А. М. Алгоритм нахождения оптимальных стратегий в управляемых полумарковских процессах размножения и гибели//Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 5. С. 90—94.
2. Андронов А. М., Киселенко А. Н. Оценки и основанные на них алгоритмы для задачи о ранце с дополнительными ограничениями//Математические методы решения экономических задач. 1980. № 9. С. 16—23.
3. Андронов А. М., Надиев Д. С. О некоторых усовершенствованиях алгоритма Бузена для расчета замкнутых сетей массового обслуживания//Автоматика и вычислительная техника. 1984, № 4. С. 18—21.
4. Артемьев Ю. Н. Качество ремонта и надежность машин в сельском хозяйстве. М.: Колос, 1981. 239 с.
5. Арустамов М. А., Далакишвили А. Н., Семенычев А. В. Структурно-ориентированные методы определения показателя эффективности функционирования сложных технических систем//Надежность и контроль качества. 1980. № 5. С. 123—134.
6. Байхельт Ф., Франкин П. Надежность и техническое обслуживание. Математический подход. М.: Радио и связь, 1988. С. 213.
7. Барзилович Е. Ю. Модели технического обслуживания сложных систем. М.: Высшая школа, 1982. 232 с.
8. Барзилович Е. Ю., Воскобоев В. Ф. Эксплуатация авиационных систем по состоянию (элементы теории). М.: Транспорт, 1981. 198 с.
9. Барзилович Е. Ю., Савенков М. В. Статистические методы оценки состояния авиационной техники. М.: Транспорт, 1987. 240 с.
10. Башарин Г. П., Толмачев А. Л. Теория сетей массового обслуживания и ее приложения к анализу информационно-вычислительных систем//Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. Т. 21. М.: ВИНТИ, 1983. С. 3—119.
11. Белоконь Р. Н. Вопросы оценки достоверности контроля качества изделий. Киев: Об-во «Знание» УССР, 1978. 36 с.
12. Беляев Ю. К. Статистические методы обработки неполных данных о надежности изделий. М.: Знание, 1987. С. 3—55.
13. Беляев Ю. К., Чепурин Е. В. Основы математической статистики, М.: МГУ, 1983. 147 с.
14. Бертсекас Д., Шрив С. Стохастическое оптимальное управление. М.: Наука, 1985. 280 с.
15. Владимиров Н. И., Красников Л. Ф., Коняев Е. А. Наземная вычислительная техника как современное средство обеспечения безопасности полетов//Итоги науки и техники. Сер. Воздушный транспорт. Т. 10. М.: ВИНТИ, 1982. С. 80—101.
16. Волков Л. И. Управление эксплуатацией летательных комплексов. М.: Высшая школа, 1987. 400 с.
17. Вопросы математической теории надежности/Е. Ю. Барзилович, Ю. К. Беляев, В. А. Каштанов и др. М.: Радио и связь, 1983. 267 с.
18. Воскобоев В. Ф., Кузьмин А. Б. Метод выбора обобщенных параметров при диагностировании состояния технических систем//Основные вопросы теории и практики надежности. Минск: Наука и техника, 1982. С. 244—255.
19. Воскобоев В. Ф. Оценка ресурсов при эксплуатации технических

систем по состоянию//Межвузовский сб. тр. № 43. МЭИ, 1984. С. 32—40.

20. Гвандовкин И. Ф., Стояненко О. М. Справочник по ремонту летательных аппаратов. М.: Транспорт, 1977. 310 с.

21. Гихман И. И., Скороход А. В. Управляемые случайные процессы. Киев: Наукова думка, 1977. 252 с.

22. Голодников А. И., Стойкова Л. С. Определение оптимального периода предупредительной замены на основе информации о математическом ожидании и дисперсии времени безотказной работы системы//Кибернетика АН УССР, 1978. № 3. 24—27 с.

23. Диаконис П., Ефрон Б. Статистические методы с интенсивным использованием ЭВМ//В мире науки. М.: Мир, 1983. № 7. С. 60—73.

24. Замятин А. А. Статистические выводы о надежности восстанавливаемой системы с кратными отказами//Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1986. № 3. С. 109—114.

25. Ивницкий В. А. Сети массового обслуживания и их применение в ЭВМ//Зарубежная радиоэлектроника. 1977. № 7. С. 33—90.

