Российская академия наук · Сибирское отделение

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

НЕРЕШЕННЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ГРУПП

КОУРОВСКАЯ ТЕТРАДЬ

Издание 16-е, дополненное,

включающее Архив решенных задач

Новосибирск · 2006

Составители:

В. Д. Мазуров
Е. И. Хухро

Консультанты:

О. В. Богопольский
О. Х. Кегель
В. М. Копытов
А. Ю. Ольшанский
Н. С. Романовский
Д. Г. Храмцов
В. А. Чуркин

Новые вопросы и комментарии направляйте по адресу:

В. Д. Мазурову

Институт математики СО РАН
630090, Новосибирск–90

e-mail: mazurov@math.nsc.ru

Содержание

Предисловие

Идея издания сборника нерешенных проблем теории групп была высказана М. И. Каргаполовым (1928–1976) на Дне проблем Первого Всесоюзного симпозиума по теории групп в Коуровке под Свердловском 16 февраля 1965 г. Поэтому этот сборник и получил название «Коуровская тетрадь». С тех пор каждые 2–4 года появляется очередное издание, дополненное новыми вопросами и краткими комментариями к решенным задачам из предыдущих изданий.

«Коуровская тетрадь» уже более 30 лет служит своеобразным средством общения для специалистов по теории групп и смежным областям математики. Возможно, самым ярким примером успеха «Коуровской тетради» является тот факт, что около 3/4 всех задач из ее первого издания к настоящему времени уже решены. Приобретя международное признание, «Коуровская тетрадь» насчитывает свыше 300 авторов задач из многих стран мира. Начиная с 12-го издания «Коуровская тетрадь» выпускается параллельно на русском и английском языках.

Настоящее издание «Коуровской тетради» является шестнадцатым. Оно, как всегда, дополнено параграфом, содержащим новые задачи. Добавлены комментарии к тем задачам из предыдущих изданий, которые получили решение за последнее время. Некоторые задачи и комментарии из предыдущих изданий потребовали изменений и исправлений. Составители благодарят всех, кто сообщил свои замечания по предыдущим изданиям.

В разделе «Архив решенных задач» помещены *все* задачи, комментарий к которым в одном из предыдущих изданий указывает на развернутую публикацию, содержащую полный ответ. Однако те задачи, полные ссылки на решения которых впервые появляются только в этом издании, комментируются в основной части «Коуровской тетради», среди нерешенных задач соответствующего параграфа. (Внимательный читатель заметит, что некоторые номера задач не встречаются ни в основной части, ни в «Архиве»: это относится только к тем немногим задачам, что были полностью исключены по просьбам авторов как неудачные или утратившие актуальность, например, в связи с завершением классификации конечных простых групп.)

Сокращение CFSG (The Classification of the Finite Simple Groups) означает утверждение, что любая конечная простая неабелева группа изоморфна знакопеременной группе подстановок конечного множества, группе лиева типа над конечным полем или одной из двадцати шести спорадических групп (см. Д. Горенстейн, *Конечные простые группы. Введение в их классификацию*, М., Мир, 1985). Пометка mod CFSG в комментарии означает, что решение использует CFSG.

В. Д. Мазуров, Е. И. Хухро

Новосибирск, январь 2006 г.

Вопросы из 1-го издания, 1965 г.

1.3. (Известный вопрос). Может ли групповое кольцо группы без кручения содержать делители нуля?
Л. А. Бокуть

1.5. (Известный вопрос). Существует ли группа, групповое кольцо которой не содержит делителей нуля и не вложимо в тело?
Л. А. Бокуть

1.6. (А. И. Мальцев). Вложимо ли групповое кольцо правоупорядоченной группы в тело?
Л. А. Бокуть

1.12. (В. Магнус). Проблема изоморфизма тривиальной группе для всех групп с n порождающими и n определяющими соотношениями, где $n > 2$.
М. Д. Гриндлингер

1.13. (Дж. Столлингс). Если конечно определенная группа тривиальна, то всегда ли можно заменить некоторое определяющее слово примитивным элементом, не нарушая тривиальности группы?
М. Д. Гриндлингер

1.19. (А. И. Мальцев). Какие подгруппы (подмножества) формульно определимы в свободной группе? Какие подгруппы относительно элементарно определимы в свободной группе? В частности, будет ли коммутант формульно (или относительно элементарно) определим в свободной группе?
Ю. Л. Ершов

1.20. Для каких групп (классов групп) решетка нормальных подгрупп формульно определима в решетке всех подгрупп?
Ю. Л. Ершов

1.27. Описать универсальную теорию свободных групп. *М. И. Каргаполов*

1.28. Описать универсальную теорию свободной нильпотентной группы.
М. И. Каргаполов

***1.29.** (А. Тарский). Разрешима ли элементарная теория свободной группы?
М. И. Каргаполов

---

*Да, разрешима (O. Kharlampovich, A. Miasnikov, *Elementary theory of free nonabelian groups*, Preprint, 2005, `http://www.math.mcgill.ca/olga/p3new2.ps`).

1.31. Будет ли финитно аппроксимируемая группа с условием максимальности почти полициклической?
М. И. Каргаполов

1.33. (А. И. Мальцев). Описать группу автоморфизмов свободной разрешимой группы.
М. И. Каргаполов

1.35. в) (А. И. Мальцев, Л. Фукс). Существуют ли простые доупорядочиваемые группы? Группа называется *доупорядочиваемой*, если каждый частичный порядок этой группы продолжается до линейного порядка.
М. И. Каргаполов

1.40. Будет ли нильгруппой произведение двух нормальных нильподгрупп? *Нильгруппа* по определению состоит из ниль-элементов, т. е. из (необязательно ограниченно) энгелевых элементов.

Ш. С. Кемхадзе

1.46. При каких условиях нормализатор относительно выпуклой подгруппы будет относительно выпуклым?

А. И. Кокорин

1.51. При каких условиях группа матриц над полем (комплексных чисел) упорядочиваема?

А. И. Кокорин

1.54. Описать все способы линейного упорядочения свободной двуступенно разрешимой группы с конечным числом порождающих.

А. И. Кокорин

1.55. Дать элементарную классификацию линейно упорядоченных свободных групп с фиксированным числом порождающих.

А. И. Кокорин

1.65. Замкнут ли класс групп абелевых расширений абелевых групп относительно операции прямого сложения $(A, B) \mapsto A \oplus B$?

Л. Я. Куликов

*__1.66.__ Пусть заданы периодическая абелева группа T и несчетное кардинальное число $\mathfrak{m}$. Существует ли абелева группа без кручения $U = U(T, \mathfrak{m})$ мощности $\mathfrak{m}$ со следующим свойством: какова бы ни была абелева группа A без кручения мощности $\leqslant \mathfrak{m}$, равенство $\mathrm{Ext}\,(A, T) = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда группа A вложима в группу U?

Л. Я. Куликов

*Нет, не всегда. Есть модель ZFC, в которой для некоторого класса кардиналов $\mathfrak{m}$ ответ отрицательный (S. Shelah, L. Strüngmann, *J. London Math. Soc.*, **67**, №3 (2003), 626–642). С другой стороны, в условиях гипотезы конструктивности Геделя ($V = L$) ответ положителен для любого кардинала, если в T есть лишь конечное число нетривиальных ограниченных p-компонент (L. Strüngmann, *Ill. J. Math.*, **46**, №2 (2002), 477–490).

1.67. Пусть заданы конечно определенная группа G, свободная группа F, ранг которой равен минимальному числу порождающих группы G, и гомоморфизм группы F на G с ядром N. Найти полную систему инвариантов фактор-группы группы N по взаимному коммутанту $[F, N]$.

Л. Я. Куликов

1.74. Описать все минимальные топологические группы, то есть недискретные группы с дискретными замкнутыми подгруппами. Минимальные локально бикомпактные группы описываются без особого труда. В то же время в общем случае проблема, вероятно, сложна.

В. П. Платонов

1.86. Верно ли, что тождественные соотношения полициклической группы обладают конечным базисом?

А. Л. Шмелькин

1.87. Тот же вопрос для матричных групп (хотя бы над полем характеристики 0).

А. Л. Шмелькин

Вопросы из 2-го издания, 1967 г.

2.9. Существуют ли правильные ассоциативные операции на классе групп, удовлетворяющие ослабленному мальцевскому требованию (то есть условию склеиваемости мономорфизмов сомножителей любого произведения, вообще говоря, в гомоморфизм всего произведения) и не удовлетворяющие требованию склеиваемости эпиморфизмов сомножителей?

О. Н. Головин

2.22. Абстрактное теоретико-групповое свойство Σ называется *радикальным* (*в нашем смысле*), если в любой группе G подгруппа $\Sigma(G)$, порожденная всеми нормальными Σ-подгруппами, сама является Σ-подгруппой (называемой Σ-*радикалом* группы G). Радикальное свойство Σ называется *сильно радикальным*, если для всякой группы G фактор-группа $G/\Sigma(G)$ не содержит нееденичных нормальных Σ-подгрупп. Является ли свойство $\overline{RN}$ радикальным? сильно радикальным?

Ш. С. Кемхадзе

2.24. Упорядочиваемы ли энгелевы группы без кручения?

А. И. Кокорин

2.25. а) (Л. Фукс). Описать группы, линейно упорядочиваемые конечным числом способов.

А. И. Кокорин

2.26. (Л. Фукс). Охарактеризовать мультипликативные группы упорядочиваемых тел как абстрактные группы.

А. И. Кокорин

2.28. Всякую ли упорядочиваемую группу можно вложить в доупорядочиваемую группу? (См. определение в 1.35)

А. И. Кокорин

2.40. в) I-*теорией* (Q-*теорией*) класса $\mathfrak{K}$ универсальных алгебр называется совокупность тождеств (квазитождеств), истинных на всех алгебрах класса $\mathfrak{K}$. Существует ли конечно аксиоматизируемое многообразие

(1) колец,
(2) ассоциативных колец,
(3) лиевых колец,

I-теория (Q-теория) которого неразрешима?

Замечание: нетрудно указать рекурсивно аксиоматизируемое многообразие полугрупп с единицей, I-теория которого нерекурсивна (см. также А. И. Мальцев, *Мат. сб.*, **69**, №1 (1966), 3–12).

Прим. ред.: отрицательное решение вопроса (2) анонсировано в (А. Я. Белов, *Тезисы 2-й межд. конф. Полугруппы: теория и приложения,* С.-Пб., 1999, с. 9).

А. И. Мальцев

2.42. Какова структура группоида квазимногообразий

а) всех полугрупп?
б) всех колец?
в) всех ассоциативных колец?

Ср. А. И. Мальцев, *Сиб. мат. ж.*, **8**, №2 (1967), 346–365.

А. И. Мальцев

2.48. (Н. Аронсзажн). Пусть G — связная топологическая группа, локально удовлетворяющая некоторому тождественному соотношению $f|_U = 1$, где U — окрестность единицы в G. Верно ли, что тогда $f|_G = 1$? *В. П. Платонов*

2.53. Описать максимальные подгруппы группы $SL_n(k)$ над произвольным бесконечным полем k. *В. П. Платонов*

2.56. Классифицировать с точностью до изоморфизма абелевы связные алгебраические унипотентные линейные группы над полем положительной характеристики. Для случая поля нулевой характеристики это не представляет труда. С другой стороны, К. Шевалле решил проблему классификации указанных групп с точностью до изогении. *В. П. Платонов*

2.67. Выяснить условия, при которых нильпотентное произведение чистых нильпотентных групп (тех или иных классов) определяется своей решеткой подгрупп. Вопрос решается положительно, если это произведение свободно от кручения.

Л. Е. Садовский

2.68. Что можно сказать о решеточных изоморфизмах чистой разрешимой группы? Не будет ли такая группа строго определяться своей решеткой? Для свободных разрешимых групп этот вопрос, как известно, решается положительно.

Л. Е. Садовский

***2.72.** (Г. Баумслаг). Пусть F — конечно порожденная свободная группа, N — ее нормальная подгруппа, V — эндоморфно допустимая подгруппа группы N. Будет ли хопфовой группа F/V, если фактор-группа F/N хопфова? *Д. М. Смирнов*

*Нет, не всегда (S. V. Ivanov, A. M. Storozhev, Non-hopfian relatively free groups, `http://uk.arxiv.org/abs/math.GR/0312491`; *to appear in Geom. Dedicata*, 2005).

2.74. (Известная задача). Описать конечные группы с разрешимыми централизаторами инволюций. *А. И. Старостин*

2.78. Всякое множество всех подгрупп одного и того же порядка конечной группы, содержащее по крайней мере одну неинвариантную подгруппу, называется $IE_{\bar{n}}$-системой этой группы. Натуральное число k называется *разрешимым* (соответственно, *неразрешимым; простым; составным; абсолютно простым*) *теоретико-групповым числом*, если любая конечная группа с k $IE_{\bar{n}}$-системами разрешима (соответственно, если существует по крайней мере одна неразрешимая конечная группа с k $IE_{\bar{n}}$-системами; если существует по крайней мере одна простая конечная группа с k $IE_{\bar{n}}$-системами; если не существует простых конечных групп с k $IE_{\bar{n}}$-системами; если существует по крайней мере одна простая конечная группа с k $IE_{\bar{n}}$-системами и не существует неразрешимых непростых конечных групп с k $IE_{\bar{n}}$-системами).

Конечны или бесконечны множества всех разрешимых и всех абсолютно простых теоретико-групповых чисел? Существуют ли составные, но не разрешимые теоретико-групповые числа? *П. И. Трофимов*

2.80. Имеет ли произвольная нееединичная группа с нормализаторным условием отличную от единицы абелеву нормальную подгруппу? *С. Н. Черников*

2.81. а) Существует ли такой аксиоматизируемый класс решеток $\mathfrak{K}$, что решетка всех подполугрупп полугруппы S изоморфна некоторой решетке из $\mathfrak{K}$ тогда и только тогда, когда S является свободной группой?

б) Тот же вопрос для свободных абелевых групп.

Аналогичные вопросы решены положительно для групп без кручения, непериодических групп, абелевых групп без кручения, абелевых непериодических групп, упорядочиваемых групп (соответствующие классы решеток даже конечно аксиоматизируемы), так что, в частности, в сформулированных вопросах полугруппу S можно сразу считать группой (соответственно, абелевой группой) без кручения.

Л. Н. Шеврин

2.82. Можно ли группы с n-м условием Энгеля $[x, \overbrace{y, \ldots, y}^{n}] = 1$ определить тождественными соотношениями вида $u = v$, где u, v — слова без отрицательных степеней переменных? Для $n = 1$, 2, 3 это возможно (А. И. Ширшов, *Алгебра и логика*, **2**, № 5 (1963), 5–18).

Прим. ред.: это сделано также для $n = 4$ (G. Traustason, *J. Group Theory*, **2**, № 1 (1999), 39–46). Как заметила О. Мацедоньска, это верно также для многообразия локально нильпотентных n-энгелевых групп. В силу (R. G. Burns, Yu. Medvedev, *J. Austral. Math. Soc.*, **64** (1998), 92–100) такая группа является расширением нильпотентной группы n-ограниченной ступени группой n-ограниченного периода; тогда из классического результата Мальцева вытекает, что такая группа удовлетворяет положительному тождеству.

А. И. Ширшов

2.84. Пусть локально конечная группа G представима в виде произведения двух локально нильпотентных подгрупп. Будет ли G локально разрешимой?

В. П. Шунков

Вопросы из 3-го издания, 1969 г.

3.2. Классифицировать точные неприводимые (бесконечномерные) представления нильпотентной группы с тремя порождающими a, b, c и определяющими соотношениями $[a, b] = c$, $ac = ca$, $bc = cb$.

С. Д. Берман, А. Е. Залесский

3.3. (Известный вопрос). Описать группу автоморфизмов свободной ассоциативной алгебры ранга $n \geqslant 2$.

Л. А. Бокуть

3.12. (Известный вопрос). Будет ли локально разрешимой локально конечная группа, обладающая полной силовской базой?

Ю. М. Горчаков

3.16. Проблема равенства в группе, допускающей одно определяющее соотношение в многообразии n-ступенно разрешимых групп, $n \geqslant 3$.

М. И. Каргаполов

3.20. Составляют ли упорядочиваемые группы наименьший аксиоматизируемый класс, содержащий доупорядочиваемые группы? (См. 1.35.)

А. И. Кокорин

***3.33.** Будут ли изоморфны две группы, каждая из которых задается одним определяющим соотношением и является гомоморфным образом другой?

Д. И. Молдаванский

---

*Нет, не всегда (A. V. Borshchev, D. I. Moldavanskiĭ, Preprint, 2005, `http://arxiv.org/abs/math.GR/0502153`).

3.34. (Известный вопрос). Проблема сопряженности для групп с одним определяющим соотношением.

Д. И. Молдаванский

3.38. Описать все топологические группы, не имеющие собственных замкнутых подгрупп.

Ю. Н. Мухин

3.43. Пусть μ — бесконечная мощность. Группу G назовем *μ-наднильпотентной*, если каждая циклическая подгруппа из G есть член некоторого возрастающего нормального ряда, доходящего до G и имеющего мощность, меньшую μ. Нетрудно показать, что класс μ-наднильпотентных групп есть радикальный класс. Верно ли, что если μ_1 и μ_2 — две бесконечные мощности и $\mu_1 < \mu_2$, то существует группа G, которая μ_2-наднильпотентна и μ_1-полупроста?

Прим. 2001 г.: доказано (С. М. Вовси, *ДАН СССР*, **203**, № 3 (1972), 517–519), что для любых двух бесконечных мощностей $\mu_1 < \mu_2$ существует группа, которая μ_2-наднильпотентна, но не μ_1-наднильпотентна.

Б. И. Плоткин

3.44. Пусть группа порождается своими субинвариантными разрешимыми подгруппами. Будет ли она локально разрешимой?

Б. И. Плоткин

3.45. Пусть $\mathfrak{X}$ — наследственный радикал. Верно ли, что если G — локально нильпотентная группа без кручения, то $\mathfrak{X}(G)$ — изолированная подгруппа в G?

Б. И. Плоткин

3.46. Существует ли группа, в которой имеется больше одной, но конечное число максимальных локально разрешимых нормальных подгрупп? *Б. И. Плоткин*

3.47. (Известный вопрос). Верно ли, что каждая локально нильпотентная группа есть гомоморфный образ локально нильпотентной группы без кручения?

Прим. ред.: Положительный ответ получен для периодических групп (Е. М. Левич, А. И. Токаренко, *Сиб. матем. ж.*, **11** (1970), 1406–1408) и для счетных групп (Н. С. Романовский, *Препринт*, 1969). *Б. И. Плоткин*

3.48. Можно показать, что относительно умножения классов наследственные радикалы образуют полугруппу. Интересной задачей является отыскание всех неразложимых элементов этой полугруппы. В частности, отметим задачу отыскания неразложимых радикалов, содержащихся в классе локально конечных p-групп. *Б. И. Плоткин*

3.49. Имеются ли соотношения в полугруппе, порожденной всеми неразложимыми радикалами? *Б. И. Плоткин*

3.50. Пусть G — группа порядка $p^\alpha \cdot m$, где p — простое число, p и m взаимно просты, k — алгебраически замкнутое поле характеристики p. Верно ли, что если k-размерность неразложимого проективного модуля, отвечающего 1-представлению группы G, равна p^α, то G обладает холловой p'-подгруппой? Обратное тривиально. *А. И. Саксонов*

3.51. Верно ли, что всякая конечная группа G, обладающая группой автоморфизмов Φ, регулярно действующей на множестве классов сопряженных элементов группы G (то есть оставляющая на месте только единичный класс), разрешима? Проблема известна в случае, когда Φ — циклическая группа, порожденная регулярным автоморфизмом. *А. И. Саксонов*

3.55. Является ли бинарно разрешимая группа, все абелевы подгруппы которой имеют конечный ранг, локально разрешимой? *С. П. Струнков*

3.57. Установить законы распределения неразрешимых и простых теоретико-групповых чисел в натуральном ряду. См. 2.78. *П. И. Трофимов*

3.60. В работе (Л. А. Шеметков, *Мат. сб.*, **72**, № 1 (1967), 97–107) введено понятие p-длины произвольной конечной группы. Исследовать зависимость между p-длиной конечной группы и инвариантами c_p, d_p, e_p ее силовской p-подгруппы.

Л. А. Шеметков

***3.62.** (Известный вопрос). *D_π-группой* называют конечную группу, в которой любые две максимальные π-подгруппы сопряжены. Всегда ли расширение D_π-группы с помощью D_π-группы является D_π-группой? *Л. А. Шеметков*

*Да, является mod CFSG (Е. П. Вдовин, Д. О. Ревин, *Contemp. Math.*, **402** (2006), 229–263).

Вопросы из 4-го издания, 1973 г.

4.2. а) Найти бесконечную конечно порожденную группу периода < 100.
б) Существуют ли такие группы периода 5?
С. И. Адян

4.5. б) Верно ли, что произвольная конечно определенная группа имеет либо степенной, либо показательный рост?
С. И. Адян

4.6. (Ф. Холл). Будут ли в многообразии метабелевых групп проективные группы свободными?
В. А. Артамонов

4.7. (Известный вопрос). Для каких кольцевых эпиморфизмов $R \to R'$ соответствующий групповой гомоморфизм $SL_n(R) \to SL_n(R')$ является эпиморфизмом (при фиксированном $n \geqslant 2$)? В частности, для каких колец R выполняется равенство $SL_n(R) = E_n(R)$?
В. А. Артамонов

4.8. Пусть G — конечно порожденная группа, являющаяся расширением свободной группы с помощью циклической. Будет ли G конечно определенной?
Г. Баумслаг (G. Baumslag)

4.9. Пусть G — конечно порожденная нильпотентная группа без кручения. Конечно ли число неизоморфных групп в последовательности αG, $\alpha^2 G, \ldots$? Здесь αG — группа автоморфизмов группы G и $\alpha^{n+1}G = \alpha(\alpha^n G)$ для $n = 1, 2, \ldots$.
Г. Баумслаг (G. Baumslag)

4.11. Пусть F — свободная группа ранга 2 в некотором многообразии групп. Если F не является конечно определенной, то обязательно ли мультипликатор F будет бесконечно порожденным?
Г. Баумслаг (G. Baumslag)

4.13. Доказать, что конечная неабелева p-группа допускает автоморфизм порядка p, не являющийся внутренним.
Я. Г. Беркович

4.14. Пусть p — простое число. Каковы необходимые и достаточные условия на конечную группу G, обеспечивающие неразложимость групповой алгебры группы G над полем характеристики p как двустороннего идеала? Существуют некоторые нетривиальные примеры. Так, групповая алгебра группы Матье M_{24} неразложима для $p = 2$.
Р. Брауэр (R. Brauer)

4.17. Для многообразия групп $\mathfrak{V}$ обозначим через $\widetilde{\mathfrak{V}}$ класс всех конечных $\mathfrak{V}$-групп. Как характеризуются классы конечных групп вида $\widetilde{\mathfrak{V}}$ для многообразия $\mathfrak{V}$?
Р. Бэр (R. Baer)

4.18. Охарактеризовать классы групп $\mathfrak{K}$, обладающие следующими свойствами: подгруппы, эпиморфные образы и группы автоморфизмов $\mathfrak{K}$-групп являются $\mathfrak{K}$-группами, но не каждая счетная группа является $\mathfrak{K}$-группой. Отметим, что класс конечных групп и класс всех почти циклических групп обладают этими свойствами.
Р. Бэр (R. Baer)

4.19. Обозначим через $\mathfrak{C}$ класс всех групп G со следующим свойством: если U и V — максимальные локально разрешимые подгруппы из G, то U и V сопряжены в G (или, по крайней мере, изоморфны). Почти очевидно, что конечная группа G принадлежит $\mathfrak{C}$ тогда и только тогда, когда G разрешима. Что можно сказать о локально конечных группах из $\mathfrak{C}$?

Р. Бэр (R. Baer)

4.24. Пусть T — неабелева силовская 2-подгруппа конечной простой группы G.

а) Пусть ступень нильпотентности T равна n. Наилучшая верхняя оценка для периода центра T равна 2^{n-1}. Отсюда легко следует оценка $2^{n(n-1)}$ для периода T, но она почти наверняка слишком груба. Какова наилучшая оценка?

г) Найти «небольшое число» подгрупп $T_1, \ldots, T_n$ группы T, зависящих только от класса изоморфизма группы T и обладающих тем свойством, что совокупность $\{N_G(T_1), \ldots, N_G(T_n)\}$ контролирует слияние в T относительно G (в смысле Алперина).

Д. Голдшмидт (D. M. Goldschmidt)

4.30. Описать группы (конечные группы, абелевы группы), являющиеся группами всех автоморфизмов топологических групп.

М. И. Каргаполов

4.31. Описать решетку квазимногообразий 2-ступенно нильпотентных групп.

М. И. Каргаполов

4.33. Пусть $\mathfrak{K}_n$ — класс групп с одним определяющим соотношением в многообразии n-ступенно разрешимых групп.

а) При каких условиях $\mathfrak{K}_n$-группа обладает нетривиальным центром? Может ли быть нетривиальным центр $\mathfrak{K}_n$-группы, $n \geqslant 2$, не допускающей двух порождающих? *Прим. ред. 1998 г.:* ответы на эти вопросы известны при $n = 2$ (Е. И. Тимошенко, *Сиб. мат. ж.*, **14**, № 6 (1973), 1351–1355; *Мат. заметки*, **57**, № 4 (1995), 597–605). В частности, при $n = 2$ центр такой группы может быть нетривиальным.

б) Описать абелевы подгруппы $\mathfrak{K}_n$-групп.

в) Исследовать периодические подгруппы $\mathfrak{K}_n$-групп.

М. И. Каргаполов

4.34. Пусть v — групповое слово, $\mathfrak{K}_v$ — класс всех групп G, для которых существует такое натуральное число $n = n(G)$, что всякий элемент вербальной подгруппы vG представляется в виде произведения n значений слова v на группе G.

а) Для каких v классу $\mathfrak{K}_v$ принадлежат все конечно порожденные разрешимые группы?

б) Не будет ли таким слово $v(x, y) = x^{-1}y^{-1}xy$?

М. И. Каргаполов

4.40. Пусть C — фиксированная неединичная группа (например, $C = \mathbb{Z}_2$). Как показано в (Ю. И. Мерзляков, *Алгебра и логика*, **9**, № 5 (1970), 539–558), для любых групп A, B все расщепляемые расширения группы B посредством группы A вкладываются некоторым единым способом в прямое произведение $A \times \mathrm{Aut}\,(B \wr C)$. Как они в нем расположены?

Ю. И. Мерзляков

4.42. Для каких натуральных чисел n имеет место равенство $GL_n(\mathbb{R}) = D_n(\mathbb{R})\cdot O_n(\mathbb{R})\cdot UT_n(\mathbb{R})\cdot GL_n(\mathbb{Z})$? Обозначения см., например, в (М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, *Основы теории групп*, изд. 3-е, М., Наука, 1982). Следствием этого равенства при данном n является положительное решение проблемы Минковского о произведении n линейных форм (A. M. Macbeath, *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, **5**, №2 (1961), 86–89), которая для $n \geqslant 6$ остается открытой. Известно, что равенство имеет место при $n \leqslant 3$ (Х. Н. Нарзуллаев, *Мат. заметки*, **18**, №2 (1975), 213–221); с другой стороны для всех достаточно больших n оно неверно (Н. С. Ахмедов, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **67** (1977), 86–107).

Ю. И. Мерзляков

4.44. (Известный вопрос). Описать группы с абелевой группой автоморфизмов.

В. Т. Нагребецкий

***4.45.** б) Пусть G — свободное произведение с объединением собственных подгрупп H и K групп A и B, соответственно. Предположим, что A, B, H, K — свободные группы конечных рангов. Может ли G быть простой?

П. Нойман (P. M. Neumann)

*Да, может (S. Mores, *Proc. Int. Congress Math.*, vol. **2**, Berlin, 1998, 571–582). С другой стороны, если один из индексов $|A : H|$, $|B : K|$ бесконечен, то нет, не может (S. V. Ivanov, P. E. Schupp, in: *Algorithmic problems in groups and semigroups, Int. Conf., Lincoln, NE, 1998*, Boston MA, Birkhäuser, 2000, 139–142).

4.46. Назовем многообразие групп *предельным*, если оно не может быть задано конечным числом тождеств, а любое его собственное подмногообразие конечно базируемо. Из леммы Цорна следует, что любое многообразие, не имеющее конечного базиса тождеств, содержит предельное подмногообразие.

а) Задать явно (тождествами или порождающей группой) хотя бы одно предельное многообразие.

*б) Является ли множество предельных многообразий счетным? Известно, что оно бесконечно.

А. Ю. Ольшанский

*б) Нет, таких многообразий континуум (П. А. Кожевников, *О многообразиях групп большого нечетного периода*, Деп. 1612-В00, ВИНИТИ, М., 2000; S. V. Ivanov, A. M. Storozhev, *Contemp. Math.*, **360** (2004), 55–62).

4.48. Является ли конечно базируемым любое многообразие A-групп, то есть локально конечных групп, силовские подгруппы которых абелевы?

А. Ю. Ольшанский

4.50. Каковы разрешимые многообразия групп, все конечно порожденные подгруппы которых финитно аппроксимируемы?

В. Н. Ремесленников

4.55. Пусть G — конечная группа, $\mathbb{Z}_p$ — локализация по p. Справедлива ли теорема Круля–Шмидта для проективных $\mathbb{Z}_pG$-модулей?

К. Роггенкамп (K. W. Roggenkamp)

4.56. Пусть R — коммутативное нетерово кольцо с 1, а Λ — R-алгебра, конечно порожденная как R-модуль. Положим $T = \{U \in Mod\,\Lambda \mid$ для некоторого n существует такая точная Λ-последовательность $0 \to P \to \Lambda^{(n)} \to U \to 0$, что $P_m \cong \Lambda_m^{(n)}$ для любого максимального идеала m из $R\}$. Пусть $\mathbb{G}(T)$ — группа Гротендика семейства T относительно коротких точных последовательностей.

а) Описать $\mathbb{G}(T)$. В частности, что означает равенство $[U] = [V]$ в $\mathbb{G}(T)$?

б) *Гипотеза:* если $\dim(\max(R)) = d < \infty$, и существуют два эпиморфизма $\phi\colon \Lambda^{(n)} \to U$, $\psi\colon \Lambda^{(n)} \to V$, $n > d$ и $[U] = [V]$ в $\mathbb{G}(T)$, то $\operatorname{Ker}\phi = \operatorname{Ker}\psi$.

К. Роггенкамп (K. W. Roggenkamp)

4.65. *Гипотеза:* $\dfrac{p^q - 1}{p - 1}$ никогда не делит $\dfrac{q^p - 1}{q - 1}$, если p, q — различные простые числа. Подтверждение этой гипотезы могло бы упростить доказательство разрешимости групп нечетного порядка (W. Feit, J. G. Thompson, *Pacif. J. Math.*, **13**, № 3 (1963), 775–1029), сделав ненужным детальное использование порождающих и определяющих соотношений.

Дж. Томпсон (J. G. Thompson)

4.66. Пусть P — копредставление конечной группы G с m_p порождающими и r_p соотношениями. *Дефицитом* def (G) группы называется максимум чисел $m_p - r_p$, взятым по всем копредставлениям P. Пусть G — такая нетривиальная конечная группа, что $G = G'$ и мультипликатор $M(G) = 1$. Доказать, что $\operatorname{def}(G^n) \to -\infty$ при $n \to \infty$. Здесь G^n означает n-ю прямую степень группы G.

Дж. Уайголд (J. Wiegold)

4.69. Пусть G — конечная p-группа и пусть $|G'| > p^{n(n-1)/2}$ для некоторого неотрицательного целого n. Доказать, что G порождается элементами ширины $\geqslant n$. *Ширина* $b(x)$ элемента x из G определяется равенством $|G : C_G(x)| = p^{b(x)}$.

Дж. Уайголд (J. Wiegold)

4.72. Верно ли, что всякое многообразие групп, свободные группы которого аппроксимируются нильпотентными группами без кручения, разрешимо или совпадает с многообразием всех групп? Для положительного ответа достаточно показать, что всякое многообразие алгебр Ли над полем рациональных чисел, не содержащее конечномерных простых алгебр, разрешимо.

А. Л. Шмелькин

***4.73.** б) Существует ли неабелево многообразие групп, все периодические группы которого абелевы?

А. Л. Шмелькин

*Да, существует (П. А. Кожевников, *О многообразиях групп большого нечетного периода*, Деп. 1612-В00, ВИНИТИ, М., 2000; S. V. Ivanov, A. M. Storozhev, *Contemp. Math.*, **360** (2004), 55–62).

4.74. б) Всякая ли бинарно конечная 2-группа порядка > 2 не проста?

В. П. Шунков

4.75. Пусть G — периодическая группа, содержащая инволюцию i, и пусть силовские 2-подгруппы группы G являются либо локально циклическими группами, либо обобщенными группами кватернионов. Будет ли инволюция $iO_{2'}(G)$ центральным элементом в $G/O_{2'}(G)$?

В. П. Шунков

Вопросы из 5-го издания, 1976 г.

5.1. б) Будет ли локально конечная минимальная не FC-группа отличной от своего коммутанта?

В случае минимальных не BFC-групп ответ утвердительный.

В. В. Беляев, Н. Ф. Сесекин

***5.4.** Пусть g и h — положительные элементы линейно упорядоченной группы G. Можно ли вложить G в линейно упорядоченную группу $\overline{G}$ так, чтобы g и h были в $\overline{G}$ сопряжены? Вопрос тесно связан с проблемой пополнения и с вопросами о вложении линейно упорядочиваемых групп в доупорядочиваемые, простые и другие группы.

В. В. Блудов

*Нет, не всегда (В. В. Блудов, *Тезисы Междун. алгебр. конф. посв. 250-летию МГУ и 75-летию его кафедры высшей алгебры*, М., 2004, 166–167).

5.5. Пусть G — конечно порожденная группа, содержащая в качестве подгруппы конечного индекса расширение абелевой группы посредством полициклической. Всегда ли существует такая конечно порожденная метабелева группа M, что G изоморфна подгруппе группы автоморфизмов M? Если это так, то многие тонкие свойства группы G типа финитной аппроксимируемости становятся прозрачными.

Б. Верфриц (B. A. F. Wehrfritz)

5.14. Пересечение (пары) силовских 2-подгрупп назовем (*парным*) *силовским пересечением.*

а) Описать конечные группы, в которых все 2-локальные подгруппы имеют нечетные индексы.

б) Описать конечные группы, в которых нормализаторы всех силовских пересечений имеют нечетные индексы.

в) Описать конечные группы, в которых нормализаторы всех парных силовских пересечений имеют нечетные индексы.

г) Описать конечные группы, в которых для любых силовских 2-подгрупп P, Q пересечение $P \cap Q$ нормально в некоторой силовской 2-подгруппе из $\langle P, Q\rangle$.

В. В. Кабанов, А. А. Махнев, А. И. Старостин

5.15. Существует ли конечно определенная финитно аппроксимируемая группа, в которой проблема равенства разрешима рекурсивно, но не примитивно рекурсивно?

Ф. Каннонито (F. B. Cannonito)

5.16. Любая ли счетная локально линейная группа вложима в конечно определенную группу? Известно, что любая счетная группа, которая локально линейна ограниченной степени, вложима в конечно определенную группу с разрешимой проблемой равенства (G. Baumslag, F. B. Cannonito, C. F. Miller III, *Math. Z.*, **153** (1977), 117–134).

Ф. Каннонито (F. B. Cannonito), Ч. Миллер (C. Miller)

***5.20.** Разрешима ли элементарная теория решеток l-идеалов решеточно упорядоченных абелевых групп?

А. И. Кокорин

*Нет, неразрешима (Н. Я. Медведев, *Алгебра и логика*, **44**, № 5 (2005), 540–559).

5.21. Любую ли группу без кручения с разрешимой проблемой равенства можно вложить в группу с разрешимой проблемой сопряженности? Принадлежащий А. Макинтайру пример показывает, что ответ на этот вопрос будет отрицательным, если опустить условие отсутствия кручения.

Д. Коллинз (D. J. Collins)

***5.22.** Существует ли вариант теоремы Хигмана о вложении, обеспечивающий сохранение степени неразрешимости проблемы сопряженности? Известные в настоящее время варианты не сохраняют эту степень.

Д. Коллинз (D. J. Collins)

*Да, существует (A. Yu. Ol'shanskii, M. V. Sapir, *The conjugacy problem and Higman embeddings* (*Memoirs AMS*, **804**), 2004, 133 p.).

***5.23.** Верно ли, что свободная решеточно упорядоченная группа многообразия решеточно упорядоченных групп, задаваемых тождеством $x^{-1}|y|x \ll |y|^2$ или, что равносильно, тождественным соотношением $|[x,y]| \ll |x|$, аппроксимируется линейно упорядоченными нильпотентными группами?

В. М. Копытов

*Нет, не верно (V. V. Bludov, A. M. W. Glass, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **358** (2006), 5179–5192).

***5.24.** Верно ли, что свободная решеточно упорядоченная группа многообразия решеточно упорядоченных групп, аппроксимируемых линейно упорядоченными группами, аппроксимируется разрешимыми линейно упорядоченными группами?

В. М. Копытов

*Нет, не верно (Н. Я. Медведев, *Алгебра и логика*, **44**, № 3 (2005), 355–367).

5.25. Доказать, что фактор-группа разрешимой линейно упорядоченной группы по ее коммутанту непериодическая.

В. М. Копытов

5.26. Пусть G — конечная p-группа с минимальным числом порождающих d, r_1 (соотв. r_2) — минимальное число определяющих соотношений от d порождающих в смысле представления G фактор-группой свободной дискретной группы (про-p-группы). Известно, что всегда $r_2 > d^2/4$. Для каждого простого числа p обозначим через $c(p)$ точную верхнюю границу чисел $b(p)$ со свойством $r_2 \geqslant b(p)d^2$ для всех конечных p-групп.

а) Очевидно, что $r_1 \geqslant r_2$. Найти p-группу с $r_1 > r_2$.

б) *Гипотеза:* $\lim\limits_{p\to\infty} c(p) = 1/4$. Доказано (J. Wisliceny, *Math. Nachr.*, **102** (1981), 57–78), что $\lim\limits_{d\to\infty} r_2/d^2 = 1/4$.

Х. Кох (H. Koch)

5.27. Доказать, что если G — про-p-группа без кручения с одним определяющим соотношением, то $\operatorname{cd} G = 2$. Для широкого класса групп это доказано в (J. P. Labute, *Inv. Math.*, **4**, № 2 (1967), 142–158).

Х. Кох (H. Koch)

5.30. (Известный вопрос). Пусть G — конечная разрешимая группа, $A \leqslant \operatorname{Aut} G$, $C_G(A) = 1$, порядки групп G и A взаимно просты, и $|A|$ — произведение n не обязательно различных простых чисел. Ограничена ли сверху числом n нильпотентная длина группы G? Это доказано для широкого класса групп (Шульт, Гросс, Бергер, Турулл), и есть оценка в терминах n в случае, когда A разрешима (Томпсона $\leqslant 5^n$, Курцвейля $\leqslant 4n$, Турулла $\leqslant 2n$), но вопрос остается открытым.

В. Д. Мазуров

5.33. (И. Ихара). Рассмотрим алгебру кватернионов Q с нормой $f = x^2 - \tau y^2 - \rho z^2 + \rho\tau u^2$, $\rho, \tau \in \mathbb{Z}$. Предположим, что f является неопределенной и $\mathbb{Q}$-ранга 0, то есть $x = y = z = u = 0$, если $f = 0$ для $x, y, z, u \in \mathbb{Q}$. Рассмотрим Q как алгебру матриц

$$X = \begin{pmatrix} x + \sqrt{\tau} y & \rho(z + \sqrt{\tau} u) \\ z - \sqrt{\tau} u & x - \sqrt{\tau} y \end{pmatrix}$$

с $x, y, z, u \in \mathbb{Q}$. Пусть p — простое число, $p \nmid \rho\tau$. Рассмотрим группу G, состоящую из всех X с $x, y, z, u \in \mathbb{Z}^{(p)}$, $\det X = 1$, где $\mathbb{Z}^{(p)} = \{m/p^t \mid m, t \in \mathbb{Z}\}$.

Гипотеза: G обладает конгруэнц-подгрупповым свойством, то есть любая нецентральная нормальная подгруппа N из G содержит полную конгруэнц-подгруппу $N(\mathfrak{G}) = \{X \in G \mid X \equiv E \,(\operatorname{mod} \mathfrak{G})\}$ для некоторого $\mathfrak{G}$. Отметим, что конгруэнц-подгрупповое свойство не зависит от матричного представления Q.

Й. Менникe (J. Mennicke)

5.35. Пусть V — векторное пространство размерности n над полем. Говорят, что подгруппа G из $GL_n(V)$ *богата трансвекциями*, если $n \geqslant 2$ и для любой гиперплоскости $H \subseteq V$ и любой прямой $L \subseteq H$ в группе G найдется по крайней мере одна трансвекция с вычетной прямой L и неподвижным пространством H. Описать автоморфизмы подгрупп из $GL_2(V)$, богатых трансвекциями.

Ю. И. Мерзляков

5.36. Каковы проконечные группы, удовлетворяющие условию максимальности для замкнутых подгрупп?

Ю. Н. Мухин

5.38. Верно ли, что если A, B — конечно порожденные разрешимые хопфовы группы, то $A \times B$ — хопфова?

П. Нойман (P. M. Neumann)

5.39. Доказать, что каждая счетная группа может точно действовать как группа автоморфизмов конечно порожденной разрешимой группы (ступени разрешимости не больше 4). По поводу подоплеки этой задачи, в частности, о ее связи с задачей 8.50 см. (P. M. Neumann, in: *Groups–Korea, Pusan, 1988* (*Lect. Notes Math.*, **1398**), Springer, Berlin, 1989, 124–139).

П. Нойман (P. M. Neumann)

5.42. Существует ли в свободной группе ранга 2 бесконечная возрастающая цепь вербальных подгрупп, каждая из которых порождена как вербальная подгруппа одним элементом?

А. Ю. Ольшанский

5.44. Объединение $\mathfrak{A} = \bigcup\limits_{\alpha} \mathfrak{V}_\alpha$ многообразий групп (в решетке многообразий) будем называть *несократимым*, если $\bigcup\limits_{\beta \neq \alpha} \mathfrak{V}_\beta \neq \mathfrak{A}$ для любого индекса α. Всякое ли многообразие есть несократимое объединение (конечного или бесконечного числа) многообразий, не разложимых в объединение двух собственных подмногообразий?

А. Ю. Ольшанский

5.47. Всякая ли счетная абелева группа вкладывается в центр некоторой конечно определенной группы?

В. Н. Ремесленников

5.48. Пусть G и H — конечно порожденные финитно аппроксимируемые группы с одинаковыми семействами конечных гомоморфных образов. Изоморфны ли G и H, если одна из них — свободная (свободная разрешимая) группа?

В. Н. Ремесленников

5.52. Нетрудно показать, что конечная группа, совпадающая со своим коммутантом, является нормальным замыканием одного элемента. Верно ли то же самое для бесконечных конечно порожденных групп?

Дж. Уайголд (J. Wiegold)

***5.53.** (П. Скотт). Пусть p, q, r — различные простые числа. Доказать, что свободное произведение $G = C_p * C_q * C_r$ циклических групп порядков p, q, r не является нормальным замыканием одного элемента. По лемме 3.1 из (J. Wiegold, *J. Austral. Math. Soc.*, **17**, №2 (1974), 133–141) любой разрешимый и любой конечный образ группы G является нормальным замыканием одного элемента.

Дж. Уайголд (J. Wiegold)

*Доказано (J. Howie, *J. Pure Appl. Algebra*, **173**, №2 (2002), 167–176).

5.54. Пусть p, q, r — различные простые числа и $u(x, y, z)$ — коммутаторное слово от трех переменных. Доказать, что существует такое натуральное число n (может быть, бесконечно много таких чисел?), что знакопеременную группу $\mathbb{A}_n$ можно породить тремя элементами ξ, η, ζ, удовлетворяющими соотношениям $\xi^p = \eta^q = \zeta^r = \xi\eta\zeta \cdot u(\xi, \eta, \zeta) = 1$.

Дж. Уайголд (J. Wiegold)

5.55. Найти конечную p-группу, которую нельзя вложить в конечную p-группу с тривиальным мультипликатором. Отметим, что любая конечная группа вложима в группу с тривиальным мультипликатором.

Дж. Уайголд (J. Wiegold)

5.56. a) Верно ли, что любая конечная группа простого периода $p > 3$ может быть вложена в коммутант конечной группы периода p?

Дж. Уайголд (J. Wiegold)

5.59. Пусть G — локально конечная группа, являющаяся произведением p-подгруппы на q-подгруппу, где p и q — различные простые числа. Будет ли G $\{p, q\}$-группой?

Б. Хартли (B. Hartley)

5.67. Конечна ли произвольная периодическая финитно аппроксимируемая группа со слабым условием минимальности для подгрупп?

В. П. Шунков

Вопросы из 6-го издания, 1978 г.

6.1. Подгруппа H произвольной группы G называется *C-замкнутой*, если $H = C^2(H) = C(C(H))$, и *слабо C-замкнутой*, если для любого элемента x из H имеет место включение $C^2(x) \leqslant H$. Строение конечных групп, все собственные подгруппы которых C-замкнуты, изучено Гашютцем. Описать строение локально конечных групп, все собственные подгруппы которых слабо C-замкнуты.

В. А. Антонов, Н. Ф. Сесекин

6.2. Совокупность всех C-замкнутых подгрупп произвольной группы G является полной решеткой относительно операций $A \vee B = C(C(A) \cap C(B))$, $A \wedge B = A \cap B$. Описать группы, у которых решетка C-замкнутых подгрупп является подрешеткой решетки всех подгрупп. *В. А. Антонов, Н. Ф. Сесекин*

6.3. Группа G называется *группой типа* $(FP)_\infty$, если тривиальный G-модуль $\mathbb{Z}$ имеет резольвенту, состоящую из конечно порожденных проективных G-модулей. Класс всех групп типа $(FP)_\infty$ обладает парой замечательных свойств замкнутости относительно расширений и свободных произведений с объединением (R. Bieri, *Homological dimension of discrete groups*, Queen Mary College Math. Notes, London, 1976). Конечна ли любая периодическая группа типа $(FP)_\infty$? Это связано с вопросом о существовании бесконечной периодической конечно определенной группы. *Р. Бири (R. Bieri)*

6.5. Верно ли, что каждая разрешимая группа G типа $(FP)_\infty$ *конструктивизируема* в смысле (G. Baumslag, R. Bieri, *Math. Z.*, **151**, № 3 (1976), 249–257)? Другими словами, можно ли построить G из тривиальной группы с помощью конечных расширений и HNN-расширений? *Р. Бири (R. Bieri)*

6.9. Разлагается ли коммутант локально нормальной группы в произведение не более чем счетных поэлементно перестановочных подгрупп? *Ю. М. Горчаков*

6.10. Пусть p — простое число, а n — такое целое число, что $p > 2n + 1$. Пусть x, y — p-элементы из $GL_n(\mathbb{C})$. Если подгруппа $\langle x, y\rangle$ конечна, то она является абелевой p-группой (W. Feit, J. G. Thompson, *Pacif. J. Math.*, **11**, № 4 (1961), 1257–1262). Что можно сказать о группе $\langle x, y\rangle$, если она бесконечна?

Дж. Диксон (J. D. Dixon)

6.11. Пусть $\mathfrak{L}$ — класс локально компактных групп без малых подгрупп (см. D. Montgomery, L. Zippin, *Topological transformation groups*, New York, 1955; В. М. Глушков, *УМН*, **12**, № 2 (1957), 3–41). Изучить расширения групп из этого класса с целью получения прямого доказательства следующего факта: Для каждой группы G из $\mathfrak{L}$ существует $H \in \mathfrak{L}$ и (непрерывный) гомоморфизм $\vartheta\colon G \to H$ с дискретным ядром и с образом, тривиально пересекающимся с центром H. Этот результат вытекает из решения Глисона, Монтгомери и Циппина 5-й проблемы Гильберта (поскольку $\mathfrak{L}$ является классом конечномерных групп Ли, которые локально линейны). С другой стороны, прямое доказательство этого результата дало бы существенно более короткое решение 5-ой проблемы, поскольку присоединенное представление H точно на образе ϑ.

Дж. Диксон (J. D. Dixon)

***6.15.** Назовем многообразие *предлокально конечным*, если оно не локально конечно, но все его собственные подмногообразия локально конечны. Пример — многообразие абелевых групп. Сколько существует предлокально конечных многообразий групп?

А. В. Кузнецов

*Таких многообразий континуум (П. А. Кожевников, *О многообразиях групп большого нечетного периода*, Деп. 1612-В00, ВИНИТИ, М., 2000).

***6.16.** Назовем многообразие *бедным*, если число его подмногообразий не более чем счетно. Сколько существует бедных многообразий групп?

А. В. Кузнецов

*Таких многообразий континуум (П. А. Кожевников, *О многообразиях групп большого нечетного периода*, Деп. 1612-В00, ВИНИТИ, М., 2000; S. V. Ivanov, A. M. Storozhev, *Contemp. Math.*, **360** (2004), 55–62).

6.21. Г. Хигман доказал, что для каждого простого числа p существует такое натуральное число $\chi(p)$, что ступень нильпотентности любой конечной группы G, обладающей автоморфизмом порядка p, действующим без неподвижных точек на множестве неединичных элементов группы G, не превосходит $\chi(p)$. Одновременно он показал, что $\chi(p) \geqslant (p^2-1)/4$ для любой такой *функции Хигмана* χ. Найти наилучшую функцию Хигмана. Не будет ли ею функция, определенная равенствами $\chi(p) = (p^2-1)/4$ при $p > 2$, $\chi(2) = 1$? Известно, что это верно для $p \leqslant 7$.

В. Д. Мазуров

6.24. Проблема вхождения для группы кос с четырьмя нитями. Известно, что проблема вхождения для группы кос, число нитей у которых больше 4, неразрешима (Т. А. Маканина, *Мат. заметки*, **29**, №1 (1981), 31–33).

Г. С. Маканин

6.26. Пусть D — нормальное множество инволюций конечной группы G, $\Gamma(D)$ — граф с множеством вершин D и множеством ребер $\{(a,b) \mid a,b \in D,\ ab = ba \neq 1\}$. Описать конечные группы G с несвязным графом $\Gamma(D)$.

А. А. Махнев

6.28. Пусть A — элементарная 2-группа, являющаяся TI-подгруппой конечной группы G. Изучить строение группы G при условии, что слабое замыкание подгруппы A в силовской 2-подгруппе группы G абелево.

А. А. Махнев

6.29. Пусть конечная группа A изоморфна группе всех топологических автоморфизмов некоторой локально компактной группы G. Всегда ли существует дискретная группа, группа всех автоморфизмов которой изоморфна группе A? Для циклической A это верно; требование локальной компактности группы существенно (R. J. Wille, *Indag. Math.*, **25**, №2 (1963), 218–224).

О. В. Мельников

6.30. Пусть G — финитно аппроксимируемая хопфова группа, $\widehat{G}$ — ее проконечное пополнение. Является ли группа $\widehat{G}$ хопфовой (в топологическом смысле)?

О. В. Мельников

6.31. б) Пусть G — конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа, $d(G)$ — наименьшее число ее порождающих, $\delta(G)$ — наименьшее число топологических порождающих проконечного пополнения группы G. Известно (Г. А. Носков, *Мат. заметки*, **33**, №4 (1983), 489–498), что существуют группы G, для которых $d(G) > \delta(G)$. Ограничена ли функция d на множестве групп с фиксированным значением $\delta(G) \geqslant 2$?

О. В. Мельников

6.32. Пусть F_n — свободная проконечная группа конечного ранга $n > 1$. Верно ли, что для всякой нормальной подгруппы N свободной проконечной группы счетного ранга существует нормальная подгруппа группы F_n, изоморфная N?

О. В. Мельников

6.38. а) Пусть k — (коммутативное) поле. Найти все такие неприводимые подгруппы G из $GL_n(k)$, что $G \cap C \neq \varnothing$ для каждого класса C сопряженных элементов группы $GL_n(k)$. Я предполагаю, что $G = GL_n(k)$, за исключением случая, когда $n = \operatorname{char} k = 2$, поле k квадратично замкнуто и G сопряжена с группой всех матриц вида $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$, где $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

Прим. ред.: опровержение этой гипотезы анонсировано в (А. С. Зюбин, *Тезисы Междун. конф. Алгебра, логика и кибернетика, посв. 75-летию А. И. Кокорина (Иркутск, 2004)*, Иркутск, 2004, 33–35).

б) Из справедливости этого предположения следовало бы в общем случае, что произвольная подгруппа из $GL_n(k)$, пересекающаяся с каждым классом сопряженности, является параболической. Насколько этот факт верен для подгрупп других групп лиева типа?

П. Нойман (P. M. Neumann)

6.39. Класс групп $\mathfrak{K}$ называется *радикальным*, если он замкнут относительно взятия гомоморфных образов и нормальных подгрупп и каждая группа, порождаемая своими нормальными $\mathfrak{K}$-подгруппами, сама принадлежит классу $\mathfrak{K}$. Предлагаемый вопрос относится к теме «Радикальные классы и формулы УИП». Можно показать, что нетривиальный радикальный класс, определяемый универсальными формулами УИП, — это только класс всех групп. Недавно (в письме ко мне) Дж. Бергман построил серию локально конечных радикальных классов, определяемых формулами УИП. Существуют ли подобные не локально конечные классы, отличные от класса всех групп? В частности, имеется ли радикальный класс групп, замкнутый относительно декартова умножения, содержащий бесконечную циклическую группу и отличный от класса всех групп?

Б. И. Плоткин

6.45. Построить такую характеристическую подгруппу N конечно порожденной свободной группы F, что фактор-группа F/N бесконечна и проста. Из несуществования такой подгруппы вытекало бы, что $d(S^2) = d(S)$ для любой бесконечной конечно порожденной простой группы S. Есть основание предполагать, что это неверно.

Дж. Уайголд (J. Wiegold)

6.47. (Купер). Пусть G — группа, v — групповое слово от двух переменных и операция $x \odot y = v(x, y)$ определяет на множестве G строение новой группы $G_v = \langle G, \odot \rangle$. Верно ли, что группа G_v всегда принадлежит многообразию, порожденному группой G?

Е. И. Хухро

6.48. Верно ли, что любая бесконечная бинарно конечная p-группа непроста? Здесь p — простое число.

Н. С. Черников

6.51. Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная подформация некоторой формации $\mathfrak{X}$ конечных групп, Ω — множество всех максимальных однородных $\mathfrak{X}$-экранов формации $\mathfrak{F}$. Найти способ построения элементов из Ω с помощью максимального внутреннего локального экрана формации $\mathfrak{F}$. Что можно сказать о мощности множеств Ω? Определения см. в (Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, М., Наука, 1978).

Л. А. Шеметков

6.55. Группа G вида $G = F \rtimes H$ называется *группой Фробениуса* (или *фробениусовой группой*) *с ядром* F *и дополнением* H, если $H \cap H^g = 1$ для любого $g \in G \setminus H$ и $F \setminus \{1\} = G \setminus \bigcup\limits_{g \in G} H^g$. Существуют ли фробениусовы p-группы?

В. П. Шунков

6.56. Пусть $G = F \cdot \langle a \rangle$ — группа Фробениуса, причем дополнение $\langle a \rangle$ имеет простой порядок.

а) Если группа G бинарно конечна, то будет ли она локально конечной?

б) Если подгруппы $\langle a, a^g \rangle$ конечны для всех $g \in G$, то будет ли ядро F локально конечной группой?

В. П. Шунков

6.59. Группа G называется (*сопряженно, p-сопряженно*) *бипримитивно конечной*, если для любой ее конечной подгруппы H в $N_G(H)/H$ любые два элемента простого порядка (любые два сопряженных элемента, элемента простого порядка p) порождают конечную подгруппу. Доказать локальную конечность произвольной периодической (сопряженно) бипримитивно конечной группы (в частности, без инволюций) конечного ранга.

В. П. Шунков

6.60. Существуют ли бесконечные простые периодические (сопряженно) бипримитивно конечные группы с конечным числом порождающих элементов, содержащие как инволюции, так и неединичные элементы нечетных порядков?

В. П. Шунков

6.61. Будет ли непростой всякая бесконечная периодическая (сопряженно) бипримитивно конечная группа без инволюций?

В. П. Шунков

6.62. Будет ли конечной всякая (сопряженно, p-сопряженно) бипримитивно конечная группа, обладающая конечной максимальной подгруппой (p-подгруппой)? Для сопряженно бипримитивно конечных p-групп и для 2-сопряженно бипримитивно конечных групп ответ утвердительный (В. П. Шунков, *Алгебра и логика*, **9**, № 4 (1970), 484–496; **11**, № 4 (1972), 470–493; **12**, № 5 (1973), 603–614), а для произвольных периодических групп утверждение неверно (см. Архив, 3.9).

В. П. Шунков

Вопросы из 7-го издания, 1980 г.

***7.1.** Известно, что свободная периодическая группа $B(m,p)$ простого периода $p > 665$ обладает многими свойствами, аналогичными свойствам абсолютно свободных групп (см. С. И. Адян, *Проблема Бернсайда и тождества в группах*, М., Наука, 1975). Верно ли, что все нормальные подгруппы группы $B(m,p)$ не являются свободными периодическими группами?

С. И. Адян

---

*Да, верно для всех достаточно больших p (A. Yu. Ol'shanskii, in: *Groups, rings, Lie and Hopf algebras, Int. Workshop, Canada, 2001*, Kluwer, Dordrecht, 2003, 179–187).

7.3. Доказать, что периодическое произведение нечетного показателя $n \geqslant 665$ неединичных групп $F_1, \ldots, F_k$, не содержащих инволюций, не может быть порождено менее чем k элементами. Отсюда на основании работы (С. И. Адян, *ДАН СССР*, **241**, №4 (1978), 745–748) последовало бы существование k-порожденных, но не $(k-1)$-порожденных простых групп при любом $k > 0$.

С. И. Адян

7.5. Группу назовем *неразложимой*, если всякие две ее собственные подгруппы порождают собственную подгруппу. Описать неразложимые двуступенно разрешимые периодические группы.

В. В. Беляев

7.15. Доказать, что если подгруппа $F^*(G)$ квазипроста и $\alpha \in \operatorname{Aut} G$, $|\alpha| = 2$, то $C_G(\alpha)$ содержит инволюцию вне $Z(F^*(G))$, за исключением случая, когда $F^*(G)$ обладает кватернионной силовской 2-подгруппой.

Р. Грайс (R. Griess)

7.17. Всегда ли число максимальных подгрупп конечной группы G не превосходит $|G| - 1$?

Прим. ред. 1998 г.: это доказано для разрешимых групп (G. E. Wall, *J. Austral. Math. Soc.*, **2** (1961–62), 35–59) и для симметрических групп $\mathbb{S}_n$ при достаточно больших n (M. Liebeck, A. Shalev, *J. Combin. Theory, Ser. A*, **75** (1996), 341–352).

Р. Грайс (R. Griess)

7.19. Построить конкретный пример конечно определенной простой группы, в которой проблема равенства слов не разрешима с помощью примитивной рекурсии.

Ф. Каннонито (F. B. Cannonito)

7.21. Существует ли алгоритм, распознающий метабелевость произвольной конечно определенной разрешимой группы?

Ф. Каннонито (F. B. Cannonito)

7.23. Существует ли алгоритм, позволяющий распознавать по списку тождеств, разрешима ли элементарная теория задаваемого им многообразия групп, то есть (см. А. П. Замятин, *Алгебра и логика*, **17**, №1 (1978), 20–27) является ли это многообразие абелевым?

А. В. Кузнецов

7.25. Связывая со словами в алфавите x, x^{-1}, y, y^{-1}, z, z^{-1}, ... выражаемые ими операции, понимаемые как функции от переменных $x, y, z, \ldots$, будем говорить, что слово A *выразимо через слова* $B_1, \ldots, B_n$ *на группе* G, если A можно получить, исходя из слов $B_1, \ldots, B_n$ и переменных, посредством конечного числа подстановок слов друг в друга и замен слова тождественно равным ему на G словом. Список слов будем называть *функционально полным на* G, если через эти слова выразимо на G всякое слово. Слово B назовем *шефферовым на* G, если на G всякое слово выразимо через B (ср. А. В. Кузнецов, *Мат. исследования*, Кишинев, **6**, №4 (1971), 75–122). Существует ли алгоритм, позволяющий распознавать

а) по слову B, является ли B шефферовым на всякой группе? Ср. с задачей обозрения всех таких слов в (А. Г. Курош, *Теория групп*, М., Наука, 1967, с. 435); примеры их: xy^{-1}, $x^{-1}y^2z$, $x^{-1}y^{-1}zx$.

б) по списку слов, функционально полон ли он на всякой группе?

в) по словам $A, B_1, \ldots, B_n$, выразимо ли A через $B_1, \ldots, B_n$ на всякой группе? Это вопрос из (А. В. Кузнецов, *там же*, с. 112).

г) то же на всякой конечной группе? (На ней, например, x^{-1} выразимо через xy). Для фиксированной конечной группы алгоритм существует (ср. А. В. Кузнецов, *там же*; § 8).

А. В. Кузнецов

7.26. *Порядковой высотой* многообразия групп назовем супремум порядковых типов всевозможных вполне упорядоченных по включению цепей его собственных подмногообразий. Ясно, что она конечна, счетна или равна ω_1. Всякое ли счетное порядковое число является порядковой высотой некоторого многообразия?

А. В. Кузнецов

7.27. Верно ли, что группа $SL_n(q)$ при достаточно большом q содержит диагональную матрицу, не лежащую ни в одной собственной неприводимой подгруппе группы $SL_n(q)$, исключая клеточномономиальные? При $n = 2$, 3 известен положительный ответ (В. М. Левчук, *в кн. Некоторые вопросы теории групп и колец*, Ин-т физики СО АН СССР, Красноярск, 1973). Аналогичные вопросы представляют интерес и для других групп Шевалле.

В. М. Левчук

7.28. Группу Шевалле $G(K)$ над коммутативным кольцом K, связанную с системой корней Φ, определим как в (Р. Стейнберг, *Лекции о группах Шевалле*, М., Мир, 1975); она порождается корневыми подгруппами $x_r(K)$, $r \in \Phi$. Назовем *элементарным ковром типа* Φ *над* K всякий набор аддитивных подгрупп $\{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ кольца K с условием

$$c_{ij,rs}\mathfrak{A}_r^i\mathfrak{A}_s^j \subseteq \mathfrak{A}_{ir+js} \quad \text{при } r, s, ir+js \in \Phi,\ i>0,\ j>0,$$

где $c_{ij,rs}$ — константы, определяемые коммутаторной формулой Шевалле, $\mathfrak{A}_r^i = \{a^i \mid a \in \mathfrak{A}_r\}$. Какие условия на элементарный ковер (в терминах $\mathfrak{A}_r$) необходимы и достаточны для того, чтобы подгруппа $\langle x_r(\mathfrak{A}_r) \mid r \in \Phi\rangle$ группы $G(K)$ пересекалась с подгруппой $x_r(K)$ по $x_r(\mathfrak{A}_r)$? См. также 15.46.

В. М. Левчук

***7.30.** Какие конечные простые группы порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны?

В. Д. Мазуров

---

*Ответ известен mod CFSG. Для знакопеременных групп и групп лиева типа см. (Я. Н. Нужин, *Алгебра и логика*, **36**, № 4 (1997), 422–440). Для спорадических групп Б. Л. Абашеев, А. В. Ершов, Н. С. Невмержицкая, С. Нортон, Я. Н. Нужин, А. В. Тимофеенко показали, что группы M_{11}, M_{22}, M_{23}, McL не порождаются нужным образом, а остальные порождаются; см. подробнее (В. Д. Мазуров, *Сиб. матем. ж.*, **44**, № 1 (2003), 193–198).

7.31. Пусть группа A автоморфизмов конечной неабелевой 2-группы G действует транзитивно на множестве инволюций группы G. Будет ли A разрешимой?

Группы G, для которых существует такая группа автоморфизмов A, были разбиты на несколько классов в (F. Gross, *J. Algebra*, **40**, № 2 (1976), 348–353). Для одного из этих классов положительный ответ получен Е. Г. Брюхановой (*Алгебра и логика*, **20**, № 1 (1981), 5–21).

В. Д. Мазуров

7.33. Элементарная TI-подгруппа V конечной группы G называется *подгруппой некорневого типа*, если $1 \neq N_V(V^g) \neq V$ для некоторого $g \in G$. Описать конечные группы G, содержащие 2-подгруппу V некорневого типа, для которой условие $[V, V^g] = 1$ влечет, что все инволюции из VV^g сопряжены с элементами из V.

А. А. Махнев

7.34. Во многих спорадических группах 2-ранги централизаторов 3-элементов не больше 2. Описать конечные группы с этим условием.

А. А. Махнев

7.35. Какие многообразия групп $\mathfrak{V}$ обладают следующим свойством: группа $G/\mathfrak{V}(G)$ финитно аппроксимируема для всякой финитно аппроксимируемой группы G?

О. В. Мельников

***7.37.** а) Проконечную группу назовем *строго полной*, если всякая ее подгруппа конечного индекса открыта. Известно (B. Hartley, *Math. Z.*, **168**, № 1 (1979), 71–76), что строго полными являются конечно порожденные проконечные группы, обладающие конечным нормальным рядом с пронильпотентными факторами. Будет ли строго полной произвольная конечно порожденная проконечная группа?

О. В. Мельников

---

*Да, будет (N. Nikolov, D. Segal, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser.* I, **337** (2003), 303–308; *to appear in Ann. Math.*).

7.38. *Многообразием проконечных групп* назовем непустой класс проконечных групп, замкнутый относительно перехода к подгруппам, фактор-группам и тихоновским произведениям. Подмногообразие $\mathfrak{V}$ многообразия $\mathfrak{N}$ всех пронильпотентных групп назовем (*локально*) *нильпотентным*, если все (конечно порожденные) группы из $\mathfrak{V}$ нильпотентны.

а) Верно ли, что всякое ненильпотентное подмногообразие из $\mathfrak{N}$ содержит ненильпотентное локально нильпотентное подмногообразие?

б) Тот же вопрос для подмногообразий многообразия всех про-p-групп (для фиксированного простого числа p).

О. В. Мельников

7.39. Пусть $G = \big\langle a, b \mid a^p = (ab)^3 = b^2 = (a^\sigma b a^{2/\sigma} b)^2 = 1 \big\rangle$, где p — простое число, σ — целое число, не делящееся на p. Группа $PSL_2(p)$ является фактор-группой группы G, так что имеет место короткая точная последовательность

$$1 \to N \to G \to PSL_2(p) \to 1.$$

Для всех $p > 2$ существует такое σ, что $N = 1$, например, $\sigma = 4$. Пусть N^{ab} — фактор-группа группы N по ее коммутанту. Известно, что для некоторых p существует такое σ, что группа N^{ab} бесконечна (например, для $p = 41$ можно взять $\sigma^2 \equiv 2 \pmod{41}$), а для других p (например, для $p = 43$) группа N^{ab} конечна при любом σ.

а) Бесконечно ли множество таких простых чисел p, для которых группа N^{ab} конечна при любом σ?

б) Существует ли арифметическое условие на σ, при котором группа N^{ab} конечна?

Й. Менникe (J. Mennicke)

7.40. Дать описание (решетки) подгрупп, заключенных между заданной классической группой матриц над кольцом и подгруппой всех ее матриц с коэффициентами в подкольце (Ю. И. Мерзляков, *в кн. Алгебра. Топология. Геометрия. 1970*, ВИНИТИ, М., 1971, 75–110).

Ю. И. Мерзляков

7.41. (Дж. Уилсон). Всякая ли линейная $\overline{RI}$-группа является $\overline{RN}$-группой?

Ю. И. Мерзляков

***7.42.** Группа U называется *F_q-группой*, $q \in \pi(U)$, если для всякой ее конечной подгруппы K и всяких двух элементов a, b порядка q из $T = N_U(K)/K$ существует такой элемент $c \in T$, что группа $\langle a,\, b^c\rangle$ конечна. Если всякая подгруппа H группы U является F_q-группой для любого $q \in \pi(H)$, то U называется *F^*-группой* (В. П. Шунков, 1977).

а) Всякая ли примарная F^*-группа с условием минимальности для подгрупп почти абелева?

б) Обладает ли полной частью F^*-группа с условием минимальности для (абелевых) подгрупп?

А. Н. Остыловский

*Нет. Контрпримером для обоих вопросов служит бесконечная группа Ольшанского, все собственные подгруппы которой сопряжены и имеют простой порядок (А. Ю. Ольшанский, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **44** (1980), 309–321).

7.45. Совпадает ли Q-теория всех конечных групп (в смысле 2.40) с Q-теорией некоторой одной конечно определенной группы?

Д. М. Смирнов

7.49. Пусть G — конечно порожденная группа, N — минимальная нормальная подгруппа группы G, являющаяся элементарной p-группой. Верно ли, что либо N — конечная группа, либо функция роста элементов из N относительно конечной системы порождающих группы G ограничена снизу экспонентой?

В. И. Трофимов

7.50. Изучить строение примитивных групп подстановок (конечных и бесконечных), в которых стабилизатор любых трех попарно различных символов тривиален. Этот вопрос тесно связан с вопросом описания групп, среди максимальных подгрупп которых есть группа Фробениуса.

А. Н. Фомин

7.51. Что представляют из себя примитивные группы подстановок (конечные и бесконечные), в которых есть регулярная подорбита, то есть в которых стабилизатор символа действует по крайней мере на одной из своих орбит точно и регулярно?

А. Н. Фомин

7.52. Описать локально конечные примитивные группы подстановок, центр любой силовской 2-подгруппы которых содержит инволюции, стабилизирующие точно один символ. Случай конечных групп полностью изучен Д. Хольтом в 1978 году.

А. Н. Фомин

7.54. Существует ли группа бесконечного специального ранга, представимая в виде произведения двух своих подгрупп, специальные ранги которых конечны?

Н. С. Черников

7.55. Верно ли, что всякая группа, факторизуемая двумя почти абелевыми подгруппами, почти разрешима?

Н. С. Черников

7.56. (Б. Амберг). Всякая ли группа, факторизуемая двумя подгруппами, удовлетворяющими условию минимальности (соответственно максимальности), сама удовлетворяет условию минимальности (соответственно максимальности)?

Н. С. Черников

7.57. а) Порождающее множество конечно определенной группы G, состоящее из наименьшего возможного числа элементов $d(G)$, назовем *базой* группы G. Пусть $r_M(G)$ — наименьшее число соотношений, необходимых для задания группы G в базе M, и $r(G)$ — минимум чисел $r_M(G)$ по всем базам M группы G. Известно, что $r_M(G) \leqslant d(G) + r(G)$ для любой базы M. Может ли для некоторой базы M выполняться равенство?

В. А. Чуркин

7.58. Пусть F — абсолютно свободная группа, R — ее нормальная подгруппа, $\mathfrak{V}$ — многообразие групп. Известно (Х. Нейман, *Многообразия групп*, М., Мир, 1969), что группа $F/\mathfrak{V}(R)$ изоморфно вкладывается в $\mathfrak{V}$-вербальное сплетение $\mathfrak{V}$-свободной группы того же ранга, что и F, с группой F/R. Найти критерий, указывающий, какие элементы сплетения принадлежат образу этого вложения. В случае, когда $\mathfrak{V}$ — многообразие абелевых групп, критерий известен (В. Н. Ремесленников, В. Г. Соколов, *Алгебра и логика*, **9**, № 5 (1970), 566–578).

Г. Г. Ябанжи

Вопросы из 8-го издания, 1982 г.

