В.И. Малыхин

# ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

ВТОРОЕ ИЗДАНИЕ

ЮНИТИ
UNITY

В.И. Малыхин

# ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Второе издание,
переработанное и дополненное

*Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений*

*Рекомендовано Учебно-методическим центром «Профессиональный учебник» в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений*

ЮНИТИ
UNITY
Москва • 2003

**УДК 336:51(075.8)**
**ББК 65.26в6.я73**
**М20**

Рецензенты:
*кафедра математики Московского государственного технологического университета «СТАНКИН»*
(зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. Н.Н. Холщевникова)
канд. экон. наук, доц. *Я.С. Мелкумов*

Главный редактор издательства
доктор экономических наук *Н.Д. Эриашвили*

**Малыхин В.И.**
**М20** Финансовая математика: Учеб. пособие для вузов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. — 237 с.

ISBN 5-238-00559-8

Рассмотрены вопросы финансовой математики в условиях определенности (наращенные и дисконтированные суммы, потоки платежей, ренты, кредитные расчеты, оценка инвестиционных проектов, финансовые расчеты на рынке ценных бумаг), а также в условиях неопределенности, в том числе теория оптимального портфеля, теоретико-вероятностные методы и финансовые риски. Даны вопросы для самопроверки, задачи для самостоятельного решения и ответы к ним.

Для студентов и преподавателей экономических и финансовых специальностей вузов.

**ББК 65.26в6.я73**

ISBN 5-238-00559-8

# Предисловие

Есть ли такая наука — финансовая математика? Что она включает в себя, кроме элементарных подсчетов сложных процентов? После замечательных работ Х. Марковица 1952 г. (H.M. Markowitz) и Д. Тобина 1965 г. (D. Tobin), за которые их авторы позже получили Нобелевские премии, можно с уверенностью сказать, что такая наука есть. А после знакомства с книгой российского математика А.Н. Ширяева «Основы стохастической финансовой математики» этот вывод станет еще увереннее.

Любая наука интересна содержащимися в ней идеями. В финансовой математике такие идеи есть. Идеи Марковица и Тобина о строении оптимального портфеля ценных бумаг доступны даже домохозяйкам. Идея оптимального портфеля Марковица и Тобина очень проста. Предположим, что Вы имеете 1 000 000 000 долл. (отчасти поэтому «Вы» написано с большой буквы!). Вы хотите купить на всю сумму ценные бумаги: облигации, акции и т.п. И конечно, Вы хотите, чтобы они приносили Вам некоторый доход, но излишне рисковать Вы не хотите. Теория Марковица и Тобина диктует изящное решение: структура рисковых ценных бумаг Вашего портфеля должна повторить структуру большого рынка этих бумаг! Если на большом рынке 1% всех рисковых бумаг по стоимости составляют акции и облигации «General Motors», то и в Вашем портфеле среди рисковых бумаг бумаги этой компании должны составить такую же долю! Инвестор может лишь варьировать долей безрисковых ценных бумаг в своем портфеле (больше таких бумаг — меньше доход и меньше риск, и наоборот).

Безусловно, достойны внимания великолепные конструкции опционов, начисто уничтожающие риск. Наверное, как и выводы теории Марковица и Тобина, эти конструкции должны быть известны как можно более широкому кругу людей и не только финансистов.

Конечно, нужно знать и трезвый вывод из всех этих финансовых нововведений: все они придуманы для того, чтобы извлекать прибыль на финансовом рынке, т.е. из остальных участников этого рынка. Давний вывод о том, что на финансовом рынке выигрывают лишь «акулы», лишь те, кто имеет больше денег, кто имеет больше информации, остается верным и на сегодняшний день.

Понятно, что финансы являются лишь частью (очень важной, но все-таки частью) всей экономики. Настоящие лидеры экономики — это производители материальных ценностей и услуг: автомобилей, магнитофонов, компьютеров и т.п. Только там, в реальном секторе экономики, делаются «настоящие» деньги, и финансовая сфера, какие бы цели она ни преследовала сама по себе, вынуждена заниматься обслуживанием этого сектора.

В науке о финансах, как в никакой другой, важна оценка действующим лицом (инвестором, участником рынка и т.п.) дохода и риска финансовой операции. Но автор счел возможным в основной части книги ограничиться объективными показателями, вынеся субъективные в дополнения к обеим частям книги.

При написании данного пособия автор руководствовался следующей установкой: пособие должно быть понятно и полезно студентам младших и средних курсов экономических вузов; автор хотел бы, чтобы оно оказалась полезным и преподавателям. Изложенный материал содержит все самое важное из финансовой математики и его достаточно для обычного семестрового курса (15—18 лекций и столько же практических занятий). Автор, не будучи финансистом, исходил из того, что финансовая математика — это всего лишь скелет науки о финансах, «нарастить мясо» на этом скелете — дело специальных кафедр. Важной целью было также желание продемонстрировать студентам полезность применения уже в основном изученной ими вузовской математики в других важных областях.

В пособии приведено много примеров, иллюстрирующих изложение материала, в конце каждого параграфа даются вопросы и задачи. Задач вполне достаточно для организации практических занятий.

Автором создан программный комплекс «Учебное рабочее место финансиста» («УРМ финансиста»), содержащий около 100 важнейших типичных задач по финансовой математике. Программы написаны на языке Паскаль 6. Этот УРМ использовался при написании данного пособия, главным образом при подборе примеров и задач. В некоторых задачах предлагается проверить расчеты, выполненные с помощью этого комплекса.

Пособие делится на две части, части — на главы (лекции), главы — на параграфы.

По финансовой математике издано немало книг (см. библиографический список в конце книги). Я благодарен авторам этих книг — по ним я знакомился с финансовой математикой, широко использовал материал этих книг без специального цитирования. Но за все недостатки данного пособия несу ответственность только я один.

*В. Малыхин*

# Часть I

## ФИНАНСОВЫЕ РАСЧЕТЫ В УСЛОВИЯХ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Глава 1. НАРАЩЕНИЕ И ДИСКОНТИРОВАНИЕ ДЕНЕЖНЫХ СУММ

Глава 2. ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ, РЕНТЫ

Глава 3. КРЕДИТНЫЕ РАСЧЕТЫ

Глава 4. АНАЛИЗ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Глава 5. ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ ДОХОДНОСТИ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ

Глава 6. ХАРАКТЕРИСТИКИ ФИНАНСОВЫХ ИНСТРУМЕНТОВ

## ДОПОЛНЕНИЕ К ЧАСТИ I

Глава 7. СИСТЕМА ПРЕДПОЧТЕНИЙ ИНДИВИДА И УЧЕТ ЕЕ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ

Глава 8. МОДЕЛИ ТОРГОВ

Сумма $P$, наращенная по ставке $i$ простых процентов, через $t$ промежутков начисления станет $P_t = P(1 + ti)$.

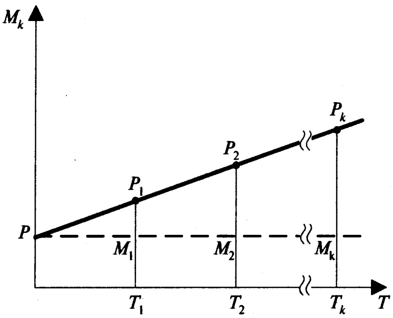



**Рис. 1.1**

Разность наращенной суммы и начальной называется *процентными деньгами*. При наращении простых процентов процентные деньги растут в арифметической прогрессии. Гра-фически это показано на рис. 1.1, где $P$ — начальная сумма, отрезки $P_kT_k$ — наращенные суммы и отрезки $P_kM_k$ — процентные деньги.

## 1.2. Наращение сложных процентов

При наращении сложных процентов по ставке $i$ каждая следующая сумма возрастает на долю $i$ от предыдущей. Таким образом, к концу единичного промежутка начисления сумма $P$ возрастет на долю $i$ и станет $P_1 = P + iP = P(1 + i)$ к концу 2-го промежутка начисления эта сумма возрастет еще на долю $i$ от $P_1$ и станет $P_2 = P_1 + iP_1 = P(1 + i) + iP(1 + i) = P(1+ i)^2$ и т.д. К концу $n$-го промежутка начисления наращенная сумма станет $P_n = P(1 + i)^n$. Таким образом, последовательность наращенных сумм $P$, $P_1$, ..., $P_n$ есть геометрическая прогрессия с начальным членом $P$ и знаменателем прогрессии $(1+i)$.

**Пример 3.** Пусть $P=1000$, $i=10\%$, т.е. как доля $i = 0{,}1$. Следовательно, наращенные по сложным процентам суммы таковы: $1000$, $1000 + 0{,}1 \cdot 1000 = 1000 + 100 = 1100$, $1100 + 0{,}1 \cdot 1100 = 1210$, $1210 + 0{,}1 \cdot 1210 = 1331{,}1$ и т.д.

**Пример 4.** Годовая ставка сложных процентов равна 8%. Через сколько лет начальная сумма удвоится?

Решение. Надо решить неравенство: $(1 + 0{,}08)^n \geq 2$. Логарифмируем по основанию натуральных логарифмов и получаем $n > \ln(2)/\ln(1{,}08)$.

*Ответ*: через 9 лет.

Из этого примера видно, что вычисления со сложными процентами более сложные, чем с простыми. Для занятий по финансовой математике необходимо иметь хороший калькулятор (достаточно, чтобы можно было возводить любое положительное число в любую степень).

Формула наращения сложных процентов $P_n = P(1+i)^n$, выведенная для целых положительных $n$, может применяться и для нецелых $t$.

Сумма $P$, наращенная по ставке $i$ сложных процентов, через $t$ промежутков начисления станет $P_t = P(1+i)^t$.

**Пример 5.** 13 января в банк положили сумму 1000 д.е. до востребования под ставку 12% годовых сложных процентов. Какую сумму снимет вкладчик 1 сентября?

Решение. Воспользуемся формулой наращения сложных процентов $P_t = P(1+i)^t$. Но как вычислить $t$? Надо признать, что однозначного ответа в этой ситуации нет. Изберем самый простой вариант: будем считать, что в году 360 дней, в квартале — 90, в одном месяце — 30 и т.д. (учтем, что в году есть несколько праздничных дней и т.д.). Тогда $t = (30 \cdot 7 + 17)/360$ и искомая сумма есть 1074 д.е.

При работе со сложными процентами иногда для приближенного оценивания полезно следующее правило.

***Правило 72.*** Если процентная ставка есть $\alpha$, то удвоение капитала по такой ставке происходит примерно за $72/\alpha$ лет.

Например, согласно этому правилу при ставке 3% удвоение капитала происходит за 24 года.

Это правило применяется для небольших ставок.

В дальнейшем, если не указано, какие проценты используются, то имеются в виду сложные проценты.

## 1.3. Сравнение силы роста простых и сложных процентов

При одной и той же ставке $i$ наращение сложных процентов идет быстрее, чем простых процентов, при длине периода наращения более единичного и медленнее, если период наращения менее единичного.

Для этого достаточно убедиться, что

$(1+i)^t > (1+ti)$, если $t > 1$ и $(1+i)^t < (1+ti)$, если $0 < t < 1$.

Графики функций $(1+i)^t$ и $(1+ti)$ в зависимости от $t$ показаны на рис. 1.2.

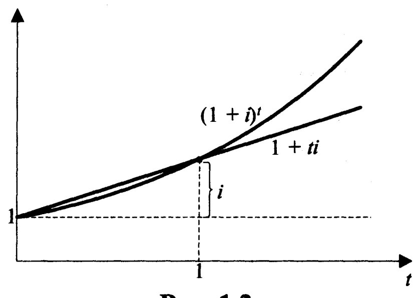



**Рис. 1.2**

**Пример 6.** Пусть сумма 800 наращивается по ставке $i = 8\%$ простых и сложных процентов. Тогда наращенные суммы таковы:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Простые проценты | 800 | 864 | 928 | 992 |
| Сложные проценты | 800 | 864 | 933,1 | 1007,8 |
| Промежутки начисления | 0 | 1 | 2 | 3 |

## 1.4. Мультиплицирующие и дисконтирующие множители

Для облегчения расчетов, особенно со сложными процентами, составлены таблицы мультиплицирующих множителей.

*Мультиплицирующий множитель* показывает, во сколько раз возрастет за $n$ лет сумма, положенная в банк под $i$ процентов годовых:

$$M(n, i) = (1 + i)^n.$$

Величина $M(n, i)$ есть будущая стоимость одной денежной единицы — через $n$ лет при ставке процента $i$.

Так, $M(5, 8)$ есть 1,469. Таблицы таких множителей имели большое значение для финансовых расчетов ранее, когда не было электронных калькуляторов. Но и сейчас во многих ситуациях такие таблицы весьма удобны. Ниже приведен фрагмент таблицы мультиплицирующих множителей $M(n, i)$ для $2 < n < 11$, $2 < i < 12$. Таблица большого объема приведена в приложении 1.

**Мультиплицирующие множители**

| $n$ \ $i$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1,093 | 1,125 | 1,158 | 1,191 | 1,225 | 1,260 | 1,295 | 1,331 | 1,368 |
| 4 | 1,126 | 1,170 | 1,216 | 1,262 | 1,311 | 1,360 | 1,412 | 1,464 | 1,518 |
| 5 | 1,159 | 1,217 | 1,276 | 1,338 | 1,403 | 1,469 | 1,539 | 1,611 | 1,685 |
| 6 | 1,194 | 1,265 | 1,340 | 1,419 | 1,501 | 1,587 | 1,677 | 1,772 | 1,870 |
| 7 | 1,230 | 1,316 | 1,407 | 1,504 | 1,606 | 1,714 | 1,828 | 1,949 | 2,076 |
| 8 | 1,267 | 1,369 | 1,477 | 1,594 | 1,718 | 1,851 | 1,993 | 2,144 | 2,305 |
| 9 | 1,305 | 1,423 | 1,551 | 1,689 | 1,838 | 1,999 | 2,172 | 2,358 | 2,558 |
| 10 | 1,344 | 1,480 | 1,629 | 1,791 | 1,967 | 2,159 | 2,367 | 2,594 | 2,839 |

Для облегчения расчетов используются также таблицы дисконтирующих множителей.