26. Ивченко Г. И., Каштанов В. А., Коваленко И. Н. Теория массового обслуживания. М.: Высшая школа, 1982. 256 с.

27. Ицкович А. А., Смирнов И. Н. Обслуживание и ремонт авиационной техники по состоянию. М.: Транспорт, 1987. 272.

28. Каннингхем К., Кокс В. Методы обеспечения ремонтпригодности. М.; Сов. радио, 1978. 279 с.

29. Карташов Г. Д. Принципы расходования ресурса и их использование для оценки надежности. М.: Знание, 1984. 254 с.

30. Каштанов В. А. Исследование стратегии технического обслуживания при ограничении на моменты распределения времени безотказной работы//Основные вопросы теории и практики надежности. М.: Советское радио, 1980. С. 281.

31. Каштанов В. А. Оптимальные задачи технического обслуживания. М.: Знание, 1981. с. 71.

32. Каштанов В. А. Полумарковские модели процесса технического

обслуживания. М.: Знание. 1987. С. 94.

33. Кендель В. Г., Кузнецов А. М., Новиков В. С. Оптимальный последовательный алгоритм контроля работоспособности//Радиотехническое оборудование аэропортов и воздушных трасс гражданской авиации. Вып. 1. Киев: КИИГА, 1977. С. 63—76.

34. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1979. 432 с.

35. Коваленко И. Н. Анализ редких событий при оценке эффективности и надежности систем. М.: Сов. радио, 1980. 208 с.

36. Коваленко И. Н., Кузнецов Н. Ю., Шуренков В. М. Случайные процессы: Справочник. Киев: Наукова думка, 1983. 368 с.

37. Кокс Д. Р., Смит В. Л. Теория восстановления. М.: Сов. радио, 1967. 300 с.

38. Копнов В. А., Тимашев С. А., Штерензон В. А. Управление ресурсом механических систем с мониторингом//Шестой Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Ташкент: ФАН, 1986. С. 366.

39. Королюк В. С., Турбин А. Ф. Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем. Киев: Наукова думка, 1982. С. 316.

40. Кривошейкин А. В., Смирнов Б. Я. Анализ работы синтезатора частоты ТВ приемника с микроЭВМ в контуре регулирования//Радиотехника. 1984. № 1. 3—7 с.

41. Кудрицкий В. Д. Прогнозирующий контроль радиоэлектронных устройств. Киев: Техника, 1982. 168 с.

42. Майн Х., Осаки С. Марковские процессы принятия решений. М.: Наука, 1977. 175 с.

43. Математические методы в теории надежности/Б. В. Гнеденко, Ю. К. Беляев, А. Д. Соловьев. М.: Наука, 1965. 524 с.

44. Модин А. А. Основы разработки и развития АСУ. М.: Наука, 1981. 280 с.

45. Моисеев С. В. Экономические критерии выбора радиоэлектронных комплексов самолетов. М.: Машиностроение, 1984. 224 с.

46. Муртаф Б. Современное линейное программирование. М.: Мир, 1984. 224 с.