8.1. Охарактеризовать все такие группы (или, по меньшей мере, такие разрешимые группы) G и такие поля F, что каждый неприводимый FG-модуль конечномерен над центром его кольца эндоморфизмов. Частичные ответы см. в (B. A. F. Wehrfritz, *Glasgow Math. J.*, **24**, №1 (1983), 169–176).

Б. Верфриц (B. A. F. Wehrfritz)

8.2. Пусть G — свободное произведение двух полициклических групп с объединением по нормальной подгруппе каждого сомножителя. Изоморфна ли G линейной группе? Группа G финитно аппроксимируема (G. Baumslag, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **106**, №2 (1963), 193–209) и ответ положителен, если объединяемая часть без кручения: абелева (B. A. F. Wehrfritz, *Proc. London Math. Soc.*, **27**, №3 (1973), 402–424) или нильпотентная (M. Shirvani, 1981, неопубликовано).

Б. Верфриц (B. A. F. Wehrfritz)

8.3. Пусть m и n — положительные целые числа и p — простое число. Пусть $P_n(\mathbb{Z}_{p^m})$ — группа всех таких $(n\times n)$-матриц (a_{ij}) над целыми числами по модулю p^m, что $a_{ii}\equiv 1$ для всех i и $a_{ij}\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p)$ для всех $i>j$. Группа $P_n(\mathbb{Z}_{p^m})$ является конечной p-группой. Для каких m и n она регулярна?

Прим. ред. 2001 г.: известно, что группа $P_n(\mathbb{Z}_{p^m})$ регулярна, если $mn<p$ (Ю. И. Мерзляков, *Алгебра и логика*, **3**, №4 (1964), 49–59). Случай $m=1$ полностью исследован А. В. Ягжевым в (*Мат. заметки*, **56**, №6 (1994), 106–116), хотя эта работа ошибочна при $m>1$. Случай $m=2$ исследован в (С. Г. Колесников, *Исследования по анализу и алгебре*, вып. 3, Томский ун-т, Томск, 2001, 117–125).

Б. Верфриц (B. A. F. Wehrfritz)

8.4. Построить конечную нильпотентную лупу, не имеющую конечной базы тождеств.

М. Воон-Ли (M. R. Vaughan-Lee)

8.5. Доказать, что для конечной группы X, произвольного поля F и нетривиального неприводимого FX-модуля M имеет место неравенство

$$\frac{1}{|X|}\sum_{x\in X}\dim\,\mathrm{fix}(x)\leqslant\frac{1}{2}\dim\,M.$$

М. Воон-Ли (M. R. Vaughan-Lee)

***8.7.** Существует ли неаменабельная конечно определенная группа, не содержащая свободных подгрупп ранга 2?

Р. И. Григорчук

*Да, существует (A. Yu. Ol'shanskii, M. V. Sapir, *Publ. Math. Inst. Hautes Étud. Sci.*, **96** (2002), 43–169).

8.8. б) (Д. В. Аносов). Существует ли конечно определенная группа G, отличная от циклической и содержащая такой элемент a, что всякий элемент группы G сопряжен с некоторой степенью элемента a?

Р. И. Григорчук

8.9. (Чжоу). По определению, группа G обладает *свойством* P, если для всякого ее конечного подмножества F существует конечное подмножество $S \supset F$ и подмножество $X \subset G$ такие, что $x_1 S \cap x_2 S$ пусто при любых $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, и $G = \bigcup_{x \in X} Sx$. Всякая ли группа обладает свойством P?

Р. И. Григорчук

8.10. а) Конечна или бесконечна группа $G = \langle a, b \mid a^n = 1,\ ab = b^3 a^3 \rangle$ при $n = 7$. Все другие случаи известны. См. также Архив, 7.7 и 8.10 б.

Д. Джонсон (D. L. Johnson)

8.11. Рассмотрим группу $M = \langle x, y, z, t \mid [x, y] = [y, z] = [z, x] = (x, t) = (y, t) = (z, t) = 1 \rangle$, где $[x, y] = x^{-1} y^{-1} x y$ и $(x, t) = x^{-1} t^{-1} x^{-1} t x t$. Подгруппа $H = \langle x, t, y \rangle$ изоморфна группе кос $\mathfrak{B}_4$ и нормально дополняется подгруппой $N = \langle (z x^{-1})^M \rangle$. Является ли N свободной группой (?) счетного бесконечного ранга (?), на которой H при сопряжении действует точно?

Д. Джонсон (D. L. Johnson)

8.12. Пусть $D0$ означает класс конечных групп *нулевой дефективности*, то есть имеющих копредставление $\langle X \mid R \rangle$ с $|X| = |R|$.

а) Содержит ли $D0$ какую-нибудь 3-порожденную p-группу для $p \geqslant 5$?

*б) Являются ли центральные факторы нильпотентных $D0$-групп 3-порожденными?

в) Ограничена ли ступень разрешимости разрешимых $D0$-групп?

г) Какие неабелевы простые группы могут встречаться в качестве композиционных факторов $D0$-групп?

Д. Джонсон (D. L. Johnson), Э. Робертсон (E. F. Robertson)

---

*б) Нет, не всегда (G. Havas, E. F. Robertson, *Commun. Algebra*, **24** (1996), 3483–3487).

8.14. б) Предположим, что G — экзистенциально замкнутая группа, принадлежащая одному из классов $L\mathfrak{N}^+$, $L\mathfrak{S}_\pi$, $L\mathfrak{S}^+$, $L\mathfrak{S}$, состоящих из, соответственно, всех локально нильпотентных групп без кручения, всех локально разрешимых π-групп, всех локально разрешимых групп без кручения и всех локально разрешимых групп. Верно ли, что G автоморфно проста?

Экзистенциальная замкнутость G — локальное свойство и, по-видимому, из него сложно получать глобальные свойства группы G. См. также Архив, 8.14 а.

О. Кегель (O. H. Kegel)

8.15. (Известный вопрос). Всякая ли $\widetilde{N}$-группа является $\overline{Z}$-группой? Определения см. в (М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, *Основы теории групп*, изд. 3-е, М., Наука, 1982, с. 205).

Ш. С. Кемхадзе

8.16. Замкнут ли класс $\overline{Z}$-групп относительно взятия нормальных подгрупп?

Ш. С. Кемхадзе

8.19. Равносильны ли какие-нибудь из следующих свойств (разрешимых) многообразий групп:

1) удовлетворять условию минимальности для подмногообразий,
2) не иметь бесконечной независимой системы тождеств,
3) быть бедным в смысле 6.16?

Ю. Г. Клейман

***8.20.** Какова мощность множества всех многообразий, покрывающих абелево (нильпотентное? кроссово? наследственно конечно базируемое?) многообразие групп? Вопрос связан с 4.46 и 4.73.

Ю. Г. Клейман

*Имеется континуум многообразий, покрывающих многообразие A абелевых групп, так же как и многообразие A_n абелевых групп достаточно большого нечетного периода n (П. А. Кожевников, *О многообразиях групп большого нечетного периода*, Деп. 1612-В00, ВИНИТИ, М., 2000; S. V. Ivanov, A. M. Storozhev, *Contemp. Math.*, **360** (2004), 55–62).

8.21. Если коммутант G' группы G, свободной в некотором многообразии, периодичен, то является ли он группой конечного периода?

Л. Ковач (L. G. Kovács)

8.23. Если диэдральная группа D порядка 18 является секцией прямого произведения $A \times B$, то должна ли хотя бы одна из групп A и B иметь секцию, изоморфную D?

Л. Ковач (L. G. Kovács)

8.24. Доказать, что всякая линейно упорядоченная группа конечного ранга разрешима.

В. М. Копытов

8.25. Существует ли алгоритм, позволяющий по тождеству распознавать, является ли задаваемое им многообразие групп бедным (в смысле 6.16)?

А. В. Кузнецов

8.27. Обладает ли решетка всех многообразий групп хотя бы одним нетождественным автоморфизмом?

А. В. Кузнецов

8.29. Существуют ли локально нильпотентные группы без центра, удовлетворяющие слабому условию минимальности для нормальных подгрупп?

Л. А. Курдаченко

8.30. Пусть $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ — классы Фиттинга разрешимых групп, удовлетворяющие условию Локкета: $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{S}_* = \mathfrak{X}_*$, $\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{S}_* = \mathfrak{Y}_*$, где $\mathfrak{S}$ означает класс Фиттинга всех разрешимых групп, а звездочка — нижнюю группу секции Локкета, определяемую данным классом Фиттинга. Удовлетворяет ли $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y}$ условию Локкета?

Прим. ред. 2001 г.: ответ положителен, если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ локальны (A. Grytczuk, N. T. Vorob'ev, *Tsukuba J. Math.*, **18**, №1 (1994), 63–67).

Х. Лауш (H. Lausch)

8.31. Верно ли, что $PSL_2(7)$ — единственная конечная простая группа, у которой всякая собственная подгруппа дополняема в некоторой большей подгруппе?

В. М. Левчук

8.33. Пусть a, b — два элемента группы, причем a имеет бесконечный порядок. Найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы выполнялось равенство $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \langle a^n, b\rangle = \langle b\rangle$.

Ф. Н. Лиман

8.34. Пусть G — конечная группа. Верно ли, что неразложимые проективные $\mathbb{Z}G$-модули конечно порождены (и следовательно локально свободны)?

П. Линнел (P. A. Linnell)

8.35. в) Перечислить классы сопряженных максимальных подгрупп в простой спорадической группе F_1. *В. Д. Мазуров*

8.40. Описать конечные группы, порождаемые классом инволюций D со следующим свойством: если $a, b \in D$ и $|ab| = 4$, то $[a, b] \in D$. Это условие выполняется, например, если D — класс инволюций известной простой конечной группы, причем $\langle C_D(a)\rangle$ является 2-группой для каждого $a \in D$. *А. А. Махнев*

8.41. Какова конечная группа G, в которой нормальное множество инволюций D содержит непустое собственное подмножество T со следующими свойствами:
1) $C_D(a) \subseteq T$ для любого a из T,
2) если $a, b \in T$ и $ab = ba \neq 1$, то $C_D(ab) \subseteq T$? *А. А. Махнев*

8.42. Описать конечные группы, в которых разрешимые подгруппы нечетного индекса имеют единичную 2-длину. Известно, например, что этому условию удовлетворяют группы $L_n(2^m)$. *А. А. Махнев*

8.43. (Ф. Тиммесфельд). Пусть T — силовская 2-подгруппа конечной группы G и $\langle N(B) \mid B$ — нетривиальная характеристическая подгруппа из $T\rangle$ — собственная подгруппа группы G. Описать группу G, если $F^*(M) = O_2(M)$ для любой 2-локальной подгруппы M, содержащей T. *А. А. Махнев*

8.44. Доказать или опровергнуть, что для почти всех простых чисел p группа $G_p = \langle a, b \mid a^2 = b^p = (ab)^3 = (b^r ab^{-2r} a)^2 = 1\rangle$, где $r^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, бесконечна. Решение этого вопроса имело бы интересные топологические приложения. С помощью вычислительной машины доказана конечность группы G_p при $p \leqslant 17$.

Й. Менникe (J. Mennicke)

8.45. Когда из аппроксимируемости группы $\mathfrak{X}$- и $\mathfrak{Y}$-группами следует ее аппроксимируемость $(\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y})$-группами? *Ю. И. Мерзляков*

8.50. На конференции в Обервольфахе в 1979 году я демонстрировал конечно порожденную разрешимую (ступени 3) группу G и такой ненулевой циклический $\mathbb{Z}G$-модуль V, что $V \cong V \oplus V$. Возможно ли это для метабелевой группы G? Я предполагаю, что невозможно. Подоплеку этой проблемы и детали конструкции см. в (P. M. Neumann, in: *Groups–Korea, Pusan, 1988* (*Lect. Notes Math.*, **1398**), Springer, Berlin, 1989, 124–139). *П. Нойман (P. M. Neumann)*

8.51. (Дж. Маккэй). Если G — конечная группа и p — простое число, то пусть $m_p(G)$ означает число обыкновенных неприводимых характеров группы G, степени которых не делятся на p. Пусть P — силовская p-подгруппа группы G. Верно ли, что $m_p(G) = m_p(N_G(P))$? *Й. Олссон (J. B. Olsson)*

8.52. (Известный вопрос). Существуют ли бесконечные конечно определенные периодические группы? Ср. с 6.3. *А. Ю. Ольшанский*

8.53. а) Пусть n — достаточно большое нечетное число. Описать автоморфизмы свободной бернсайдовой группы $B(m,n)$ периода n с m порождающими.

А. Ю. Ольшанский

8.54. а) (Известный вопрос). Классифицировать метабелевы многообразия групп (или показать, что это в определенном смысле «дикая» задача).

б) Описать тождества 2-порожденных метабелевых групп, т. е. классифицировать многообразия, порождаемые такими группами. *А. Ю. Ольшанский*

8.55. Легко видеть, что множество квазимногообразий групп, в каждом из которых выполнено нетривиальное тождество, является полугруппой относительно умножения квазимногообразий. Свободна ли эта полугруппа?

А. Ю. Ольшанский

8.59. Пусть все собственные замкнутые нормальные подгруппы локально компактной локально нильпотентной группы G компактны. Содержит ли G открытую компактную нормальную подгруппу? *В. М. Полецких, И. В. Протасов*

8.60. Описать локально компактные компактно покрываемые примарные локально разрешимые группы, все замкнутые абелевы подгруппы которых имеют конечный ранг. *В. М. Полецких, В. С. Чарин*

8.62. Описать локально компактные локально пронильпотентные группы с компактным в E-топологии пространством замкнутых нормальных подгрупп. Для дискретных групп соответствующий вопрос решен. *И. В. Протасов*

8.64. Обладает ли независимым базисом квазитождеств класс всех конечных групп? *А. К. Румянцев, Д. М. Смирнов*

8.67. Существуют ли группы Голода, у которых ранги всех абелевых подгрупп конечны? Здесь под *группой Голода* понимается конечно порожденная ненильпотентная подгруппа присоединенной группы нилькольца. Для всей присоединенной группы нилькольца вопрос решается отрицательно (Я. П. Сысак, *Тезисы 17-й Всесоюз. алгебр. конф.*, часть 1, Минск, 1983, с. 180). *А. И. Созутов*

8.68. Пусть $G = \langle a, b \mid r = 1\rangle$, где r — циклически несократимое слово, не являющееся собственной степенью никакого слова от a, b. Если G финитно аппроксимируема, то будет ли группа $G_t = \langle a, b \mid r^t = 1\rangle$, $t > 1$, финитно аппроксимируемой?

Ч. Тан (C. Y. Tang)

8.69. Является ли любая группа с одним соотношением и с нетривиальным кручением финитно аппроксимируемой относительно сопряженности?

Ч. Тан (C. Y. Tang)

8.72. Существует ли конечно определенная группа, не являющаяся ни свободной, ни циклической простого порядка, любая собственная подгруппа которой свободна?

Ч. Тан (C. Y. Tang)

8.74. Субнормальную подгруппу $H \lhd\lhd G$ группы G назовем *хорошей*, если $\langle H, J \rangle \lhd\lhd G$ как только $J \lhd\lhd G$. Верно ли, что пересечение двух хороших субнормальных подгрупп является хорошей подгруппой?

Дж. Томпсон (J. G. Thompson)

8.75. (Известный вопрос). Пусть G — конечная примитивная группа подстановок на Ω и пусть α, β — различные точки из Ω. Всегда ли существует такой элемент $g \in G$, что $\alpha g = \beta$ и g не оставляет неподвижной ни одну точку из Ω?

Дж. Томпсон (J. G. Thompson)

***8.76.** Дать реалистичную верхнюю оценку для ранга без кручения конечно порожденной нильпотентной группы в терминах рангов ее абелевых подгрупп. Более точно, для каждого целого n обозначим через $f(n)$ наибольшее целое число h, для которого существует такая конечно порожденная нильпотентная группа ранга без кручения h, что ранги без кручения всех ее абелевых подгрупп не превосходят n. Легко заметить, что число $f(n)$ ограничено сверху величиной $n(n+1)/2$. Описать поведение $f(n)$ при больших n. Ограничена ли функция $f(n)$ снизу квадратичной функцией от n?

Дж. Уилсон (J. S. Wilson)

*Да, ограничена (M. V. Milenteva, *J. Group Theory*, **7**, №3 (2004), 403–408).

8.77. Существуют ли сильно регулярные графы с параметрами $\lambda = 0$, $\mu = 2$ степени $k > 10$? Известны такие графы для $k = 5$ и $k = 10$, их группы автоморфизмов — примитивные группы подстановок ранга 3.

Д. Г. Фон-Дер-Флаасс

8.78. Известно, что существует счетная локально конечная группа, которая содержит изоморфную копию любой другой счетной локально конечной группы. Для каких других классов счетных групп существует такая «наибольшая» группа? В частности, какова ситуация для периодических локально разрешимых групп? периодических локально нильпотентных групп?

Б. Хартли (B. Hartley)

8.79. Существует ли бесконечная счетная локально конечная совершенная группа (совершенность понимается в смысле отсутствия центра и внешних автоморфизмов)? Несчетная существует (K. K. Hickin, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **239** (1978), 213–227).

Б. Хартли (B. Hartley)

8.82. Пусть $\mathfrak{H}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}^+ = \{(z,r) \mid z \in \mathbb{C},\ \ r > 0\}$ — трехмерное пространство Пуанкаре, на котором действует группа $SL_2(\mathbb{C})$ по правилу

$$(r,z)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \left(\frac{(az+b)(\overline{cz+d}) + a\bar{c}r^2}{|cz+d|^2 + |c|^2 r^2},\ \frac{r}{|cz+d|^2+|c|^2r^2}\right).$$

Пусть $\mathfrak{o}$ — кольцо целых чисел поля $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$, где $D < 0$, π — простое число, для которого $\pi\overline{\pi}$ — простое число из $\mathbb{Z}$, и пусть

$$\Gamma = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathfrak{o}) \mid b \equiv 0 \pmod{\pi}\right\}.$$

Добавив к пространству $\Gamma \setminus \mathfrak{H}^3$ две вершины, получим трехмерное компактное пространство $\overline{\Gamma \setminus \mathfrak{H}^3}$.

Вычислить $r(\pi) = \dim_{\mathbb{Q}} H_1(\overline{\Gamma \setminus \mathfrak{H}^3}, \mathbb{Q}) = \dim_{\mathbb{Q}}(\Gamma^{\mathrm{ab}} \otimes \mathbb{Q})$.

Например, если $D = -3$, то $r(\pi)$ впервые отлично от нуля при $\pi \mid 73$ (тогда $r(\pi) = 1$), а если $D = -4$, то $r(\pi) = 1$ при $\pi \mid 137$.

Х. Хеллинг (H. Helling)

8.83. В обозначениях 8.82 при $r(\pi) > 0$ с помощью алгебр Гекке можно определить формальный ряд Дирихле с эйлеровым произведением (см. Г. Шимура, *Введение в арифметическую теорию автоморфных функций*, М., Мир, 1973, с. 87). Существует ли алгебраическое многообразие Хассе–Вейля, ζ-функцией которого является этот ряд Дирихле? Имеется несколько гипотез.

Х. Хеллинг (H. Helling)

8.85. Построить конечную p-группу G, у которой подгруппа Хьюза $H_p(G) = \langle x \in G \mid |x| \neq p\rangle$ нетривиальна и имеет индекс p^3.

Е. И. Хухро

8.86. (Известный вопрос). Пусть все собственные замкнутые подгруппы локально компактной локально нильпотентной группы G компактны. Верно ли, что если G некомпактна, то она абелева?

В. С. Чарин

Вопросы из 9-го издания, 1984 г.

9.1. Группа G называется *потентной*, если для каждого элемента x из G и каждого натурального числа n, делящего порядок x (мы считаем, что ∞ делится на любое натуральное число), существует конечный гомоморфный образ группы G, в котором порядок образа x равен точно n. Является ли свободное произведение двух потентных групп потентной группой? *Р. Алленби (R. B. J. T. Allenby)*

9.4. Известно, что если $\mathfrak{M}$ — многообразие (квазимногообразие, псевдомногообразие) групп, то класс $I\mathfrak{M}$ всех квазигрупп, изотопных группам из $\mathfrak{M}$, — также многообразие (квазимногообразие, псевдомногообразие), причем $I\mathfrak{M}$ тогда и только тогда конечно базируемо, когда таково $\mathfrak{M}$. Верно ли, что если $\mathfrak{M}$ порождается одной конечной группой, то $I\mathfrak{M}$ порождается одной конечной квазигруппой?

А. А. Гварамия

9.5. Многообразие групп называется *примитивным*, если всякое его подквазимногообразие является многообразием. Описать все примитивные многообразия групп. Всякое ли примитивное многообразие групп локально конечно?

В. А. Горбунов

9.6. Верно ли, что независимый базис квазитождеств конечной группы всегда конечен? *В. А. Горбунов*

9.7. (А. М. Стёпин). Существует ли бесконечная конечно порожденная аменабельная группа с ограниченными в совокупности порядками элементов?

Р. И. Григорчук

9.8. Существует ли конечно порожденная простая группа промежуточного роста?

Р. И. Григорчук

9.9. Существует ли конечно порожденная не почти нильпотентная группа, у которой функция роста мажорируется функцией вида $c^{\sqrt{n}}$, где c — константа, большая единицы? *Р. И. Григорчук*

***9.10.** Существуют ли отличные от $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ конечно порожденные группы ровно с двумя классами сопряженных элементов? *В. С. Губа*

*Да, существуют (D. V. Osin, Small cancellations over relatively hyperbolic groups and embedding theorems, `http://www.arxiv.org/abs/math.GR/0411039`).

9.11. Будет ли абелева минимальная нормальная подгруппа A группы G элементарной p-группой, если секция G/A — разрешимая группа конечного ранга? При дополнительном предположении локальной полицикличности секции G/A это верно (Д. И. Зайцев, *Алгебра и логика*, **19**, № 2 (1980), 150–172). *Д. И. Зайцев*

9.13. Является ли минимаксной разрешимая группа без кручения, удовлетворяющая слабому условию минимальности для нормальных подгрупп? *Д. И. Зайцев*

9.14. Будет ли локально конечной группа, разлагающаяся в произведение попарно перестановочных периодических абелевых подгрупп? В случае двух подгрупп ответ утвердительный.

Д. И. Зайцев

9.15. Не используя CFSG, описать все такие подгруппы L конечной группы Шевалле G, что $G = PL$ для некоторой параболической подгруппы P группы G.

А. С. Кондратьев

9.17. б) Пусть G — локально нормальная финитно аппроксимируемая группа. Существует ли в G нормальная подгруппа H, вложимая в прямое произведение конечных групп и такая, что фактор-группа G/H — полная абелева?

Л. А. Курдаченко

9.19. а) Пусть $n(X)$ обозначает минимум индексов собственных подгрупп группы X. Подгруппа A конечной группы G называется широкой, если A — максимальный по включению элемент множества $\{X \mid X$ — собственная простая подгруппа группы G и $n(X) = n(G)\}$.

Перечислить широкие подгруппы конечных проективных специальных линейных, симплектических, ортогональных и унитарных групп. *В. Д. Мазуров*

9.23. Пусть G — конечная группа, B — блок характеров группы G, $D(B)$ — его дефектная группа, $k(B)$ (соответственно, $k_0(B)$) — число всех неприводимых комплексных характеров (высоты 0), лежащих в B. *Гипотезы:*

а) (Р. Брауэр). Имеет место неравенство $k(B) \leqslant |D(B)|$; это доказано для p-разрешимых групп (D. Gluck, K. Magaard, U. Riese, P. Schmid, *J. Algebra*, **279** (2004), 694–719);

б) (Й. Олссон). Имеет место неравенство $k_0(B) \leqslant |D(B) : D(B)'|$, где штрих означает взятие коммутанта;

в) (Р. Брауэр). Группа $D(B)$ абелева в точности тогда, когда $k_0(B) = k(B)$.

В. Д. Мазуров

9.24. (Дж. Томпсон). *Гипотеза:* всякая конечная простая неабелева группа G представима в виде $G = CC$, где C — некоторый класс сопряженных элементов группы G.

В. Д. Мазуров

9.25. Указать алгоритм, который по уравнению $w(x_1, \ldots, x_n) = 1$ в свободной группе F и списку конечно порожденных подгрупп $H_1, \ldots, H_n$ группы F определял бы, существует ли решение этого уравнения с условием $x_1 \in H_1, \ldots, x_n \in H_n$.

Г. С. Маканин

9.26. б) Описать конечные группы 2-локального 3-ранга 1, у которых силовская 3-подгруппа нециклическая.

А. А. Махнев

9.28. Пусть конечная группа G порождается классом D сопряженных инволюций и $D_i = \{d_1 \cdots d_i \mid d_1, \ldots, d_i$ — различные попарно перестановочные элементы из $D\}$. Какова группа G, если $D_1, \ldots, D_n$ — все ее различные классы сопряженных инволюций? Например, этому условию с $n = 3$ удовлетворяют группы Фишера F_{22}, F_{23}.

А. А. Махнев

9.29. (Известный вопрос). Согласно классической теореме Магнуса проблема равенства в 1-определенных группах алгоритмически разрешима. Существуют ли 2-определенные группы с неразрешимой проблемой равенства?

Ю. И. Мерзляков

***9.30.** (Известный вопрос). Конечный набор редукций $u_i \to v_i$ слов над конечным алфавитом $\Sigma = \Sigma^{-1}$ называется *групповым*, если *дл.* $u_i >$ *дл.* v_i или *дл.* $u_i =$ *дл.* v_i и $u_i > v_i$ в словарном упорядочении и каждое слово над Σ приводится к единственному редуцированному виду, не зависящему от последовательности выполнения редукций. Существуют ли групповые наборы редукций с условием *дл.* $v_i \leqslant 1$, отличные от 1) наборов тривиальных редукций $x^{-\varepsilon}x^{\varepsilon} \to 1$, $\varepsilon = \pm 1$, 2) таблиц умножения $xy \to z$ конечных групп и 3) их конечных объединений?

Ю. И. Мерзляков

*Да, существуют (J. Avenhaus, K. Madlener, F. Otto, *Trans. Amer. Math. Soc.* **297** (1986), 427–443).

9.31. Пусть k — поле характеристики 0. Согласно (Ю. И. Мерзляков, *Труды МИАН им. Стеклова*, **167** (1985), 236–238) семейство $\mathrm{Rep}_k(G)$ всех канонических матричных представлений k-степенной группы G над k можно рассматривать как аффинное k-многообразие. Найти явный вид уравнений над k, задающих это многообразие.

Ю. И. Мерзляков

9.32. Каковы локально компактные группы, в которых произведение любых двух замкнутых подгрупп — снова замкнутая подгруппа? Абелевы группы с таким свойством описаны (Ю. Н. Мухин, *Мат. заметки*, **8**, №4 (1970), 509–519).

Ю. Н. Мухин

9.35. Топологическая группа называется *индуктивно компактной*, если любой конечный набор ее элементов лежит в компактной подгруппе. Сохраняется ли это свойство при решеточных изоморфизмах в классе локально компактных групп?

Ю. Н. Мухин

9.36. Охарактеризовать решетки замкнутых подгрупп локально компактных групп. В дискретном случае это сделано (Б. В. Яковлев, *Алгебра и логика*, **13**, №6 (1974), 694–712).

Ю. Н. Мухин

9.37. Проразрешима ли компактно порожденная индуктивно проразрешимая локально компактная группа?

Ю. Н. Мухин

9.38. Группа, совпадающая с объединением своих компактных подгрупп, называется *компактно покрываемой.* Замкнуты ли максимальные компактно покрываемые подгруппы в нульмерной локально компактной группе?

Ю. Н. Мухин

9.39. Пусть Ω — счетное множество, а $\mathfrak{m}$ — такое кардинальное число, что $\aleph_0 \leqslant \mathfrak{m} \leqslant 2^{\aleph_0}$ (мы допускаем аксиому выбора, но не гипотезу континуума). Существует ли группа подстановок G на Ω, которая имеет ровно $\mathfrak{m}$ орбит на множестве $\mathfrak{P}(\Omega)$ всех подмножеств множества Ω?

Прим. 2001 г.: доказано (S. Shelah, S. Thomas, *Bull. London Math. Soc.*, **20**, №4 (1988), 313–318), что ответ положительный в теории множеств с аксиомой Мартина. Вопрос остается открытым в ZFC.

П. Нойман (P. M. Neumann)

9.40. Пусть Ω — счетное бесконечное множество. Определим *половину* Ω как такое подмножество Σ, что Σ и $\Omega \setminus \Sigma$ бесконечны. Какие группы подстановок Ω транзитивны на половинах?

П. Нойман (P. M. Neumann)

9.41. Пусть Ω — счетное бесконечное множество. Для $k \geqslant 2$ определим *k-секцию* Ω как разбиение Ω на k бесконечных множеств.

б) Существует ли группа, транзитивная на k-секциях, но не на $(k+1)$-секциях?

в) Существует ли транзитивная группа подстановок на Ω, которая транзитивна на $\aleph_0$-секциях, но является собственной подгруппой в $\mathrm{Sym}\,(\Omega)$?

П. Нойман (P. M. Neumann)

9.42. Пусть Ω — счетное множество, и пусть D — множество всех линейных порядков, относительно которых Ω изоморфно $\mathbb{Q}$. Существует ли в группе $\mathrm{Sym}\,(\Omega)$ транзитивная собственная подгруппа, которая транзитивна на D?

П. Нойман (P. M. Neumann)

9.43. б) Указанная в (Н. Д. Подуфалов, *9-й Всесоюз. симп. по теории групп*, М., 1984, 113–114) группа G позволяет построить проективную плоскость порядка 3 — в качестве прямых надо взять любой класс сопряженных относительно S подгрупп порядка $2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 17$ и добавить естественным образом еще четыре прямых. Аналогично можно построить проективные плоскости порядка p^n для любого простого p и любого натурального n. Нельзя ли приспособить этот метод для получения новых плоскостей?

Н. Д. Подуфалов

9.44. Топологическая группа называется *слойно компактной*, если прообразы всех ее компактов при отображениях $x \to x^n$, $n = 1, 2, \ldots$, являются компактами. Описать локально компактные локально разрешимые слойно компактные группы.

В. М. Полецких

9.45. Пусть a — вектор из $\mathbb{R}^n$ с рациональными компонентами, $S(a) = \{ka + b \mid k \in \mathbb{Z},\ \ b \in \mathbb{Z}^n\}$. Очевидно, что $S(a)$ — дискретная подгруппа группы $\mathbb{R}^n$ ранга n. Найти необходимые и достаточные условия в терминах компонент вектора a для того, чтобы $S(a)$ имела ортогональный базис в смысле стандартного скалярного произведения пространства $\mathbb{R}^n$.

Ю. Д. Попов, И. В. Протасов

9.47. Верно ли, что каждый разреженный компакт может быть гомеоморфно вложен в пространство замкнутых некомпактных подгрупп с E-топологией подходящей локально компактной группы?

И. В. Протасов

9.49. Пусть G — компактная группа веса $> \omega_2$. Верно ли, что пространство $L(G)$ всех ее замкнутых подгрупп, снабженное E-топологией, недиадично?

И. В. Протасов, Ю. В. Цыбенко

***9.50.** a) Всякая ли 4-энгелева группа без элементов порядков 2 и 5 разрешима?

Ю. П. Размыслов

*Да; это следует из локальной нильпотентности 4-энгелевых групп (G. Traustason, *Int. J. Algebra Comput.*, **15** (2005), 309–316; G. Havas, M. R. Vaughan-Lee, *Int. J. Algebra Comput.* **15** (2005), 649–682) и положительного ответа для локально нильпотентных групп (A. Abdollahi, G. Traustason, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **130** (2002), 2827–2836).

9.51. Существует ли конечно определенная разрешимая группа, удовлетворяющая условию максимальности для нормальных подгрупп, для которой проблема равенства слов неразрешима?

Д. Робинсон (D. J. S. Robinson)

9.52. Разрешима ли проблема сопряженности для конечно определенных разрешимых групп конечного ранга?

Замечание: существует алгоритм, распознающий сопряженность с данным элементом группы.

Д. Робинсон (D. J. S. Robinson)

9.53. Разрешима ли проблема изоморфизма для конечно определенных разрешимых групп конечного ранга?

Д. Робинсон (D. J. S. Robinson)

9.55. Существуют ли такие конечная p-группа G и центральный разностный автоморфизм φ кольца $\mathbb{Z}G$, что φ после расширения до автоморфизма p-адического группового кольца $\widehat{\mathbb{Z}}_pG$ *не будет* произведением сопряжения с помощью единицы из $\widehat{\mathbb{Z}}_pG$ и гомоморфизма, индуцированного групповым автоморфизмом?

К. Роггенкамп (K. W. Roggenkamp)

9.56. Найти все конечные группы, для которых тензорный квадрат любого обыкновенного неприводимого характера свободен от кратностей.

Я. Саксл (J. Saxl)

9.57. Множество подформаций фиксированной формации с операциями пересечения и порождения является решеткой. Каковы формации конечных групп с дистрибутивной решеткой подформаций?

А. Н. Скиба

9.59. (В. Гашюц). Доказать, что формация, порожденная конечной группой, имеет конечную решетку подформаций.

А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков

9.60. Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ — локальные формации конечных групп, причем $\mathfrak{F}$ не содержится в $\mathfrak{H}$. Существует ли в $\mathfrak{F}$ хотя бы одна минимальная локальная не $\mathfrak{H}$-подформация?

А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков

9.61. Два многообразия называются S-*эквивалентными*, если они имеют одну и ту же теорию Мальцева (Д. М. Смирнов, *Алгебра и логика*, **22**, №6 (1983), 693–706). Какова мощность множества S-эквивалентных многообразий групп?

Д. М. Смирнов

9.64. Верно ли, что в группе вида $G = AB$ всякая подгруппа N из пересечения $A \cap B$, субнормальная в каждой из подгрупп A и B, субнормальна в G? Для конечных групп это так (Х. Виландт).

Я. П. Сысак

9.65. Будет ли периодической локально разрешимая группа, являющаяся произведением двух своих периодических подгрупп?

Я. П. Сысак

9.66. а) *Гипотеза Йонссона* об устойчивости элементарной эквивалентности относительно свободных произведений в классе всех групп: если $Th(G_1) = Th(G_2)$ и $Th(H_1) = Th(H_2)$ для групп G_1, G_2, H_1, H_2, то $Th(G_1 * H_1) = Th(G_2 * H_2)$.

б) Представляет интерес также следующая *ослабленная гипотеза*: если $Th(G_1) = Th(G_2)$ и $Th(H_1) = Th(H_2)$ для счетных групп G_1, G_2, H_1, H_2, то при любых нумерациях групп G_i, H_i имеют место m-сводимость $T_1 \underset{m}{\equiv} T_2$ и сводимость по Тьюрингу $T_1 \underset{T}{\equiv} T_2$, где T_i — множество номеров всех предложений из $Th(G_i * H_i)$. Доказательство этой ослабленной гипотезы было бы хорошей иллюстрацией применения теории сводимостей к решению конкретных задач математики.

А. Д. Тайманов

***9.67.** (А. Тарский). Пусть F_n — свободная группа ранга n; верно ли, что $Th(F_2) = Th(F_3)$?

А. Д. Тайманов

*Да, верно (O. Kharlampovich, A. Miasnikov, *Elementary theory of free nonabelian groups*, Preprint, 2005, `http://www.math.mcgill.ca/olga/p3new2.ps`).

9.68. Пусть $\mathfrak{V}$ — многообразие групп, отличное от многообразия всех групп, и пусть p — простое число. Ограничена ли p-длина конечных p-разрешимых групп, силовские p-подгруппы которых лежат в $\mathfrak{V}$?

Дж. Уилсон (J. S. Wilson)

9.69. (П. Камерон). Пусть G — конечная примитивная группа подстановок и пусть стабилизатор G_α точки α индуцирует на некоторой своей орбите $\Delta \neq \{\alpha\}$ регулярную группу подстановок. Верно ли, что $|G_\alpha| = |\Delta|$?

А. Н. Фомин

9.70. Доказать или опровергнуть гипотезу П. Камерона: если G — конечная примитивная группа подстановок подранга m, то либо ранг группы G ограничен функцией от m, либо порядок стабилизатора точки не превосходит m. *Подранг* транзитивной группы подстановок определяется как максимум рангов транзитивных составляющих стабилизатора точки.

А. Н. Фомин

9.71. Верно ли, что каждая бесконечная 2-транзитивная группа подстановок с локально разрешимым стабилизатором точки обладает нетривиальным неприводимым конечномерным представлением над некоторым полем?

А. Н. Фомин

9.72. Пусть G_1 и G_2 — группы Ли, обладающие следующим свойством: каждая G_i содержит такую нильпотентную односвязную нормальную подгруппу Ли B_i, что $G_i/B_i \cong SL_2(K)$, $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Предположим, что G_1 и G_2 содержатся как замкнутые подгруппы в топологической группе G, что $G_1 \cap G_2 \geqslant B_1 B_2$ и что ни одна нетривиальная подгруппа Ли группы $B_1 \cap B_2$ не нормальна в G. Можно ли показать (может быть, используя метод амальгам из теории конечных групп), что ступень нильпотентности и размерность $B_1 B_2$ ограничены?

А. Чермак (A. L. Chermak)

9.75. Найти все те локальные формации $\mathfrak{F}$ конечных групп, для которых справедливо утверждение: в каждой конечной группе множество $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп образует решетку.

Л. А. Шеметков

9.76. Назовем *группой Голода* r-порожденную, $r \geqslant 2$, подгруппу гр$(1 + x_1 + I, 1+x_2+I, \ldots, 1+x_r+I)$ присоединенной группы $1+F/I$ фактор-алгебры F/I, где F — свободная алгебра многочленов без свободного члена от неперестановочных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_r$ над полем характеристики $p > 0$, а I — такой ее идеал, что F/I — ненильпотентная нильалгебра (см. Е. С. Голод, *Изв. АН СССР, сер. мат.*, **28**, №1 (1964), 273–276). Доказать, что в группах Голода централизатор любого элемента бесконечен.

Заметим, что А. В. Тимофеенко (*Мат. заметки*, **39**, №5 (1986), 647–650) построил группы Голода с бесконечным центром; независимо и другим способом такой же результат получил в середине 90-х г. Л. Гамуди (L. Hammoudi).

В. П. Шунков

9.77. Существует ли бесконечная конечно порожденная финитно аппроксимируемая бинарно конечная группа с конечными силовскими подгруппами? А. В. Рожков (докт. дисс., 1997) показал, что такая группа существует, если условие конечности силовских подгрупп ослабить до локальной конечности.

В. П. Шунков

9.78. Существует ли периодическая финитно аппроксимируемая F^*-группа (см. 7.42) с конечными силовскими подгруппами, не являющаяся бинарно конечной?

В. П. Шунков

9.83. Пусть G — (периодическая) p-сопряженно бипримитивно конечная группа (см. 6.59), обладающая конечной силовской p-подгруппой. Можно ли утверждать, что силовские p-подгруппы группы G сопряжены в ней?

В. П. Шунков

9.84. а) Всякая ли бинарно конечная 2-группа конечного периода локально конечна?

б) Тот же вопрос для p-групп при $p > 2$.

В. П. Шунков

Вопросы из 10-го издания, 1986 г.

10.2. *Смешанным тождеством* группы G называется тождество алгебраической системы, получающейся из группы G добавлением к ее сигнатуре некоторого множества 0-арных операций. На основе этого понятия можно развивать теорию смешанных многообразий групп (см., например, В. С. Анашин, *Мат. сб.*, **129**, № 2 (1986), 163–174). Построить пример класса групп, не являющегося смешанным многообразием, но замкнутого относительно взятия фактор-групп и декартовых произведений и содержащего вместе с каждой своей группой G любую подгруппу любой декартовой степени группы G, содержащую диагональ этой степени.

В. С. Анашин

10.3. Охарактеризовать (в терминах базисов смешанных тождеств или порождающих групп) минимальные смешанные многообразия групп. *В. С. Анашин*

10.4. Пусть p — простое число. Верно ли, что смешанное многообразие групп, порожденное произвольной конечной p-группой достаточно большой ступени нильпотентности, является многообразием групп? *В. С. Анашин*

10.5. Построить пример конечной группы, смешанные тождества которой не имеют конечного базиса. Не является ли таким примером группа, построенная в (R. M. Bryant, *Bull. London Math. Soc.*, **14**, № 2 (1982), 119–123)? *В. С. Анашин*

10.8. Существует ли топологическая группа, не вложимая в мультипликативную полугруппу топологического кольца? *В. И. Арнаутов, А. В. Михалёв*

10.10. Верно ли, что квазимногообразие, порожденное конечно порожденной разрешимой группой без кручения и содержащее неабелеву свободную метабелеву группу, можно задать в классе групп без кручения независимой системой квазитождеств? *А. И. Будкин*

10.11. Верно ли, что всякая конечно определенная группа содержит либо свободную подполугруппу с двумя свободными порождающими, либо нильпотентную подгруппу конечного индекса? *Р. И. Григорчук*

10.12. Существует ли конечно порожденная полугруппа S с сокращением, обладающая неэкспоненциальным ростом и такая, что ее группа левых частных $G = S^{-1}S$ (она существует) является группой экспоненциального роста? Утвердительный ответ на этот вопрос дал бы положительное решение проблемы 12 из (S. Wagon, *The Banach—Tarski paradox*, Cambridge Univ. Press, 1985).

Р. И. Григорчук

10.13. Существует ли в свободной группе F_2 со свободной базой a, b массивное множество независимых элементов, то есть такое множество E несократимых слов над алфавитом a, b, a^{-1}, b^{-1}, что

1) никакой элемент $w \in E$ не принадлежит нормальному замыканию множества $E \setminus \{w\}$, и

2) выполняется условие массивности $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{|E_n|} = 3$, где E_n — множество слов длины n из E?

Р. И. Григорчук

10.15. Найти точные p-модулярные абсолютно неприводимые линейные представления минимальной степени для каждой (известной) конечной квазипростой группы и каждого простого числа p.

А. С. Кондратьев

10.16. Класс групп называется *прямым многообразием*, если он замкнут относительно взятия подгрупп, фактор-групп и прямых произведений (Ю. М. Горчаков, *Группы с конечными классами сопряженных элементов*, М., Наука, 1978). Очевидно, класс FC-групп — прямое многообразие. Ф. Холл (*J. London Math. Soc.*, **34**, №3 (1959), 289–304) показал, что класс конечных групп и класс абелевых групп, вместе взятые, не порождают класс FC-групп как прямое многообразие, а в (Л. А. Курдаченко, *Укр. мат. ж.*, **39**, №3 (1987), 329–335) показано, что это прямое многообразие не порождается и классом групп с конечным коммутантом. Порождается ли прямое многообразие FC-групп группами с конечными коммутантами и FC-группами с квазициклическими коммутантами?

Л. А. Курдаченко

10.17. (М. Томкинсон). Пусть G — FC-группа, коммутант которой вкладывается в прямое произведение конечных групп. Должна ли фактор-группа $G/Z(G)$ вкладываться в прямое произведение конечных групп?

Л. А. Курдаченко

10.18. (М. Томкинсон). Пусть G — FC-группа, аппроксимируемая группами с конечными коммутантами. Должна ли фактор-группа $G/Z(G)$ вкладываться в прямое произведение конечных групп?

Л. А. Курдаченко

10.19. Охарактеризовать радикальные ассоциативные кольца, для которых множество всех нормальных подгрупп присоединенной группы совпадает с множеством всех идеалов ассоциированного кольца Ли.

В. М. Левчук

10.20. В группе Шевалле ранга $\leqslant 6$ над конечным полем порядка $\leqslant 9$ описать подгруппы вида $H = \langle H \cap U,\ H \cap V \rangle$, не лежащие в собственных параболических подгруппах, где U, V — противоположные унипотентные подгруппы.

В. М. Левчук

10.23. Верно ли, что извлечение корней в группе кос однозначно с точностью до сопряженности?

Г. С. Маканин

10.25. (Известный вопрос). Существует ли алгоритм, который по всякому автоморфизму свободной группы распознает, имеет ли этот автоморфизм неподвижную точку?

Г. С. Маканин

10.26. а) Существует ли алгоритм, который по элементам a, b и автоморфизму φ свободной группы распознает разрешимость в этой группе уравнения $ax^{\varphi} = xb$? Вопрос представляется полезным для решения проблемы эквивалентности двух узлов.

б) Более общо: существует ли алгоритм, распознающий разрешимость в свободной группе уравнений вида $w(x_{i_1}^{\varphi_1}, \ldots, x_{i_n}^{\varphi_n}) = 1$, где $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — автоморфизмы этой группы?

Г. С. Маканин

10.27. а) Пусть t — инволюция конечной группы G и множество $D = t^G \cup \{t^x t^y \mid x, y \in G, \ \ |t^x t^y| = 2\}$ не пересекается с $O_2(G)$. Доказать, что если $t \in O_2(C(d))$ для любой инволюции d из $C_D(t)$, то $D = t^G$ (в этом случае строение группы $\langle D\rangle$ известно).

б) Значительно более общий вопрос. Пусть t — инволюция конечной группы G и $t \in Z^*(N(X))$ для любой неединичной подгруппы X нечетного порядка, нормализуемой, но не централизуемой инволюцией t. Какова группа $\langle t^G\rangle$?

А. А. Махнев

10.28. Верно ли, что конечные сильно регулярные графы с $\lambda = 1$ имеют ранг 3?

А. А. Махнев

10.29. Описать конечные группы, содержащие такое множество инволюций D, что для всякого его подмножества D_0, порождающего 2-подгруппу, нормализатор $N_D(D_0)$ также порождает 2-подгруппу.

А. А. Махнев

10.31. Пусть G — алгебраическая группа, H — ее замкнутая нормальная подгруппа, $f\colon G \to G/H$ — канонический гомоморфизм. При каких условиях существует рациональное сечение $s : G/H \to G$, такое, что $sf = 1$? Частичные результаты см. в (Ю. И. Мерзляков, *Рациональные группы*, М., Наука, 1987, § 37).

Ю. И. Мерзляков

10.32. Теоретико-групповое слово называется *универсальным на группе* G, если его значения на G пробегают всю G. Для произвольной константы $c > 8/5$ в (J. L. Brenner, R. J. Evans, D. M. Silberger, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **96**, №1 (1986), 23–28) доказано существование такого числа $N_0 = N_0(c)$, что слово $x^r y^s$, $rs \neq 0$, универсально на знакопеременной группе $\mathbb{A}_n$ при любом $n \geqslant \max\{N_0, \ c \cdot \log m(r,s)\}$, где $m(r,s)$ — произведение всех простых чисел, делящих rs, если $r, s \notin \{-1, 1\}$, и $m(r,s) = 1$, если $r, s \in \{-1, 1\}$; более конкретно, можно взять $N_0(5/2) = 5$ и $N_0(2) = 29$. Найти аналогичную границу для степени симметрической группы $\mathbb{S}_n$ при условии, что хотя бы одно из чисел r, s нечетно, — пока здесь известна лишь более грубая граница $n \geqslant \max\{6, \ 4m(r,s) - 4\}$ (см. M. Droste, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **96**, №1 (1986), 18–22).

Ю. И. Мерзляков

10.34. Существует ли неразрешимая конечная группа, совпадающая с произведением любых двух своих несопряженных максимальных подгрупп?

В. С. Монахов

10.35. Верно ли, что всякая конечно порожденная подгруппа без кручения группы $GL_n(\mathbb{C})$ аппроксимируется подгруппами без кручения группы $GL_n(\overline{\mathbb{Q}})$?

Г. А. Носков

10.36. Верно ли, что группа $SL_n(\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_r])$ при достаточно больших n имеет тип $(FP)_m$ (определяемый как $(FP)_\infty$ в вопросе 6.3, но с тем ослаблением, что для членов резольвенты с номерами $> m$ конечная порожденность не требуется)? Известен утвердительный ответ при $m = 0$, $n \geqslant 3$ (А. А. Суслин, *Изв. АН СССР, сер. мат.*, **41**, №2 (1977), 235–252) и при $m = 1$, $n \geqslant 5$ (М. С. Туленбаев, *Мат. сб.*, **117**, №1 (1982), 131–144; U. Rehmann, C. Soule, in: *Algebraic K-theory, Proc. Conf., Northwestern Univ., Evanston, Ill., 1976,* (*Lect. Notes Math.*, **551**), Springer, Berlin, 1976, 164–169).

Г. А. Носков

*__10.37.__ Пусть G — конечно порожденная метабелева группа, все целочисленные группы гомологий которой конечно порождены. Верно ли, что G имеет конечный ранг? Если G расщепляется над коммутантом, ответ утвердительный (J. R. J. Groves, *Quart. J. Math.*, **33**, №132 (1982), 405–420).

Г. А. Носков

*Да, верно (D. H. Kochloukova, in: *Groups St. Andrews 2001 in Oxford*, Vol. II, Cambridge Univ. Press, 2003, 332–343).

10.38. (В. ван дер Каллен). Имеет ли группа $E_{n+3}(\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n])$, $n \geqslant 1$, конечную ширину относительно множества трансвекций?

Г. А. Носков

10.39. а) Разрешима ли проблема вхождения в подгруппу $E_n(R)$ группы $SL_n(R)$, где R — коммутативное кольцо?

б) Разрешима ли проблема равенства в группах $K_i(R)$, где K_i — квилленовские K-функторы, R — коммутативное кольцо?

Г. А. Носков

10.40. (Х. Басс). Пусть G — группа, e — идемпотентная матрица над $\mathbb{Z}G$ и $\operatorname{tr} e = \sum_{g\in G} e_g g$, $e_g \in \mathbb{Z}$. *Сильная гипотеза:* для всякого неединичного элемента $x \in G$ имеет место равенство $\sum_{g\sim x} e_g = 0$, где $\sim$ обозначает сопряженность в G. *Слабая гипотеза:* $\sum_{g\in G} e_g = 0$. Сильная гипотеза доказана для конечных, абелевых, линейных, а слабая — для финитно аппроксимируемых групп.

Прим. Х. Басса 2005: Достигнут значительный прогресс; хороший обзор имеется в (A. J. Berrick, I. Chatterji, G. Mislin, *Math. Ann.*, **329** (2004), 597–621).

Г. А. Носков

10.42. (Дж. Стаффорд). Пусть G — поли-$\mathbb{Z}$-группа, k — поле. Верно ли, что всякий конечно порожденный проективный kG-модуль либо свободен, либо является идеалом?

Г. А. Носков

10.43. Пусть R, S — ассоциативные кольца с единицей, причем элемент 2 обратим в S, $\Lambda_I : GL_n(R) \to GL_n(R/I)$ — гомоморфизм, соответствующий идеалу I кольца R, $E_n(R)$ — подгруппа, порожденная в $GL_n(R)$ элементарными трансвекциями $t_{ij}(x)$ и $a_{ij} = t_{ij}(1)t_{ji}(-1)t_{ij}(1)$. Пусть черта обозначает факторизацию группы $GL_n(R)$ по ее центру и $PG = \overline{G}$, если $G \leqslant GL_n(R)$. Гомоморфизм $\Lambda : E_n(R) \to GL(W) = GL_m(S)$ называется *стандартным*, если $S^m = P \oplus \cdots \oplus P \oplus Q$ (прямая сумма S-модулей, в которой число слагаемых P равно n) и $\Lambda x = g^{-1}\tau(\delta^*(x)f + ({}^t\delta^*(x)^\nu)^{-1}(1-f))g, \quad x \in E_n(R)$, где $\delta^* : GL_n(R) \to GL_n(\mathrm{End} P)$ — гомоморфизм, индуцированный кольцевым гомоморфизмом $\delta : R \to \mathrm{End}\, P$, посылающим единицу в единицу, g — изоморфизм модуля W на S^m, $\tau : GL_n(\mathrm{End}\, P) \to GL(gW)$ — вложение, f — центральный идемпотент кольца δR, t — транспонирование, ν — антиизоморфизм кольца δR. Пусть $n \geqslant 3$, $m \geqslant 2$. Можно показать, что гомоморфизм $\Lambda_0 : PE_n(R) \to GL(W) = GL_m(S)$ индуцируется стандартным гомоморфизмом Λ, если $\Lambda_0 \bar{a}_{ij} = g^{-1}\tau(a^*_{ij})g$ при подходящих g, τ и любых $i \neq j$, где a^*_{ij} обозначает матрицу, получаемую из a_{ij} заменой элементов 0, 1 кольца R на 0, 1 кольца $\mathrm{End}\, P$. Указать (хотя бы в частных случаях) вид гомоморфизма Λ_0, не удовлетворяющего последнему условию.

В. М. Петечук

10.44. Доказать, что всякий стандартный изоморфизм Λ группы $E_n(R) \subset GL_n(R) = GL(V)$ в группу $E_m(S) \subset GL_m(S) = GL(W)$ происходит из коллинеации и корреляции, то есть имеет вид $\Lambda x = (g^{-1}xg)f + (h^{-1}xh)(1-f)$, где g — полулинейный изоморфизм $V_R \to W_S$ (коллинеация), h — полулинейный изоморфизм $V_R \to_S W'_{S^0}$ (корреляция).

В. М. Петечук

10.45. Пусть $n \geqslant 3$, N — подгруппа группы $GL_n(R)$, нормализуемая подгруппой $E_n(R)$. Доказать, что либо N содержит $E_n(R)$, либо $\Lambda_I[N, E_n(R)] = 1$ для подходящего идеала $I \neq R$ кольца R.

В. М. Петечук

10.46. Доказать, что для всякого элемента σ группы $GL_n(R)$, $n \geqslant 3$, найдутся такие трансвекции τ_1, τ_2, что элемент $[[\sigma, \tau_1], \tau_2]$ унипотентен.

В. М. Петечук

10.47. Описать автоморфизмы группы $PE_2(R)$ в случае, когда кольцо R коммутативно и элементы 2 и 3 обратимы в нем.

В. М. Петечук

10.49. Существует ли группа G, удовлетворяющая следующим четырем условиям: 1) G проста, более того, существует такое целое число n, что $G = C^n$ для любого класса сопряженности C; 2) все максимальные абелевы подгруппы группы G сопряжены в G; 3) любая максимальная абелева подгруппа из G самонормализуема и совпадает с централизатором в G любого своего неединичного элемента; 4) существует такое целое число m, что для любой максимальной абелевой подгруппы H из G и любого элемента $a \in G \setminus H$ каждый элемент из G равен произведению m элементов из aH?

Прим. 2005 г.: Частичное решение получено в (E. Jaligot, A. Ould Houcine, *J. Algebra*, **280** (2004), 772–796).

Б. Пуаза (B. Poizat)

10.50. Будем называть *индуцированными циклическими характерами* конечной группы G комплексные характеры группы G, индуцированные линейными характерами циклических подгрупп группы G. Мои вычисления на ЭВМ показали (*10-й Всесоюз. симп. по теории групп*, Гомель, 1986, 199), что существуют группы (например, $\mathbb{S}_5$, $SL_2(13)$, M_{11}), для которых неприводимые комплексные характеры являются целочисленными линейными комбинациями индуцированных циклических характеров и главного характера группы. Описать конечные группы, характеры которых обладают этим свойством.

А. В. Руколайне

10.51. Описать строение тонких абелевых p-групп. В классе сепарабельных p-групп такое описание известно (C. Megibben, *Mich. Math. J.*, **13**, № 2 (1966), 153–160).

С. В. Рычков

10.52. (Р. Майнз). Хорошо известно, что топология пополнения абелевой группы относительно p-адической топологии является p-адической топологией. Р. Уорфилд показал, что это верно и в категории нильпотентных групп. Найти категорное обобщение этой теоремы, которое включало бы случай нильпотентных групп.

С. В. Рычков

10.53. (М. Дугас). Пусть $\mathscr{R}$ — класс Рейда, то есть наименьший класс, содержащий $\mathbb{Z}$ и замкнутый относительно прямых сумм и прямых произведений. Замкнут ли $\mathscr{R}$ относительно прямых слагаемых?

С. В. Рычков

10.54. (Р. Гёбель). Для кардинального числа μ положим

$$\mathbb{Z}^{<\mu} = \{f \in \mathbb{Z}^{\mu} \mid |\mathrm{supp}\,(f)| < \mu\} \quad \text{и} \quad G_{\mu} = \mathbb{Z}^{\mu}/\mathbb{Z}^{<\mu}.$$

а) Найти такое ненулевое прямое слагаемое D группы G_{ω_1}, что $D \ncong G_{\omega_1}$.

б) Исследовать строение G_{μ} (строение G_{ω_0} хорошо известно).

С. В. Рычков

10.55. (А. Мадер). «Стандартная группа B», т. е. $B = \mathbb{Z}(p) \oplus \mathbb{Z}(p^2) \oplus \cdots$, узка над своим кольцом эндоморфизмов (A. Mader, in: *Proc. Abelian Groups and Modules, Udine–1984*, Springer, 1984, 315–327). Какие абелевы p-группы узки над своими кольцами эндоморфизмов?

С. В. Рычков

10.57. Каковы минимальные не A-формации? По определению, *A-формация* — это формация конечных групп с абелевыми силовскими подгруппами.

А. Н. Скиба

10.58. Свободна ли подполугруппа полугруппы формаций конечных групп, порожденная неразложимыми формациями?

А. Н. Скиба

10.59. Будет ли локально нильпотентной p'-группа G, допускающая расщепляющий автоморфизм φ простого порядка p, если все подгруппы вида $\langle g, g^{\varphi}, \ldots, g^{\varphi^{p-1}} \rangle$ нильпотентны? Автоморфизм φ порядка p называется *расщепляющим*, если $g g^{\varphi} g^{\varphi^2} \cdots g^{\varphi^{p-1}} = 1$ для всех $g \in G$.

А. И. Созутов

10.60. Всякая ли периодическая (примарная) группа регулярных автоморфизмов абелевой группы обладает нетривиальным центром?

Прим. ред. 2001 г.: ответ положительный, если A содержит элемент порядка 2 или 3 (А. Х. Журтов, *Сиб. мат. ж.*, **41**, № 2 (2000), 329–338).

А. И. Созутов

10.61. Пусть G — группа, H — ее собственная подгруппа, $a \in H$, $a^2 \neq 1$ и для всякого $g \in G \backslash H$ подгруппа $\langle a,\, a^g \rangle$ является фробениусовой группой с дополнением, содержащим a. Будет ли подгруппой объединение всех ядер фробениусовых подгрупп группы G с дополнением $\langle a \rangle$? Особенно интересен случай, когда элемент a с любым своим сопряженным порождают конечную подгруппу. Определения см. в 6.55; см. также (А. И. Созутов, *Алгебра и логика*, **34**, № 5 (1995), 531–549).

Прим. ред. 2005 г.: Ответ положителен, если порядок a четен (А. М. Попов, А. И. Созутов, *Алгебра и логика*, 44, № 1 (2005), 70–80) или если порядок a не 3 и не 5 и группа $\langle a,\, a^g \rangle$ конечна для любого $g \notin H$ (А. М. Попов, *Алгебра и логика*, **43**, № 2 (2004), 220–228).

А. И. Созутов

10.62. Построить пример (периодической) группы без подгрупп индекса 2, порожденной таким классом X сопряженных инволюций, что порядок произведения любых двух инволюций из X нечетен.

А. И. Созутов

10.64. Существует ли непериодическая дважды транзитивная группа подстановок с периодическим стабилизатором точки?

Я. П. Сысак

10.65. Выяснить строение бесконечных 2-транзитивных групп подстановок (G, Ω), в которых стабилизатор точки $\alpha \in \Omega$ имеет вид $G_\alpha = A \cdot G_{\alpha\beta}$, где $G_{\alpha\beta}$ — стабилизатор двух точек α, β, $\alpha \neq \beta$, причем $G_{\alpha\beta}$ содержит элемент, инвертирующий подгруппу A. Пусть, в частности, разность $A \setminus 1$ содержит не более двух классов сопряженных в G_α элементов; есть ли тогда у G нормальная подгруппа, изоморфная группе PSL_2 над некоторым полем?

А. Н. Фомин

10.67. Класс $LN\mathfrak{M}_p$ локально нильпотентных групп, допускающих расщепляющий автоморфизм простого порядка p (см. определение в 10.59), является многообразием групп с операторами (Е. И. Хухро, *Мат. сб.*, **130**, № 1 (1986), 120–127). Верно ли, что $LN\mathfrak{M}_p = (\mathfrak{N}_{c(p)} \cap LN\mathfrak{M}_p) \vee (\mathfrak{B}_p \cap LN\mathfrak{M}_p)$, где $\mathfrak{N}_{c(p)}$ — многообразие нильпотентных групп некоторой p-ограниченной ступени $c(p)$, а $\mathfrak{B}_p$ — многообразие всех групп периода p?

Е. И. Хухро

***10.69.** Пусть S — замкнутая ориентированная поверхность рода $g > 1$ и $G = \pi_1 S = G_1 *_A G_2$, где $G_1 \neq A \neq G_2$ и подгруппа A конечно порождена (и, стало быть, свободна). Является ли это разложение геометрическим, то есть существуют ли такие связные поверхности S_1, S_2, T, что $S = S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2 = T$, $G_i = \pi_1 S_i$, $A = \pi_1 T$ и вложения $S_i \subset S$, $T \subset S$ индуцируют естественные вложения $G_i \subset G$, $A \subset G$? При $A = \mathbb{Z}$ это верно.

Х. Цишанг (H. Zieschang)

*Нет, не всегда (O. V. Bogopol'skiĭ, *Geom. Dedicata*, **94** (2002), 63–89).

10.70. Найти геометрическое обоснование метода Уайтхеда для свободных произведений, похожее на обоснование, данное в случае свободных групп самим Уайтхедом, и более наглядное, чем обоснование данное в (D. J. Collins, H. Zieschang, *Math. Z.*, **185**, №4 (1984), 487–504; **186**, №3 (1984), 335–361).

Прим. Д. Коллинза: имеется частичное решение в (D. McCullough, A. Miller, *Symmetric automorphisms of free products*, Mem. Amer. Math. Soc. **582** (1996)).

Х. Цишанг (H. Zieschang)

10.71. Верно ли, что централизатор любого автоморфизма (любого конечного набора автоморфизмов) в группе автоморфизмов свободной группы конечной степени является конечно определенной группой? В случае степени 2, а также для внутренних автоморфизмов в случае произвольной конечной степени свободы это верно.

В. А. Чуркин

10.73. Перечислить формации конечных групп, у которых все подформации S_n-замкнуты.

Л. А. Шеметков

10.74. Пусть группа G содержит элемент a простого порядка с конечным централизатором $C_G(a)$, причем все подгруппы вида $\langle a, a^g \rangle$, $g \in G$, конечны и почти все из них разрешимы. Будет ли группа G локально конечной? Этот вопрос тесно связан с проблемой 6.56. В ряде весьма важных частных случаев вопрос решен положительно автором (*Междун. алгебр. конф., Тезисы докл. по теории групп*, Новосибирск, 1989, с. 145).

В. П. Шунков

10.75. Пусть группа G содержит такой элемент a простого порядка p, что любая содержащая его конечная подгруппа обладает нормализатором с конечной периодической частью, а все подгруппы вида $\langle a, a^g \rangle$, $g \in G$, конечны и почти все из них разрешимы. Обладает ли группа G при $p > 2$ периодической частью? Доказано (В. П. Шунков, *Группы с инволюциями*, препринты №4, 5, 12 ВЦ СО АН СССР, Красноярск, 1986), что если a — точка, то ответ утвердительный; с другой стороны, там же указана группа G с точкой a порядка 2, удовлетворяющая сформулированным выше условиям и не обладающая периодической частью. Определение *точки* группы см. в (В. И. Сенашов, В. П. Шунков, *Алгебра и логика*, **22**, №1 (1983), 93–112).

В. П. Шунков

10.77. Пусть G — периодическая группа, содержащая элементарную абелеву подгруппу R порядка 4. Должна ли группа G быть локально конечной,

а) если централизатор $C_G(R)$ конечен?

б) если централизатор любой инволюции из R в G — черниковская группа?

Прим. 1999 г.: П. В. Шумяцким (*Quart. J. Math. Oxford (2)*, **49**, №196 (1998), 491–499) получен положительный ответ на вопрос а) в случае, когда группа G финитно аппроксимируема.

В. П. Шунков

10.78. Существует ли нечерниковская группа, разлагающаяся в произведение двух черниковских подгрупп?

В. П. Шунков

Вопросы из 11-го издания, 1990 г.

11.1. (Известная задача). Описать строение централизаторов унипотентных элементов в почти простых группах лиева типа.
Р. Ж. Алеев

11.2. Классифицировать простые группы, изоморфные мультипликативным группам конечных колец, в частности, групповых колец конечных групп над конечными полями и кольцами вычетов по модулю целого числа.
Р. Ж. Алеев

11.3. (М. Ашбахер). *Суперлокалом* в группе G называется такая p-локальная подгруппа H, что $H = N_G(O_p(H))$. Описать суперлокалы в знакопеременных группах и группах лиева типа.
Р. Ж. Алеев

11.5. Пусть k — коммутативное кольцо и G — почти полициклическая группа без кручения. Предположим, что P — конечно порожденный проективный модуль над групповым кольцом kG, содержащий два элемента, независимых над kG. Будет ли модуль P свободным?
В. А. Артамонов

***11.6.** Пусть p — нечетное простое число. Верно ли, что каждая конечная p-группа обладает системой порождающих, состоящей из элементов одного порядка?
Ч. Багински (C. Baginski)

*Нет, не верно (E. A. O'Brien, C. M. Scoppola, M. R. Vaughan-Lee, *Preprint*, 2004, `http://www.math.auckland.ac.nz/~obrien/research/gso.dvi`).

11.7. а) Найти условия на группу G, заданную порождающими и определяющими соотношениями, при которых свойство $(*)$ *некоторый член нижнего центрального ряда G — свободная группа* влечет финитную аппроксимируемость группы G.

б) Найти условия на строение финитно аппроксимируемой группы G, которые обеспечивают свойство $(*)$ для G.
К. Бенчат (K. Bencsáth)

11.8. Для конечной группы X обозначим через $\chi_1(X)$ совокупность степеней неприводимых комплексных характеров группы X с учетом кратностей. Пусть для групп G и H имеет место равенство $\chi_1(G) = \chi_1(H)$. При этом, очевидно, $|G| = |H|$. Известно также, что H — группа Фробениуса, если G — группа Фробениуса. Верно ли, что

а) группа H проста, если G проста?

б) группа H разрешима, если G разрешима?
Я. Г. Беркович

11.9. (И. И. Пятецкий-Шапиро). Существует ли конечная неразрешимая группа G, для которой совокупность характеров, индуцированных тривиальными характерами представителей всех классов сопряженных подгрупп группы G, линейно независима?
Я. Г. Беркович

11.10. (Р. Линдон). а) Существует ли алгоритм, который по данному групповому слову $w(a,x)$ проверяет равенство единице элемента a в группе $\langle a, x \mid a^n = 1,\ w(a,x) = 1\rangle$?
В. В. Блудов

11.11. а) Известная теорема Бэра–Сузуки для конечных групп утверждает, что элемент a группы G, порождающий вместе с каждым своим сопряженным элементом конечную p-группу, лежит в нормальной p-подгруппе. Верна ли эта теорема в классе периодических групп? *А. В. Боровик*

11.12. а) Пусть G — простая локально конечная группа, в которой централизатор некоторого элемента — линейная группа, то есть группа, допускающая точное представление матрицами над полем. Является ли вся G линейной группой?

б) Тот же вопрос с заменой слова «линейная» на «финитарно линейная». Группа H *финитарно линейна*, если она допускает точное представление на бесконечномерном векторном пространстве V, для которого вычетные подпространства $V(1-h)$ конечномерны для всех $h \in H$. *А. В. Боровик*

11.13. Пусть G — периодическая группа, обладающая такой инволюцией i, что для любого элемента $g \in G$ произведение $i^g \cdot i$ имеет нечетный порядок. Верно ли что образ i при естественном гомоморфизме группы G на фактор-группу по $O(G)$ содержится в центре этой фактор-группы? *А. В. Боровик*

11.14. Каждая ли конечная простая группа определяется своей матрицей Картана над алгебраически замкнутым полем характеристики 2? Известно, что для каждой конечной группы существует только конечное число конечных групп с той же матрицей Картана (R. Brandl, *Arch. Math.*, **38** (1982), 322–323).

Р. Брандл (R. Brandl)

11.15. Известно, что для каждого простого числа p существует такая последовательность $a_1, a_2, \ldots$ слов от двух переменных, что конечная группа G тогда и только тогда имеет абелеву силовскую p-подгруппу, когда $a_k(G) = 1$ почти для всех k. Для $p = 2$ такую последовательность можно указать явно (R. Brandl, *J. Austral. Math. Soc.*, **31** (1981), 464–469). А для $p > 2$? *Р. Брандл (R. Brandl)*

11.16. Пусть V_r — класс всех конечных групп G с тождественным соотношением $[x, {}_r y] = [x, {}_s y]$ для некоторого $s = s(G) > r$. Здесь $[x, {}_1 y] = [x, y]$ и $[x, {}_{i+1} y] = [[x, {}_i y], y]$.

а) Существует ли такая функция f, что каждая разрешимая группа из V_r имеет нильпотентную длину $< f(r)$? Случай $r < 3$ см. в (R. Brandl, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **28** (1983), 101–110).

б) Верно ли, что V_r содержит только конечное число неабелевых простых групп? Это верно для $r < 4$. *Р. Брандл (R. Brandl)*

11.17. Пусть G — конечная группа и пусть $d = d(G)$ — наименьшее положительное целое число, для которого в G выполняется тождество $[x, {}_r y] = [x, {}_{r+d} y]$ при некотором неотрицательном целом $r = r(G)$.

а) Пусть $e = 1$, если $d(G)$ четно, и $e = 2$ в противном случае. Верно ли, что период группы $G/F(G)$ делит $e \cdot d(G)$?

б) Если G — неабелева простая группа, то верно ли, что период группы G делит $d(G)$?

Пункт а) верен для разрешимых групп (N. D. Gupta, H. Heineken, *Math. Z.*, **95** (1967), 276–287). Я проверил пункт б) для $PSL(2,q)$, $\mathbb{A}_n$ и некоторых спорадических групп. *Р. Брандл (R. Brandl)*

11.18. Пусть $G(a,b) = \langle x, y \mid x = [x, {}_a y],\ \ y = [y, {}_b x]\rangle$. Конечна ли группа $G(a,b)$?

Легко показать, что $G(1,b) = 1$, и можно показать, что $G(2,2) = 1$. Ничего не известно про $G(2,3)$. Если бы можно было показать, что каждая минимальная простая группа изоморфна фактор-группе некоторой $G(a,b)$, то это давало бы очень красивую последовательность слов от двух переменных для характеризации разрешимых групп; см. (R. Brandl, J. S. Wilson, *J. Algebra*, **116** (1988), 334–341.)

Р. Брандл (R. Brandl)

11.19. (Ч. Симз). Является ли n-й член нижнего центрального ряда абсолютно свободной группы нормальным замыканием множества базисных коммутаторов веса n (в некоторой фиксированной системе свободных образующих)?

Прим. 2001 г.: Д. Джексон анонсировал доказательство того, что ответ положительный для $n \leqslant 5$.

А. Гаглион (A. M. Gaglione), Д. Спеллман (D. Spellman)

11.22. Охарактеризовать все p-группы (p — простое число), которые можно точно представить треугольными $(n \times n)$-матрицами над телом характеристики p.

При $p \geqslant n$ решение содержится в (B. A. F. Wehrfritz, *Bull. London Math. Soc.*, **19** (1987), 320–324). Соответствующий вопрос для $p = 0$ решен в (B. Hartley, P. Menal, *Bull. London Math. Soc.*, **15** (1983), 378–383); см. также другое доказательство в предыдущей ссылке.