*Дисконтирующий множитель* показывает долю, которую составит начальная сумма, положенная в банк под $i$ процентов годовых, от наращенной к концу $n$-го года:

$$D(n,i) = 1/M\,(n,i) = (1+i)^{-n}.$$

Величину $D(n, i)$ называют еще *приведенной*, или *современной*, *стоимостью* одной денежной единицы через $n$ лет при ставке процента $i$.

Так, $D(5,8) = 0{,}681$. Ниже приведен фрагмент таблицы дисконтирующих множителей $D(n, i)$ для $2 < n < 11$, $2 < i < 12$. Таблица большого объема приведена в приложении 2.

**Дисконтирующие множители**

| $n$ \ $i$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 0,915 | 0,889 | 0,864 | 0,840 | 0,816 | 0,794 | 0,772 | 0,751 | 0,731 |
| 4 | 0,888 | 0,855 | 0,823 | 0,772 | 0,763 | 0,735 | 0,708 | 0,683 | 0,659 |
| 5 | 0,863 | 0,822 | 0,784 | 0,747 | 0,713 | 0,681 | 0,650 | 0,621 | 0,593 |
| 6 | 0,837 | 0,790 | 0,746 | 0,705 | 0,666 | 0,630 | 0,596 | 0,564 | 0,535 |
| 7 | 0,813 | 0,760 | 0,711 | 0,665 | 0,623 | 0,583 | 0,547 | 0,513 | 0,482 |
| 8 | 0,789 | 0,731 | 0,677 | 0,627 | 0,582 | 0,540 | 0,502 | 0,467 | 0,434 |
| 9 | 0,766 | 0,703 | 0,645 | 0,592 | 0,544 | 0,500 | 0,460 | 0,424 | 0,391 |
| 10 | 0,744 | 0,676 | 0,614 | 0,558 | 0,508 | 0,463 | 0,442 | 0,386 | 0,352 |

## 1.5. Удержание простых и сложных процентов

Некто попросил в банке кредит в размере 1000 руб. Банкир говорит: «Пожалуйста. Процентная ставка у нас 10% годовых, так что 100 руб. мы с Вас сейчас же удержим. Итак, получите 900, но вернете через год, конечно, все 1000». Такая операция называется *удержанием процентов*. В этой операции все в пользу банкира. Во-первых, проценты уже удержаны. Во-вторых, доходность этой операции для банка больше, чем объявленные 10%.

Действительно, доходность операции для банка равна $100/900 \sim 11{,}1\%$. Поэтому подобную операцию — удержание процентов с конечной суммы — кредиторы применяют довольно часто.

Долговая расписка, содержащая обязательство выплатить определенную денежную сумму (номинал векселя) в конкретный срок, называется *векселем*. Учет векселя — обычное дело для банка и означает оплату векселя с дисконтом, т.е. со скидкой с его номинала.

**Пример 7.** Банк учел вексель за 70% его номинала за полгода до его выкупа. Какова доходность операции для банка?

Пусть номинал векселя $N$, тогда банк заплатил владельцу векселя $0{,}7N$, а получил через полгода $N$, поэтому доходность операции (абсолютная за полгода) равна $0{,}3/0{,}7 \sim 0{,}43$, т.е. 43% (а в процентах годовых это дает 104,5% — см. далее гл. 6).

Удержание процентов можно проводить также по простым процентам и сложным. Рассмотрим сначала удержание простых процентов. Пусть ставка удержания — $d$ (доля), тогда за каждый год удерживается одна и та же величина — доля $d$ с конечной суммы $P$, так что если кредит выдается на $n$ лет, то будет удержано $ndP$ и оставшаяся после удержания сумма есть $P_n = P - ndP = P(1 - nd)$.

Оставшиеся после удержания суммы образуют убывающую арифметическую прогрессию.

Если же удержание проходит по сложным процентам, то за каждый год удерживается доля $d$ от предыдущей суммы, так что оставшаяся сумма есть $P = P(1 - d)^n$. Оставшиеся после удержания суммы образуют убывающую геометрическую прогрессию.

**Пример 8.** С суммы 800 удерживаются проценты по ставке 4%. Выписать оставшиеся суммы.

| Промежутки удержания | −4 | −3 | −2 | −1 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|
| Простые проценты | 672 | 704 | 736 | 768 | 800 |
| | | (арифметическая прогрессия) | | | |
| Сложные проценты | 679,5 | 707,8 | 737,3 | 768 | 800 |
| | | (геометрическая прогрессия) | | | |

При удержании простые проценты уменьшают сумму медленнее, чем сложные, на промежутках, длиннее единичного (см. § 3).

Для облегчения расчетов при удержании сложных процентов используются дисконтные множители.

*Дисконтный множитель* показывает, во сколько раз уменьшится сумма при удержании с нее сложных процентов по ставке $d$ в течение $n$ промежутков удержания:

$$\mathrm{Dis}(n, d) = (1 - d)^n.$$

Можно также сказать, что до величины $\mathrm{Dis}(n, d)$ уменьшится одна денежная единица, с которой удерживаются сложные проценты по ставке $d$ в течение $n$ периодов.

Удержание процентов имеет ограниченную область применения — оно редко применяется для числа промежутков удержания более двух-трех. Ниже приведен фрагмент таблицы дисконтных множителей $\mathrm{Dis}(n, i)$ для $0 < n < 4$, $2 < i < 12$.

**Дисконтные множители**

| $n$ \ $i$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,970 | 0,960 | 0,950 | 0,940 | 0,930 | 0,920 | 0,910 | 0,900 | 0,890 |
| 2 | 0,941 | 0,922 | 0,903 | 0,884 | 0,865 | 0,828 | 0,828 | 0,810 | 0,792 |
| 3 | 0,913 | 0,885 | 0,857 | 0,831 | 0,804 | 0,779 | 0,754 | 0,729 | 0,705 |

Удержание процентов аналогично начислению процентов:

*начисление процентов*: если сейчас положить сумму $S$, то через год она станет $S(1 + i)$;

*удержание процентов*: чтобы через год получить с клиента сумму $S$, надо сейчас выдать ему $S(1 - d)$.

## 1.6. Эквивалентность во времени денежных сумм. Математическое дисконтирование

Денежные суммы $S(T)$ в момент $T$ и $s(t)$ в момент $t$ называются *эквивалентными по ставке сравнения* $i$, если $S(T) = s(t)(1 + i)^{(T-t)}$. При $T > t$ это означает, что сумма $s(t)$, наращенная по ставке $i$ сложных процентов, превратится в момент $T$ в сумму $S(T)$; однако можно считать, что $T$ может быть и меньше $t$, тогда это означает, что сумма $S(T)$, наращенная по ставке $i$ сложных процентов, превратится, в момент $t$ в сумму $s(t)$. Указанная выше формула автоматически учитывает оба эти случая. Вместе с тем можно сказать и по-другому: при $T > t$ эквивалентность сумм $S(T)$ и $s(t)$ означает, что сумма $S(T)$, уменьшающаяся при движении в прошлое за каждый единичный промежуток в $1/(1 + i)$ раз, к моменту $t$ превратится в точности в сумму $S(t) = S(T)/[(1 + i)^{(T-t)}]$. Такой пересчет будущей суммы к настоящему моменту называется *приведением ее* или *нахождением ее современной величины*. Сама же формула сравнения денежных сумм в любые моменты времени называется *математическим дисконтированием*.

**Пример 9.** Какая сумма предпочтительнее при ставке 6%: \$1000 сегодня или \$2000 через 8 лет?

Р е ш е н и е. Найдем современную величину \$2000 через 8 лет при ставке 6%: $A = 2000 \cdot (1 + 0{,}06)^{-8} = 2000 \cdot D(8{,}6)$. По таблице дисконтирующих множителей находим $D(8, 6) = 0{,}627$.

Итак, $A = 1254 > 1000$. Следовательно, надо предпочесть сумму \$2000 через 8 лет.

## 1.7. Номинальная и эффективная процентные ставки

Предположим, что по требованию некоторых клиентов банк начисляет им проценты ежеквартально, хотя в договоре указана годовая процентная ставка $i = 12\%$. Если начислять ежеквартально $12/4 = 3\%$ по схеме сложных процентов, то за год получим $f = (1 + 0{,}03)^4 = 1{,}1255$ (можно взглянуть в таблицу мультиплицирующих множителей и найти $M(4, 3) = 1{,}126$).

Ставка $f = 12{,}6\%$ называется *эффективной*, а объявленная 12% — *номинальной*. Так как ставка получилась больше, чем в договоре, то банк так делать не будет. Хорошим выходом в данной ситуации является начисление ежеквартально простых процентов по ставке 3%.

В общем случае номинальной называется процентная ставка, используемая для расчетов, для фиксирования в договорах и т.п., а действительная ставка, которая при этом получается, называется эффективной.

Пусть номинальная годовая ставка есть $i$, а сложные проценты начисляются $m$ раз в году по ставке $i/m$. Тогда эффективная годовая ставка $f$ рассчитывается из уравнения $(1 + i/m)^m = 1 + f$, откуда $f = (1 + i/m)^m - 1$.

Если все же надо начислять сложные проценты $m$ раз в году, то какова же должна быть при этом ставка $t$, чтобы за год в итоге получилась нужная ставка $f$? Имеем уравнение $(1 + t)^m = 1 + f$, откуда $t = (1 + f)^{1/m} - 1$.

## 1.8. Непрерывное наращение и дисконтирование

Пусть номинальная годовая ставка есть $i$. При начислении процентов $m$ раз в году по ставке $i/m$ эффективная годовая ставка получается, как показано выше, равной $f = (l + i/lm)^m - 1$, т.е. за год сумма увеличится в $(1 + i/m)^m$ раз. Рассмотрим этот коэффициент наращения, или мультиплицирующий множитель $M(m, i/m)$. При все более частом начислении процентов, т.е. при $m \to \infty$, величина $M(m, i/m)$ имеет предел, который, как известно, равен $e^i$, где e — основание натуральных логарифмов ($e \approx 2{,}71$). *Непрерывным наращением* по ставке $i$ называется увеличение суммы в $e^i$ раз за единичный промежуток начисления и в общем виде — увеличение суммы в $e^{it}$ раз за $t$ промежутков начисления. *Непрерывным дисконтированием* называется операция, обратная непрерывному наращению, т.е. уменьшение суммы в $e^i$ раз за единичный промежуток и уменьшение в $e^{it}$ раз за $t$ промежутков.

## 1.9. Влияние инфляции на ставку процента

Говорят, что инфляция (или темп инфляции) составляет долю $\alpha$ в год, если один и тот же набор товаров стоит в конце года в $(1 + \alpha)$ раз больше, чем в начале этого года. Можно также сказать, что в $(1 + \alpha)$ раз уменьшилась покупательная способность одной денежной единицы.

Последнее означает, что если в начале года на 1 руб. можно было купить, например, 100 г сахара, то в конце года только, скажем, 90 г. Ясно, что инфляция уменьшает реальную ставку процента. Это будет уже ставка процента с учетом инфляции. Действительно, одна денежная единица возрастает за год в $(1 + i)$ раз из-за наращения процентов, но ее покупательная способность уменьшается в $(1 + \alpha)$ раз из-за инфляции. Таким образом, ее реальная ценность — покупательная способность — станет $(1 + i)/(1 + \alpha)$, а годовая реальная ставка есть $(1 + i)/(1 + \alpha) - 1=(i - \alpha)/(1 + \alpha)$. Видно, что при малой инфляции (когда $\alpha$ мало) реальная процентная ставка меньше номинальной приблизительно на величину инфляции. Для того чтобы номинальная ставка $i$ обеспечивала наращение реальной ценности денежных сумм на долю $j$ в год при годовой инфляции $\alpha$, темп инфляции должен удовлетворять уравнению: $(i - \alpha)/(1 + \alpha) = j$, откуда $i = \alpha + j\,(1 + \alpha)$.

## ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

**1.** При какой ставке сложных процентов за 9 лет сумма удваивается?

**2.** В день рождения внука бабушка положила в банк $1000 под 3% годовых. Какой будет эта сумма к семнадцатилетию внука?

**3.** Как найти инфляцию за квартал, если известна годовая инфляция?

**4.** Найдите несколько сумм в прошлом и в будущем, эквивалентных сумме 1000 д.е. в момент 0 при ставке 8% годовых.

**5.** Счет «СБ100» в Сбербанке обещает 2,9% за 100 дней. Сколько это составит процентов годовых?

**6.** Докажите строго, что при одной и той же ставке $i$ наращение сложных процентов идет быстрее, чем простых процентов, при длине периода наращения, более единичного, и медленнее, если период наращения менее единичного, т.е. докажите неравенства $(1 + i)^t > (1 + ti)$, если $t > 1$ и $(1 + i)^t < (1 + ti)$, если $0 < t < 1$. Докажите, что при удержании процентов, наоборот, простые проценты уменьшают сумму медленнее, чем сложные.