47. Надежность и эффективность в технике: Справочник: В 10 т. Т. 2: Математические методы в теории надежности и эффективности/Под ред. Б. В. Гнеденко. М.: Машиностроение, 1987. 280 с.
48. Надежность и эффективность в технике: Справочник: В 10 т. Т. 9: Техническая диагностика/Под ред. В. В. Клюева, П. П. Пархоменко. М.: Машиностроение, 1987. 350 с.
49. Надежность технических систем: Справочник/Ю. К. Беляев, В. А. Богатырев, В. В. Болотин и др.; Под ред. И. А. Ушакова. М.: Радио и связь, 1985. 608 с.
50. Назин А. Е., Скрипник В. М. Оценка надежности технических систем по цензурированным выборкам. Минск: Наука и техника, 1981. 283 с.
51. Никитин В. И., Кузнецов Ю. И. Об оптимальном правиле управления состоянием сложных систем с функциональной избыточностью//Совершенствование методов технического обслуживания и ремонта авиационной техники. М.: ГОСНИИГА, 1980. № 191. С. 13—17.
52. Никитин В. И. Моделирование процессов оптимального управления комплексами с избыточностью по состоянию//Основные вопросы теории и практики надежности. М.: Наука и техника, 1982. С. 22—35.
53. Николаев В. И., Брук В. М. Системотехника: методы и приложения. М.: Машиностроение, 1985. 197 с.
54. Павловский Н. И., Петров К. В. Ремонт вспомогательных силовых установок самолетов. М.: Транспорт, 1981. 253 с.
55. Пархоменко Н. Н., Согомян Е. С. Основы технической диагностики (Оптимизация алгоритмов диагностирования, аппаратурные средства). М.: Энергия, 1981. 512 с.
56. Пашковский Г. С. Задачи оптимального обнаружения и поиска отказов в РЭА. М.: Радио и связь, 1981. 288 с.
57. Прессман Э. Л., Сонин И. Н. Последовательное управление по неполным данным. Байесовский подход. М.: Наука, 1982. 256 с.
58. Проектирование внешних средств автоматизированного контроля радиоэлектронного оборудования/Н. Н. Пономарев, И. С. Фрумкин, И. С. Гусинский и др.; Под ред. Н. Н. Пономарева. М.: Радио и связь, 1984. С. 350.
59. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 412 с.
60. Розенвассер Е. Н., Юсупов Р. М. Чувствительность систем управления. М.: Наука, 1981. 464 с.
61. Садыхов Г. С. Показатели остаточной долговечности и их оценки в задачах продления сроков эксплуатации технических объектов. М.: «Знание», 1986. С. 3—55.
62. Сильвестров Д. С. Полумарковские процессы с дискретным множеством состояний. М.: Сов. радио, 1980. 272 с.
63. Степанов Э. Н., Степанов В. Н. Выбор комплекса ЗИПа при оптимальных заменах//Основные вопросы теории и практики надежности. М.: Сов. радио, 1980. С. 405.
64. Тимашев С. А., Копнов В. А. Управление надежностью механической системы по нагрузке в виде процесса рождения и гибели. — В кн.: надежность и прочность несовершенных механических систем. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. С. 3—10.
65. Тимашев С. А. Надежность больших механических систем. М.: Наука, 1982. 184 с.
66. Тимашев С. А. Надежность механических систем, снабженных мониторингом//Расчет и управление надежностью больших механических систем. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1986. С. 51—54.
67. Хазен Э. М. Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. М.: Сов. радио, 1968. 256 с.
68. Ховард Р. Динамическое программирование и марковские процессы. М.: Сов. радио, 1964. 192 с.
69. Andersen P. K., Borgan O. Counting process models for life history data. A review Scand. J. Statist. V. 21, p. 97—158.
70. Bergman V. Optimal Replacement with semi-Markov Shock Mo-

dels. *J. Applied Probability*, 10, 1984. P. 431—451.

71. **BMDP Statistical Software**, University California Press, Berkeley 1983, p. 728.

72. **Bruell S. C., Balbo G.** Computational Algorithm for Closed Queuing Networks. — New York: North-Holland, 1980, p. 190.

73. **Cinlar E., Jacod J.** Representation of Semimartingale Markov Processes in Terms of Wiener Processes and Poisson Random Measures. In: Cinlar E et al. (eds) Seminar on stochastic processes. Birk häuser, Boston, 1981, p. 159—242.

74. **Press E. V.** Optimizing costs of age replacement policies. *Stochast. Proc. and Appl.*, 1986, N 2, p. 195—212.

75. **Gill R. D.** Censoring and stochastic integrals. — *Math. centre tracts*, 124, Amsterdam, 1980, p. 403—411.

76. **Gottlieb G.** Optimal Replacement for Shock Models with General Failure Rate. *Operat. Res.*, 30, 1982, p. 82—92.

77. **Gottlieb G., Zevikson B.** Optimal Replacement for selfrepairing Shock Models with General Failure Rate. *J Applied Probability*, 21, 1984, p. 108—119.

78. **Jensen U.** Optimal Replacement with Non—Monotone Failure Rates. *OR Spektrum*, 1984, Band 6, Heft 1, p. 53—57.

79. **Kalbfleisch J. K., Prentis R. E.** The statistical analysis of failure time data. — N. Y., J. Wiley, 1980, p. 191—198.

80. **Kawal H.** An Optimal Ordering and Replacement Policy of a Markovian Degradation System under Complete Observation. Part. 1. *Journal*

of Operation Research Society of Japan. Vol. 26, No 4, 1983, p. 279—290.