Б. Верфриц (B. A. F. Wehrfritz)

11.23. Автоморфизм φ группы G называется *ниль-автоморфизмом*, если для любого элемента a из G найдется натуральное число n, для которого $[a, {}_n\varphi] = 1$. Здесь $[x, {}_1 y] = [x, y]$ и $[x, {}_{i+1} y] = [[x, {}_i y], y]$. Автоморфизм φ называется *e-автоморфизмом*, если для любых двух φ-инвариантных подгрупп A и B, для которых $A \not\subseteq B$, существует такой элемент a из $A \setminus B$, что $[a, \varphi] \in B$. Является ли каждый e-автоморфизм группы ее ниль-автоморфизмом?

В. Г. Виляцер

11.25. б) Существуют ли локальные классы Фиттинга, которые разложимы в нетривиальное произведение классов Фиттинга, причем в каждом таком разложении все сомножители нелокальны?

Определение *произведения* классов Фиттинга см. в (Н. Т. Воробьев, *Мат. заметки*, **43**, №2 (1988), 161–168).

Н. Т. Воробьев

11.28. Предположим, что граф простых чисел конечной группы G несвязен (это означает, что множество простых делителей порядка G можно разбить на два таких непустых множества π и π', что G не содержит элементов порядка pq, где $p \in \pi$, $q \in \pi'$). П. Линнел (P. A. Linnell, *Proc. London Math. Soc.*, **47**, №1 (1983), 83–127) доказал, что тогда существует разложение $\mathbb{Z}G$-модуля $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}G = A \oplus B$ с непроективными A и B. Его доказательство зависит от CFSG. Найти доказательство, не зависящее от CFSG.

К. Грюнберг (K. Gruenberg)

11.29. Пусть F — свободная группа и $\mathfrak{f} = \mathbb{Z}F(F-1)$ — разностный идеал целочисленного группового кольца $\mathbb{Z}F$. Для любой нормальной подгруппы R из F определим соответствующий идеал $\mathfrak{r} = \mathbb{Z}F(R-1) = {}_{\mathrm{id}}(r-1 \mid r \in R)$. Можно идентифицировать, например, $F \cap (1+\mathfrak{r}\mathfrak{f})$ с R', где F естественным образом вложена в $\mathbb{Z}F$ и $1+\mathfrak{r}\mathfrak{f} = \{1+a \mid a \in \mathfrak{r}\mathfrak{f}\}$. Идентифицировать аналогичным образом в терминах соответствующей подгруппы из F

а) $F \cap (1+\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\cdots\mathfrak{r}_n)$, где R_i — нормальные подгруппы в F для $i = 1, 2, \ldots, n$;

б) $F \cap (1+\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3)$;

в) $F \cap (1+\mathfrak{f}\mathfrak{s}+\mathfrak{f}^n)$, где F/S конечно порождена и нильпотентна;

г) $F \cap (1+\mathfrak{f}\mathfrak{s}\mathfrak{f}+\mathfrak{f}^n)$;

д) $F \cap (1+\mathfrak{r}(k)+\mathfrak{f}^n)$, $n > k \geqslant 2$, где $\mathfrak{r}(k) = \mathfrak{r}\mathfrak{f}^{k-1} + \mathfrak{f}\mathfrak{r}\mathfrak{f}^{k-2} + \cdots + \mathfrak{f}^{k-1}\mathfrak{r}$.

Н. Гупта (N. D. Gupta)

11.30. Верно ли, что ранг разрешимой группы без кручения равен рангу любой ее подгруппы конечного индекса? Ответ утвердительный для групп, обладающих рациональным рядом (Д. И. Зайцев, *в кн. Группы с ограничениями для подгрупп*, Наукова думка, Киев, 1971, 115–130). Отметим также, что разрешимая группа без кручения и конечного ранга содержит подгруппу конечного индекса, обладающую рациональным рядом.

Д. И. Зайцев

11.31. Будет ли полициклической радикальная группа, разложимая в произведение двух полициклических подгрупп? Для разрешимых и гиперабелевых групп ответ утвердительный (Д. И. Зайцев, *Мат. заметки*, **29**, №4 (1981), 481–490; J. C. Lennox, J. E. Roseblade, *Math. Z.*, **170** (1980), 153–154).

Д. И. Зайцев

11.32. Описать примитивные конечные линейные группы, содержащие матрицу с *простым спектром*, то есть матрицу, все характеристические корни которой — кратности 1. Частичные результаты см. в (A. Zalesskii, I. D. Suprunenko, *Commun. Algebra*, **26**, №3 (1998), 863–888; *ibid.*, **28**, №4 (2000), 1789–1833).

А. Е. Залесский

11.33. б) Пусть $G(q)$ — простая группа Шевалле над полем из q элементов. Доказать существование такого числа m, что ограничение на $G(q)$ каждого неодномерного представления группы $G(q^m)$ над полем простой характеристики, не делящей q, содержит в качестве композиционных факторов все неприводимые представления группы $G(q)$.

А. Е. Залесский

11.34. Описать комплексные представления квазипростых конечных групп, которые остаются неприводимыми после редукции по модулю любого простого числа q. Важный пример — представления степени $(p^k-1)/2$ симплектической группы $Sp(2k,p)$, где $k \in \mathbb{N}$, p — нечетное простое число.

А. Е. Залесский

11.36. Пусть $G = B(m,n)$ — свободная бернсайдова группа нечетного периода $n \gg 1$ и ранга m. Верны ли следующие утверждения?

а) Всякая 2-порожденная подгруппа группы G изоморфна бернсайдову n-произведению двух циклических групп.

б) Любой автоморфизм φ группы G, для которого $\varphi^n = 1$ и $b^{\varphi}\cdot b^{\varphi^2}\cdots b^{\varphi^n} = 1$ при всяком b из G, является внутренним (здесь $m > 1$).

в) Группа G хопфова при $m < \infty$.

г) Все ретракты группы G свободны.

д) Делители нуля в групповом кольце $\mathbb{Z}G$ тривиальны, т. е. если $ab = 0$, то a справа, а b слева делятся соответственно на $c, d \in \mathbb{Z}G$, причем $cd = 0$ и множество $\operatorname{supp} c \cup \operatorname{supp} d$ содержится в некоторой циклической подгруппе группы G.

С. В. Иванов

11.37. а) Можно ли группу $B(m, n)$ при любых n и m задать такими определяющими соотношениями вида $v^n = 1$, что для любого натурального делителя d числа n, отличного от n, элемент v^d не равен 1 в $B(m, n)$? При нечетных $n \geqslant 665$ и для всех $n \geqslant 2^{48}$, делящихся на 2^9, это так.

С. В. Иванов

11.38. Существует ли конечно определенная нетерова группа, отличная от почти полициклической?

С. В. Иванов

11.39. (Известный вопрос). Существует ли группа, не являющаяся почти полициклической, целочисленное групповое кольцо которой нетерово?

С. В. Иванов

11.40. Доказать или опровергнуть, что группа G без кручения и с условием малого сокращения $C'(\lambda)$, где $\lambda \ll 1$, обладает $\mathscr{U}P$-свойством (и потому KG без делителей нуля).

С. В. Иванов

11.42. Существуют ли группы без кручения, имеющие ровно три класса сопряженных элементов и содержащие подгруппу индекса 2?

А. В. Изосов

11.44. Для конечной группы X обозначим через $r(X)$ ее секционный ранг. Верно ли, что секционный ранг конечной p-группы, представимой в виде произведения AB своих подгрупп A и B, ограничен некоторой линейной функцией от $r(A)$ и $r(B)$?

Л. С. Казарин

11.45. По определению, t-(v, k, λ)-*схема* $\mathscr{D} = (X, \mathscr{B})$ состоит из множества X, содержащего v точек, и множества $\mathscr{B}$ k-элементных подмножеств X, называемых *блоками*, для которых каждое t-элементное подмножество X содержится в λ блоках. Доказать, что не существует нетривиальных блок-транзитивных 6-схем. Нами показано, что не существует нетривиальных блок-транзитивных 8-схем, и заведомо существуют некоторые нетривиальные блок-транзитивные (даже флаг-транзитивные) 5-схемы.

П. Камерон (P. J. Cameron), Ч. Прэгер (C. E. Praeger)

11.46. а) Существует ли конечная 3-группа G ступени нильпотентности 3, для которой $[a, a^{\varphi}] = 1$ для всех $a \in G$ и всех эндоморфизмов φ группы G? (См. A. Caranti, *J. Algebra*, **97**, №1 (1985), 1–13).

в) Существует ли конечная 2-энгелева p-группа G, ступень нильпотентности которой больше чем 2 и для которой $\operatorname{Aut} G = \operatorname{Aut}_c G \cdot \operatorname{Inn} G$, где $\operatorname{Aut}_c G$ — группа центральных автоморфизмов группы G?

А. Каранти (A. Caranti)

11.48. Является ли коммутатор $[x, y, y, y, y, y, y]$ в свободной группе $\langle x, y \rangle$ произведением пятых степеней? Если нет, то бернсайдова группа $B(2, 5)$ бесконечна.

А. И. Кострикин

11.49. Б. Хартли (B. Hartley, *Proc. London Math. Soc.*, **35**, №1 (1977), 55–75) построил пример несчетного артинова $\mathbb{Z}G$-модуля, где G — метабелева группа с условием минимальности для нормальных подгрупп. Отсюда вытекает существование несчетной разрешимой (ступени разрешимости 3) группы с условием Min-n. В связи с этим результатом и изучением некоторых классов разрешимых групп со слабым условием минимальности для нормальных подгрупп возникает следующий вопрос. Будет ли счетным артинов $\mathbb{Z}G$-модуль в случае, если G — разрешимая группа конечного ранга (в частности, минимаксная группа)?

Л. А. Курдаченко

11.50. Пусть A, C — абелевы группы. Если $A[n] = 0$, т. е. для $a \in A$ равенство $na = 0$ влечет $a = 0$, то последовательность

$$\frac{\mathrm{Hom}\,(C, A)}{n\mathrm{Hom}\,(C, A)} \rightarrowtail \mathrm{Hom}\left(\frac{C}{nC}, \frac{A}{nA}\right) \twoheadrightarrow \mathrm{Ext}\,(C, A)[n]$$

точна. Для данного $f \in \mathrm{Hom}\left(C, \frac{A}{nA}\right) = \mathrm{Hom}\left(\frac{C}{nC}, \frac{A}{nA}\right)$ соответствующее расширение X_f задается диаграммой

$$\begin{array}{ccccc} A & \rightarrowtail & X_f & \twoheadrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A & \rightarrowtail & A & \twoheadrightarrow & \dfrac{A}{nA} \end{array}.$$

Применить эту схему для классификации конкретных расширений A посредством C. Интересным является случай $nC = 0$, A — группа без кручения. Здесь $\mathrm{Ext}(C, A)[n] = \mathrm{Ext}(C, A)$. (См. E. L. Lady, A. Mader, *J. Algebra*, **140** (1991), 36–64.)

А. Мадер (A. Mader)

11.51. Существуют ли (большие, нетривиальные) классы $\mathfrak{X}$ абелевых групп без кручения, для которых при $A, C \in \mathfrak{X}$ группа $\mathrm{Ext}\,(C, A)$ не имеет кручения? Можно показать, что две группы из такого класса почти изоморфны в точности тогда, когда их p-ранги равны для любого p (E. L. Lady, A. Mader, *J. Algebra*, **140** (1991), 36–64).

А. Мадер (A. Mader)

11.52. (Известный вопрос). Группа подстановок множества Ω называется *точно дважды транзитивной*, если для любых двух пар (α, β) и (γ, δ) элементов множества Ω, таких что $\alpha \neq \beta$ и $\gamma \neq \delta$, существует ровно один элемент группы, переводящий α в γ, а β в δ. Всякая ли точно дважды транзитивная группа обладает нетривиальной абелевой нормальной подгруппой? Для конечных групп утвердительный ответ хорошо известен.

В. Д. Мазуров

11.56. а) Всякая ли бесконечная финитно аппроксимируемая группа содержит бесконечную абелеву подгруппу? Этот вопрос эквивалентен следующему: всякая ли бесконечная финитно аппроксимируемая группа содержит неединичный элемент с бесконечным централизатором?

По знаменитой теореме Шункова периодическая группа с инволюцией, имеющей конечный централизатор, почти разрешима. Поэтому можно предполагать, что в нашей группе порядок каждого элемента нечетен. Возможно, стоит начать с ответа на вопрос

б) Всякая ли бесконечная группа, аппроксимируемая конечными p-группами, содержит бесконечную абелеву подгруппу?

А. Манн (A. Mann)

11.58. Описать конечные группы, содержащие такую плотно вложенную подгруппу H, что силовская 2-подгруппа в H — прямое произведение группы кватернионов порядка 8 и неединичной элементарной группы.

А. А. Махнев

11.59. TI-подгруппу A группы G назовем подгруппой *корневого типа*, если нетривиальность подгруппы $N_A(A^g)$ влечет поэлементную перестановочность подгрупп A и A^g. Описать конечные группы, в которых циклическая подгруппа A порядка 4 является подгруппой корневого типа.

А. А. Махнев

11.60. Верно ли, что гипотетический граф Мура с 3250 вершинами валентности 57 не имеет инволютивных автоморфизмов? Известно, что этот граф не является графом ранга 3 (M. Aschbacher, *J. Algebra*, **19**, №4 (1971), 538–540).

А. А. Махнев

11.61. Пусть F — неабелева свободная про-p-группа. Верно ли, что подмножество $\{r \in F \mid \mathrm{cd}\,(F/(r)) \leqslant 2\}$ плотно в F? Здесь (r) означает порожденную элементом r замкнутую нормальную подгруппу группы F.

О. В. Мельников

11.62. Описать группы, над которыми разрешимо любое уравнение. Верно ли, в частности, что этот класс групп совпадает с классом групп без кручения? Нетрудно показать, что группа, над которой разрешимо любое уравнение, не имеет кручения. С другой стороны, С. Д. Бродский (*Сиб. мат. ж.*, **25**, №2 (1984), 84–103) показал, что над локально индикабельной группой любое уравнение разрешимо.

Д. И. Молдаванский

11.63. Пусть G — группа с одним определяющим соотношением, содержащая нетривиальные элементы конечного порядка, а N — ее подгруппа, порожденная всеми элементами конечного порядка. Верно ли, что каждая подгруппа группы G, тривиально пересекающаяся с N, является свободной группой? Можно показать, что ответ положителен в тех случаях, когда фактор-группа G/N имеет нетривиальный центр или удовлетворяет нетривиальному тождеству.

Д. И. Молдаванский

11.65. *Гипотеза:* конечно порожденная разрешимая про-p-группа без кручения с разрешимой элементарной теорией является аналитической про-p-группой.

А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников

11.66. (Ю. Л. Ершов). Разрешима ли элементарная теория свободной про-p-группы?

А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников

11.67. Существует ли такая группа без кручения, в которой ровно три класса сопряженных элементов и ни один из нетривиальных классов не содержит пары взаимно обратных элементов?

Б. Нойман (B. Neumann)

***11.68.** Любую ли линейно упорядоченную группу можно вложить (с продолжением порядка) в линейно упорядоченную группу ровно с тремя классами сопряженных элементов?

Б. Нойман (B. Neumann)

---

*Нет, не любую (В. В. Блудов, *Тезисы Междун. конф. Алгебра, логика и кибернетика, посв. 75-летию А. И. Кокорина (Иркутск, 2004)*, Иркутск, 2004, 6–7).

11.69. Группу G, действующую на множестве Ω назовем 1-$\{2\}$-*транзитивной*, если она действует транзитивно на множестве
$$\Omega^{1,\{2\}} = \{(\alpha,\, \{\beta, \gamma\}) \mid \alpha,\, \beta,\, \gamma \text{ различны}\}.$$
Таким образом, группа G является 1-$\{2\}$-транзитивной точно тогда, когда она транзитивна и стабилизатор G_α 2-однороден на $\Omega \setminus \{\alpha\}$. Задача заключается в классификации всех (бесконечных) групп подстановок, которые 1-$\{2\}$-транзитивны, но не 3-транзитивны.

П. Нойман (P. M. Neumann)

11.70. Пусть F — бесконечное поле или тело.

а) Найти все транзитивные подгруппы группы $PGL(2, F)$, действующей на проективной прямой $F \cup \{\infty\}$.

б) Какие свойства подкольца R из F обеспечивают флаг-транзитивность $PGL(d+1, R)$ на проективном пространстве $PG(d, F)$ размерности d?

в) Каковы флаг-транзитивные подгруппы группы $PGL(d+1, F)$?

г) Какие подгруппы $PGL(d+1, F)$ 2-транзитивны на точках пространства $PG(d, F)$?

П. Нойман (P. M. Neumann), Ч. Прэгер (C. E. Praeger)

11.71. Пусть A — конечная группа с нормальной подгруппой H. Подгруппа U из H называется *A-накрывающей подгруппой* H, если $\bigcup\limits_{a \in A} U^a = H$. Существует ли функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ со следующим свойством: если $U < H < A$, где A — конечная группа, H — нормальная подгруппа индекса n в A и U — A-накрывающая подгруппа H, то индекс $|H : U| \leqslant f(n)$? Ответ положительный, если U — максимальная подгруппа в H.

П. Нойман (P. M. Neumann), Ч. Прэгер (C. E. Praeger)

11.72. Пусть многообразие групп $\mathfrak{V}$ *нерегулярно*, т. е. при некотором n свободная группа $F_{n+1}(\mathfrak{V})$ вложима в $F_n(\mathfrak{V})$. Верно ли, что тогда всякая счетная группа из $\mathfrak{V}$ вложима в n-порожденную группу из $\mathfrak{V}$?

А. Ю. Ольшанский

11.73. Если относительно свободная группа является конечно определенной, то будет ли она почти нильпотентной?

А. Ю. Ольшанский

11.76. (Известная проблема). Будет ли разрешимой группа коллинеаций конечной недезарговой проективной плоскости, определенной над полуполем (т. е. такой плоскости, для которой соответствующее регулярное множество (см. Архив, 10.48) замкнуто относительно сложения)?

Н. Д. Подуфалов

11.77. (Известная проблема). Описать конечные плоскости трансляций, группы коллинеаций которых действуют дважды транзитивно на точках бесконечно удаленной прямой.

Н. Д. Подуфалов

11.78. Изоморфизм групп точек алгебраических групп называется *полуалгебраическим*, если он представляется в виде композиции изоморфизма переноса поля определения и рационального морфизма.

а) Верно ли, что из изоморфизма групп точек двух прямо неразложимых алгебраических групп над алгебраически замкнутым полем с тривиальными центрами следует существование полуалгебраического изоморфизма групп точек?

б) Верно ли, что всякий изоморфизм групп точек прямо неразложимых алгебраических групп с тривиальными центрами, определенных над алгебраическими полями, является полуалгебраическим? Поле называется *алгебраическим*, если все его элементы алгебраичны над простым подполем.

К. Н. Пономарев

11.80. Пусть G — примитивная группа подстановок конечного множества Ω и пусть для $\alpha \in \Omega$ подгруппа G_α действует 2-транзитивно на одной из ее нетривиальных орбит. Согласно (C. E. Praeger, *J. Austral. Math. Soc. (A)*, **45**, 1988, 66–77) либо

(а) $T \leqslant G \leqslant \operatorname{Aut} T$ для некоторой неабелевой простой группы T, либо

(б) G обладает единственной минимальной нормальной подгруппой, которая регулярна на Ω.

Для каких классов простых групп из (а) возможна классификация? Описать как можно более явно примеры таких классов. Классифицировать все группы из (б).

Прим. 1999 г.: в двух работах (X. G. Fang, C. E. Praeger, *Commun. Algebra*, в печ.) показано, что это возможно, если T — группа Сузуки или типа Ри, а работа (J. Wang, C. E. Praeger, *J. Algebra*, **180** (1996), 808–833) указывает на то, что это может быть невозможно в случае, когда T — знакопеременная группа. *Прим. 2001 г.:* в работе (X. G. Fang, G. Havas, J. Wang, *European J. Combin.*, **20**, № 6 (1999), 551–557) построены новые примеры с $G = PSU(3, q)$.

Ч. Прэгер (C. E. Praeger)

11.81. Топологическая группа называется *F-уравновешенной*, если для любого ее подмножества X и любой окрестности единицы U можно найти такую окрестность единицы V, что $VX \subseteq XU$. Верно ли, что любая F-уравновешенная группа *уравновешена*, то есть имеет базу окрестностей единицы, состоящую из инвариантных множеств?

И. В. Протасов

11.83. Разрешима ли проблема сопряженности для конечно порожденных групп, полициклических над абелевыми?

В. Н. Ремесленников

11.84. Разрешима ли проблема изоморфизма

а) для конечно порожденных метабелевых групп,

б) для конечно порожденных разрешимых групп конечного ранга?

В. Н. Ремесленников

11.85. Пусть F — свободная про-p-группа с базой X, $R = r^F$ — нормальная замкнутая подгруппа, порожденная элементом r. Будем говорить, что элемент s из F *ассоциирован* с элементом r, если $s^F = R$.

а) Предположим, что ни один из элементов, ассоциированных с r, не является p-й степенью никакого элемента из F. Верно ли, что группа F/R не имеет кручения?

б) Среди элементов, ассоциированных с r, существует такой, который зависит от минимального множества X' элементов базы. Пусть $x \in X'$. Верно ли, что образы элементов из $X \setminus \{x\}$ в F/R свободно порождают свободную про-p-группу?

Н. С. Романовский

11.86. Обладает ли произвольная группа $G = \langle x_1, \ldots, x_n \mid r_1 = \cdots = r_m = 1 \rangle$ естественным гомоморфным образом $H = \langle x_1, \ldots, x_n \mid s_1 = \cdots = s_m = 1 \rangle$,

а) таким, что группа H без кручения?

б) таким, что целочисленное групповое кольцо группы H вложимо в тело?

Если окажется верным более сильное утверждение б), то появится явный метод нахождения элементов $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-m}}$, свободно порождающих в G свободную группу. Они существуют по теореме Н. С. Романовского (*Алгебра и логика*, **16**, №1 (1977), 88–97).

В. А. Романьков

11.87. (Известный вопрос). Является ли конечно определенной группа всех автоморфизмов свободной метабелевой группы ранга $n \geqslant 4$?

В. А. Романьков

11.88. *Длиной* $l(g)$ энгелева элемента g из группы G назовем наименьшее число l, удовлетворяющее при всех h из G равенству $[h, g;\, l] = 1$. Здесь $[h, g;\, 1] = [h, g]$ и $[h, g;\, i + 1] = [[h, g;\, i],\, g]$. Существует ли такая линейная (полиномиальная) функция $\varphi(x, y)$, что $l(uv) \leqslant \varphi(l(u), l(v))$? До сих пор неизвестно, будет ли произведение энгелевых элементов снова энгелевым элементом. Отрицательный ответ на первый вопрос может помочь ответить и на второй.

Прим. ред.: отрицательный ответ на первый вопрос анонсирован в (Л. В. Долбак, *Тезисы 16-й Междун. научн. студ. конф. Студент и научно-технический прогресс: математика*, НГУ, Новосибирск, 2003, 3–4).

В. А. Романьков

11.89. Пусть k — бесконечный кардинал. Описать эпиморфные образы декартовой степени $\prod_k \mathbb{Z}$ группы $\mathbb{Z}$ целых чисел. Для $k = \omega_0$ такое описание известно (R. Nunke, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **23** (1963), 67–73).

С. В. Рычков

11.90. Пусть $\mathfrak{V}$ — произвольное многообразие групп и k — бесконечный кардинал. Группа $G \in \mathfrak{V}$ ранга k называется *почти свободной в* $\mathfrak{V}$, если любая ее подгруппа, имеющая ранг, меньший k, содержится в некоторой ее подгруппе, свободной в $\mathfrak{V}$. Для каких k существуют почти свободные, но не свободные в $\mathfrak{V}$ группы ранга k?

С. В. Рычков

11.92. Каковы разрешимые наследственные неоднопорожденные формации конечных групп, у которых все собственные наследственные подформации однопорождены?

А. Н. Скиба

11.94. Дать описание всех *просто приводимых* групп, т. е. групп, у которых все характеры вещественны и тензорное произведение любых двух неприводимых представлений не содержит кратных компонент (вопрос, интересный для физиков). Не будет ли конечная просто приводимая группа разрешимой?

С. П. Струнков

11.95. Верно ли, что p-группа G, содержащая элемент a порядка p, для которого подгруппа $\langle a, a^g\rangle$ конечна при любом g и множество $C_G(a) \cap a^G$ конечно, имеет нетривиальный центр? Для 2-групп это так.

С. П. Струнков

11.96. Верно ли, что для каждого числа n существует только конечное число конечных простых групп, в каждой из которых существует инволюция, перестановочная не более чем с n инволюциями группы? Верно ли, что бесконечных простых групп с таким условием нет?

С. П. Струнков

11.98. a) (Р. Брауэр). Найти неулучшаемую оценку вида $|G| \leqslant f(r)$, где r — число классов сопряженных элементов конечной (простой) группы G.

С. П. Струнков

11.99. Найти (в теоретико групповых терминах) необходимые и достаточные условия существования в конечной группе комплексных неприводимых характеров, имеющих дефект 0 для более чем одного простого числа, делящего порядок группы. В тех же терминах выразить число таких характеров.

С. П. Струнков

11.100. Верно ли, что любая периодическая сопряженно бипримитивно конечная группа (см. 6.59) получается с помощью расширений из 2-групп и бинарно конечных групп? Для p-групп, p — нечетное простое число, этот вопрос представляет самостоятельный интерес.

С. П. Струнков

***11.101.** Существует ли группа Голода (см. 9.76) с конечным центром?

А. В. Тимофеенко

---

*Да, существует (В. А. Середа, А. И. Созутов, в: *Тр. 21-й Межвуз. научно-техн. конф. (Красноярск, 2003), математика*, Красноярск, 2003, 21–44).

11.102. Существует ли неразрешимая, но аппроксимируемая разрешимыми группами группа, которая удовлетворяет условию максимальности для подгрупп?

Дж. Уайголд (J. Wiegold)

11.104. Пусть G — конечная группа порядка $p^a \cdot q^b \cdots$, где $p, q, \ldots$ — различные простые числа. Введем различные переменные $x_p, x_q, \ldots$, соответствующие числам $p, q, \ldots$. Определим функции f, φ из решетки подгрупп G в кольцо многочленов $\mathbb{Z}[x_p, x_q, \ldots]$ следующим образом:

(1) если порядок H равен $p^\alpha \cdot q^\beta \cdots$, то $f(H) = x_p^\alpha \cdot x_q^\beta \cdots$;

(2) $\sum\limits_{K \leqslant H} \varphi(K) = f(H)$ для всех $H \leqslant G$.

Назовем $f(G)$ и $\varphi(G)$ *порядковым* и *эйлеровым многочленами* группы G. Подставляя в эти многочлены $p^m, q^m, \ldots$ вместо $x_p, x_q, \ldots$, мы будем получать, соответственно, m-ю степень порядка G и число упорядоченных m-ок элементов, порождающих G.

Известно, что если группа G p-разрешима, то $\varphi(G)$ — произведение многочлена от x_p и многочлена от остальных переменных. Следовательно, если G разрешима, то $\varphi(G)$ — произведение многочлена от x_p на многочлен от x_q, на … . Верны ли обратные утверждения

*а) для разрешимых конечных групп?

б) для p-разрешимых конечных групп?

Г. Уолл (G. E. Wall)

---

*а) Да, обратное верно для разрешимых групп (E. Detomi, A. Lucchini, *J. London Math. Soc. (2)*, **70** (2004), 165–181).

11.105. б) Пусть $\mathfrak{V}$ — многообразие групп. Его относительно свободная группа данного ранга представима как фактор-группа F/N, где F — абсолютно свободная группа того же ранга, а N — вполне инвариантная подгруппа F. Присоединенное кольцо Ли $\mathscr{L}(F/N)$ представимо в виде L/J, где L — свободное кольцо Ли того же ранга, а J — идеал в L. Всегда ли J вполне инвариантен в L, если $\mathfrak{V}$ — бернсайдово многообразие, состоящее из всех групп данного периода q, где q — степень простого числа, $q \geqslant 4$.

Г. Уолл (G. E. Wall)

11.107. Существует ли не линейная локально конечная простая группа, все собственные подгруппы которой финитно аппроксимируемы?

Р. Филлипс (R. Phillips)

11.109. Верно ли, что объединение возрастающего ряда групп лиева типа одного и того же ранга над некоторыми полями также является группой лиева типа того же ранга над полем? (Для локально конечных полей ответ положительный. Соответствующий результат принадлежит В. Беляеву, А. Боровику, Б. Хартли & Г. Шюту и С. Томасу.)

Р. Филлипс (R. Phillips)

11.111. Каждая ли бесконечная локально конечная простая группа G содержит неабелеву простую конечную подгруппу? Существует ли бесконечная башня таких подгрупп в G?

Б. Хартли (B. Hartley)

11.112. Пусть $L = L(K(p))$ — присоединенное кольцо Ли свободной счетно порожденной группы $K(p)$ кострикинского многообразия локально конечных групп данного простого периода p. Верно ли, что

а) L является относительно свободным кольцом Ли?

*б) все тождества кольца L являются следствиями полилинейных тождеств этого кольца?

в) все тождества кольца L являются следствиями конечного числа тождеств этого кольца?

Е. И. Хухро

*б) Нет, $L(K(7))$ удовлетворяет двум соотношениям веса 29 (от двух порождающих, мультивеса $(14,15)$ и $(15,14)$), которые не являются следствиями полилинейных соотношений (E. O'Brien, M. R. Vaughan-Lee, *Int. J. Algebra Comput.*, **12** (2002), 575–592; M. F. Newman, M. R. Vaughan-Lee, *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, **4**, №1 (1998), 1–3).

11.113. (Б. Хартли). Верно ли, что ступень разрешимости нильпотентной периодической группы, допускающей регулярный автоморфизм порядка p^n, где p — простое, а n — натуральное число, ограничена функцией от p и n?

Е. И. Хухро

11.114. Не будет ли всякая локально ступенчатая группа конечного специального ранга почти гиперабелевой? В классе периодических локально ступенчатых групп это верно (Н. С. Черников, *Укр. мат. ж.*, **42**, №7 (1990), 962–970).

Н. С. Черников

11.115. Пусть X — свободная нециклическая группа, N — ее неединичная нормальная подгруппа, а T — собственная подгруппа, содержащая N. Верно ли, что $[T, N] < [X, N]$, если N не является максимальной в X подгруппой?

В. П. Шаптала

11.116. *Размерностью* частично упорядоченного множества $\langle P, \leqslant\rangle$ называется наименьший кардинал δ с тем свойством, что отношение $\leqslant$ равно пересечению δ отношений линейного порядка на P. Верно ли, что для всякой черниковской группы, не содержащей прямого произведения двух квазициклических групп по одному и тому же простому числу, решетка подгрупп имеет конечную размерность? *Предположительный ответ:* да.

Л. Н. Шеврин

11.117. Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый разрешимый непустой класс Фиттинга. Верно ли, что каждая конечная неразрешимая группа обладает $\mathfrak{X}$-инъектором?

Л. А. Шеметков

11.118. Каковы все те наследственные разрешимые локальные формации $\mathfrak{F}$ конечных групп, для которых в каждой конечной группе существует $\mathfrak{F}$-покрывающая подгруппа?

Л. А. Шеметков

11.119. Верно ли, что для любого непустого множества π простых чисел π-длина конечной π-разрешимой группы ограничена сверху ступенью разрешимости ее холловой π-подгруппы?

Л. А. Шеметков

11.120. Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимая насыщенная фиттингова формация. Верно ли, что $l_{\mathfrak{F}}(G) \leqslant f(c_{\mathfrak{F}}(G))$, где $c_{\mathfrak{F}}(G)$ — длина композиционного ряда некоторой $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппы конечной разрешимой группы G? Этот вопрос — проблема 17 из (Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, М., Наука, 1978). Там же можно найти определение *$\mathfrak{F}$-длины* $l_{\mathfrak{F}}(G)$.

Л. А. Шеметков

11.121. Существует ли локальная формация конечных групп, которая обладает нетривиальным разложением в произведение двух формаций, причем в любом таком разложении оба множителя нелокальны? Локальные произведения нелокальных формаций существуют.

Л. А. Шеметков

11.122. Всякий ли ненулевой подмодуль свободного модуля над групповым кольцом группы без кручения содержит свободный циклический подмодуль?

А. Л. Шмелькин

11.123. (Известный вопрос). Для данной группы G определим следующую последовательность групп: $A_1(G) = G$, $A_{i+1}(G) = \mathrm{Aut}\,(A_i(G))$. Существует ли конечная группа G, для которой эта последовательность содержит бесконечно много неизоморфных групп?

М. Шорт (M. Short)

11.124. Пусть F — нециклическая свободная группа, а R — ее нециклическая подгруппа. Верно ли, что если подгруппа $[R, R]$ нормальна в F, то и подгруппа R нормальна в F?

В. Э. Шпильрайн

11.125. Пусть G — конечная группа, допускающая регулярную элементарную абелеву группу автоморфизмов V порядка p^n. Верно ли, что подгруппа $H = \bigcap\limits_{v \in V \setminus \{1\}} [G, v]$ является нильпотентной? В случае положительного ответа существует ли функция, зависящая только от p, n и ступени разрешимости группы G, которая ограничивает ступень нильпотентности подгруппы H?

П. В. Шумяцкий

11.126. Существуют ли константа h и функция f со следующим свойством: если конечная разрешимая группа G допускает автоморфизм φ порядка 4, такой, что $|C_G(\varphi)| \leqslant m$, то G обладает нормальным рядом $1 \leqslant M \leqslant N \leqslant G$, в котором индекс $|G : N|$ не превосходит $f(m)$, группа N/M нильпотентна ступени $\leqslant 2$, а группа M нильпотентна ступени $\leqslant h$?

П. В. Шумяцкий

11.127. Всякая ли группа периода 12 локально конечна?

В. П. Шунков

Вопросы из 12-го издания, 1992 г.

12.1. а) Басс (H. Bass, *Topology*, **4**, №4 (1966), 391–400) построил в явном виде собственную подгруппу конечного индекса в группе единиц целочисленного группового кольца конечной циклической группы. Вычислить индекс подгруппы Басса.

Р. Ж. Алеев

12.3. Назовем p-группу *тонкой*, если в ней любое семейство попарно несравнимых (по включению) подгрупп состоит не более чем из $p+1$ элементов. Конечно ли число неизоморфных тонких про-p-групп?

Р. Брандл (R. Brandl)

12.4. Пусть на группе G выполнено тождество $[x,y]^3 = 1$. Будет ли G' группой ограниченного периода? Разрешима ли G? Известно, что G' — 3-группа (N. D. Gupta, N. S. Mendelssohn, 1967).

Р. Брандл (R. Brandl)

12.6. Пусть G — конечно порожденная группа и пусть H — такая p-подгруппа из G, что H не содержит нетривиальных нормальных подгрупп из G и $HX = XH$ для любой подгруппы X из G. Является ли $G/C_G(H^G)$ p-группой? Здесь H^G — нормальное замыкание H в G.

Г. Бусетто (G. Busetto)

12.8. Пусть $\mathscr{V}$ — нетривиальное многообразие групп и пусть $a_1, \ldots, a_r$ свободно порождают свободную группу $F_r(\mathscr{V})$ многообразия $\mathscr{V}$. Скажем, что $F_r(\mathscr{V})$ *сильно дискриминирует* $\mathscr{V}$, если любая конечная система неравенств $w_i(a_1, \ldots, a_r, x_1, \ldots, x_k) \neq 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$, выполнимая при некотором s в группе $F_s(\mathscr{V})$, содержащей $F_r(\mathscr{V})$ в качестве свободного в многообразии $\mathscr{V}$ фактора, имеет решение уже в $F_r(\mathscr{V})$. Существует ли такое многообразие $\mathscr{V}$, что $F_r(\mathscr{V})$ для некоторого $r > 0$ дискриминирует, но не сильно дискриминирует $\mathscr{V}$? Аналогичный вопрос интересен и для общих алгебр в контексте универсальной алгебры.

А. Гаглион (A. M. Gaglione), Д. Спеллман (D. Spellman)

12.9. Следуя Бассу, назовем группу *древесно свободной*, если существует упорядоченная абелева группа Λ и Λ-дерево X, на котором G действует свободно и без инверсий.

а) Каждая ли конечно порожденная древесно свободная группа удовлетворяет условию максимальности для абелевых подгрупп?

б) Тот же вопрос для конечно определенных древесно свободных групп.

А. Гаглион (A. M. Gaglione), Д. Спеллман (D. Spellman)

12.11. Пусть G и H — конечные или счетные группы, а A — собственная подгруппа и в G, и в H, не содержащая нетривиальных подгрупп, нормальных и в G, и в H. Можно ли вложить $G *_A H$ в $\mathrm{Sym}\,\mathbb{N}$ в качестве высоко транзитивной подгруппы?

А. Гласс (A. M. W. Glass)

12.12. Разрешима ли проблема сопряженности для нильпотентных конечно порожденных решеточно упорядочиваемых групп?

А. Гласс (A. M. W. Glass)

12.13. Группа автоморфизмов G счетного универсального частично упорядоченного множества проста (A. M. W. Glass, S. H. McCleary, M. Rubin, *Math. Z.*, **214**, №1 (1993), 55–66). Верно ли, что каждая транзитивная на точках этого множества подгруппа группы G, индекс которой меньше $2^{\aleph_0}$, совпадает с G?

А. Гласс (A. M. W. Glass)

12.14. Существует ли такая модель счетной теории, что теория ее группы автоморфизмов неразрешима?

А. Гласс (A. M. W. Glass), М. Жироде (M. Giraudet)

12.15. Пусть в конечной 2-группе G любые два элемента сопряжены, если их нормальные замыкания совпадают. Верно ли, что коммутант группы G абелев?

Е. А. Голикова, А. И. Старостин

12.16. Замкнут ли относительно свободного произведения класс групп рекурсивных автоморфизмов произвольных моделей?

С. С. Гончаров

12.17. Найти описание автоустойчивых периодических абелевых групп.

С. С. Гончаров

12.19. Верно ли, что для всякого числа $n \geqslant 2$ и любых двух эпиморфизмов φ и ψ свободной группы F_{2n} ранга $2n$ на $F_n \times F_n$ существует такой автоморфизм α группы F_{2n}, что $\alpha\varphi = \psi$?

Р. И. Григорчук

12.20. (Известный вопрос). Является ли группа Р. Томпсона

$$F = \langle x_0, x_1, \ldots \mid x_n^{x_i} = x_{n+1},\ \ i < n,\ \ n = 1, 2, \ldots \rangle =$$
$$= \langle x_0, \ldots, x_4 \mid x_1^{x_0} = x_2,\ \ x_2^{x_0} = x_3,\ \ x_2^{x_1} = x_3,\ \ x_3^{x_1} = x_4,\ \ x_3^{x_2} = x_4 \rangle$$

аменабельной?

Р. И. Григорчук

12.21. Пусть R — коммутативное кольцо с единицей, G — конечная группа и $a(RG)$ — кольцо R-представлений группы G. Доказать, что в $a(RG)$ нет нетривиальных идемпотентов.

П. М. Гудивок, В. П. Рудько

12.22. б) Пусть $\Delta(G)$ — разностный идеал целочисленного группового кольца $\mathbb{Z}G$ произвольной группы G. Тогда $D_n(G) = G \cap (1 + \Delta^n(G))$ содержит n-й член $\gamma_n(G)$ нижнего центрального ряда группы G. Верно ли, что период группы $D_n(G)/\gamma_n(G)$ делит 2?

Н. Гупта (N. D. Gupta), Ю. В. Кузьмин

12.23. *Индексом перестановочности* конечной группы G назовем наименьшее число $k \geqslant 2$, обладающее следующим свойством: если $x_1, \ldots, x_k$ — элементы из G, то существует нетривиальная подстановка σ степени k, для которой $x_1 \cdots x_k = x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(k)}$. Найти индексы перестановочности симметрических групп $\mathbb{S}_n$.

М. Гутсан (M. Gutsan)

12.27. Пусть G — простая локально конечная группа. Будем говорить, что G — *группа конечного типа*, если существует ее нетривиальное представление подстановками, в котором некоторая конечная подгруппа не имеет регулярных орбит. Исследовать и, возможно, классифицировать простые локально конечные группы конечного типа.

А. Е. Залесский

12.28. Пусть G — группа. Функция $f\colon G \to \mathbb{C}$ называется

1) *нормированной*, если $f(1) = 1$;

2) *центральной*, если $f(gh) = f(hg)$ для любых $g, h \in G$;

3) *положительно определенной*, если для любых $g_1, \ldots, g_n \in G$ и $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ имеет место соотношение $\sum\limits_{k,l} f(g_k^{-1} g_l)\bar{c}_k c_l \geqslant 0$.

Классифицировать бесконечные простые локально конечные группы G, обладающие непостоянными на $G \setminus \{1\}$ функциями со свойствами 1)–3). Известно, что простые группы Шевалле не имеют таких функций, в то время как на локально матричных (или стабильных) классических группах над конечными полями такие функции существуют. Вопрос мотивирован теорией C^*-алгебр (см. А. М. Вершик, С. В. Керов, Локально полупростые алгебры. Комбинаторная теория и K0-функтор. *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения*, **26**, ВИНИТИ, М., 1985, § 9).

А. Е. Залесский

12.29. Описать локально конечные группы, для которых фундаментальный идеал комплексной групповой алгебры является простым кольцом. Задача восходит к И. Капланскому (1965 г.). Частичные результаты см. в (K. Bonvallet, B. Hartley, D. S. Passman, M. K. Smith, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **56**, № 1 (1976), 79–82; А. Е. Залесский, *Алгебра и анализ*, **2**, № 6 (1990), 132–149; Ch. Praeger, A. E. Zalesskii, *Proc. London Math. Soc.*, **70**, № 2 (1995), 313–335).

А. Е. Залесский

12.30. (О. Н. Головин). Существуют ли на классе всех групп ассоциативные операции, которые удовлетворяют постулатам Маклейна и Мальцева (то есть являются свободными функторными и наследственными) и отличны от прямого и свободного умножений?

С. В. Иванов

12.32. Для бернсайдова многообразия $\mathfrak{B}_n$ групп нечетного периода $n \gg 1$ доказать аналог теоремы Г. Хигмана, то есть возможность вложения всякой рекурсивно определенной группы периода n в конечно определенную (в $\mathfrak{B}_n$) группу периода n.

С. В. Иванов

12.33. Пусть G — конечная группа, x — такой ее элемент, что $\langle x, y\rangle$ имеет нечетный порядок для любого элемента y, сопряженного в G с x. Доказать, не используя CFSG, что нормальное замыкание элемента x в G — группа нечетного порядка.

Л. С. Казарин

12.34. Описать конечные группы G, для которых сумма кубов степеней всех неприводимых комплексных характеров не превосходит $|G| \cdot \log_2 |G|$. Вопрос интересен для приложений в теории обработки сигналов.

Л. С. Казарин

12.35. Пусть $\mathfrak{F}$ — радикальная композиционная формация конечных групп. Доказать, что для любой конечной группы G и любых ее субнормальных подгрупп H и K справедливо равенство $\langle H, K\rangle^{\mathfrak{F}} = \langle H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}}\rangle$.

С. Ф. Каморников

12.37. (Дж. Томпсон). *Типом* конечной группы G назовем функцию из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$, значение которой на натуральном n совпадает с числом решений в G уравнения $x^n = 1$. Верно ли, что группа, равнотипная разрешимой, разрешима?

А. С. Кондратьев

12.38. (Дж. Томпсон). Для конечной группы G через $N(G)$ обозначим множество всех порядков классов сопряженных элементов группы G. Верно ли, что если G — конечная неабелева простая группа, H — конечная группа с единичным центром и $N(G) = N(H)$, то G и H изоморфны?

А. С. Кондратьев

12.39. (Ши Вуджи). Верно ли, что конечная группа и конечная простая группа изоморфны, если у них один и тот же порядок и одно и то же множество порядков элементов?

А. С. Кондратьев

12.40. Пусть φ — неприводимый p-модулярный характер конечной группы G. Найти неулучшаемую оценку вида $\varphi(1)_p \leqslant f(|G|_p)$. Здесь n_p означает p-часть натурального числа n.

А. С. Кондратьев

12.41. Пусть F — свободная группа ранга 2 с порождающими x, y и φ — ее автоморфизм, посылающий x в y, а y в xy. Пусть G — естественное полупрямое произведение $F/(F''(F')^2)$ и $\langle\varphi\rangle$. Тогда группа G не полициклична, в то время как все ее собственные фактор-группы полицикличны. Чему равна когомологическая размерность d группы G над $\mathbb{Q}$? Известно, что d равна 3 или 4.

П. Крофоллер (P. H. Kropholler)

12.42. Описать автоморфизмы силовской p-подгруппы группы Шевалле нормального типа над кольцом вычетов целых чисел по модулю p^m, $m \geqslant 2$. Здесь p — простое число.

Прим. 2005 г.: С. Г. Колесников (*Алгебра и логика*, **43**, №1 (2004), 32–59) описал эти автоморфизмы при $p > 3$.

В. М. Левчук

12.43. (Известный вопрос). Существует ли бесконечная конечно порожденная финитно аппроксимируемая p-группа, в которой каждая подгруппа либо конечна, либо имеет конечный индекс?

Дж. Леннокс (J. C. Lennox)

***12.44.** (Ф. Холл). Существует ли нетривиальная группа G, изоморфная любому нетривиальному расширению G посредством G?

Дж. Леннокс (J. C. Lennox)

---

*Да, такие группы существуют любой регулярной мощности (R. Göbel, S. Shelah, *Math. Proc. Cambridge Philos. Society (2)*, **134**, №1 (2003), 23–31).

***12.47.** Пусть k — поле, p — простое число и G — сплетение группы порядка p с бесконечной циклической группой (так что база сплетения имеет период p). Имеет ли kG классическое кольцо частных, то есть образуют ли неделители нуля кольца kG область Оре?

П. Линнел (P. A. Linnell)

*Нет, не обязательно (P. A. Linnell, W. Lück, T. Schick, in: *High-dimensional manifold topology. Proc. of the school, ICTP (Trieste, 2001)*, River Edge, NJ: World Scientific, 2003, 315–321).

12.48. Пусть G — точно дважды транзитивная группа подстановок множества Ω (см. определение в 11.52).

а) Существует ли в G регулярная нормальная подгруппа, если стабилизатор точки локально конечен?

б) Существует ли в G регулярная нормальная подгруппа, если в стабилизаторе точки есть абелева подгруппа конечного индекса?

В. Д. Мазуров

12.50. (Известная проблема). Указать алгоритм, который по конечному набору матриц из $SL_3(\mathbb{Z})$ определяет, содержится ли первая матрица набора в подгруппе, порожденной остальными матрицами. Аналогичная проблема для $SL_4(\mathbb{Z})$ неразрешима, поскольку в $SL_4(\mathbb{Z})$ вкладывается прямое произведение двух свободных групп ранга 2.

Г. С. Маканин

12.51. Имеет ли свободная группа F_n ранга n $(1 < n < \infty)$ такое конечное подмножество S, что существует единственный линейный порядок группы F_n, в котором все элементы S положительны? Эквивалентно, обладает ли свободная o-аппроксимируемая l-группа ранга n базисным элементом? (Аналогичные вопросы для правых порядков группы F_n и свободных l-групп решаются отрицательно.)

С. Макклири (S. McCleary)

12.52. Является ли свободная l-группа $\mathscr{F}_n$ ранга n $(1 < n < \infty)$ хопфовой, то есть всякий ли l-гомоморфизм $\mathscr{F}_n$ на себя взаимно однозначен?

С. Макклири (S. McCleary)

12.53. Разрешима ли проблема сопряженности элементов в свободной l-группе?

С. Макклири (S. McCleary)

12.54. Существует ли нормальнозначная l-группа G, для которой невозможно найти такую абелеву l-группу A, что $C(A) \cong C(G)$? Здесь $C(G)$ обозначает решетку выпуклых l-подгрупп группы G. Если не требовать от G нормальнозначности, то ответ положительный.

С. Макклири (S. McCleary)

12.55. Пусть $f(p, n)$ — число групп порядка p^n (p — простое число). Является ли $f(p, n)$ возрастающей функцией от p при каждом фиксированном $n \geqslant 5$?

А. Манн (A. Mann)

12.56. Рассмотрим конечные копредставления $\langle X \mid R\rangle$ с циклически приведенными словами в R. Определим *длину* копредставления как сумму числа порождающих и длин соотношений. Пусть $F(n)$ обозначает количество групп (с точностью до изоморфизма), которые допускают копредставление длины $\leqslant n$. Что можно сказать о функции $F(n)$? Можно показать, что $F(n)$ не рекурсивна (Д. Сигал) и что она по меньшей мере экспоненциальна (Л. Пыбер).

А. Манн (A. Mann)

12.57. Пусть циклическая группа A порядка 4 является TI-подгруппой конечной группы G.

а) Будет ли A централизовать компоненту L группы G, если $A \cap LC(L) = 1$?

б) Каково строение нормального замыкания A в случае, когда A централизует каждую компоненту из G?

А. А. Махнев

12.58. *Обобщенным четырехугольником* $GQ(s,t)$ с параметрами (s,t) называется система инцидентности, состоящая из точек и прямых, в которой каждая прямая состоит из $s+1$ точки, любые две различные прямые имеют не более одной общей точки, каждая точка принадлежит $t+1$ прямой, и для точки a, не лежащей на прямой L, найдется единственная прямая, содержащая a и пересекающая L.

а) Существует ли $GQ(4,11)$?

б) Может ли содержать инволюции группа автоморфизмов гипотетического обобщенного четырехугольника $GQ(5,7)$?

А. А. Махнев

12.59. Существует ли сильно регулярный граф с параметрами (85, 14, 3, 2) и несвязной окрестностью некоторой вершины?

А. А. Махнев

12.60. Описать сильно регулярные графы, в которых окрестности вершин — обобщенные четырехугольники (см. 12.58).

А. А. Махнев

12.62. *Группой Фробениуса* называется транзитивная группа подстановок, в которой стабилизатор любых двух различных точек тривиален. Существует ли группа Фробениуса бесконечной степени, примитивная как группа подстановок, в которой стабилизатор точки — циклическая группа, имеющая только конечное число орбит?

Предполагаемый ответ: нет. Отметим, что такая группа не может быть дважды транзитивной — см. (Gy. Károlyi, S. J. Kovács, P. P. Pálfy, *Aequationes Math.*, **39**, №1 (1990), 161–166; В. Д. Мазуров, *Сиб. мат. ж.*, **31**, №4 (1990), 102–104; P. M. Neumann, P. J. Rowley, in: *Geometry and cohomology in group theory*, (*London Math Soc. Lect. Note Ser.*, **252**), Cambridge Univ. Press, 1998, 291–295).

П. Нойман (P. M. Neumann)

12.63. Существует ли разрешимая группа подстановок бесконечной степени, которая имеет только конечное число орбит на множестве троек? *Предполагаемый ответ:* нет.

Прим. 2001 г.: доказано (D. Macpherson, in: *Advances in algebra and model theory* (*Algebra Logic Appl.*, **9**), Gordon and Breach, Amsterdam, 1997, 87–92), что любая бесконечная разрешимая группа подстановок имеет бесконечно много орбит на четверках.

П. Нойман (P. M. Neumann)

12.64. Верно ли, что по данному числу $k \geqslant 2$ и любому (простому) n можно найти такое число $N = N(k,n)$, что всякая конечная группа с порождающими $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ имеет период $\leqslant n$, если в ней $(x_1 \cdots x_N)^n = 1$ для любых $x_1, \dots, x_N \in A \cup \{1\}$?

Для данных k и n отрицательный ответ влечет, например, бесконечность свободной группы Бернсайда $B(k,n)$, а положительный ответ в случае достаточно большого n дает, к примеру, возможность указать гиперболическую не финитно аппроксимируемую группу (а в ней — гиперболическую подгруппу конечного индекса, не имеющую собственных подгрупп конечного индекса).

А. Ю. Ольшанский

12.66. Описать конечные плоскости трансляций, группы коллинеаций которых действуют дважды транзитивно на аффинных точках. *Н. Д. Подуфалов*

12.67. Описать строение локально компактных разрешимых групп с условием максимальности (минимальности) для замкнутых некомпактных подгрупп.

В. М. Полецких

12.68. Описать локально компактные абелевы группы, в которых любые две замкнутые подгруппы конечного ранга порождают подгруппу конечного ранга.

В. М. Полецких

12.69. Пусть F — счетное бесконечное поле, а G — конечная группа автоморфизмов поля F. На поле F определено действие группового кольца $\mathbb{Z}G$. Предположим, что S — подполе F, удовлетворяющее следующему свойству: для любого элемента $x \in F$ найдется ненулевой элемент $f \in \mathbb{Z}G$, для которого $x^f \in S$. Верно ли, что либо $F = S$, либо расширение полей F/S чисто несепарабельно? Можно показать, что аналогичный вопрос для несчетного поля решается положительно.

К. Н. Пономарёв

12.72. Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимая локальная наследственная формация конечных групп. Доказать, что $\mathfrak{F}$ радикальна, если любая конечная разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа G является минимальной не $\mathfrak{N}^{l(G)}$-группой. Здесь $\mathfrak{N}$ — формация конечных нильпотентных групп, $l(G)$ — нильпотентная длина группы G.

В. Н. Семенчук

12.73. Скажем, что *длина* формации $\mathfrak{H}$ конечных групп равна t, если существует цепь формаций $\varnothing = \mathfrak{H}_0 \subset \mathfrak{H}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{H}_t = \mathfrak{H}$, в которой $\mathfrak{H}_{i-1}$ — максимальная подформация формации $\mathfrak{H}_i$. Дистрибутивна ли решетка разрешимых формаций длины $\leqslant 4$? *А. Н. Скиба*

12.75. (Йонсон). Будет ли многообразием класс N решеток нормальных подгрупп групп? Известно (C. Herrman, W. Poguntke, *Algebra Univers.*, **4**, № 3 (1974), 280–286), что N — бесконечно базируемое квазимногообразие. *Д. М. Смирнов*

12.77. (Известный вопрос). Верно ли, что порядок (если он $> p^2$) конечной нециклической p-группы делит порядок ее группы автоморфизмов? *А. И. Старостин*

12.79. Предположим, что a и b — такие два элемента конечной группы G, что функция $\varphi(g) = 1^G(g) - 1^G_{\langle a\rangle}(g) - 1^G_{\langle b\rangle}(g) - 1^G_{\langle ab\rangle}(g) + 2$ является характером группы G. Верно ли, что $G = \langle a, b\rangle$? Обратное утверждение справедливо.

С. П. Струнков

12.80. (Роггенкамп). б) Верно ли, что число p-блоков дефекта 0 конечной простой группы G равно числу классов сопряженности таких элементов g группы G, что число решений уравнения $[x, y] = g$ в группе G не делится на p?

С. П. Струнков

12.81. Какова мощность множества подмногообразий группового многообразия $\mathfrak{A}_p^3$ (здесь $\mathfrak{A}_p$ — многообразие абелевых групп простого периода p)?

В. И. Сущанский

***12.82.** Указать все пары (n, r) натуральных чисел, для которых в симметрической группе $\mathbb{S}_n$ существует максимальная подгруппа, изоморфная $\mathbb{S}_r$.

В. И. Сущанский

*Найдены (B. Benesh, B. Newton, *Preprint*, 2005, `http://www.math.wisc.edu/~newton/papers/symembed.pdf`).

12.85. Верно ли, что в любом многообразии, которое порождено (известной) простой конечной группой G, содержащей c-ступенно разрешимую подгруппу, есть 2-порожденная c-ступенно разрешимая группа?

С. А. Сыскин

12.86. Для каждой известной простой конечной группы G найти такое максимальное число n, что прямое произведение n экземпляров группы G порождается двумя элементами.

С. А. Сыскин

12.87. Пусть Γ — связный неориентированный граф без петель и кратных ребер, группа $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ автоморфизмов которого действует транзитивно на вершинах. Верно ли, что справедливо хотя бы одно из следующих трех утверждений?

1. Стабилизатор вершины графа Γ в группе $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ конечен.
2. Действие группы $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ на множестве вершин графа Γ обладает нетривиальной системой импримитивности σ с конечными блоками, для которой стабилизатор вершины фактор-графа Γ/σ в $\mathrm{Aut}(\Gamma/\sigma)$ конечен.
3. Существует такое натуральное число n, что граф Γ^n, полученный из Γ добавлением ребер, соединяющих различные вершины, расстояние между которыми в Γ не превосходит n, содержит дерево, валентность каждой вершины которого равна 3.

В. И. Трофимов

12.88. Неориентированный граф называется *локально конечным графом Кэли группы G*, если множество его вершин можно так отождествить с множеством элементов группы G, что для некоторой конечной системы порождающих $X = X^{-1}$ группы G, не содержащей 1, вершины g и h соединены ребром тогда и только тогда, когда $g^{-1}h \in X$. Существуют ли две конечно порожденные группы с одним и тем же локально конечным графом Кэли, одна из которых периодическая, а другая — нет?

В. И. Трофимов

12.89. Описать бесконечные связные графы, к которым сходятся последовательности конечных связных графов с примитивными группами автоморфизмов. Определения см. в (В. И. Трофимов, *Алгебра и логика*, **28**, №3 (1989), 337–369).

В. И. Трофимов

12.92. Для поля K характеристики 2 каждая конечная группа $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ нечетного порядка n с точностью до изоморфизма определяется ее групповым определителем (Форманек — Сибли, 1990) и даже ее *редуцированной нормой*, которая определяется как последний коэффициент $s_m(x)$ минимального многочлена

$$\varphi(\lambda; x) = \lambda^m - s_1(x)\lambda^{m-1} + \dots + (-1)^m s_m(x)$$

для общего элемента $x = x_1g_1 + \dots + x_ng_n$ группового кольца KG (Хёнке, 1991). Возможно ли в этой теореме заменить $s_m(x)$ другими коэффициентами $s_i(x)$, $i < m$? Определения см. в (G. Frobenius, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, 1896, 1343–1382) и (K. W. Johnson, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **109** (1991), 299–311).

Х.-Ю. Хёнке (H.–J. Hoehnke)

12.94. Пусть конечно порожденная про-p-группа G не содержит в качестве замкнутой секции сплетения группы порядка p с группой p-адических целых чисел. Будет ли G аналитической p-адической группой?

А. Шалев (A. Shalev)

12.95. Пусть G — конечно порожденная про-p-группа и пусть $g_1, \dots, g_n \in G$. Пусть H — открытая подгруппа группы G и пусть существует такое слово $w = w(X_1, \dots, X_n)$, что $w(a_1, \dots, a_n) = 1$ для любых $a_1 \in g_1H, \dots, a_n \in g_nH$. Следует ли отсюда, что G удовлетворяет какому-нибудь нетривиальному тождественному соотношению?

Если да, то для конечно порожденных про-p-групп справедлив аналог альтернативы Титса. Известно (E. I. Zelmanov, J. S. Wilson, *J. Pure Appl. Algebra*, **81** (1992), 103–109), что градуированная алгебра Ли $L_p(G)$, построенная по размерным подгруппам группы G в характеристике p, удовлетворяет полиномиальному тождеству.

А. Шалев (A. Shalev)

12.96. Найти такой непустой класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ и такую неразрешимую конечную группу G, что G не имеет $\mathfrak{F}$-инъекторов.

Л. А. Шеметков

12.100. Всякая ли периодическая группа с регулярным автоморфизмом порядка 4 является локально конечной?

П. В. Шумяцкий

12.101. Группу G, содержащую инволюцию i, назовем *T_0-группой*, если

1) порядок произведения любых двух сопряженных с i инволюций конечен;

2) все 2-подгруппы из G циклические или обобщенные группы кватернионов;

3) централизатор C инволюции i в G бесконечен, отличен от G и обладает конечной периодической частью;

4) нормализатор любой нетривиальной i-инвариантной конечной подгруппы из G либо содержится в C, либо обладает периодической частью, являющейся группой Фробениуса (см. 6.55) с абелевым ядром и конечным дополнением четного порядка;

5) для всякого элемента c, не содержащегося в C, для которого ci — инволюция, в C найдется такой элемент s, что подгруппа $\langle c, c^s \rangle$ бесконечна.

Существует ли простая T_0-группа?

В. П. Шунков

Вопросы из 13-го издания, 1995 г.

13.1. Пусть $U(K)$ обозначает группу единиц кольца K. Пусть G — конечная группа, $\mathbb{Z}G$ — ее целочисленное групповое кольцо, $\mathbb{Z}_pG$ — ее групповое кольцо над кольцом вычетов по простому модулю p. Описать гомоморфизм из $U(\mathbb{Z}G)$ в $U(\mathbb{Z}_pG)$, полученный редуцированием коэффициентов по модулю p. Более точно, найти ядро и образ этого гомоморфизма и указать конкретную трансверсаль по ядру.

Р. Ж. Алеев

13.2. Существует ли такое конечно базируемое многообразие групп $\mathfrak{V}$, что проблема равенства разрешима в $F_n(\mathfrak{V})$ для всех натуральных n, но в $F_\infty(\mathfrak{V})$ она неразрешима (относительно системы свободных порождающих)?

М. И. Анохин

13.3. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное многообразие групп. Верно ли, что любая бесконечно-порожденная проективная группа из $\mathfrak{M}$ является $\mathfrak{M}$-свободным произведением счетно-порожденных проективных групп из $\mathfrak{M}$?

В. А. Артамонов

13.4. Пусть G — группа с нормальной (про-) 2-подгруппой N, такая, что G/N изоморфна $GL_n(2)$, причем действие G/N на фактор-группе $N/\Phi(N)$ подобно действию $GL_n(2)$ на ее естественном n-мерном модуле над $GF(2)$. Для $n = 3$ найти G с наибольшей возможной N. (Можно доказать, что для $n > 3$ уже подгруппа Фраттини $\Phi(N)$ единична; для $n = 2$ существует такая G, что N — свободная 2-порожденная про-2-группа.)

Б. Бауман (B. Baumann)

13.5. Группы A и B называются *локально эквивалентными*, если для любой конечно порожденной подгруппы $X \leqslant A$ найдется подгруппа $Y \leqslant B$, изоморфная X, и, наоборот, для любой конечно порожденной подгруппы $Y \leqslant B$ найдется подгруппа $X \leqslant A$, изоморфная Y. Назовем группу *категоричной*, если она изоморфна любой локально эквивалентной ей группе. Верно ли, что периодическая локально разрешимая группа G категорична тогда и только тогда, когда G — гиперконечная группа с черниковскими силовскими подгруппами? (Группа называется *гиперконечной*, если она имеет вполне упорядоченный по возрастанию ряд нормальных подгрупп с конечными скачками.)

В. В. Беляев

13.6. (Б. Хартли). Верно ли, что локально конечная группа, содержащая элемент с черниковским централизатором, почти локально разрешима?

В. В. Беляев

13.7. (Б. Хартли). Верно ли, что простая локально конечная группа, содержащая конечную подгруппу с конечным централизатором, линейна?

В. В. Беляев

13.8. (Б. Хартли). Верно ли, что локально разрешимая периодическая группа, содержащая элемент

а) с конечным централизатором;

б) с черниковским централизатором,

имеет конечный нормальный ряд, все факторы которого локально нильпотентны?

В. В. Беляев

13.9. Верно ли, что локально разрешимая периодическая группа, содержащая конечную нильпотентную подгруппу с черниковским централизатором, имеет конечный нормальный ряд, все факторы которого локально нильпотентны?

В. В. Беляев, Б. Хартли (B. Hartley)

13.11. Будет ли группа без кручения почти полициклической, если она имеет конечную систему порождающих $a_1, \ldots, a_n$, такую, что каждый элемент группы имеет однозначное представление вида $a_1^{k_1} \cdots a_n^{k_n}$, где $k_i \in \mathbb{Z}$? *В. В. Блудов*

13.12. Верно ли, что группа всех автоморфизмов произвольной гиперболической группы конечно определена?

Прим. 2001 г.: это доказано для группы автоморфизмов гиперболической группы без кручения, неразложимой в свободное произведение (Z. Sela, *Geom. Funct. Anal.*, **7**, №3 (1997) 561–593). *О. В. Богопольский*

13.13. Пусть G и H — конечные p-группы с изоморфными бернсайдовыми кольцами. Ограничена ли ступень нильпотентности группы H какой-либо функцией от ступени нильпотентности группы G? Есть пример, когда ступень нильпотентности G равна 2, а ступень нильпотентности H равна 3. *Р. Брандл (R. Brandl)*

13.14. Является ли дистрибутивной решетка квазимногообразий двуступенно нильпотентных групп без кручения? *А. И. Будкин*

13.15. Обладает ли независимым базисом квазитождеств в классе групп без кручения свободная неабелева нильпотентная группа ступени 3? *А. И. Будкин*

13.17. Линейное представление группы G на векторном пространстве V называется *ниль-представлением*, если для любых $v \in V$ и $g \in G$ существует такое $n = n(v, g)$, что $v(g-1)^n = 0$. Верно ли, что в характеристике 0 любое неприводимое ниль-представление тривиально? (Это не так в ненулевой характеристике.)

С. Вовси

***13.18.** Пусть F — конечно порожденная неабелева свободная группа и пусть G — декартово (неограниченное) произведение счетного числа копий группы F. Верно ли, что фактор-группа G/G' не имеет кручения?

А. Гаглион (A. M. Gaglione), Д. Спеллман (D. Spellman)

*Нет, в ней могут быть элементы порядка 2 (O. Kharlampovich, A. Myasnikov, in: *Knots, braids, and mapping class groups — papers dedicated to Joan S. Birman (New York, 1998)*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001, 77–83).

13.19. Пусть группа Q и ее нормальная подгруппа H являются подгруппами прямого произведения $G_1 \times \cdots \times G_n$, причем для каждого i проекции Q и H на G_i совпадают с G_i. Верно ли, что если фактор-группа Q/H является p-группой, то Q/H — регулярная p-группа? *Ю. М. Горчаков*

13.20. Верно ли, что производящий ряд функции роста любой конечно-порожденной группы с одним определяющим соотношением представляет алгебраическую (или даже рациональную) функцию? *Р. И. Григорчук*

13.21. б) Какой наименьший порядок роста функции $\pi(n) = \max\limits_{\delta(g)\leqslant n} |g|$ возможен для класса групп, указанного в части «а» (см. Архив). Известно, что существуют p-группы с $\pi(n) \leqslant n^{\lambda}$ для некоторого $\lambda > 0$ (Р. И. Григорчук, *Изв. АН СССР, сер. мат.*, **48**, № 5 (1984), 939–985). В то же время из результата Е. И. Зельманова следует, что $\pi(n)$ не ограничена, если G бесконечна.

Р. И. Григорчук

13.22. Будет ли группа полициклической, если она является произведением двух своих полициклических подгрупп и обладает возрастающим нормальным рядом с локально нильпотентными факторами?

Ф. де Джованни (F. de Giovanni)

13.23. Верно ли, что любая группа, обладающая конечным нормальным рядом с бесконечными циклическими факторами, имеет нетривиальный внешний автоморфизм?

Ф. де Джованни (F. de Giovanni)

13.24. Пусть G — недискретная топологическая группа с конечным числом ультрафильтров, сходящихся к единице. Верно ли, что группа G содержит счетную подгруппу периода 2?

Прим. 2005 г.: это доказано для счетной G (E. G. Zelenyuk, *Mat. Studii*, **7** (1997), 139–144).

Е. Г. Зеленюк

13.25. Пусть (G, τ) — топологическая группа с конечной полугруппой $\tau(G)$ ультрафильтров, сходящихся к единице (И. В. Протасов, *Сиб. мат. ж.*, **34**, № 5 (1993), 163–180). Верно ли, что $\tau(G)$ — полугруппа идемпотентов?

Прим. 2005 г.: это доказано для счетной G (E. G. Zelenyuk, *Mat. Studii*, **14** (2000), 121–140).

Е. Г. Зеленюк

13.26. Верно ли, что счетная топологическая группа периода 2 с единственным свободным ультрафильтром, сходящимся к единице, имеет базу окрестностей единицы, состоящую из подгрупп?

Е. Г. Зеленюк, И. В. Протасов

13.27. (Б. Амберг). Предположим, что $G = AB = AC = BC$ для группы G и ее подгрупп A, B, C.

а) Будет ли G группой Черникова, если A, B, C — группы Черникова?

б) Будет ли группа G почти полициклической, если A, B, C — почти полициклические группы?

Л. С. Казарин

***13.28.** (Д. М. Эванс). Группа подстановок на бесконечном множестве называется *кофинитарной*, если ее неединичные элементы оставляют на месте только конечное число точек. Верно ли, что замкнутая кофинитарная группа подстановок локально компактна (в топологии поточечной сходимости)?

П. Камерон (P. J. Cameron)

*Нет, не всегда (G. Hjorth, *J. Algebra*, **200**, № 2 (1998), 439–448).

13.29. Для бесконечного множества Ω определим алгебру A (*приведенную алгебру инцидентности конечных подмножеств*) следующим образом. Пусть V_n — множество функций из множества n-элементных подмножеств Ω в поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Положим $A = \bigoplus V_n$ с умножением по правилу: для $f \in V_n$, $g \in V_m$ и $|X| = m + n$ полагаем $(fg)(X) = \sum f(Y)g(X \setminus Y)$, где сумма берется по всем n-элементным подмножествам Y множества X. Если G — группа подстановок на Ω, то пусть A^G обозначает алгебру G-инвариантов в A.

Гипотеза: если G не имеет конечных орбит на Ω, то A^G — область целостности.

П. Камерон (P. J. Cameron)

13.30. Группа G называется *B-группой*, если любая примитивная группа подстановок, содержащая регулярное представление группы G, дважды транзитивна. Существуют ли счетные B-группы?

П. Камерон (P. J. Cameron)

13.31. Пусть G — группа подстановок множества Ω. Последовательность точек из Ω называется *базой* для G, если ее поточечный стабилизатор в G — единичная подгруппа. *Жадный алгоритм* поиска базы выбирает каждую точку в этой последовательности в одной из максимальных по размеру орбит стабилизатора предшествующих точек. Существует ли универсальная константа c, такая, что для любой конечной примитивной группы подстановок размер базы, построенной жадным алгоритмом, не более чем в c раз больше минимального размера баз?

П. Камерон (P. J. Cameron)

13.32. (Известная проблема). Заданный на группе направленный вверх частичный порядок с линейно упорядоченным конусом положительных элементов называется *полулинейным*, если он устойчив относительно умножения справа на элементы группы. Всякий ли полулинейный порядок группы продолжается до ее правого порядка?

В. М. Копытов

***13.33.** (Ф. Гросс). Всегда ли нормальная подгруппа конечной D_π-группы (см. 3.62) является D_π-группой?

В. Д. Мазуров

*Да, всегда mod CFSG (Е. П. Вдовин, Д. О. Ревин, *Contemp. Math.*, **402** (2006), 229–263).

13.35. Содержит ли каждая неразрешимая про-p-группа когомологической размерности 2 свободную неабелеву про-p-подгруппу?

О. В. Мельников

13.36. Для конечно порожденной про-p-группы G положим $a_n(G) = \dim_{\mathbb{F}_p} I^n/I^{n+1}$, где I — пополняющий идеал группового кольца $\mathbb{F}_p[[G]]$. Назовем *ростом* группы G рост последовательности $\{a_n(G)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

а) Вытекает ли из экспоненциальности роста группы G существование в ней свободной про-p-подгруппы ранга 2?

б) (А. Люботцки, А. Шалев). Является ли экспоненциальным рост группы G, если в ней содержится конечно порожденная замкнутая подгруппа экспоненциального роста?

в) Существуют ли про-p-группы конечной когомологической размерности, не являющиеся аналитическими p-адическими, рост которых меньше экспоненциального?

О. В. Мельников

13.37. Пусть G — про-p-группа без кручения, U — ее открытая подгруппа, являющаяся про-p-группой с одним определяющим соотношением. Верно ли, что G — тоже про-p-группа с одним определяющим соотношением?