**7.** Рассмотрим последовательность оставшихся после удержания 4% сумм из примера **8** в обратном порядке и будем считать их наращенными суммами:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Простые проценты | 672 | 704 | 736 | 768 | 800 |
| Сложные проценты | 679,5 | 707,8 | 737,3 | 768 | 800 |
| Промежутки начисления | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

Первая последовательность есть последовательность наращенных сумм по простым процентам, вторая — по сложным. Найдите соответствующие ставки.

**8.** Докажите, что $f = (1 + i/m)^m - 1 > i$, т.е. что эффективная ставка больше номинальной ($m$ — натуральное число).

**9.** Убедитесь, что для расчетов по инфляции (во сколько раз упала покупательная способность одной денежной единицы и т.п.) можно использовать мультиплицирующие или дисконтирующие множители.

**10.** Какую ставку должен назначить банк, чтобы при годовой инфляции 12% реальная ставка оказалась 6%?

**11.** Наращение простых процентов с переменной ставкой. Пусть простые проценты за $k$-й год равны $i_k$. Найдите наращенную сумму через $n$ лет.

**12.** Наращение сложных процентов с переменной ставкой. Пусть сложные проценты за $k$-й год равны $i_k$. Найдите наращенную сумму через $n$ лет.

**13.** По договору зафиксирован платеж через 3 года в размере 1000 д.е. Через год процентная ставка увеличилась. Кому это выгодно: тому, кому будут платить, или тому, кто будет платить?

**14.** С помощью компьютера получены следующие значения наращенных сумм через дробные промежутки времени.

| | *Начальная сумма* | *Процентная ставка 12%* | | |
|---|---|---|---|---|
| Простые проценты | 800 | 809,6 | 819,2 | 828,8 |
| Сложные проценты | 800 | 809,1 | 818,3 | 827,7 |
| Доля единичного промежутка начисления | 0,0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 |

Проверьте компьютерные расчеты, используя приведенные в § 1.3 формулы наращения простых и сложных процентов.

## Глава 2

# ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ, РЕНТЫ

Потоки платежей весьма часто встречаются на практике. Заработная плата выплачивается, как правило, в виде потока платежей 2 раза в месяц, примерно через 15 дней. Плата за квартиру — поток, как правило, ежемесячных платежей. Семья откладывает на покупку автомобиля, внося ежемесячно на счет в банк некоторую сумму, и т.д. Поэтому изучение потоков платежей очень важно.

## 2.1. Потоки платежей

*Поток платежей* — это последовательность величин самих платежей (со знаками) и моментов времени, когда они осуществлены.

Платеж со знаком плюс, который может быть опущен, — это поступление, платежи со знаком минус представляют собой выплаты.

Поток называется конечным или бесконечным в зависимости от количества платежей в нем.

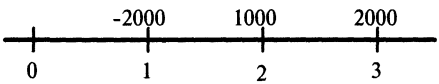
Пусть $\mathfrak{R} = \{R_k, t_k\}$ — поток платежей, в нем $R_k$ — платежи, $t_k$ — моменты времени. Кроме того, предполагается, что известна ставка процента $i$, обычно неизменная в течение всего потока.

***Величиной потока в момент** $T$* называется сумма платежей потока, дисконтированных к этому моменту — $\mathfrak{R}(T) = \sum\limits_k R_k (1+i)^{T-t_k}$.

Достаточно найти величину потока в какой-то момент $\mathfrak{R}(T)$, тогда в любой другой момент $T'$ величина потока $\mathfrak{R}(T') = \mathfrak{R}(T)(1+i)^{T'-T}$.

Величина $\mathfrak{R}(0)$ называется ***современной величиной потока***; если есть последний платеж, то величина потока в момент этого платежа называется ***конечной величиной потока.***

**Пример 1.** Пусть поток есть $\mathfrak{R} = \{(-2000,1);\ (1000,2);\ (2000,3)\}$. Найдем характеристики этого потока при ставке процента $i = 10\%$.




Сначала найдем современную величину потока:
$\mathfrak{R}(0) = -2000 \cdot (1 + 0{,}1)^{-1} + 1000 \cdot (1 + 0{,}1)^{-2} + 2000 \cdot (1 + 0{,}1)^{-3} =$
$= -1818{,}2 + 826{,}4 + 1502{,}6 = 510{,}8.$

Теперь можно найти и конечную величину потока:
$\mathfrak{R}(3) = \mathfrak{R}(0)\,(1 + i)^3 = 679{,}8.$

Поток положительных платежей с постоянными промежутками между ними называется *рентой*. Часто сами платежи также являются одинаковыми. Далее рассматриваются только ренты с одинаковыми платежами.

## 2.2. Конечная годовая рента

Это самая простая рента: в ней только один платеж $R$ в год, длительность ее $n$ лет, годовая процентная ставка $i$. На рентные платежи начисляются сложные проценты.

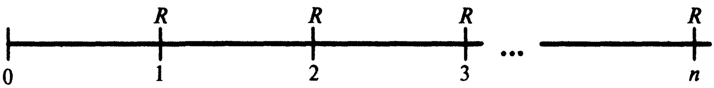
**Пример 2.** Рассмотрим 5-летнюю ренту с годовым платежом 1000 руб., процентная ставка $i = 10\%$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Годовые платежи | | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 |
| | | | 1100 | 2310 | 3641 | 5105,1 |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Всего на счете | | 1000 | 2100 | 3310 | 4641 | 6105,1 |

Поясним движение денежных сумм. В конце 1-го года в банк вносится 1000 руб. В конце 2-го года эта сумма возрастает до 1100 руб. за счет начисленных 10%. Вместе с очередным внесенным платежом в 1000 руб. на счете уже 2100. В конце 3-го года эта сумма возрастает до 2310 руб. за счет начисленных 10%. Вместе с очередным внесенным платежом на счете теперь уже 3310 руб. и т.д. Наращенная сумма ренты равна 6105,1 руб. Современную величину ренты найдем, дисконтируя к моменту 0 наращенную сумму 6105,1. Получаем $6105{,}1/1{,}1^5 = 3791$.

Если платежи поступают в конце очередного промежутка, то рента называется *постнумерандо*, в начале — *пренумерандо*. Рассматриваемая в примере рента постнумерандо. В дальнейшем рассматриваются только такие ренты.

Изучим подробно конечную годовую ренту $\{R, n, i\}$ в общем виде:




Главная задача — найти современную величину этой ренты. Имеем $A = R/(1 + i) + R/(1 + i)^2 + ... + R/(1 + i)^n = R[(1 + i)^{-1} + + ... + (1 + i)^{-n}]$.

В квадратных скобках стоит сумма $n$ членов геометрической прогрессии с первым членом $(1 + i)^{-1}$ и знаменателем $(1 + i)^{-1}$. Как известно, сумма $n$ членов геометрической прогрессии с первым членом $b_1$ и знаменателем $q$ равна $b_1(q^n - 1)/(q - 1)$ или $(b_nq - b_1)/(q - 1)$. Следовательно, сумма в квадратных скобках есть $[1 - (1 + i)^{-n}]/i$. И потому современная величина ренты есть

$$A = R\,[1 - (1 + i)^{-n}]/i.$$

Величина $[1 - (1 + i)^{-n}]/i$ обозначается $a(n, i)$ и называется *коэффициентом приведения ренты.* С учетом этого обозначения имеем

$$A = R \cdot a(n, i).$$

Зная современную величину ренты, можно легко найти конечную ее величину, которая называется еще *наращенной величиной ренты* $S$:

$$S = A(1 + i)^n,$$

или

$$S = R \cdot a(n, i)(1 + i)^n = R\,[(1 + i)^n - 1]/i.$$

Величина $[(1 + i)^n - 1]/i$ обозначается $s(n, i)$ и называется *коэффициентом наращения ренты.* С учетом этого обозначения имеем

$$S = R \cdot s(n, i).$$

Величины $a(n, i)$ и $s(n, i)$ связаны очевидным соотношением:

$$s(n, i) = a(n, i) \cdot (1 + i)^n,$$

или

$$s(n, i) = a(n, i) \cdot M(n, i).$$

Коэффициент наращения $s(n, i)$ показывает, во сколько раз наращенная величина ренты больше ее годового платежа. Аналогичный смысл имеет и коэффициент приведения ренты: он показывает, во сколько раз современная величина ренты больше ее годового платежа. Можем дать другое толкование смысла понятия «современная величина ренты»: если в момент 0 положить в банк современную величину ренты под $i$ процентов годовых, то к концу $n$-го года она вырастет до наращенной величины ренты $S$. Итак, имеем формулы для конечной годовой ренты

$$A = R \cdot a(n, i), \quad S = R \cdot s(n, i). \qquad \textbf{(2.1)}$$

Эти формулы формально имеют смысл и для нецелых $n$. При этом надо использовать определяющие формулы для $a(n, i)$ и $s(n, i)$.

Ниже приведены фрагменты таблиц коэффициентов приведения и наращения годовой ренты. Таблицы большого объема приведены соответственно в приложениях 3 и 4.

**Коэффициенты приведения годовой ренты $a(n,i) = [1 - (1 + i)^{-n}]/i$**

| $n$ \ $i$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 2,829 | 1,775 | 2,723 | 2,673 | 2,624 | 2,577 | 2,531 | 2,487 | 2,444 |
| 4 | 3,717 | 3,630 | 3,546 | 3,465 | 3,387 | 3,312 | 3,240 | 3,170 | 3,102 |
| 5 | 4,580 | 4,452 | 4,329 | 4,212 | 4,100 | 3,993 | 3,890 | 3,791 | 3,696 |
| 6 | 5,417 | 5,242 | 5,076 | 4,917 | 4,767 | 4,623 | 4,486 | 4,355 | 4,231 |
| 7 | 6,230 | 6,002 | 5,786 | 5,582 | 5,389 | 5,206 | 5,033 | 4,868 | 4,712 |
| 8 | 7,020 | 6,733 | 6,463 | 6,210 | 5,971 | 5,747 | 5,535 | 5,335 | 5,146 |
| 9 | 7,786 | 7,435 | 7,108 | 6,802 | 6,515 | 6,247 | 5,995 | 5,759 | 5,537 |
| 10 | 8,530 | 8,110 | 7,722 | 7,360 | 7,024 | 6,710 | 6,418 | 6,145 | 5,889 |

**Коэффициенты наращения годовой ренты $s(n,i) = [(1+i)^n - 1]/i$**

| $n$ \ $i$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 3,091 | 3,122 | 3,153 | 3,184 | 3,215 | 3,246 | 3,278 | 3,310 | 3,342 |
| 4 | 4,184 | 4,246 | 4,310 | 4,375 | 4,440 | 4,506 | 4,573 | 4,641 | 4,710 |
| 5 | 5,309 | 5,416 | 5,526 | 5,637 | 5,751 | 5,867 | 5,985 | 6,105 | 6,228 |
| 6 | 6,468 | 6,633 | 6,802 | 6,975 | 7,153 | 7,336 | 7,523 | 7,716 | 7,913 |
| 7 | 7,662 | 7,898 | 8,142 | 8,394 | 8,654 | 8,923 | 9,200 | 9,487 | 9,783 |
| 8 | 8,892 | 9,214 | 9,549 | 9,897 | 10,260 | 10,637 | 11,028 | 11,436 | 11,859 |
| 9 | 10,159 | 10,583 | 11,027 | 11,491 | 11,978 | 12,488 | 13,021 | 13,579 | 14,164 |
| 10 | 11,464 | 12,006 | 12,578 | 13,181 | 13,816 | 14,487 | 15,193 | 15,937 | 16,722 |

Применение коэффициентов приведения и наращения покажем на примере.

**Пример 3.** Найти современную и наращенную величины годовой ренты с $R = 1000$, $n = 8$, $i = 8\%$.

Находим по таблицам $a(8, 8) = 5{,}747$, $s(8, 8) = 10{,}637$. Значит, современная величина ренты равна 5747, наращенная — 10,637. Для контроля посмотрев в таблицу мультиплицирующих множителей, находим $M(8, 8) = 1{,}851$.

Проверка: $5747 \cdot 1{,}851 = 10\,638$.

## 2.3. Определение параметров годовой ренты

Выше уже сказано, что годовая рента характеризуется годовым платежом $R$, длительностью $n$ лет и процентной ставкой $i$. Процентная ставка обычно неуправляема, но зато к параметрам можно причислить современную величину $A$ и наращенную величину $S$. Все эти величины не являются независимыми, поэтому если задать некоторые из них, то остальные можно определить:

1) если заданы $R$, $n$, $i$, тогда $A = R \cdot a(n, i)$, $S = R \cdot s(n, i)$;

2) если заданы $R$, $A$, $i$, тогда для определения $n$ имеем уравнение $A = R[1 - (1+i)^{-n}]/i$ и получаем $n = -\ln(1 - Ai/R)/\ln(1 + i)$. Если последнее выражение не целое, то $n$ определяется как ближайшее целое к нему, смотря по конкретным требованиям. Можно обойтись и без нахождения $n$ по указанной выше громоздкой формуле.

Имеем $a(n, i) = A/R$, затем подбираем по таблице коэффициентов приведения ренты приблизительно подходящее $n$ (учитывая, что $i$ известно).

**Пример 4.** Пусть $R = 1000$, $i = 8\%$. Найти длительность ренты с современной величиной $A = 4000$.

Решение. Имеем $a(n, 8) = A/R = 4$. По таблице коэффициентов приведения ренты находим, что $a(5, 8) = 3{,}993$. Значит, приблизительно $n = 5$.