81. **Koul H. L., Susarla V.** Testing for new better than used in expectation with incomplete data. *J. Amer. Assoc. Statist.*, 1980, 75, N 372, p. 952—956.

82. **Lawless J. F.** Statistical Models and Methods for lifetime data. — N. Y.: Wiley, 1982, p. 311—314.

83. **Mykytyn Stephan W.** Santer Thomas J. Maximum likelihood estimation of the survival function based on censored data under hasard rate assumptions. *Commun. Statist.*, 1981, A-10, N-14, 13—69—1387.

84. **Nelson W.** Theory of applications of hasard plotting for censored failure data. — *Technometrics*, 1972, v. 14, p. 945—966.

85. **Proschan F.** Optimum system supply. *Nav. Res. Log. Quart.*, 1960, N 4, v. 7, p. 117.

86. **Schweitzer P. Y.** Iterative Solution of the Functional Equations of Undiscounted Marcov Renewal Programming. *J of Math. Anal. and Appl.*, 1971, N 34, p. 495—501.

87. **Shima E.** Optimal Inspection Policy for a Protective Device. *Reliability Engineering*, 7, 1984, p. 123—132.

88. **Shunji Osaki, Hisashi Mine.** Programming Algorithms for Semi—Markovian Decision Processes. *Y. of Math. Anal. Appl.*, 1968, N 22, p. 68—77.

89. **Taylor H. M.** Optimal Replacement under Additive Pamage and other Failure Models. *Naval Res. Logist. Quart.*, 22, 1975, p. 1—18.

90. **Zuckerman D.** Optimal Stopping in a semi—Markov Model. *J. Applied Probability*, 15, 1978, p. 629—634.

# Предметный указатель

## А

- Агрегация порядковых таблиц 31  
Алгоритм итерационный Уайта для цепей Маркова 192  
— Швейцера для полумарковских процессов 193  
Алгоритм контроля оптимальный мажоритарный 228, 229  
— последовательный 229, 230  
Алгоритм контроля оптимальный последовательный 226 — Области принятия решений 226, 227  
— работоспособности изделий — Классификация 224, 225  
Алгоритм нахождения оптимальных управлений — Потребное время для нахождения оптимальной стратегии 196, 197 — Потребный объем информации 195 — Точность вычислений 195  
— общий нахождения оптимальных стратегий — Его обоснование 89 — Использование теории оптимальных правил остановки 90, 91 — Метод решения 88 — Описание 90  
Алгоритм определения периодичности плановой предупредительной профилактики, для которой достигается максимум средней удельной прибыли 133, 134  
— максимум функционала  $k_T$  131, 132  
— минимум средних удельных потерь  $C$  132, 133  
Алгоритм оценки числа запасных элементов 168, 169  
— перераспределения «весов» 32 — Результаты расчета по нему 33  
— полумарковских процессов — Метод решения 197—199  
— получения изотонной оценки максимального правдоподобия 49  
— расчета параметров детерминированного сетевого графика 260, 261  
Аппарат обслуживания 174

## Б

- Базы данных — Краткая характеристика накладываемых ограничений 22  
— Необходимость использования непараметрического подхода 21, 22

## В

- Вероятность выполнения задачи 112, 132, 134—138  
— безотказной работы 232  
— обнаружения отказа 232  
Выборка нецензурированная 17  
— цензурированная 17

## Г

- График сетевой — Основные понятия 259 — Элементы 259  
— детерминированный — Алгоритм расчета его параметров 260  
— стохастический 260

## Д

- Данные типа доза—эффект 47—51  
Дисциплины обслуживания — Управление ими 186  
— приоритетные 186  
Документация нормативно-техническая 256  
Допуск гарантийный 222  
— оптимальный управляющий 74  
Достоверность контроля 221  
Доход средний от эксплуатации системы в единицу времени 86  
— удельный 87 — Расчет 99, 104

## З

- Задача оптимизации при неполной информации 116—119  
Задачи АСУ — Типы 273, 274  
— определения периодичности профилактических работ — Использование оценок 42, 43  
Закон распределения нормальный 222  
Замена ТЭЗ регулировкой 167  
Затраты средние удельные 12, 124, 125, 128