О. В. Мельников

13.39. Пусть A — ассоциативное кольцо с 1, аддитивная группа которого не имеет кручения, и F^A — тензорное A-пополнение свободной группы F (А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников, *Сиб. мат. ж.*, **35**, №5 (1994), 1106–1118), называемое *свободной A-степенной группой*; в (A. G. Myasnikov, V. N. Remeslennikov, *Int. J. Algebra Comput.*, **6** (1996), 687–711), показано, как можно построить F^A в терминах свободных произведений с объединением.

а) (Г. Баумслаг). Верно ли, что F^A аппроксимируется нильпотентными группами без кручения?

б) Верно ли, что F^A — линейная группа?

в) (Г. Баумслаг). Является ли вложением гомоморфизм Магнуса группы $F^{\mathbb{Q}}$ в группу степенных рядов над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$?

В случае, когда $\langle 1\rangle$ — сервантная подгруппа аддитивной группы кольца A, ответы на вопросы «а» и «б» положительны (A. M. Gaglione, A. G. Myasnikov, V. N. Remeslennikov, D. Spellman, *Comm. Algebra*, **25** (1997), 631–648). В той же работе показано, что «а» эквивалентно «в». Известно также, что гомоморфизм Магнуса взаимно-однозначен на любой подгруппе группы $F^{\mathbb{Q}}$ вида $\langle F, t \mid u = t^n\rangle$ (G. Baumslag, *Comm. Pure Appl. Math.*, **21** (1968), 491–506).

г) Разрешима ли универсальная теория группы F^A?

д) (Г. Баумслаг). Можно ли охарактеризовать свободные A-группы функцией длины?

е) (Г. Баумслаг). Верно ли, что каждая свободная A-группа может свободно действовать на каком-то Λ-дереве? См. определение в (R. Alperin, H. Bass, *in: Combinatorial group theory and topology, Alta, Utah, 1984* (*Ann. Math. Stud.*, **111**), Princeton Univ. Press, 1987, 265–378).

А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников

13.41. Разрешима ли элементарная теория класса всех групп, свободно действующих на Λ-деревьях?

А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников

13.42. Доказать, что тензорное A-пополнение (см. А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников, *Сиб. мат. ж.*, **35**, №5 (1994), 1106–1118) свободной нильпотентной группы может быть ненильпотентным.

А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников

13.43. (Дж. Робинсон). *Гипотеза:* Если дефектная группа $D = D(B)$ p-блока B характеров конечной группы неабелева и $|D : Z(D)| = p^a$, то высота каждого характера из B строго меньше a.

Й. Олссон (J. Olsson)

13.44. Для любого разбиения произвольной группы G на конечное число подмножеств $G = A_1 \cup \dots \cup A_n$ найдется такое подмножество разбиения A_i и такое конечное подмножество $F \subseteq G$, что $G = A_i^{-1}A_iF$ (И. В. Протасов, *Сиб. мат. ж.*, **34**, №5 (1993), 163–180). Всегда ли можно выбрать подмножество F так, что $|F| \leqslant n$? Для аменабельных групп это верно.

И. В. Протасов

13.45. Любую бесконечную группу G регулярной мощности $\mathfrak{m}$ можно разбить на два подмножества $G = A_1 \cup A_2$ так, что $A_1F \neq G$ и $A_2F \neq G$ для всякого подмножества $F \subset G$ мощности, меньшей $\mathfrak{m}$. Верно ли это утверждение для групп сингулярной мощности?

И. В. Протасов

13.48. (У. Комфорт, Дж. ван Милл). Топологическая группа называется *неразложимой*, если любые два ее плотные подмножества пересекаются. Верно ли, что любая недискретная неразложимая группа содержит бесконечную подгруппу периода 2?

И. В. Протасов

13.49. (В. И. Малыхин). Можно ли топологическую группу разбить на два плотных подмножества при условии, что на группе имеется бесконечное число свободных ультрафильтров, сходящихся к единице?

И. В. Протасов

13.50. Пусть $\mathfrak{F}$ — локальный класс Фиттинга. Верно ли, что частично упорядоченное по включению множество классов Фиттинга, входящих в $\mathfrak{F}$ и отличных от $\mathfrak{F}$, не имеет максимальных элементов?

А. Н. Скиба

13.51. Вложима ли каждая конечная модулярная решетка в решетку формаций конечных групп?

А. Н. Скиба

13.52. *Размерностью* конечно базируемого многообразия алгебр $\mathscr{V}$ называется наибольшая длина *базиса* (т. е. независимого порождающего множества) SC-теории $SC(\mathscr{V})$, состоящей из выполнимых в $\mathscr{V}$ строгих условий Мальцева. Размерность считается бесконечной, если длины базисов в $SC(\mathscr{V})$ не ограничены. Всякая ли конечная абелева группа порождает многообразие конечной размерности?

Д. М. Смирнов

13.53. Пусть a, b — элементы конечного порядка бесконечной группы $G = \langle a, b\rangle$. Верно ли, что найдется бесконечно много элементов $g \in G$, для которых подгруппа $\langle a, b^g\rangle$ бесконечна?

А. И. Созутов

13.54. а) Верно ли, что при достаточно большом p любая (конечная) p-группа может служить дополнением в некоторой группе Фробениуса (см. 6.55)?

А. И. Созутов

13.55. Существует ли группа Голода (см. 9.76), изоморфная AT-группе? Определение AT-группы см. в (А. В. Рожков, *Мат. заметки*, **40**, № 5 (1986), 572–589).

А. В. Тимофеенко

***13.56.** (А. Шалев). Пусть G — конечная p-группа секционного ранга r, а φ — ее автоморфизм, имеющий ровно m неподвижных точек. Верно ли, что ступень разрешимости группы G ограничена некоторой функцией, зависящей только от r и m?

Е. И. Хухро

*Да, верно (A. Jaikin–Zapirain, *Israel J. Math.*, **129** (2002), 209–220).

13.57. Пусть φ — автоморфизм простого порядка p конечной группы G, такой, что $C_G(\varphi) \leqslant Z(G)$.

а) Верно ли, что при $p = 3$ группа G разрешима? В. Д. Мазуров и Т. Л. Недорезов (*Алгебра и логика*, **35**, № 6 (1996), 699–708) доказали, что G разрешима при $p = 2$ и что G может быть неразрешимой при $p > 3$.

б) Верно ли, что ступень разрешимости группы G ограничена в терминах p, если G разрешима?

в) (В. К. Харченко). Верно ли, что ступень разрешимости группы G ограничена в терминах p, если G — p-группа? (В. В. Блудов указал пример, показывающий, что ступень нильпотентности ограничить нельзя.)

Е. И. Хухро

13.58. Пусть φ — автоморфизм простого порядка p нильпотентной (периодической) группы G, для которого $C_G(\varphi)$ — группа конечного секционного ранга r. Верно ли, что G обладает нормальной подгруппой N, которая нильпотентна ступени, ограниченной некоторой функцией только от p, и для которой G/N — группа конечного секционного ранга, ограниченного в терминах r и p?

Это доказано для $p = 2$ (P. Shumyatsky, *Arch. Math.*, **71** (1998), 425–432).

Е. И. Хухро

13.59. Можно показать, что любое расширение вида $\mathbb{Z}^d . \mathscr{S}L_d(\mathbb{Z})$ финитно аппроксимируемо, за возможным исключением $d = 3$ или $d = 5$. Известно (P. R. Hewitt, *in: Groups'93 Galway/St. Andrews* (*London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, **212**), Cambridge Univ. Press, 1995, 305–313), что существует не финитно аппроксимируемое расширение $\mathbb{Z}^3$ с помощью $\mathscr{S}L_3(\mathbb{Z})$. Существует ли не финитно аппроксимируемое расширение $\mathbb{Z}^5$ с помощью $\mathscr{S}L_5(\mathbb{Z})$? Есть ли вообще какое-либо не финитно аппроксимируемое расширение рационального модуля с помощью арифметической подгруппы группы Шевалле, отличное от примеров вида $\mathbb{Z}^3 . \mathscr{S}L_3(\mathbb{Z})$?

П. Р. Хьюит (P. R. Hewitt)

13.60. Верно ли, что локально ступенчатая группа, равная произведению двух своих подгрупп конечного специального ранга, сама имеет конечный специальный ранг? Если сомножители — периодические группы, ответ утвердительный (Н. С. Черников, *Укр. мат. ж.*, **42**, № 7 (1990), 962–970).

Н. С. Черников

***13.63.** Обозначим через $\pi_e(G)$ множество порядков элементов группы G. Для $\Gamma \subseteq \mathbb{N}$ пусть $h(\Gamma)$ обозначает число попарно неизоморфных конечных групп G с $\pi_e(G) = \Gamma$. Верно ли, что существует такое число k, что для любого Γ имеем или $h(\Gamma) \leqslant k$, или $h(\Gamma) = \infty$?

В. Ши (W. J. Shi)

*Нет, такого числа нет: $h(\pi_e(L_3(7^{3^r}))) = r + 1$ для любого $r \geqslant 0$ (A. V. Zavarnitsine, *J. Group Theory*, **7**, № 1 (2004), 81–97).

13.64. Группу G назовем *OC_n-группой*, если $\pi_e(G) = \{1, 2, \ldots, n\}$. Всякая ли OC_n-группа локально конечна? Существуют ли бесконечные OC_n-группы при $n \geqslant 7$?

В. Ши (W. J. Shi)

13.65. Простую конечную группу, порядок которой делится ровно на n различных простых чисел, назовем *K_n-группой.* Известно, что число K_3-групп равно 8. K_4-Группы классифицированы по модулю CFSG (W. J. Shi, *in: Group Theory in China* (*Math. Appl.*, **365**), Kluwer, 1996, 166–167) и значительные продвижения получены в (Yann Bugeaud, Zhenfu Cao, M. Mignotte, *J. Algebra*, **241** (2001), 658–668). Но остается открытым вопрос: конечно или бесконечно число K_4-групп?

В. Ши (W. J. Shi)

13.67. Пусть G — T_0-группа (см. определение в 12.101), i — ее инволюция и $G = \text{ гр}(i^g \mid g \in G)$. Будет ли централизатор $C_G(i)$ аппроксимироваться периодическими группами?

В. П. Шунков

Вопросы из 14-го издания, 1999 г.

14.1. Предположим, что G — конечная группа без нетривиальных нормальных подгрупп нечетного порядка, φ — ее 2-автоморфизм, централизующий силовскую 2-подгруппу из G. Верно ли, что φ^2 — внутренний автоморфизм группы G?

Р. Ж. Алеев

14.2. (С. Д. Берман). Доказать, что любой автоморфизм центра целочисленного группового кольца конечной группы индуцирует мономиальную перестановку на множестве классовых сумм.

Р. Ж. Алеев

14.3. Верно ли, что всякая центральная единица целочисленного группового кольца конечной группы является произведением центрального элемента данной группы и симметрической центральной единицы? (Единица *симметрична*, если она неподвижна относительно канонической антиинволюции, переставляющей коэффициенты при взаимно обратных элементах.)

Р. Ж. Алеев

14.4. а) Верно ли, что существует нильпотентная группа G, для которой решетка $\mathscr{L}(G)$ всех групповых топологий не является модулярной? (Известно, что для абелевых групп решетка $\mathscr{L}(G)$ является модулярной и что существуют группы для которых эта решетка не является модулярной: В. И. Арнаутов, А. Г. Топалэ, *Изв. АН Молдова*, **1997**, № 1, 84–92.)

б) Верно ли, что для любой счетной нильпотентной неабелевой группы G решетка $\mathscr{L}(G)$ всех групповых топологий не является модулярной?

В. И. Арнаутов

14.5. Пусть G — бесконечная группа, допускающая недискретные хаусдорфовые групповые топологии, а $\mathscr{L}(G)$ – решетка всех групповых топологий на G.

а) Верно ли, что для любого натурального числа k существует неуплотняемая цепочка $\tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_k$ длины k хаусдорфовых топологий в $\mathscr{L}(G)$? (Для счетных нильпотентных групп это верно: А. Г. Топалэ, Деп. ВИНИТИ № 3849–В 98, М., 25.12.98.)

б) Пусть k, m, n — натуральные числа и G — нильпотентная группа ступени k. Предположим, что $\tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_m$ и $\tau_0' < \tau_1' < \cdots < \tau_n'$ — такие неуплотняемые цепочки хаусдорфовых топологий в $\mathscr{L}(G)$, что $\tau_0 = \tau_0'$ и $\tau_m = \tau_n'$. Верно ли, что тогда $m \leqslant n \cdot k$ и эту оценку нельзя улучшить? (Это верно при $k = 1$, так как для абелевой группы G решетка $\mathscr{L}(G)$ является модулярной.)

в) Верно ли, что существует такая счетная группа G, что в решетке $\mathscr{L}(G)$ имеются конечная неуплотняемая цепочка $\tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_k$ хаусдорфовых топологий и бесконечная цепочка $\{\tau_\gamma' \mid \gamma \in \Gamma\}$ таких топологий, что $\tau_0 < \tau_\gamma' < \tau_k$ для любого $\gamma \in \Gamma$?

г) Пусть G — абелева группа, k — натуральное число. Пусть A_k — множество всех таких хаусдорфовых групповых топологий на G, что для каждой топологии $\tau \in A_k$ любая неуплотняемая цепочка топологий, начинающаяся с τ и кончающаяся дискретной топологией, имеет длину k. Верно ли, что тогда $A_k \bigcap \{\tau_\gamma' \mid \gamma \in \Gamma\} \neq \varnothing$ для любой бесконечной неуплотняемой цепочки $\{\tau_\gamma' \mid \gamma \in \Gamma\}$ хаусдорфовых топологий, содержащей дискретную топологию? (Для $k = 1$ это верно.)

В. И. Арнаутов

14.6. Скажем, что группа Γ имеет *свойство* P_{nai}, если для любого конечного подмножества F из $\Gamma \setminus \{1\}$ существует элемент $y_0 \in \Gamma$ бесконечного порядка, такой, что для каждого $x \in F$ канонический эпиморфизм свободного произведения $\langle x \rangle * \langle y_0 \rangle$ на подгруппу $\langle x, y_0 \rangle$ группы Γ, порожденную элементами x и y_0, является изоморфизмом. Имеет ли $PSL_n(\mathbb{Z})$ свойство P_{nai} для $n \in \{2, 3, \ldots\}$? Более общо, если Γ — решетка в связной вещественной простой группе Ли G (с центром, редуцированным к $\{1\}$), имеет ли Γ свойство P_{nai}?

Известны положительные ответы для $n = 2$ и, более общо, если вещественный ранг G равен 1 (M. Bekka, M. Cowling, P. de la Harpe, *Publ. Math. IHES*, **80** (1994), 117–134).

П. де ла Арп (P. de la Harpe)

14.7. Пусть Γ_g — фундаментальная группа замкнутой поверхности рода $g \geqslant 2$. Для каждой конечной системы S ее порождающих пусть $\beta_S(n)$ обозначает число элементов из Γ_g, которые могут быть записаны в виде произведения не более чем n элементов из $S \cup S^{-1}$, и пусть $\omega(\Gamma_g, S) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\beta_S(n)}$ обозначает порядок роста последовательности $(\beta_S(n))_{n \geqslant 0}$. Вычислить инфимум $\omega(\Gamma_g)$ значений $\omega(\Gamma_g, S)$ по всем конечным множествам порождающих группы Γ_g.

Легко видеть, что для свободной группы F_k ранга $k \geqslant 2$ этот инфимум равен $\omega(F_k) = 2k - 1$ (M. Gromov, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes,* Cedic/F. Nathan, 1981, Ex. 5.13). Поскольку любое множество порождающих группы Γ_g содержит подмножество из $2g - 1$ элементов, порождающее подгруппу бесконечного индекса в Γ_g с фактор-группой по коммутанту $\mathbb{Z}^{2g-1}$, а значит, свободную подгруппу ранга $2g - 1$, получается, что $\omega(\Gamma_g) \geqslant 4g - 3$.

П. де ла Арп (P. de la Harpe)

14.8. Пусть G обозначает группу ростков на $+\infty$ гомеоморфизмов вещественной прямой $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию. Пусть α — росток отображения $x \mapsto x + 1$. Каковы ростки $\beta \in G$, для которых подгруппа $\langle \alpha, \beta \rangle$ группы G, порожденная α и β, свободна ранга 2?

Известно, что $\langle \alpha, \beta \rangle$ — свободная группа ранга 2, если β — росток отображения $x \mapsto x^k$ для нечетного $k \geqslant 3$. Опубликованные доказательства этого основаны на теории Галуа (для нечетного простого k: S. White, *J. Algebra*, **118** (1988), 408–422; для всех нечетных $k \geqslant 3$: S. A. Adeleke, A. M. W. Glass, L. Morley, *J. London Math. Soc.*, **43** (1991), 255–268).

П. де ла Арп (P. de la Harpe)

14.9. (Известный вопрос). Пусть $W^*(F_k)$ обозначает алгебру фон Ноймана свободной группы ранга $k \in \{2, 3, \ldots, \aleph_0\}$. Изоморфны ли $W^*(F_k)$ и $W^*(F_l)$ для $k \neq l$?

Напомним, что для группы G алгебра $W^*(G)$ — соответствующее пополнение групповой алгебры $\mathbb{C}G$ (см., например, S. Sakai, *C^*-algebras and W^*-algebras,* Springer, 1971, в частности, Problem 4.4.44). Известно, что либо $W^*(F_k) \cong W^*(F_l)$ для всех $k, l \in \{2, 3, \ldots, \aleph_0\}$, либо алгебры $W^*(F_k)$ попарно неизоморфны (F. Radulescu, *Invent. Math.*, **115** (1994), 347–389, Corollary 4.7).

П. де ла Арп (P. de la Harpe)

14.10. (Известный вопрос). Известно, что любая рекурсивно определенная группа вкладывается в конечно определенную группу (G. Higman, *Proc. Royal Soc. London Ser. A*, **262** (1961), 455–475).

а) Указать явным образом *“естественную”* конечно определенную группу

Γ и вложение аддитивной группы рациональных чисел $\mathbb{Q}$ в Γ. Имеется аналогичный вопрос о группе Γ_n и вложении $GL_n(\mathbb{Q})$ в Γ_n. Другая формулировка того же вопроса: найти симплициальный комплекс X, накрывающий конечный комплекс и такой, что фундаментальная группа комплекса X изоморфна $\mathbb{Q}$ или, соответственно, $GL_n(\mathbb{Q})$.

*б) Возможно, более легкий вопрос: найти явное вложение группы $\mathbb{Q}$ в конечно порожденную группу; такая группа существует по теореме IV из (G. Higman, B. H. Neumann, H. Neumann, *J. London Math. Soc.*, **24** (1949), 247–254).

П. де ла Арп (P. de la Harpe)

*б) Такое вложение указано в (V. H. Mikaelian, *An explicit embedding of* $\mathbb{Q}$ *into a two-generator group*, Preprint, 2004).

14.11. (Ю. И. Мерзляков). Известно, что для кольца $R = \mathbb{Q}[x, y]$ элементарная группа $E_2(R)$ отлична от группы $SL_2(R)$. Найти минимальное подмножество $A \subseteq SL_2(R)$ такое, что $\text{гр}(E_2(R), A) = SL_2(R)$.

В. Г. Бардаков

14.12. (Ю. И. Мерзляков, Дж. Бирман). Верно ли, что все группы кос B_n, $n \geqslant 3$, финитно аппроксимируемы относительно сопряженности?

В. Г. Бардаков

14.13. *Коммутаторной длиной* элемента z из коммутанта группы G называется наименьшее число коммутаторов из G, произведение которых равно z. Существует ли (конечно определенная) простая группа, на которой коммутаторная длина не ограничена?

В. Г. Бардаков

14.14. (Ч. Эдмундс, Г. Розенбергер). Пару натуральных чисел (k, m) назовем *допустимой*, если в коммутанте F_2' свободной группы F_2 найдется такой элемент w, что коммутаторная длина элемента w^m равна k. Найти все допустимые пары.

Известно, что допустимы все пары $(k, 2)$, $k \geqslant 2$ (В. Г. Бардаков, *Алгебра и логика*, **39** (2000), 395–440).

В. Г. Бардаков

14.15. Для группы автоморфизмов $A_n = \operatorname{Aut} F_n$ свободной группы F_n данного ранга $n \geqslant 3$ найти точную верхнюю грань k_n коммутаторных длин элементов из A_n'.

Легко показать, что $k_2 = \infty$. С другой стороны, коммутаторная длина любого элемента из коммутанта группы $\varinjlim A_n$ не превосходит 2 (R. K. Dennis, L. N. Vaserstein, *K-Theory*, **2**, N 6 (1989), 761–767).

В. Г. Бардаков

14.16. Следуя Ю. И. Мерзлякову, *шириной* вербальной подгруппы $V(G)$ группы G относительно множества слов V назовем наименьшее $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ такое, что всякий элемент подгруппы $V(G)$ записывается в виде произведения $\leqslant m$ значений слов из $V \cup V^{-1}$. Известно, что ширина любой вербальной подгруппы конечно порожденной группы полиномиального роста конечна. Верно ли это утверждение для конечно порожденных групп промежуточного роста?

В. Г. Бардаков

14.17. Обозначим через $\mathrm{IMA}(G)$ подгруппу группы автоморфизмов $\operatorname{Aut} G$, состоящую из всех автоморфизмов, тождественно действующих на фактор-группе G/G''. Найти порождающие и определяющие соотношения группы $\mathrm{IMA}(F_n)$, где F_n — свободная группа ранга $n \geqslant 3$.

В. Г. Бардаков

14.18. Скажем, что семейство групп $\mathscr{D}$ *дискриминирует* группу G, если для любого конечного подмножества $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq G \setminus \{1\}$ существует $D \in \mathscr{D}$ и гомоморфизм $\varphi : G \to D$ такой, что $a_j\varphi \neq 1$ для всех $j = 1, \ldots, n$. Дискриминируется ли гиперболическими группами без кручения любая конечно порожденная группа, свободно действующая на каком-то Λ-дереве?

Г. Баумслаг (G. Baumslag), А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников

14.19. Скажем, что группа G обладает *нетеровым свойством для уравнений*, если любая система уравнений над G эквивалентна какой-то ее конечной подсистеме. Обладает ли нетеровым свойством для уравнений произвольная гиперболическая группа?

Г. Баумслаг (G. Baumslag), А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников

14.20. Обладает ли нетеровым свойством для уравнений свободное произведение групп, если этим свойством обладают сомножители?

Г. Баумслаг (G. Baumslag), А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников

14.21. Обладает ли нетеровым свойством для уравнений свободная про-p-группа?

Г. Баумслаг (G. Baumslag), А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников

14.22. Доказать, что любая неприводимая система уравнений $S(x_1, \ldots, x_n) = 1$ с коэффициентами в линейной группе без кручения G эквивалентна над G конечной системе $T(x_1, \ldots, x_n) = 1$, удовлетворяющей аналогу теоремы Гильберта о нулях, т. е. такой, что $Rad_G(T) = \sqrt{T}$. Это верно, если G — свободная группа (O. Kharlampovich, A. Myasnikov, *J. Algebra*, **200** (1998), 472–570).

Здесь S и T — подмножества свободного произведения $G[X] = G * F(X)$ группы G и свободной группы с базисом $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. По определению, $Rad_G(T) = \{w(x_1, \ldots, x_n) \in G[X] \mid w(g_1, \ldots, g_n) = 1$ для любого решения $g_1, \ldots, g_n \in G$ системы $T(X) = 1\}$, а $\sqrt{T}$ — минимальная нормальная изолированная подгруппа из $G[X]$, содержащая T.

Г. Баумслаг (G. Baumslag), А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников

14.23. Пусть F_n – свободная группа с базисом $\{x_1, \ldots, x_n\}$, и пусть $|\cdot|$ — функция длины в этом базисе. Для $\alpha \in \operatorname{Aut} F_n$ положим $\|\alpha\| = \max\{|\alpha(x_1)|, \ldots, |\alpha(x_n)|\}$. Верно ли, что существует рекурсивная функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, обладающая следующим свойством: для любого $\alpha \in \operatorname{Aut} F_n$ существует такой базис $\{y_1, \ldots, y_k\}$ подгруппы $\operatorname{Fix}(\alpha) = \{x \mid \alpha(x) = x\}$, что $|y_i| \leqslant f(\|\alpha\|)$ для всех $i = 1, \ldots, k$?

О. В. Богопольский

14.24. Пусть $\operatorname{Aut} F_n$ — группа автоморфизмов свободной группы ранга n с нормой $\|\cdot\|$ как в 14.23. Существует ли рекурсивная функция $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, обладающая следующим свойством: для любых двух сопряженных элементов $\alpha, \beta \in \operatorname{Aut} F_n$ существует такой элемент $\gamma \in \operatorname{Aut} F_n$, что $\gamma^{-1}\alpha\gamma = \beta$ и $\|\gamma\| \leqslant f(\|\alpha\|, \|\beta\|)$?

О. В. Богопольский

14.26. Скажем, что квазимногообразие $\mathscr{M}$ *замкнуто относительно прямых $\mathbb{Z}$-сплетений*, если прямое сплетение $G \wr \mathbb{Z}$ принадлежит $\mathscr{M}$ для любой группы $G \in \mathscr{M}$ (здесь $\mathbb{Z}$ — бесконечная циклическая группа). Является ли квазимногообразие, порожденное классом всех нильпотентных групп без кручения, замкнутым относительно прямых $\mathbb{Z}$-сплетений?

А. И. Будкин

***14.27.** Пусть Γ — группа, порожденная конечным множеством S. Предположим, что существует вложенная последовательность $F_1 \subset F_2 \subset \cdots$ конечных подмножеств из Γ со следующими свойствами: (i) $F_k \neq F_{k+1}$ для всех $k \geqslant 1$; (ii) $\Gamma = \bigcup_{k\geqslant 1} F_k$; (iii) $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{|\partial F_k|}{|F_k|} = 0$, где по определению $\partial F_k = \{\gamma \in \Gamma \setminus F_k \mid$ существует $s \in S$ такой, что $\gamma s \in F_k\}$; (iv) существуют константы $c \geqslant 0$ и $d \geqslant 1$ такие, что $|F_k| \leqslant ck^d$ для всех $k \geqslant 1$. Будет ли тогда Γ группой полиномиального роста?

А. Вайян (A. G. Vaillant)

*Нет, не всегда; этими свойствами обладает и любая группа промежуточного роста (В. Г. Бардаков, *Алгебра и логика*, **40**, №1 (2001), 22–29).

14.28. Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимая фиттингова формация конечных групп со *свойством Кегеля*, т. е. $\mathfrak{F}$ содержит каждую конечную группу вида $G = AB = BC = CA$, если A, B, C лежат в $\mathfrak{F}$. Является ли формация $\mathfrak{F}$ насыщенной?

А. Ф. Васильев

14.29. Существует ли разрешимый класс Фиттинга конечных групп $\mathfrak{F}$, не являющийся формацией и такой, что $A_{\mathfrak{F}} \cap B_{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\mathfrak{F}}$ для любой конечной разрешимой группы вида $G = AB$?

А. Ф. Васильев

14.30. Пусть $\mathrm{lFit}\mathfrak{X}$ обозначает локальный класс Фиттинга, порожденный множеством групп $\mathfrak{X}$, а $\Psi(G)$ — наименьшую нормальную подгруппу конечной группы G такую, что $\mathrm{lFit}(\Psi(G) \cap M) = \mathrm{lFit}M$ для всякой $M \lhd\lhd G$ (K. Doerk, P. Hauck, *Arch. Math.*, **35**, №3 (1980), 218–227). Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем *насыщенным*, если из $\Psi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует $G \in \mathfrak{F}$. Верно ли, что каждый непустой разрешимый насыщенный класс Фиттинга является локальным?

Н. Т. Воробьев

14.31. Конечна ли решетка подклассов Фиттинга класса Фиттинга, порожденного конечной разрешимой группой?

Н. Т. Воробьев

14.32. Расширяя классическое определение, определим *формацию* (не обязательно конечных) групп как непустой класс групп, замкнутый относительно гоморфных образов и подпрямых произведений с конечным числом сомножителей. Является ли многообразием любая формация, аксиоматизируемая в языке первого порядка?

Мы получили положительный ответ для формаций абелевых групп. Вопрос, по-существу, относится к универсальной алгебре и может быть поставлен в этом контексте. K. Kearnes анонсировал пример аксиоматизируемой формации в категории колец с 1, которая не является многообразием. Однако для групп вопрос остается открытым.

А. Гаглион (A. M. Gaglione), Д. Спеллман (D. Spellman)

14.33. Существует ли конечно определенная про-p-группа (p — простое число), в которую вкладывается любая про-p-группа со счетной базой открытых множеств?

Р. И. Григорчук

14.34. По определению локально компактная группа обладает *T-свойством Каждана*, если тривиальное представление является изолированной точкой в естественном топологическом пространстве унитарных представлений этой группы. Существует ли проконечная группа с двумя плотными дискретными подгруппами, одна из которых аменабельна, а другая обладает T-свойством Каждана? Дальнейшие мотивации см. в (A. Lubotzky, *Discrete groups, expanding graphs and invariant measures* (*Progress in Math., Boston, Mass.*, **125**), Birkhauser, Basel, 1994).

Р. И. Григорчук, А. Любоцки (A. Lubotzky)

14.35. Конечна ли всякая конечно определенная группа простого периода?

Н. Гупта (N. D. Gupta)

14.36. Группа G называется *T-группой*, если всякая ее субнормальная подгруппа нормальна, и G называется *$\overline{T}$-группой*, если все ее подгруппы являются T-группами. Верно ли, что любая непериодическая локально ступенчатая $\overline{T}$-группа абелева?

Ф. де Джованни (F. de Giovanni)

14.37. Пусть $G(n)$ — одна из классических групп (специальная, ортогональная или симплектическая) $(n\times n)$-матриц над бесконечным полем K ненулевой характеристики, а $M(n)$ — пространство всех $(n \times n)$-матриц над K. Группа $G(n)$ действует диагонально сопряжением на пространстве $M(n)^m = \underbrace{M(n) \oplus \cdots \oplus M(n)}_{m}$. Указать порождающие алгебры инвариантов $K[M(n)^m]^{G(n)}$.

Для поля характеристики 0 ответ известен (C. Procesi, *Adv. Math.*, **19** (1976), 306–381). *Прим. 2001 г.:* для полей положительной характеристики см. (А. Н. Зубков, *Алгебра и логика*, **38**, № 5 (1999), 549–584), где задача решена для всех случаев, кроме ортогональных групп в характеристике 2 и специальных ортогональных групп четной степени.

А. Н. Зубков

14.38. Для любой про-p-группы G (2×2)-матриц при $p \neq 2$ выполняется аналог альтернативы Титса: либо G разрешима, либо многообразие про-p-групп, порожденное G, содержит группу $\overline{\left\langle \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \right\rangle} \leqslant SL_2(\mathbb{F}_p[[t]])$ (*Алгебра и логика*, **29**, № 4 (1990), 430–451). Верен ли этот результат для матриц размера $\geqslant 3$ при $p \neq 2$?

А. Н. Зубков

14.39. Пусть $F(V)$ — свободная группа некоторого многообразия про-p-групп V. Ограничены ли в совокупности периоды периодических элементов из $F(V)$? Это верно, если многообразие V метабелево (А. Н. Зубков, *Докт. дисс.*, Омск, 1997).

А. Н. Зубков

14.40. Представима ли свободная про-p-группа как абстрактная группа матрицами над ассоциативно-коммутативным кольцом с 1?

А. Н. Зубков

14.41. Группа G называется *парасвободной*, если все факторы $\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)$ ее нижнего центрального ряда изоморфны соответствующим факторам некоторой свободной группы и $\bigcap_{i=1}^{\infty} \gamma_i(G) = 1$. Представима ли произвольная парасвободная группа матрицами над ассоциативно-коммутативным кольцом с 1?

А. Н. Зубков

14.42. Представима ли свободная про-p-группа матрицами над ассоциативно-коммутативным проконечным кольцом с 1?

Отрицательный ответ эквивалентен тому, что на любой линейной про-p-группе выполняется нетривиальное про-p-тождество; известно, что это так в размерности 2 (при $p \neq 2$: А. Н. Зубков, *Сиб. мат. ж.*, **28** (1987), 64–69; при $p = 2$: Е. И. Зельманов, *неопубл.*).

А. Н. Зубков, В. Н. Ремесленников

14.43. Пусть конечная группа G имеет вид $G = AB$, где A и B — нильпотентные подгруппы ступеней α и β соответственно; тогда группа G разрешима (О. Кегель, Х. Виландт, 1961). Хотя ступень разрешимости $\mathrm{dl}(G)$ группы G не обязательно ограничена суммой $\alpha+\beta$ (см. Архив, 5.17), можно ли ограничить $\mathrm{dl}(G)$ (линейной) функцией от α и β?

Л. С. Казарин

14.44. Пусть $k(X)$ обозначает число классов сопряженных элементов конечной группы X. Предположим, что конечная группа $G = AB$ является произведением подгрупп A, B взаимно простых порядков. Верно ли, что $k(AB) \leqslant k(A)k(B)$?

Заметим, что условие взаимной простоты опустить нельзя и что ответ положительный, если одна из подгрупп нормальна, см. Архив, 11.43.

Л. С. Казарин, Дж. Сангронис (J. Sangroniz)

14.45. Существует ли (неабелева простая) линейно правоупорядочиваемая группа, все собственные подгруппы которой циклические?

У. Э. Кальюлайд

14.46. Говорят, что конечная группа G *почти проста*, если $T \leqslant G \leqslant Aut(T)$ для некоторой неабелевой простой группы T. Назовем *конечным линейным пространством* множество точек V вместе с набором k-элементных подмножеств из V, называемых *прямыми* ($k \geqslant 3$), таких, что каждые две точки содержатся ровно в одной прямой. Классифицировать конечные линейные пространства, допускающие почти простую подгруппу G автоморфизмов, которая действует транзитивно на точках и на прямых.

А. Камина, П. Нойман и Ч. Прэгер решили эту задачу в случае, когда T — знакопеременная группа. В (A. Camina, C. E. Praeger, *Aequat. Math.*, **61**, №3 (2001), 221–232) показано, что транзитивная на прямых группа автоморфизмов конечного линейного пространства, которая *квазипримитивна* на точках (т. е. в которой каждая нетривиальная нормальная подгруппа транзитивна на точках), должна быть почти простой или аффинной.

Прим. 2005 г.: Случай проективной плоскости рассмотрен в (N. Gill, *PhD Thesis*). Случай группы $PSU(3, q)$, но не почти простой группы с этим цоколем рассмотрен в (W. Liu, *Linear Algebra Appl.*, **374** (2003), 291–305); группы $PSL(2, q)$ но не почти простой группы с этим цоколем в (W. Liu, *J. Combin. Theory (A)*, **103** (2003), 209–222); группы $Sz(q)$, но не почти простой группы с этим цоколем в (W. Liu, *Discrete Math.*, **269** (2003), 181–190); группы $Ree(q)$, но не почти простой группы с этим цоколем в (W. Liu, *European J. Combin.*, **25** (2004), 311–325); случай спорадической простой группы рассмотрен (A. R. Camina, F. Spiezia, *J. Combin. Des.*, **8** (2000), 353–362).

А. Камина (A. Camina), Ч. Прэгер (C. E. Praeger)

14.47. Модулярна ли решетка всех разрешимых классов Фиттинга конечных групп?

С. Ф. Каморников, А. Н. Скиба

14.51. (Известная проблема). Имеет ли конечный базис тождеств любая группа, являющаяся расширением абелевой группы

а) с помощью нильпотентной?

б) с помощью конечной?

в) с помощью конечной нильпотентной? *А. Н. Красильников*

14.53. *Гипотеза:* Пусть G — проконечная группа, в которой множество решений уравнения $x^n = 1$ имеет положительную меру Хаара. Тогда в G есть открытая подгруппа H и элемент t такие, что порядки всех элементов смежного класса tH делят n.

Это верно в случае $n = 2$. Интересно выяснить, верны ли подобные результаты для проконечных групп, в которых множество решений какого-то уравнения имеет положительную меру. *Л. Леваи (L. Levai), Л. Пыбер (L. Pyber)*

14.54. Пусть $k(G)$ обозначает число классов сопряженных элементов конечной группы G. Верно ли, что $k(G) \leqslant |N|$ для некоторой нильпотентной подгруппы $N \leqslant G$? Это верно, если G проста; кроме того, всегда $k(G) \leqslant |S|$ для некоторой разрешимой подгруппы $S \leqslant G$. *М. Либек (M. W. Liebeck), Л. Пыбер (L. Pyber)*

14.55. Доказать, что Ноттингэмская группа $J = N(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ (см. Архив, 12.24) конечно определена. *Ч. Лидхэм-Грин (C. R. Leedham-Green)*

14.56. Доказать, что если G — бесконечная про-p-группа такая, что фактор-группа $G/\gamma_{2p+1}(G)$ изоморфна фактор-группе $J/\gamma_{2p+1}(J)$ Ноттингэмской группы J, то G изоморфна J. *Ч. Лидхэм-Грин (C. R. Leedham-Green)*

14.57. Описать наследственно едва бесконечные про-p-группы конечной ширины.

Про-p-группа G имеет конечную *ширину* p^d, если $|\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)| \leqslant p^d$ для всех i; группа G *наследственно едва бесконечна*, если G бесконечна и каждая ее открытая подгруппа не имеет замкнутых нормальных подгрупп бесконечного индекса. *Ч. Лидхэм-Грин (C. R. Leedham-Green)*

14.58. а) Пусть A — периодическая группа регулярных автоморфизмов абелевой группы. Является ли группа A циклической, если она имеет простой период?

В. Д. Мазуров

14.59. Пусть G — трижды транзитивная группа, в которой стабилизатор двух точек не содержит инволюций, а стабилизатор трех точек тривиален. Верно ли, что G подобна группе $PGL_2(P)$ в ее естественном действии на проективной прямой $P \cup \{\infty\}$ для некоторого поля P характеристики 2? Это верно при условии периодичности стабилизатора двух точек. *В. Д. Мазуров*

14.60. Пусть H — нетривиальная нормальная подгруппа конечной группы G, и пусть фактор-группа G/H изоморфна одной из простых групп $L_n(q)$, $n \geqslant 3$. Верно ли, что в G найдется элемент, порядок которого отличен от порядка любого элемента из G/H? *В. Д. Мазуров*

14.61. Найти все пары $(\mathscr{S}, G)$, где $\mathscr{S}$ — получастичная геометрия, а G — почти простая флаг-транзитивная группа автоморфизмов $\mathscr{S}$. Система точек и прямых (P, B) называется *получастичной геометрией* с параметрами (α, s, t, μ), если каждая точка лежит точно на $t+1$ прямой (две различные точки лежат не более чем на одной прямой); каждая прямая содержит точно $s+1$ точку; для любого антифлага $(a, l) \in (P, B)$ число прямых, проходящих через a и пересекающих l, равно или 0 или α; и для любых неколлинеарных точек a, b найдется точно μ точек, коллинеарных с a и с b.

А. А. Махнев

***14.62.** Пусть H — неразрешимая нормальная подгруппа конечной группы G. Всегда ли в H существует максимальная разрешимая подгруппа S такая, что $G = H \cdot N_G(S)$?

В. С. Монахов

*Да, всегда mod CFSG (В. М. Зенков, В. С. Монахов, Д. О. Ревин, *Алгебра и логика*, **43**, № 2 (2004), 184–196).

14.63. Каковы композиционные факторы неразрешимых конечных групп с 2-нильпотентными, в частности, со сверхразрешимыми, нормализаторами силовских подгрупп?

В. С. Монахов

14.64. (М. Ньюмэн). Классифицировать конечные 5-группы максимальной ступени нильпотентности; компьютерные вычисления подсказывают ряд гипотез (M. F. Newman, in: *Groups–Canberra, 1989* (*Lecture Notes Math.*, **1456**), Springer, Berlin, 1990, 49–62).

А. Морето (A. Moretó)

14.65. (Известный вопрос). Для конечной группы G пусть $\rho(G)$ обозначает множество простых чисел, делящих порядок какого-либо класса сопряженных элементов, а $\sigma(G)$ — максимум числа простых делителей порядка класса сопряженных элементов. Верно ли, что $|\rho(G)| \leqslant 3\sigma(G)$?

Возможная линейная оценка для $|\rho(G)|$ в терминах $\sigma(G)$ не может быть лучше, чем $3\sigma(G)$, так как имеется семейство групп $\{G_n\}$ такое, что $\lim_{n\to\infty} |\rho(G_n)|/\sigma(G_n) = 3$ (C. Casolo, S. Dolfi, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **96** (1996), 121–130).

А. Морето (A. Moretó)

14.67. Пусть a — такой неединичный элемент конечной группы G, что $|C_G(a)| \geqslant |C_G(x)|$ для любого неединичного элемента x из G, и пусть H — нильпотентная подгруппа группы G, допустимая относительно $C_G(a)$. Верно ли, что $H \leqslant C_G(a)$? Если H — абелева группа или если H является p'-группой для некоторого простого числа p из $\pi(Z(C_G(a)))$, то ответ положителен.

И. Т. Мухаметьянов, А. Н. Фомин

14.68. (Известный вопрос). Пусть F — автоморфизм порядка 2 кольца многочленов $R_n = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, $n > 2$. Существует ли автоморфизм G кольца R_n такой, что $G^{-1}FG$ — линейный автоморфизм?

При $n = 2$ ответ положительный.

М. В. Нещадим

14.69. Для каждой конечной простой неабелевой группы найти минимум числа порождающих инволюций, удовлетворяющих дополнительному условию, в каждом из следующих случаев.

а) Произведение порождающих инволюций равно 1.

б) (Малле–Саксл–Вайгель). Все порождающие инволюции сопряжены.

в) (Малле–Саксл–Вайгель). Выполняются одновременно свойства а) и б).

г) Все порождающие инволюции сопряжены и две из них перестановочны.

Я. Н. Нужин

14.70. Группа G называется *n-энгелевой*, если на ней выполняется тождество $[x, y, \dots, y] = 1$, где y встречается n раз. Существуют ли ненильпотентные конечно порожденные n-энгелевы группы?

Б. И. Плоткин

14.72. Пусть X — регулярное алгебраическое многообразие над полем произвольной характеристики, а G — конечная циклическая группа автоморфизмов X. Предположим, что многообразие X^G неподвижных точек группы G образует регулярную гиперповерхность многообразия X (коразмерности 1). Будет ли геометрический фактор X/G регулярным многообразием?

К. Н. Пономарёв

14.73. *Гипотеза:* существует функция f на натуральных числах, такая, что если Γ — конечный вершинно-транзитивный локально-квазипримитивный граф валентности v, то число автоморфизмов, фиксирующих данную вершину, не превосходит $f(v)$. (Вершинно-транзитивный граф Γ *локально-квазипримитивен*, если стабилизатор в $Aut(\Gamma)$ вершины α квазипримитивен (см. 14.46) в своем действии на множестве вершин, смежных с α.)

Доказательство этой гипотезы сведено к случаю, когда каждая нетривиальная нормальная подгруппа из $Aut(\Gamma)$ имеет не больше двух орбит на вершинах (C. E. Praeger, *Ars Combin.*, **19 A** (1985), 149–163). Аналогичная гипотеза для конечных вершинно-транзитивных локально-примитивных графов была сделана Р. Вайссом (R. Weiss) в 1978 г. и до сих пор открыта. Для недвудольных графов имеется «сведение» гипотезы Вайсса к случаю, когда группа автоморфизмов почти проста (см. 14.46) (M. Conder, C. H. Li, C. E. Praeger, *Proc. Edinburgh Math. Soc. (2)*, **43**, №1 (2000), 129–138).

Ч. Прэгер (C. E. Praeger)

14.74. Пусть $k(G)$ обозначает число классов сопряженных элементов конечной группы G. Верно ли, что $k(G) \leqslant k(P_1)\cdots k(P_s)$, где $P_1, \dots, P_s$ — силовские подгруппы из G такие, что $|G| = |P_1|\cdots|P_s|$?

Л. Пыбер (L. Pyber)

14.75. Пусть $\mathfrak{G} = \{G_1, G_2, \dots\}$ — семейство конечных 2-порожденных групп, которое порождает многообразие всех групп. Верно ли, что свободная группа ранга 2 аппроксимируется группами из $\mathfrak{G}$?

Л. Пыбер (L. Pyber)

14.76. Существует ли абсолютная константа c такая, что любая p-группа P имеет абелеву секцию A, удовлетворяющую условию $|A|^c > |P|$?

Согласно результату А. Ю. Ольшанского (*Матем. заметки*, **23** (1978), 337–342) нельзя требовать, чтобы A была подгруппой. По теореме из (J. G. Thompson, *J. Algebra*, **13** (1969), 149–151) существование такой секции A давало бы существование подгруппы H ступени нильпотентности 2, удовлетворяющей условию $|H|^c > |P|$.

Л. Пыбер (L. Pyber)

14.78. Предположим, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{M}$ и $H \subseteq \mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M}$ — локальные формации конечных групп и $\mathfrak{F}_1$ — дополнение к $\mathfrak{F}_2$ в решетке всех формаций, заключенных между $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M}$. Верно ли, что $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ — локальные формации? Это верно, если $\mathfrak{H} = (1)$.

А. Н. Скиба

14.79. Предположим, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}H = \mathrm{lFit}(G)$ — разрешимый однопорожденный локальный класс Фиттинга конечных групп, где $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M}$ — классы Фиттинга и $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{F}$. Является ли $\mathfrak{H}$ локальным классом Фиттинга?

А. Н. Скиба

14.80. Является ли модулярной решетка всех тотально локальных формаций конечных групп? В разрешимом случае эта решетка даже дистрибутивна. Определение *тотально локальной формации* см. в (А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков, *Формации алгебраических систем*, М., Наука, 1989).

Прим. 2005 г.: Положительное решение анонсировано в (В. Г. Сафонов, *Тезисы Междун. конф. Алгебра, логика и кибернетика, посв. 75-летию А. И. Кокорина (Иркутск, 2004)*, Иркутск, 2004, 93–94).

А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков

14.81. Доказать, что формация, порожденная конечной группой, имеет только конечное число S_n-замкнутых подформаций.

А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков

14.82. (Известный вопрос). Описать конечные простые группы, в которых каждый элемент является произведением двух инволюций.

А. И. Созутов

14.83. Бесконечную простую группу G назовем *монстром третьего рода*, если для любых ее неединичных элементов a, b, хотя бы один из которых не является инволюцией, найдется бесконечно много элементов $g \in G$ со свойством $\langle a, b^g \rangle = G$ (ср. с определениями В. П. Шункова в Архиве, 6.63, 6.64). Верно ли, что любая простая квазичерниковская группа — монстр третьего рода? Это верно для квазиконечных групп (А. И. Созутов, *Алгебра и логика*, **36**, № 5 (1997), 573–598). (Мы называем не-σ группу *квази-σ группой*, если все ее собственные подгруппы обладают свойством σ.)

А. И. Созутов

14.84. Элемент g свободной группы $F_r(\mathfrak{M})$ ранга r многообразия $\mathfrak{M}$ называется *примитивным*, если его можно включить в базис этой группы.

а) Существует ли группа $F_r(\mathfrak{M})$ и не примитивный элемент $h \in F_r(\mathfrak{M})$ такие, что для некоторого мономорфизма α группы $F_r(\mathfrak{M})$ элемент $\alpha(h)$ примитивен?

б) Существует ли группа $F_r(\mathfrak{M})$ и не примитивный элемент $h \in F_r(\mathfrak{M})$ такие, что для некоторого $n > r$ элемент h примитивен в группе $F_n(\mathfrak{M})$?

Е. И. Тимошенко

14.85. Предположим, что эндоморфизм φ свободной метабелевой группы ранга r переводит каждый примитивный элемент в примитивный. Является ли φ автоморфизмом? Для $r \leqslant 2$ это так.

Е. И. Тимошенко, В. Э. Шпильрайн

14.88. Назовем элемент u группы G *тестовым*, если любой эндоморфизм φ группы G, для которого $\varphi(u) = u$, является автоморфизмом группы G. Обладает ли свободная разрешимая группа ранга 2 и ступени разрешимости $d > 2$ тестовыми элементами? (Свободная метабелева группа ранга 2 обладает, как показал В. Г. Дурнев.)

Прим. 2001 г.: свободная разрешимая группа ранга 2 ступени разрешимости $d = 3$ также обладает тестовыми элементами (В. А. Романьков, *Алгебра и логика*, **40**, №2 (2001), 192–201).

Б. Файн (B. Fine), В. Э. Шпильрайн

14.89. (Э. О'Брайен, А. Шалев). Пусть P — конечная p-группа порядка p^m и пусть $m = 2n + e$, где $e = 0$ или 1. По теореме Ф. Холла число классов сопряженных элементов группы P имеет вид $n(p^2-1)+p^e+a(p^2-1)(p-1)$ для некоторого целого числа $a \geqslant 0$, называемого *избытком* группы P.

а) Ограничена ли коступень группы P в терминах a? Заметим, что если $a = 0$, то коступень равна 1, и что во всех известных примерах с $a = 1$ коступень $\leqslant 3$. (Группа P имеет *коступень* r, если ее порядок равен p^{c+r}, где c — ее ступень нильпотентности.)

б) Существует ли элемент $s \in P$ такой, что $|C_P(s)| \leqslant p^{f(a)}$ для некоторого $f(a)$, зависящего только от a? Мы уже знаем, что можно положить $f(0) = 2$, и похоже на то, что можно взять $f(1) = 3$.

Заметим, что $|P| \leqslant p^{f(p,a)}$ для некоторой функции f, зависящей только от p и a (A. Jaikin–Zapirain, *J. Group Theory*, **3**, №3 (2000), 225–231).

Г. Фернандес–Алкобер (G. Fernández–Alcober)

14.90. Пусть P — конечная p-группа ступени нильпотентности c и с избытком a. Существует ли натуральное число $t = t(a)$ такое, что $\gamma_i(G) = \zeta_{c-i+1}(G)$ для $i \geqslant t$? Это верно при $a = 0$ для $t = 1$, так как тогда P — группа максимальной ступени; можно доказать, что при $a = 1$ можно положить $t = 3$.

Г. Фернандес–Алкобер (G. Fernández–Alcober)

14.91. Пусть p — фиксированное простое число. Существуют ли конечные p-группы с избытком a для любого $a \geqslant 0$?

Г. Фернандес–Алкобер (G. Fernández–Alcober)

14.92. (И. Д. Макдональд). В каждой конечной p-группе не менее $p-1$ классов сопряженных элементов максимального размера. Существуют группы порядка 2^n, $n \geqslant 7$, имеющие ровно один класс сопряженных элементов максимального размера (I. D. Macdonald, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **26** (1983), 233–239). Существуют ли конечные p-группы, имеющие ровно $p-1$ классов сопряженных элементов максимального размера, для нечетных p? Отрицательный ответ давал бы решение задачи 14.89 б для $p \neq 2$: любая конечная p-группа избытка a тогда имела бы элемент с централизатором порядка $\leqslant p^{a+2}$.

Г. Фернандес–Алкобер (G. Fernández–Alcober)

14.93. Пусть $N(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ — группа, определенная в Архиве, 12.24 (так называемая «Ноттингэмская» или «дикая» группа). Найти определяющие соотношения группы $N(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ как про-p-группы (она порождается двумя элементами, например, $x + x^2$ и $x/(1-x)$).

И. Б. Фесенко

14.94. Для каждого натурального r найти p-когомологическую размерность $\mathrm{cd}_p(H_r)$ замкнутой подгруппы H_r группы $N(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, состоящей из рядов $x\left(1+\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x^{p^r i}\right)$, $a_i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. *И. Б. Фесенко*

14.95. (Ч. Лидхэм-Грин, П. Ньюмэн, Дж. Уайголд). Для конечной p-группы P пусть $c = c(P)$ обозначает ступень нильпотентности, а $b = b(P)$ *ширину*, т. е. p^b — максимальный размер класса сопряженных элементов группы P. *Проблема ступени–ширины:* Верно ли, что $c \leqslant b+1$, если $p \neq 2$?

Пока наилучшая оценка: $c < \frac{p}{p-1}b+1$ (C. R. Leedham-Green, P. M. Neumann, J. Wiegold, *J. London Math. Soc. (2)*, **1** (1969), 409–420). При $p = 2$ для любого $n \in \mathbb{N}$ существует 2-группа T_n такая, что $c(T_n) \geqslant b(T_n)+n$ (W. Felsch, J. Neubüser, W. Plesken, *J. London Math. Soc. (2)*, **24** (1981), 113–122). *А. Хайкин (A. Jaikin)*

14.97. Верно ли, что для любых различных простых чисел p и q существует непримарная периодическая локально разрешимая $\{p,q\}$-группа, представимая в виде произведения двух своих p-подгрупп? *Н. С. Черников*

14.98. Метрическое пространство назовем 2-*концевым* (*узким*), если оно квазиизометрично вещественной прямой (соответственно, ее подмножеству). Остальные пространства назовем *широкими.* Допустим, что граф Кэли $\Gamma = \Gamma(G, A)$ группы G с конечным порождающим множеством A в естественной метрике содержит 2-концевое подмножество, и пусть существует такое $\varepsilon > 0$, что дополнение в Γ к ε-окрестности любого связного 2-концевого подмножества содержит ровно две широкие компоненты связности. Верно ли, что группа G в словарной метрике квазиизометрична евклидовой или гиперболической плоскости? *В. А. Чуркин*

14.99. Формация конечных групп $\mathfrak{F}$ называется *суперрадикальной*, если она S_n-замкнута и содержит каждую конечную группу вида $G = AB$, где A и B — $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы.

а) Найти все суперрадикальные локальные формации.

б) Доказать, что всякая S-замкнутая суперрадикальная формация является разрешимо насыщенной формацией. *Л. А. Шеметков*

14.100. Верно ли, что в группе Шункова (т. е. в сопряженно бипримитивно конечной группе, см. 6.59), содержащей бесконечно много элементов конечного порядка, каждый элемент простого порядка содержится в некоторой бесконечной локально конечной подгруппе? Это верно при дополнительном условии, что этот элемент с любым своим сопряженным порождает разрешимую подгруппу (В. П. Шунков, *M_p-группы*, М., Наука, 1990). *А. К. Шлёпкин*

14.101. Группа G *насыщена* группами из класса X, если любая конечная подгруппа $K \leqslant G$ содержится в подгруппе $L \leqslant G$, изоморфной некоторой группе из X. Верно ли, что периодическая группа, насыщенная конечными простыми группами лиевского типа, ранги которых ограничены в совокупности, сама является простой группой лиевского типа конечного ранга? *А. К. Шлёпкин*

14.102. (В. Лин). Пусть B_n — группа кос с n нитями, и пусть $n > 4$.

а) Имеет ли группа B_n нетривиальные неинъективные эндоморфизмы?

б) Верно ли, что каждый нетривиальный эндоморфизм коммутанта $[B_n,\, B_n]$ является его автоморфизмом?

*в) Обладает ли группа B_n собственными неабелевыми фактор-группами без кручения? *Прим. 2001 г.:* в (S. P. Humphries, *Int. J. Algebra Comput.*, **11**, №3 (2001), 363–373) построено представление группы B_n, для которого показано, что оно дает неабелевы фактор-группы без кручения для B_n и для $[B_n, B_n]$ при $n < 7$. Представляется вероятным, что то же представление годится и для других значений n.

В. Э. Шпильрайн

---

*в) Да, обладает; более того, каждая группа кос B_n аппроксимируется почти нильпотентными группами без кручения (P. Linnell, T. Schick, *Finite group extensions and the Atiyah conjecture*,
`http://front.math.ucdavis.edu/math.GR/0403229`).

Вопросы из 15-го издания, 2002 г.

15.1. (П. Лонгобарди, М. Май, А. Ремтулла). Пусть $w = w(x_1, \ldots, x_n)$ — групповое слово от n переменных $x_1, \ldots, x_n$, и пусть $V(w)$ — многообразие групп, заданное тождеством $w = 1$. Пусть $V(w^*)$ (соответственно $V(w^\#)$) обозначает класс всех групп G, в которых для любых n бесконечных подмножеств $S_1, \ldots, S_n$ существуют элементы $s_i \in S_i$ такие, что $w(s_1, \ldots, s_n) = 1$ (соответственно $\langle s_1, \ldots, s_n \rangle \in V(w)$). Существуют ли слово w и бесконечная группа G,

а) для которых $G \in V(w^\#)$, но $G \notin V(w)$?

б) для которых $G \in V(w^*)$, но $G \notin V(w^\#)$?

Предполагаемый ответ на оба вопроса: «да». Известно, что в качестве w для а) не подходят слова x_1^n, $[x_1, \ldots, x_n]$, $[x_1, x_2]^2$, $(x_1x_2)^3x_2^{-3}x_1^{-3}$ и $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ для любых ненулевых целых чисел $a_1, \ldots, a_n$.

А. Абдоллахи (A. Abdollahi)

15.2. По теореме Бернсайда для любого нелинейного неприводимого характера $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ конечной группы G существует такой элемент $x \in G$, что $\chi(x) = 0$, т. е. только линейные характеры являются «неисчезающими». Интересно рассмотреть двойственное понятие *неисчезающих элементов* конечной группы G, т. е. таких $x \in G$, что $\chi(x) \neq 0$ для всех $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$.

а) Доказано (I. M. Isaacs, G. Navarro, T. R. Wolf, *J. Algebra*, **222**, № 2 (1999), 413–423), что если группа G разрешима и x — неисчезающий элемент нечетного порядка из G, то x лежит в подгруппе Фиттинга $\mathbf{F}(G)$. Верно ли это также для элементов четного порядка?

б) Какие неабелевы простые группы обладают неединичными неисчезающими элементами? (Например, $\mathbb{A}_7$ обладает.)

И. Айзекс (I. Isaacs)

15.3. Пусть α и β — точные нелинейные неприводимые характеры конечной группы G. Существуют неразрешимые группы G, для которых произведение $\alpha\beta$ снова является неприводимым характером (для некоторых из таких α, β). Один из примеров дает группа $G = SL_2(5)$ с двумя неприводимыми характерами степени 2. Доказано, что знакопеременная группа $\mathbb{A}_n$ дает такого рода примеры тогда и только тогда, когда n — квадрат целого числа, больший 4 (I. Zisser, *Israel J. Math.*, **84**, № 1–2 (1993), 147–151). Существуют ли разрешимые примеры? Некоторые соображения в пользу того, что таких примеров нет, см. в (I. M. Isaacs, *J. Algebra*, **223**, № 2 (2000), 630–646).

И. Айзекс (I. Isaacs)

***15.4.** Верно ли, что из большого роста следует неаменабельность? Более точно, рассмотрим число $\epsilon > 0$, целое число $k \geqslant 2$, группу Γ, порожденную множеством S из k элементов, и соответствующий экспоненциальный порядок роста $\omega(\Gamma, S)$, определенный в 14.7. Верно ли, что для достаточно малых ϵ неравенство $\omega(\Gamma, S) \geqslant 2k - 1 - \epsilon$ влечет неаменабельность группы Γ?

Если $\omega(\Gamma, S) = 2k - 1$, то группа Γ свободно порождается множеством S и, в частности, неаменабельна; см. (R. I. Grigorchuk, P. de la Harpe, *J. Dynam. Control Syst.*, **3** (1997), 51–89).

П. де ла Арп (P. de la Harpe)

---

*Нет, не верно. Контрпримеры имеются даже в классах почти метабелевых групп и групп с абелевым членом нижнего центрального ряда. (G. N. Arzhantseva, V. S. Guba, L. Guyot, *J. Group Theory*, **8** (2005), 389–394).

15.5. (Известная проблема). Существует ли бесконечная конечно порожденная простая аменабельная группа?

П. де ла Арп (P. de la Harpe)

15.6. (Известная проблема). Верно ли, что p-группы Голода неаменабельны?

См. определение в (Е. С. Голод, *Изв. АН СССР, сер мат.*, **28**, № 2 (1964), 273–276).

П. де ла Арп (P. de la Harpe)

15.7. (Известная проблема). Верно ли, что приведенная C^*-алгебра счетной группы без нетривиальных аменабельных нормальных подгрупп всегда является простой C^*-алгеброй с единственным следом? См. (M. B. Bekka, P. de la Harpe, *Expos. Math.*, **18**, № 3 (2000), 215–230).

П. де ла Арп (P. de la Harpe)

15.8. *а) (С. Улам). Рассмотрим группу $SO(3)$ всех вращений трехмерного евклидова пространства; пусть G обозначает эту группу, рассматриваемую как дискретную группу. Может ли группа G нетривиально действовать на счетном множестве? См. § II.7, V.2 в (S. M. Ulam, *A collection of mathematical problems*, Interscience, New York–London, 1960; S. Ulam, *Sets, numbers, and universes: selected works*, MIT Press, Cambridge, Mass.–London, 1974, 503–670).

б) Тот же вопрос для любой группы Ли (на самом деле, для любой отделимой непрерывной группы), рассматриваемой как дискретная: может ли такая группа точно действовать на счетном множестве?

П. де ла Арп (P. de la Harpe)

---

*а) Да, может (S. Thomas, *J. Group Theory*, **2**, (1999) 401–434); другое доказательство есть в (Ю. Л. Ершов, В. А. Чуркин, *ДАН*, **399**, № 3 (2004), 307–309).

15.9. Автоморфизм φ свободной группы F_n с базой $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется *сопрягающим*, если $x_i^\varphi = t_i^{-1} x_{\pi(i)} t_i,\ \ i = 1, 2, \ldots, n$, для некоторой подстановки $\pi \in \mathbb{S}_n$ и некоторых элементов $t_i \in F_n$. Множество сопрягающих автоморфизмов, оставляющих на месте произведение $x_1 x_2 \cdots x_n$, образует группу кос B_n. Известно, что группа B_n линейна для всякого $n \geqslant 2$, в то время как группа $\operatorname{Aut} F_n$ не линейна при $n \geqslant 3$. Линейна ли группа всех сопрягающих автоморфизмов при $n \geqslant 3$?

В. Г. Бардаков

15.10. (Ю. И. Мерзляков). Линейна ли при $n \geqslant 3$ группа всех автоморфизмов свободной группы F_n, действующих тождественно на $F_n/[F_n, F_n]$?

В. Г. Бардаков

15.11. (М. Мориги). Автоморфизм группы называется *степенным*, если он переводит всякую подгруппу в себя. Всякая ли конечная абелева p-группа является группой всех степенных автоморфизмов некоторой группы? См. (M. Morigi, *Commun. Algebra*, **27**, № 10 (1999), 4853–4877).

В. Г. Бардаков

15.12. Пусть группа G действует точно и сферически-транзитивно автоморфизмами на корневом дереве $\mathscr{T}$. *Жесткий стабилизатор вершины* v дерева $\mathscr{T}$ состоит из тех элементов из G, которые действуют только внутри поддерева $\mathscr{T}_v$ с корнем в v. Для неотрицательного целого n *жесткий стабилизатор n-го уровня* — это подгруппа группы G, порожденная всеми жесткими стабилизаторами вершин уровня n в дереве $\mathscr{T}$. Группа G называется *ветвящейся*, если все жесткие стабилизаторы уровней имеют конечный индекс в G. Мотивировки, примеры и известные результаты см. в (R. I. Grigorchuk, in: *New horizons in pro-p groups*, Birkhäuser, Boston, 2000, 121–179).

Существуют ли ветвящиеся группы, обладающие T-свойством Каждана? (См. 14.34.)

Л. Бартольди (L. Bartholdi), Р. И. Григорчук, З. Шунич (Z. Šunić)

15.13. Существуют ли конечно определенные ветвящиеся группы?

Л. Бартольди (L. Bartholdi), Р. И. Григорчук, З. Шунич (Z. Šunić)

15.14. Существуют ли конечно порожденные ветвящиеся группы,

*а) которые неаменабельны?

б) которые неаменабельны и не содержат свободной группы F_2 ранга 2?

*в) которые содержат F_2?

*г) которые имеют экспоненциальный рост?

Л. Бартольди (L. Bartholdi), Р. И. Григорчук, З. Шунич (Z. Šunić)

---

*а), *в), *г) Да, существуют (S. Sidki, J. S. Wilson, *Arch. Math.*, **80**, № 5 (2003), 458–463).

15.15. Верно ли, что любая максимальная подгруппа конечно порожденной ветвящейся группы имеет конечный индекс?

Л. Бартольди (L. Bartholdi), Р. И. Григорчук, З. Шунич (Z. Šunić)

15.16. Существуют ли группы со степенью роста $e^{\sqrt{n}}$

а) в классе конечно порожденных ветвящихся групп?

б) во всем классе конечно порожденных групп? Этот вопрос связан с 9.9.

Л. Бартольди (L. Bartholdi), Р. И. Григорчук, З. Шунич (Z. Šunić)

15.17. Бесконечная группа называется *минимально-бесконечной*, если все ее собственные фактор-группы конечны. Верно ли, что любая конечно порожденная минимально-бесконечная группа промежуточного роста является ветвящейся группой?

Л. Бартольди (L. Bartholdi), Р. И. Григорчук, З. Шунич (Z. Šunić)

15.18. Финитно аппроксимируемая группа *наследственно минимально-бесконечна*, если все ее нетривиальные нормальные подгруппы минимально-бесконечны.

а) Существуют ли конечно порожденные наследственно минимально-бесконечные периодические группы? (*Гипотеза:* нет, не существуют.)

б) Линейна ли любая конечно порожденная наследственно минимально-бесконечная группа?

Положительный ответ на второй вопрос влечет отрицательный ответ на первый.

Л. Бартольди (L. Bartholdi), Р. И. Григорчук, З. Шунич (Z. Šunić)

15.19. Пусть p — простое число, и $\mathscr{F}_p$ — класс всех конечно порожденных групп, точно действующих на p-регулярном корневом дереве конечными автоматами. Группы из $\mathscr{F}_p$ аппроксимируются конечными p-группами и имеют разрешимую проблему равенства. Так как класс $\mathscr{F}_p$ счетен, должны существовать группы с разрешимой проблемой равенства, аппроксимируемые конечными p-группами и не лежащие в $\mathscr{F}_p$.

а) Верно ли, что некоторые (или даже все) группы, построенные в работе (Р. И. Григорчук, *Мат. сб.*, **126**, №2 (1985), 194–214), не лежат в $\mathscr{F}_p$, если последовательность ω не периодическая?

б) Лежит ли в $\mathscr{F}_2$ группа $\mathbb{Z} \wr (\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z})$? (Здесь сплетения — прямые.)

См. (A. M. Brunner, S. Sidki, Wreath operations in the group of automorphisms of the binary tree, *to appear in J. Algebra*) и (Р. И. Григорчук, В. В. Некрашевич, В. И. Сущанский, *Тр. Мат. ин-та им. Стеклова*, **231** (2000), 134–214).

Л. Бартольди (L. Bartholdi), С. Сидки (S. Sidki)

15.20. (Б. Хартли). Бесконечная транзитивная группа подстановок называется *едва транзитивной*, если каждая из ее собственных подгрупп имеет только конечные орбиты. Может ли локально конечная едва транзитивная группа совпадать со своим коммутантом?

Локально конечная едва транзитивная группа G не может быть простой (B. Hartley, M. Kuzucuoğlu, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **40** (1997), 483–490), является p-группой для некоторого простого p, и если стабилизатор точки группы G разрешим ступени d, то G разрешима ступени, ограниченной в терминах d (В. В. Беляев, М. Кузуджуоглу, *Алгебра и логика*, **42** (2003), 261–270).

В. В. Беляев, М. Кузуджуоглу (M. Kuzucuoğlu)

15.21. (Б. Хартли). Существуют ли едва транзитивные группы без кручения?

В. В. Беляев

15.22. Группа подстановок называется *финитарной*, если каждый из ее элементов передвигает только конечное число точек. Существуют ли финитарные едва транзитивные группы?

В. В. Беляев

15.23. Транзитивная группа подстановок называется *вполне импримитивной*, если каждое конечное множество точек содержится в некотором конечном блоке группы. Существуют ли вполне импримитивные едва транзитивные группы, которые не локально конечны?

В. В. Беляев

***15.24.** Предположим, что конечная p-группа G обладает подгруппой периода p и порядка p^n. Верно ли, что если p достаточно велико относительно n, то группа G обладает нормальной подгруппой периода p и порядка p^n?

Известно (J. L. Alperin, G. Glauberman, *J. Algebra*, **203**, №2 (1998), 533–566), что если конечная p-группа обладает элементарной абелевой подгруппой порядка p^n, то она обладает нормальной элементарной абелевой подгруппой того же порядка, если $p > 4n - 7$; то же верно для произвольных абелевых подгрупп (G. Glauberman, *J. Algebra*, **272** (2004), 128–153).

Я. Г. Беркович

*Да, верно, если $p > n$. По индукции G содержит подгруппу H периода p и порядка p^n, которая нормальна в максимальной подгруппе M из G. Тогда $H \leqslant \zeta_{p-1}(M)$. Элементы порядка p из $\zeta_{p-1}(M)$ составляют нормальную подгруппу группы G, которая содержит H. (A. Mann, *Письмо от 01.10.2002.*)

*__15.25.__ Конечная группа G называется *рациональной*, если каждый ее неприводимый комплексный характер принимает только рациональные значения. Рациональны ли силовские 2-подгруппы симметрических групп $\mathbb{S}_{2^n}$? *Я. Г. Беркович*

*Да, рациональны. Силовская 2-подгруппа T_n из $\mathbb{S}_{2^n}$ является сплетением силовской 2-подгруппы из $\mathbb{S}_{2^{n-1}}$ с группой C порядка 2. Если T_n рациональна, то сплетение T_n с C также рационально по следствию 70 в (D. Kletzing *Structure and representations of Q-groups* (Lecture Notes in Math., **1084**), Springer, Berlin, 1984). Результат получается по индукции. (A. Mann, *Письмо от 01.10.2002*).

15.26. *Расщеплением* группы называется представление ее в виде теоретико-множественного объединения некоторых собственных подгрупп (*компонент*), попарно пересекающихся по 1. Верно ли, что всякое нетривиальное расщепление конечной p-группы содержит абелеву компоненту? *Я. Г. Беркович*

15.27. Возможно ли, что $\operatorname{Aut} G \cong \operatorname{Aut} H$ для конечной p-группы G порядка > 2 и ее собственной подгруппы H? *Я. Г. Беркович*

15.28. Предположим, что конечная p-группа G является произведением двух своих подгрупп: $G = AB$. Ограничен ли период группы G

а) в терминах периодов подгрупп A и B?

б) если подгруппы A и B имеют период p? *Я. Г. Беркович*

15.29. (А. Манн). Диэдральная группа порядка 8 изоморфна своей группе автоморфизмов. Есть ли другие нетривиальные конечные p-группы с таким же свойством? *Я. Г. Беркович*

15.30. Верно ли, что каждая конечная абелева p-группа изоморфна мультипликатору Шура некоторой неабелевой конечной p-группы? *Я. Г. Беркович*

15.31. Доказано (M. R. Vaughan-Lee, J. Wiegold, *Proc. R. Soc. Edinburgh Sect. A*, **95** (1983), 215–221), что если конечная p-группа G порождается элементами ширины $\leqslant n$ (т. е. имеющими не более p^n сопряженных), то группа G нильпотентна ступени $\leqslant n^2+1$; оценка ступени нильпотентности улучшена в (A. Mann, *J. Group Theory*, **4**, № 3 (2001), 241–246) до $\leqslant n^2 - n + 1$. Можно ли ограничить ступень нильпотентности группы G линейной функцией от n? *Я. Г. Беркович*

15.32. Предположим, что конечная p-группа G порядка p^m допускает автоморфизм порядка p^{m-k}. Верно ли, что если число m достаточно велико относительно k, то группа G обладает циклической подгруппой индекса p^k? *Я. Г. Беркович*

15.33. Предположим, что все 2-порожденные подгруппы конечной 2-группы G метацикличны. Ограничена ли ступень разрешимости группы G? Это верно для конечных p-групп при $p \neq 2$, см. п. 1.1.8 в (M. Suzuki, *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups*, Springer, Berlin, 1956). *Я. Г. Беркович*

15.34. Будет ли правоупорядочиваемой группой свободное произведение линейно упорядоченных групп с объединенной подгруппой? *В. В. Блудов*

15.35. Пусть F — свободная группа конечного ранга r с базисом $\{x_1, \ldots, x_r\}$. Верно ли, что существует такое число $C = C(r)$, что любое несократимое слово длины $n > 1$ от порождающих x_i лежит вне некоторой подгруппы группы F индекса $\leqslant C \log n$? *О. В. Богопольский*

15.36. Пусть M — класс групп. Обозначим через $L(M)$ класс всех групп G, в которых для любого $a \in G$ нормальная подгруппа $\langle a^G \rangle$, порожденная элементом a, лежит в M. Верно ли, что класс $L(M)$ конечно аксиоматизируем, если M — квазимногообразие, порожденное конечной группой?