Продолжаем исследование по определению параметров рент:

3) заданы $R$, $S$, $i$ — действуем аналогично предыдущему случаю;

4) заданы $A$, $n$, $i$, тогда для определения $R$ имеем уравнение $A = R \cdot a(n, i)$, причем последняя величина известна, значит, $R = A/a(n, i)$;

5) заданы $S$, $n$, $i$ — действуем аналогично п. 4;

6) хотя процентная ставка неуправляема организатором ренты, можно задуматься о желаемой процентной ставке. То есть пусть заданы $R$, $A$, $n$, надо подобрать процентную ставку $i$. Это посложнее, чем в предыдущих задачах. Для определения $i$ имеем уравнение $A = R[1 - (1 + i)^{-n}]/i$, но решить это уравнение аналитически невозможно, приходится применять приближенные методы. Однако, имея под рукой компьютер, несложно составить простую программу для приближенного определения $i$.

Заметим сначала, что величина $[1 - (1 + i)^{-n}]/i$ равна примерно $n$ при малых $i$ и затем уменьшается при росте $i$ (ведь эта величина есть сумма $[1/(1 + i) + 1/(1 + i)^2 + ... + 1/(1 + i)^n]$, отсюда вытекает, что при $A/R \geq n$ уравнение решений не имеет, т.е. нужной ставки $i$ не существует. Если же $A/R < n$, то из указанного выше вытекает, что нужная ставка $i$ найдется и ее можно найти итеративным путем.

Будем увеличивать $i$ в цикле с малым шагом и анализировать соотношение $A/R < [1 - (1 + i)^{-n}]/i$. Сначала, при малых $i$, это неравенство будет верным, затем оно перестанет выполняться. Как только это произойдет, значит, приближенно нужная ставка найдена.

## 2.4. Рента конечная общая — и платежи и начисление процентов несколько раз в году

Пусть платежи выплачиваются $p$ раз в году через равные интервалы и суммарный годовой платеж равен $R$, так что единичный платеж равен $R/p$; проценты начисляются $m$ раз в году также через равные интервалы. Рассмотрим подробно 1-й год.

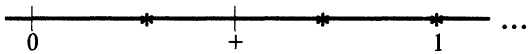



Рисунок отражает ситуацию при $p = 3$, $m = 2$ (платежи вносятся в моменты, обозначенные «*», начисления процентов происходят в моменты «+» и в конце года.

Необходимы некоторые уточнения. В очередной момент начисления проценты начисляются по ставке сложных процентов на каждый более ранний платеж с учетом момента его поступления. Так как $k$-й платеж отстоит от конца на $(n - k/p)$ лет, то на него будет произведено $[(n - k/p)m]$ начислений по полной ставке $i/m$ ($[a]$ — целая часть $a$) и, возможно, еще одно начисление по неполной ставке, и его частичный вклад в наращенную сумму ренты составит $S_k = (R/p) \cdot (1 + i/m)^{(n-k/p)m}$. Сумма всех таких частичных вкладов и составляет наращенную сумму ренты

$$S = \sum_{k=1}^{np} S_k = \sum_{k=1}^{np} (R/p)(1 + i/m)^{(n-k/p)m}.$$

Изменяя порядок суммирования, сумму можно записать так:

$$S = \sum_{k=0}^{np-1} (R/p)(1 + i/m)^{\frac{m}{p}k}.$$

Ясно, что слагаемые этой суммы члены геометрической прогрессии с первым членом $R/p$, знаменателем $(1 + i/m)^{m/p}$ и числом членов $np$. Значит, их сумма равна

$$S = (R/p)\frac{(1 + i/m)^{nm} - 1}{(1 + i/m)^{m/p} - 1}.$$

Используя введенные выше обозначения $[(1+i)^k - 1]/i = s(k, i)$, получаем

$$S = (R/p)\frac{s(nm, i/m)}{s(m/p, i/m)}. \qquad \textbf{(2.2)}$$

Найдя наращенную величину ренты, без труда можно найти современную величину ренты. Именно:

$$A = S/(1 + i/m)^{nm}.$$

Из этой общей формы можно получить формулы для подсчета наращенной величины частных рент: когда платеж один раз в году, а проценты начисляются несколько раз; когда, наоборот, начисление процентов только раз в году, зато платежей несколько, и т.п.

Например, пусть $p$ — число платежей в году, а проценты начисляются один раз, т.е. $m = 1$, тогда наращенная величина такой ренты есть

$$S = (R/p)\frac{s(n,\, i)}{s(1/p,\, i)} \quad \text{и} \quad A = S/(1+i)^n \tag{2.3}$$

Или, пусть в году один платеж ($p = 1$), зато проценты начисляются $m$ раз в году, тогда наращенная величина такой ренты есть

$$S = R\frac{s(nm, i/m)}{s(m, i/m)} \quad \text{и} \quad A = S/(1+i/m)^{mn}. \tag{2.4}$$

Весьма часто $m=p$, т.е. число платежей в году и число начислений процентов совпадают, тогда из общей формулы (2.2) получаем

$$S = (R/m)\frac{s(nm, i/m)}{s(1, i/m)} = (R/m)\frac{s(nm, i/m)}{1} = (R/m)\cdot s(nm, i/m). \tag{2.5}$$

Эту формулу, впрочем, легко получить из формулы (2.1) для конечной годовой ренты, положив в ней $R/m$ вместо $R$ с учетом того, что число платежей есть $mn$, а не $n$.

## 2.5. «Вечная» годовая рента

Под «вечной» годовой рентой понимается рента, последовательность платежей которой неограниченна, предполагается, что рента будет выплачиваться неограниченно долго. Наращенная величина такой ренты бесконечна, но современная величина равна $A = R/i$. Докажем это.

Современная величина такой ренты есть бесконечный ряд дисконтированных к современному моменту платежей, т.е. $A = R/(1 + i) + R/(1 + i)^2 + \ldots + R/(1 + i)^n + \ldots = R/i$ (надо использовать сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии). Впрочем, можно взять формулу (2.1) для конечной годовой ренты:

$A = R \cdot a(n, i) = R \cdot [1 - (1 + i)^{-n}]/i$.

Перейдем в этой формуле к пределу при $n \to \infty$ и получим $A = R/i$.

**Пример 5.** Бизнесмен арендовал виллу за \$10 000 в год. Какова выкупная цена аренды при годовой ставке процента 5%?

Р е ш е н и е. Эта выкупная цена есть современная величина всех будущих арендных платежей и равна $A = R/i$ = \$200 000. Между прочим, это в точности годовые процентные деньги, которые стал бы получать арендодатель с \$200 000, помещенных в банк под упомянутую процентную ставку.

## 2.6. Объединение и замена рент

Общее правило объединения рент очень просто: находятся современные величины рент-слагаемых и складываются, а затем подбирается рента-сумма с такой современной величиной и нужными остальными параметрами.

**Пример 6.** Найдем ренту-сумму для двух годовых рент: одна длительностью 5 лет с годовым платежом 1000, и другая — 8 и 800. Годовая ставка процента 8%.

По таблицам находим коэффициенты приведения: $a(5, 8) = 3{,}993$, $a(8, 8) = 5{,}747$. Далее, $A_1 = 1000 \cdot 3{,}993 = 3993$, $A_2 = 800 - 5{,}747 = 4598$.

Значит, у ренты-суммы современная величина $A = 8591$.

Теперь можно задать либо длительность ренты-суммы, либо годовой платеж и затем второй из этих параметров определится. Такие задачи рассмотрены в § 2.3.

Примерно так же решается и вопрос о замене данной ренты другой с измененными параметрами: находится современная величина данной ренты, а затем подбирается рента с такой современной величиной и нужными параметрами.

## 2.7. Дюрация потоков платежей

Пусть $i$ и $\mu = (1 + i)$ — процентная ставка и коэффициент наращения соответственно. Пусть $\mathfrak{R} = (R_k, t_k)$ — поток платежей, $R_k$ — величина платежа в момент $t_k$. Обозначим $A$ современную величину этого потока: $A = \sum\limits_k A_k$, где $A_k = R_k \exp(-t_k \ln \mu)$ есть современная величина $k$-го платежа.

***Определение.*** *Дюрацией потока платежей* $\mathfrak{R}$ называется эластичность современной величины потока по коэффициенту наращения $E_\mu^A = (dA/d\mu):(A/\mu)$, взятая со знаком «минус».

Обозначается $\mathrm{Dur}(\mathfrak{R})$, итак $\mathrm{Dur}(\mathfrak{R}) = -E_\mu^A$.

Напомним о п р е д е л е н и е эластичности. Пусть $x$ — величина-аргумент, $y$ — величина-функция от $x$, тогда *эластичностью* $y$ по отношению к $x$ в точке $x_0$ называется предел отношения относительного изменения величины $y$ к относительному изменению величины $x$, т.е.

$(\Delta y / y_0):(\Delta x / x_0)$ при $\Delta x \to 0$; обозначается $E_x^y(x_0)$;
таким образом,

$$E_x^y(x_0) = (dy / y_0)/(dx / x_0) = (dy / dx):(y_0 / x_0) = y\,(x_0)x_0 / y_0 .$$

Так что, если $E_x^y = -2$, то при увеличении $x$ на 1% $y$ уменьшается на 2%. Итак, дюрация характеризует чувствительность современной величины потока к изменению коэффициента наращения, — если дюрация потока равна 2, то при увеличении коэффициента наращения на 1% современная величина потока уменьшается на 2%. Ясно, что дюрация является одной из важнейших характеристик потока платежей.

Найдем дюрацию потока платежей $\Re$, продифференцировав современную величину потока по коэффициенту наращения. Итак,

$$dA / d\mu = d\left(\sum_k R_k \exp(-t_k \ln\mu)\right) / d\mu = \sum_k \left(-t_k R_k \exp((-t_k - 1)\ln\mu)\right),$$

следовательно,

$$E_\mu^A = (dA / d\mu):(A/\mu) = \left(\sum_k -t_k R_k \exp((-t_k - 1)\ln\mu)\right):(A/\mu) =$$
$$= -\sum_k t_k (R_k \exp(-t_k \ln\mu)/A) = -\sum_k t_k (A_k / A) = -\mathrm{dur}(\Re).$$

Таким образом, $\mathrm{dur}(\Re) = \sum_k t_k (A_k / A)$.

Предположим теперь, что все платежи неотрицательны, тогда все величины $A_k$ также неотрицательны и их сумма в точности равна $A$, так что сумма всех величин $A_k / A$ равна 1. Поэтому отношения $A_k / A$ можно трактовать как вероятности, а величину $\sum_k t_k (A_k / A)$ — как средний момент платежей в следующем смысле: определим случайную величину (с.в.) $T$ как дискретную, такую, что

$$P(T = t_k) = A_k / A ,$$

тогда ее математическое ожидание $\bar{T} = M[T] = \sum_k t_k (A_k / A)$ равно, как легко видеть,

$$\sum_k t_k (A_k / A) = \mathrm{Dur}(\Re).$$

Итак, имеем следующий в ы в о д: *средний момент платежа и дюрация потока неотрицательных платежей равны.*

Поясним как содержательно понять, что такое средний момент платежа.

Поместим в мешок денежные суммы $A_k$ в рублевых купюрах (предположим, что все эти суммы — целые числа) и на каждой купюре, входящей в сумму $A_k$, напишем $t_k$. Встряхнем мешок, чтобы купюры перемешались. Вытащим одну купюру и прочтем, какое $t_k$ на ней написано. Очевидно, что полученная с.в. и есть $T$, а ее математическое ожидание или среднее значение и есть дюрация.

Теперь можно сказать, что если дюрация потока равна 2, то при увеличении коэффициента наращения на 1% средний момент платежа увеличивается на 2%. Очевидно, что эластичность современной величины потока неотрицательных платежей по коэффициенту наращения отрицательна, так что дюрация такого потока положительна.

**З а м е ч а н и е.** «Вероятности» $A_k/A$ можно найти, дисконтируя платежи не обязательно к начальному моменту, а к любому моменту времени, так как эти отношения одинаковы. В частности, если у потока есть наращенная величина, то платежи можно дисконтировать к конечному моменту потока, даже к $\infty$.

Для иллюстрации найдем дюрацию 5-летней ренты с годовым платежом $R = 1000$ руб. и годовой процентной ставкой $i = 10\%$. Случайная величина $T$ имеет ряд распределения:

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0,24 | 0,22 | 0,20 | 0,18 | 0,16 |

Поясним, как получились вероятности 0,24 и т.д. Наращенная величина ренты равна 6105 руб., а наращенные величины платежей, т.е. дисконтированных к концу 5-го года, равны соответственно 1464, 1331 и т.д., так что 1454/6105 = 0,24 и т.д. Вычисляя дюрацию как математическое ожидание с.в. $T$, получим:

$$1(0{,}24) + 2(0{,}22) + \ldots = 2{,}8.$$

## ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

**1.** Укажите соотношение между современной и конечной величинами потока.

**2.** Найдите современную и наращенную величины потока $\{(-2000,1); (1000,2); (1000,3); (1000,4)\}$ при $i = 5\%$.

**3.** Семья хочет накопить \$12 000 на машину, вкладывая в банк \$1000 ежегодно. Годовая ставка процента в банке 7%. Как долго ей придется копить?

**4.** Семья хочет через 6 лет купить дачу за \$12 000. Какую сумму (одинаковую) ей нужно каждый год из этих 6 лет добавлять на свой счет в банке, чтобы накопить \$12 000, если годовая ставка процента в банке 8%?

**5.** Каждые полгода на банковский счет писателя издательство перечисляет 2000 руб., на которые банк начисляет каждые полгода 7% по схеме сложных процентов. Сколько будет на счете через 4 года?