## И

- Интенсивность отказов — Статическое определение 13  
Интервалы асимптотические доверительные 36—39  
Испытания на ремонтпригодность 239

## К

- Коварианты — Понятие 43  
— в модели пропорциональных рисков 44, 45 — Оценивание их влияния 45  
Количество запасных элементов при эксплуатации — Оценка его по состоянию 166—171  
— оптимальное — Определение его по уровню надежности 163—166  
Комплекс мультимикропроцессорный 283  
Контроль параметров — Оптимизационные задачи 220, 221  
— косвенный 211  
— косвенный непрерывный 215  
— систем в процессе эксплуатации — Виды и методы контроля 209—211 — Использование его результатов на этапах технологического процесса производства объекта 209, 210 — Требования к методам контроля 210  
Контроль системы — Результаты решения задачи по определению его программы 237  
— работоспособности 221  
Коэффициенты готовности 112, 123, 127, 131, 134, 136, 137, 138  
— готовности оперативной 123, 125, 127  
— ресурсного ограничения 235  
— целевой функции 234  
Критерии эффективности — Виды — см. под их названиями, например, Доход

средний от эксплуатации системы в единицу времени

## М

- Массив данных — Образование 27, 28  
 Матрица переходных распределений 58  
 — решений 268  
 Метод динамического программирования 62  
 — максимального правдоподобия обобщенный 30, 33  
 — статистического моделирования 34  
 — эмпирического моделирования — Описание его 46 — Пример 46, 47  
 Методика назначения срока контроля 213—215  
 Методика определения минимаксных периодов проведения плановых предупредительных профилактик и гарантированных значений показателей качества функционирования 136—138 — Алгоритм вычисления показателей 141  
 — оптимальной величины наработки и оптимальной величины показателей качества 151—153, 155—159 — Расчетные формулы 156, 157  
 Методика определения оптимальных периодов проведения плановых восстановительных работ и оптимальных значений показателей качества — Исходные данные 125 — Расчетные формулы 126  
 — предупредительных профилактик и оптимальных значений показателей качества — Исходные данные 120 — Расчетные формулы 121, 122  
 Методика определения требуемой точности средств контроля 231  
 — построения процедур контроля — Задание технических состояний в различных пространствах 202—208  
 — расчета показателей эффективности и контроля параметров 218—220  
 — формирования процедур контроля технического состояния — Общие требования к ней 201  
 Механизм обслуживания ⇌ Управление им 188  
 Микропроцессоры 280  
 Модели альтернирующих процессов 26  
 — дискретно-разделимые 28, 29  
 — независимых конкурирующих рисков 25  
 — отказов технических устройств, которые обуславливают отнесение функций их надежности к классу ВФИ 15, 16  
 — плановых испытаний 25  
 — с кратными отказами 26, 27  
 — случайного поступления 25, 26  
 — с назначенными моментами цензурирования 25  
 — эксплуатации — Общее описание 174, 175  
 Модель математическая — Принцип ее построения 52  
 — проведения ремонтных работ 265, 266  
 — сетевая — см. *График сетевой*  
 — технической системы 231  
 Моменты марковские 87

## Н

- Набор тестов контроля 231  
 Нарботка на дефект, выявление и устранение которого не привело к скольконибудь серьезным последствиям 12  
 Нарботка на неисправность, вызванную конструктивно-производственными дефектами 12  
 — ошибками обслуживающего персонала 12

Нарботка на неисправность, выявленную как при применении, так и в процессе технического обслуживания и подготовки к применению 12  
 Нарботка на отказ, приведший к задержке начала применения по назначению 12  
 — проявившийся в процессе применения по назначению 12

## О

- Обеспечение математическое расчетов 47  
 Обеспечение программное базовое 286  
 — специальное 286  
 Область оптимальной остановки 268  
 Обслуживание 147  
 — по состоянию 292  
 Обслуживание техническое 293  
 — оперативное 172  
 — периодическое (профилактическое) 172  
 Обслуживание  $N$  последовательно соединенных элементов —  
 Описание стратегии обслуживания 153  
 Объект контроля 200  
 Объем запасных элементов для обеспечения эксплуатации — Определение по заданному ресурсу 162, 163  
 — информации потребный 195  
 Ожидание математическое 223  
 Оператор инфинитезимальный 92  
 Основы математического решения минимаксных задач технического обслуживания — Используемые теоремы 129, 130  
 Отказы пороговые 105, 106  
 Отклонение среднее квадратическое 223  
 Оценка изотонная максимального правдоподобия 50  
 — множительная вероятности безотказной работы 31 — Свойства 34—39  
 — статистическая старения элементов технических систем 14—16  
 Оценка функции ресурса — Свойства 33  
 — аддитивная — Свойства 34—39  
 Оценка ядерная функций интенсивности отказов 39—42 — Определение 40  
 — Параметр  $b$  ( $m$ ) — Ширина окна 40