А. И. Будкин

15.37. Пусть группа G удовлетворяет условию минимальности для централизаторов. Пусть X — нормальное подмножество группы G, для которого $[x, y, \dots, y] = 1$ при любых $x, y \in X$, где y встречается $f(x, y)$ раз. Верно ли, что подгруппа, порожденная множеством X, локально нильпотентна (а потому и гиперцентральна)?

Это верно, если числа $f(x, y)$ ограничены в совокупности (F. O. Wagner, *J. Algebra*, **217**, №2 (1999), 448–460).

Ф. Вагнер (F. O. Wagner)

15.38. Существует ли наследственная композиционная нелокальная формация $\mathfrak{F}$ конечных групп, для которой в каждой конечной группе множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп образует подрешетку решетки всех подгрупп?

А. Ф. Васильев, С. Ф. Каморников

15.39. Аксиоматизируя основные свойства субнормальных подгрупп, будем говорить, что функтор τ, сопоставляющий каждой конечной группе G некоторое непустое множество ее подгрупп $\tau(G)$, является *ETP-функтором*, если

1) $\tau(A)^{\varphi} \subseteq \tau(B^{\varphi})$ и $\tau(B)^{\varphi^{-1}} \subseteq \tau(A)$ для любого эпиморфизма $\varphi : A \longmapsto B$, а также $\{H \cap R \mid R \in \tau(G)\} \subseteq \tau(H)$ для любой подгруппы $H \leqslant G$;

2) $\tau(H) \subseteq \tau(G)$ для любой подгруппы $H \in \tau(G)$;

3) $\tau(G)$ — подрешетка решетки всех подгрупп группы G.

Пусть τ — ETP-функтор. Существует ли такая наследственная формация $\mathfrak{F}$, что $\tau(G)$ совпадает с множеством всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп в любой конечной группе G? Это верно для конечных разрешимых групп (А. Ф. Васильев, С. Ф. Каморников, *Сиб. мат. ж.*, **42**, №1 (2001), 30–40).

А. Ф. Васильев, С. Ф. Каморников

15.40. Пусть N — нильпотентная подгруппа конечной простой группы G. Верно ли, что существует подгруппа N_1, сопряженная с N, для которой $N \cap N_1 = 1$?

Из результатов в (E. P. Vdovin, *J. Group Theory*, **7** (2004), 99–112) следует, что ответ положительный, если G — группа лиева типа и N состоит из полупростых элементов.

Е. П. Вдовин

15.41. Пусть $R(m, p)$ — наибольшая конечная m-порожденная группа простого периода p. Можно ли ограничить ступень нильпотентности группы $R(m, p)$

а) полиномиальной функцией от m? (Это верно для $p = 2$, 3, 5, 7.)

б) линейной функцией от m? (Это верно для $p = 2$, 3, 5.)

в) В частности, можно ли ограничить ступень нильпотентности группы $R(m, 7)$ линейной функцией от m?

Я предполагаю, что ответ — «нет» на первые два вопроса для произвольного p, но «да» на третий. По контрасту, красивое и простое рассуждение Майка Ньюмана показывает, что если $m \geqslant 2$ и $k \geqslant 2$ ($k \geqslant 3$ при $p = 2$), то порядок группы $R(m, p^k)$ не меньше $p^{p^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{p^m}}}}}$, где p встречается в башне k раз; см. (M. Vaughan-Lee, E. I. Zelmanov, *J. Austral. Math. Soc. (A)*, **67**, №2 (1999), 261–271).

М. Воон-Ли (M. R. Vaughan-Lee)

15.42. Верно ли, что групповая алгебра $k[F]$ группы Р. Томпсона F (см. 12.20) над полем k удовлетворяет условию Оре, т. е. для любых $a, b \in k[F]$ существуют такие $u, v \in k[F]$, что $au = bv$, и либо u, либо v не равен нулю? Если ответ отрицателен, то группа F не аменабельна.

В. С. Губа

***15.43.** Пусть G — конечная группа порядка n.

а) Верно ли, что $|\mathrm{Aut}\, G| \geqslant \varphi(n)$, где φ — функция Эйлера?

б) Верно ли, что группа G — циклическая, если $|\mathrm{Aut}\, G| = \varphi(n)$?

М. Деаконеску (M. Deaconescu)

---

*а) Нет, не верно, например, для $G = (3^2 \times 4).U_4(3)$ или $G = (3 \times 2).L_3(4)$ (R. A. Wilson, *Письмо от 30.08.2003*).

*б) Нет, не верно, например, для $G = 2 \times 3 \times 5 \times 11 \times M_{11}$ (J. Bray, R. A. Wilson, *Письмо от 01.09.2003*).

15.44. Пусть G — редуктивная группа над алгебраически замкнутым полем K произвольной характеристики. Пусть X — аффинное G-многообразие, такое, что для некоторой фиксированной борелевской подгруппы $B \leqslant G$ координатная алгебра $K[X]$ как G-модуль является объединением возрастающей цепочки подмодулей, каждый из которых есть индуцированный модуль $\mathrm{Ind}_B^G V$ некоторого одномерного B-модуля V. (См. S. Donkin, *Rational representations of algebraic groups. Tensor products and filtration* (*Lect. Notes Math.*, **1140**), Springer, Berlin, 1985).

а) Пусть вдобавок $K[X]$ — Коэн–Маколеево кольцо, т. е. являющееся свободным модулем над подалгеброй, порожденной любой однородной системой параметров. Верно ли, что тогда кольцо инвариантов $K[X]^G$ Коэн–Маколеево, т. е. является свободным модулем над подалгеброй, порожденной любой однородной системой параметров?

*б) В частности, верно ли, что кольцо $K[M(n)^m]^{GL(n)}$ Коэн–Маколеево во всех характеристиках? (Здесь $M(n)^m$ — прямая сумма m копий пространства матриц $n \times n$.)

А. Н. Зубков

---

*б) Да, верно (M. Hashimoto, *Math. Z.*, **236** (2001), 605–623).

15.45. Мы определяем класс *иерархически разложимых* групп следующим образом. Во-первых, для любого класса групп $\mathfrak{X}$ обозначим через $\mathbf{H}_1\mathfrak{X}$ класс всех групп, которые допустимо действуют на конечномерном сжимаемом комплексе, причем так, что каждый стабилизатор клетки лежит в $\mathfrak{X}$. Тогда «большой» класс $\mathbf{H}\mathfrak{X}$ определяется как наименьший $\mathbf{H}_1$-замкнутый класс, содержащий $\mathfrak{X}$.

а) Пусть $\mathfrak{F}$ — класс всех конечных групп. Найти пример $\mathbf{H}\mathfrak{F}$-группы, которая не лежит в $\mathbf{H}_3\mathfrak{F}$ $(= \mathbf{H}_1\mathbf{H}_1\mathbf{H}_1 F)$.

б) Доказать или опровергнуть, что существует ординал α со свойством $\mathbf{H}_\alpha\mathfrak{F} = \mathbf{H}\mathfrak{F}$, где $\mathbf{H}_\alpha$ — оператор на классах групп, определяемый очевидным образом трансфинитной индукцией начиная с $\mathbf{H}_1$.

П. Крофоллер (P. Kropholler)

15.46. Редуцируется ли вопрос 7.28 об условиях допустимости элементарного ковра $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ к лиеву рангу 1, когда K — поле? Ковер $\mathfrak{A}$ типа Φ аддитивных подгрупп из K называется *допустимым*, если в группе Шевалле над K, ассоциированной с системой корней Φ, подгруппа $\langle x_r(\mathfrak{A}_r) \mid r \in \Phi\rangle$ пересекается с $x_r(K)$ по $x_r(\mathfrak{A}_r)$. Более точно, верно ли, что для допустимости ковра $\mathfrak{A}$ необходима и достаточна допустимость подковров $\{\mathfrak{A}_r, \mathfrak{A}_{-r}\}$, $r \in \Phi$, ранга 1? Известно, что ответ положительный для локально конечного поля K (В. М. Левчук, *Алгебра и логика*, **22**, N 5 (1983), 504–517).

В. М. Левчук

15.47. Пусть $M < G \leqslant \mathrm{Sym}(\Omega)$, где Ω — конечное множество, группа M транзитивна на Ω, и существует G-инвариантное разбиение $\mathscr{P}$ множества $\Omega\times\Omega\setminus\{(\alpha,\alpha) \mid \alpha \in \Omega\}$, для которого группа G транзитивна на множестве компонент из $\mathscr{P}$, а группа M оставляет на месте каждую компоненту из $\mathscr{P}$ как подмножество. (Здесь $\mathscr{P}$ можно отождествить с разложением полного направленного графа с множеством вершин Ω в реберно-непересекающиеся изоморфные направленные графы.) Если группа G индуцирует циклическую группу подстановок на $\mathscr{P}$, то доказано (C. H. Li, C. E. Praeger, *submitted*), что числа $n = |\Omega|$ и $k = |\mathscr{P}|$ таковы, что r-часть n_r числа n удовлетворяет сравнению $n_r \equiv 1 \pmod k$ для каждого простого r. Существуют ли для любых n, k, не удовлетворяющих указанному условию, примеры, когда группа G индуцирует нециклическую группу подстановок на $\mathscr{P}$?

Ч. Ли (C. H. Li), Ш. Прэгер (C. E. Praeger)

15.48. Пусть G — любая нетривиальная конечная группа и пусть X — любое множество порождающих элементов группы G. Верно ли, что каждый элемент из G может быть получен из X с помощью менее чем $2\log_2|G|$ умножений? (При подсчете числа умножений на пути от порождающих к данному элементу группы на каждом шаге разрешается использовать элементы, полученные на предыдущих шагах.)

Ч. Лидхэм-Грин (C. R. Leedham-Green)

15.49. Группа G называется *группой однозначных произведений*, если для любых непустых конечных подмножеств X, Y из G существует элемент из G, записываемый единственным образом в виде xy, где $x \in X$ и $y \in Y$. Существует ли не левоупорядочиваемая группа однозначных произведений?

П. Линнел (P. Linnell)

15.50. Пусть G — группа автоморфизмов абелевой группы простого периода. Предположим, что существует такой элемент $x \in G$, что x регулярен порядка 3 и порядок коммутатора $[x, g]$ конечен для любого $g \in G$. Верно ли, что тогда группа $\langle x^G\rangle$ локально конечна?

В. Д. Мазуров

15.51. Будет ли 5-группой коммутант периодической группы, удовлетворяющей тождеству $[x, y]^5 = 1$?

В. Д. Мазуров

15.52. (Известная задача). По знаменитой теореме Виландта последовательность $G_0 = G$, $G_1, \ldots$, в которой $G_{i+1} = \mathrm{Aut}\, G_i$, стабилизируется для любой конечной группы G с тривиальным центром. Существует ли такая функция f, что для произвольной конечной группы G для такой же последовательности при всех $i = 0, 1, \ldots$ выполняются неравенства $|G_i| \leqslant f(|G|)$?

В. Д. Мазуров

15.53. Рассмотрим множество S всех простых чисел p, для которых существует конечная простая группа G и ее абсолютно неприводимый модуль V над полем характеристики p, такие, что порядок любого элемента в естественном полупрямом произведении VG совпадает с порядком некоторого элемента из G. Конечно или бесконечно множество S?

В. Д. Мазуров

15.54. Предположим, что периодическая группа G содержит инволюцию i, централизатор которой $C_G(i)$ — локально циклическая 2-группа. Верно ли, что множество всех элементов нечетного порядка из G, инвертируемых инволюцией i, образует подгруппу?

В. Д. Мазуров

15.55. а) Монстр M является группой 6-транспозиций. Пары фишеровских транспозиций порождают 9 сопряженных M-классов диэдральных групп. Порядок произведения пары является коэффициентом при старшем корне аффинного типа E_8. Подобные же свойства верны для Бэби B и для F'_{24} относительно E_7 и E_6, соответственно, если произведения рассматриваются по модулю центра $(2.B,\ 3.F'_{24})$. Дать объяснение этому явлению. *Прим. ред. 2005 г.:* Некоторые продвижения получены в (C. H. Lam, H. Yamada, H. Yamauchi, Vertex operator algebras, extended E_8 diagram, and McKay's observation on the Monster simple group, `http://front.math.ucdavis.edu/math.QA/0403010`).

б) Мультипликатор Шура спорадических простых групп M, B, F'_{24} является фундаментальной группой типа E_8, E_7, E_6, соответственно. Почему?

См. (J. McKay, in: *Finite groups, Santa Cruz Conf. 1979* (*Proc. Symp. Pure Math.*, **37**), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1980, 183–186) и (R. E. Borcherds, *Doc. Math., J. DMV Extra Vol. ICM Berlin 1998*, Vol. I, 607–616 (1998)).

Дж. Маккэй (J. McKay)

15.56. Существует ли спинорное многообразие, на петельном пространстве которого действует Монстр? Возможно, 24-мерное? гипер-Кэлерово, некомпактное? См. (F. Hirzebruch, T. Berger, R. Jung, *Manifolds and modular forms*, Wiesbaden, Friedr. Vieweg., 1992).

Дж. Маккэй (J. McKay)

15.57. Пусть H — подгруппа группы $SL_2(\mathbb{Q})$, плотная в топологии Зариского и не имеющая нетривиальных конечных фактор-групп. Верно ли, что тогда $H = SL_2(\mathbb{Q})$?

Дж. Маккэй (J. McKay), Ж.-П. Серр (J.-P. Serre)

15.58. Предположим, что свободное проконечное произведение $G * H$ является свободной проконечной группой конечного ранга. Должны ли G и H быть свободными проконечными группами?

Это не обязательно верно, если ранг $G*H$ бесконечен (J. Neukirch, *Arch. Math.*, **22**, № 4 (1971), 337–357).

О. В. Мельников

15.59. Существует ли проконечная группа G, которая не является свободной, но может быть представлена в виде проективного предела $G = \varprojlim(G/N_\alpha)$, где все G/N_α — свободные проконечные группы конечных рангов?

Условие конечности рангов G/N_α существенно. Такая группа G не может удовлетворять первой аксиоме счетности (О. В. Мельников, *ДАН БССР*, **24**, № 11 (1980), 968–970).

О. В. Мельников

***15.60.** Верно ли, что любая конечно порожденная p'-изолированная подгруппа свободной группы отделима в классе конечных p-групп? Легко видеть, что это верно для циклических подгрупп.

Д. И. Молдаванский

*Нет, не верно (В. Г. Бардаков, *Сиб. матем. ж.*, **45**, № 3 (2004), 505–509).

15.61. Верно ли, что $l^n_\pi(G) \leqslant n(G_\pi) - 1 + \max_{p\in\pi} l_p(G)$ для любой π-разрешимой группы G? Здесь $n(G_\pi)$ — нильпотентная длина холловой π-подгруппы G_π группы G, а $l^n_\pi(G)$ — нильпотентная π-длина группы G, т. е. наименьшее число π-факторов в тех нормальных рядах группы G, у которых факторы либо π'-группы, либо нильпотентные π-группы. Известно, что ответ положительный, если все собственные подгруппы из G_π сверхразрешимы.

В. С. Монахов

15.62. Для неприводимого комплексного характера χ конечной группы G обозначим через $p^{e_p(\chi)}$ p-часть числа $\chi(1)$ и положим $e_p(G) = \max\{e_p(\chi) \mid \chi \in \mathrm{Irr}(G)\}$. Пусть P — силовская p-подгруппа группы G. Верно ли, что число $e_p(P)$ ограничено сверху некоторой функцией от $e_p(G)$?

Прим. 2005 г.: Положительный ответ для разрешимых групп получен в (A. Moretó, T. R. Wolf, *Adv. Math.*, **184** (2004), 18–36). *А. Морето (A. Moretó)*

15.63. Пусть F_n — свободная группа на свободных порождающих $x_1, \ldots, x_n$. Элемент $u \in F_n$ называется *положительным*, если u лежит в полугруппе, порожденной элементами x_i. Элемент $u \in F_n$ называется *потенциально положительным*, если элемент $\alpha(u)$ положителен для некоторого автоморфизма α группы F_n. Наконец, элемент $u \in F_n$ называется *стабильно потенциально положительным*, если он потенциально положителен как элемент группы F_m для некоторого $m \geqslant n$.

а) Распознается ли алгоритмически свойство элемента быть потенциально положительным?

*б) Существуют ли стабильно потенциально положительные элементы, не являющиеся потенциально положительными? *А. Г. Мясников, В. Э. Шпильрайн*

*б) Нет, не существуют (A. Clark, R. Goldstein, *Commun. Algebra*, **33**, №11 (2005) 4097–4104).

15.64. Для конечных групп G, X обозначим через $r(G; X)$ число неэквивалентных действий группы G на X, т. е. число классов эквивалентности гомоморфизмов $G \to \mathrm{Aut}\, X$, где эквивалентность определяется сопряжением с помощью элемента из $\mathrm{Aut}\, X$. Положим $r_G(n) := \max\{r(G; X) : |X| = n\}$.

Верно ли, что $r_G(n)$ можно ограничить функцией от общего числа простых сомножителей числа n (с учетом кратностей)? *П. Нойман (P. M. Neumann)*

15.65. Квадратная матрица называется *сепарабельной*, если ее минимальный многочлен не имеет кратных корней, и *циклической*, если ее минимальный многочлен совпадает с характеристическим. Для матричной группы G над конечным полем определим $s(G)$ и $c(G)$ как долю, соответственно, сепарабельных и циклических элементов в G. Для классической группы $\mathrm{X}(d, q)$ размерности d, определенной над полем из q элементов, положим $S(\mathrm{X}; q) := \lim_{d\to\infty} s(\mathrm{X}(d, q))$ и $C(\mathrm{X}; q) := \lim_{d\to\infty} c(\mathrm{X}(d, q))$. Независимо в (G. E. Wall, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **60**, №2 (1999), 253–284) и (J. Fulman, *J. Group Theory*, **2**, №3 (1999), 251–289) были подсчитаны числа $S(\mathrm{GL}; q)$ и $C(\mathrm{GL}; q)$ и было установлено, что это — рациональные функции от q. Являются ли $S(\mathrm{X}; q)$ и $C(\mathrm{X}; q)$ рациональными функциями от q также для унитарных, симплектических и ортогональных групп?

П. Нойман (P. M. Neumann)

15.66. Для класса групп $\mathfrak{X}$ обозначим через $g_{\mathfrak{X}}(n)$ число групп порядка n в классе $\mathfrak{X}$ (с точностью до изоморфизма). Много лет назад я сформулировал следующую проблему: найти хорошие верхние оценки для частного $g_{\mathfrak{V}}(n)/g_{\mathfrak{U}}(n)$, где $\mathfrak{V}$ — многообразие, определяемое своими конечными группами, а $\mathfrak{U}$ — подмногообразие из $\mathfrak{V}$. (Это частное определено только для тех n, для которых есть группы порядка n в $\mathfrak{U}$.) Некоторый прогресс был достигнут в (G. Venkataraman, *Quart. J. Math. Oxford (2)*, **48**, №189 (1997), 107–125), когда $\mathfrak{V}$ — многообразие, порожденное конечной группой с абелевыми силовскими подгруппами.

Гипотеза: если $\mathfrak{V}$ — локально конечное многообразие p-групп, а $\mathfrak{U}$ — его неабелево подмногообразие, то $g_{\mathfrak{V}}(p^m)/g_{\mathfrak{U}}(p^m) < p^{O(m^2)}$.

Более того, это представляется возможным способом атаки на гипотезу Симса о том, что если записать число групп порядка p^m в виде $p^{\frac{2}{27}m^3+\varepsilon(m)}$, то остаточный член $\varepsilon(m)$ является $O(m^2)$.

П. Нойман (P. M. Neumann)

15.67. Какие присоединенные группы Шевалле (нормального типа) над кольцом целых чисел порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны?

Известно, что группы $SL_n(\mathbb{Z})$, $n > 13$, являются такими (M. C. Tamburini, P. Zucca, *J. Algebra*, **195**, №2 (1997), 650–661). Группы $PSL_n(\mathbb{Z})$ тогда и только тогда являются такими, когда $n > 4$ (Я. Н. Нужин, *сдано в Алгебру и логику*). Для $PSp_4(\mathbb{Z})$ ответ отрицательный, что вытекает из аналогичного факта для $PSp_4(3)$, см. 7.30.

Я. Н. Нужин

15.68. Существует ли бесконечная конечно-порожденная 2-группа (конечного периода), все собственные подгруппы которой локально конечны?

А. Ю. Ольшанский

15.69. Верно ли, что всякая гиперболическая группа обладает свободной нормальной подгруппой, фактор-группа по которой имеет конечный период?

А. Ю. Ольшанский

15.70. Существуют ли группы произвольно большой мощности, удовлетворяющие условию минимальности для подгрупп?

А. Ю. Ольшанский

15.71. (Б. Хупперт). Для конечной разрешимой группы G обозначим через $\rho(G)$ множество простых делителей степеней ее неприводимых характеров. Верно ли, что всегда найдется неприводимый характер группы G, степень которого делится по крайней мере на $\rho(G)/2$ различных простых чисел?

П. Палфи (P. P. Pálfy)

15.72. Для данного простого p существует ли такая последовательность групп P_n порядка p^n, что число классов сопряженности $k(P_n)$ удовлетворяет соотношению $\lim_{n\to\infty}\log k(P_n)/\sqrt{n} = 0$?

Заметим, что в (J. M. Riedl, *J. Algebra*, **218** (1999), 190–215) построены p-группы, для которых этот предел равен $2\log p$.

П. Палфи (P. P. Pálfy)

15.73. Верно ли, что для любой конечной решетки L найдутся конечная группа G и ее подгруппа $H \leqslant G$, для которых интервал $Int(H;G)$ решетки подгрупп группы G изоморфен L? (Вероятно, нет.)

П. Палфи (P. P. Pálfy)

15.74. Для каждого простого числа p найти конечную p-группу ступени нильпотентности p, у которой решетка нормальных подгрупп не вкладывается в решетку подгрупп никакой абелевой группы. (Это сделано для $p = 2, 3$.)

П. Палфи (P. P. Pálfy)

15.75. *а) Существует ли последовательность тождеств от двух переменных $u_1 = 1$, $u_2 = 1, \ldots$ со следующими свойствами: 1) каждое из этих тождеств влечет следующее, и 2) произвольная конечная группа разрешима тогда и только тогда, когда она удовлетворяет одному из этих тождеств?

б) Обладает ли этими свойствами последовательность $u_1 = [x, y], \ldots, u_{n+1} = [[u_n, x], [u_n, y]]$?

Б. И. Плоткин

*а) Да, существует (T. Bandman, F. Grunewald, G.-M. Greuel, B. Kunyavskii, G. Pfister, E. Plotkin, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser.* I, **337** (2003), 581–586; J. N. Bray, J. S. Wilson, R. A. Wilson, *Bull. Lond. Math. Soc.*, **37**, (2005) 179–186).

15.76. Для многообразия групп Θ обозначим через Θ^0 категорию всех свободных групп конечного ранга в многообразии Θ. Доказано (G. Mashevitzky, B. Plotkin, E. Plotkin, *J. Algebra*, **282** (2004), 490–512), что если Θ — многообразие всех групп, то каждый автоморфизм категории Θ^0 является внутренним. То же верно, если Θ — многообразие всех абелевых групп. Верно ли такое же утверждение для многообразий 2-ступенно нильпотентных и метабелевых групп?

Автоморфизм φ категории называется *внутренним*, если он изоморфен единичному автоморфизму. Пусть $s : 1 \to \varphi$ — функция, задающая этот изоморфизм. Тогда для любого объекта A имеется изоморфизм $s_A : A \to \varphi(A)$ и для любого морфизма объектов $\mu : A \to B$ имеет место равенство $\varphi(\mu) = s_B \mu s_A^{-1}$.

Б. И. Плоткин

15.77. Элементы a, b группы G называются *симметричными относительно элемента* $g \in G$, если $a = gb^{-1}g$. Пусть G — бесконечная абелева группа, α — мощность, $\alpha < |G|$. Верно ли, что тогда для любого n-раскрашивания $\chi : G \to \{0, 1, \ldots, n-1\}$ найдется одноцветное подмножество мощности α, симметричное относительно некоторого элемента из G? Известно, что это верно при $n \leqslant 3$.

И. В. Протасов

15.78. (Р. И. Григорчук). Верно ли, что для любого n-раскрашивания свободной группы произвольного ранга найдется бесконечное одноцветное подмножество, симметричное относительно некоторого элемента группы? Это верно при $n = 2$.

И. В. Протасов

15.79. Существует ли хаусдорфова групповая топология на $\mathbb{Z}$, в которой последовательность $\{2^n + 3^n\}$ сходится к нулю?

И. В. Протасов

15.80. Последовательность $\{F_n\}$ попарно непересекающихся конечных подмножеств топологической группы называется *экспансивной*, если для любого открытого подмножества U найдется такой номер m, что $F_n \cap U \neq \varnothing$ для всех $n > m$. Предположим, что группа G может быть разбита на счетное число плотных подмножеств. Верно ли, что тогда в G существует экспансивная последовательность?

И. В. Протасов

***15.81.** Верно ли, что любая конечная несверхразрешимая группа G обладает нециклической силовской подгруппой, максимальная подгруппа которой не имеет собственного дополнения в G?

А. Н. Скиба

*Да, верно (Wang, Yanming, Wei, Huaquan, *Sci. China Ser. A*, **47**, № 1 (2004), 96–103).

15.82. Пусть периодическая группа G содержит сильно изолированную 2-подгруппу U. Верно ли, что либо группа G локально конечна, либо подгруппа U нормальна в G?

А. И. Созутов, Н. М. Сучков

15.83. (Ю. И. Мерзляков). Существует ли рациональное число α по модулю меньше 2, такое, что матрицы $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$ порождают свободную группу?

Ю. В. Сосновский

15.84. Ю. И. Мерзляков (*ДАН СССР*, **238**, №3 (1978), 527–530) доказал, что если α, β, γ — комплексные числа, каждое по модулю не меньше 3, то матрицы $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1-\gamma & -\gamma \\ \gamma & 1+\gamma \end{pmatrix}$ порождают свободную группу ранга три. Существуют ли рациональные числа α, β, γ, каждое по модулю меньше 3, с тем же свойством?

Ю. В. Сосновский

15.85. Группа без кручения, все подгруппы которой субнормальны, нильпотентна (H. Smith, *Arch. Math.*, **76**, №1 (2001), 1–6). Будет ли группа без кручения с нормализаторным условием

а) гиперабелевой?

б) гиперцентральной?

Ю. В. Сосновский

15.86. Группа G называется *дискриминирующей*, если для любого конечного множества неединичных элементов прямого квадрата $G \times G$ существует гомоморфизм $G \times G \to G$, который не посылает в 1 ни одного из этих элементов (Г. Баумслаг, А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников). Группа называется *квадратоподобной*, если она универсально эквивалентна (в смысле логики первого порядка) дискриминирующей группе (Б. Файн, А. Гаглион, А. Г. Мясников, Д. Спеллман). Верно ли, что каждая квадратоподобная группа элементарно эквивалентна дискриминирующей группе?

Ответ положителен в абелевом случае (B. Fine, A. M. Gaglione, D. Spellman, in: *Group theory, statistics, and cryptography* (*Contemp. Math.*, **360**), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, 35–46; *Houston J. Math.*, **31** (2005), 649–674 (electronic)). Определения, данные выше, отличаются от формулировок в литературе, но можно показать, что они им эквивалентны.

Д. Спеллман (D. Spellman)

15.87. Пусть 2-группа G допускает регулярную периодическую локально циклическую группу автоморфизмов, которая транзитивно переставляет множество ее инволюций. Будет ли группа G локально конечной?

Н. М. Сучков

15.88. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{N}_c$ — многообразия абелевых и c-ступенно нильпотентных групп, соответственно. Пусть $F_r = F_r(\mathfrak{A}\mathfrak{N}_c)$ — свободная группа ранга r в многообразии $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_c$. Элемент из F_r называется *примитивным*, если его можно включить в базу группы F_r. Существует ли алгоритм, распознающий примитивные элементы в F_r?

Е. И. Тимошенко

15.89. Пусть Γ — бесконечный неориентированный связный вершинно-симметрический граф конечной валентности без петель и без кратных ребер. Верно ли, что каждое комплексное число является собственным значением матрицы смежности графа Γ?

В. И. Трофимов

15.90. Пусть Γ — бесконечный ориентированный граф, а $\overline{\Gamma}$ – неориентированный граф, получающийся из Γ снятием ориентации. Предположим, что граф Γ допускает вершинно-транзитивную группу автоморфизмов, а граф $\overline{\Gamma}$ связен и имеет конечную валентность. Существует ли такое натуральное число k (зависящее, быть может, от Γ), что для каждого натурального n найдется ориентированный путь длины не более $k \cdot n$ в графе Γ, расстояние между начальной и конечной вершинами которого в графе $\overline{\Gamma}$ не менее n?

Прим. 2005 г.: Доказано, что существует такое натуральное k' (зависящее только от валентности графа $\overline{\Gamma}$), что для любого натурального n имеется направленный путь длины не более $k' \cdot n^2$ в графе Γ, начальная и конечная вершины которого находятся на расстоянии не менее n в графе $\overline{\Gamma}$ (V. I. Trofimov, On geometric properties of directed vertex-symmetric graphs, *to appear in Europ. J. Combinatorics*).

В. И. Трофимов

15.91. Верно ли, что любое неприводимое точное представление линейной группы G конечного ранга над конечно порожденным полем характеристики нуль индуцируется неприводимым представлением конечно порожденной плотной подгруппы группы G?

А. В. Тушев

15.92. Группа $\langle x, y \mid x^l = y^m = (xy)^n \rangle$ называется *треугольной группой* с параметрами (l, m, n). Доказано (A. M. Brunner, R. G. Burns, J. Wiegold, *Math. Scientist*, **4** (1979), 93–98), что треугольная группа с параметрами (2, 3, 30) имеет несчетное число неизоморфных гомоморфных образов, которые аппроксимируются конечными знакопеременными группами. Верно ли то же самое для треугольных групп с параметрами $(2, 3, n)$ при всех $n > 6$?

Дж. Уайголд (J. Wiegold)

15.93. Пусть G — про-p группа, $p > 2$, а φ — ее автоморфизм порядка 2. Предположим, что централизатор $C_G(\varphi)$ абелев. Верно ли, что тогда группа G удовлетворяет про-p тождеству?

Положительный ответ обобщил бы результат А. Н. Зубкова (*Сиб. мат. ж.*, **28**, № 5 (1987), 64–69) о непредставимости свободной неабелевой про-p группы матрицами размера 2×2.

А. Хайкин–Запирайн (A. Jaikin–Zapirain)

15.94. *Весом* группы G назовем минимальное число порождающих G как нормальной подгруппы. Пусть $G = G_1 * \cdots * G_n$ — свободное произведение n нетривиальных групп.

а) Верно ли, что вес G не меньше $n/2$?

б) Тот же вопрос, если все группы G_i цикличны.

в) Тот же вопрос для $n = 3$ (без предположения о цикличности).

Задача 5.53 (решенная положительно) — частный случая этого вопроса, когда $n = 3$ и все группы G_i цикличны.

Дж. Хоуви (J. Howie)

15.95. (А. Манн, Ш. Прэгер). Предположим, что все действующие без неподвижных точек элементы транзитивной группы подстановок G имеют простой порядок p. Если G является конечной p-группой, должна ли G иметь период p?

Это верно для $p = 2, 3$; кроме того, известно, что период группы G ограничен в терминах p (A. Hassani, M. Khayaty, E. I. Khukhro, C. E. Praeger, *J. Algebra*, **214**, № 1 (1999), 317–333).

Е. И. Хухро

15.96. Автоморфизм φ группы G называется *расщепляющим автоморфизмом порядка* n, если $\varphi^n = 1$ и $xx^{\varphi}x^{\varphi^2}\cdots x^{\varphi^{n-1}} = 1$ для любого $x \in G$.

а) Верно ли, что ступень разрешимости d-порожденной нильпотентной p-группы, допускающей расщепляющий автоморфизм порядка p^n, ограничена некоторой функцией от d, p и n? Это верно при $n = 1$, см. Архив, 7.53.

б) Тот же вопрос для $p^n = 4$.

Е. И. Хухро

15.97. Пусть p — простое число. Говорят, что группа G удовлетворяет *условию p-минимальности*, если в ней нет бесконечных убывающих цепочек подгрупп $G_1 > G_2 > \ldots$, в которых каждая разность $G_i \setminus G_{i+1}$ содержит p-элемент (С. Н. Черников). Предположим, что локально конечная группа G удовлетворяет условию p-минимальности и обладает субнормальным рядом, каждый из факторов которого либо конечен, либо является p'-группой. Верно ли, что все p-элементы из G порождают черниковскую подгруппу?

Н. С. Черников

15.98. Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, а G — конечная разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа, в которой $G^{\mathfrak{F}}$ — силовская p-подгруппа группы G. Верно ли, что группа $G^{\mathfrak{F}}$ изоморфна фактор-группе силовской p-подгруппы из $PSU(3, p^{2n})$? Это верно для формации конечных нильпотентных групп (В. Д. Мазуров, С. А. Сыскин, *Мат. заметки*, **14**, №2 (1973), 217–222; А. Х. Журтов, С. А. Сыскин, *Сиб. мат. ж.*, **26**, №2 (1987), 74–78).

Л. А. Шеметков

15.99. Пусть $f(n)$ — число попарно неизоморфных конечных групп порядка n. Верно ли, что уравнение $f(n) = k$ имеет решение для любого натурального k? Известно, что это так для всех $k \leqslant 1000$ (G. M. Wei, *Southeast Asian Bull. Math.*, **22**, №1 (1998), 93–102).

В. Ши (W. J. Shi)

15.100. Является ли периодическая группа локально конечной, если в ней есть нециклическая подгруппа порядка 4, совпадающая со своим централизатором?

А. К. Шлепкин

15.101. Является ли периодическая группа локально конечной, если в ней есть инволюция, централизатор которой — локально конечная группа с силовской 2-подгруппой порядка 2?

А. К. Шлепкин

15.102. (В. Магнус). Элемент r свободной группы F_n называется *нормальным корнем* из элемента $u \in F_n$, если u лежит в нормальном замыкании r в F_n. Может ли элемент u, не лежащий в коммутанте $[F_n, F_n]$, иметь бесконечно много несопряженных нормальных корней?

В. Э. Шпильрайн

15.103. (Известный вопрос). Линейна ли группа $\operatorname{Out} F_3$ внешних автоморфизмов свободной группы ранга 3?

В. Э. Шпильрайн

15.104. Пусть n — натуральное число, а w — групповое слово от переменных $x_1, x_2, \ldots$. Пусть финитно аппроксимируемая группа G удовлетворяет тождеству $w^n = 1$. Верно ли, что тогда вербальная подгруппа $w(G)$ локально конечна?

Если $w = x_1$, то это — Ослабленная проблема Бернсайда. Положительный ответ получен также в ряде других частных случаев (P. Shumyatsky, *Quart. J. Math.*, **51**, №4 (2000), 523–528).

П. В. Шумяцкий

Новые вопросы

16.1. Пусть G — конечная неабелева группа, а $Z(G)$ — ее центр. С группой G можно связать граф Γ_G, в котором $G\backslash Z(G)$ — множество вершин, причем две вершины x и y соединены ребром тогда и только тогда, когда $xy \neq yx$. Пусть H — такая конечная неабелева группа, что $\Gamma_G \cong \Gamma_H$.

а) Верно ли, что $G \cong H$, если H проста?

б) Верно ли, что G нильпотентна, если H нильпотентна?

в) Верно ли, что G разрешима, если H разрешима?

А. Абдоллахи (A. Abdollahi), С. Акбари (S. Akbari), Х. Маймани (H. Maimani)

16.2. Группа G называется *отделимой*, если для любой подгруппы $H \leqslant G$ и любого элемента $x \in G \setminus H$ найдется гомоморфизм в конечную группу $f : G \to F$, при котором $f(x) \notin f(H)$. Верно ли, что конечно порожденная разрешимая группа локально отделима тогда и только тогда, когда она не содержит разрешимой группы Баумслага–Солитара? Разрешимые группы Баумслага–Солитара — это группы вида $BS(1,n) = \langle a, b \mid bab^{-1} = a^n \rangle$ при $n > 1$.

Известно, что конечно порожденная разрешимая группа отделима тогда и только тогда, когда она полициклическая (R. C. Alperin, in: *Groups–Korea'98 (Pusan)*, de Gruyter, Berlin, 2000, 1–5).

Р. Алперин (R. C. Alperin)

16.3. Верно ли, что если в конечной группе G все классы сопряженности имеют разные порядки, то $G \cong \mathbb{S}_3$? Известно, что это так, если G разрешима (Z. Arad, M. Muzychuk, A. Oliver, *J. Algebra*, **280** (2004), 537–576).

З. Арад (Z. Arad)

16.4. Предположим, что конечная группа G содержит нетривиальные классы сопряженности C, D, для которых CD — тоже класс сопряженности. Может ли G быть неабелевой простой группой?

З. Арад (Z. Arad)

16.5. Будем говорить, что группа *совершенна*, если она совпадает со своим коммутантом. Существует ли совершенная локально конечная p-группа,

а) в которой все собственные подгруппы гиперцентральны?

б) в которой все собственные подгруппы разрешимы?

в) в которой все собственные подгруппы гиперцентральны и разрешимы?

А. О. Асар (A. O. Asar)

16.6. Может ли совершенная локально конечная p-группа порождаться множеством ограниченного периода,

а) если все ее собственные подгруппы гиперцентральны?

б) если все ее собственные подгруппы разрешимы?

А. О. Асар (A. O. Asar)

16.7. Верно ли, что в любом полупрямом произведении $F_n \rtimes F_n$ неабелевых свободных групп F_n проблема вхождения в конечно порожденные подгруппы неразрешима?

Положительный ответ давал бы ответ на вопрос 6.24. Напомним, что проблема вхождения разрешима для F_n (М. Холл, 1949) и неразрешима для $F_n \times F_n$ (К. А. Михайлова, 1958).

В. Г. Бардаков

16.8. *Шириной* $w(G')$ коммутанта G' конечной неабелевой группы G называется наименьшее натуральное число m такое, что всякий элемент из G' является произведением не более m коммутаторов. Верно ли, что максимальное значение дроби $w(G')/|G|$ равно $1/6$ (и достигается на симметрической группе $\mathbb{S}_3$)?

В. Г. Бардаков

16.9. Элемент g свободной группы F_n на свободных порождающих $x_1, \ldots, x_n$ называется *палиндромом* относительно этих порождающих, если редуцированное слово, представляющее g, читается одинаково слева направо и справа налево. *Палиндромная длина* элемента $w \in F_n$ — это наименьшее число палиндромов из F_n, произведение которых равно w. Существует ли алгоритм для нахождения палиндромной длины данного элемента из F_n?

В. Г. Бардаков, В. А. Толстых, В. Э. Шпильрайн

16.10. Существует ли алгоритм для нахождения примитивной длины данного элемента из F_n? Определение примитивного элемента дано в 14.84; примитивная длина определяется аналогично палиндромной длине в 16.9.

В. Г. Бардаков, В. А. Толстых, В. Э. Шпильрайн

16.11. Для всякой ли конечной p-группы G существует конечная p-группа H, для которой $\Phi(H) \cong [G, G]$?

Я. Г. Беркович

16.12. Назовем Φ-*расширением* конечной p-группы G любую конечную p-группу H, содержащую нормальную подгруппу N порядка p, для которой $H/N \cong G$ и $N \leqslant \Phi(H)$. Верно ли, что для любой конечной p-группы G существует бесконечная последовательность $G = G_1$, $G_2, \ldots$, в которой G_{i+1} является Φ-расширением G_i для каждого $i = 1,\ 2, \ldots$?

Я. Г. Беркович

16.13. Существует ли конечная p-группа G, в которой каждая максимальная подгруппа H специальна, т. е. удовлетворяет равенствам $Z(H) = [H, H] = \Phi(H)$?

Я. Г. Беркович

16.14. Пусть G — конечная 2-группа, в которой $\Omega_1(G) \leqslant Z(G)$. Верно ли, что ранг фактор-группы G/G^2 не превосходит удвоенного ранга центра $Z(G)$?

Я. Г. Беркович

16.15. Элемент g группы G называется *энгелевым*, если для каждого $h \in G$ существует такое k, что $[h, g, \ldots, g] = 1$, где g встречается k раз; если существует k, не зависящее от h, то g называется *ограниченно энгелевым*.

а) (Б. И. Плоткин). Во всякой ли группе множество всех ограниченно энгелевых элементов является подгруппой?

б) Тот же вопрос для групп без кручения.

в) Тот же вопрос для правоупорядоченных групп.

г) Тот же вопрос для линейно упорядоченных групп.

В. В. Блудов

16.16. а) Является ли подгруппой множество всех (не обязательно ограниченно) энгелевых элементов в любой группе без элементов порядка 2?

б) Тот же вопрос для групп без кручения.

в) Тот же вопрос для правоупорядоченных групп.

г) Тот же вопрос для линейно упорядоченных групп.

Имеются примеры 2-групп, в которых произведение двух (неограниченно) энгелевых элементов не является энгелевым элементом. *В. В. Блудов*

16.17. Верно ли, что неабелева простая группа не может содержать энгелевых элементов, отличных от единицы? *В. В. Блудов*

16.18. Существует ли линейно упорядоченная разрешимая группа ступени разрешимости ровно n, имеющая единственную собственную нормальную относительно выпуклую подгруппу

а) при $n = 3$?

б) при $n > 4$?

Такие группы известны для $n = 2$ и для $n = 4$. *В. В. Блудов*

16.19. Является ли конечно базируемым многообразие решеточно упорядоченных групп, порожденное нильпотентными группами? (Здесь многообразие рассматривается в сигнатуре групповых и решеточных операций.) *В. В. Блудов*

16.20. Пусть M — квазимногообразие групп. *Доминионом* $\mathrm{dom}_A^M(H)$ подгруппы H группы A (из M) называется множество всех элементов $a \in A$ со следующим свойством: для любых двух гомоморфизмов $f, g : A \to B \in M$, если f, g совпадают на H, то $f(a) = g(a)$. Предположим, что множество $\{\mathrm{dom}_A^N(H) \mid N$ — квазимногообразие, $N \subseteq M\}$ образует решетку относительно теоретико-множественного включения. Может ли эта решетка быть модулярной и недистрибутивной? *А. И. Будкин*

16.21. Пусть задана нецентральная матрица $\alpha \in SL_n(F)$ над полем F. Верно ли, что при $n > 2$ каждая нецентральная матрица из $SL_n(F)$ является произведением n матриц, сопряженных с α? *Л. Васерштейн*

16.22. (Известный вопрос.) Пусть $E_n(A)$ — подгруппа группы $GL_n(A)$, порожденная элементарными матрицами. Верно ли, что $SL_2(A) = E_2(A)$, когда $A = \mathbb{Z}[x, 1/x]$? *Л. Васерштейн*

16.23. Существует ли кольцо A с 1 и элемент из $E_n(A)$ для какого-то $n > 2$, который не является коммутатором? *Л. Васерштейн*

16.24. *Спектром* конечной группы называется множество порядков ее элементов. Существует ли конечная группа G, спектр которой совпадает со спектром конечной простой исключительной группы L лиева типа, но G не изоморфна L? *А. В. Васильев*

16.25. Существуют ли три попарно неизоморфные конечные неабелевы простые группы с одним и тем же спектром? *А. В. Васильев*

16.26. Говорят, что графы простых чисел конечных групп G и H совпадают, если множества простых делителей их порядков совпадают: $\pi(G)=\pi(H)$, и для любых $p,q\in\pi(G)$ в G есть элемент порядка pq тогда и только тогда, когда такой элемент есть в H. Существует ли такое натуральное k, что никакие k попарно неизоморфных конечных неабелевых простых групп не могут иметь один и тот же граф простых чисел? *Гипотеза:* $k=5$.

А. В. Васильев

16.27. Пусть конечная группа G имеет такой же спектр, как знакопеременная группа. Верно ли, что G имеет не более одного неабелева композиционного фактора?

Для любой конечной простой группы, отличной от знакопеременной, ответ на соответствующий вопрос положителен (mod CFSG).

А. В. Васильев, В. Д. Мазуров

16.28. Пусть G — связная линейная редуктивная алгебраическая группа над полем положительной характеристики, X ее замкнутое подмножество, и пусть $X^k=\{x_1\cdots x_k\mid x_i\in X\}$.

а) Верно ли, что всегда найдется такое натуральное $c=c(X)>1$, что X^c замкнуто?

б) Пусть X — класс сопряженности группы G, для которого X^2 содержит открытое подмножество из G; верно ли, что $X^2=G$?

Е. П. Вдовин

16.29. Пусть G — простая группа лиева типа с системой корней Φ над полем F. Верно ли, что для любой коммутативной полупростой подгруппы A из G и любой собственной подгруппы $H<G$ найдется такой элемент $x\in G$, что $x^{-1}Ax\cap H=1$?

Положительный ответ для $\Phi=A_n$ получен в (J. Siemons, A. Zalesskii, *J. Algebra*, **226** (2000), 451–478) .

Е. П. Вдовин

16.30. Пусть A и B — подгруппы группы G и $G=AB$. Будет ли G обладать композиционным (главным) рядом, если A и B обладают композиционным (соответственно, главным) рядом?

В. А. Ведерников

16.31. Пусть группа G обладает композиционным рядом, и пусть $\mathfrak{F}(G)$ — формация, порожденная группой G. Верно ли, что множество всех подформаций из $\mathfrak{F}(G)$ конечно? Ср. 9.59.

В. А. Ведерников

16.32. Пусть группа G обладает композиционным рядом, и пусть $\mathrm{Fit}(G)$ — класс Фиттинга, порожденный группой G. Верно ли, что множество всех подклассов Фиттинга из $\mathrm{Fit}(G)$ конечно? Ср. 14.31.

В. А. Ведерников

16.33. Предположим, что конечная p-группа G содержит абелеву подгруппу A порядка p^n. Верно ли, что G содержит абелеву подгруппу B порядка p^n, которая нормальна в $\langle B^G \rangle$,

а) если $p = 3$?

б) если $p = 2$?

в) Если $p = 3$ и A элементарная абелева, содержит ли G элементарную абелеву подгруппу B порядка 3^n, которая нормальна в $\langle B^G \rangle$?

Соответствующие результаты доказаны для бо́льших простых чисел p на основе обобщения теоремы Томпсона о замене (а диэдральная группа порядка 32 показывает, что третий вопрос имеет отрицательный ответ для $p = 2$). См. (G. Glauberman, *J. Algebra*, **196** (1997), 301–338; J. Alperin, G. Glauberman, *J. Algebra*, **203** (1998), 533–566; G. Glauberman, *J. Algebra*, **272** (2004), 128–153).

Дж. Глауберман (G. Glauberman)

16.34. Предположим, что G — конечно порожденная группа, точно действующая на регулярном укорененном дереве автоморфизмами с конечным числом состояний. Разрешима ли проблема сопряженности для G?

См. определения в (Р. И. Григорчук, В. В. Некрашевич, В. И. Сущанский, в: *Динамические системы, автоматы и бесконечные группы*; *Тр. Матем. инст. РАН им. Стеклова*, **231** (2000), 134–214).

Р. И. Григорчук, В. И. Некрашевич, В. И. Сущанский

16.35. Всякая ли конечно определенная разрешимая группа G почти метанильпотентна (т. е. обладает нормальным рядом $G \geqslant F \geqslant N \geqslant 1$, в котором фактор G/F конечен, а F/N и N нильпотентны)?

Дж. Гроувз (J. R. J. Groves)

16.36. Назовем конечную группу *рациональной*, если все ее обыкновенные характеры рациональнозначны. Будет ли рациональной силовская 2-подгруппа любой рациональной группы?

М. Р. Дарафшех (M. R. Darafsheh)

16.37. Пусть G — разрешимая рациональная конечная группа с экстраспециальной силовской 2-подгруппой. Верно ли, что либо G — 2-нильпотентная группа, либо G содержит такую нормальную подгруппу E, что G/E — расширение нормальной 3-подгруппы с помощью элементарной абелевой 2-группы?

М. Р. Дарафшех (M. R. Darafsheh)

16.38. Пусть G — разрешимая группа, а A и B — ее периодические подгруппы. Верно ли, что любая подгруппа, содержащаяся в множестве $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$, периодическая? Известно, что это так, если AB — подгруппа группы G.

Ф. де Джованни (F. de Giovanni)

16.39. (Янтцен). Пусть G — полупростая алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > 0$. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G и пусть $u = u(\mathfrak{g})$ — ограниченная обертывающая алгебра алгебры $\mathfrak{g}$. По теореме Куртиса всякий неприводимый ограниченный u-модуль (т. е. всякий неприводимый ограниченный $\mathfrak{g}$-модуль) является ограничением на $\mathfrak{g}$ некоторого (рационального) G-модуля. Верно ли, что и всякий проективный неразложимый u-модуль является ограничением некоторого рационального G-модуля? Это верно, если $p \geqslant 2h-2$ (где h — число Коксетера группы G) в силу результатов Янтцена.

С. Донкин (S. Donkin)

16.40. Пусть Δ — подгруппа группы автоморфизмов свободной про-p группы F конечного ранга, причем Δ изоморфна (как проконечная группа) группе Z_p p-адических целых чисел. Всегда ли подгруппа неподвижных точек группы Δ в F конечно порождена (как проконечная группа)?

П. А. Залесский

16.41. Пусть F — свободная про-p группа конечного ранга $n > 1$. Содержит ли $\operatorname{Aut} F$ открытую подгруппу конечной когомологической размерности?

П. А. Залесский

16.42. Будет ли топологическая абелева группа (G, τ) компактна, если всякая групповая топология $\tau' \subseteq \tau$ на G полна? (Ответ положителен, если всякий непрерывный гомоморфный образ группы (G, τ) полон.)

Е. Г. Зеленюк

16.43. Существует ли разбиение группы $\bigoplus_{\omega_1}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ на три подмножества, дополнения которых не содержат смежных классов по бесконечным подгруппам? (Известно, что существует разбиение на два таких подмножества.)

Е. Г. Зеленюк

16.44. Существует ли в системе аксиом ZFC счетная недискретная топологическая группа, не содержащая дискретных подмножеств с единственной точкой сгущения? (Известно, что такая группа существует при наличии аксиомы Мартина.)

Е. Г. Зеленюк

16.45. Пусть G — группа подстановок множества Ω. Назовем последовательность точек из Ω *базой* для G, если ее поточечный стабилизатор в G тривиален; назовем базу *минимальной*, если ни одну точку нельзя удалить. Обозначим через $b(G)$ максимум по всем подстановочным представлениям конечной группы G максимальных размеров минимальных баз для G. Обозначим через $\mu'(G)$ максимальный размер *независимого множества* в G, т. е. множества элементов со свойством, что ни один элемент не принадлежит подгруппе, порожденной остальными. Верно ли, что $b(G) = \mu'(G)$? (Известно, что $b(G) \leq \mu'(G)$, а для симметрических групп имеет место равенство.)

Замечание. Эквивалентный вопрос состоит в следующем. Предположим, что булева решетка $B(n)$ подмножеств n-элементного множества вкладывается как нижняя полурешетка в решетку подгрупп группы G, и пусть n — максимальное число с этим свойством. Верно ли, что тогда существует такого же сорта вложение решетки $B(n)$ со свойством, что наименьший элемент из $B(n)$ — нормальная подгруппа группы G?

П. Камерон (P. J. Cameron)

16.46. Среди конечно определенных групп, действующих реберно-транзитивно на (бесконечном) 3-валентном дереве с конечным стабилизатором вершины, есть две группы $G_3 = \big\langle h, a, P, Q \mid h^3, a^2, P^2, Q^2, [P,Q], [h,P], (hQ)^2, a^{-1}PaQ \big\rangle$ и $G_4 = \big\langle h, a, p, q, r \mid h^3, a^2, p^2, q^2, r^2, [p,q], [p,r], p(qr)^2, h^{-1}phq, h^{-1}qhpq, (hr)^2, [a,p], a^{-1}qar \big\rangle$, каждая из которых содержит модулярную группу $G_1 = \big\langle h, a \mid h^3, a^2 \big\rangle \cong PSL_2(\mathbb{Z})$ как подгруппу конечного индекса. Свободное произведение групп G_3 и G_4 с объединенной подгруппой $G_1 = \langle h, a\rangle$ обладает нормальной подгруппой K индекса 8, порожденной элементами $A = h$, $B = aha$, $C = p$, $D = PpP$, $E = QpQ$ и $F = PQpPQ$, с диэдральным дополнением $\langle a, P, Q\rangle$. Группа K имеет копредставление $\big\langle A, B, C, D, E, F \mid A^3, B^3, C^2, D^2, E^2, F^2, (AC)^3, (AD)^3, (AE)^3, (AF)^3, (BC)^3, (BD)^3, (BE)^3, (BF)^3, (ABA^{-1}C)^2, (ABA^{-1}D)^2, (A^{-1}BAE)^2, (A^{-1}BAF)^2, (BAB^{-1}C)^2, (B^{-1}ABD)^2, (BAB^{-1}E)^2, (B^{-1}ABF)^2 \big\rangle$. Есть ли у этой группы нетривиальные конечные фактор-группы?

М. Кондер (M. Conder)

16.47. (П. Конрад). Верно ли, что любая абелева группа без кручения допускает архимедов решеточный порядок?

В. М. Копытов, Н. Я. Медведев

16.48. Говорят, что в группе H есть *обобщенное кручение*, если $h^{x_1}h^{x_2}\cdots h^{x_n} = 1$ для какого-то элемента $h \neq 1$, какого-то n и каких-то $x_i \in H$. Верно ли, что всякая группа без обобщенного кручения правоупорядочиваема?

В. М. Копытов, Н. Я. Медведев

16.49. Верно ли, что свободное произведение групп без обобщенного кручения является группой без обобщенного кручения?

В. М. Копытов, Н. Я. Медведев

16.50. Существует ли простая конечно порожденная правоупорядочиваемая группа?

Известно, что существует конечно порожденная правоупорядочиваемая группа, совпадающая со своим коммутантом (Дж. Бергман).

В. М. Копытов, Н. Я. Медведев

16.51. Существуют ли группы, которые правоупорядочиваемы бесконечным счетным числом способов?

Известно, что существуют группы, которые линейно упорядочиваемы счетным бесконечным числом способов (Р. Буттсворт).

В. М. Копытов, Н. Я. Медведев

16.52. Всякая ли конечно определенная элементарно аменабельная группа почти разрешима?

П. Линнел (P. Linnell), Т. Шик (T. Schick)

16.53. Обозначим через $d(G)$ наименьшее число порождающих элементов группы G. Предположим, что $G = \langle A, B\rangle$, где A и B — две d-порожденные конечные группы взаимно простого порядка. Верно ли, что $d(G) \leqslant d+1$?

См. Архив 12.71 и (A. Lucchini, *J. Algebra*, **245** (2001), 552–561).

А. Луккини (A. Lucchini)

16.54. Скажем, что группа G действует *свободно* на группе V, если $vg \neq v$ для любых нетривиальных элементов $g \in G,\ v \in V$. Верно ли, что группа G, свободно действующая на нетривиальной абелевой группе, вложима в мультипликативную группу некоторого тела?

В. Д. Мазуров

16.55. (Известный вопрос). Существует ли такое натуральное d, что $\dim H^1(G, V) \leqslant d$ для любого точного абсолютно неприводимого модуля V для любой конечной группы G? Первоначальная гипотеза, что можно положить $d = 2$, опровергнута в (L. L. Scott, *J. Algebra*, **260** (2003), 416–425).

В. Д. Мазуров

16.56. *Спектром* $\omega(G)$ группы G называется множество порядков ее элементов. Пусть $\omega(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Будет ли G локально конечной?

В. Д. Мазуров

16.57. Пусть $\omega(G) = \omega(L_2(7)) = \{1, 2, 3, 4, 7\}$. Верно ли, что $G \simeq L_2(7)$? Это верно, если G конечна.

В. Д. Мазуров

16.58. Верно ли, что $SU_2(\mathbb{C})$ — единственная группа, имеющая ровно одно неприводимое комплексное представление размерности n для каждого $n = 1,\ 2, \ldots$?

(Если $R[n]$ — n-мерное неприводимое комплексное представление группы $SU_2(\mathbb{C})$, то $R[2]$ — естественное двумерное представление, и $R[2] \otimes R[n] = R[n-1] + R[n+1]$ при $n > 1$.)

Дж. Маккэй (J. McKay)

16.59. Для каждой ли конечной группы K существует такая конечная группа G, что $K \cong \operatorname{Out} G = \operatorname{Aut} G/\operatorname{Inn} G$? (Известно, что существует бесконечная группа G с этим свойством.)

Д. Макхэйл (D. MacHale)

16.60. Для конечной группы G обозначим через $T(G)$ сумму степеней ее неприводимых комплексных представлений: $T(G) = \sum_{i=1}^{k(G)} d_i$, где $k(G)$ — число классов сопряженности группы G. Для $\alpha \in \operatorname{Aut} G$ положим $S_\alpha = \{g \in G \mid \alpha(g) = g^{-1}\}$. Верно ли, что $T(G) \geqslant |S_\alpha|$ для всех $\alpha \in \operatorname{Aut} G$?

Д. Макхэйл (D. MacHale)

16.61. Подгруппа H группы G *вполне инвариантна*, если $\vartheta(H) \leqslant H$ для любого эндоморфизма θ группы G. Пусть G — конечная группа, обладающая вполне инвариантной подгруппой порядка d для каждого d, делящего $|G|$. Должна ли G быть циклической?

Д. Макхэйл (D. MacHale)

16.62. Предположим, что каждый класс сопряженности группы G инвариантен (как множество) относительно каждого автоморфизма группы G. Должно ли выполняться равенство $\operatorname{Aut} G = \operatorname{Inn} G$?

Д. Макхэйл (D. MacHale)

16.63. Существует ли нетривиальная конечная p-группа G нечетного порядка, для которой $|\operatorname{Aut} G| = |G|$?

См. также 12.77.

Д. Макхэйл (D. MacHale)

16.64. Пусть $\mathfrak{V}$ — многообразие, все конечные группы которого абелевы (существование неабелевых многообразий с этим свойством доказано А. Ю. Ольшанским). Верно ли, что отношение «быть нормальной подгруппой» транзитивно во всех группах из $\mathfrak{V}$?

О. Мацедоньска (O. Macedońska)

16.65. Существует ли конечно определенная группа, аппроксимируемая нильпотентными группами без кручения, со свободным копредставлением $G = F/R$, для которого группа $F/[F, R]$ не аппроксимируется нильпотентными группами?

Если не существует, то парасвободная гипотеза Г. Баумслага верна для конечно определенных групп: $H_2(G) = 0$ для любой конечно определенной парасвободной группы G. (Группа *парасвободна*, если она аппроксимируется нильпотентными группами и имеет те же нильпотентные фактор-группы, что и свободная группа.)

Р. Михайлов, И. Б. С. Пасси (I. B. S. Passi)

16.66. Обозначим через $D_n(G)$ n-ю размерную подгруппу группы G, а через $\zeta_n(G)$ — n-й член ее верхнего центрального ряда. Положим $f(n) = \max\{m \mid \exists$ нильпотентная группа G ступени нильпотентности n в которой $D_m(G) \neq 1\}$ и $g(n) = \max\{m \mid \exists$ нильпотентная группа G ступени нильпотентности n, для которой $D_n(G) \not\subseteq \zeta_m(G)\}$.

а) Чему равно $f(3)$?

б) (Б. И. Плоткин). Верно ли, что значение $f(n)$ конечно для всех n?

в) Каков рост функций $f(n)$ и $g(n)$: полиномиальный, экспоненциальный, или промежуточный?

Известно, что и $f(n) - n$ и $g(n)$ стремятся к бесконечности при $n \to \infty$ (N. Gupta, Yu. V. Kuz'min, *J. Pure Appl. Algebra*, **104** (1995), 191–197).

Р. Михайлов, И. Б. С. Пасси (I. B. S. Passi)

16.67. *Гипотеза:* для любого натурального k существует такое натуральное $n_0 = n_0(k)$, что при $n \geqslant n_0$ симметрическая группа степени n имеет не менее k различных обыкновенных неприводимых характеров одинаковой степени.

А. Морето (A. Moretó)

16.68. Пусть $W(x, y)$ — нетривиальное приведенное групповое слово, а G — одна из групп $PSL(2, \mathbb{R})$, $PSL(2, \mathbb{C})$ или $SO(3, \mathbb{R})$. Сюръективны ли отображения $W : G \times G \to G$?

Для $SL(2, \mathbb{R})$, $SL(2, \mathbb{C})$, $GL(2, \mathbb{C})$ и для группы S^3 кватернионов с нормой 1 существуют несюръективные слова; см. (J. Mycielski, *Amer. Math. Monthly*, **84** (1977), 723–726; **85** (1978), 263–264).

Я. Мыцельски (J. Mycielski)

16.69. Пусть W имеет тот же смысл.

а) Обязана ли область значений функции $\mathrm{Tr}(W(x, y))$ для $x, y \in GL(2, \mathbb{R})$ содержать интервал $[-2, +\infty)$?

б) Если x, y — ненулевые кватернионы, обязана ли область значений функции $\mathrm{Re}(W(x, y))$ содержать интервал $[-5/27, 1]$?

(См. комментарии в *ibid.*)

Я. Мыцельски (J. Mycielski)

16.70. Предположим, что конечно порожденная группа G свободно действует на A-дереве, где A — упорядоченная абелева группа. Верно ли, что G свободно действует на $\mathbb{Z}^n$-дереве для какого-то n?

А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников, О. Г. Харлампович

16.71. Разрешима ли элементарная теория любой гиперболической группы без кручения?

А. Г. Мясников, О. Г. Харлампович

16.72. Существует ли полиномиальный алгоритм для нахождения JSJ-разложения конечно порожденной группы, которая вполне аппроксимируется свободными?

Экспоненциальный алгоритм найден в (O. Kharlampovich, A. Miasnikov, in: *Contemp. Math. AMS* (*Algorithms, Languages, Logic*), **378** (2005), 87–212 (Math GR/0407089)).

А. Г. Мясников, О. Г. Харлампович

16.73. Пусть G — группа, порожденная конечным множеством S, и пусть $l(g)$ обозначает словарную функцию длины элемента $g \in G$ относительно S. Группа G называется *сжимающей*, если существует ее точное действие на множестве X^* конечных слов над конечным алфавитом X и константы $0 < \lambda < 1$ и $C > 0$, такие, что для любых $g \in G$ и $x \in X$ найдутся $h \in G$ и $y \in X$, удовлетворяющие $l(h) < \lambda l(g) + C$ и $g(xw) = yh(w)$ для всех $w \in X^*$.

а) Может ли сжимающая группа обладать неабелевой свободной подгруппой?

б) Существуют ли неаменабельные сжимающие группы?

В. В. Некрашевич

16.74. а) Пусть $G = \langle \alpha, \beta \rangle$ — группа, порожденная следующими двумя подстановками на $\mathbb{Z}$: $\alpha(n) = n + 1$; $\beta(0) = 0$, $\beta(2^k m) = 2^k(m + 2)$, где m нечетно и n натурально. Аменабельна ли группа G?

б) Более общо, верно ли, что все группы, порожденные автоматами полиномиального роста в смысле С. Сидки (S. Sidki, *Geom. Dedicata*, **108** (2004), 193–204), аменабельны?

В. В. Некрашевич

16.75. Может ли неабелева группа с одним определяющим соотношением быть группой всех автоморфизмов какой-то группы?

М. В. Нещадим

16.76. Назовем группу G *строго вещественной*, если каждый ее нетривиальный элемент сопряжен со своим обратным некоторой инволюцией из G. В каких группах лиева типа над полем характеристики 2 максимальные унипотентные подгруппы строго вещественны?

Я. Н. Нужин

16.77. Известно, что в любой нетеровой группе нильпотентный радикал совпадает с множеством энгелевых элементов (R. Baer, *Math. Ann.*, **133** (1957), 256–270; Б. И. Плоткин, *Изв. ВУЗов, Матем.*, **1958**, No. 1(2), 130–135). Было бы хорошо найти аналогичную характеризацию разрешимого радикала конечной группы. Точнее, пусть $u = u(x, y)$ — последовательность слов, удовлетворяющая 15.75. Назовем элемент $g \in G$ u-энгелевым, если существует такое $n = n(g)$, что $u_n(x, g) = 1$ для любого $x \in G$. Существует ли такая последовательность $u = u(x, y)$, что разрешимый радикал любой конечной группы совпадает с множеством u-энгелевых элементов?

Б. И. Плоткин

16.78. Существуют ли линейные неабелевы простые группы без инволюций?

Б. Пуаза (B. Poizat)

16.79. Верно ли, что в любой конечно порожденной AT-группе над последовательностью циклических групп, порядки которых ограничены, все силовские подгруппы локально конечны? Определение *AT-группы* см. в (А. В. Рожков, *Матем. заметки*, **40** (1986), 572–589).

А. В. Рожков

16.80. Пусть группа G получается из свободного произведения групп без кручения $A_1, \dots, A_n$ наложением m дополнительных соотношений, где $m < n$. Верно ли, что в G вкладывается свободное произведение некоторых $n - m$ групп A_i?

Н. С. Романовский

16.81. Пусть G — группа и $\varnothing \neq X \subseteq G$. Подгруппу A назовем *X-перестановочной в G*, если для любой подгруппы $B \leqslant G$ найдется такой элемент $x \in X$, что $AB^x = B^x A$. Известно, что если G — конечная группа, H — 1-перестановочная подгруппа в G и $H_G = 1$, то $H \subseteq \zeta_\infty(G)$. Здесь H_G — наибольшая нормальная подгруппа из G, содержащаяся в H.

а) Пусть G — конечная группа, H — $F(G)$-перестановочная подгруппа в G и $H_G = 1$. Верно ли, что тогда H содержится в некоторой нормальной сверхразрешимой подгруппе группы G или хотя бы подгруппа H сверхразрешима?

б) Пусть конечная группа G обладает нетривиальной подгруппой H, которая M-перестановочна в M для любой подгруппы M, содержащей H. Верно ли, что тогда G не проста?

А. Н. Скиба

16.82. Пусть $\mathscr{X}$ — непустой класс конечных группа, замкнутый относительно гомоморфных образов, подгрупп и прямых произведений. Каждой группе $G \in \mathscr{X}$ сопоставим некоторое множество $\tau(G)$ подгрупп из G. Назовем τ *подгрупповым функтором на $\mathscr{X}$*, если:

1) $G \in \tau(G)$ для всех $G \in \mathscr{X}$, и

2) для каждого эпиморфизма $\varphi : A \mapsto B$, где $A, B \in \mathscr{X}$, и для любых $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеем $H^\varphi \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Скажем, что подгрупповой функтор τ *замкнут*, если для каждой $G \in \mathscr{X}$ и любой $H \in \mathscr{X} \cap \tau(G)$ выполняется $\tau(H) \subseteq \tau(G)$. Множество $F(\mathscr{X})$ всех замкнутых подгрупповых функторов на $\mathscr{X}$ является решеткой (в которой $\tau_1 \leqslant \tau_2$ тогда и только тогда, когда $\tau_1(G) \subseteq \tau_2(G)$ для всех $G \in \mathscr{X}$). Известно, что $F(\mathscr{X})$ — цепь тогда и только тогда, когда $\mathscr{X}$ — класс p-групп для какого-то простого p (Теорема 1.5.17 в С. Ф. Каморников, М. В. Селькин, *Подгрупповые функторы и классы конечных групп*, Беларус. навука, Минск, 2001).

Существует ли ненильпотентный класс $\mathscr{X}$, для которого ширина решетки $F(\mathscr{X})$ не превосходит $|\pi(\mathscr{X})|$, где $\pi(\mathscr{X})$ — множество всех простых делителей порядков групп в $\mathscr{X}$? (Это вопрос 1.2.18 из (А. Н. Скиба, *Алгебра формаций*, Беларус. навука, Минск, 1997).)

А. Н. Скиба

16.83. Пусть E_n — счетно-порожденная свободная локально нильпотентная n-энгелева группа и пусть $\pi(E_n)$ — множество простых делителей порядков элементов периодической части группы E_n. Известно, что $2, 3, 5 \in \pi(E_4)$.

а) Существует ли n, для которого $7 \in \pi(E_n)$?

б) Верно ли, что $\pi(E_n) = \pi(E_{n+1})$ для всех достаточно больших n?

Ю. В. Сосновский

16.84. Может ли группа кос $\mathfrak{B}_n$ при $n \geqslant 4$ точно действовать на регулярном укорененном дереве автоморфизмами с конечным числом состояний? Такое действие известно для $\mathfrak{B}_3$.

См. определения в (Р. И. Григорчук, В. В. Некрашевич, В. И. Сущанский, в: *Динамические системы, автоматы и бесконечные группы*; *Тр. Матем. инст. РАН им. Стеклова*, **231** (2000), 134–214).

В. И. Сущанский

16.85. Предположим, что группы G, H точно действуют на регулярном укорененном дереве автоморфизмами с конечным числом состояний. Верно ли, что их свободное произведение $G * H$ может точно действовать на регулярном укорененном дереве автоморфизмами с конечным числом состояний?

В. И. Сущанский

16.86. Всякая ли группа всех автоморфизмов с конечным числом состояний регулярного укорененного дерева обладает неприводимой системой порождающих?

В. И. Сущанский

16.87. Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие групп и пусть G_r — свободная r-порожденная группа в $\mathfrak{M}$. Назовем подмножество $S \subseteq G_r$ *тестовым множеством*, если каждый эндоморфизм группы G_r, тождественный на S, является автоморфизмом. Минимум мощностей тестовых множеств назовем *тестовым рангом* группы G_r. Предположим, что тестовый ранг группы G_r равен r для каждого $r \geqslant 1$.

а) Верно ли, что $\mathfrak{M}$ — абелево многообразие?

б) Предположим, что $\mathfrak{M}$ не периодическое многообразие. Верно ли, что $\mathfrak{M}$ — многообразие всех абелевых групп?

Е. И. Тимошенко

16.88. (Дж. Бергман). Скажем, что группа G имеет *универсально конечную ширину*, если ее ширина конечна относительно любого множества порождающих. Существует ли счетно-бесконечная группа универсально конечной ширины? Все известные группы универсально конечной ширины (бесконечные группы подстановок, бесконечномерные общие линейные группы и некоторые другие группы) несчетны.

В. А. Толстых

16.89. (Дж. Бергман). Верно ли, что группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}\,F$ бесконечно-порожденной свободной группы F имеет универсально конечную ширину? Ответ положителен, если F счетно-порожденная.

В. А. Толстых

16.90. Верно ли, что группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}\,F$ бесконечно-порожденной свободной группы F является

а) нормальным замыканием одного элемента?