**6.** Для мелиоративных работ государство перечисляет фермеру \$500 в год. Деньги поступают на специальный счет и на них начисляют каждые полгода 4% по схеме сложных процентов. Сколько накопится на счете через 5 лет?

**7.** В ходе судебного заседания выяснилось, что г. N недоплачивал налогов 100 руб. ежемесячно. Налоговая инспекция хочет взыскать недоплаченные за последние 2 года налоги вместе с процентами (3% ежемесячно). Какую сумму должен заплатить г. N?

**8.** В ходе судебного заседания выяснилось, что по вине Пенсионного фонда г. N в течение 10 лет недоплачивали 100 руб. пенсии ежемесячно. Суд обязал фонд выплатить все недоплаченные деньги с процентами (12% годовых). Какова сумма выплаты?

Решение. Искомая сумма есть наращенная величина ренты с единичным платежом 100 руб. и числом платежей 120. Не совсем понятно, как часто начислять проценты и какие. Если применить формулу (2.5), то искомая сумма будет $100 \cdot s(120, 1)$. Но в таблице коэффициентов наращения ренты не найдем $s(120, 1)$. Придется вычислить эту величину напрямую: $s(120, 1) = [(1 + 0{,}01)^{120} - 1]/0{,}01 \approx (e^{1{,}2} - 1)/0{,}01 = 230$.

Итак, надо выплатить примерно 23 000 руб.

**9.** Замените годовую ренту с годовым платежом \$600 и длительностью 10 лет семилетней годовой рентой. Ставка процента 8% в год.

**10.** Замените годовую десятилетнюю ренту с годовым платежом \$1000 на ренту с полугодовым платежом по \$600. Годовая ставка процента 8%.

**11.** Сын в банке имел на счете 50 000 руб., на которые ежемесячно начислялись 0,8%. Сын уехал в десятилетнюю командировку за границу, доверив отцу за 10 лет истратить весь его счет. Сколько будет получать в месяц отец?

**12.** Покупатель предложил два варианта расчетов при покупке дачи: 1) \$5000 немедленно и затем по \$1000 в течение 5 лет; 2) \$8000 немедленно и по \$300 в течение 5 лет. Какой вариант выгоднее при годовой ставке процента: а) 10%, б) 5%.

**13.** Рассмотрим годовую ренту при $n = 10$, $i = 10\%$. Что более увеличит наращенную величину ренты: увеличение длительности на 1 год или увеличение процентной ставки на 1%?

**14.** Каким должен быть платеж конечной годовой ренты длительностью 8 лет, чтобы ее современная величина была 16 000 д.е. при ставке 10%?

**15.** Докажите, что наращенная величина годовой ренты всегда больше ее современной величины.

**16.** Может ли современная величина конечной годовой ренты быть меньше ее годового платежа?

**17.** Убедитесь, что и современная величина ренты, и наращенная линейно зависят от величины годового платежа. Как в связи с этим можно переформулировать смысл коэффициентов приведения и наращения ренты?

Указание. Сформулируйте смысл этих величин применительно к единичному годовому платежу.

**18.** В потоке платежей разрешается переставлять платежи. Как их надо переставить, чтобы поток имел самую большую современную величину? Имеет ли это какое-нибудь практическое значение?

**19.** Рассмотрим вечную ренту с годовым платежом $R$ при ставке процента $i$. Известно, что ее современная величина, т.е. в момент 0, равна $R/i$. Найдите ее величину в произвольный момент $t > 0$. При каком $t$ эта величина максимальна, минимальна?

**20.** Рассмотрим вечную ренту с годовым платежом $R$. Что более увеличит современную величину этой ренты: увеличение $R$ на 1% или уменьшение $i$ на 1%?

**21.** Увеличится ли современная величина вечной ренты, если платежи сделать в два раза чаще, но годовую процентную ставку в два раза уменьшить?

**22.** Проведите детальный анализ ренты длительностью 4 года, годовым платежом $R = 1000$ д.е. и переменной процентной ставкой: 5% в первых 2-х годах, 8% — в 3-м, 10% — в 4-м году. Как здесь определить современную величину этой ренты?

**23.** Для ренты с параметрами: годовая ставка процента — 12%, годовой платеж — 400 д.е., длительность ренты — 6 лет, с помощью компьютера получены следующие ее характеристики: коэффициенты приведения и наращения — 4,11 и 8,12; современная и наращенная величины — 1644,6 и 3246,1.

Проверьте компьютерные расчеты.

**24.** Для ренты с параметрами: годовой платеж — 400 д.е., длительность ренты — 4 года, современная величина — 1200 д.е. с помощью компьютера найдена необходимая ставка процента — 13% годовых и заодно получены следующие ее характеристики: коэффициенты приведения и наращения — 2,97 и 4,85; наращенная величина — 1939,9.

Проверьте компьютерные расчеты.

**25.** Найдите дюрацию «вечной ренты» (см. п. 2.5).

**26.** В потоке платежей разрешается переставлять платежи. Как их следует переставить, чтобы поток имел самую малую дюрацию? Имеет ли это какое-нибудь практическое значение?

**27.** Меняется ли дюрация при замене одной ренты другой? (См. п. 2.6 и задачи 9, 10.)

**28.** Найдите дюрацию простейшего потока платежей.

# Глава 3

# КРЕДИТНЫЕ РАСЧЕТЫ

Заем, кредит, ссуда — древнейшие финансовые операции. По-латыни «creditum» означает «ссуда»; в слове «креди́т» ударение на втором слоге («кре́дит» с ударением на первом слоге — это правая часть бухгалтерских проводок).

Все три слова — «заем», «кредит», «ссуда» — означают одно и то же — предоставление денег или товаров в долг на условиях возвратности и, как правило, с уплатой процентов. Тот, кто выдает деньги или товары в кредит, называется заимодавец (кредитор), кто берет — заемщик (или дебитор). Условия выдачи и погашения кредитов (займов, ссуд) весьма разнообразны. Здесь рассмотрены лишь самые простые и наиболее распространенные способы погашения займов.

## 3.1. Погашение займа одним платежом в конце

Пусть заем $D$ выдан на $n$ лет под $i$ сложных годовых процентов. К концу $n$-го года наращенная его величина станет $D(1 + i)^n$. Если предполагается отдать заем одним платежом, то это и есть размер данного платежа. Для облегчения расчетов можно использовать таблицу мультиплицирующих множителей.

**Пример 1.** Заем величиной 20 000 руб. был выдан на 8 лет под 10% годовых. Если отдать этот заем одним платежом, каков размер этого платежа?

Решение. По таблице мультиплицирующих множителей находим $M(8, 10) = 2{,}144$. Значит, искомый платеж равен 42 880 руб.

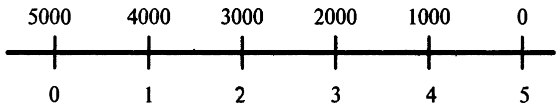
## 3.2. Погашение основного долга одним платежом в конце

Сам заем называется *основным долгом*, а наращиваемый добавок — *процентными деньгами*. Пусть заем $D$ выдан на $n$ лет под $i$ сложных годовых процентов. За 1-й год процентные деньги составят $iD$. Если их выплатить, то останется снова только основной долг в размере $D$. И так будем выплачивать в конце каждого года наращенные за этот год процентные деньги $iD$. В конце $n$-го, последнего, года выплаты составят величину $iD + D$ — процентные деньги за последний год и основной долг.

## 3.3. Погашение основного долга равными годовыми выплатами

Пусть заем $D$ выдан на $n$ лет под $i$ сложных годовых процентов. При рассматриваемом способе его выплаты в конце каждого года выплачивается $n$-я доля основного долга, т.е. величина $D/n$. В конце 1-го года, кроме того, платятся проценты с суммы $D$, которой пользовались в течение этого года, т.е. еще $iD$. Весь платеж в конце 1-го года равен $R_1 = D/n + iD$. В конце 2-го года выплата составит $R_2 = D/n + i(D - D/n)$ и т.д., так что в конце $(k+1)$-го года платеж $R_{k+1} = D/n + i(D - kD/n)$. Легко видеть, что платежи $R_1$, $R_2$,... образуют убывающую арифметическую прогрессию с разностью $iD/n$, первым членом $R_1 = D/n + iD$ и последним $R_n = D/n + iD/n$.

**Пример 2.** Пусть $D = 5000$, $n = 5$, $i = 10\%$. Выплаты показаны на рисунке внизу, а остатки в конце-начале года — вверху.




| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1000 | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 |
| 500 | 400 | 300 | 200 | 100 |
| 1500 | 1400 | 1300 | 1200 | 1100 |

## 3.4. Погашение займа равными годовыми выплатами

Пусть заем $D$ выдан на $n$ лет под $i$ сложных годовых процентов. При рассматриваемом способе его выплаты в конце каждого года выплачивается одинаковая сумма $R$. Найти ее просто: эти выплаты можно рассматривать как годовую ренту длительности $n$ лет и годовым платежом $R$. Приравняем современную величину этой ренты величине займа $D$. Получим уравнение $D = R \cdot a(n, i)$. Значит, $R = D/a(n, i)$.

**Пример 3.** Пусть $D = 5000$, $n = 5$, $i = 10\%$. Из таблицы коэффициентов приведения ренты (см. приложение 3) находим $a(5,10) = 3{,}791$. Значит, $R = 5000/3{,}791 = 1319$.

## 3.5. Погашение займа равными выплатами несколько раз в год

Для расчета используем прием из предыдущего параграфа. Пусть выплаты размером $y$ производятся $m$ раз в году, всего выплат $nm$. На эти выплаты начисляются проценты также $m$ раз в году по ставке $i/m$ (можно считать, что выплаты идут в тот же банк, который дал заем, и там начисляют на них проценты). Эти выплаты образуют соответствующую ренту, наращенная величина которой есть $S = y \cdot s(nm, i/m)$ — см. также формулу (2.5). Наращенная величина займа есть $D(1 + i/m)^{nm}$ и, приравнивая, получим уравнение для определения $y$:

$$D(1+i/m)^{nm} = y \cdot s(nm, i/m),$$

откуда

$$y = D \cdot (1+i/m)^{nm} / s(nm, i/m).$$

## 3.6. Общий метод погашения займа

Пусть заем величиной $D$ выдан на $n$ лет под $i$ сложных годовых процентов. В общем случае погашающие платежи — это сумма платежей $D_k$, идущих на выплату основного долга $D$, и платежей $I_k$, идущих на выплату процентных денег, начисляемых на остаток основного долга после предыдущего платежа. Такой метод позволяет планировать различные схемы выплат, как уже показано выше в § 3.1—3.5.

Указанное свойство сначала продемонстрируем на частном случае.

Пусть заем выдан сроком на 2 года. В конце первого года было выплачено в счет оплаты основного долга $D_1$ и на весь долг $D$, которым пользовались в течение года, начисленные проценты $I_1 = iD$ тоже были выплачены, так что в конце первого года суммарный платеж составил $D_1 + iD$. В конце второго года был выплачен остаток основного долга $D_2 = D - D_1$ и проценты за этот год, равные $iD_2$, так что суммарный платеж составил $D - D_1 + i(D - D_1)$. Деньги $D_1 + iD$, выплаченные в конце первого года, за второй год выросли до $(D_1 + iD)(1 + i)$. В итоге за оба года было выплачено с учетом процентов, начисленных за платеж в конце первого года, $(D_1 + iD)(1 + i) + (D - D_1)(1 + i) = (1 + i)(D_1 + iD + D - D_1) = D(1 + i)^2$, что совпадает с наращенной суммой займа за два года.

Докажем теперь рассматриваемое свойство потока погашающих платежей в общем виде. Пусть $D_1, ..., D_n$ — платежи, идущие на выплату основного долга $D$, $I_1, ..., I_n$ — платежи, идущие на выплату процентных денег, начисляемых на остающийся основной долг. Выделим в потоке погашающих платежей две части: по завершающему платежу $D_n$ и процентных выплат по нему:

$$iD_n(1+i)^{n-1}+iD_n(1+i)^{n-2}+\ldots+iD_n+D_n=$$
$$=iD_n\left[(1+i)^{n-1}+\ldots+1\right]+D_n=iD_n\left[(1+i)^{n}-1\right]/i+D_n=D_n(1+i).$$

Для второй части, т.е. для последовательности долговых уплат $\{D_k,\ k=1,\ \ldots,\ n-1\}$ в силу индукции эквивалентная ей на момент $(n-1)$ наращенная сумма равна $(D-D_n)(1+i)^{n-1}$, и в конце $n$-го года нарастет до величины $(D-D_n)(1+i)^n$. Складывая обе наращенные суммы, получим $D_n(1+i)^n+(D-D_n)(1+i)^n=$ $=D(1+i)^n$, что совпадает с наращенной величиной займа.

Рассмотренные выше в § 3.1—3.5 методы погашения займа являются частными случаями только что описанного общего метода.

## 3.7. Формирование погасительного фонда по более высоким процентам

Взятый заем может погашаться разными способами. Например, заемщик может создать специальный погасительный фонд и накапливать на нем средства, чтобы погасить заем единым платежом в конце срока займа. Понятно, что это имеет смысл, если у заемщика есть возможность получать на деньги погасительного фонда бо́льшие проценты, чем те, под которые он взял заем.

Пусть заем размером $D$ взят в начале года на $n$ лет под ставку $i$ сложных процентов в год, тогда к концу $n$-го года он вырастет до $D(1+i)^n$. Платежи в погасительный фонд образуют ренту с годовым платежом $R$ и годовой ставкой сложных процентов $g>i$. Тогда в фонде к концу $n$-го года накопится сумма $R\cdot s(n,g)=$ $=R[(1+g)^n-1]/g$, из которой и будет погашен заем в $D(1+i)^n$.