## П

- Пакеты прикладных программ для решения задач эксплуатации и ремонта 275—277  
 — для ЭВМ 182  
 Память управляющая 280  
 Параметр потока отказов — Статистическое определение 12, 13  
 Параметры наблюдаемые 212  
 — ненаблюдаемые 212  
 Пересчет вероятностей состояний 216, 217  
 Периодичность оптимальная плановых восстановительных работ при отсутствии самостоятельной индикации отказов (стратегия хранения, полная информация) — Определение 125—128  
 — предупредительных профилактик при мгновенной индикации отказа (полная информация) — Определение 119—125  
 Периодичность плановой предупредительной профилактики при мгновенной индикации отказа и неполной информации о надежности — Определение 134—138  
 — при отсутствии самостоятельной индикации отказов и неполной информации о надежности — Определение 138—142  
 — при произвольной длительности индикации отказа и неполной информации о надежности — Определение 131—134  
 Поверхность согласованного оптимума 205  
 Подсистема функциональная 231  
 Показатели качества функционирования —

- Ил оптимизация 123—125, 127—129 —  
 Определение 112, 113 — Соотношения между ними 112, 113  
 — оценки эксплуатации технических систем — Виды — см. под их названиями, например, *Наработка на отказ, проявляющаяся в процессе применения по назначению* — ремонтпригодности — Виды 240—251 — Исходные данные 240—251 — Порядок их расчета 239 — Формулы для расчета 240—251  
 Порция данных — Определение 23 — Пример 24, 25  
 Постановка задачи оптимизации информации о надежности неполной 114—116 — полной 114  
 Потери средние удельные 123, 135, 137—139  
 Поток поступающих требований — Управление им 188  
 Правило оптимальной остановки 72, 73 — Оценка его эффективности 76  
 Предприятия ремонтные 255  
 Представление данных о надежности изделий в виде порций 23  
 Прибыль средняя удельная 112, 124, 128, 133, 136—140  
 Приоритеты динамические 187  
 Пространство политик — Понятие 55  
 Процедура контроля — Математическая модель функционирования ОК 200 — Показатели качества и эффективности функционирования ОК 200  
 — проверки гипотезы старения по цензурированным наблюдениям 17, 18  
 Процесс использования по назначению 172 — марковский с непрерывным временем — Оптимальное управление 61  
 Процесс полумарковский — Понятие 57 — управляемый — Пример применения 69—71  
 Процесс регенерирующий 86 — случайный 112  
 Процесс технологический ремонта 259  
 Процессы восстановления управляемые в задачах оптимальной эксплуатации по ресурсу 65—69  
 Процессы марковские 188  
 — принятия решения без переоценки 56, 57 — с поглощением 57 — управляемые 266  
 Процессы полумарковские 188  
 — принятия решений 59  
 — принятия решений без переоценки 60 — с доходами 58, 59 — с поглощением 61  
 Процессы регенерирующие — Оптимальное управление 63, 64

## Р

- Рандомизация элементов матрицы 270  
 Распределение возрастающей функции интенсивности отказов — Характер изменения 14  
 Расчет вероятностей состояний 212, 213 — среднего дохода 217, 218  
 Регулировка предупредительная, профилактическая 73  
 Результаты статистического сравнения двух моделей длительной эксплуатации системы с одним и тем же определяющим параметром, но с различными критериями оптимизации 82—85  
 Ремонт — Классификация видов 238 — Распределение сил и средств 264 — Схемы технологического процесса 256—258 — Трудоемкость 172

- капитальный — Особенности технологического процесса 255, 256  
 — средний — Особенности технологического процесса 255  
 — технических систем — Экономическое обоснование его целесообразности 254  
 Решение задачи оптимизации при неполной информации о надежности 159—161 — при полной информации о надежности 154  
 Риск заказчика 222, 224  
 — изготовителя 222, 224