б) нормальным замыканием некоторой инволюции из $\mathrm{Aut}\,F$?

Для свободной группы F_n конечного ранга n М. Бридсон и К. Фогтман недавно показали, что $\mathrm{Aut}\,F_n$ является нормальным замыканием некоторой инволюции, переставляющей некоторый базис группы F_n. Известно также, что группы автоморфизмов бесконечно-порожденных свободных нильпотентных групп обладают такими инволюциями.

В. А. Толстых

16.91. Пусть F — бесконечно-порожденная свободная группа. Существует ли IA-автоморфизм группы F, нормальное замыкание которого в $\mathrm{Aut}\,F$ является группой всех IA-автоморфизмов группы F?

В. А. Толстых

16.92. Пусть F — бесконечно-порожденная свободная группа. Совпадает ли $\mathrm{Aut}\, F$ со своим коммутантом? Это верно, если F счетно-порожденная (R. Bryant, V. A. Roman'kov, *J. Algebra*, **209** (1998), 713–723).

В. А. Толстых

16.93. Пусть F_n — свободная группа конечного ранга $n \geq 2$. Является ли группа $\mathrm{Inn}\, F_n$ ее внутренних автоморфизмов формульно определимой подгруппой группы $\mathrm{Aut}\, F_n$? Известно, что множество внутренних автоморфизмов, индуцированных степенями примитивных элементов, определимо в $\mathrm{Aut}\, F_n$.

В. А. Толстых

16.94. Если $G = [G, G]$, то *коммутаторная ширина* группы G — это ее ширина относительно множества коммутаторов. Пусть V — бесконечномерное векторное пространство над телом. Известно, что коммутаторная ширина группы $GL(V)$ конечна. Верно ли, что коммутаторная ширина группы $GL(V)$ равна единице?

В. А. Толстых

16.95. *Гипотеза:* если F — поле, а A — элемент группы $GL(n, F)$, то существует такая подстановочная матрица P, что AP — циклическая матрица, т. е. минимальный многочлен матрицы AP совпадает с ее характеристическим многочленом.

Дж. Томпсон (J. G. Thompson)

16.96. Пусть G — локально конечная n-энгелева p-группа для простого p, большего n. Будет ли G Фиттинговой группой? (Примеры Н. Гупты и Ф. Левина показывают, что условие $p > n$ вообще говоря необходимо.)

Г. Траустасон (G. Traustason)

16.97. Пусть G — группа без кручения, все подгруппы которой субнормальны дефекта не больше n. Обязана ли группа G быть нильпотентной ступени не выше n? (Известно, что это верно при $n < 5$).

Г. Траустасон (G. Traustason)

16.98. Пусть G — разрешимая конечная группа, $A \leqslant \mathrm{Aut}\, G$ и порядки G и A взаимно просты. Существует ли оценка нильпотентной длины $h(G)$ группы G в терминах $h(C_G(A))$ и группы A или даже в терминах $h(C_G(A))$ и длины $l(A)$ самой длинной цепочки вложенных подгрупп группы A?

Когда A разрешима, в (A. Turull, *J. Algebra*, **86** (1984), 555–566) доказано, что $h(G) \leqslant h(C_G(A)) + 2l(A)$ и эта оценка неулучшаема при $h(C_G(A)) > 0$. Для неразрешимых A некоторые результаты имеются в (H. Kurzweil, *Manuscripta Math.*, **41** (1983), 233–305).

А. Турулл (A. Turull)

16.99. Предположим, что G — конечная разрешимая группа, $A \leqslant \mathrm{Aut}\, G$, $C_G(A) = 1$, порядки G и A взаимно просты, и пусть $l(A)$ обозначает длину самой длинной цепочки вложенных подгрупп группы A. Верно ли, что нильпотентная длина группы G не превосходит $l(A)$?

Для разрешимой A вопрос совпадает с 5.30. Доказано, что для любой конечной группы A, во-первых, существует G с $h(G) = l(A)$ и, во-вторых, существует такое конечное множество простых чисел π (зависящее от A), что если $|G|$ не делится на простые числа из π, то $h(G) \leqslant l(A)$. См. (A. Turull, *Math. Z.*, **187** (1984), 491–503).

А. Турулл (A. Turull)

16.100. Существует ли (бесконечная) 2-порожденная простая группа G со следующим свойством: $\operatorname{Aut} F_2$ транзитивна на множестве нормальных подгрупп N свободной группы F_2, для которых $F_2/N \cong G$?

Ср. 6.45. *Дж. Уайголд (J. Wiegold)*

16.101. Несчетно ли число бесконечных 2-групп, являющихся фактор-группами группы $\langle x, y \mid x^2 = y^4 = (xy)^8 = 1 \rangle$? Одна такая группа — это подгруппа конечного индекса в первой группе Григорчука, порожденная элементами b и ad; см. (Р. И. Григорчук, *Функц. анализ и прил.*, **14** (1980), No. 1, 53–54).

Дж. Уайголд (J. Wiegold)

16.102. Назовем группу G *рациональной*, если любые два элемента $x, y \in G$, удовлетворяющие $\langle x \rangle = \langle y \rangle$, сопряжены. Верно ли, что для любого d существует только конечное число конечных рациональных d-порожденных 2-групп?

А. Хайкин–Запирайн (A. Jaikin–Zapirain)

16.103. Справедлив ли ранговый аналог теоремы Лидхэм-Грина–Маккэй о p-группах максимальной ступени нильпотентности? Более точно, предположим, что P — 2-порожденная конечная p-группа, в которой факторы нижнего центрального ряда $\gamma_i(P)/\gamma_{i+1}(P)$ циклические для всех $i \geqslant 2$. Содержит ли P нормальную подгруппу N ступени нильпотентности $\leqslant 2$, для которой (секционный) ранг группы P/N ограничен функцией, зависящей только от p? *Е. И. Хухро*

16.104. Если G — конечная группа, то каждый элемент a рациональной групповой алгебры $\mathbb{Q}[G]$ имеет однозначное жорданово разложение $a = a_s + a_n$, где $a_n \in \mathbb{Q}[G]$ — нильпотентный, $a_s \in \mathbb{Q}[G]$ — полупростой элементы и $a_s a_n = a_n a_s$. Скажем, что целочисленное групповое кольцо $\mathbb{Z}[G]$ обладает свойством *аддитивного жорданового разложения* (АЖР), если $a_s,\ a_n \in \mathbb{Z}[G]$ для любого $a \in \mathbb{Z}[G]$. Если элемент $a \in \mathbb{Q}[G]$ обратим, то a_s также обратим и тогда $a = a_s a_u$, где элемент $a_u = 1 + a_s^{-1} a_n$ унипотентен и $a_s a_u = a_u a_s$. Такое разложение также однозначно. Скажем, что $\mathbb{Z}[G]$ обладает свойством *мультипликативного жорданового разложения* (МЖР), если $a_s,\ a_u \in \mathbb{Z}[G]$ для каждого обратимого $a \in \mathbb{Z}[G]$. См. обзор (A. W. Hales, I. B. S. Passi, in: *Algebra, Some Recent Advances*, Birkhäuser, Basel, 1999, 75–87).

Верно ли, что имеется лишь конечное число неизоморфных конечных 2-групп G, для которых $\mathbb{Z}[G]$ обладает МЖР, но не обладает АЖР?

А. Хэйлс (A. W. Hales), И. Пасси (I. B. S. Passi)

16.105. Верно ли, что локально ступенчатая группа, являющаяся произведением двух почти полициклических подгрупп (эквивалентно, двух почти разрешимых подгрупп с условием максимальности), почти полициклична?

Согласно (Н. С. Черников, *Укр. матем. ж.*, **32** (1980), No. 5, 707–711) локально ступенчатая группа, являющаяся произведением двух черниковских подгрупп (эквивалентно, двух почти разрешимых подгрупп с условием минимальности), черниковская. *Н. С. Черников*

16.106. Существуют ли две такие конечные группы G_1, G_2, что $\pi_e(G_1) = \pi_e(G_2)$, $h(\pi_e(G_1)) = h(\pi_e(G_2))$, и ни одна из групп G_1, G_2 не изоморфна ни подгруппе, ни фактор-группе никакой нормальной подгруппы другой группы? См. определения в 13.63.

В. Ши (W. J. Shi)

16.107. Верно ли, что почти все знакопеременные группы $\mathbb{A}_n$ однозначно определяются в классе конечных групп множеством порядков элементов, т. е. что $h(\pi_e(\mathbb{A}_n)) = 1$ для всех достаточно больших n?

В. Ши (W. J. Shi)

16.108. Обладают ли группы кос B_n при $n > 4$ неэлементарными гиперболическими фактор-группами?

В. Э. Шпильрайн

16.109. Существует ли полиномиальный алгоритм, решающий проблему равенства в группе $\operatorname{Aut} F_n$ (относительно какого-то конечного копредставления), где F_n — свободная группа ранга $n \geqslant 2$?

В. Э. Шпильрайн

16.110. (И. Капович, П. Шупп). Существует ли алгоритм, который по двум элементам u, v свободной группы F_n определяет, совпадают ли циклические длины элементов $\phi(u)$ и $\phi(v)$ для всех автоморфизмов ϕ группы F_n?

В. Э. Шпильрайн

16.111. Верно ли, что бесконечная простая периодическая группа с диэдральной силовской 2-подгруппой изоморфна группе $L_2(P)$ для некоторого локально конечного поля P нечетной характеристики?

В. П. Шунков

Архив решенных задач

В этом разделе собраны решенные задачи, которые уже были откомментированы в одном из предыдущих изданий с указанием развернутой публикации, содержащей полный ответ. Те задачи, полные ссылки на решения которых впервые появляются только в этом издании, комментируются в основной части «Коуровской тетради», среди нерешенных задач соответствующего параграфа.

1.1. Существуют ли конечно порожденные простые полные группы, отличные от единичной? Равносильный вопрос: существуют ли конечно порожденные полные группы, отличные от единичной? *Ю. А. Боган*

Да, существуют (В. С. Губа, *Изв. АН СССР, сер. мат.*, **50** (1986), 883–924).

1.2. Пусть G — группа, F — свободная группа со свободными порождающими $x_1, \ldots, x_n$, R — свободное произведение групп G и F. Уравнением (с неизвестными $x_1, \ldots, x_n$) над группой G назовем выражение вида $v(x_1, \ldots, x_n) = 1$, где левая часть есть элемент из R, не сопряженный в R ни с каким элементом из G. Группу G назовем *алгебраически замкнутой*, если любое уравнение над G имеет решение в этой группе. Существуют ли алгебраически замкнутые группы? *Л. А. Бокуть*

Да, существуют (С. Д. Бродский, *УМН*, **35**, № 4 (1980), 183 (реферат Деп. ВИНИТИ № 2214-80, М., 1980)).

1.4. (А. И. Мальцев). Существует ли кольцо без делителей нуля, не вложимое в тело, мультипликативная полугруппа ненулевых элементов которого вложима в группу? *Л. А. Бокуть*

Да, существует (Л. А. Бокуть, *ДАН СССР*, **175** (1967), 755–758; A. Bowtell, *J. Algebra*, **7** (1967), 126–139; A. Klein, *J. Algebra*, **7** (1967), 100–125).

1.9. Вложима ли (изоморфно) в прямое произведение конечных групп фактор-группа локально нормальной группы по второму члену ее верхнего центрального ряда? *Ю. М. Горчаков*

Да, вложима (Ю. М. Горчаков, *Алгебра и логика*, **15** (1976), 622–627).

1.10. Автоморфизм φ группы G назовем *расщепляющим*, если для любого элемента $g \in G$ выполняется соотношение $gg^{\varphi} \cdots g^{\varphi^{n-1}} = 1$, где n — порядок автоморфизма φ. Будет ли нильпотентной разрешимая группа, имеющая регулярный расщепляющий автоморфизм простого порядка? *Ю. М. Горчаков*

Да, будет (Е. И. Хухро, *Алгебра и логика*, **17** (1978), 611–618) и даже без условия регулярности автоморфизма (Е. И. Хухро, *Алгебра и логика*, **19** (1980), 118–129).

1.11. (Э. Артин). Проблема сопряженности для групп кос $\mathscr{B}_n$, где $n > 4$. *М. Д. Гриндлингер*

Проблема решена положительно (Г. С. Маканин, *ДАН СССР*, **182** (1968), 495–496; F. A. Garside, *Quart. J. Math.*, **20** (1969), 235–254).

1.14. (Б. Нойман). Существует ли бесконечная простая конечно определенная группа? *М. Д. Гриндлингер*

Да, существует (G. Higman, *Finitely presented infinite simple groups* (*Notes on Pure Mathematics, №*8), Dept. of Math., Inst. Adv. St. Austral. National Univ., Canberra, 1974; рус. пер.: Г. Хигман, *в сб. Разрешимые и простые бесконечные группы*, Мир, М., 1981, 87–147); в этой статье также дана ссылка на Р. Томпсона.

1.17. Выписать в явном виде порождающие элементы и определяющие соотношения какой-нибудь универсальной конечно определенной группы. *М. Д. Гриндлингер*

Выписаны (М. К. Валиев, *ДАН СССР*, **211** (1973), 265–268, **215** (1974), 10).

1.18. (А. Тарский). а) Существует ли алгоритм для определения разрешимости уравнений в свободной группе?

б) Описать структуру всех решений уравнения, если оно имеет хотя бы одно решение. *Ю. Л. Ершов*

а) Да, существует (Г. С. Маканин, *Изв. АН СССР, сер. мат.*, **46** (1982), 1199–1273; *там же*, **48** (1984), 735–749).
б) Описана (А. А. Разборов, *Изв. АН СССР, сер. мат.*, **48** (1984), 779–832).

1.21. Конечно ли множество конечных простых групп данного периода n? *М. И. Каргаполов*

Да, конечно (mod CFSG), см., например, (G. A. Jones, *J. Austral. Math. Soc.*, **17** (1974), 162–173).

1.23. Существуют ли бесконечные простые локально конечные группы конечного ранга? *М. И. Каргаполов*

Нет, не существуют (В. П. Шунков, *Алгебра и логика*, **10** (1971), 199–225).

1.24. Всякая ли бесконечная группа обладает бесконечной абелевой подгруппой? *М. И. Каргаполов*

Нет, не всякая (П. С. Новиков, С. И. Адян, *Изв. АН СССР, сер. мат.*, **32** (1968), 1176–1190).

1.25. а) Разрешима ли универсальная теория класса конечных групп?

б) Разрешима ли универсальная теория класса конечных нильпотентных групп? *М. И. Каргаполов*

а) Нет, не разрешима (А. М. Слободской, *Алгебра и логика*, **20** (1981), 207–230).
б) Нет, не разрешима (О. Г. Харлампович, *Мат. заметки*, **33** (1983), 499–516).

1.26. Следует ли из элементарной эквивалентности конечно порожденных нильпотентных групп изоморфизм этих групп? *М. И. Каргаполов*

Нет, не следует (Б. И. Зильбер, *Алгебра и логика*, **10** (1971), 309–315).

1.30. Разрешима ли универсальная теория класса разрешимых групп? *М. И. Каргаполов*

Нет, не разрешима (О. Г. Харлампович, *Изв. АН СССР, сер. мат.* **45** (1981), 852–873).

1.32. Будет ли нильпотентной подгруппа Фраттини конечно порожденной группы матриц над полем? *М. И. Каргаполов*

Да, будет (В. П. Платонов, *ДАН СССР*, **171** (1966), 798–801).

1.34. Всякая ли полициклическая упорядоченная группа имеет изоморфное представление целочисленными матрицами? *М. И. Каргаполов*

Да, всякая (L. Auslander, *Ann. Math. (2)*, **86** (1967), 112–117; R. G. Swan, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **18** (1967), 573–574).

1.35. Группа называется *доупорядочиваемой*, если каждый частичный порядок этой группы продолжается до линейного порядка.

а) Будет ли доупорядочиваемой группой сплетение произвольных доупорядочиваемых групп?

б) (А. И. Мальцев). Будет ли всякая подгруппа доупорядочиваемой группы также доупорядочиваемой группой? *М. И. Каргаполов*

Не всегда, в обоих сл. (В. М. Копытов, *Алгебра и логика*, **5**, № 6 (1966), 27–31).

1.36. Если группа G факторизуема p-подгруппами, т. е. $G = AB$, где A и B — p-подгруппы, то будет ли сама G p-группой? *Ш. С. Кемхадзе*

Не всегда (Я. П. Сысак, *Произведения бесконечных групп*, Инст. мат. АН УССР, Киев, 1982).

1.38. Будет ли $\widetilde{N}$-группой всякая N^0-группа, т. е. группа, в которой каждая циклическая подгруппа является членом некоторой нормальной системы подгрупп? *Ш. С. Кемхадзе*

Нет, не будет. Любая группа G с центральной системой $\{H_i\}$ является N^0-группой, так как для любого $g \in G$ система $\{\langle g, H_i\rangle\}$, пополненная единичной подгруппой и пересечениями всех подсистем, является нормальной системой группы G, содержащей $\langle g\rangle$. Свободные группы обладают центральными системами, но не являются $\widetilde{N}$-группами. (Ю. И. Мерзляков, 1973.)

1.39. Будет ли бинарно нильпотентной группой произведение двух нормальных бинарно нильпотентных подгрупп? *Ш. С. Кемхадзе*

Нет, не всегда (А. И. Созутов, *Алгебра и логика*, **30**, № 1 (1991), 102–105).

1.41. Подгруппа линейно упорядочиваемой группы называется *относительно выпуклой*, если она является выпуклой при некотором линейном упорядочении группы. При каких условиях подгруппа упорядочиваемой группы будет относительно выпуклой? *А. И. Кокорин*

Необходимые и достаточные условия указаны в (А. И. Кокорин, В. М. Копытов, *Линейно упорядоченные группы*, Наука, М., 1972).

1.42. Будет ли центр относительно выпуклой подгруппы относительно выпуклой подгруппой? *А. И. Кокорин*

Не всегда (А. И. Кокорин, В. М. Копытов, *Линейно упорядоченные группы*, Наука, М., 1972).

1.43. Будет ли централизатор относительно выпуклой подгруппы относительно выпуклым? *А. И. Кокорин*

Не всегда (А. И. Кокорин, В. М. Копытов, *Сиб. мат. ж.*, **9** (1968), 833–839).

1.44. Будет ли относительно выпуклой подгруппой максимальная абелева нормальная подгруппа? *А. И. Кокорин*

Не всегда (Д. М. Смирнов, *Алгебра и логика*, **5**, № 6 (1966), 41–60).

1.45. Будет ли наибольшая локально нильпотентная нормальная подгруппа относительно выпуклой? *А. И. Кокорин*

Не всегда (Д. М. Смирнов, *Алгебра и логика*, **5**, № 6 (1966), 41–60).

1.47. Подгруппа H группы G называется *строго изолированной*, если из $xg_1^{-1}xg_1 \cdots g_n^{-1}xg_n \in H$ следует $g_i^{-1}xg_i \in H$, $x \in H$. Группа со строго изолированной единичной подгруппой называется *S-группой.* Существуют ли S-группы, не являющиеся упорядочиваемыми группами? *А. И. Кокорин*

Да, существуют (В. В. Блудов, *Алгебра и логика*, **13** (1974), 609–634).

1.48. Будет ли упорядочиваемой группой свободное произведение упорядочиваемых групп с объединенной подгруппой, являющейся относительно выпуклой подгруппой в каждом из сомножителей? *А. И. Кокорин*

Не всегда (М. И. Каргаполов, А. И. Кокорин, В. М. Копытов, *Алгебра и логика*, **4**, № 6 (1965), 21–27).

1.49. Автоморфизм φ линейно упорядоченной группы называется *сохраняющим порядок*, если из $x < y$ следует $x^\varphi < y^\varphi$. Можно ли так линейно упорядочить абелеву строго изолированную нормальную подгруппу S-группы, чтобы ее порядок сохранялся под действием внутренних автоморфизмов всей группы? *А. И. Кокорин*

Не всегда (В. В. Блудов, *Алгебра и логика*, **11** (1972), 619–632).

1.50. Будет ли упорядочиваемой группа сохраняющих порядок автоморфизмов линейно упорядоченной группы? *А. И. Кокорин*

Не всегда (Д. М. Смирнов, *Алгебра и логика*, **5**, № 6 (1966), 41–60).

1.52. Описать группы, линейно упорядочиваемые единственным способом (противоположные порядки не считаются различными). *А. И. Кокорин*

Описаны (В. В. Блудов, *Алгебра и логика*, **13** (1974), 609–634).

1.53. Описать все способы линейного упорядочения свободной нильпотентной группы с конечным числом порождающих. *А. И. Кокорин*

Описаны (В. Ф. Клейменов, *в сб. Алгебра, логика и приложения*, Иркутск, 1994, 22–27).

1.56. Будет ли доупорядочиваемой (см. 1.35) группа без кручения, факторгруппа по центру которой является доупорядочиваемой группой? *А. И. Кокорин*

Не всегда (М. И. Каргаполов, А. И. Кокорин, В. М. Копытов, *Алгебра и логика*, **4**, № 6 (1965), 21–27).

1.60. Можно ли вложить двуступенно разрешимую упорядочиваемую группу в полную упорядочиваемую группу? *А. И. Кокорин*

Да, можно (В. В. Блудов, Н. Я. Медведев, *Алгебра и логика*, **13** (1974), 369–373).

1.61. Можно ли упорядочиваемую группу вложить в упорядочиваемую группу

а) с полной максимальной локально нильпотентной нормальной подгруппой?

б) с полной максимальной абелевой нормальной подгруппой? *А. И. Кокорин*

Да, можно, в обоих случаях (С. А. Гурченков, *Мат. заметки*, **51**, № 2 (1992), 35–39).

1.63. Группа называется *плотной*, если она не имеет собственных изолированных подгрупп, отличных от единичной.

а) Существуют ли плотные группы без кручения, отличные от локально циклических?

б) Пусть для любой пары неединичных элементов x, y группы G без кручения имеет место соотношение $x^k = y^l$, где k, l — не равные нулю целые числа, зависящие от x и y. Будет ли G абелевой? *П. Г. Конторович*

а) Да, существуют; б) нет, не обязательно (С. И. Адян, *Изв. АН СССР, сер. мат.*, **35** (1971), 459–468).

1.64. Группа без кручения называется *отделимой*, если она представима в виде теоретико-множественной суммы двух своих собственных подполугрупп. Будет ли всякая R-группа отделимой? *П. Г. Конторович*

Нет, не будет (S. J. Pride, J. Wiegold, *Bull. London Math. Soc.*, **9** (1977), 36–37).

1.68. (А. Тарский). Пусть $\mathfrak{K}$ — класс групп, $Q\mathfrak{K}$ — класс всех гомоморфных образов групп из $\mathfrak{K}$. Будет ли $Q\mathfrak{K}$ аксиоматизируемым, если аксиоматизируем $\mathfrak{K}$? *Ю. И. Мерзляков*

Не всегда (F. Clare, *Algebra Universalis*, **5** (1975), 120–124).

1.69. (Б. И. Плоткин). Существуют ли локально нильпотентные группы без кручения, не обладающие свойством RN^*? *Ю. И. Мерзляков*

Да, существуют (Е. М. Левич, А. И. Токаренко, *Сиб. мат. ж.*, **11** (1970), 1406–1408; А. И. Токаренко, *Тр. Рижского алгебр. сем.*, Латв. гос. ун-т, Рига, **1969**, 280–281).

1.70. Пусть p — простое число, G — группа всех матриц $\begin{pmatrix} 1+p\alpha & p\beta \\ p\gamma & 1+p\delta \end{pmatrix}$, где α, β, γ, δ — рациональные числа со знаменателем, не делящимся на p. Обладает ли G свойством $\overline{RN}$? *Ю. И. Мерзляков*

Да, обладает (Г. А. Носков, *Сиб. мат. ж.*, **14** (1973), 680–683).

1.71. Пусть G — связная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем. Конечно ли число классов сопряженных максимальных разрешимых подгрупп группы G? *В. П. Платонов*

Да, это число конечно (В. П. Платонов, *Сиб. мат. ж.*, **10** (1969), 1084–1090).

1.72. Д. Херцигом показано, что связная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем разрешима, если она обладает рациональным регулярным автоморфизмом. Справедлив ли этот результат для произвольного поля? *В. П. Платонов*

Нет, не справедлив (В. П. Платонов, *ДАН СССР*, **168** (1966), 1257–1260).

1.73. Конечно ли число классов сопряженных максимальных периодических подгрупп в конечно порожденной целочисленной линейной группе? *В. П. Платонов*

Не всегда. Расширение H свободной группы на свободных образующих a, b посредством автоморфизма $\varphi : a \to a^{-1},\ \ b \to b$ представимо матрицами над $\mathbb{Z}$. Для каждого $n \in \mathbb{Z}$ элемент $c_n = \varphi b^{-n} a b^n$ имеет порядок 2 и $C_H(c_n) = \langle c_n \rangle$. Пусть штрих обозначает изоморфизм группы H на ее копию H'. Контрпримером будет подгруппа $G \leqslant H \times H'$, порожденная элементами a, φ, $a'\varphi'$, bb'. В самом деле, G содержит подгруппы $T_n = \langle c_0, c_n' \rangle,\ \ n \in \mathbb{Z}$, которые являются максимальными периодическими (даже в $H \times H'$). Если T_n и T_m сопряжены элементом $xy' \in G$ (где $x \in H$ и $y' \in H'$), то $c_0^x = c_0$ и $c_n^y = c_m$, откуда $x \in \langle c_0 \rangle$, $y \in b^{m-n} \langle c_m \rangle$. Так как $xy' \in G$, суммы показателей вхождений b в x и y (в любой записи) должны совпадать; значит $m = n$. (Ю. И. Мерзляков, 1973.)

1.75. Классифицировать бесконечные простые периодические линейные группы над полем характеристики $p > 0$. *В. П. Платонов*

Классифицированы при любом p по модулю CFSG (В. В. Беляев, *в сб. Исследования по теории групп*, Свердловск, УНЦ АН СССР, 1984, 39–50; А. В. Боровик, *Сиб. мат. ж.*, **24**, № 6 (1983), 26–35; B. Hartley, G. Shute, *Quart. J. Math. Oxford (2)*, **35** (1984), 49–71; S. Thomas, *Arch. Math.*, **41** (1983), 103–116). При $p > 2$ можно не использовать CFSG (А. В. Боровик, *Сиб. мат. ж.*, **25**, № 2 (1984), 67–83).

1.76. Существуют ли топологические простые локально нильпотентные локально бикомпактные группы? *В. П. Платонов*

Нет, не существуют (И. В. Протасов, *ДАН СССР*, **239** (1978), 1060–1062).

1.78. Пусть группа G — произведение двух полных абелевых p-групп конечного ранга. Будет ли G такой же? *Н. Ф. Сесекин*

Да, будет (Н. Ф. Сесекин, *Сиб. мат. ж.*, **9** (1968), 1427–1430).

1.80. Существуют ли простые конечные группы, силовская 2-подгруппа которых — прямое произведение групп кватернионов? *А. И. Старостин*

Нет, не существуют (G. Glauberman, *J. Algebra*, **4** (1966), 403–420).

1.81. Назовем *шириной* группы G наименьшую мощность $m = m(G)$ со следующим свойством: всякая подгруппа, порождаемая конечным множеством из G, порождается его подмножеством мощности $\leqslant m$.

а) Всякая ли группа конечной ширины удовлетворяет условию минимальности для подгрупп?

б) Всякая ли группа с условием минимальности для подгрупп имеет конечную ширину?

в) Те же вопросы при дополнительном условии локальной конечности. В частности, всякая ли локально конечная группа конечной ширины является черниковской? *Л. Н. Шеврин*

а) Нет, не всякая (С. В. Иванов, *Геометрические методы в изучении групп с заданными подгрупповыми свойствами*, канд. дисс., МГУ, М., 1988).
б) Нет, не всякая (Г. С. Дерябина, *Мат. сб.*, **124** (1984), 495–504).
в) Да, всякая (В. П. Шунков, *Алгебра и логика*, **9** (1970), 220–248; *там же*, **10** (1971), 199–225).

1.82. Две системы тождественных соотношений называются *эквивалентными*, если они определяют одно и то же многообразие групп. Построить бесконечную систему тождеств, не эквивалентную никакой конечной. *А. Л. Шмелькин*

Построена (С. И. Адян, *Изв. АН СССР, сер. мат.*, **34** (1970), 715–734).

1.83. Существует ли простая группа с неограниченными в совокупности порядками элементов, в которой выполняется нетривиальное тождественное соотношение? *А. Л. Шмелькин*

Да, существует (В. С. Атабекян, *Бесконечные простые группы, удовлетворяющие тождеству*, Деп. ВИНИТИ, № 5381-В86, М., 1986).

1.84. Верно ли, что полициклическая группа G аппроксимируется конечными p-группами тогда и только тогда, когда G имеет нильпотентную нормальную подгруппу без кручения индекса p^k? *А. Л. Шмелькин*

Нет, не верно (К. С. Сексенбаев, *Алгебра и логика*, **4**, № 3 (1965), 79–83).

1.85. Верно ли, что тождественные соотношения разрешимой группы ступени 2 обладают конечным базисом? *А. Л. Шмелькин*

Да, верно (D. E. Cohen, *J. Algebra*, **5** (1967), 267–273).

1.88. Верно ли, что если группа является матричной над полем нулевой характеристики и в ней не выполнено никакое нетривиальное тождественное соотношение, то она содержит неабелеву свободную подгруппу? *А. Л. Шмелькин*

Да, верно (J. Tits, *J. Algebra*, **20** (1972), 250–270).

1.89. Верно ли следующее утверждение? Пусть G — свободная разрешимая группа, a, b — ее элементы, порождающие в G одну и ту же нормальную подгруппу. Тогда в G найдется такой элемент x, что $b^{\pm 1} = x^{-1}ax$. *А. Л. Шмелькин*

Нет, не верно (А. Л. Шмелькин, *Алгебра и логика*, **6**, № 2 (1967), 95–109).

1.90. Подгруппу H группы G назовем 2-*бесконечно изолированной* в G, если из того, что централизатор $C_G(h)$ некоторого неединичного элемента h из H в G содержит хотя бы одну инволюцию и пересекается с H по бесконечной подгруппе, вытекает, что $C_G(h) \leqslant H$. Пусть бесконечная простая локально конечная группа G с черниковскими силовскими 2-подгруппами обладает собственной 2-бесконечно изолированной подгруппой H, причем некоторая силовская 2-подгруппа группы G содержится в H. Будет ли группа G изоморфна группе типа $PSL_2(k)$ над полем k нечетной характеристики? *В. П. Шунков*

Да, будет (В. П. Шунков, *Алгебра и логика*, **11** (1972), 470–493).

2.1. Описать конечные группы, силовская p-подгруппа которых максимальна. *В. А. Белоногов, А. И. Старостин*

Описание можно извлечь из работ (B. Baumann, *J. Algebra*, **38** (1976), 119–135) и (Л. А. Шеметков, *Изв. АН СССР, сер. мат.*, **32** (1968), 533–559).

2.2. *Квазигруппой* называется группоид $Q(\cdot)$, в котором уравнения $ax = b$ и $ya = b$ однозначно разрешимы при любых $a, b \in Q$. Квазигруппы $Q(\cdot)$ и $Q(\circ)$ *изотопны*, если существуют такие взаимнооднозначные отображения α, β, γ множества Q на себя, что $x \circ y = \gamma(\alpha x \cdot \beta y)$ для любых $x, y \in Q$. Известно, что все квазигруппы, изотопные группам, образуют многообразие $\mathfrak{G}$. Пусть $\mathfrak{V}$ — некоторое многообразие квазигрупп. Описать класс групп, изотопных квазигруппам из $\mathfrak{G} \cap \mathfrak{V}$. При каких тождествах, характеризующих $\mathfrak{V}$, всякая группа будет изотопна некоторой квазигруппе из $\mathfrak{G} \cap \mathfrak{V}$? При каких условиях на $\mathfrak{V}$ всякая группа, изотопная группе из $\mathfrak{G} \cap \mathfrak{V}$, будет одноэлементной? *В. Д. Белоусов, А. А. Гварамия*

Класс описан, тождества и условия найдены (А. А. Гварамия, *Аксиоматизируемые классы квазигрупп, инвариантные относительно изотопии*, Деп. ВИНИТИ № 6704-В84, М., 1984).

2.3. *Квазинильпотентной* (Г-*квазинильпотентной*) называется конечная группа, у которой любые две (максимальные) подгруппы A, B удовлетворяют одному из условий: 1) $A \leqslant B$, 2) $B \leqslant A$, 3) $N_A(A \cap B) \neq A \cap B \neq N_B(A \cap B)$. Совпадают ли классы квазинильпотентных и Г-квазинильпотентных групп?

Я. Г. Беркович, М. И. Кравчук

Нет, не совпадают. Группа $G = \big\langle x, y, z, t \mid x^4 = y^4 = z^2 = t^3 = 1,\ [x, y] = z,\ [x, z] = [y, z] = 1,\ x^t = y,\ y^t = x^{-1}y^{-1} \big\rangle$ Г-квазинильпотентна, но не квазинильпотентна. Действительно, $G/\Phi(G) \cong \mathbb{A}_4$, поэтому пересечение любых двух максимальных подгрупп A и B из G равно $\Phi(G)$, откуда $N_A(A \cap B) \neq A \cap B \neq N_B(A \cap B)$ и потому группа G Г-квазинильпотентна. С другой стороны, если $A_1 = \langle zx^2, zy^2, t \rangle$ и $B_1 = \langle z, t \rangle$, то $N_{A_1}(A_1 \cap B_1) = A_1 \cap B_1 = \langle t \rangle$; значит, G не квазинильпотентна. (В. Д. Мазуров, 1973.)

2.4. (С. Чейз). Пусть абелева группа A есть объединение $A = \bigcup_{\alpha \in \Omega} A_\alpha$, где Ω — первый несчетный ординал, A_α — чистые подгруппы из A со следующими свойствами: 1) A_α — свободная абелева группа счетного ранга, 2) если $\beta < \alpha$, то A_β — прямое слагаемое группы A_α. Будет ли A свободной абелевой группой?

Ю. А. Боган

Не всегда (P. A. Griffith, *Pacific J. Math.*, **29** (1969), 279–284).

2.7. Установить мощность множества всех поливербальных операций, действующих на классе всех групп. *О. Н. Головин*

Эта мощность континуальна (А. Ю. Ольшанский, *Изв. АН СССР, сер. мат.*, **34** (1970), 376–384).

2.8. (А. И. Мальцев). Существуют ли правильные ассоциативные операции, обладающие свойством наследственности по отношению к переходу от сомножителей к их подгруппам? *О. Н. Головин*

Да, существуют (С. В. Иванов, *Тр. Моск. мат. об-ва*, **54** (1992), 243–277).

2.13. (Известный вопрос). Пусть в периодической группе G каждый π-элемент перестановочен с каждым π'-элементом. Распадается ли G в прямое произведение максимальной π-подгруппы и максимальной π'-подгруппы? *С. Г. Иванов*

Не всегда. С. И. Адян (*Изв. АН СССР, сер. мат.*, **35** (1971), 459–468) построил группу $A = A(m, n)$, не имеющую кручения и содержащую центральный элемент d такой, что $A(m, n)/\langle d \rangle \cong B(m, n)$ — свободная m-порожденная Бернсайдова группа нечетного периода $n \geqslant 4381$. Для простого числа p, не делящего n, контрпример с $\pi = \{p\}$ может быть найден в виде $G = A/\langle d^{p^k} \rangle$ для подходящего натурального k. В самом деле, $\langle d \rangle / \langle d^{p^k} \rangle$ — максимальная p-подгруппа группы G.

Пусть $A/\langle d^{p^k}\rangle = \langle d\rangle/\langle d^{p^k}\rangle \times H_k/\langle d^{p^k}\rangle$ для каждого k. Тогда $\langle d\rangle \cap H_k = \langle d^{p^k}\rangle$ для всех k и потому $\langle d\rangle \cap H = 1$, где $H = \bigcap_k H_k$. Так как H — без кручения и вкладывается в $A/\langle d\rangle \cong B(m,n)$, имеем $H = 1$. Значит, группа A вкладывается в декартово произведение абелевых групп A/H_k, противоречие. (Ю. И. Мерзляков, 1973.)

2.15. Существуют ли группы без кручения, у которых факторгруппа по некоторому члену возрастающего центрального ряда является периодической с ограниченными в совокупности порядками элементов? *Г. А. Карасев*

Да, существуют (С. И. Адян, *Тр. МИАН им. Стеклова*, **112** (1971), 64–72).

2.16. Группа G называется *финитно аппроксимируемой относительно сопряженности*, если любые два ее элемента сопряжены в G тогда и только тогда, когда в каждом конечном гомоморфном образе группы G сопряжены их образы. Будет ли G финитно аппроксимируемой относительно сопряженности в следующих случаях:

а) G — полициклическая группа,
б) G — свободная разрешимая группа,
в) G — группа (всех) целочисленных матриц,
г) G — конечно порожденная группа матриц,
д) G — конечно порожденная двуступенно разрешимая группа?

М. И. Каргаполов

а) Да, будет (В. Н. Ремесленников, *Алгебра и логика*, **8** (1969), 712–725; E. Formanek, *J. Algebra*, **42** (1976), 1–10).
б) Да, будет (В. Н. Ремесленников, В. Г. Соколов, *Алгебра и логика*, **9** (1970), 566–578).
в), г) Не всегда (В. П. Платонов, Г. В. Матвеев, *ДАН БССР*, **14** (1970), 777–779; В. Н. Ремесленников, В. Г. Соколов, *Алгебра и логика*, **9** (1970), 566–578; В. Н. Ремесленников, *Сиб. мат. ж.*, **12** (1971), 1085–1099).
д) Не всегда. Пусть p — простое число и пусть A_1, A_2 — две копии аддитивной группы $\{m/p^k \mid m,k \in \mathbb{Z}\}$. Пусть b_1, b_2 — автоморфизмы прямой суммы $A = A_1 \oplus A_2$ заданные так: $a^{b_2} = pa$ для любого $a \in A$, и $a_2^{b_1} = a_1 + a_2$ и $a_1^{b_1} = a_1$ для некоторых фиксированных элементов $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$. Пусть G — полупрямое произведение группы A и прямого произведения $\langle b_1\rangle \times \langle b_2\rangle$ (двух бесконечных циклических). Элементы a_2 и $a_2 + a_1/p$ не сопряжены в G, но их образы сопряжены в любой конечной фактор-группе G. (М. И. Каргаполов, Е. И. Тимошенко, *Тезисы 4-го Всесоюз. симп. по теории групп*, Новосибирск, 1973, 86–88.)

2.17. Верно ли, что сплетение $A \wr B$ двух групп, финитно аппроксимируемых относительно сопряженности, тогда и только тогда само финитно аппроксимируемо относительно сопряженности, когда либо A абелева, либо B конечна?

М. И. Каргаполов

Нет, не верно (В. Н. Ремесленников, *Сиб. мат. ж.*, **12** (1971), 1085–1099).

2.18. Вычислить ранги факторов нижнего центрального ряда свободной разрешимой группы. *М. И. Каргаполов*

Вычислены. (В. Г. Соколов, *Алгебра и логика*, **8** (1969), 367–372; Ю. М. Горчаков, Г. П. Егорычев, *ДАН СССР*, **204** (1972), 12–14).

2.19. Являются ли финитно отделимыми конечно порожденные подгруппы свободной разрешимой группы? *М. И. Каргаполов*

Нет, не являются (С. А. Агалаков, *Алгебра и логика*, **22** (1983), 363–371).

2.20. Верно ли, что сплетения $A \wr B$ и $A_1 \wr B_1$ элементарно эквивалентны между собой тогда и только тогда, когда группы A, B элементарно эквивалентны соответственно группам A_1, B_1? *М. И. Каргаполов*

Нет, не верно; но если заменить слово «элементарно» на «универсально», то верно (Е. И. Тимошенко, *Алгебра и логика*, **7**, № 4 (1968), 114–119).

2.21. Совпадают ли классы бэровых и фиттинговых групп? *Ш. С. Кемхадзе*

Нет, не совпадают (R. S. Dark, *Math. Z.*, **105** (1968), 294–298).

2.22. б) Абстрактное теоретико-групповое свойство Σ называется *радикальным* (*в нашем смысле*), если в любой группе G подгруппа $\Sigma(G)$, порожденная всеми нормальными Σ-подгруппами, сама является Σ-подгруппой. Является ли свойство N^0 (см. 1.38) радикальным? *Ш. С. Кемхадзе*

Нет, не является. Группа $SL_n(\mathbb{Z})$ для достаточно большого $n \geqslant 3$ содержит неабелеву простую конечную группу и потому не является N^0-группой. Но, как показано в (М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, *в сб. Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1966*, ВИНИТИ, М., 1968, 57–90), она является произведением конгруэнц-подгрупп $\operatorname{mod} 2$ и $\operatorname{mod} 3$, которые обладают центральными системами и потому являются N^0-группами (см. 1.38). (Ю. И. Мерзляков, 1973.)

2.23. а) Подгруппу H группы G назовем *квазисубинвариантной*, если через H проходит нормальная система группы G. Пусть $\mathfrak{K}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов. Группу G назовем $R^0(\mathfrak{K})$-*группой*, если всякий ее неединичный гомоморфный образ обладает неединичной квазисубинвариантной $\mathfrak{K}$-подгруппой. Совпадает ли класс $R^0(\mathfrak{K})$-групп с классом $\overline{RN}$-групп, если $\mathfrak{K}$ — класс всех абелевых групп? *Ш. С. Кемхадзе*

Нет, не совпадает (J. S. Wilson, *Arch. Math.*, **25** (1974), 574–577).

2.25. б) Существуют ли группы, линейно упорядочиваемые счетным числом способов? *А. И. Кокорин*

Да, существуют (R. N. Buttsworth, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **4** (1971), 97–104).

2.29. Совпадает ли класс конечных групп, любая собственная абелева подгруппа которых содержится в собственной нормальной подгруппе, с классом конечных групп, любая собственная абелева подгруппа которых содержится в собственной нормальной подгруппе простого индекса? *П. Г. Конторович, В. Т. Нагребецкий*

Нет, не совпадает. Пусть B — конечная группа, $B = [B, B] \neq 1$. Пусть r — ранг группы B. Положим $A = \bigoplus\limits_{p||B|} (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r+1}$ и $G = A \wr B$. Определим гомоморфизм $\varphi :$ $G \to A$ полагая $(bf)^{\varphi} = \sum_{x \in B} f(x)$, где $b \in B$ и $f \in F = \mathrm{Fun}(B, A)$. Предположим, что $f^b = f$ для $b \in B$ и $f \in F$. Ясно, что $f^{\varphi} \in nA$, где $n = |b|$. В частности, $C_F(b)^{\varphi} \leqslant pA \leqslant O_{p'}(A)$, если $p \mid n$. Каждая собственная абелева подгруппа H из G содержится в собственной нормальной подгруппе. Действительно, можно считать, что $H \nleqslant F$. Зафиксируем элемент $bf \in H$, где $f \in F$, $b \in B$, $b \neq 1$. Пусть p — простое число, делящее $|b|$. Для любого $h \in H \cap F$ имеем $bfh = hbf = bh^b f = bfh^b$, откуда $h = h^b$. Значит, $(H \cap F)^{\varphi} \leqslant C_F(b)^{\varphi} \leqslant O_{p'}(A)$. Если T — полный прообраз $O_{p'}(A)$ в G, то $G/T \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r+1}$ и потому $H/H \cap T$ — элементарная p-группа. Ее ранг $\leqslant r$, так как $H/H \cap T$ вкладывается в B и $H \cap F \leqslant H \cap T$. Итак, HT — собственная нормальная подгруппа из G, содержащая H. С другой стороны, F — собственная абелева подгруппа, не содержащаяся ни в какой собственной нормальной подгруппе простого индекса, так как $G/F \cong B = [B, B]$. (G. Bergman, I. Isaacs, *письмо от 17.6.1974*.)

2.30. Существуют ли конечные группы, в которых некоторая силовская p-подгруппа покрывается отличными от нее силовскими p-подгруппами?

П. Г. Конторович, А. И. Старостин

Да, существуют при любом простом p (В. Д. Мазуров, *Мат. зап. Уральск. гос. ун-та*, **7**, № 3 (1969/70), 129–132).

2.31. Всякая ли группа, допускающая упорядочение с конечным числом выпуклых подгрупп, представима матрицами над полем? *В. М. Копытов*

Нет, не всякая. Группа $G = \langle a_n,\, b_n\ (n \in \mathbb{Z}),\ c,\ d \mid [a_n, b_n] = c,\ \ a_n^d = a_{n+1},\ b_n^d = b_{n+1},\ [a_n, a_m] = [b_n, b_m] = [a_n, c] = [b_n, c] = 1\ \ (n, m \in \mathbb{Z})\rangle$ разрешима и упорядочиваема с конечным числом выпуклых подгрупп; но она не аппроксимируема финитно, а потому не представима матрицами над полем. (В. А. Чуркин, 1969.)

2.33. Будет ли прямое слагаемое прямой суммы конечно порожденных модулей прямой суммой конечно порожденных модулей? Модули рассматриваются над нетеровым кольцом. *В. И. Кузьминов*

Не всегда (P. A. Linnell, *Bull. London Math. Soc.*, **14** (1982), 124–126).

2.35. Обратный спектр абелевых групп ξ назовем *ацикличным*, если $\varprojlim^{(p)}\xi = 0$ при $p > 0$, где $\varprojlim^{(p)}$ обозначает правый производный функтор функтора проективного предела. Пусть ξ — ацикличный спектр конечно порожденных групп. Будет ли ацикличным спектр $\bigoplus \xi_\alpha$, где каждый спектр ξ_α совпадает со спектром ξ? *В. И. Кузьминов*

Ответ зависит от аксиоматики теории множеств (А. А. Хусаинов, *Сиб. мат. ж.*, **37**, № 2 (1996), 464–474).

2.36. (де Гроот). Будет ли свободной абелева группа всех непрерывных целочисленных функций на бикомпакте? *В. И. Кузьминов*

Да, будет. Согласно (G. Nöbeling, *Invent. Math.*, **6** (1968) 41–55) аддитивная группа всех ограниченных целочисленно-значных функций на любом множестве свободна. Поэтому группа всех непрерывных целочисленно-значных функций на чеховском бикомпактном расширении любого дискретного пространства свободна. Для любого бикомпактного пространства X существует непрерывное отображение чеховского бикомпактного расширения Y дискретного пространства на X. Оно индуцирует вложение группы непрерывных целочисленно-значных функций на X в свободную группу непрерывных целочисленно-значных функций на Y. (В. И. Кузьминов, 1969.)

2.37. Описать простые конечные группы, все силовские p-подгруппы которых для нечетных простых чисел p циклические. *В. Д. Мазуров*

Описаны (M. Aschbacher, *J. Algebra*, **54** (1978), 50–152).

2.38. (Старый вопрос). Класс колец, вложимых в ассоциативные кольца с делением, универсально аксиоматизируем. Является ли он конечно аксиоматизируемым? *А. И. Мальцев*

Нет, не является (P. M. Cohn, *Bull. London Math. Soc.*, **6** (1974), 147–148).

2.39. Существуют ли не конечно аксиоматизируемые многообразия:

а) (Х. Нойман) групп?

б) ассоциативных колец (проблема Шпехта)?

в) колец Ли? *А. И. Мальцев*

а) Да, существуют (А. Ю. Ольшанский, *Изв. АН СССР, сер. мат.*, **34** (1970), 376–384; С. И. Адян, *Изв. АН СССР, сер. мат.*, **34** (1970), 715–734).

б) Да, существуют (А. Я. Белов, *Фундам. и прикл. мат.*, **5**, № 1 (1999), 47–66; *Мат. сб.*, **191**, № 3 (2000), 13–24). В то же время любое многообразие ассоциативных алгебр над полем характеристики 0 конечно базируемо (А. Р. Кемер, *Алгебра и логика*, **26**, № 5 (1987), 597–641).

в) Да, существуют (M. R. Vaughan-Lee, *Quart. J. Math.*, **21** (1970), 297–308).

2.40. *I-Теорией* (*Q-теорией*) класса $\mathfrak{K}$ универсальных алгебр называется совокупность всех тождеств (квазитождеств), истинных на всех алгебрах класса $\mathfrak{K}$. Существует ли конечно аксиоматизируемое многообразие

а) групп,

б) полугрупп,

I-теория (Q-теория) которого нерекурсивна? *А. И. Мальцев*

а) Да, существует (Ю. Г. Клейман, *Тр. Моск. мат. об-ва*, **44** (1982), 62–108).

б) Да, существует (В. М. Мурский, *Мат. заметки*, **3** (1968), 663–670).

2.41. Будет ли конечно аксиоматизируемым многообразие, порожденное

а) конечным ассоциативным кольцом?

б) конечным кольцом Ли?

в) конечной квазигруппой?

г) Какова минимальная мощность n полугруппы, порождающей не конечно аксиоматизируемое многообразие? *А. И. Мальцев*

а) Да, будет (И. В. Львов, *Алгебра и логика*, **12** (1973), 269–297; R. L. Kruse, *J. Algebra*, **26** (1973), 298–318).

б) Да, будет (Ю. А. Бахтурин, А. И. Ольшанский, *Мат. сб.*, **96** (1975), 543–559).

в) Нет, не всегда (M. R. Vaughan-Lee, *Algebra Universalis*, **9** (1979), 269–280).

г) Доказано, что $n = 6$ (P. Perkins, *J. Algebra*, **11** (1969), 298–314; A. N. Trakhtman, *Semigroup Forum*, **27** (1983), 387–389).

2.43. Группу G назовем FN-группой, если $\gamma_i G/\gamma_{i+1}G$ — свободные абелевы группы и $\bigcap_{i=1}^{\infty} \gamma_i G = 1$, где $\gamma_{i+1}G = [\gamma_i G, G]$. Многообразие групп $\mathfrak{M}$ назовем Σ-*многообразием* (Σ — абстрактное свойство), если $\mathfrak{M}$-свободные группы обладают свойством Σ.

а) Какие свойства Σ сохраняются при перемножении и пересечении многообразий? Сохраняется ли свойство FN?

б) Являются ли FN-многообразиями все многообразия, полученные перемножением и пересечением из нильпотентных многообразий $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2, \ldots$ (где $\mathfrak{N}_1$ — многообразие абелевых групп)? *А. И. Мальцев*

а) Свойство FN сохраняется при перемножении многообразий (А. Л. Шмелькин, *Тр. Моск. мат. об-ва*, **29** (1973), 247–260). Свойство FN не сохраняется при пересечении многообразий. Следующий пример предложил Л. Ковач. Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — многообразия всех нильпотентных групп ступени 4, удовлетворяющих тождествам $[x, y, y, x] \equiv 1$ и $[[x, y], [z, t]] \equiv 1$ соответственно. Тогда $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — FN-многообразия, так как оба они ступени нильпотентности 4 и содержат все нильпотентные группы ступени $\leqslant 3$, и относительно свободные группы в $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ не имеют кручения (что хорошо известно для $\mathfrak{V}$, а для $\mathfrak{U}$ вытекает из (P. Fitzpatrick,

L. G. Kovacs, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, **35**, №1 (1983), 59–73)). Но $\mathfrak{U}\cap\mathfrak{V}$ не является FN-многообразием, так как относительно свободная группа в $\mathfrak{U}\cap\mathfrak{V}$ ранга 3 обладает кручением: любая группа без кручения в $\mathfrak{U}\cap\mathfrak{V}$ нильпотентна ступени $\leqslant 3$ (следует из той же работы Фитцпатрика и Ковача), и в то же время есть 3-порожденная группа, являющаяся расширением группы периода 2 с помощью группы периода 2, имеющая ступень нильпотентности ровно 4 и лежащая в $\mathfrak{U}\cap\mathfrak{V}$. (А. Н. Красильников, *письмо от 17.7.1998.*)

б) Да, будут (Ю. М. Горчаков, *Алгебра и логика*, **6**, № 3 (1967), 25–30).

2.44. Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — подмногообразия многообразия групп $\mathfrak{M}$; $\mathfrak{M}$-произведением $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ называется $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\cap\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ — обычное произведение. Существуют ли неабелевы $\mathfrak{M}$ с коммутативным $\mathfrak{M}$-умножением и бесконечной решеткой подмногообразий? *А. И. Мальцев*

Да, существуют; например, $\mathfrak{M}=\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_p$, где $\mathfrak{A}_p$ — многообразие всех абелевых групп простого периода p (Ю. М. Горчаков, *Сообщение на Красноярском краевом семинаре по алгебре, 21.6.1967*).

2.45. (Ф. Холл). Доказать или опровергнуть следующие гипотезы.

а) Если слово v конечнозначно на группе G, то вербальная подгруппа vG конечна.

б) Если маргинальная подгруппа v^*G имеет в G конечный индекс m, то порядок vG конечен и делит некоторую степень числа m.

в) Если G удовлетворяет условию максимальности и vG конечна, то индекс $|G:v^*G|$ конечен. *Ю. И. Мерзляков*

Опровергнуты, соответственно в (С. В. Иванов, *Изв. ВУЗов, мат.*, **1989**, № 6, 60–70; Ю. Г. Клейман, *Тр. Моск. мат. об-ва*, **44** (1982), 62–108; И. С. Ашманов, А. Ю. Ольшанский, *Изв. ВУЗов*, **1985**, № 11, 48-60).

2.46. Найти условия, при которых конечно порожденная матричная группа почти вся аппроксимируется конечными p-группами по некоторому p. *Ю. И. Мерзляков*

Конечно порожденная матричная группа над полем нулевой характеристики почти вся аппроксимируется конечными p-группами для почти всех простых чисел p (М. И. Каргаполов, *Алгебра и логика*, **6**, № 5 (1967), 17–20; Ю. И. Мерзляков, *ДАН СССР*, **177**, № 5 (1967), 1008-1011; В. П. Платонов, *ДАН БССР*, **12**, № 6 (1968), 492–494). Конечно порожденная матричная группа над полем характеристики $p>0$ почти вся аппроксимируется конечными p-группами (В. П. Платонов, *ДАН БССР*, **12**, № 6 (1968), 492–494; А. И. Токаренко, *Тр. Рижского алгебр. сем.*, Латв. гос. ун-т, Рига, **1969**, 280–281). См. также некоторые обобщения в (В. Н. Ремесленников, *Алгебра и логика*, **7**, № 4 (1968), 106–113; B. A. F. Wehrfritz, *Proc. London Math. Soc.*, **20**, №1 (1970), 101–122).

2.47. Каковы все абелевы группы, решетка всех эндоморфно допустимых подгрупп которых является цепью? *А. П. Мишина*

Охарактеризованы (M.-P. Brameret, *Séminaire P. Dubreil, M.-L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur, et C. Pisot*, **16** (1962/63), №13, Paris, 1967).

2.49. (А. Сельберг). Пусть G — связная полупростая линейная группа Ли, соответствующее симметрическое пространство которой имеет ранг больше 1, Γ — такая неприводимая дискретная подгруппа из G, что G/Γ имеет конечный объем. Будет ли Γ арифметической подгруппой? *В. П. Платонов*

Да, будет (Г. А. Маргулис, *Функциональный анализ и прил.*, **8**, № 3 (1974), 77–78).

2.50. (А. Сельберг). Пусть Γ — такая неприводимая дискретная подгруппа связной группы Ли G, что фактор-пространство G/Γ некомпактно, но имеет конечный объем в мере Хаара. Доказать, что Γ содержит нетривиальный унипотентный элемент. *В. П. Платонов*

Доказано (Д. А. Каждан, Г. А. Маргулис, *Мат. сб.*, **75** (1968), 163–168).

2.51. (А. Борель, Р. Стейнберг). Конечно ли множество классов сопряженных унипотентных элементов полупростой алгебраической группы? *В. П. Платонов*

Да, оно конечно (G. Lusztig, *Invent. Math.*, **34** (1976), 201–213).

2.52. (Ф. Брюа, Н. Ивахори, М. Мацумото). Пусть G — полупростая алгебраическая группа над локально компактным вполне несвязным полем. Будут ли максимальные компактные подгруппы группы G разбиваться в конечное число классов сопряженных? Оценить это число. *В. П. Платонов*

Да, будут (F. Bruhat, J. Tits, *Publ. Math. IHES*, **41** (1972), 5–251). Там же формула для этого числа.

2.55. б) Существуют ли в $SL_n(\mathbb{Z})$, $n \geqslant 2$, максимальные подгруппы бесконечного индекса? *В. П. Платонов*

Да, существуют (Г. А. Маргулис, Г. А. Сойфер, *ДАН СССР*, **234** (1977), 1261–1264).

2.58. Пусть G — векторное пространство, Γ — его группа автоморфизмов. Группа Γ называется *локально финитно стабильной*, если для каждой ее конечно порожденной подгруппы Δ в G имеется конечный стабильный относительно Δ ряд. Если характеристика поля равна нулю и Γ локально финитно стабильна, то Γ есть локально нильпотентная группа без кручения. Всякая ли локально нильпотентная группа без кручения может быть так реализована? *Б. И. Плоткин*

Нет, не всякая (Л. А. Симонян, *Сиб. мат. ж.*, **12** (1971), 837–843).

2.59. Пусть Γ — произвольная нильпотентная группа, имеющая студень нильпотентности $n-1$. Всегда ли она допускает точное представление в качестве группы автоморфизмов некоторой абелевой группы со стабильным относительно Γ рядом длины n? *Б. И. Плоткин*

Нет, не всегда (E. Rips, *Israel J. Math.*, **12** (1972), 342–346).

2.61. Пусть G — векторное пространство над полем, Γ — его нетерова группа автоморфизмов, причем каждый элемент из Γ унипотентен. Верно ли, что такая Γ — стабильная группа автоморфизмов? *Б. И. Плоткин*

Нет, не верно, если поле имеет ненулевую характеристику (А. Ю. Ольшанский, *Геометрия определяющих соотношений в группах*, Наука, М., 1989). Это верно для поля нулевой характеристики, если показатели унипотентности ограничены в совокупности (Б. И. Плоткин, С. М. Вовси, *Многообразия представлений групп*, Зинатне, Рига, 1983).

2.62. Если G — конечномерное векторное пространство и Γ — его группа автоморфизмов, каждый элемент которой стабилен, то и вся Γ стабильна (Э. Колчин). Верна ли теорема Колчина для пространств над телами? *Б. И. Плоткин*

Да, верна, если тело имеет характеристику 0 или характеристику, достаточно большую по сравнению с размерностью пространства (H. Y. Mochizuki, *Canad. Math. Bull.*, **21** (1978), 249–250).

2.64. Образует ли множество ниль-элементов конечномерной линейной группы ее локально нильпотентный радикал? *Б. И. Плоткин*

Не всегда. Ненильпотентная 3-порожденная ниль-группа Е. С. Голода, построенная по алгебре над $\mathbb{Q}$, аппроксимируется нильпотентными группами без кручения; следовательно, она упорядочиваема, и значит, по теореме Мальцева вкладывается в GL_n над некоторым телом (В. А. Романьков, 1978).

2.65. Обладает ли присоединенная группа радикального (в смысле Джекобсона) кольца центральной системой? *Б. И. Плоткин*

Не всегда (О. М. Нерославский, *Весци АН БССР, сер. физ.-мат. навук*, **1973**, № 2, 5–10).

2.66. Определяется ли R-группа решеткой своих подгрупп? Существует ли групповой изоморфизм такой группы, порождающий заданный ее решеточный изоморфизм? *Л. Е. Садовский*

Не всегда, в обоих случаях (A. Yu. Ol'shanskiĭ, *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, **32** (1979), 1165–1166).

2.69. Пусть группа G есть произведение своих подгрупп A и B, каждая из которых нильпотентна с условием минимальности. Доказать или опровергнуть, что: а) G разрешима, б) полные части групп A и B поэлементно перестановочны. *Н. Ф. Сесекин*

Оба утверждения доказаны (Н. С. Черников, *ДАН СССР*, **252** (1980), 57–60).

2.70. а) Пусть группа G есть произведение своих подгрупп A и B, каждая из которых локально циклическая без кручения. Доказать, что либо A, либо B обладает неединичной подгруппой, нормальной в G.

б) Описать группы, факторизуемые таким образом. *Н. Ф. Сесекин*

а) Доказано (Д. И. Зайцев, *Алгебра и логика*, **19** (1980), 150–172).
б) Описаны (Я. П. Сысак, *Алгебра и логика*, **25** (1986), 672–686).

2.71. Существует ли конечно порожденная правоупорядочиваемая группа, совпадающая со своим коммутантом и, вследствие этого, не обладающая свойством RN? *Д. М. Смирнов*

Да, существует (G. M. Bergman, *Pacif. J. Math.*, **147**, № 2 (1991), 243-248).

2.73. (Известный вопрос). Существуют ли бесконечные группы, все собственные подгруппы которых имеют простые порядки? *А. И. Старостин*

Да, существуют (А. Ю. Ольшанский, *Алгебра и логика*, **21** (1982), 553–618).

2.75. Пусть периодическая группа G содержит бесконечное множество конечных подгрупп, общее пересечение которых содержит неединичные элементы. Содержится ли тогда в G неединичный элемент, централизатор которого бесконечен? *С. П. Струнков*

Нет, не всегда (К. И. Лоссов, *О вложении амальгамы в периодическую группу*, Деп. ВИНИТИ, № 5528-В88, М., 1988).

2.76. Пусть Γ — голоморф абелевой группы A. При каких условиях A максимальна среди локально нильпотентных подгрупп группы Γ? *Д. А. Супруненко*

Условия найдены (А. В. Ягжев, *Мат. заметки*, **46**, № 6 (1989), 118).

2.77. Пусть A, B — абелевы группы. При каких условиях всякое расширение A с помощью B является нильпотентной группой? *Д. А. Супруненко*

Условия указаны (А. В. Ягжев, *Мат. заметки*, **43** (1988), 424–427).

2.79. Существуют ли полные (простые полные) группы с максимальными подгруппами? *М. С. Цаленко*

Да, существуют, см., например, (В. Г. Соколов, *Алгебра и логика*, **7**, № 2 (1968), 85–93).

2.83. Пусть периодическая группа G представима в виде произведения двух локально конечных подгрупп. Будет ли G локально конечной? *В. П. Шунков*

Нет, не всегда (В. И. Сущанский, *Мат. сб.*, **180**, № 8 (1989), 1073–1091).

2.88. Является ли каждая холлова π-подгруппа произвольной группы ее максимальной π-подгруппой? *М. И. Эйдинов*

Не всегда (R. Baer, *J. Reine Angew. Math.*, **239/240** (1969), 109–144).

3.4. (Известные вопросы). а) Существует ли алгоритм, который по любой системе групповых слов $f_1, \ldots, f_m$ (от фиксированного множества переменных $x_1, x_2, \ldots$) и отдельному слову f выяснял бы, следует ли тождество $f = 1$ из тождеств $f_1 = 1, \ldots, f_m = 1$?

б) Пусть заданы групповые слова $f_1, \ldots, f_m$. Существует ли алгоритм, который по любому слову f выяснял бы, следует ли тождество $f = 1$ из тождеств $f_1 = 1, \ldots, f_m = 1$? *Л. А. Бокуть*

Нет, не существуют (Ю. Г. Клейман, *ДАН СССР*, **244** (1979), 814–818).

3.6. Описать неразрешимые конечные группы, каждая разрешимая подгруппа которых либо 2-замкнута, либо $2'$-замкнута, либо изоморфна $\mathbb{S}_4$. *В. А. Ведерников*

Описание вытекает из (D. Gorenstein, J. H. Walter, *Illinois J. Math.*, **6** (1962) 553–593; В. Д. Мазуров, *ДАН СССР*, **168** (1966), 519–521; В. Д. Мазуров, В. М. Ситников, С. А. Сыскин, *Алгебра и логика*, **9** (1970), 313–341).

3.7. Автоморфизм σ группы G называется *алгебраическим*, если для любого элемента $g \in G$ минимальная σ-допустимая подгруппа из G, содержащая g, имеет конечное число порождающих. Автоморфизм σ группы G называется *e-автоморфизмом*, если для любых двух σ-допустимых подгрупп A и B, где A — собственная подгруппа из B, в разности $A \setminus B$ найдется элемент x, для которого $[x, \sigma] \in B$. Всякий ли e-автоморфизм является алгебраическим? *В. Г. Вилялцер*

Да, всякий (А. В. Ягжев, *Алгебра и логика*, **28** (1989), 117–119).

3.8. Пусть G — свободное произведение свободных групп A и B, V — вербальная подгруппа группы G, отвечающая уравнению $x^4 = 1$. Верно ли, что если $a \in A \setminus V$ и $b \in B \setminus V$, то $(ab)^2 \notin V$? *В. Г. Вилялцер*

Нет, не верно Пусть A и B — свободные группы с базами a_1, a_2 и b_1, b_2 соответственно. Тогда, например, коммутаторы $a = [[a_1, a_2, a_2], [a_1, a_2]]$ и $b = [[b_1, b_2, b_2], [b_1, b_2]]$ не лежат в V, но $(ab)^2 \in V$. В самом деле, из известных свойств свободной группы G/V периода 4 (C. R. B. Wright, *Pacif. J. Math.*, **11**, № 1 (1961), 387–394) следует, что $a^2 \in V$, $b^2 \in V$ и $[a, b] \in V$. (В. А. Романьков, *Доклад на семинаре Алгебра и логика*, 17.3.1970.)

3.9. Существуют ли бесконечные периодические группы с максимальной конечной подгруппой? *Ю. М. Горчаков*

Да, существуют (С. И. Адян, *Тр. МИАН им. Стеклова*, **112** (1971), 64–72).

3.10. Конечное ли число конечных простых неабелевых групп содержит собственное многообразие групп? *Ю. М. Горчаков*

Да, конечное (mod CFSG), см., например, (G. A. Jones, *J. Austral. Math. Soc.*, **17** (1974), 162–173).

3.11. Элемент g группы G называется *обобщенно периодическим*, если существуют такие $x_1, \ldots, x_n \in G$, что $x_1^{-1}gx_1 \cdots x_n^{-1}gx_n = 1$. Существуют ли конечно порожденные группы без кручения, все элементы которых обобщенно периодические? *Ю. М. Горчаков*

Да, существуют (А. П. Горюшкин, *Сиб. мат. ж.*, **14** (1973), 204–207). Другой пример: $G = \langle a, b \mid (b^2)^a = b^{-2},\ (a^2)^b = a^{-2} \rangle$. Тогда $N = \langle a^2, b^2, (ab)^2 \rangle$ — абелева нормальная подгруппа группы G и G/N — нециклическая группа порядка 4. Если $a^{2l}b^{2m}(ab)^{2n} = 1$, то после сопряжения элементом a получим $a^{2l}b^{-2m}(ab)^{-2n} = 1$, откуда $a^{4l} = 1$. Ввиду очевидного гомоморфизма $G \to \mathbb{Z}(\mathrm{Aut}\,\mathbb{Z})$, посылающего a в число $1 \in \mathbb{Z}$, имеем $l = 0$. Аналогично, $m = n = 0$. Значит, N — свободная абелева группа ранга 3. Квадраты элементов извне N нетривиальны; например, $\big(aa^{2l}b^{2m}(ab)^{2n}\big)^2 = a^2a^{-1}(a^{2l}b^{2m}(ab)^{2n})aa^{2l}b^{2m}(ab)^{2n} = a^{4l+2} \neq 1$. Значит, G — группа без кручения. Так как квадрат любого элемента $x \in G$ лежит в N, имеем $x^2(x^2)^a(x^2)^b(x^2)^{ab} = 1$. (В. А. Чуркин, 1973.)

3.13. Разрешима ли элементарная теория решеток подгрупп конечных абелевых групп? *Ю. Л. Ершов, А. И. Кокорин*

Нет, не разрешима (Г. Т. Козлов, *Алгебра и логика*, **9** (1970), 167–171).

3.14. Пусть G — конечная группа матриц степени n над телом T нулевой характеристики. Доказать, что G обладает разрешимой нормальной подгруппой H, индекс которой в G не превосходит некоторого числа $f(n)$, не зависящего ни от T, ни от G. Вопрос связан с теорией представлений конечных групп (индекс Шура). *А. Е. Залесский*

Доказано (mod CFSG) (B. Hartley, M. A. Shahabi Shojaei, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **92** (1982), 55–64).

3.15. Будем говорить, что группа G *U-вложима* в класс групп $\mathfrak{K}$, если для всякой конечной подмодели $M \subseteq G$ найдется такая группа A из $\mathfrak{K}$, что M изоморфна некоторой подмодели из A. Будет ли U-вложимой в конечные группы:

а) всякая группа с одним определяющим соотношением?

б) всякая группа, допускающая одно определяющее соотношение в многообразии разрешимых групп данной ступени? *М. И. Каргаполов*

Нет, не будет, в обоих случаях (А. И. Будкин, В. А. Горбунов, *Алгебра и логика*, **14** (1975), 123–142). Приведем другой пример. Группа $G = \langle a, b \mid (b^2)^a = b^3 \rangle$ нехопфова (G. Baumslag, D. Solitar, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **68**, №3 (1962), 199–201) и потому не метабелева. Выберем элементы $a, b, x_1, x_2, x_3, x_4 \in G$ так, что $w = [[x_1, x_2], [x_3, x_4]] \neq 1$, добавим к ним 1, их обратные, все начальные отрезки слова w в алфавите $\{x_i\}$, и все начальные отрезки слова $a^{-1}b^2ab^{-3}$ и каждого из слов x_i в алфавите $\{a, b\}$. Пусть M — полученная модель. Если бы M вкладывалась в конечную группу G_0, то G_0 была бы, с одной стороны, метацикличной, а с другой — содержала бы элементы с условием $[[x_1, x_2], [x_3, x_4]] \neq 1$, что невозможно. Значит, G не U-вложима в конечные группы. Так как группа $G/G^{(k)}$ при подходящем k тоже нехопфова (*там же*), по тем же причинам она не U-вложима в конечные группы. (Ю. И. Мерзляков, 1969.)

3.17. а) Будет ли простой некоммутативная группа, линейно упорядочиваемая единственным способом?

б) Будет ли простой некоммутативная упорядочиваемая группа без нетривиальных нормальных относительно выпуклых подгрупп? *А. И. Кокорин*

Нет, не всегда, в обоих случаях (В. В. Блудов, *Алгебра и логика*, **13**, № 6 (1974), 609–634).

3.18. (Б. Нойман). Группа U называется *универсальной* для класса групп $\mathfrak{K}$, если U содержит изоморфный образ каждой группы из $\mathfrak{K}$. Существует ли счетная группа, универсальная для класса счетных упорядочиваемых групп? *А. И. Кокорин*

Нет, не существует (М. И. Каргаполов, *Алгебра и логика*, **9** (1970), 428–435; D. B. Smith, *Pacific J. Math.*, **35** (1970), 499–502).

3.19. (А. И. Мальцев). Для всякой ли линейно упорядоченной группы G существует абелева линейно упорядоченная группа, имеющая тот же порядковый тип, что и G? *А. И. Кокорин*

Нет, не для всякой (W. C. Holland, A. H. Mekler, S. Shelah, *Order*, **1** (1985), 383–397).

3.21. Пусть $\mathfrak{K}$ — класс одноосновных моделей сигнатуры σ, ϑ — свойство, имеющее смысл для моделей класса $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_0$ — класс двуосновных моделей, у которых первое основное множество M берется из $\mathfrak{K}$, второе состоит из всех подмоделей модели M, обладающих свойством ϑ, а сигнатура состоит из знаков сигнатуры σ и знаков $\in$, $\subseteq$, имеющих обычный теоретико-множественный смысл. Элементарную теорию класса $\mathfrak{K}_0$ назовем *элементно-ϑ-подмодельной теорией* класса $\mathfrak{K}$. Разрешима ли:

а) элементно-сервантно-подгрупповая теория абелевых групп?

б) элементно-сервантно-подгрупповая теория абелевых групп без кручения?