**Пример 4.** Пусть $D=900$, $i=4\%$, $g=8\%$, $n=10$. После подсчетов получаем, что ежегодный платеж в погасительный фонд равен 92, тогда к концу 10-го года в погасительном фонде накопится сумма 1332,2 — это наращенная величина займа.

## 3.8. Потребительский кредит и его погашение

При выдаче потребительского кредита сразу на всю сумму кредита начисляются простые проценты, они прибавляются к величине самого кредита и сумма всех погашающих выплат должна быть равна этой величине. Существует несколько схем погашения потребительского кредита.

***А. Погашение равными выплатами.*** Пусть кредит размером $D$ взят на $n$ лет, годовая ставка простых процентов $i$, следовательно, всего надо набрать выплат на сумму $D(1+ni)$. Если в год предусмотрено (договором о кредите) $m$ выплат, то одна выплата равна $D(1+ni)/nm$.

Интересно узнать ставку сложного процента, по которой современная величина выплат по кредиту равна его номинальной величине. Обозначим ее $j$. Имеем уравнение

$$[D(1+ni)/mn]a(mn, j/m) = D, \quad \text{или} \quad (1+ni) = mn \cdot a(mn, j/m).$$

Его нетрудно решить приближенно с помощью таблиц (см. задачу 5 в конце главы).

***Б. Правило 78.*** При этом способе основной долг $D$ выплачивается равными долями, а процентные деньги в размере $niD$ — выплатами, уменьшающимися в арифметической прогрессии, и последняя выплата равна разности этой прогрессии. Если в год предусмотрено $m$ выплат (например, 12 — при ежемесячных выплатах), то самая последняя выплата равна $d$ — неизвестной пока разности прогрессии, а первая — $mnD$. Но сумма всех этих выплат $d + 2d + ... + mnd = (1 + mn)\, mnd/2$ должна быть равна процентным деньгам, т.е. $(1 + mn)\, mnd/2 = niD$, откуда можно найти $d$ и все выплаты процентных денег.

Практически делают так. Считают сумму номеров всех выплат $N = (1 + 2 + ... + mn) = (1 + mn)\, mn/2$ и делят процентные деньги на $N$ частей; далее 1-й платеж равен $mn$ таких частей, 2-й платеж будет на одну часть меньше и т.д., последний платеж равен ровно одной части. Сумма номеров месяцев в году $1 + 2 + ... + 12$ равна 78, отсюда и название этого правила.

## 3.9. Льготные кредиты

Льготный кредит выдают по льготной ставке, меньшей обычной ставки. Фактически тем самым заемщик получает субсидию, которую рассчитывают как разницу соответствующих современных сумм.

Пусть кредит размером $D$ выдан на $n$ лет по льготной ставке $g$, меньшей обычной ставки $i$, и будет погашаться равными выплатами. Эти выплаты образуют годовую ренту. Обозначим размер одной выплаты $y$, тогда современная величина этой ренты равна $y \cdot a(n, g)$. Отсюда найдем: $y = D/a(n, g)$. А если бы выплаты шли по обычной ставке $i$, то размер каждой выплаты был бы $z = D/a(n, i)$. Разность $z - y = D/a(n, i) - D/a(n, g)$ — это ежегодные потери кредитора, а современная величина ренты этих потерь по действующей ставке $i$, т.е. $(z - y) \cdot a(n, i) = [D/a(n, i) - D/a(n, g)]\, a(n, i) = D\,[1 - a(n, i)/a(n, g)]$ и есть субсидия кредитора заемщику. Эта субсидия называется еще *абсолютным грант-элементом*, а величина $1 - a(n, i)/a(n, g)$ — *относительным грант-элементом.* Наращенная сумма абсолютного грант-элемента или, что то же самое, наращенная сумма субсидии называется *общими потерями кредитора.*

**Пример 5.** Пусть $D = 1000$, $n = 8$, $i = 8\%$, $g = 5\%$. Находим выплаты по обычной ставке из уравнения: $y \cdot a(8, 8) = 1000$, по таблице коэффициентов приведения ренты (см. приложение 3) находим: $a(8, 8) = 5{,}747$; отсюда $y = 174$. Выплаты по льготной ставке находим из уравнения: $z \cdot a(8, 5) = 1000$, по той же таблице находим: $a(8, 5) = 6{,}463$; отсюда $z = 155$. Следовательно, ежегодные потери кредитора равны 19. Подсчитаем относительный и абсолютный грант-элементы (последний, напоминаем, есть субсидия кредитора заемщику): $1 - a(n, i)/a(/n, g) = 1 - 5{,}747/6{,}463 = 0{,}108$; $1000 \cdot 0{,}108 = 108$. Наконец, общие потери кредитора $108 \cdot (1 + 0{,}08)^8$, по таблице мультиплицирующих множителей (см. приложение 1) находим $(1 + 0{,}08)^8 = 1{,}851$. Следовательно, общие потери кредитора равны 200.

## 3.10. Погашение традиционной ипотечной ссуды

Такая ссуда выдается на 10—30 лет под небольшие проценты. Обычно ее выдают под залог имущества (земли, дома и т.п.). В случае невозврата ссуды в установленный срок заложенное имущество становится собственностью кредитора. Традиционная ипотечная ссуда погашается равными ежемесячными выплатами, на которые ежемесячно же начисляются проценты.

Пусть номинальный размер ссуды $D$, выдана она на срок $n$ лет под годовую ставку сложных процентов $i$. Равные ежемесячные выплаты размером $y$ образуют ренту с частотой платежей и начислением процентов 12 раз в году. Следовательно, ее наращенная величина к концу $k$-го года составит $y \cdot s(12k, i/12)$ и для определения $y$ имеем уравнение $y \cdot s(12n, i/12) = D(1 + i/12)^{12n}$.

Традиционно определяют на конец любого года и остаток, который еще предстоит выплатить. Определим остаток $r_k$ на конец $k$-го года. К концу $k$-го года наращенная величина выданной ссуды есть $D(1 + i/12)^{12k}$, а наращенная величина ренты выплат есть $y \cdot s(12k, i/12)$ и, значит, остаток $r_k$ есть $D(1 + i/12)^{12k} - y \cdot s(12k, i/12)$.

**Пример 6.** Пусть ссуда в $100 000 выдана на 20 лет под 3% годовых. Определим ее основные характеристики.

Р е ш е н и е. Некоторая трудность расчетов состоит в том, что мультиплицирующий множитель $M(240, 3/12)$, а также коэффициент наращения $s(240, 3/12)$ нужно считать по формулам, а не находить их в таблицах. Конечно, у практических работников, занимающихся ипотечным кредитованием, таблицы с такими большими параметрами есть. Итак, $M(240,1/4) = (1 + 0{,}0025)^{240} = 1{,}8207$, $s(240,1/4) = [(1+0{,}0025)^{240} - 1]/0{,}0025 = 0{,}8207/0{,}0025 = 328{,}28$. Теперь можно определить ежемесячную выплату:

$$y = 100\ 000 \cdot 1{,}8207/328{,}28 = 554{,}6.$$

Определим теперь остаток, скажем, на конец 10-го года. Наращенная величина ссуды к этому моменту есть $100\ 000 \cdot M(120, 1/4) = 134\ 935$, наращенная величина произведенных выплат есть $554{,}6 \cdot s(120,1/4) = 77\ 488$, так что остаток равен 57 447.

## 3.11. Замена одного займа другим

Один заем можно заменить другим при условии равенства современных величин потоков выплат по этим займам.

**Пример 7.** Гражданин Б. в течение 5 лет ежеквартально должен был выплачивать 500 д.е., погашая взятую ссуду. В связи с его отъездом за границу через два года он попросил пересчитать величину ежеквартальной выплаты, чтобы успеть рассчитаться. Ставка процентов в банке — 8% годовых.

Р е ш е н и е. Современная величина текущих выплат $500 \cdot a(20, 8/4) = 500 \cdot 16{,}351 = 8175{,}5$. Поэтому искомый ежеквартальный платеж $R$ должен удовлетворять уравнению $R \cdot a(8, 8/4) = 8175{,}5$, откуда $R = 8175{,}5/7{,}325 = 1116{,}1$ д.е.

## 3.12. Объединение займов

Используя ту же идею, что и в § 3.11, можно несколько займов объединять в один. Сначала находят современные величины остатков займов, потом эти величины складывают и получают современную величину займа-объединения.

Теперь можно подобрать параметры нового займа, устраивающие кредитора и заемщика.

## 3.13. Предоставление в кредит активов

Актив — это наличные товары, ценные бумаги, валюта и т.п. В целом под активом можно понимать любой товар в широком экономическом смысле. Активы, как правило, приносят некоторый доход их владельцу. Доходность актива выражают в процентах годовых от цены актива на начало года. Активы также можно отдавать в кредит, но расчеты при этом значительно усложняются. Одна из причин в том, что многие активы со временем теряют свои качества, из-за которых они ценятся. Учитывая это, владелец должен требовать большую процентную ставку.

**Замечание.** Между кредитором и заемщиком существует эквивалентность финансовых обязательств. Если обратить платежи, то современные или наращенные суммы потоков платежей одинаковы (или эквивалентны — в смысле математической эквивалентности — см. § 1.6).

Рассмотрим, например, уплату займа равными годовыми выплатами (см. § 3.3). Кредитор дал взаймы сумму $P$ под $i\%$ годовых и получал в конце каждого года определенную сумму. Но можно сказать и по-другому: заемщик дает кредитору эти годовые выплаты в долг, а в конце $n$-го года кредитор возвращает сумму с наращенными процентными деньгами. В случае погашения займа одним платежом в конце срока займа (см. § 3.1) аналогичное рассуждение таково: заемщик дает кредитору наращенную сумму в долг в будущем, а сейчас кредитор возвращает ему эквивалентную сумму. Рассмотренная эквивалентность есть частное проявление общей идеи эквивалентности финансовых обязательств сторон при заключении финансовых сделок.

## ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

**1.** Для кого выгодна инфляция: для кредиторов или заемщиков?

**2.** Заем был взят под 16% годовых, выплачивать осталось ежеквартально по 500 д.е. в течение двух лет. Из-за изменения ситуации в стране процентная ставка снизилась до 6% годовых. В банке согласились с необходимостью пересчета ежеквартальных выплат. Каков должен быть новый размер выплаты?

Решение можно предложить следующее. Оставалось выплатить $500 \cdot a(8,\ 16/4) = 500 \cdot 6{,}733 = 3367$. Следовательно, новый размер выплаты должен быть $R \cdot a(8,\ 6/4) = 3367$, отсюда $R = 3367/7{,}486 = 450$.

**3.** Проверьте план погашения основного долга равными годовыми уплатами, рассчитанный с помощью компьютера:

| *Процентная годовая ставка 8%* | | | *Величина займа 600* | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Уплаты | 168,0 | 158,4 | 148,8 | 139,2 | 129,6 |
| Годы | 1-й | 2-й | 3-й | 4-й | 5-й |

**4.** С помощью компьютера найден размер годовой уплаты 200,4 д.е. при погашении займа 800 д.е. равными годовыми уплатами, заем выдан на 5 лет при годовой ставке 8%. Проверьте компьютерные расчеты.

**5.** На покупку дачного домика взят потребительский кредит 40 000 руб. на 8 лет под 8 простых процентов. Его нужно погашать равными ежеквартальными выплатами. Найти размер этой выплаты.

Решение. Всего нужно выплатить $40\,000 \cdot (1 + 0{,}64) = 65\,600$. Следовательно, ежеквартальная выплата равна $65\,600/32 = 2050$. Найдем еще ставку сложных процентов $j$ такую, чтобы современная величина потока этих выплат была бы равна номинальной величине кредита 40 000: $2050 \cdot a(32, j/4) = 40\,000$, $a(32, j/4) = 40\,000/2050 = 19{,}51$. По таблице коэффициентов приведения ренты (см. приложение 3) подбором получаем $j/4 \approx 3{,}5\%$, т.е. $j = 14\%$. Итак, кредит выдан фактически под 14 годовых сложных процентов.

**6.** Магазин продает телевизоры в рассрочку на 1 год. Сразу же к цене телевизора \$400 добавляют 10% и всю эту сумму надо погасить в течение года, причем стоимость телевизора гасится равномерно, а надбавка — по «правилу 78». Найти ежемесячные выплаты.

Решение. По «правилу 78» надбавка \$40 выплачивается так: в конце 1-го месяца — 12/78 всей надбавки, т.е. примерно \$6, затем на 1/78 часть надбавки меньше, т.е. меньше на \$0,5, и т.д. Ежемесячные выплаты (долл.) таковы: 39,3; 38,8; 38,3; ...; 33,8.

**7.** Кредит \$500 банк дает под 6% годовых, которые сразу же высчитывает. Проанализируйте предыдущую задачу: может быть, лучше взять в банке кредит в \$500?

**8.** Заем \$5000 взят на 8 лет под 8% годовых. Погашаться будет равными ежегодными выплатами основного долга. Найдите ежегодные выплаты.

**9.** Заем 20 000 д.е. взят на 8 лет под 8% годовых. Погашаться будет ежегодными равными выплатами. Найдите размер этой выплаты.

**10.** Заем 20 000 д.е. взят на 10 лет под 8% годовых. Погашаться будет начиная с конца шестого года ежегодными равными выплатами. Найдите размер этой выплаты.

**11.** К категории льготных займов относится беспроцентный заем. Найдите относительный и абсолютный грант-элементы для такого займа при $D = 1000$, $n = 5$, $i = 10\%$.