## С

- Сети массового обслуживания 179  
 — однородные экспоненциальные 181  
 Сеть массового обслуживания замкнутая 175  
 — однородная экспоненциальная 176, 177  
 Система автоматизированная диагностирования — Структура информационного обеспечения 297  
 — эксплуатации и ремонта самолетов гражданской авиации — Взаимодействие эксплуатационных подразделений с АСД 295 — Особенности наземных систем диагностирования 295  
 Система автоматическая эксплуатации и ремонта техники перспективная 307—311  
 Система массового обслуживания 175  
 Система механическая при пуассоновском потоке ударных нагрузок 94—102  
 — самовосстанавливающаяся при пуассоновском потоке ударных нагрузок 102—106  
 Система при полумарковском процессе ударных нагрузок 106—110  
 — техническая сложная 172  
 — технического обслуживания адаптивная 277  
 — управления информацией об обслуживании 292  
 Системы большие с мониторингом — Эксплуатация и техническое обслуживание 291—294  
 — восстанавливающиеся 86—88  
 — высоконадежные 64, 65  
 — длительной эксплуатации 80—82  
 — контроля 221  
 — мониторинга — Состав 291  
 — с функциональным резервированием 78—80  
 — управляемые массового обслуживания 183—186  
 Соотношения эргодические для критериев 54, 55  
 Состоятельность — Достаточные условия 35, 36  
 Средства автоматизации программирования 287  
 — вычислительной техники — см. под их названиями, например, *Устройства управляемые*  
 — генерации 287  
 Средства контроля автоматизированные авиационного оборудования 300, 301  
 — активные 282  
 — пассивные 282  
 Средства операционных систем 287  
 Стратегия — Понятие 55  
 Стратегия минимаксная при ограничении на моменты 142—144  
 — технического обслуживания при наличии ошибок контроля 144—146  
 Стратегия оптимальная 88  
 —  $\epsilon$ -оптимальная — Понятие 88, 91, 92  
 Стратегия ремонта — Понятие 255

— по наработке 255  
 — по техническому состоянию 255  
**Стратегия технического обслуживания** —  
**Описание** 113—116  
 — двух последовательно соединенных эле-  
 ментов 147—149  
**Структура оптимальной стратегии** 102—104  
 — пороговая 93  
**Структуры системы ремонта** 262—264  
**Схемы встроенного контроля** 282

## Т

**Таблица доз и эффектов** 48  
 — порядковая 21  
**Теорема Дынкина** 92  
**Тесты для идентификации функции надеж-**  
**ности типа ВФИ** 17

## У

**Управление автоматическое приемниками**  
 303—308  
 — адаптивное 65  
 — техническим состоянием 166  
 — эксплуатацией с помощью ЭВМ — Пер-  
 спективы развития 277, 278  
**Уровень оптимальной остановки** 268, 269  
 — отказа допустимый 270  
 — процесса допустимый 100—102  
**Устройство запоминающее оперативное** 281  
 — постоянное 280  
**Устройство управления** 280

## Ф

**Функция интенсивности отказов** 39  
**Функция распределения с вогнутой интен-**  
**сивностью отказов** — **Характер изменения**  
 15  
 — с возрастающей в среднем интензив-

ностью отказов — **Характер распределе-**  
**ния** 14  
 — с убывающей интенсивностью отказов —  
**Характер изменения** 14  
**Функция эксплуатационных потерь**  
**системы** 72

## Х

**Характеристики оперативные** 237, 238  
 — экономические 237, 238

## Ц

**Цена системы** — **Понятие** 88  
**Цепи Маркова вложенные** 54, 55  
 — управляемые 188  
**Цикл регенерации** 88

## Ч

**Число относительное неисправностей, вы-**  
**явленных на оперативных видах обслужи-**  
**вания в ходе подготовки технической**  
**системы к применению, от их общего числа**  
 12  
 — выявленных при проведении профилак-  
 тического обслуживания, от их общего  
 числа 12  
 — проявившихся при применении, от об-  
 щего числа неисправностей 12

## Э

**ЭВМ специализированные** 280  
 — универсальные  
**Элементы замены типовые** 166  
 — запасные 166

## Я

**Ядро** — **Определение** 39