в) элементно-ϑ-подгрупповая теория абелевых групп, если множество ϑ-подгрупп линейно упорядочено по включению? *А. И. Кокорин*

Нет, не разрешимы во всех случаях (для а), в): Г. Т. Козлов, *Алгебра и логика*, **9** (1970), 167–171; *Алгебра*, № 1, Иркутский ун-т, 1972, 21–23; для б): Э. И. Фридман, *Алгебра*, № 1, Иркутский ун-т, 1972, 97–100).

3.22. Пусть $\xi = \{G_\alpha,\ \pi^\alpha_\beta \mid \alpha, \beta \in I\}$ — проективная система над направленным множеством I свободных абелевых групп с конечным числом порождающих. Будет ли $\varprojlim \xi \neq 0$, если проекции π^α_β — эпиморфизмы и $G_\alpha \neq 0$? Равносильная формулировка. Пусть каждое конечное множество элементов абелевой группы A содержится в сервантной свободной конечно порожденной подгруппе из A. Имеет ли тогда A прямое слагаемое, изоморфное $\mathbb{Z}$? *В. И. Кузьминов*

При континуум-гипотезе не всегда (Е. А. Палютин, *Сиб. мат. ж.*, **19** (1978), 1415–1417).

3.26. (Ф. Гросс). Верно ли, что конечная группа периода $p^\alpha q^\beta$ имеет нильпотентную длину $\leqslant \alpha + \beta$? *В. Д. Мазуров*

Нет, не верно (Е. И. Хухро, *Алгебра и логика*, **17** (1978), 727–740).

3.27. (Дж. Томпсон). Будет ли простая конечная группа, у которой среди максимальных подгрупп есть нильпотентная, изоморфна одной из групп $PSL_2(q)$? *В. Д. Мазуров*

Да, будет (B. Baumann, *J. Algebra*, **38** (1976), 119–135).

3.28. Если в конечной 2-группе G с циклическим центром любая абелева нормальная подгруппа порождается двумя элементами, то будет ли любая абелева подгруппа из G порождаться тремя элементами? *В. Д. Мазуров*

Не всегда (Я. Г. Беркович, *Алгебра и логика*, **9** (1970), 121).

3.29. При каких условиях сплетение матричных групп над полем само представимо матрицами над полем? *Ю. И. Мерзляков*

Такие условия указаны в (Ю. Е. Вапнэ, *ДАН СССР*, **195** (1970), 13–16).

3.30. Абелева группа без кручения называется *факторно расщепляемой*, если в любой ее факторгруппе периодическая часть является прямым слагаемым. Каковы все факторно расщепляемые группы? *А. П. Мишина*

Описаны (L. Bican, *Comment. Mat. Univ. Carol.*, **19** (1978), 653–672).

3.31. Найти необходимые и достаточные условия, при которых всякая сервантная подгруппа вполне разложимой абелевой группы без кручения сама вполне разложима. *Л. П. Мишина*

Найдены (L. Bican, *Czech. Math. J.*, **24** (1974), 176–191; А. А. Кравченко, *Вестник Моск. ун-та, сер. 1, мат. мех.*, **1980**, № 3, с. 104).

3.35. (К. Росс). Пусть на группе G заданы две топологии σ и τ, так что образовались две локально компактные топологические группы G_σ и G_τ. Будут ли G_σ и G_τ топологически изоморфны, если множество замкнутых подгрупп у них одно и то же? *Ю. Н. Мухин*

Нет, не всегда (А. И. Москаленко, *Укр. мат. ж.*, **30** (1978), 257–260).

3.37. Пусть все конечно порожденные подгруппы локально компактной группы G пронильпотентны. Можно ли утверждать, что всякая максимальная замкнутая подгруппа из G содержит коммутант G'? *Ю. Н. Мухин*

Да, можно (И. В. Протасов, *ДАН СССР*, **242** (1978), 777–779).

3.39. Описать конечные группы с самоцентрализующейся подгруппой простого порядка. *В. Т. Нагребецкий*

Описаны. Самоцентрализующиеся подгруппы простого порядка являются CC-подгруппами. Конечные группы с CC-подгруппой полностью классифицированы в (Z. Arad, W. Herfort, *Commun. in Algebra*, **32** (2004), 2087–2098).

3.40. (И. Р. Шафаревич). Пусть $SL_2(\mathbb{Z})\hat{}$ и $SL_2(\mathbb{Z})^-$ — пополнения группы $SL_2(\mathbb{Z})$, определяемые соответственно всеми подгруппами конечного индекса и конгруэнц-подгруппами, $\psi : SL_2(\mathbb{Z})\hat{} \to SL_2(\mathbb{Z})^-$ — естественный гомоморфизм. Будет ли $\operatorname{Ker}\psi$ свободной проконечной группой? *В. П. Платонов*

Да, будет (О. В. Мельников, *ДАН СССР*, **228** (1976), 1034–1036).

3.41. Будет ли локально конечной компактная периодическая группа? *В. П. Платонов*

Да, будет (E. I. Zelmanov, *Israel J. Math.*, **77** (1992), 83–95).

3.52. Можно ли задать системой квазитождеств от конечного числа переменных квазимногообразие, порожденное свободной группой ранга 2? *Д. М. Смирнов*

Нет, нельзя (А. И. Будкин, *Алгебра и логика*, **15** (1976), 39–52).

3.53. Дистрибутивна ли решетка $L(\mathfrak{N}_4)$ подмногообразий многообразия $\mathfrak{N}_4$ нильпотентных групп ступени $\leqslant 4$? *Д. М. Смирнов*

Нет, не дистрибутивна (Ю. А. Белов, *Алгебра и логика*, **9** (1970), 623–628).

3.56. Будет ли 2-группа, удовлетворяющая условию минимальности для абелевых подгрупп, локально конечной? *С. П. Струнков*

Да, будет (В. П. Шунков, *Алгебра и логика*, **9** (1970), 484–496).

3.58. Пусть G — компактная нульмерная топологическая группа, все силовские p-подгруппы которой разложимы в прямое произведение циклических подгрупп порядка p. Будут ли все ее нормальные подгруппы дополняемы? *В. С. Чарин*

Да, будут (М. И. Кабенюк, *Сиб. мат. ж.*, **13** (1972), 939–943).

3.59. Пусть H — неразрешимая минимальная нормальная подгруппа конечной группы G. Пусть H обладает циклической силовской p-подгруппой для каждого простого p, делящего $|G:H|$. Доказать, что H обладает по крайней мере одним дополнением в группе G. *Л. А. Шеметков*

Доказано (С. А. Сыскин, *Сиб. мат. ж.*, **12** (1971), 477–480; Л. А. Шеметков, *ДАН СССР*, **195** (1970), 50–52).

3.61. Пусть σ — автоморфизм простого порядка p конечной группы G, имеющей холлову π-подгруппу с циклическими силовскими подгруппами. Пусть $p \in \pi$. Верно ли, что $C_G(\sigma)$ обладает по крайней мере одной холловой π-подгруппой? *Л. А. Шеметков*

Да, верно (mod CFSG) (В. Д. Мазуров, *Алгебра и логика*, **31**, № 6 (1992), 624–636).

3.64. Описать конечные простые группы с силовской 2-подгруппой следующего типа: $\langle a, t \mid a^{2^n} = t^2 = 1,\ \ tat = a^{2^{n-1}-1}\rangle$. *В. П. Шунков*

Описаны (J. L. Alperin, R. Brauer, D. Gorenstein, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **151** (1970), 1–261).

4.1. Найти бесконечную конечно порожденную группу с тождественным соотношением вида $x^{2^n} = 1$. *С. И. Адян*

Найдена (S. V. Ivanov, *Intern. J. Algebra Comput.*, **4**, № 1–2 (1994), 1–308; И. Г. Лысёнок, *Изв. РАН, сер. мат.*, **60**, № 3 (1996), 3–224).

4.3. Построить конечно определенную группу с неразрешимой проблемой равенства, в которой выполняется нетривиальное тождество. *С. И. Адян*

Построена (О. Г. Харлампович, *Изв. АН СССР, сер. мат.*, **45** (1981), 852–873).

4.4. Построить конечно определенную группу с неразрешимой проблемой равенства, у которой все нетривиальные определяющие соотношения имеют вид $A^2 = 1$. Проблема интересует топологов. *С. И. Адян*

Построена (О. А. Саркисян, *Проблема равенства слов для некоторых классов групп и полугрупп*, канд. дисс., М., МГУ, 1983).

4.5. а) (Дж. Милнор). Верно ли, что произвольная конечно порожденная группа имеет либо степенной, либо показательный рост?

в) Всякая ли конечно порожденная группа с неразрешимой проблемой равенства имеет показательный рост? *С. И. Адян*

а) Нет, не верно, в) Нет, не всякая (Р. И. Григорчук, *ДАН СССР*, **271** (1983), 30–33).

4.10. Группа называется *локально индикабельной*, если каждая ее нетривиальная конечно порожденная подгруппа обладает бесконечной циклической фактор-группой. Всякая ли группа без кручения и с одним определяющим соотношением локально индикабельна? *Г. Баумслаг (G. Baumslag)*

Да, всякая (С. Д. Бродский, Деп. ВИНИТИ № 2214-80, М., 1980).

4.12. Пусть A — группа автоморфизмов конечной группы G, стабилизирующая ряд подгрупп, начинающийся с G и заканчивающийся ее подгруппой Фраттини. Верно ли, что A нильпотентна? *Я. Г. Беркович*

Да, верно (P. Schmid, *Math. Ann.*, **202** (1973), 57–69).

4.16. Пусть $\mathfrak{K}$ — класс групп, удовлетворяющий следующим двум условиям: 1) подгруппы и эпиморфные образы $\mathfrak{K}$-групп являются $\mathfrak{K}$-группами; 2) если группа $G = UV$ — произведение своих $\mathfrak{K}$-подгрупп (ни одна из которых не обязана быть нормальной), то $G \in \mathfrak{K}$. Если π — множество простых чисел, то класс всех конечных π-групп удовлетворяет этим условиям. Исчерпывают ли такие классы все классы $\mathfrak{K}$, удовлетворяющие условиям 1) и 2)? *Р. Бэр (R. Baer)*

Нет, не исчерпывают (С. А. Сыскин, *Сиб. мат. ж.*, **20** (1979), 679–681).

4.21. Пусть G — конечная группа, p — нечетное простое число, P — силовская p-подгруппа группы G, и пусть порядок каждой неединичной нормальной подгруппы группы G делится на p. Предположим, в P есть элемент x, не сопряженный в G ни с одним другим элементом из P. Верно ли, что x лежит в центре G? Для $p = 2$ ответ положительный (G. Glauberman, *J. Algebra*, **4** (1966), 403–420). *Дж. Глауберман (G. Glauberman)*

Да, верно (mod CFSG) (О. Д. Артемович, *Укр. мат. ж.*, **40** (1988), 397–400).

4.22. (Дж. Томпсон). Пусть G — конечная группа, A — такая группа ее автоморфизмов, что $|A|$ и $|G|$ взаимно просты. Всегда ли существует такая A-инвариантная разрешимая подгруппа H из G, что $C_A(H) = 1$? *Дж. Глауберман (G. Glauberman)*

Да, всегда (С. А. Сыскин, *Сиб. мат. ж.*, **32**, № 6 (1991), 164–168).

4.23. Пусть G — конечная простая группа, τ — элемент простого порядка и α — автоморфизм группы G порядка, взаимно простого с $|G|$. Будет ли $\alpha = 1$, если α централизует $C_G(\tau)$? *Дж. Глауберман (G. Glauberman)*

Не всегда; например, $G = Sz(8)$, $|\tau| = 5$, $|\alpha| = 3$ (Н. Д. Подуфалов, *3.9.1975*).

4.24. Пусть T — неабелева силовская 2-подгруппа конечной простой группы G.

б) Может ли T быть прямым произведением двух собственных подгрупп?

в) Равны ли T' и $\Phi(T)$? *Д. Голдшмидт (D. Goldschmidt)*

б) Да, может. Например, силовская 2-подгруппа знакопеременных групп $\mathbb{A}_{14}$ и $\mathbb{A}_{15}$ изоморфна силовской 2-подгруппе из $\mathbb{S}_4 \times \mathbb{S}_8$. Силовские 2-подгруппы из $D_4(q)$ для нечетного q также разложимы. (А. С. Кондратьев, *письмо от 13.10.1977.*)
в) Не всегда; например, для $G = PSL_3(q)$ с $q \equiv 1 \pmod 4$ (А. С. Кондратьев).

4.27. Перечислить простые конечные группы G, представимые в виде $G = ABA$, где A, B — абелевы подгруппы. *И. П. Докторов*

Перечислены mod CFSG (Д. Л. Загорин, Л. С. Казарин, *ДАН СССР*, **347**, № 5 (1996), 590–592; Д. Л. Загорин, *Некоторые задачи ABA-факторизации групп подстановок и классических групп* (*канд. дисс.*), Ярославль, 1994; Д. Л. Загорин, Л. С. Казарин, *Вопросы алгебры*, Гомель, № 11 (1997), 27–41; Е. П. Вдовин, *Алгебра и логика*, **38**, № 2 (1999), 131–160).

4.28. Для заданного поля k характеристики $p > 0$ охарактеризовать локально конечные группы с полупростыми групповыми алгебрами над k. *А. Е. Залесский*

Охарактеризованы: простые группы в (D. S. Passman, A. E. Zalesskii, *Proc. London Math. Soc. (3)*, **67** (1993), 243–276); в общем случае в (D. S. Passman, *Proc. London Math. Soc. (3)*, **73** (1996), 323–357).

4.29. Классифицировать неприводимые матричные группы над конечным полем, порожденные отражениями, т. е. матрицами, имеющими жорданову форму $\mathrm{diag}(-1, 1, \ldots, 1)$. *А. Е. Залесский*

Классифицированы (А. Е. Залесский, В. Н. Сережкин, *Изв. АН СССР, сер. мат.*, **44** (1980), 1279–1307; A. Wagner, *Geom. Dedicata*, **9** (1980), 239–253; **10** (1981), 191–203, 475–523).

4.32. Проблема сопряженности для метабелевых групп. *М. И. Каргаполов*

Алгоритмически разрешима (Г. А. Носков, *Мат. заметки*, **31** (1982), 495–507).

4.35. (Известный вопрос). Существует ли бесконечная локально конечная простая группа, удовлетворяющая условию минимальности для примарных подгрупп? *О. Кегель (O. H. Kegel)*

Нет, не существует (В. В. Беляев, *Алгебра и логика*, **20** (1981), 605–619).

4.36. Существует ли бесконечная локально конечная простая группа G с такой инволюцией i, что централизатор $C_G(i)$ — черниковская группа? *О. Кегель (O. H. Kegel)*

Нет, не существует (A. O. Asar, *Proc. London Math. Soc.*, **45** (1982), 337–364).

4.37. Существует ли такая бесконечная локально конечная простая группа G, непредставимая матрицами над полем, что для некоторого простого p все p-подгруппы группы G имеют ограниченную ступень разрешимости или конечный период? *О. Кегель (O. H. Kegel)*

Нет не существует (mod CFSG) по теореме 4.8 из (O. H. Kegel, B. A. F. Wehrfritz, *Locally finite groups*, North Holland, Amsterdam, 1973).

4.38. Описать композиционные факторы групп автоморфизмов конечных (двуступенно нильпотентных) групп простого периода. *В. Д. Мазуров*

Любая конечная простая группа может быть таким композиционным фактором (П. М. Белецкий, *УМН*, **35**, № 6 (1980), 153–154).

4.39. Счетная группа U называется SQ-*универсальной*, если каждая счетная группа изоморфна подгруппе факторгруппы U. Пусть G — группа, заданная $r \geqslant 2$ образующими и не более чем $r-2$ определяющими соотношениями. Является ли G SQ-универсальной? *А. Макбет (A. M. Macbeath), П. Нойман (P. M. Neumann)*

Да, является (B. Baumslag, S. J. Pride, *J. London Math. Soc.*, **17** (1978), 425–426).

4.41. Точка z комплексной плоскости называется *свободной*, если матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}$ порождают свободную группу. Верно ли, что точки вне ромба с вершинами ± 2, $\pm i$ свободны? *Ю. И. Мерзляков*

Нет, не верно (Ю. А. Игнатов, *Мат. сб.*, **106** (1978), 372–379; А. И. Шкуратский, *Мат. заметки*, **24** (1978), 411–414).

4.45. а) Пусть G — свободное произведение с объединением собственных подгрупп H и K групп A и B, соответственно. Предположим, что H и K конечны и $|A:H|>2$, $|B:K|\geqslant 2$. Является ли группа G SQ-универсальной?

П. Нойман (P. M. Neumann)

Да, является (К. И. Лоссов, *Сиб. мат. ж.*, **27**, № 6 (1986), 128–139).

4.47. Существует ли такая счетная система групп, что любое многообразие групп порождается некоторой ее подсистемой? *А. Ю. Ольшанский*

Нет, не существует (Ю. Г. Клейман, *Изв. АН СССР, сер. мат.*, **47** (1983), 37–74).

4.49. Пусть G, H — конечно порожденные нильпотентные группы без кручения, причем $\mathrm{Aut}\,G\cong \mathrm{Aut}\,H$. Следует ли отсюда, что $G\cong H$? *В. Н. Ремесленников*

Нет, не следует (Г. А. Носков, В. А. Романьков, *Алгебра и логика*, **13** (1974), 534–543).

4.51. (Известный вопрос). Являются ли группы узлов финитно аппроксимируемыми? *В. Н. Ремесленников*

Да, являются (W. P. Thurston, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **6** (1982), 357–381).

4.52. Пусть G — конечно порожденная группа без кручения, являющаяся расширением абелевой группы посредством нильпотентной группы. Будет ли G почти для всех простых чисел p почти вся аппроксимироваться конечными p-группами?

В. Н. Ремесленников

Да, будет (Г. А. Носков, *Алгебра и логика*, **13** (1974), 676–684; D. Segal, *J. Algebra*, **32** (1974), 389–399).

4.53. Как доказал П. Пиккель, существует лишь конечное число неизоморфных конечно порожденных нильпотентных групп с одним и тем же семейством конечных гомоморфных образов. Можно ли распространить теорему Пиккеля на полициклические группы? *В. Н. Ремесленников*

Да, можно (F. J. Grunewald, P. F. Pickel, D. Segal, *Ann. of Math. (2)*, **111** (1980), 155–195).

4.54. Любые ли минимальные модули соотношений конечной группы изоморфны? *К. Роггенкамп (K. Roggenkamp)*

Нет, не любые (P. A. Linnell, *Ph. D. Thesis*, Cambridge, 1979;
A. J. Sieradski, M. N. Dyer, *J. Pure Appl. Algebra*, **15** (1979), 199–217).

4.57. Пусть группа G — произведение двух абелевых минимаксных подгрупп A и B. Доказать или опровергнуть следующие утверждения:

а) $A_0B_0\neq 1$, где $A_0=\bigcap_{x\in G}A^x$ и аналогично определяется B_0;

б) коммутант группы G — минимаксная подгруппа. *Н. Ф. Сесекин*

Доказаны оба (Д. И. Зайцев, *Алгебра и логика*, **19** (1980), 150–172).

4.58. Пусть конечная группа G — произведение подгрупп A и B, где A абелева, а B нильпотентна. Указать оценку ступени разрешимости группы G в зависимости от ступени нильпотентности подгруппы B и порядка ее коммутанта.

Н. Ф. Сесекин

Указана (Д. И. Зайцев, *Мат. заметки*, **33** (1983), 807–818).

4.59. (Ф. Холл). Найти натуральное число n с тем свойством, что любую счетную группу можно вложить в простую группу с n порождающими. *Д. М. Смирнов*

Доказано, что $n=2$ (А. П. Горюшкин, *Мат. заметки*, **16** (1974), 231–235).

4.60. (Ф. Холл). Какую мощность имеет множество простых групп с двумя порождающими, один из которых имеет порядок 2, а другой — порядок 3?

Д. М. Смирнов

Континуум. Любая 2-порожденная группа G вложима в простую группу H, порожденную двумя элементами порядков 2 и 3 (P. E. Schupp, *J. London Math. Soc.*, **13**, №1 (1976), 90–94). Группа H имеет не более чем счетное число 2-порожденных подгрупп, а различных групп G — континуум. (Ю. И. Мерзляков, 1976.)

4.61. Существует ли линейная функция f со следующим свойством: если в конечной 2-группе G каждая абелева подгруппа порождается n элементами, то G порождается $f(n)$ элементами? *С. А. Сыскин*

Нет, не существует (А. Ю. Ольшанский, *Мат. заметки*, **23** (1978), 337–341).

4.62. Существует ли многообразие групп, определенное конечным числом тождеств, у которого неразрешима универсальная теория? *А. Тарский (A. Tarski)*

Да, существует; например — $\mathfrak{A}^5$. В самом деле, как показано в (В. Н. Ремесленников, *Алгебра и логика*, **12**, № 5 (1973), 577–602) существует конечно представленная в $\mathfrak{A}^5$ группа $G = \langle x_1, \ldots, x_n \mid w_1, \ldots, w_m, \mod \mathfrak{A}^5 \rangle$ с неразрешимой проблемой равенства. Положим $\Phi_w = (\forall x_1, \ldots, x_n)((w_1 = 1) \wedge \ldots \wedge (w_m = 1) \to (w = 1))$, где w пробегает все слова от $x_1, \ldots, x_n$. Ясно, что не существует алгоритма, распознающего справедливость формулы Φ_w в $\mathfrak{A}^5$. (В. Н. Ремесленников, 1976.)

4.63. Существует ли неабелево многообразие групп (в частности, содержащее многообразие всех абелевых групп) с разрешимой элементарной теорией?

А. Тарский (A. Tarski)

Нет, не существует (А. П. Замятин, *Алгебра и логика*, **17** (1978), 20–27).

4.64. Существует ли многообразие групп, не допускающее независимой системы определяющих тождеств? *А. Тарский (A. Tarski)*

Да, существует (Ю. Г. Клейман, *Изв. АН СССР, сер. мат.*, **47** (1983), 37–74).

4.67. Пусть G — конечная p-группа. Показать, что ранг мультипликатора $M(G)$ группы G ограничен в зависимости от ранга группы G. *Дж. Уайголд (J. Wiegold)*

Показано (A. Lubotzky, A. Mann, *J. Algebra*, **105** (1987), 484–505).

4.68. Построить конечно порожденную (бесконечную) элементарную группу, не являющуюся прямой степенью простой группы. *Дж. Уайголд (J. Wiegold)*

Построена (J. S. Wilson, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **80** (1976), 19–35).

4.70. Пусть k — поле характеристики $\neq 2$, G_k — группа преобразований $x \to ax + \alpha$ $(a, \alpha \in k,\ a \neq 0)$, обозначаемых символами $A = (a, \alpha)$. Расширим G_k до проективной плоскости, добавив символы $(0, \alpha)$ и бесконечно удаленную прямую. Тогда прямыми будут в точности централизаторы $C_G(A)$ элементов $A \in G_k$ и смежные классы по ним. Существуют ли другие группы G, дополняемые до проективной плоскости так, чтобы прямыми были в точности смежные классы по централизаторам элементов из G? *Г. Швердтфегер (H. Schwerdtfeger)*

Нет, не существуют (Е. А. Кузнецов, *Группы, дополняемые до проективных плоскостей*, Деп. ВИНИТИ, № 7028-В89, М., 1989).

4.71. Пусть A — некоторая группа автоморфизмов конечной группы G и G обладает рядом A-допустимых подгрупп $G = G_0 > \cdots > G_k = 1$ с простыми индексами $|G_i : G_{i+1}|$. Доказать, что A сверхразрешима. *Л. А. Шеметков*

Доказано (Л. А. Шеметков, *Мат. сб.*, **94** (1974), 628–648).

4.73. а) (Известный вопрос). Существует ли неабелево многообразие групп, все конечные группы которого абелевы? *А. Л. Шмелькин*

Да, существует (А. Ю. Ольшанский, *Мат. сб.*, **126** (1985), 59–82).

4.74. а) Всякая ли 2-группа порядка > 2 не проста? *В. П. Шунков*

Нет, не всякая. Это следует из положительного решения ослабленной проблемы Бернсайда для групп периода 2^n (Е. И. Зельманов, *Мат. сб.*, **182**, № 4 (1991), 568–592) и отрицательного решения проблемы Бернсайда для групп периода 2^n при достаточно большом n (S. V. Ivanov, *Int. J. Algebra Comput.*, **4**, № 1–2 (1994), 1–308; И. Г. Лысёнок, *Изв. РАН, сер. мат.*, **60**, № 3 (1996), 3–224).

4.76. Пусть G — локально конечная группа, содержащая элемент a простого порядка с конечным централизатором $C_G(a)$. Будет ли G почти разрешимой? *В. П. Шунков*

Да, будет. В (P. Fong, *Osaka J. Math.*, **13** (1976), 483–489) показано (mod CFSG), что G почти локально разрешима. Тогда в (B. Hartley, T. Meixner, *Arch. Math.*, **36** (1981), 211–213) доказано, что G почти локально нильпотентна. Тогда G почти разрешима по (J. L. Alperin, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13** (1962) 175–180) и (G. Higman, *J. London Math. Soc.*, **32** (1957), 321–334). Более того, по теоремам из (Е. И. Хухро, *Мат. заметки*, **38**, № 5 (1985), 652–657; Е. И. Хухро, *Мат. сб.*, **181** (1990), 1207–1219) тогда G почти нильпотентна.

4.77. А. Рудвалис открыл в 1972 г. новую простую группу R порядка $2^{14}\cdot 3^3\cdot 5^3\cdot 7\cdot 13\cdot 29$. Он показал, что R обладает такой инволюцией i, что $C_R(i)=V\times F$, где V — четверная группа (элементарная группа порядка 4), а $F\cong Sz(8)$.

а) Показать, что R изоморфна любой конечной простой группе G, обладающей такой инволюцией i, что $C_G(i)=V\times F$, где V — четверная группа, а $F\cong Sz(8)$.

б) Пусть G — конечная простая группа, обладающая такой инволюцией i, что $C_G(i)=V\times F$, где V — элементарная группа порядка 2^n, $n\geqslant 1$, а $F\cong Sz(2^m)$, $m\geqslant 3$. Показать, что $n=2$, а $m=3$. *З. Янко (Z. Janko)*

а) Показано (В. Д. Мазуров, *Мат. заметки*, **31** (1982), 321–338).
б) Вытекает из CFSG.

5.1. а) Будет ли не простой всякая локально конечная минимальная не-FC-группа? *В. В. Беляев, Н. Ф. Сесекин*

Да, будет (M. Kuzucuoḡlu, R. E. Phillips, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **105**, № 3 (1989), 417–420).

5.2. Верно ли, что функция роста f бесконечной конечно порожденной группы удовлетворяет неравенству $f(n)\leqslant (f(n-1)+f(n+1))/2$ для всех достаточно больших n (при фиксированной конечной системе порождающих)? *В. В. Беляев, Н. Ф. Сесекин*

Нет, не верно (П. де ла Арп (P. de la Harpe), Р. И. Григорчук, *Алгебра и логика*, **37**, № 6 (1998), 621–626).

5.3. (Известный вопрос). Любая ли конечная решетка вложима в решетку подгрупп конечной группы? *Дж. Бергман (G. M. Bergman)*

Да, любая (P. Pudlák, J. Tůma, *Algebra Universalis*, **10** (1980), 74–95).

5.6. Если R — конечно порожденная область целостности характеристики $p > 0$, то индуцирует ли проконечная (идеальная) топология R проконечную топологию на группу единиц R? Это верно для $p = 0$. *Б. Верфриц (B. A. F. Wehrfritz)*

Да, индуцирует (D. Segal, *Bull. London Math. Soc.*, **11** (1979), 186–190).

5.7. Алгебраическое многообразие X над полем k называется *рациональным*, если поле функций $k(X)$ чисто трансцендентно над k, и *стабильно рациональным*, если $k(X)$ становится чисто трансцендентным после присоединения конечного числа независимых переменных. Пусть T — стабильно рациональный тор над полем k. Является ли T рациональным? Другие формулировки этого вопроса и некоторые результаты см. в (В. Е. Воскресенский, *УМН*, **28**, № 4 (1973), 77–102). *В. Е. Воскресенский*

Да, является (V. E. Voskresenskiĭ, *Linear representations of quasisplit tori and problem of rationality*, Preprint, Max–Planck–Inst. Math., Bonn, 2000, № 100).

5.8. Пусть G — разрешимая группа без кручения конечной когомологической размерности $\operatorname{cd} G$. Известно, что $hG \leqslant \operatorname{cd} G \leqslant hG + 1$, где hG — число Хирша группы G. Найти чисто теоретико-групповой критерий для равенства $hG = \operatorname{cd} G$. *К. Грюнберг (K. W. Gruenberg)*

Найден (P. H. Kropholler, *J. Pure Appl. Algebra*, **43** (1986), 281–287).

5.9. Пусть $1 \to R_i \xrightarrow{\pi_i} F \to G \to 1$, $i = 1, 2$, — две точные последовательности, где F — свободная группа конечного ранга $d(F)$, а G — конечная группа с минимальным числом порождающих $d(G)$. Изоморфны ли соответствующие абелизованные расширения, если $d(F) = d(G) + 1$? *К. Грюнберг (K. W. Gruenberg)*

Да, изоморфны (P. A. Linnell, *J. Pure Appl. Algebra*, **22** (1981), 143–166).

5.10. Пусть $E = H * K$. Обозначим разностные идеалы групп E, H, K через $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$, соответственно. Если I — правый идеал в $\mathbb{Z}E$, то пусть $d_E(I)$ означает минимальное число образующих I как правого идеала. Верно ли при условии конечной порожденности H и K равенство $d_E(\mathfrak{e}) = d_E(\mathfrak{h}E) + d_E(\mathfrak{k}E)$? Здесь $\mathfrak{h}E$ и $\mathfrak{k}E$ — правые идеалы, порожденные $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{k}$. *К. В. Грюнберг (K. W. Gruenberg)*

Нет, не всегда (P. A. Linnell, *неопубл.*) Вот простой пример: H — элементарная абелева группа порядка 4, K — элементарная абелева группа порядка 9. Здесь $d_E(\mathfrak{e}) = 3$, хотя $d_E(\mathfrak{h}E) = d_E(\mathfrak{k}E) = 2$. (K. W. Gruenberg, *письмо от 27.7.1995.*)

5.11. Пусть G — конечная группа и пусть существует такое непустое собственное подмножество π множества простых делителей $|G|$, что централизатор любого неединичного π-элемента является π-подгруппой. Следует ли отсюда, что G содержит такую подгруппу U, что: 1) $U^g \cap U = 1$ или U для любого элемента g из G и 2) централизатор любого нетривиального элемента из U содержится в U? *К. Грюнберг (K. W. Gruenberg)*

Да, следует (mod CFSG) (J. S. Williams, *J. Algebra*, **69** (1981), 487–513).

5.12. Пусть G — конечная группа с единичным разрешимым радикалом, в которой существуют силовские 2-подгруппы, имеющие неединичное пересечение. Верно ли, что если для любых силовских 2-подгрупп P и Q из G с условием $P \cap Q \neq 1$ индекс $|P : P \cap Q|$ не превосходит 2^n, то $|P| \leqslant 2^{2n}$? *В. В. Кабанов*

Да, верно, mod CFSG (В. И. Зенков, *Алгебра и логика*, **36**, № 2 (1997), 156–165).

5.13. Пусть K, L — различные классы сопряженных инволюций конечной группы G и $\langle x, y\rangle$ является 2-группой при любых $x \in K$, $y \in L$. Будет ли $G \neq [K, L]$?

В. В. Кабанов

Не всегда; например, $G = Sp_4(2^n)$, $n \geqslant 2$, K, L — классы инволюций, нетривиально пересекающиеся с центрами $N_G(M)'$ и $N_G(N)'$ соответственно, где M, N — различные элементарные подгруппы порядка 8 в силовской 2-подгруппе из G, а штрих означает взятие коммутанта (А. А. Махнев, *письмо от 10.10.1981*).

5.17. Если конечная группа G представима в виде $G = AB$, где A и B нильпотентны ступеней нильпотентности α и β соответственно, то G разрешима. Верно ли, что $G^{(\alpha+\beta)} = 1$? Известно, что $G^{(\alpha+\beta)}$ нильпотентна (Е. Пеннингтон, 1973), а также, что из $A' = B' = 1$ вытекает $G^{(2)} = 1$ (теорема Н. Ито). *О. Кегель (O. H. Kegel)*

Нет, не верно (J. Cossey, S. Stonehewer, *Bull. London Math. Soc.*, **30**, № 144 (1998), 247–250). См. новую задачу 14.43.

5.18. Пусть G — бесконечная локально конечная простая группа. Бесконечен ли централизатор каждого элемента группы G? *О. Кегель (O. H. Kegel)*

Да, бесконечен (B. Hartley, M. Kuzucuoḡlu, *Proc. London Math. Soc. (3)*, **62**, № 2 (1991), 301–324).

5.19. а) Пусть G — бесконечная локально конечная простая группа, удовлетворяющая условию минимальности для 2-подгрупп. Будет ли $G = PSL_2(F)$ для некоторого локально конечного поля нечетной характеристики, если централизатор любой инволюции из G почти локально разрешим?

б) Можно ли охарактеризовать простые локально конечные группы с условием min-2, содержащие максимальную радикальную нетривиальную 2-подгруппу ранга $\leqslant 2$, как линейные группы малого ранга? *О. Кегель (O. H. Kegel)*

а) Да, будет (Н. С. Черников, *Укр. мат. ж.*, **35** (1983), 265–266).
б) Да, можно (mod CFSG) по теореме 4.8 из (O. H. Kegel, B. A. F. Wehrfritz, *Locally finite groups*, North Holland, Amsterdam, 1973).

5.28. Пусть G — группа и H — такая ее подгруппа без кручения, что разностный идеал I_G целочисленного группового кольца $\mathbb{Z}G$ можно разложить как $I_G = I_H\mathbb{Z}G \otimes M$ для некоторого $\mathbb{Z}G$-модуля M. Доказать, что G — свободное произведение вида $G = H * K$. *Д. Коэн (D. E. Cohen)*

Доказано (W. Dicks, M. J. Dunwoody, *Groups acting on graphs*, Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York, 1989).

5.29. Рассмотрим группу G, заданную m образующими и n определяющими соотношениями, где $m \geqslant n$. Будут ли какие-то $m - n$ из заданных образующих порождать свободную подгруппу? *Р. Линдон (R. Lindon)*

Да, будут (Н. С. Романовский, *Алгебра и логика*, **16** (1977), 88–97).

5.32. Пусть p — простое число, C — класс сопряженных p-элементов конечной группы G, и пусть для любых элементов x, y из C произведение xy^{-1} является p-элементом. Будет ли подгруппа, порожденная классом C, примарной?

В. Д. Мазуров

Да, будет (при $p > 2$: W. Xiao, *Sci. in China*, **34**, № 9 (1991), 1025–1031; при $p = 2$: В. И. Зенков, *в кн. Algebra. Proc. III Intern. Conf. on Algebra, Krasnoyarsk, August 23–28, 1993*, De Gruyter, Berlin, 1996, 297–302).

5.34. Пусть $\mathfrak{o}$ — коммутативное кольцо с единицей и обратимым элементом 2, не порождаемое делителями нуля. Существуют ли нестандартные автоморфизмы $GL_n(\mathfrak{o})$ при $n \geqslant 3$? *Ю. И. Мерзляков*

Нет, не существуют (В. Я. Блощицын, *Алгебра и логика*, **17** (1978), 639–642).

5.40. Пусть G — счетная группа, действующая на множестве Ω. Предположим, что G является k-транзитивной для любого конечного k и не содержит нетривиальных подстановок с конечным носителем. Верно ли, что Ω можно отождествить с рациональной прямой $\mathbb{Q}$, на которой G действует как группа автогомеоморфизмов? *П. Нойман (P. M. Neumann)*

Нет, не верно (A. H. Mekler, *J. London Math. Soc.*, **33** (1986), 49–58).

5.41. В каждой ли неединичной конечной группе, свободной в некотором многообразии, есть неединичная абелева нормальная подгруппа? *А. Ю. Ольшанский*

Да, в каждой (mod CFSG). Иначе в контрпримере G централизатор произведения E всех минимальных нормальных подгрупп тривиален и в фактор-группе G/E есть элемент порядка m, где m — максимум порядков 2-элементов группы G. По теореме 1 из (M. Aschbacher, P. B. Kleidman, M. W. Liebeck, *Math. Z.*, **208**, № 3 (1991), 401–409), доказанной с использованием CFSG, в G есть элемент порядка $2m$, что противоречит выбору m. (С. А. Сыскин, *письмо от 20.8.1992.*)

5.43. Существует ли разрешимое многообразие групп, не порождаемое своими конечными подгруппами? *А. Ю. Ольшанский*

Да, существует (Ю. Г. Клейман, *Тр. Моск. мат. об-ва*, **44** (1982), 62–108).

5.46. Всякая ли рекурсивно определенная разрешимая группа вкладывается в группу, конечно определенную в многообразии всех n-ступенно разрешимых групп при подходящем выборе n? *В. Н. Ремесленников*

Да, всякая (Г. П. Кукин, *ДАН СССР*, **251** (1980), 37–39).

5.49. а) Верно ли, что группа $A_{m,n}$ всех автоморфизмов свободной n-ступенно разрешимой группы ранга n конечно порождена при любых m, n?

б) Верно ли, что любой автоморфизм из $A_{m,n}$ индуцируется некоторым автоморфизмом из $A_{m,n+1}$? *В. Н. Ремесленников*

а) Нет, не верно: группа $A_{3,2}$ не конечно порождена, хотя при $m \neq 3$ все $A_{m,2}$ конечно порождены (S. Bachmuth, H. Y. Mochizuki, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **270** (1982), 693–700; **292** (1985), 81–101).
б) Нет, не верно (V. Shpilrain, *Int. J. Algebra and Comput.*, **1**, № 2 (1991), 177–184).

5.50. Существует ли конечная группа, множество квазитождеств которой не имеет независимого базиса? *Д. М. Смирнов*

Да, существует (А. Н. Федоров, *Сиб. мат. ж.*, **21**, № 6 (1980), 117–131).

5.51. Обладает ли независимым базисом квазитождеств свободная неабелева группа? *Д. М. Смирнов*

Да, обладает (А. И. Будкин, *Мат. заметки*, **31** (1982), 817–826).

5.56. б) Существует ли локально нильпотентная группа простого периода, совпадающая со своим коммутантом (и потому не имеющая максимальных подгрупп)?
Дж. Уайголд (J. Wiegold)

Да, существует. Каждое неразрешимое многообразие $\mathfrak{V}$ содержит нетривиальную группу, совпадающую со своим коммутантом, — прямой предел спектра $F \xrightarrow{\varphi} F \xrightarrow{\varphi} \ldots$, где F — свободная группа многообразия $\mathfrak{V}$ на свободных порождающих $x_1, x_2, \ldots$, а φ — гомоморфизм, заданный отображением $x_i \to [x_{2i-1}, x_{2i}]$. Как показано в (Ю. П. Размыслов, *Алгебра и логика*, **10** (1971), 33–44), кострикинское многообразие локально нильпотентных групп простого периода $p \geqslant 5$ неразрешимо. (Е. И. Хухро, И. В. Львов, *письмо от 19.6.1976.*) То же доказано также в (Ю. А. Колмаков, *Мат. заметки*, **35**, № 5 (1984), 735–738). Пример, отвечающий на вопрос, построен также в (M. R. Vaughan-Lee, J. Wiegold, *Bull. London Math. Soc.*, **13**, № 1 (1981), 45–46).

5.60. Счетна ли произвольная разрешимая группа с условием минимальности для нормальных подгрупп? *Б. Хартли (B. Hartley)*

Нет, не всегда (B. Hartley, *Proc. London Math. Soc.*, **33** (1977), 55–75).

5.61. (Известный вопрос). Имеет ли произвольная несчетная локально конечная группа только один конец? *Б. Хартли (B. Hartley)*

Да, только один (D. Holt, *Bull. London Math. Soc.*, **13** (1981), 557–560).

5.62. Будет ли локально конечной группа, содержащая бесконечные абелевы подгруппы, при условии, что все они дополняемы в ней? *С. Н. Черников*

Нет, не всегда (Н. С. Черников, *Мат. заметки*, **28** (1980), 665–674).

5.63. Доказать, что конечная группа непроста, если она содержит два неединичных элемента, индексы централизаторов которых взаимно просты. *С. А. Чунихин*

Доказано mod CFSG (Л. С. Казарин, *в сб. Исследования по теории групп*, Свердловск, 1984, 81–99).

5.64. Пусть G — конечная группа, являющаяся произведением подгрупп A_1 и A_2. Доказать, что если A_i содержит нильпотентную подгруппу индекса $\leqslant 2$, $i = 1, 2$, то G разрешима. *Л. А. Шеметков*

Доказано (Л. С. Казарин, *Мат. сб.*, **110** (1979), 51–65).

5.65. Замкнут ли относительно конечных подпрямых произведений класс всех конечных групп, имеющих холловы π-подгруппы? *Л. А. Шеметков*

Да, замкнут (mod CFSG) (В. А. Ведерников, *Мат. заметки*, **59**, № 2 (1996), 311–313).

5.68. Пусть G — конечно определенная группа, имеющая полиномиальный рост в смысле Милнора. Показать, что в G разрешима проблема равенства слов.
П. Шупп (P. Schupp)

Показано (M. Gromov, *Publ. Math. IHES*, **53** (1981), 53–73).

5.69. Верно ли, что всякий решеточный изоморфизм группы без кручения, не содержащей циклических нормальных подгрупп, отличных от единичной, индуцируется групповым изоморфизмом? *Б. В. Яковлев*

Нет, не верно (A. Yu. Ol'shanskiĭ, *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, **32** (1979), 1165–1166).

6.4. Группа G называется *группой типа* $(FP)_\infty$, если тривиальный G-модуль $\mathbb{Z}$ имеет резольвенту, состоящую из конечно порожденных проективных G-модулей. Верно ли, что каждая группа без кручения типа $(FP)_\infty$ имеет конечную когомологическую размерность? *Р. Бири (R. Bieri)*

Нет, не верно (K. S. Brown, R. Geoghegan, *Invent. Math.*, **77** (1984), 367–381).

6.6. Пусть P, Q — подстановочные представления конечной группы G с одним и тем же характером. Предположим, что $P(G)$ — примитивная группа подстановок. Будет ли $Q(G)$ обязательно примитивной? Это верно, если G разрешима.

Х. Виландт (H. Wielandt)

Нет, не всегда (mod CFSG) (R. M. Guralnick, J. Saxl, in: *Groups, Combinatorics and Geometry, Proc. Durham, 1990*, Cambridge Univ. Press, 1992, 364–367).

6.7. Пусть P — конечная 2-группа. Существует ли такая характеристическая подгруппа $L(P)$ группы P, что $L(P)$ нормальна в H для любой конечной группы H, которая удовлетворяет следующим условиям: 1) P — силовская 2-подгруппа в H, 2) H является $\mathbb{S}_4$-свободной и 3) $C_H(O_2(H)) \leqslant O_2(H)$?

Дж. Глауберман (G. Glauberman)

Да, существует (B. Stellmacher, *Israel J. Math.*, **94** (1996), 367–379).

6.8. Можно ли финитно аппроксимируемую локально нормальную группу так вложить в декартово произведение конечных групп, чтобы при этом вложении каждый элемент группы имел не более конечного числа центральных проекций?

Ю. М. Горчаков

Да, можно (M. J. Tomkinson, *Bull. London Math. Soc.*, **13** (1981), 133–137).

6.12. а) Счетна ли метабелева группа, удовлетворяющая слабому условию минимальности для нормальных подгрупп?

б) Будет ли такая группа минимаксной, если она не имеет кручения?

Д. И. Зайцев

а) Да, счетна, б) Да, будет (Д. И. Зайцев, Л. А. Курдаченко, А. В. Тушев, *Алгебра и логика*, **24** (1985), 631–666).

6.13. Верно ли, что если неабелева силовская 2-подгруппа конечной группы G имеет нетривиальный прямой множитель, то группа G непроста?

А. С. Кондратьев

Да, верно mod CFSG (В. В. Кабанов, А. С. Кондратьев, *Силовские 2-подгруппы конечных групп (обзор)*, ИММ УрО АН СССР, Свердловск, 1979).

6.14. Является ли локально конечной решетка всех локально конечных многообразий групп? решетка всех многообразий групп? *А. В. Кузнецов*

Нет, не является (М. И. Анохин, *Изв. РАН, сер. мат.*, **63**, № 4 (1999), 19–36).

6.17. Всякое ли многообразие групп порождается теми своими конечно порожденными группами, для каждой из которых проблема равенства разрешима?

А. В. Кузнецов

Нет, не всякое (Ю. Г. Клейман, *Изв. АН СССР, сер. мат.*, **47** (1983), 37–74).

6.18. (Известный вопрос). Аппроксимируется ли свободная нециклическая группа классом 2-порожденных групп, порождающим многообразие всех групп?

В. М. Левчук

Нет, не всегда (С. В. Иванов, *Геометрические методы в изучении групп с заданными подгрупповыми свойствами*, канд. дисс., МГУ, М., 1988).

6.19. Пусть R — нильпотентное ассоциативное кольцо. Всегда ли равносильны следующие два утверждения для подгруппы H присоединенной группы кольца R: 1) H — нормальная подгруппа, 2) H — идеал группоида R относительно лиева умножения? *В. М. Левчук*

Нет, не всегда. Пусть R — свободная нильпотентная индекса 3 ассоциативная алгебра над $\mathbb{F}_2$ на свободных порождающих x, y. Пусть S — подалгебра, порожденная элементами $[x, y^2] = x * y^2$, $[x, xy] = x * (xy) = x(x * y)$, $[x, yx] = x * (yx) = (x * y)x$, где $[a, b]$ обозначает коммутатор в присоединенной группе с умножением $a \circ b = a + b + ab$, а $a * b = ab - ba$ — лиево умножение. Пусть M, N — подалгебры, порожденные S и элементами $x * y$ и $[x, y]$ соответственно. Минимальная подгруппа из $(R, \circ)$, содержащая x и являющаяся идеалом группоида $(R, *)$, равна $\langle x \rangle \circ M = \langle x \rangle + M$, где $\langle x \rangle = \{0,\, x,\, x^2,\, x + x^2 + x^3\}$, а минимальная нормальная подгруппа, содержащая x, равна $\langle x \rangle \circ N = \langle x \rangle + N$. Ни одна из них не содержится в другой. (Е. И. Хухро, *письмо от 23.7.1979.*)

6.20. Существует ли сверхразрешимая группа нечетного порядка, все автоморфизмы которой внутренние? *В. Д. Мазуров*

Да, существует (B. Hartley, D. J. S. Robinson, *Arch. Math.*, **35** (1980), 67–74).

6.22. Построить косу, принадлежащую коммутанту группы кос и не являющуюся коммутатором. *Г. С. Маканин*

Пусть $x = \sigma_1$, $y = \sigma_2$ — стандартные порождающие группы кос B_3; тогда коса $(xyxyx)^{12}(xy)^{-12}(xyx)^{-12}$ лежит в коммутанте группы B_3, но не является коммутатором (Ю. С. Семенов, *Тезисы 10-го Всесоюз. симп. по теории групп*, Минск, 1986, с. 207).

6.23. Коса K группы кос $\mathfrak{B}_{n+1}$ называется *гладкой*, если удаление любой из нитей из K превращает K в косу, равную 1 в $\mathfrak{B}_n$. Известно, что гладкие косы образуют свободную подгруппу. Описать порождающие этой подгруппы. *Г. С. Маканин*

Описаны (D. L. Johnson, *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, **92** (1982), 425–427).

6.25. (Известный вопрос). Указать алгоритм, вычисляющий ранг бескоэффициентных уравнений в свободной группе. Рангом уравнения называется максимальный ранг свободной подгруппы, порождаемой решением. *Г. С. Маканин*

Указан (А. А. Разборов, *Изв. АН СССР, сер. мат.*, **48** (1984), 779–832).

6.31. а) Пусть G — конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа, $d(G)$ — наименьшее число ее порождающих, $\delta(G)$ — наименьшее число топологических порождающих проконечного пополнения группы G. Всегда ли $\delta(G) = d(G)$? *О. В. Мельников*

Нет, не всегда (Г. А. Носков, *Мат. заметки*, **33** (1983), 489–498).

6.34. Пусть $\mathfrak{o}$ — ассоциативное кольцо с единицей. Система его идеалов $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_{ij} \mid i,j \in \mathbb{Z}\}$ называется *ковром идеалов*, если $\mathfrak{A}_{ik}\mathfrak{A}_{kj} \subseteq \mathfrak{A}_{ij}$ для всех $i,j,k \in \mathbb{Z}$. Если $\mathfrak{o}$ коммутативно, то $\Gamma_n(\mathfrak{A}) = \{x \in SL_n(\mathfrak{o}) \mid x_{ij} \equiv \delta_{ij} (\operatorname{mod} \mathfrak{A}_{ij})\}$ — группа; она называется (*специальной*) *конгруэнц-подгруппой по модулю ковра* $\mathfrak{A}$ (*«ковровая подгруппа»*). При достаточно общих условиях в (Ю. И. Мерзляков, *Алгебра и логика*, **3**, № 4 (1964), 49–59; см. также М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, *Основы теории групп*, изд. 3-е, М., Наука, 1982, с. 145) доказано, что в группах GL_n и SL_n взаимный коммутант конгруэнц-подгрупп по модулю ковра идеалов, сдвинутого на k и l шагов, есть снова конгруэнц-подгруппа по модулю того же ковра, сдвинутого на $k+l$ шагов. Доказать аналогичные теоремы а) для ортогональных групп, б) для унитарных групп. *Ю. И. Мерзляков*

Доказаны (В. М. Левчук, *ДАН СССР*, **313**, № 4 (1990), 799–802; *Укр. мат. ж.*, **44**, № 6 (1992), 786–795).

6.35. (Р. Бири, Р. Штребель). Пусть $\mathfrak{o}$ — коммутативное кольцо с единицей, отличной от нуля. Группа G называется *почти конечно определенной над* $\mathfrak{o}$, если она обладает представлением $G = F/R$, где F — конечно порожденная свободная группа и $\mathfrak{o}G$-модуль $R/[R,R] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{o}$ конечно порожден. Легко видеть, что каждая конечно определенная группа G почти конечно определена над $\mathbb{Z}$, а потому и над произвольным кольцом $\mathfrak{o}$. Верно ли обратное? *Ю. И. Мерзляков*

Нет, не верно (M. Bestvina, N. Brady, *Invent. Math.*, **129**, № 3 (1997), 445–470).

6.36. (Дж. Гроссман). Диаграммой нильпотентного пополнения группы G называется диаграмма групп и гомоморфизмов $G/\gamma_1 G \leftarrow G/\gamma_2 G \leftarrow \cdots$, где γ_i — взятие i-го централа, стрелки — естественные гомоморфизмы. Легко видеть, что каждая диаграмма нильпотентного пополнения $G_1 \leftarrow G_2 \leftarrow \cdots$ должна быть γ-диаграммой, т. е. все последовательности $1 \to \gamma_s G_{s+1} \to G_{s+1} \to G_s \to 1$, $s = 1, 2, \ldots$, должны быть точными. Существуют ли γ-диаграммы, не являющиеся диаграммами нильпотентного пополнения? *Ю. И. Мерзляков*

Да, существуют (Н. С. Романовский, *Сиб. мат. ж.*, **26**, № 4 (1985), 194–195).

6.37. (Х. Виландт, О. Кегель). Будет ли конечная группа G разрешимой, если в ней существуют разрешимые подгруппы A, B, C с условием $G = AB = AC = BC$? *В. С. Монахов*

Да, будет (mod CFSG) (L. S. Kazarin, *Commun. Algebra*, **14** (1986), 1001–1066).

6.42. Пусть H — сильно 3-вложенная подгруппа конечной группы G. Предположим, что $Z(H/O_{3'}(H))$ содержит элемент порядка 3. Будет ли $Z(G/O_{3'}(G))$ содержать элемент порядка 3? *Н. Д. Подуфалов*

Да, будет (mod CFSG) (W. Xiao, *Sci. China (ser. A)*, **33**, № 10 (1990), 1172-1181).

6.43. Обладает ли базисом от конечного числа переменных множество квазитождеств, истинных в классе всех конечных групп? *Д. М. Смирнов*

Нет, не обладает (А. К. Румянцев, *Алгебра и логика*, **19** (1980), 458–479).

6.44. Построить конечно порожденную бесконечную простую группу, не порождаемую двумя элементами. *Дж. Уайголд (J. Wiegold)*

Построена (В. С. Губа, *Сиб. мат. ж.*, **27**, № 5 (1986), 50–67).

6.46. Если G — d-порожденная группа без нетривиальных конечных гомоморфных образов (в частности, если G — бесконечная d-порожденная простая группа) для некоторого целого числа $d \geqslant 2$, то должна ли $G \times G$ быть d-порожденной группой? *Дж. Уилсон (J. S. Wilson)*

Нет, не должна (V. N. Obraztsov, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **123** (1993), 839–855).

6.52. Пусть f — локальный экран формации, содержащей все конечные нильпотентные группы, A — некоторая группа автоморфизмов конечной группы G. Пусть A действует f-стабильно на цоколе группы $G/\Phi(G)$. Верно ли, что A действует f-стабильно на $\Phi(G)$? *Л. А. Шеметков*

Нет, не всегда (А. Н. Скиба, *Сиб. мат. ж.*, **34**, № 5 (1993), 181–187).

6.53. Группа G вида $G = F \leftthreetimes H$ называется *группой Фробениуса* (или *фробениусовой группой*) *с ядром* F *и дополнением* H, если $H \cap H^g = 1$ для любого $g \in G \setminus H$ и $F \setminus \{1\} = G \setminus \bigcup\limits_{g \in G} H^g$. Что можно сказать о ядре и дополнении фробениусовой группы? В частности, какие группы могут выступать в качестве ядра? дополнения? *В. П. Шунков*

Любая группа вложима в ядро некоторой группы Фробениуса, и любая правоупорядочиваемая группа может быть дополнением в некоторой группе Фробениуса (В. В. Блудов, *Сиб. мат. ж.*, **38**, № 6 (1997), 1219–1221).

6.54. Построить пример бесконечной конечнопорожденной группы Фробениуса. *В. П. Шунков*

Построена (А. И. Созутов, *Сиб. мат. ж.*, **35**, № 4 (1994), 893–901).

6.57. Группа G называется (*сопряженно, p-сопряженно*) *бипримитивно конечной*, если для любой ее конечной подгруппы H в $N_G(H)/H$ любые два элемента простого порядка (любые два сопряженных элемента, элемента простого порядка p) порождают конечную подгруппу. Во всякой ли сопряженно бипримитивно конечной группе G периодические элементы составляют подгруппу — периодическую часть группы G? *В. П. Шунков*

Нет, не во всякой (А. А. Череп, *Алгебра и логика*, **26** (1987), 518–521).

6.58. Являются ли сопряженно бипримитивно конечными:
а) p-группы Алёшина,
б) 2-порожденные p-группы Голода? *В. П. Шунков*

а) Не всегда (А. В. Рожков, *Мат. сб.*, **129** (1986), 422–433).
б) Не всегда (А. В. Тимофеенко, *Алгебра и логика*, **24** (1985), 211–225).

6.63. Бесконечная группа G называется *монстром первого рода*, если она обладает элементом порядка > 2 и для любого такого элемента a и любой собственной подгруппы H группы G в разности $G \setminus H$ найдется элемент g, для которого $\langle a, a^g \rangle = G$. Классифицировать монстры первого рода с конечными собственными подгруппами. *В. П. Шунков*

Центр такой группы совпадает с множеством элементов порядка $\leqslant 2$ (В. П. Шунков, *Алгебра и логика*, **7**, № 1 (1968), 113–121). Бесконечная группа, у которой все подгруппы конечны и центр совпадает с множеством элементов порядка $\leqslant 2$, будет монстром первого рода (А. И. Созутов, *Алгебра и логика*, **36**, № 5 (1997), 573–598). Существует континуально много таких групп (А. Ю. Ольшанский, *Геометрия определяющих соотношений в группах*, М., Наука, 1989).

6.64. Группа G называется *монстром второго рода*, если она обладает элементом порядка > 2 и для любого такого элемента a и любой собственной подгруппы H группы G существует такое бесконечное подмножество $\mathfrak{M}_{a,H}$ элементов, сопряженных с a при помощи элементов из $G \setminus H$, что $\langle a, c\rangle = G$ для всех $c \in \mathfrak{M}_{a,H}$. Существуют ли смешанные (т. е. содержащие кручение и элементы бесконечного порядка) монстры второго рода? Существуют ли монстры второго рода без кручения? *В. П. Шунков*

Да, существуют, в обоих случаях (А. Ю. Ольшанский, *Геометрия определяющих соотношений в группах*, Наука, М., 1989).

7.2. Доказать, что свободные периодические группы $B(m, n)$ нечетного периода $n \geqslant 665$ с $m \geqslant 2$ порождающими неаменабельны и случайные блуждания на этих группах не обладают свойством возвратности. *С. И. Адян*

Оба утверждения доказаны (С. И. Адян, *Изв. АН СССР, сер. мат.*, **46** (1982), 1139–1149).

7.4. Верно ли, что конечно порожденная группа с квадратичным ростом почти абелева? *В. В. Беляев*

Да, верно (M. Gromov, *Publ. Math. IHES*, **53** (1981), 53–73; J. A. Wolf, *Differ. Geometry*, **2** (1968), 421–446).

7.6. Описать бесконечные простые локально конечные группы с черниковской силовской 2-подгруппой. Будут ли такие группы группами Шевалле над локально конечным полем нечетной характеристики? *В. В. Беляев, Н. Ф. Сесекин*

Да, будут (mod CFSG) (В. В. Беляев, *в сб. Исследования по теории групп*, УНЦ АН СССР, Свердловск, 1984, 39–50; А. В. Боровик, *Сиб. мат. ж.*, **24**, № 6 (1983), 26–35; B. Hartley, G. Shute, *Quart. J. Math. Oxford (2)*, **35** (1984), 49–71; S. Thomas, *Arch. Math.*, **41** (1983), 103–116).

7.7. (Известный вопрос). Конечна ли группа $G = \langle a, b \mid a^9 = 1,\ \ ab = b^2a^2 \rangle$? Эта группа содержит $F(2, 9)$ — единственную из групп Фибоначчи, о которой пока неизвестно, конечна она или бесконечна. *Р. Бернс (R. G. Burns)*

Нет, она бесконечна, поскольку бесконечна $F(2, 9)$ (M. F. Newman, *Arch. Math.*, **54**, № 3 (1990), 209–212).

7.8. Пусть H — нормальная подгруппа группы G, причем и H, и G — подпрямые произведения одних и тех же n групп $G_1, \ldots, G_n$. Верно ли, что ступень нильпотентности группы G/H растет с ростом n? *Ю. М. Горчаков*

Да, верно (Е. И. Хухро, *Сиб. мат. ж.*, **23**, № 6 (1982), 178–180).

7.12. Найти все группы с холловой $2'$-подгруппой. *Р. Грайс (R. Griess)*

Найдены (mod CFSG) (Z. Arad, M. B. Ward, *J. Algebra*, **77** (1982), 234–246).

7.16. Если H — собственная подгруппа конечной группы G, то всегда ли существует примарный элемент, не сопряженный с элементом из H?

Р. Грайс (R. Griess)

Да, всегда (mod CFSG) (B. Fein, W. M. Kantor, M. Schacher, *J. Reine Angew. Math.*, **328** (1981), 39–57).

7.24. Назовем группу *бедной*, если порождаемое ею многообразие имеет не более чем счетное число подмногообразий. Существует ли конечно порожденная бедная группа с неразрешимой проблемой равенства? *А. В. Кузнецов*

Да, существует, например, свободная группа многообразия $\mathfrak{N}_3\mathfrak{A}$. Согласно (А. Н. Красильников, *Изв. АН СССР, сер. мат.*, **54** (1990), 1181–1195) любое подмногообразие из $\mathfrak{N}_3\mathfrak{A}$ имеет конечный базис тождеств; поэтому этих подмногообразий только счетное число. Проблема же равенства неразрешима по (О. Г. Харлампович, *Изв. ВУЗов, мат.*, **1988**, № 11 (318), 82–84).

7.37. б) Проконечную группу назовем *строго полной*, если всякая ее подгруппа конечного индекса открыта. Известно (B. Hartley, *Math. Z.*, **168**, № 1 (1979), 71–76), что строго полными являются конечно порожденные проконечные группы, обладающие конечным нормальным рядом с пронильпотентными факторами. Будет ли строго полной конечно порожденная проразрешимая группа? *О. В. Мельников*

Да, будет (D. Segal, *Proc. London Math. Soc. (3)*, **81** (2000), 29–54).

7.44. Обладает ли дополнением нормальная подгруппа H в конечной группе G, если каждая силовская подгруппа из H выделяется прямым сомножителем в некоторой силовской подгруппе группы G? *В. И. Сергиенко*

Да, обладает, mod CFSG (W. Xiao, *J. Pure Appl. Algebra*, **87**, № 1 (1993), 97–98).

7.48. (Известный вопрос). Пусть в конечной группе G сопряжены любые два элемента одного порядка. Верно ли, что $|G| \leqslant 6$? *С. А. Сыскин*

Да, верно (mod CFSG) (W. Feit, G. Seitz, *Illinois J. Math.*, **33**, № 1 (1988), 103–131; см. также R. W. van der Waall, A. Bensaïd, *Simon Stevin*, **65** (1991), 361–374).

7.53. Пусть p — простое число. Тождество $x \cdot x^{\varphi} \cdots x^{\varphi^{p-1}} = 1$ из определения расщепляющего автоморфизма (см. 1.10) задает многообразие групп с операторами $\langle\varphi\rangle$, состоящее из всех групп, допускающих расщепляющий автоморфизм порядка p. Справедлив ли для этого многообразия аналог теоремы Кострикина, т. е. верно ли, что локально нильпотентные группы из него составляют подмногообразие? *Е. И. Хухро*

Да, справедлив (Е. И. Хухро, *Мат. сб.*, **130** (1986), 120–127).

7.57. Порождающее множество конечно определенной группы G, состоящее из наименьшего возможного числа элементов $d(G)$, назовем *базой* группы G. Пусть $r_M(G)$ — наименьшее число соотношений, необходимых для задания группы G в базе M, и $r(G)$ — минимум чисел $r_M(G)$ по всем базам M группы G. Пусть G_1 и G_2 — любые нетривиальные группы. Верно ли, что

б) $r_{M_1\cup M_2}(G_1 * G_2) = r_{M_1}G_1 + r_{M_2}(G_2)$ для любых баз M_1 и M_2 групп G_1 и G_2 соответственно,

в) $r(G_1 * G_2) = r(G_1) + r(G_2)$? *В. А. Чуркин*

б) Нет, не всегда, в) нет, не верно (C. Hog, M. Lusztig, W. Metzler, in: *Presentation classes, 3-manifolds and free products* (*Lecture Notes in Math.*, **1167**), Springer, 1985, 154–167).

8.6. (М. Дэй). Совпадает ли класс аменабельных групп с классом элементарных групп, т. е. групп, получающихся из коммутативных и конечных при помощи следующих операций: 1) взятие подгруппы, 2) взятие факторгруппы, 3) групповое расширение, 4) объединение направленной по включению системы групп? *Р. И. Григорчук*

Нет, не совпадает (Р. И. Григорчук, *ДАН СССР*, **271** (1983), 30–33).

8.8. (Д. В. Аносов), а) Существует ли конечно порожденная группа G, отличная от циклической и содержащая такой элемент a, что всякий элемент группы G сопряжен с некоторой степенью элемента a? *Р. И. Григорчук*

Да, существует (В. С. Губа, *Изв. АН СССР, сер. мат.*, **50** (1986), 883–924).

8.10. б) Конечна или бесконечна группа $G = \langle a, b \mid a^n = 1,\ ab = b^3a^3 \rangle$ при $n = 9$ и $n = 15$? Все другие случаи известны. См. 7.7. *Д. Джонсон (D. L. Johnson)*

б) Бесконечна (при $n = 15$: D. J. Seal, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A*, **92** (1982), 181–192; при $n = 9$ (и 15): M. I. Prishchepov, *Commun. Algebra*, **23**, №13 (1995), 5095–5117).

8.13. Пусть G — простая алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем характеристики p и пусть $\mathfrak{G}$ — алгебра Ли группы G. Конечно ли число орбит нильпотентных элементов алгебры $\mathfrak{G}$ при присоединенном действии группы G? Это верно, если p не слишком мало (т. е. p не является «плохим числом» для G). *Р. Картер (R. W. Carter)*

Да, конечно (J. N. Spaltenstein; см. параграф 5.11 книги R. W. Carter, *Finite groups of Lie Type*, John Wiley, 1985).

8.14. а) Предположим, что G — экзистенциально замкнутая группа из класса $L\mathfrak{N}_p$, состоящего из всех локально конечных p-групп. Верно ли, что G автоморфно проста? Это верно для счетной группы G из $L\mathfrak{N}_p$ (Berthold Maier, Freiburg); более того, в действительности, с точностью до изоморфизма существует только одна такая счетная локально конечная p-группа. *О. Кегель (O. H. Kegel)*

Нет, в общем случае не верно (S. R. Thomas, *Arch. Math.*, **44** (1985), 98–109).

8.17. Замкнут ли относительно взятия нормальных подгрупп класс $\widetilde{RN}$-групп, т. е. групп, все гомоморфные образы которых обладают свойством RN? *Ш. С. Кемхадзе*

Нет, не замкнут (J. S. Wilson, *Arch. Math.*, **25** (1974), 574–577).

8.18. Всякая ли счетная абелева группа является вербальной подгруппой некоторой конечно порожденной (разрешимой) относительно свободной группы? *Ю. Г. Клейман*

Да, всякая (A. Storozhev, *Commun. Algebra*, **22**, №7 (1994), 2677–2701).

8.22. Если (неабелева) конечная группа G содержится в объединении $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ двух многообразий групп $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, то должны ли существовать такие конечные группы $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$, что G изоморфна секции прямого произведения $A \times B$? *Л. Ковач (L. G. Kovács)*

Нет, не должны (A. Storozhev, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **51**, №2 (1995), 287–290).

8.26. Многообразие назовем *проходимым*, если существует неуплотняемая цепь его подмногообразий, вполне упорядоченная по включению. Например, всякое многообразие, порождаемое его конечными группами, проходимо — это легко вытекает из (Х. Нейман, *Многообразия групп*, М., Мир, 1969, гл. 5). Существуют ли непроходимые многообразия групп? *А В. Кузнецов*

Да, существуют (М. И. Анохин, *Вестник МГУ, сер. 1, мат. мех.*, **1996**, № 1, 88–89).

8.28. Для всякого ли конечно базируемого квазимногообразия групп порождаемое им многообразие групп тоже конечно базируемо? *А. В. Кузнецов*

Нет, не для всякого (М. И. Анохин, *Мат. сб.*, **189**, № 8 (1998), 3–12).

8.32. Пусть G — такая конечно порожденная группа, что для любого множества π простых чисел и любой подгруппы H из G выполняется условие: если $G/\left\langle H^G \right\rangle$ — конечная π-группа, то $|G:H|$ — конечное π-число. Нильпотентна ли группа G? Для конечно порожденных разрешимых групп ответ положительный.

Дж. Леннокс (J. C. Lennox)

Нет, не всегда (V. N. Obraztsov, *J. Austral. Math. Soc. (Ser. A)*, **61**, №2 (1996), 267–288).

8.35. Перечислить классы сопряженных максимальных подгрупп в простых спорадических группах а) F_{24}'; б) F_2. *В. Д. Мазуров*

а) Перечислены mod CFSG (S. A. Linton, R. A. Wilson, *Proc. London Math. Soc.*, **63**, №1 (1991), 113–164).
б) Перечислены mod CFSG (R. A. Wilson, *J. Algebra*, **211**, №1 (1999), 1–14).

8.37. (Р. Грайс). Вложима ли в качестве секции:
а) M_{11} в $O'N$?
б) M_{24} в F_2?; J_1 в F_1 и в F_2? J_2 в F_{23}, в F_{24}' и в F_2? *В. Д. Мазуров*

а) Да, вложима (А. А. Иванов, С. В. Шпекторов, *Тезисы 18-й Всесоюз. алгебр. конф.*, Ч. 1, Кишинев, 1985, с. 209; S. Yoshiara, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Ser. IA*, **32** (1985), 105–141).
б) Нет, не вложимы (R. A. Wilson, *Bull. London Math. Soc.*, **18** (1986), 349–350).

8.39. б) Описать неприводимые подгруппы групп $SL_6(q)$. *В. Д. Мазуров*

Описаны mod CFSG (А. С. Кондратьев, *Алгебра и логика*, **28** (1989), 181–206; P. Kleidman, *Low-dimensional finite classical groups and their subgroups*, Harlow, Essex, 1989).

8.46. Описать автоморфизмы симплектической группы Sp_{2n} над произвольным коммутативным кольцом. *Гипотеза:* все они стандартны. *Ю. И. Мерзляков*

Гипотеза доказана (В. М. Петечук, *Алгебра и логика*, **22** (1983), 551–562).

8.47. Существуют ли конечно определенные разрешимые группы, в которых не выполняется условие максимальности для нормальных подгрупп, хотя все центральные секции конечно порождены? *Ю. И. Мерзляков*

Да, существуют (Ю. В. Сосновский, *Мат. заметки*, **36** (1984), 171–177).

8.48. Будет ли разрешимой конечная группа, представимая в виде произведения двух разрешимых подгрупп нечетных индексов? *В. С. Монахов*

Да, будет (mod GFSG) (L. S. Kazarin, *Commun. Algebra*, **14** (1986), 1001–1066).

8.49. Пусть G — p-группа, действующая транзитивно в качестве группы подстановок множества Ω, и пусть F — поле характеристики p. Рассмотрим $F\Omega$ как FG-модуль. Верно ли, что убывающий и возрастающий ряды Лёви совпадают?

П. Нойман (P. M. Neumann)

Да, верно (J. L. Alperin, *Quart. J. Math. Oxford (2)*, **39**, №154 (1988), 129–133).

8.53. б) Пусть n — достаточно большое нечетное число. Верно ли, что каждая нециклическая подгруппа группы $B(m,n)$ содержит подгруппу, изоморфную $B(m,n)$? *А. Ю. Ольшанский*

Да, верно (В. С. Атабекян, *Об аппроксимации и подгруппах свободных периодических групп*, Деп. № 5380-В86, ВИНИТИ, М., 1986).

8.56. Пусть X — конечное множество, а f — функция, принимающая натуральные значения на его подмножествах. Потребуем, чтобы в группе с порождающим множеством X каждая подгруппа $\langle Y \rangle$, $Y \subseteq X$, была нильпотентна ступени $\leqslant f(Y)$. Верно ли, что свободная относительно этого условия группа G_f не имеет кручения? *А. Ю. Ольшанский*

Нет, не верно (В. В. Блудов, В. Ф. Клейменов, Е. В. Хламов, *Алгебра и логика*, **29**, № 2 (1990), 139–140).

8.63. Пусть пространство всех замкнутых подгрупп локально компактной группы G σ-компактно в E-топологии. Верно ли, что множество замкнутых некомпактных подгрупп группы G не более чем счетно? *И. В. Протасов*

Да, верно (А. Г. Пискунов, *Укр. мат. ж.*, **40** (1988), 803–807).

8.66. Построить примеры финитно аппроксимируемых групп, разделяющие введенные В. П. Шунковым классы групп с условием (a, b)-конечности, (слабо) сопряженно бипримитивно конечных групп и (слабо) бипримитивно конечных групп (см., в частности, 6.57). Нельзя ли извлечь такие примеры из конструкции Е. С. Голода? *А. И. Созутов*

Построены (L. Hammoudi, *Nil-algèbres non-nilpotentes et groupes périodiques infinis (Doctor thesis)*, Strasbourg, 1996; А. В. Рожков, *Условия конечности в группах автоморфизмов деревьев (докт. дисс.)*, Красноярск, 1997; *Алгебра и логика*, **37**, № 3 (1998), 338–357).