**12.** Предложите план погашения займа при переменной процентной ставке.

## Глава 4

# АНАЛИЗ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

В нормальной экономике вращение внутри самой финансовой сферы не может принести большого дохода. Только выход в реальный сектор экономики путем инвестирования позволит нарастить капитал. Но для этого надо уметь анализировать инвестиционные процессы. Такие процессы — это потоки платежей, в которых инвестиции отрицательны, доходы положительны.

### 4.1. Пример детального анализа инвестиционного проекта

Пусть в начале года вложены инвестиции размером Inv = 2000, а затем в течение 4 лет получены доходы $R_1 = 1000$, $R_2 = 800$, $R_3 = 800$, $R_4 = 600$. Ставка процента 8% в год.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| −2000 | 1000 | 800 | 800 | 600 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| | −2160 | −1252,8 | −489 | 335,9 |
| | 1000 | 800 | 800 | 600 |
| | −1160 | −452,8 | 311 | 935,9 |

Поясним рисунок. Наверху указаны размеры инвестиций (отрицательные) и получаемые доходы (положительные). Допустим, доходы вкладываются в тот же банк, который дал инвестиции, и на доходы начисляются те же сложные проценты, под которые банк выдал кредит-инвестиции. Самая верхняя строка под линией — размер счета в банке до внесения очередного платежа-дохода. Следующая строка — этот самый платеж-доход, еще ниже — итоговый размер счета в банке. Итак, −2160 — это наращенная за один год сумма выданных в кредит инвестиций, добавим 1000, получим −1160 — это долг заемщика банку. В конце 2-го года счет в банке еще отрицателен, но в конце 3-го года уже положителен — 311. Значит, за 3 года инвестиции окупились, так что срок окупаемости проекта равен 3 годам. К концу 4-го года счет в банке положителен — это наращенная величина чистого дохода. Если эту величину дисконтировать к моменту 0 по ставке 8%, то получим $935{,}9/(1 + 0{,}08)^4 = 935{,}9/1{,}360 = 688{,}2$. Эта величина называется *приведенным чистым доходом проекта.* Если ее поделить на абсолютную величину инвестиций, то получим *доходность проекта* (иногда эту величину называют *рентабельностью проекта):* 688,2/2000 = 0,344, в процентах — 34,4%.

## 4.2. Общие понятия и обозначения

Рассмотрим некоторые общие понятия. Пусть $\{(R_k, t_k)\}$ — инвестиционный процесс — поток платежей $R_k$ в момент $t_k$, знак платежа $R_k$ имеет значение: если он положителен — это доход, отрицателен — затраты или инвестиции. Все платежи производятся на стыке лет и только в неотрицательные номера лет. Процесс называется *конечным*, если в нем имеется последний платеж, иначе — *бесконечным.*

*Приведенным чистым доходом* NPV (Net Present Value) называется сумма (алгебраическая) всех платежей, дисконтированных к моменту 0 по действующей ставке процента $i$,

$$\text{NPV} = \sum_k R_k / (1+i)^{t_k}.$$

Для конечного процесса можно определить *наращенный чистый доход* — NFV (Net Future Value) — это сумма (алгебраическая) всех платежей, дисконтированных к моменту $t_n$ последнего платежа по ставке процента $i$,

$$\text{NFV} = \sum_k R_k / (1+i)^{t_k - t_n}.$$

Ясно, что $\text{NFV} = \text{NPV} \cdot (1+i)^{t_n}$.

Процесс называется *окупающимся*, если NPV > 0. Впрочем, легко понять, что процесс окупается, если положительна сумма (алгебраическая) всех платежей, дисконтированных к какому-либо моменту времени, так как все такие суммы связаны с NPV или NFV очевидными соотношениями. Доходность процесса можно определить так: надо дисконтировать по ставке $i$ к какому-нибудь моменту все платежи процесса и найти отношение дохода к затратам. Ясно, что если процесс окупается, то его доходность положительна, верно и обратное.

Далее будем рассматривать только процессы, у которых инвестиции в момент 0, а все остальные платежи положительны, т.е. это доходы. Для таких процессов интересной характеристикой является внутренняя доходность процесса $q$ — такое наименьшее положительное число, что сумма (алгебраическая) всех платежей, дисконтированных к моменту 0 по ставке $q$, т.е. $\sum_k R_k / (1+q)^{t_k}$, равна 0. Ясно, что если процесс окупающийся, то $i \le q$. *Внутренняя норма доход-*

*ности* показывает предельный уровень ставки процента, при котором взятые по этой ставке инвестиции окупаются доходами процесса (наращиваемыми по той же ставке).

## 4.3. Расчет характеристик конечного проекта с начальными инвестициями и постоянными доходами

Решим задачу. На строительство магазина надо затратить в течение месяца около \$10 000, а затем в течение 10 лет магазин будет давать доход \$3000 в год. Найти характеристики данного проекта, если ставка процента 8% в год.

Решение в общем виде: пусть Inv — размеры инвестиции, $R$ — последующий годовой доход в течение $n$ лет, $i$ — ставка процента для инвестиций и доходов. Определить характеристики проекта.

Поток доходов есть конечная годовая рента с годовым платежом $R$, длительностью $n$ лет. Современная величина этой ренты $A = R \cdot a(n, i)$, где $a(n, i)$ — коэффициент приведения ренты. Значит, приведенный чистый доход проекта есть $\mathrm{NPV} = \mathrm{Inv} + R \times a(n,i)$, доходность проекта $d = \mathrm{NPV}/(-\mathrm{Inv})$. Как определить срок окупаемости?

Если $s$ — срок окупаемости, то $s$ должен быть минимальным из всех таких чисел $r$, что $\mathrm{Inv} + R \cdot a(r, i) \geq 0$ или $a(r, i) \geq -\mathrm{Inv}/R$. Но $a(r, i) = [1 - (1 + i)^{-r}] / i$. Решение соответствующего неравенства дает: $r \geq -\ln(1 + i \cdot \mathrm{Inv}/R)/\ln(1+i)$. Внутренняя доходность проекта $q$ должна удовлетворять уравнению $\mathrm{Inv} + R \cdot a(n, q) = 0$. Если это уравнение имеет несколько корней, то берут наименьший. С помощью компьютера приближенно решить это уравнение несложно.

Если $-\mathrm{Inv} \geq nR$, то указанное выше уравнение решений не имеет, ибо $R \cdot a(n,q) = R/(1 + q) + R/(1 + q)^2 + ... + R/(1 + q)^n < nR \leq -\mathrm{Inv}$. Поэтому пусть $-\mathrm{Inv} < nR$. Но теперь ясно, что искомое $q$ существует и его можно найти итеративным процессом, увеличивая $q$ с малым шагом до тех пор, когда неравенство $-\mathrm{Inv} < R/(1 + q) + R/(1 + q)^2 + ... + R/(1 + q)^n$ станет неверным.

**Пример 1.** Решим задачу, сформулированную в начале этого параграфа. Так как $a(10,8) = 6{,}710$, то современная величина потока доходов есть $3000 \cdot 6{,}710 = 20\,130$, значит, приведенный чистый доход есть $\mathrm{NPV} = 20\,130 - 10\,000 = 10\,310$, доходность проекта есть $10\,310/10\,000 = 1{,}031$ — это доля, в процентах 103,1%. Для нахождения внутренней доходности найдем такое $q$, что $a(10, q) = 10\,000 / 3000 = 3{,}33$. По таблице коэффициентов приведения ренты (см. приложение 3) подбираем $q$, получаем $q = 27\%$.

## 4.4. Расчет характеристик бесконечного проекта с начальными инвестициями

Решим задачу. На строительство магазина надо затратить в течение месяца около \$10 000, а затем он неограниченно долго будет давать доход \$2000 в год. Найти характеристики данного проекта, если ставка процента 8% в год.

Р е ш е н и е. В общем виде решение задачи таково: пусть Inv, $R$, $i$ — размеры инвестиций, последующего годового дохода и ставка процента. Тогда $\text{NPV} = \text{Inv} + R/i$, а $d = \text{NPV}/(-\text{Inv})$ — доходность проекта. Действительно, поток ежегодных доходов есть вечная рента, ее современная величина — $R/i$ (см. § 2.5). Отсюда и вытекают формулы, приведенные выше для NPV и $d$. Итак, $\text{NPV} = -10\,000 + 2000/0{,}08 = 15\,000$, $d = 15\,000/10\,000 = 1{,}5$, или 150%. Найдем внутреннюю доходность проекта: подберем так $q$, чтобы $R/q = -\text{Inv}$ или $q = R/(-\text{Inv}) = 2000/10\,000 = 20\%$.

## 4.5. Определение величины инвестиций

Допустим, разрабатывается инвестиционный проект заданной длительности, с которой совпадает срок окупаемости. Проект должен обеспечивать заданный годовой доход. Найти характеристики данного проекта, прежде всего необходимые начальные инвестиции.

Р е ш е н и е. В общем виде решение задачи таково: пусть $R$, $n$, $i$ — размер последующего годового дохода, длительность проекта и ставка процента. Какие нужны для обеспечения этого минимальные инвестиции?

Очевидно, что необходимые инвестиции есть $\text{Inv} = -R \cdot a(n, i)$, современная и наращенная величины дохода проекта равны 0, так как срок окупаемости совпадает с длительностью проекта, доходность проекта также равна 0, а внутренняя доходность совпадает со ставкой процента.

## 4.6. Расчет годового дохода для заданной внутренней доходности проекта

Акционерной компанией разрабатывается инвестиционный проект. Акционеры согласились с предлагаемой длительностью $n$ проекта и с необходимым размером инвестиций Inv, но требуют обеспечить бóльшую доходность $j$ вложения этих инвестиций, чем просто общепринятая ставка процента $i$. Какой для этого нужно обеспечить минимальный ежегодный доход $R$?

Р е ш е н и е. Ясно, что ежегодный доход должен удовлетворять уравнению $-\mathrm{Inv} = R \cdot a(n, j)$, тем самым $-\mathrm{Inv} = R \cdot [1 - (1 + j)^{-n}]/j$, откуда $R = (-j \cdot \mathrm{Inv})/[1 - (1 + j)^{-n}]$.

## 4.7. Зависимость характеристик процесса от ставки процента

Рассмотрим процесс со следующими данными: Inv, $R$, $n$. Напомним, что современная величина потока доходов $A = R \cdot a(n, i)$, где $a(n, i) = 1/(1 + i) + 1/(1 + i)^2 + \ldots + 1/(1 + i)^n$. Видно, что при увеличении $i$ эта сумма, т.е. $a(n, i)$, уменьшается. Поэтому можно сделать вывод: при увеличении ставки процента приведенный чистый доход $\mathrm{NPV} = -\mathrm{Inv} + R \cdot a(n, i)$ уменьшается, следовательно, уменьшается доходность процесса, а срок окупаемости увеличивается. Внутренняя доходность процесса не зависит от ставки процента, так как определяется исключительно размером инвестиций и потоком доходов. Таким образом, вполне может быть так, что инвестиционный проект окупается при одной ставке процента и не окупается при большей ставке.

**Пример 2.** Вот результаты компьютерного исследования проекта со следующими данными: $\mathrm{Inv} = -10\ 000$, $R = 2000$, $n = 10$.

| Ставка процента $i$ | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Приведенный чистый доход NPV | 4720 | 3420 | 2289 | 1300 | 432 | −334 |
| Срок окупаемости | 7 | 7 | 8 | 9 | 10 | Не окупается |
| Доходность проекта $d$ | 0,47 | 0,34 | 0,33 | 0,13 | 0,04 | −0,03 |

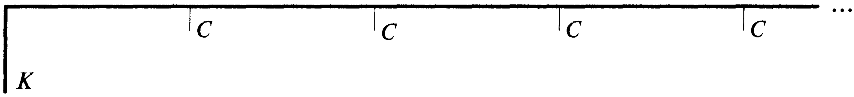
Как видим, при ставке $i = 16\%$ проект не окупается. Разумеется, внутренняя доходность проекта равна $\sim 16\%$.

## 4.8. Сравнение инвестиционных проектов

Наиболее важные характеристики инвестиционных проектов — это приведенный чистый доход NPV, срок окупаемости и внутренняя доходность проекта. Первые две характеристики зависят от ставки процента $i$, а внутренняя доходность от нее не зависит.

Часто приходится сравнивать инвестиционные проекты, различающиеся по затратам, но тождественные по результатам. Естественно, в такой ситуации оценивать проекты надо по их затратам, причем наряду с капитальными затратами $K$, осуществляемыми на начальной стадии проекта, надо учитывать и текущие издержки $C$ (на ремонт, обновление и т.п.), вообще-то разные по годам, но для упрощения расчетов предположим их одинаковыми.

Представим поток затрат проекта графически:




Сравниваем проекты путем подсчета современной величины $A_m$ потока затрат по $m$-му проекту. Довольно естественно считать этот поток затрат бесконечным и потому

$$A_m = K_m + C_m \cdot v + C_m \cdot v^2 + \ldots = K_m + C_m/i,$$

где $v = 1/(1 + i)$ — дисконтирующий множитель по ставке сравнения $i$.

Из сравниваемых проектов лучшим надо считать тот проект $m$, у которого современная величина потока затрат $K_m + C_m/i$ наименьшая, что эквивалентно тому, что наименьшей является величина $C_m + i \cdot K_m$. Последняя известна как *показатель приведенных затрат.*

В СССР в качестве ставки сравнения $i$ использовался так называемый нормативный коэффициент эффективности. Для ряда отраслей он был установлен в диапазоне от 0,1 до 0,5, а средний для народного хозяйства составлял 0,15, что предполагало максимально допустимые сроки окупаемости от 2 до 10, а в среднем — около 6 лет.