8.70. Пусть A, B — почти полициклические группы и $G = A *_H B$, где H — циклическая группа. Является ли группа G финитно аппроксимируемой относительно сопряженности? *Ч. Тан (C. Y. Tang)*

Да, является (L. Ribes, D. Segal, P. A. Zalesskii, *J. London Math. Soc. (2)*, **57**, № 3 (1998), 609–628).

8.71. Всякая ли счетная группа, финитно аппроксимируемая относительно сопряженности, вложима в 2-порожденную группу, финитно аппроксимируемую относительно сопряженности? *Ч. Тан (C. Y. Tang)*

Да, всякая (В. А. Романьков, *Теоремы вложения для финитно аппроксимируемых групп*, Препринт 84-515, ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1984).

8.73. Скажем, что конечная группа G *разделяет циклические подгруппы*, если для любых циклических подгрупп A и B группы G найдется такой элемент $g \in G$, что $A \cap B^g = 1$. Верно ли, что группа G тогда и только тогда разделяет циклические подгруппы, когда в ней нет нетривиальных циклических нормальных подгрупп? *Дж. Томпсон (J. G. Thompson)*

Нет, не верно. Для $p_1 = 2$, $p_2 = 5$, $p_3 = 11$, $p_4 = 17$ пусть R_i — элементарная абелева группа порядка p_i^2, а φ_i — регулярный автоморфизм порядка 3 группы R_i, $i = 1, 2, 3, 4$. В прямом произведении $R_1\langle\varphi_1\rangle \times R_2\langle\varphi_2\rangle \times R_3\langle\varphi_3\rangle \times R_4\langle\varphi_4\rangle$ пусть G — подгруппа, порожденная всеми R_i и элементами $\varphi_2\varphi_3\varphi_4$ и $\varphi_1\varphi_3\varphi_4^{-1}$. Тогда в G нет нетривиальных циклических нормальных подгрупп и любая (циклическая) подгруппа порядка $2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 17$ пересекается с любой своей сопряженной нетривиально. (Н. Д. Подуфалов, *Тезисы 9-го Всесоюз. симп. по теории групп*, М., 1984, 113–114.)

8.80. Пусть G — локально конечная группа, содержащая черниковскую максимальную подгруппу. Является ли G почти разрешимой? *Б. Хартли (B. Hartley)*

Да, является (Б. Хартли, *Алгебра и логика*, **37**, № 1 (1998), 101–106).

8.81. Пусть G — конечная p-группа, допускающая автоморфизм α простого порядка q, и пусть $|C_G(\alpha)| \leqslant n$.

а) Если $q = p$, то найдется ли в G подгруппа, ступень нильпотентности которой не превосходит 2, а индекс ограничен функцией от n?

б) Если $q \neq p$, то будет ли G обладать подгруппой, ступень нильпотентности которой ограничена функцией от p, а индекс — функцией от n (и, возможно, от q)? *Б. Хартли (B. Hartley)*

а) Нет, не обязательно (Е. И. Хухро, *Мат. заметки*, **38** (1985), 652–657).
б) Да, будет (Е. И. Хухро, *Мат. сб.*, **181**, № 9 (1990), 1207–1219).

8.84. Скажем, что автоморфизм φ группы G является *псевдо-единицей*, если для любого элемента $x \in G$ существует такая конечно порожденная подгруппа K_x группы G, что $x \in K_x$ и $\varphi\,|_{K_x}$ является автоморфизмом K_x. Пусть G порождается подгруппами H, K и пусть G локально нильпотентна. Пусть $\varphi\colon G \to G$ — такой эндоморфизм, что $\varphi|_H$ — псевдо-единица H и $\varphi|_K$ — автоморфизм K. Следует ли отсюда, что φ — автоморфизм G? Известно, что φ является псевдо-единицей G, если, дополнительно, $\varphi|_K$ является псевдо-единицей K; известно также, что φ — автоморфизм, если, дополнительно, K нормальна в G. *П. Хилтон (P. Hilton)*

Нет, не следует (А. В. Ягжев, *Мат. заметки*, **56**, № 5 (1994), 154–156).

8.87. Найти все те наследственные локальные формации $\mathfrak{F}$ конечных групп, для которых справедливо утверждение: всякая конечная минимальная не $\mathfrak{F}$-группа бипримарна. Конечная группа называется *бипримарной*, если ее порядок делится точно на два различных простых числа. *Л. А. Шеметков*

Найдены (В. Н. Семенчук, *Вопросы алгебры: Изв. Гомельского гос. ун-та*, № 1 (15) (1999), 92–102).

9.2. Является ли группа $G = \langle a, b \mid a^l = b^m = (ab)^n = 1\rangle$ финитно аппроксимируемой относительно сопряженности? *Р. Алленби (R. B. J. T. Allenby)*

Да, является (B. Fine, G. Rosenberger, *Contemp. Math.*, **109** (1990), 11–18).

9.3. Пусть G — счетная локально конечная группа, не содержащая собственных подгрупп, изоморфных самой G, и пусть силовские подгруппы группы G конечны. Имеет ли G неединичную конечную нормальную подгруппу? *В. В. Беляев*

Да, имеет (S. D. Bell, *Locally finite groups with Cernikov Sylow subgroups*, (*Ph. D. Thesis*), Univ. of Manchester, 1994).

9.12. Может ли разрешимая группа конечного ранга без кручения, не допускающая конечного множества порождающих, обладать точным неприводимым представлением над конечным полем? *Д. И. Зайцев*

Да, может (А. В. Тушев, *Укр. мат. жс.*, **42**, № 10 (1990), 1389–1394).

9.16. (Известный вопрос). *Графом простых чисел* конечной группы G называется граф со множеством вершин $\pi(G)$ и ребрами, соединяющими пару вершин p, q в том и только том случае, если G содержит элемент порядка pq. Описать все конечные группы Шевалле над полем характеристики 2 с несвязным графом простых чисел и найти для них все связные компоненты этого графа.

А. С. Кондратьев

Описаны и найдены (А. С. Кондратьев, *Мат. сб.*, **180** (1989), 787–797).

9.17. а) Пусть G — локально нормальная финитно аппроксимируемая группа. Вложима ли G в прямое произведение конечных групп, если фактор-группа $G/[G,G]$ разлагается в прямое произведение циклических групп?

Л. А. Курдаченко

Нет, не всегда (Л. А. Курдаченко, *Мат. заметки*, **39** (1986), 494–506).

9.18. Пусть $\mathfrak{S}_*$ — наименьший нормальный класс Фиттинга. Существуют ли классы Фиттинга, которые максимальны в $\mathfrak{S}_*$ (по включению)?

Х. Лауш (H. Lausch)

Нет, не существуют (Н. Т. Воробьев, *ДАН БССР*, **35**, № 6 (1991), 485–487).

9.19. б) Пусть $n(X)$ обозначает минимум индексов собственных подгрупп группы X. Подгруппа A конечной группы G называется *широкой*, если A — максимальный по включению элемент множества $\{X \mid X$ — собственная простая подгруппа группы G и $n(X) = n(G)\}$. Доказать, не используя CFSG, что $n(F_1) = |F_1 : 2F_2|$, где F_1, F_2 — простые группы Фишера, $2F_2$ — расширение группы порядка 2 посредством группы F_2.

В. Д. Мазуров

б) Доказано (С. В. Жаров, В. Д. Мазуров, *в сб. Математическое программирование и приложения*, Екатеринбург, 1995, 96–97).

9.21. Пусть P — максимальная параболическая подгруппа наименьшего индекса в конечной группе G лиева типа E_6, E_7, E_8 или ${}^2E_6$ и X — подгруппа, для которой $PX = G$. Верно ли, что $X = G$?

В. Д. Мазуров

Да, верно (mod CFSG) (C. Hering, M. W. Liebeck, J. Saxl, *J. Algebra*, **106**, № 2 (1987), 517–527).

9.26. а) Описать конечные группы 2-локального 3-ранга 1, у которых 3-ранг не меньше 3.

А. А. Махнев

Описаны (А. А. Махнев, *Сиб. мат. ж.*, **29**, № 6 (1988), 100–110).

9.27. Пусть M — подгруппа конечной группы G, A — абелева 2-подгруппа из M, и A^g не содержится в M для некоторого g из G. Описать строение группы G при условии, что $\langle A, A^x\rangle = G$ для любой подгруппы A^x, $x \in G$, не лежащей в M.

А. А. Махнев

Описано mod CFSG (В. И. Зенков, *Алгебра и логика*, **35**, № 3 (1996), 288–293).

9.33. (Ф. Кюмих, Х. Шерер). Будет ли замкнутая подгруппа H связной локальной компактной группы G нормальной в G, если $\overline{HX} = \overline{H}\,\overline{X}$ для каждой замкнутой подгруппы X группы G?

Ю. Н. Мухин

Да, будет (C. Scheiderer, *Monatsh. Math.*, **98** (1984), 75–81).

9.34. (С. Гроссер, У. Херфорт). Существует ли бесконечная компактная p-группа, в которой централизаторы всех элементов конечны?

Ю. Н. Мухин

Нет, не существует ввиду связи этого вопроса с ослабленной проблемой Бернсайда (S. K. Grosser, W. N. Herfort, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **283**, № 1 (1984), 211–224) и положительным решением последней (Е. И. Зельманов, *Изв. АН СССР, сер. мат.*, **54**, № 1 (1990), 42–59; *Мат. сб.*, **182**, № 4 (1991), 568–592).

9.41. а) Пусть Ω — бесконечное счетное множество. Для $k \geqslant 2$ определим *k-секцию* множества Ω как разбиение Ω в объединение k бесконечных подмножеств. Существует ли транзитивная группа подстановок множества Ω, транзитивная на k-секциях, но интранзитивная на упорядоченных k-секциях?

П. Нойман (P. M. Neumann)

Да, существует. Пусть U — неглавный ультрафильтр в $\mathfrak{P}(\Omega)$; положим $G = \{g \in \mathrm{Sym}(\Omega) \mid \mathrm{Fix}(g) \in U\}$. Нетрудно показать, что группа G транзитивна на k-секциях, но не на упорядоченных k-секциях для любого k в диапазоне $2 \leqslant k \leqslant \aleph_0$. (P. M. Neumann, *письмо от 5.10.1989.*)

9.43. а) Указанная в решении 8.73 группа G позволяет построить проективную плоскость порядка 3 — в качестве прямых надо взять любой класс сопряженных подгрупп порядка $2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ и добавить естественным образом еще четыре прямых. Аналогично можно построить проективные плоскости порядка p^n для любого простого p и любого натурального n. Будут ли полученные плоскости плоскостями Галуа? *Н. Д. Подуфалов*

Нет, не всегда. Ответ утвердительный при $n = 1$. Но при $n > 1$ указанные плоскости могут и не быть плоскостями Галуа. Например, если существует почти-поле из p^n элементов, то среди указанных плоскостей порядка p^n обязательно будут и недезарговы плоскости. (Н. Д. Подуфалов, *письмо от 24.11.1986.*)

9.46. Пусть G — локально компактная группа счетного веса, $L(G)$ — пространство всех ее замкнутых подгрупп, снабженное E-топологией. Является ли $L(G)$ k-пространством? *И. В. Протасов*

Да, является (И. В. Протасов, *ДАН УССР, сер. А*, **10** (1986), 64–66).

9.48. Замкнуто ли множество компактных элементов нульмерной локально компактной группы? *И. В. Протасов*

Да, замкнуто (G. A. Willis, *Math. Ann.*, **300** (1994), 341–363).

9.50. Всякая ли 4-энгелева группа

б) с тождеством $x^5 = 1$ локально конечна?

в) (Р. И. Григорчук) периода 8 локально конечна? *Ю. П. Размыслов*

б) Да, всякая (M. R. Vaughan-Lee, *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, **74** (1997), 306–334). в) Да; более того, всякая 4-энгелева 2-группа локально конечна (G. Traustason, *J. Algebra*, **178**, № 2 (1995), 414–429).

9.54. Если $G = HK$ — разрешимая группа и H, K — минимаксные группы, то верно ли, что G — минимаксная группа? *Д. Робинсон (D. J. S. Robinson)*

Да, верно (J. S. Wilson, *J. Pure Appl. Algebra*, **53**, № 3 (1988), 297–318; Я. П. Сысак, *Радикальные модули над группами конечного ранга*, Инст. мат. АН УССР, Киев, 1989).

9.58. Существуют ли локальные произведения нелокальных формаций конечных групп? *А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков*

Да, существуют (В. А. Ведерников, *Мат. заметки*, **46**, № 6 (1989), 32–37; Н. Т. Воробьев, in: *Proc. 7th Regional Sci. Session Math.*, Zielona Goru, 1989, 79–86).

9.62. Смежные классы произвольной группы G по всевозможным ее нормальным подгруппам вместе с пустым подмножеством образуют по включению *решетку блоков* $C(G)$, которая при бесконечном $|G|$ подпрямо неприводима, а при конечном $|G| \geqslant 3$ даже проста (Д. М. Смирнов, А. В. Рейбольд, *Алгебра и логика*, **23**, № 6 (1984), 684–701). Неизвестно, как велик класс таких решеток; в частности, всякая ли конечная решетка вложима в решетку $C(G)$ для некоторой конечной группы G? *Д. М. Смирнов*

Для всякого элемента g группы G главный фильтр $\{x \in C(G) \mid g \in x\}$ модулярен (даже аргов); многообразие, порожденное решетками блоков групп, не содержит всех конечных решеток (Д. М. Смирнов, *Сиб. мат. ж.*, **33**, № 4 (1992), 128–134).

9.63. Разрешима ли конечная группа вида $G = ABA$ с абелевой подгруппой A и циклической подгруппой B? *Я. П. Сысак*

Да, разрешима mod CFSG (Д. Л. Загорин, Л. С. Казарин, *ДАН СССР*, **347**, № 5 (1996), 590–592).

9.73. Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольная локальная формация разрешимых конечных групп, содержащая все конечные нильпотентные группы. Доказать, что для любых двух субнормальных подгрупп H и K произвольной конечной группы G справедливо равенство $H^{\mathfrak{F}}K = KH^{\mathfrak{F}}$. *Л. А. Шеметков*

Доказано, даже без условия разрешимости формации $\mathfrak{F}$ (С. Ф. Каморников, *ДАН БССР*, **33** (1989), 396–399).

9.74. Найти все те наследственные локальные формации $\mathfrak{F}$ конечных групп, для которых справедливо утверждение: всякая конечная минимальная не $\mathfrak{F}$-группа либо является группой Шмидта, либо имеет простой порядок. *Л. А. Шеметков*

Найдены (С. Ф. Каморников, *Сиб. мат. ж.*, **35**, № 4 (1994), 801–812).

9.79. (А. Г. Курош). Не будет ли всякая группа с условием минимальности счетной? *В. П. Шунков*

Нет, не будет (В. Н. Образцов, *Мат. сб.*, **180** (1989), 529–541).

9.80. Содержатся ли 2-элементы группы с условием минимальности в ее локально конечном радикале? *В. П. Шунков*

Нет, не обязательно (А. Ю. Ольшанский, *Геометрия определяющих соотношений в группах*, Наука, М., 1989).

9.81. Существует ли простая группа с условием минимальности, обладающая неединичной квазициклической подгруппой? *В. П. Шунков*

Да, существует (В. Н. Образцов, *Мат. сб.*, **180** (1989), 529–541).

9.82. Бесконечная группа, все собственные подгруппы которой конечны, называется *квазиконечной*. Верно ли, что элемент квазиконечной группы G тогда и только тогда является центральным, когда он содержится в бесконечном множестве подгрупп группы G? *В. П. Шунков*

Нет, не верно (К. И. Лоссов, *Вложения некоторых амальгам в квазиконечные группы*, Деп. ВИНИТИ, № 5529-В89, М., 1988).

10.1. Пусть p — простое число. Описать группы порядка p^9 и ступени нильпотентности 2, содержащие такие подгруппы X и Y, что $|X| = |Y| = p^3$ и любые неединичные элементы $x \in X$, $y \in Y$ неперестановочны. Ответ на этот вопрос позволит описать полуполя порядка p^3. *С. Н. Адамов, А. Н. Фомин*

Описаны (В. А. Антонов, *Препринт*, Челябинск, 1999).

10.6. Верно ли, что в абелевой группе всякая недискретная групповая топология может быть усилена до такой недискретной групповой топологии, что получится полная топологическая группа? *В. И. Арнаутов*

Верно для групповых топологий, удовлетворяющих первой аксиоме счетности (Е. И. Марин, *в сб. Модули, алгебры, топологии* (*Мат. иссл.*, **105**), Кишинев, 1988, 105–119), а для произвольных групповых топологий не верно, см. Архив, 12.2.

10.7. Верно ли, что в счетной группе G всякая недискретная групповая топология, удовлетворяющая первой аксиоме счетности, может быть усилена до такой недискретной групповой топологии, что G станет полной топологической группой? В случае, когда G абелева, это верно. *В. И. Арнаутов*

Да, верно (В. И. Арнаутов, Е. И. Кабанова, *Сиб. мат. ж.*, **31**, № 1 (1990), 3–13).

10.9. Пусть p — простое число, L_p — множество всех квазимногообразий, каждое из которых порождается некоторой конечной p-группой. Является ли L_p подрешеткой решетки всех квазимногообразий групп? *А. И. Будкин*

Нет, не всегда (С. А. Шахова, *Мат. заметки*, **53**, № 3 (1993), 144–148).

10.14. а) Будет ли группа, удовлетворяющая условию минимальности для подгрупп, удовлетворять слабому условию максимальности для подгрупп?

б) Будет ли группа, удовлетворяющая условию максимальности для подгрупп, удовлетворять слабому условию минимальности для подгрупп? *Д. И. Зайцев*

а) Нет, не всегда (В. Н. Образцов, *Мат. сб.*, **180**, № 4 (1989), 529–541).
б) Нет, не всегда (В. Н. Образцов, *Сиб. мат. ж.*, **32**, № 1 (1991), 99–106).

10.24. Коса называется *крашеной*, если ее нити реализуют тождественную подстановку. Верно ли, что зацепления, получающиеся замыканием крашеных кос, эквивалентны тогда и только тогда, когда исходные косы сопряжены в группе кос? *Г. С. Маканин*

Нет, не верно, так как, например, оба слова σ_1^2 и σ_1^{-2} представляют Хопфово зацепление, но они не сопряжены в группе кос (что легко понять, рассматривая представление Бюрау). Если зацепления считаются ориентированными, то ответ также отрицателен, см. Пример 4 в (J. Birman, *Braids, links, and mapping class groups* (*Ann. Math. Stud. Princeton*, **82**), Princeton, NJ, 1975, p. 100) (В. Э. Шпильрайн, *письма от 28.5.1998 и 20.1.2002.*)

10.30. Существует ли неправоупорядочиваемая группа, аппроксимируемая конечными p-группами по конечному множеству простых чисел p, содержащему по крайней мере два различных простых числа? Если группа аппроксимируется конечными примарными группами по бесконечному числу простых чисел, то она допускает линейный порядок (A. H. Rhemtulla, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **41**, № 1 (1973), 31–33). *Н. Я. Медведев*

Да, существует (P. A. Linnell, *J. Algebra*, **248**, № 2 (2002) 605–607).

10.33. Для HNN-расширений вида $G = \langle t, A \mid t^{-1}Bt = C, \varphi\rangle$, где A — конечно порожденная абелева группа, $\varphi\colon B \to C$ — изоморфизм двух ее подгрупп, найти

а) критерий финитной аппроксимируемости,

б) критерий хопфовости. *Ю. И. Мерзляков*

а) Найден (S. Andreadakis, E. Raptis, D. Varsos, *Arch. Math.*, **50** (1988), 495–501).
б) Найден (они же, *Commun. Algebra*, **20**, № 5 (1992), 1511–1533).

10.41. (Известный вопрос). Пусть Γ — почти полициклическая группа, не содержащая конечных нормальных подгрупп, отличных от единичной, k — поле. Полное кольцо частных $Q(k\Gamma)$ является кольцом матриц $M_n(D)$ над телом. *Гипотеза:* $n =$ н. о. к. порядков конечных подгрупп группы Γ. Равносильная формулировка (М. Лоренц): $\rho(G_0(k\Gamma)) = \rho(G_0(k\Gamma)_{\mathscr{F}})$, где $G_0(k\Gamma)$ — группа Гротендика категории конечно порожденных $k\Gamma$-модулей, $G_0(k\Gamma)_{\mathscr{F}}$ — ее подгруппа, порожденная классами подмодулей, индуцированных с конечных подгрупп группы Γ, ρ — ранг Голди. *Более сильная гипотеза:* $G_0(k\Gamma) = G_0(k\Gamma)_{\mathscr{F}}$. *Г. А. Носков*

Доказана сильная гипотеза: $G_0(k\Gamma) = G_0(k\Gamma)_{\mathscr{F}}$ (J. A. Moody, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **17** (1987), 113–116).

10.48. Пусть V — векторное пространство конечной размерности над полем простого порядка. Подмножество R из $GL(V) \cup \{0\}$ назовем *регулярным*, если $|R| = |V|$, $0, 1 \in R$ и $vx \neq vy$ для любого ненулевого вектора $v \in V$ и любых различных элементов $x, y \in R$. Очевидно, преобразования τ, ε, μ_g переводят регулярное множество снова в регулярное множество, где $x^\tau = x^{-1}$ при $x \neq 0$ и $0^\tau = 0$, $x^\varepsilon = 1 - x$, $x^{\mu_g} = xg^{-1}$ и g — ненулевой элемент преобразуемого подмножества. Назовем два регулярных подмножества *эквивалентными*, если от одного можно перейти к другому цепочкой таких преобразований.

а) Изучить классы эквивалентности регулярных подмножеств.

б) Верно ли, что каждое регулярное подмножество эквивалентно некоторой подгруппе группы $GL(V)$, дополненной элементом 0? *Н. Д. Подуфалов*

а) Изучены (Н. Д. Подуфалов, *Алгебра и логика*, **30**, № 1 (1991), 90–101).
б) Нет, не верно, так как регулярное множество замкнуто относительно умножения тогда и только тогда, когда соответствующая (γ, γ)-транзитивная плоскость задана над почти-полем (Н. Д. Подуфалов, *письмо от 13.02.1989*).

10.56. Дистрибутивна ли решетка формаций конечных нильпотентных групп ступени нильпотентности $\leqslant 4$? *А. Н. Скиба*

Нет, не дистрибутивна. Решетка L всех многообразий нильпотентных 2-групп ступени нильпотентности $\leqslant 4$ недистрибутивна (Ю. А. Белов, *Алгебра и логика*, **9**, № 6 (1970), 623–628; R. A. Bryce, *Philos. Trans. Roy. Soc. London (A)*, **266** (1970), 281–355, прим. на с. 335). Отображение $V \to V \cap F$, где F — класс всех конечных групп, является вложением L в решетку формаций. (L. Kovács, *письмо от 12.5.1988.*) См. также (Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба, *Формации алгебраических систем*, Наука, М., 1989).

10.63. Существует ли дважды транзитивная группа подстановок с бесконечным циклическим стабилизатором точки? *Я. П. Сысак*

Нет, не существует (В. Д. Мазуров, *Сиб. мат. ж.*, **31**, № 4 (1990), 102–104; Gy. Károlyi, S. J. Kovács, P. P. Pálfy, *Aequationes Math.*, **39**, № 1 (1990), 161–166).

10.66. Будет ли непростой группа G, содержащая две такие неединичные подгруппы A, B, что $AB \neq G$ и $AB^g = B^gA$ для любого $g \in G$? Если G конечна, то ответ утвердительный (O. H. Kegel, *Arch. Math.*, **12**, № 2 (1961), 90–93).
А. Н. Фомин, В. П. Шунков

Нет, не обязательно. Примером может служить любая простая линейно упорядоченная группа, в которой A и B — произвольные собственные выпуклые подгруппы. (В. В. Блудов, *письмо от 12.2.1997.*)

10.68. Пусть нильпотентная p-группа G допускает автоморфизм порядка p, имеющий ровно p^m неподвижных точек. Верно ли, что G содержит подгруппу, индекс которой ограничен некоторой функцией от p и m, а ступень нильпотентности ограничена некоторой функцией только от m? *Е. И. Хухро*

Да, верно (Yu. Medvedev, *J. London Math. Soc. (2)*, **59**, № 3 (1999), 787–798).

10.72. Доказать неразложимость формации всех конечных p-групп в произведение двух нетривиальных подформаций. *Л. А. Шеметков*

Доказано (А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков, *ДАН БССР*, **33** (1989), 581–582).

10.76. Пусть G — периодическая группа, обладающая бесконечной силовской 2-подгруппой S, которая либо элементарная абелева, либо 2-группа Сузуки, причем нормализатор $N_G(S)$ сильно вложен в G и является группой Фробениуса с локально циклическим дополнением. Должна ли группа G быть локально конечной? *В. П. Шунков*

Да, должна (А. И. Созутов, *Алгебра и логика*, **39**, № 5 (2000), 602–617; А. И. Созутов, Н. М. Сучков, *Мат. заметки*, **68**, № 2 (2000), 272–285).

11.4. Верно ли, что решетка централизаторов группы модулярна, если она является подрешеткой решетки подгрупп? Для конечных групп это так. *В. А. Антонов*

Нет, не верно (V. N. Obraztsov, *J. Algebra*, **199**, № 1 (1998), 337–343).

11.10. (Р. Линдон). б) Верно ли, что в группе $G = \langle a, x \mid a^5 = 1,\ a^{x^2} = [a, a^x]\rangle$ элемент a не равен 1? *В. В. Блудов*

Да, верно, поскольку отображение $a \to (1\,3\,5\,2\,4)$, $x \to (1\,2\,4\,3\,5)$ продолжается до гомоморфизма группы G на знакопеременную группу $\mathbb{A}_5$ (Д. Н. Азаров, *в сб. Алгебраические системы*, Иваново, 1991, 4–5).

11.11. б) Известная теорема Бэра–Сузуки для конечных групп утверждает, что элемент a группы G, порождающий вместе с каждым своим сопряженным элементом конечную p-группу, лежит в нормальной p-подгруппе. Верна ли эта теорема в классе бинарно конечных групп? *А. В. Боровик*

Верна. По теореме Бэра–Сузуки $\langle a_1,\, b\rangle$ — конечная p-группа для любого элемента $a_1 \in a^G = \{a^g \mid g \in G\}$ и любого p-элемента $b \in G$. Теперь индукция по n дает, что произведение $a_1 \cdots a_n$ является p-элементом для любых $a_1, \ldots, a_n \in a^G$. (А. И. Созутов, *Сиб. мат. ж.*, **41**, № 3 (2000), 674–675.)

11.20. Пусть $[a, b] = [c, d]$ в абсолютно свободной группе, где a, b, $[a, b]$ — базисные коммутаторы (в некоторой фиксированной системе свободных образующих). Если c и d — произвольные (собственные) коммутаторы, то верны ли равенства $a = c$ и $b = d$? *А. Гаглион (A. M. Gaglione), Д. Спеллман (D. Spellman)*

Нет, не всегда. Например, если x_1, x_2, x_3 — свободные порождающие, $x_1 < x_2 < x_3$, $a = [[x_2, x_1], x_3]$, $b = [x_2, x_1]$, $c = b^{-1}$, $d = b^{x_3 b}$. (В. Г. Бардаков, *Тезисы III Междун. конф. по алгебре*, Красноярск, 1993, с. 33.)

11.21. Пусть $\mathfrak{N}_p$ — формация всех конечных p-групп для данного простого числа p. Верно ли, что для любой подформации $\mathfrak{F}$ из $\mathfrak{N}_p$ найдется такое многообразие $\mathfrak{M}$, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{M}$? *А. Ф. Васильев*

Нет, не верно. Имеется естественное взаимно-однозначное соответствие между формациями конечных p-групп и многообразиями про-p-групп: для каждого многообразия про-p-групп $\mathfrak{V}$ класс всех конечных групп из $\mathfrak{V}$ составляет формацию и каждая формация конечных p-групп получается таким образом. Имеется континуум многообразий нильпотентных про-p-групп ступени $\leqslant 6$ (А. Н. Зубков, *Сиб. мат. ж.*, **29**, № 3 (1988), 194–197). С другой стороны, имеется лишь счетное число многообразий нильпотентных групп ступени $\leqslant 6$. (А. Н. Красильников, *письмо от 17.7.1998.*)

11.24. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *локальным*, если существует такая локальная групповая функция f (определение см. Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, М., Наука, 1978), что $f(p)$ — класс Фиттинга для каждого простого p и $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})} \cap \Big(\bigcap_{p\in\pi(\mathfrak{F})} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'}\Big)$. Всякий ли наследственный класс Фиттинга конечных групп является локальным? *Н. Т. Воробьев*

Нет, не всякий (Л. А. Шеметков, А. Ф. Васильев, *Тезисы Конф. математиков Беларуси, часть 1*, Гродно, 1992, с. 56; С. Ф. Каморников, *Мат. заметки*, **55**, № 6 (1994), 59–63).

11.25. a) Существует ли локальное произведение (отличное от класса всех конечных групп и класса всех конечных разрешимых групп) классов Фиттинга, каждый из которых нелокален и не является формацией? Определение *произведения* классов Фиттинга см. в (Н. Т. Воробьев, *Мат. заметки*, **43**, № 2 (1988), 161–168). *Н. Т. Воробьев*

Да, существует (Н. Т. Воробьев, А. Н. Скиба, *в сб. Вопросы алгебры*, вып. 8, Гомель, 1995, 55–58).

11.26. Существует ли группа, не изоморфная группе внешних автоморфизмов метабелевой группы с тривиальным центром? *Р. Гёбель (R. Göbel)*

Нет, для любой группы G существует метабелева группа M с тривиальным центром такая, что $\operatorname{Out} M \cong G$ (R. Göbel, A. Paras, *J. Pure Appl. Algebra*, **149**, № 3 (2000) 251–266), и если G конечна или счетна, то такую группу M можно выбрать счетной (R. Göbel, A. Paras, in: *Abelian Groups and Modules, Proc. Int. Conf. Dublin, 1998*, Birkhäuser, Basel, 1999, 309–317).

11.27. Каково минимальное число $d(G)$ порождающих для группы G, удовлетворяющей условию $S \leqslant G \leqslant \operatorname{Aut} S$, где S — конечная простая неабелева группа? *К. Грюнберг (K. Gruenberg)*

Число $d(G)$ найдено (mod CFSG) для любой такой группы G. В частности, $d(G) = \max\{2,\, d(G/S)\}$ и $d(G) \leqslant 3$ (F. Dalla Volta, A. Lucchini, *J. Algebra*, **178**, № 1 (1995), 194–223).

11.29. f) Пусть F — свободная группа и $\mathfrak{f} = \mathbb{Z}F(F-1)$ — разностный идеал целочисленного группового кольца $\mathbb{Z}F$. Для любой нормальной подгруппы R из F определим соответствующий идеал $\mathfrak{r} = \mathbb{Z}F(R-1) = {}_{\mathrm{id}}(r-1 \mid r \in R)$. Можно идентифицировать, например, $F \cap (1+\mathfrak{rf})$ с R', где F естественным образом вложена в $\mathbb{Z}F$ и $1+\mathfrak{rf} = \{1+a \mid a \in \mathfrak{rf}\}$. Всегда ли фактор-группа $(F \cap (1+\mathfrak{r}+\mathfrak{f}^n))/R\cdot\gamma_n(F)$ абелева? *Н. Гупта (N. D. Gupta)*

Да, всегда (N. D. Gupta, Yu. V. Kuz'min, *J. Pure Appl. Algebra*, **78**, № 1 (1992), 165–172).

11.33. а) Пусть $G(q)$ — простая группа Шевалле над полем из q элементов. Доказать существование такого числа m, что ограничение на $G(q)$ каждого неодномерного комплексного представления группы $G(q^m)$ содержит в качестве композиционных факторов все неприводимые представления группы $G(q)$. *А. Е. Залесский*

Доказано (D. Gluck, *J. Algebra*, **155**, №2 (1993), 221–237).

11.35. Пусть H — конечная линейная группа над $\mathbb{C}$ и h — элемент простого порядка p из H, не лежащий ни в какой абелевой нормальной подгруппе. Верно ли, что h имеет не менее чем $(p-1)/2$ различных собственных значений? *А. Е. Залесский*

Да, верно (G. R. Robinson, *J. Algebra*, **178**, №2 (1995), 635–642).

11.37. б) Можно ли свободную бернсайдову группу $B(m,n)$ для n вида $2^l \gg 1$ и при любых m задать такими определяющими соотношениями вида $v^n = 1$, что для любого натурального делителя d числа n, отличного от n, элемент v^d не равен 1 в $B(m,n)$? *С. В. Иванов*

Да, можно (S. V. Ivanov, *Intern. J. Algebra Comput.*, **4**, №1–2 (1994), 1–308).

11.43. Для конечной группы X обозначим через $k(X)$ число ее классов сопряженных элементов. Верно ли, что $k(AB) \leqslant k(A)k(B)$? *Л. С. Казарин*

Нет, не всегда. Пусть $G = \langle a, b \mid a^{30} = b^2 = 1,\ a^b = a^{-1}\rangle \cong D_{60}$ — группа диэдра порядка 60, и пусть $A = \langle a^{10}, ba\rangle \cong D_6$ и $B = \langle a^6, b\rangle \cong D_{10}$. Тогда $G = AB$, но G имеет 18 классов сопряженных элементов, а A и B, соответственно, только 3 и 4. Из (P. Gallagher, *Math. Z.*, **118** (1970), 175–179) вытекает положительный ответ, если A или B нормальна. См. новую задачу 14.43 для случая, когда порядки A и B взаимно просты. (J. Sangroniz, *письмо от 17.12.1998.*)

11.46. б) Существует ли конечная p-группа, ступень нильпотентности которой больше чем 2 и для которой $\operatorname{Aut} G = \operatorname{Aut}_c G \cdot \operatorname{Inn} G$, где $\operatorname{Aut}_c G$ — группа центральных автоморфизмов группы G? *А. Каранти (A. Caranti)*

Да, существует (I. Malinowska, *Rend. Sem. Mat. Padova*, **91** (1994), 265–271).

11.47. Пусть $\mathscr{L}_d$ — однородная степени d компонента свободной алгебры Ли $\mathscr{L}$ ранга 2 над полем порядка 2. Какова размерность пространства неподвижных точек в $\mathscr{L}_d$ для автоморфизма, который переставляет два свободных образующих алгебры $\mathscr{L}$? *Л. Ковач (L. G. Kovács)*

Размерность найдена в (R. M. Bryant, R. Stöhr, *Arch. Math.*, **67** (1996), 281–289), где подтверждена гипотеза из (M. W. Short, *Commun. Algebra*, **23** (1995), 3051–3057).

11.53. (П. Клейдман). Вкладываются ли спорадические простые группы Рудвалиса Ru, Матье M_{22}, Хигмана–Симса HS в качестве подгрупп в простую группу $E_7(5)$? *В. Д. Мазуров*

Да, вкладываются (P. B. Kleidman, R. A. Wilson, *J. Algebra*, **157** (1993), 316–330).

11.54. Верно ли, что в группе крашеных кос (определение см. в задаче 10.24) только единичная коса сопряжена со своей обратной косой? *Г. С. Маканин*

11.55. Верно ли, что извлечение корней в группе крашеных кос однозначно? *Г. С. Маканин*

11.54 и 11.55. Да, верно, поскольку группа крашеных кос K_n вкладывается в группу автоморфизмов свободной группы F_n, действующих тождественно по модулю коммутанта F_n, а последняя аппроксимируется нильпотентными группами без кручения, для которых соответствующие утверждения верны (В. А. Романьков, *письмо от 3.10.1990*). См. также (В. Г. Бардаков, *Мат. сб.*, **183**, № 6 (1992), 3–42).

11.57. *Верхним композиционным фактором* группы G назовем композиционный фактор любой конечной фактор-группы группы G. Существуют ли какие-либо ограничения на множество неабелевых верхних композиционных факторов конечно порожденной группы? *А. Манн (A. Mann), Д. Сигал (D. Segal)*

Никаких ограничений нет: любое множество неабелевых конечных простых групп может быть множеством верхних композиционных факторов 63-порожденной группы. Если допустить еще абелевы верхние композиционные факторы, то число порождающих можно снизить до 3 (D. Segal, *Proc. London Math. Soc. (3)*, **82** (2001), 597–613).

11.64. Пусть $\pi(G)$ — множество простых делителей порядка конечной группы G. Конечно ли число простых конечных групп G, отличных от знакопеременных групп, в которых есть собственная подгруппа H с $\pi(H) = \pi(G)$? *В. С. Монахов*

Нет, оно бесконечно. Если $G = S_{4k}(2^s)$, $H \cong \Omega^-_{4k}(2^s)$, то $\pi(G) = \pi(H)$. (В. И. Зенков, *письмо от 10.3.1994*.)

11.74. Пусть G — неэлементарная гиперболическая группа, а G^n — подгруппа, порожденная n-ми степенями ее элементов.

а) (М. Громов). Верно ли, что фактор-группа G/G^n бесконечна для некоторого $n = n(G)$?

б) Верно ли, что $\bigcap\limits_{n-1}^{\infty} G^n = \{1\}$? *А. Ю. Ольшанский*

а) Да, верно; б) да, верно (S. V. Ivanov, A. Yu. Ol'shanskii, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **348**, №6 (1996), 2091–2138).

11.75. Рассмотрим класс групп с n порождающими и m определяющими соотношениями. Подкласс этого класса групп назовем *плотным*, если отношение количества копредставлений вида $\langle a_1, \ldots, a_n \mid R_1, \ldots, R_m \rangle$ (где $|R_i| = d_i$), задающих группы из этого подкласса, к количеству всех таких копредставлений стремится к 1 при стремлении $d_1 + \cdots + d_m$ к бесконечности. Доказать, что для любого $k < m$ и всякого n подкласс групп, в которых свободны все k-порожденные подгруппы, является плотным. *А. Ю. Ольшанский*

Доказано (Г. Н. Аржанцева, А. Ю. Ольшанский, *Мат. заметки*, **59**, № 4 (1996), 489–496).

11.79. Пусть G — конечная группа автоморфизмов бесконечного поля F характеристики p. Возведение элементов поля F в целые степени и действие группы G определяет действие целочисленного группового кольца $\mathbb{Z}G$ группы G на мультипликативной группе F^* поля F. Верно ли, что любое подполе поля F, содержащее образы всех элементов из F под действием некоторого фиксированного элемента из $\mathbb{Z}G \setminus p\mathbb{Z}G$, содержит бесконечное число G-инвариантных элементов поля F?

К. Н. Пономарев

Да, верно (К. Н. Пономарев, *Сиб. мат. ж.*, **33**, № 6 (1992), 162–168).

11.82. Пусть R — нормальное замыкание элемента r в свободной группе F с естественной функцией длины и s — элемент наименьшей длины в R. Верно ли, что s сопряжен с одним из следующих элементов: r, r^{-1}, $[r, f]$, $[r^{-1}, f]$ для некоторого элемента f из F?

В. Н. Ремесленников

Нет, не всегда (J. McCool, *Glasgow Math. J.*, **43**, №1 (2001), 123–124).

11.91. Доказать, что наследственная формация $\mathfrak{F}$ конечных разрешимых групп локальна, если каждая конечная разрешимая непростая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является группой Шмидта.

В. Н. Семенчук

Доказано (А. Н. Скиба, *ДАН БССР*, **34**, № 11 (1990), 982–985).

11.93. Порождается ли многообразие всех решеток решетками блоков конечных групп?

Д. М. Смирнов

Нет, не порождается (Д. М. Смирнов, *Сиб. мат. ж.*, **33**, № 4 (1992), 128–134).

11.97. Верно ли, что существует только конечное число конечных простых групп с заданным набором всех различных значений неприводимых характеров на каком-нибудь одном элементе?

С. П. Струнков

Нет, не верно. Все комплексные неприводимые характеры групп $L_2(2^m)$, $m \geqslant 2$, принимают на инволюциях значения, равные 0, ± 1 (В. Д. Мазуров).

11.98. б) Верно ли, что $|G| \leqslant \exp(r)$, где r — число классов сопряженных элементов конечной (простой) группы G?

С. П. Струнков

Нет, не верно: группа M_{22} порядка 443520 содержит 12 классов сопряженных элементов (T. Plunkett, *письмо от 9.5.2000*).

11.103. Всегда ли локально конечна 2-группа с условием минимальности для централизаторов?

Дж. Уилсон (J. Wilson)

Да, всегда (F. O. Wagner, *J. Algebra*, **217**, №2 (1999), 448–460).

11.105. а) Пусть $\mathfrak{V}$ — многообразие групп. Его относительно свободная группа данного ранга представима как фактор-группа F/N, где F — абсолютно свободная группа того же ранга, а N — вполне инвариантная подгруппа F. Присоединенное кольцо Ли $\mathscr{L}(F/N)$ представимо в виде L/J, где L — свободное кольцо Ли того же ранга, а J — идеал в L. Всегда ли J вполне инвариантен в L? (*Предполагаемый ответ*: нет).

Г. Уолл (G. E. Wall)

Нет, не всегда: идеал J не вполне инвариантен для $F/(F^2)^4$, т. е. для $\mathfrak{V} = \mathfrak{B}_4\mathfrak{B}_2$ (D. Groves, *J. Algebra*, **211**, №1 (1999), 15–25).

11.106. Любую ли периодическую группу можно вложить в простую периодическую группу?

Р. Филлипс (R. Phillips)

Да, любую (А. Ю. Ольшанский, *Укр. мат. ж.*, **44**, № 6 (1992), 845–847).

11.108. Каждая ли локально конечная простая группа является абсолютно простой? Группа G называется *абсолютно простой*, если $\{1, G\}$ — единственная композиционная система группы G. См. (R. E. Phillips, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **79** (1988), 213–220.) *Р. Филлипс (R. Phillips)*

Нет, не каждая (U. Meierfrankenfeld, in *Proc. Int. Conf. Finite and Locally Finite Groups (Istanbul, 1994)*, Kluwer, 1995, 189–212).

11.110. Вложима ли группа $SL(2, \mathbb{Q})$ в мультипликативную группу какого-нибудь тела? *Б. Хартли (B. Hartley)*

Нет, не вложима (W. Dicks, B. Hartley, *Commun. Algebra*, **19** (1991), 1919–1943).

11.128. Группа G называется *K-группой*, если для любой ее подгруппы A существует такая подгруппа B, что $A \cap B = 1$ и $\langle A, B \rangle = G$. Верно ли, что нормальные подгруппы K-групп являются K-группами? *М. Эмальди (M. Emaldi)*

Нет, не верно (V. N. Obraztsov, *J. Austral. Math. Soc. (A)*, **61** (1996), 267–288).

12.1. б) (А. А. Бовди). Басс (H. Bass, *Topology*, **4**, №4 (1966), 391–400) построил в явном виде собственную подгруппу конечного индекса в группе единиц целочисленного группового кольца конечной циклической группы. Построить аналогичные подгруппы для конечных абелевых нециклических групп. *Р. Ж. Алеев*

Построены: для p-групп, $p \neq 2$, в (K. Hoechsmann, J. Ritter, *J. Pure Appl. Algebra*, **68**, №3 (1990), 325–333); для общего случая групп центральных единиц целочисленных групповых колец произвольных (не обязательно абелевых) конечных групп в (Р. Ж. Алеев, *Тр. Инст. мат. СО РАН*, Новосибирск, **3**, № 1 (2000), 3–37).

12.2. Верно ли, что в (абелевой) группе всякую недискретную групповую топологию можно усилить до максимальной полной групповой топологии? *В. И. Арнаутов*

Нет, не всегда, поскольку в предположении континуум гипотезы существуют неполные максимальные топологии (В. И. Арнаутов, Е. Г. Зеленюк, *Укр. мат. ж.*, **43**, № 1 (1991), 21–27).

12.5. Существует ли счетный нетривиальный фильтр в решетке квазимногообразий метабелевых групп без кручения? *А. И. Будкин*

Нет, не существует (С. В. Ленюк, *Сиб. мат. ж.*, **39**, № 1 (1998), 67–73).

12.7. Верно ли, что всякая радикальная наследственная формация конечных групп является композиционной? *А. Ф. Васильев*

Нет, не верно (С. Ф. Каморников, *Мат. заметки*, **55**, № 6 (1994), 59–63).

12.10. (П. Нойман). Можно ли свободную группу ранга 2 так вложить в симметрическую группу счетного множества, чтобы каждый ее нетривиальный элемент имел только конечное число орбит? *А. Гласс (A. M. W. Glass)*

Да, можно (H. D. Macpherson, in: *Ordered groups and infinite permutation groups, Partially based on Conf. Luminy, France, 1993* (*Mathematics and its Applications*, **354**), Kluwer, Dordrecht, 1996, 221–230).

12.22. а) Пусть $\Delta(G)$ — разностный идеал целочисленного группового кольца $\mathbb{Z}G$ произвольной группы G. Тогда $D_n(G) = G \cap (1 + \Delta^n(G))$ содержит n-й член $\gamma_n(G)$ нижнего центрального ряда группы G. Верно ли, что $D_n(G)/\gamma_n(G)$ лежит в центре группы $G/\gamma_n(G)$? *Н. Гупта (N. D. Gupta), Ю. В. Кузьмин*

Нет, не верно; более того, группа $D_n(G)/\gamma_n(G)$ не обязана содержаться ни в каком члене верхнего центрального ряда группы $G/\gamma_n(G)$ с фиксированным номером (N. D. Gupta, Yu. V. Kuz'min, *J. Pure Appl. Algebra*, **104**, № 1 (1995), 191–197).

12.24. Если R — кольцо с единицей, то автоморфизмы кольца $R[[x]]$, посылающие x в $x\left(1+\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x^i\right)$, $a_i \in R$, образуют группу $N(R)$. Известно, что $N(\mathbb{Z})$ содержит копию свободной группы F_2 ранга 2, а А. Вайс (A. Weiss) показал, что $N(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ при простом p содержит копию любой конечной p-группы (но не содержит копии $\mathbb{Z}_{p^\infty}$). Содержит ли $N(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ копию F_2? *Д. Джонсон (D. L. Johnson)*

Да, содержит (R. Camina, *J. Algebra*, **196**, № 1 (1997), 101–113). И. Б. Фесенко заметил, что этот факт мог быть известен специалистам по теории полей норм еще в 1985 г. (J.-P. Wintenberger, J.-M. Fontaine, F. Laubie); однако доказательство, основанное на этой теории, впервые появилось только в (I. B. Fesenko, *Preprint*, Nottingham Univ., 1998).

12.25. Пусть G — конечная группа, действующая неприводимо на векторном пространстве V. Орбита α^G для $\alpha \in V$ называется *p-регулярной*, если стабилизатор α в G является p'-подгруппой. Имеет ли группа G регулярную орбиту на V, если для каждого простого числа p она обладает p-регулярной орбитой?

Жипин Чан (Jiping Zhang)

Нет, не всегда. Пусть, например, $H = \mathbb{A}_4 \wr \mathbb{Z}_5$, $V = O_2(H)$, и G — дополнение к V в H, действующее на V сопряжением. (В. И. Зенков, *письмо от 11.2.1994*.)

12.26. (Ши Шенмин). Верно ли, что конечная p-разрешимая группа G тогда и только тогда имеет p-блок нулевого дефекта, когда существует такой элемент $x \in O_{p'}(G)$, что $C_G(x)$ является p'-группой? *Жипин Чан (Jiping Zhang)*

Нет, не верно: группа $3^2.GL_2(3)$ имеет 2-блок дефекта 0, но централизатор любого элемента из $O(G)$ имеет четный порядок (В. И. Зенков, *Тр. ИММ УрО РАН*, **3** (1995), 36–40).

12.31. Для относительно свободных групп доказать или опровергнуть гипотезу Ф. Холла: если слово v конечнозначно на группе G, то вербальная подгруппа vG конечна. *С. В. Иванов*

Гипотеза опровергнута (A. Storozhev, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **124**, № 10 (1996), 2953–2954).

12.36. Пусть V — векторное пространство размерности n над полем простого порядка p и пусть G — подгруппа $GL(V)$. Для подпространства W пространства V обозначим через r_W число $(p-1)\alpha + s - 1$, где sp^{α} — порядок поточечного стабилизатора W в G и целое число s не делится на p. Пусть $S = S[V^*]$ — симметрическая алгебра на двойственном пространстве V^* пространства V, $T = S^G$ — кольцо инвариантов группы G и b_m — размерность его однородной компоненты степени m. Тогда ряд Пуанкаре $\sum\limits_{m\geqslant 0} b_m t^m$ — рациональная функция, разлагающаяся в окрестности точки $t=1$ в ряд Лорана $\sum\limits_{i\geqslant -n} a_i(1-t)^i$, где $a_{-n} = \dfrac{1}{|G|}$.

Гипотеза: $a_{-n+1} = \dfrac{r}{2|G|}$, где r — сумма чисел r_W по всем максимальным подпространствам W пространства V.

Д. Карлайл (D. Carlisle), П. Крофоллер (P. H. Kropholler)

Гипотеза доказана (D. J. Benson, W. W. Crawley-Boevey, *Bull. London Math. Soc.*, **27**, №5 (1995), 435–440); другое доказательство, основанное на теореме Гротендика–Римана–Роха, позже было получено в (A. Neeman, *Comment. Math. Helv.*, **70**, №3 (1995), 339–349).

12.45. (Ф. Холл). Верно ли, что нетривиальная группа, изоморфная любой своей нетривиальной нормальной подгруппе, является либо свободной группой бесконечного ранга, либо простой группой, либо бесконечной циклической группой? (Леннокс, Смит и Уайголд показали (1992 г.), что конечно порожденная группа такого рода, имеющая собственную подгруппу конечного индекса, является бесконечной циклической.) *Дж. Леннокс (J. C. Lennox)*

Нет, не верно (V. N. Obraztsov, *Proc. London Math. Soc. (3)*, **75**, №1 (1997), 79–98).

12.46. Пусть F — свободная группа с двумя образующими x, y. Для $a, b \in \mathbb{C}$, $|a| = |b| = 1$, определим автоморфизм $\vartheta_{a,b}$ алгебры $\mathbb{C}F$ равенствами $\vartheta_{a,b}(x) = ax$, $\vartheta_{a,b}(y) = by$. Всегда ли для данного элемента α, $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}F$ можно найти такие элементы $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, что $|a| = |b| = 1$ и $\alpha\mathbb{C}F \cap \vartheta_{a,b}(\alpha)\mathbb{C}F \neq 0$?

П. Линнел (P. A. Linnell)

Нет, не всегда (А. В. Тушев, *Укр. мат. ж.*, **47**, № 4 (1995), 571–572).

12.49. Построить все нерасщепляемые расширения элементарных 2-групп V посредством $H = PSL_2(q)$, для которых H действует на V неприводимо.

В. Д. Мазуров

Построены (В. П. Буриченко, *Алгебре и логика*, **39**, № 3 (2000), 280–319).

12.65. Пусть $\mathscr{P} = (P_0, P_1, P_2)$ — параболическая система в конечной группе G, соответствующая диаграмме Коксетера $\underset{1}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\underset{2}{\circ}\!\!=\!\!=\!\!=\!\!\underset{3}{\circ}$ типа C_3, и пусть подгруппа Бореля имеет индексы в P_0 и P_1 не меньше 3. Известно, что если дополнительно предполагать геометричность системы камер $\mathscr{P}$ и дезарговость проективных плоскостей, возникающих из $\mathscr{P}$ в качестве $\{0,1\}$-вычетов, то либо $G^{(\infty)}$ является группой Шевалле типа C_3 или B_3, либо $G = A_7$. Можно ли то же самое утверждать в общем случае, без этих двух дополнительных предположений?

А. Пазини (A. Pasini)

Да, можно (S. Yoshiara, *J. Algebraic Combin.*, **5**, №3 (1996), 251–284).

12.70. Пусть p — простое число. Конечен ли ранг подгруппы неподвижных точек нетривиального p-автоморфизма свободной про-p-группы F конечного ранга? Если порядок автоморфизма взаимно прост с p, то соответствующий ранг бесконечен (W. Herfort and L. Ribes, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **108** (1990), 287–295).
Л. Рибес (L. Ribes)

Да, конечен (C. Scheiderer, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **127**, №3 (1999), 695–700). Более того, в (W. N. Herfort, L. Ribes, P. A. Zalesskii, *Forum Math.*, **11**, №1 (1999), 49–61) доказано, что если P — конечная p-группа автоморфизмов свободной про-p-группы F произвольного ранга, то подгруппа неподвижных точек группы P выделяется свободным сомножителем в F.

12.71. Пусть $d(G)$ означает наименьшее число образующих группы G. Пусть A и B — конечные группы. Всегда ли найдется такая конечная группа G, что $G = \langle A, B\rangle$ и $d(G) = d(A) + d(B)$? В классе разрешимых групп соответствующий вопрос решается отрицательно (L. G. Kovács, H.-S. Sim, *Indag. Math.*, **2**, №2 (1991), 229–232).
Л. Рибес (L. Ribes)

Нет, не всегда (A. Lucchini, *J. Group Theory*, **4**, №1 (2001), 53–58).

12.74. Пусть $\mathfrak{F}$ — непримарная однопорожденная композиционная формация конечных групп. Верно ли, что если $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ и формации $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ неединичны, то $\mathfrak{M}$ — композиционная формация?
А. Н. Скиба

Да, верно, если $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{H}$ (А. Н. Скиба, *Алгебра формаций*, Беларус. Навука, Минск, 1997, с. 144). В общем случае ответ отрицательный (W. Guo, *Commun. Algebra*, **28**, №10 (2000), 4767–4782).

12.76. Всякая ли группа, порожденная множеством 3-транспозиций, локально конечна? *Множество* 3*-транспозиций* — это нормальное множество инволюций, порядки попарных произведений которых не превосходят числа 3. *А. И. Созутов*

Да, всякая (H. Cuypers, J. I. Hall, in: *Groups, combinatorics and geometry. Proc. L. M. S. Durham symp., July 5–15, 1990* (*London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, **165**), Cambridge Univ. Press, 1992, 121–138).

12.78. (Курран). Пусть p — простое число.

а) Существует ли группа порядка p^6, порядок группы автоморфизмов которой также равен p^6?

б) Верно ли, что при $p \equiv 1 \pmod 3$ наименьший порядок p-группы, являющейся группой автоморфизмов p-группы, равен p^7?

в) Тот же вопрос для $p = 3$ с заменой p^7 на 3^9. *А. И. Старостин*

а) Нет, не существует; б) да, верно; в) нет, не верно (S. Yu, G. Ban, J. Zhang, *Algebra Colloq.*, **3**, №2 (1996), 97–106).

12.80. (Роггенкамп). а) Верно ли, что число p-блоков дефекта 0 конечной группы G равно числу классов сопряженности таких элементов g группы G, что число решений уравнения $[x, y] = g$ в группе G не делится на p? *С. П. Струнков*

Нет, не верно; пример: $p = 2$ и $G = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{S}_3$ (L. Barker, *письмо от 27.5.1996*).

12.84. (Известный вопрос). Верно ли, что если существуют две неизоморфные конечные группы с данным набором порядков их элементов, то таких групп бесконечно много?
С. А. Сыскин

Нет, не верно (В. Д. Мазуров, *Алгебра и логика*, **33**, № 1 (1994), 81–89).

12.90. Должна ли быть минимаксной конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа с точно таким же набором конечных гомоморфных образов, как у некоторой конечно порожденной разрешимой минимаксной группы?

Дж. Уилсон (J. S. Wilson)

Да, должна (A. Mann, D. Segal, *Proc. London Math. Soc. (3)*, **61** (1990), 529–545; см. также А. В. Тушев, *Мат. заметки*, **56**, № 5 (1994), 136–139).

12.91. Каждая метабелева группа, принадлежащая классу Фиттинга, состоящему из (конечных) сверхразрешимых групп, нильпотентна. Верно ли следующее обобщение этого факта: каждая группа, принадлежащая классу Фиттинга, состоящему из сверхразрешимых групп, имеет только центральные минимальные нормальные подгруппы? *Х. Хайнекен (H. Heineken)*

Нет, не верно (H. Heineken, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **98** (1997), 241–251).

12.93. Пусть G — расширение нильпотентной группы N посредством конечно порожденной нильпотентной группы. Верно ли, что G расщепляется над N, если это верно для каждой примарной части группы N? Ответ положительный, если N конечна или коммутативна. *П. Хилтон (P. Hilton)*

Нет, в общем случае не верно (K. Lorensen, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **123**, № 2 (1998), 213–215).

12.97. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация всех тех конечных групп, все композиционные факторы которых изоморфны некоторой простой неабелевой группе T. Доказать, что формация $\mathfrak{F}$ неразложима в произведение двух нетривиальных подформаций. *Л. А. Шеметков*

Доказано (О. В. Мельников, *Проблемы алгебры*, **9**, Гомель, 1996, 42–47).

12.98. Пусть F — свободная группа конечного ранга, R — ее рекурсивно заданная нормальная подгруппа.

а) Верно ли, что проблема равенства разрешима в F/R тогда и только тогда, когда она разрешима в $F/[R,R]$?

б) Верно ли, что проблема сопряженности разрешима в F/R тогда и только тогда, когда она разрешима в $F/[R,R]$?

в) Верно ли, что в $F/[R,R]$ разрешима проблема сопряженности, если в ней разрешима проблема равенства? *В. Э. Шпильрайн*

а) Да, верно; б) нет, не верно; в) нет, не верно (М. И. Анохин, *Мат. заметки*, **61**, № 1 (1997), 3–9).

12.102. Всякая ли собственная фактор-группа группы Голода (см. 9.76) финитно аппроксимируема? *В. П. Шунков*

Нет, не всякая (L. Hammoudi, *Algebra Colloq.*, **5**, № 4 (1998), 371–376).

13.10. Существует ли такая функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что для всякой k-ступенно разрешимой группы G с порождающим множеством A из выполнения тождества $x^4 = 1$ в каждой подгруппе, порожденной не более, чем $f(k)$ элементами множества A, следует выполнение этого тождества во всей группе G? *В. В. Блудов*

Нет, не существует (Г. С. Дерябина, А. Н. Красильников, *Сиб. матем. ж.*, **44**, № 1 (2003), 69–72).

13.16. Является ли гиперцентральной любая локально нильпотентная группа с условием минимальности для централизаторов? *Ф. Вагнер (F. Wagner)*

Да, является (В. В. Блудов, *Алгебра и логика*, **37**, № 3 (1998), 270–278).

13.21. а) Существует ли бесконечная конечно-порожденная финитно-аппроксимируемая p-группа, у которой порядок $|g|$ произвольного элемента g не превосходит величины $f(\delta(g))$, где $\delta(g)$ — длина элемента g относительно фиксированной системы образующих, а $f(n)$ — функция, растущая при $n \to \infty$ медленнее любой степенной функции n^λ, $\lambda > 0$? *Р. И. Григорчук*

Да, существует (А. В. Рожков, *Докл. Акад. Наук*, **362**, № 4 (1998), 445–448).

13.34. (И. Д. Макдональд). Периодичен ли коммутант группы, в которой выполняется тождество $[x, y]^n = 1$? *В. Д. Мазуров*

Нет, не всегда (G. S. Deryabina, P. A. Kozhevnikov, *Commun. Algebra*, **27**, № 9 (1999), 4525–4530; С. И. Адян, *Докл. Акад. Наук*, **374**, № 2 (2000), 151–153).

13.38. Пусть $G = F/R$ — про-p-группа с одним определяющим соотношением, где R — нормальный делитель свободной про-p-группы F, порожденный одним элементом $r \in F^p[F, F]$.

а) Предположим, что $r = t^p$ для некоторого $t \in F$; может ли группа G содержать в качестве подгруппы группу Демушкина?

б) Более общий вопрос: существуют ли две про-p-группы $G_1 \supset G_2$ с одним определяющим соотношением, где G_1 обладает элементами конечного порядка, а подгруппа G_2 — без кручения? *О. В. Мельников*

а) Да, может. б) Да, существуют. Про-p-группа с представлением $\langle a, b \mid [a, b]^p = 1\rangle$ содержит группу Демушкина $\langle x_1, \ldots, x_{2g} \mid \prod_{i=1}^{g}[x_{2i-1}, x_{2i}] = 1\rangle$ для некоторого $g > 1$. (О. В. Мельников, *письмо от 28.2.1999.*)

13.40. Группа G называется *ω-аппроксимируемой свободными группами*, если для любого конечного набора неединичных элементов из G найдется такой гомоморфизм группы G в свободную группу, что образы всех этих элементов неединичны. Верно ли, что любая конечно-порожденная группа, ω-аппроксимируемая свободными группами, вложима в свободную $\mathbb{Z}[x]$-группу?

А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников

Да, верно (O. Kharlampovich, A. Myasnikov, *J. Algebra*, **200** (1998), 472–570).

13.46. Можно ли каждую несчетную абелеву группу конечного нечетного периода разбить на два подмножества так, чтобы ни одно из них не содержало смежных классов по бесконечным подгруппам? Среди счетных абелевых групп такие разбиения существуют для групп с конечным числом элементов порядка 2. *И. В. Протасов*

Да, можно (Е. Г. Зеленюк, *Мат. заметки*, **67**, № 5 (2000), 706–711).

13.47. Можно ли каждую счетную абелеву группу с конечным числом элементов порядка 2 разбить на два подмножества, плотные в любой групповой топологии? *И. В. Протасов*

Да, можно (Е. Г. Зеленюк, *Укр. мат. ж.*, **51**, № 1 (1999), 41–47).

13.54. б) Верно ли, что любая группа вложима в ядро некоторой группы Фробениуса (см. 6.53)? *А. И. Созутов*

Да, верно (В. В. Блудов, *Сиб. мат. ж.*, **38**, № 6 (1997), 1219–1221).

13.61. Назовем метрическое пространство *узким*, если оно квазиизометрично подмножеству вещественной прямой, и *широким* — в противном случае. Пусть G — группа с конечным множеством порождающих A и $\Gamma = \Gamma(G, A)$ — ее граф Кэли, снабженный естественной метрикой. Допустим, что после удаления из Γ любого узкого подмножества L не более двух компонент связности графа $\Gamma \setminus L$ являются широкими, причем хотя бы для одного такого L имеется ровно две широких компоненты в $\Gamma \setminus L$. Верно ли, что граф Γ квазиизометричен евклидовой или гиперболической плоскости? *В. А. Чуркин.*

Нет, вообще говоря, не верно (О. В. Богопольский, *Препринт*, Новосибирск, 1998). См. также новую задачу 14.98.

13.62. Пусть U и V — нециклические подгруппы свободной группы. Верно ли, что из включения $[U, U] \leqslant [V, V]$ следует, что $U \leqslant V$? *В. П. Шаптала*

Нет, не верно (M. J. Dunwoody, *Arch. Math.*, **16** (1965), 153–157).

13.66. Пусть F — а) свободная; б) свободная метабелева группа конечного ранга. Обозначим через M множество всех эндоморфизмов группы F с нециклическими образами. Можно ли выбрать два таких элемента $g, h \in F$, что для любых $\varphi, \psi \in M$ из того, что $\varphi(g) = \psi(g)$ и $\varphi(h) = \psi(h)$, следует, что $\varphi = \psi$, т. е. эндоморфизмы из M однозначно определяются своими значениями на g и h? *В. Э. Шпильрайн*

а) Да, можно (D. Lee, *J. Algebra*, **247**, №2, 509–540).
б) Нет, не всегда (Е. И. Тимошенко, *Мат. заметки*, **62**, № 6 (1997), 916–920).

14.25. Обозначим через qG квазимногообразие, порожденное группой G. Верно ли, что существует такая конечно-порожденная группа G, что множество собственных максимальных подквазимногообразий в qG бесконечно? *А. И. Будкин*

Да, верно (В. В. Блудов, *Алгебра и логика*, **41**, № 1 (2002), 3–15).

14.48. Если уравнение над свободной группой F не имеет решений в F, верно ли, что тогда это уравнение не имеет решений и в некоторой конечной фактор-группе группы F? *Л. Комерфорд (L. Comerford)*

Нет, не всегда (T. Coulbois, A. Khelif, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **127**, №4 (1999), 963–965).

14.49. Является ли группа $SL_3(\mathbb{Z})$ фактор-группой модулярной группы $PSL_2(\mathbb{Z})$? Так как модулярная группа изоморфна свободному произведению двух циклических групп порядков 2 и 3, то вопрос в том, порождается ли группа $SL_3(\mathbb{Z})$ двумя элементами порядков 2 и 3. *М. Кондер (M. Conder)*

Нет, не является (M. C. Tamburini, P. Zucca, *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.*, **11**, №1 (2000), 5–7; Я. Н. Нужин, *Мат. заметки*, **70**, №1 (2001), 79–87). Однако М. Кондер показал, что в $SL_3(\mathbb{Z})$ есть подгруппа индекса 57, являющаяся фактор-группой модулярной группы $PSL_2(\mathbb{Z})$. Также показано (M. C. Tamburini, J. S. Wilson, N. Gavioli, *J. Algebra*, **168** (1994), 353–370), что $SL_d(\mathbb{Z})$ — фактор-группа модулярной группы $PSL_2(\mathbb{Z})$ для всех $d \geqslant 28$.

14.50. (З. И. Боревич). Подгруппа A группы G называется *паранормальной* (соответственно *полинормальной*), если для любого $x \in G$ имеет место включение $A^x \leqslant \langle A^u \mid u \in \langle A, A^x\rangle\rangle$ (соответственно $A^x \leqslant \big\langle A^u \mid u \in A^{\langle x\rangle}\big\rangle$). Всякая ли полинормальная подгруппа конечной группы паранормальна? *А. С. Кондратьев*

Нет, не всякая (В. И. Мысовских, *Докл. Акад. наук*, **367**, № 4 (1999), 445–446).

14.52. Известно, что если конечно порожденная группа аппроксимируется нильпотентными группами без кручения, то она аппроксимируется конечными p-группами для любого простого числа p. Верно ли обратное? *Ю. В. Кузьмин*

Нет, не верно (B. Hartley, in: *Symp. Math., Bologna, Vol. XVII* (*Convegno sui Gruppi Infiniti, INDAM, Roma, 1973*), Academic Press, London, 1976, 225–234).

14.58. б) Пусть A — периодическая группа регулярных автоморфизмов абелевой группы. Конечна ли A, если она порождается элементами порядка 3?

В. Д. Мазуров

Да, конечна (А. Х. Журтов, *Сиб. мат. ж.*, **41**, № 2 (2000), 329–338).

14.66. (Известный вопрос). Пусть G — конечная разрешимая группа, $\pi(G)$ — множество простых делителей порядка G, а $\nu(G)$ — максимум числа простых делителей порядка элемента из G. Существует ли линейная оценка для $|\pi(G)|$ в терминах $\nu(G)$? *А. Морето (A. Moretó)*

Да, существует (T. M. Keller, *J. Algebra*, **178**, № 2 (1995), 643–652).

14.71. Рассмотрим свободную группу F конечного ранга и произвольную группу G. Определим *G-замыкание* $\mathrm{cl}_G(T)$ любого подмножества $T \subseteq F$ как пересечение ядер всех тех гомоморфизмов $\mu : F \to G$ группы F в группу G, которые тривиальны на T: $\mathrm{cl}_G(T) = \bigcap\{\mathrm{Ker}\,\mu \mid \mu : F \to G;\ \ T \subseteq \mathrm{Ker}\,\mu\}$. Скажем, что группы G и H *геометрически эквивалентны*, если для любой свободной группы F и любого подмножества $T \subset F$ его G- и H-замыкания совпадают: $\mathrm{cl}_G(T) = \mathrm{cl}_H(T)$. Нетрудно показать, что если G и H геометрически эквивалентны, то у них одни и те же квазитождества. Верно ли, что если у двух групп одни и те же квазитождества, то они геометрически эквивалентны? Это верно для нильпотентных групп. *Б. И. Плоткин*

Нет, вообще говоря, не верно (В. В. Блудов, *Тезисы междун. конф. Логика и приложения,* Новосибирск, 2000, с. 18; R. Göbel, S. Shelah, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **130** (2002), 673–674 (electronic); A. G. Myasnikov, V. N. Remeslennikov, *J. Algebra*, **234** (2000), 225–276). В последней работе найдены также необходимые и достаточные условия геометрической эквивалентности.

14.77. Пусть p — простое число, а X — конечное множество степеней числа p, содержащее 1. Верно ли, что X является множеством всех порядков классов сопряженных элементов в некоторой конечной p-группе?

Дж. Сангронис (J. Sangroniz)

Да, верно (J. Cossey, T. Hawkes, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **128**, № 1 (2000), 49–51).

14.86. Существует ли бесконечная локально нильпотентная p-группа, совпадающая со своим коммутантом, в которой каждая собственная подгруппа нильпотентна? *Дж. Уайголд (J. Wiegold)*

Нет, не существует (A. O. Asar, *J. Lond. Math. Soc. (2)*, **61**, № 2 (2000), 412–422).

14.96. Предположим, что конечная p-группа P допускает автоморфизм порядка p^n, имеющий ровно p^m неподвижных точек. Согласно (Е. И. Хухро, *Мат. сб.*, **184** (1993), 53–64) группа P содержит подгруппу индекса, ограниченного в терминах p, n и m, которая разрешима ступени, ограниченной в терминах p^n. Верно ли, что P также содержит подгруппу индекса, ограниченного в терминах p, n и m, которая разрешима ступени, ограниченной в терминах m? Положительные ответы известны для $m = 1$ (S. McKay, *Quart. J. Math. Oxford, Ser. (2)*, **38** (1987), 489–502; I. Kiming, *Math. Scand.*, **62** (1988), 153–172) и для $n = 1$ (Ю. А. Медведев, см. 10.68). *Е. И. Хухро*

Да, верно (A. Jaikin–Zapirain, *Adv. Math.*, **153**, №2 (2000), 391–402).

14.103. Пусть H — собственная подгруппа группы G, элементы $a, b \in H$ имеют различные простые порядки p, q, и для всякого $g \in G \setminus H$ подгруппа $\langle a, b^g \rangle$ является конечной фробениусовой группой с дополнением порядка pq. Будет ли подгруппой объединение ядер всех фробениусовых подгрупп группы G с дополнением $\langle a \rangle$? Особенно важен случай, когда все подгруппы $\langle a, b^g \rangle$, $g \in G$, конечны. *В. П. Шунков*

Нет, в общем случае не будет. В качестве контрпримера можно взять $G = \langle x, y, z, a, b \mid x^7 = y^7 = [x, y, y] = [x, y, x] = a^3 = b^2 = [a, b] = 1,\ \ x^a = x^2,\ \ y^a = y^2,\ \ x^b = x^{-1},\ \ y^b = y^{-1} \rangle$ с $H = \langle a, b \rangle$. Аналогичные примеры есть и для $p = 2$, и для любого нечетного простого q. (А. И. Созутов, *2002*.)

14.104. Бесконечная группа G называется *монстром первого рода*, если она обладает элементом порядка > 2 и для любого такого элемента a и любой собственной подгруппы H группы G в разности $G \setminus H$ найдется элемент g, для которого $\langle a, a^g \rangle = G$. А. Ю. Ольшанский показал, что существует континуум монстров первого рода (см. Архив, 6.63). Существует ли для каждого такого монстра группа без кручения, являющаяся центральным расширением циклической группы с помощью заданного монстра? *В. П. Шунков*

Нет, не для каждого, поскольку для существования такого расширения необходимо, чтобы любая конечная подгруппа монстра была циклической, а это требование не всегда выполнено (А. И. Созутов, *письмо от 20.11.2001*).

Указатель фамилий