## 4.9. Определение размера платы за аренду оборудования

Своеобразным инвестиционным процессом является аренда оборудования. Для владельца оборудования важно обеспечить нужный уровень эффективности сдачи в аренду, для арендатора — решить дилемму: купить оборудование или арендовать его. Первый шаг в решении этих проблем — определение размера арендных платежей.

Пусть оборудование стоимостью $P$ сдается в аренду на $n$ лет. К концу этого срока остаточная его стоимость составит $S$. Таким образом, владелец оборудования «теряет» $P - S/(1 + j)^n$, где $1/(1 + j)$ — коэффициент дисконтирования, приведения суммы $S$ к началу аренды, к расчетному моменту. Величина $j$ может быть отождествлена с доходностью сдачи оборудования в аренду для владельца оборудования. «Потерю» владельцу должен возместить арендатор. Современная величина потока его арендных платежей по ставке $j$ должна быть равна $P - S/(1 + j)^n$, так что размер разового годового арендного платежа $R$ может быть определен из уравнения

$$R \cdot a(n, j) = P - S/(1 + j)^n$$

Следовательно, этот годовой платеж $R = [P - S/(1 + j)^n]/a(n, j)$. Ясно, что норматив доходности $j$ должен быть больше нормы амортизации $h$. Разность $j - h$ в некоторой мере характеризует эффективность сделки.

## 4.10. Определение нормы доходности от сдачи оборудования в аренду

Для владельца оборудования важно обеспечить нужный уровень эффективности сдачи оборудования в аренду, в частности, доходность (внутренняя норма доходности инвестиционного процесса) должна быть больше нормы амортизации.

Пусть оборудование стоимостью $P$ сдается в аренду на $n$ лет. Норма амортизации данного типа оборудования равна $h$ процентов в год. Тогда по истечении $n$ лет остаточная стоимость оборудования $S$ равна $P(1 - nh)$.

Предположим, что годовой арендный платеж есть $R$. Тогда норма доходности аренды рассчитывается из уравнения $R \cdot a(n, j) = P - S/(1 + j)^n$.

Ясно, что норматив доходности $j$ должен быть больше нормы амортизации $h$. Разность $j - h$ в некоторой мере характеризует эффективность сделки.

## 4.11. Арендовать оборудование или покупать?

Дилемма арендатора: купить оборудование или арендовать его — решается просто (если не рассматривать некоторые дополнительные тонкости аренды): надо сравнить современные величины затрат на покупку оборудования и на его аренду.

Пусть оборудование стоимостью $P$ сдается в аренду на $n$ лет. Норма амортизации данного типа оборудования равна $h$ процентов в год, тогда по истечении $n$ лет остаточная стоимость оборудования $S$ составит $P(1 - nh)$.

Предположим, что годовой арендный платеж есть $R$. Тогда современная величина арендных платежей при ставке процента $i$ есть $R \cdot a(n, i)$, а современная величина потерь, связанных с покупкой, есть $P - S/(1 + i)^n$. Поэтому, если $R \cdot a(n, i) > P - S/(1 + i)^n$, то надо арендовать оборудование, иначе — покупать его.

**Замечание.** Во всех приведенных выше расчетах инвестиционных проектов ставка процента предполагалась неизменной. В действительности такое бывает крайне редко. И потому вопрос о выборе подходящей ставки процента становится одним из основных при практической оценке инвестиционного проекта. Какую ставку принять в конкретной ситуации — дело тщательного экономического анализа и прогноза. Чем ставка выше, тем в меньшей мере влияют на судьбу проекта отдаленные по времени платежи. Кроме того, будущее вносит элементы неопределенности, а значит, риска во всем: в величине будущих доходов и в их реальной ценности, ибо инфляция в будущем — вещь в высшей степени неопределенная. Больший риск значительно обесценивает возможные будущие платежи. (Некоторые сведения об этом есть в ч. II пособия.)

## ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

**1.** Как изменяется срок окупаемости проекта при изменении величины инвестиций, годовых доходов, ставки процента?

**2.** С помощью компьютера рассчитан инвестиционный проект: Inv = −4000 д.е., последующий годовой доход при 8% годовых равен $R = 1000$ д.е., длительность проекта 6 лет и получено, что чистый приведенный доход NPV = 623 д.е. и срок окупаемости — 6 лет. Проверьте компьютерные расчеты.

**3.** Для инвестиционного проекта длительностью 6 лет с планируемыми годовыми доходами 400 д.е. и годовой ставкой 10% с помощью компьютера найдены необходимые инвестиции — 1742 д.е. Проверьте компьютерные расчеты.

**4.** Допустим, инвестиционный проект «циклический». Фабрика работает циклами: один год из десяти она на капитальном ремонте и обновлении, что требует $30 000, в остальные девять лет цикла фабрика приносит доход $10 000 в год. Найдите характеристики данного потока платежей. (Уточним, что затраты относят на конец первого года цикла, доход поступает в конце каждого года цикла, начиная со второго года.)

**5.** Рассмотрим создание из доходов фонда для погашения кредита инвестиций. В банке взят кредит под инвестиционный проект по ставке $i$, а доходы от проекта помещаются в другой банк по большей ставке $j$. Вычислите итоговые характеристики (необходимые данные — по вашему усмотрению).

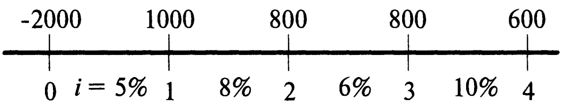
**6.** Некто получил наследство в виде солидного банковского счета и теперь его «проедает», беря каждый год со счета в банке определенную сумму и тратя ее в течение года. По сути это «перевернутый» инвестиционный процесс. Введите понятия, аналогичные сроку окупаемости, внутренней норме доходности и т.п. Какие меры должен принять наследник при увеличении темпов инфляции?

**7.** В городе есть банк, выплачивающий 8% годовых. Как вы объясните, почему автомагазин продает автомобили в кредит под 6% годовых?

**8.** Рассчитайте ежегодный платеж за аренду оборудования стоимостью \$20 000 в течение 10 лет, если к концу аренды остаточная стоимость оборудования будет \$10 000. Норматив доходности принять равным 15%.

**9.** Выясните, следует купить оборудование стоимостью \$20 000 или арендовать его на 8 лет с ежегодным арендным платежом \$3000, если ставка процента 6% годовых, а норма амортизации равна 15%?

**10.** Проанализируйте инвестиционный проект с переменной процентной ставкой:



# Глава 5

# ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ ДОХОДНОСТИ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ

Финансовой называется операция, начало и конец которой имеют денежную оценку — $H$ и $K$ соответственно, а цель проведения которой заключается в максимизации разности $K - H$ или другого подобного показателя. Важнейшей характеристикой операции является ее доходность. В предыдущих главах эпизодически приходилось вычислять доходность. В этой главе подробно рассмотрим это понятие.

## 5.1. Различные виды доходности операций

Под денежной оценкой начала операции обычно понимают размер вложенных инвестиций, затраты или просто наличный капитал, под денежной оценкой конца операции — наращенный капитал, полученный доход и т.п.

Доходность $d$ операции определяется из уравнения $K = H(1 + d)$ или $d = (K - H)/H = K/H - 1$. Величина $K/H$ называется *коэффициентом*, или *множителем, наращения*. Ясно, что $K/H = 1 + d$.

Видно, что множитель наращения и доходность жестко связаны друг с другом, так что иногда под доходностью понимают именно множитель наращения (впрочем, эта замена не лишена оснований).

Определенную выше доходность будем называть еще и *номинальной* или *расчетной,* чтобы отличить от других видов доходности.

Данное определение никак не учитывает продолжительности операции. Чтобы исключить произошедшие во время операции изменения, можно привести конечную оценку операции к началу операции, используя подходящий коэффициент дисконтирования.

*Реальной доходностью операции* называется величина $d_r = [K/(1 + \alpha) - H]/H = [K/(1 + \alpha)]/H - 1$, где $\alpha$ — величина инфляции за время проведения операции. Инфляция обесценивает конечную оценку операции в $(1 + \alpha)$ раз.

Пример еще одного вида доходности. Один из топ-менеджеров фирмы сказал на годовом собрании акционеров, что за прошедший год было вложено в различные проекты \$1 000 000, и эти вложения принесли \$1 200 000 дохода, что и свидетельствует об эффективности работы управленцев фирмы. Однако его поправили, сказав, что банки дают от 8 до 14% годовых, так что умелая работа управленцев принесла много меньше \$200 000. Определим эффективную доходность операции:

$$d_э = [K/(1 + b) - H]/H = [K/(1 + b)]/H - 1,$$

где $b$ — ставка безрискового вложения или просто *безрисковая ставка* за время проведения операции. В советское время такой ставкой можно было считать ставку вклада до востребования в Сбербанке (сейчас так же, но с некоторой натяжкой, особенно после 17 августа 1998 г.). Дисконтируя конечную оценку к началу операции по безрисковой ставке, мы как бы вычитаем из конечного результата операции наращение капитала, которое могло быть получено в результате размещения капитала по безрисковой ставке без всякого риска.

Можно пойти дальше и для учета инфляции и возможности размещения по безрисковой ставке дисконтировать конечную оценку операции по произведению $(1 + \alpha)(1 + b)$ и определить точную доходность как $d_t = (K/[(1 + \alpha)(1 + b)] - H)/H = K/[(1 + \alpha)\times$ $\times(1 + b)]/H - 1$. Однако несомненно, что имеется некоторая связь между темпом инфляции и безрисковой ставкой (последняя не намного больше), так что дисконтирование просто по произведению $(1 + \alpha)(1 + d)$ не даст нужного результата.

В указанных выше определениях доходности мы дисконтировали конечную оценку операции к ее началу. Однако получится то же самое, если дисконтировать начальную оценку операции к ее концу, т.е. нарастить начальную оценку по соответствующей ставке.

Все указанные выше определения доходности не учитывали продолжительность операции (номинальная доходность не учитывала совершенно, реальная и эффективная — лишь в малой мере — посредством учета инфляции и безрисковой ставки за время проведения) и могут быть названы *абсолютными доходностями.* Гораздо более выразительным является определение *доходности относительной* как скорости роста вложенных в операцию средств по отношению к размеру средств в начале операции. Такая доходность — скорость роста вложенного капитала — определяется в процентах годовых или в годовой доле. Иногда ее называют также *эффективностью операции.* Примем первое название — в процентах годовых. Обозначим ее $i$ Пусть длительность операции есть $T$, начальная и конечная оценки операции — $H$ и $K$ соответственно, тогда для определения $i$ имеем уравнение $H(1 + i)^T = K$.

Пусть, например, $H = 100$, $K = 121$, $T = 2$, тогда, как легко видеть, $i = 10\%$, ибо $121/100 = (1 + 10/100)^2$.

Если фиксировать значения капитала в моменты времени 0, 1, 2, ...: $K_0$, $K_1$, $K_2$ и т.д., то можно определить среднюю скорость $i$ на промежутке [0,2], например, как $(1 + i)^2 = K_2/K_0$. Если же операция продолжалась время $t$ и имела (абсолютную) доходность $d$, то доходность в процентах годовых $i$ удовлетворяет уравнению $(1 + i)^t = (1 + d)$, откуда $i = (1 + d)^{1/t} - 1$.

## 5.2. Текущая и полная доходность

Весьма часто финансовые операции бывают распределенные — длятся некоторое время и фактически состоят из нескольких более мелких операций. Например, после покупки акции владелец выжидает выгодный момент, чтобы ее продать, а за это время он получает дивиденды. Эти текущие доходы формируют так называемую текущую доходность. В случае с акцией — это дивиденды, в случае с облигацией — купонные выплаты.

Еще пример: гражданин купил дом в деревне, чтобы подремонтировать его и продать. Но в ожидании выгодного момента для продажи он находит возможность сдавать его дачникам. Доход от сдачи дома — это текущий доход. Доход же от всей операции разумно назвать полным доходом.

Осенью 1995 г. в России были выпущены облигации государственного займа. Они имели четыре квартальных купона, проценты по каждому купону объявлялись за некоторое время до даты гашения очередного купона. Таким образом, текущая доходность этих облигаций менялась от квартала к кварталу. Полную же доходность можно было подсчитать только за целый год — после погашения всех купонов и самой облигации. Если принимать во внимание инфляцию, то реальная текущая доходность многих финансовых операций может значительно меняться во времени.

## 5.3. Поток платежей и его доходность

Пусть $\{R_k, t_k\}$ — поток платежей, в нем $R_k$ — платежи, $t_k$ — моменты времени. Будем говорить, что рассматриваемый поток имеет современную величину $A$ при уровне доходности $j$, если $\sum_k R_k/(1+j)^{t_k} = A$. Если поток есть годовая рента с годовым платежом $R$ и длительностью $n$, то рента имеет современную величину $A$ при уровне доходности $j$, если $R \cdot a(n, j) = A$. Фиксируем $A$, тогда при увеличении $R$ доходность ренты увеличивается. Можно сказать и по-другому: для увеличения доходности ренты надо увеличить годовой платеж.

Все эти соображения особенно хорошо видны на примере вечной ренты, поскольку для нее $A = R/j$, или, по-другому: доходность вечной ренты есть $j = R/A$. Важно отметить, что определенная таким образом доходность потока платежей не зависит от ставки процента, а зависит только от величины и моментов самих платежей, в силу чего ее называют часто *внутренней доходностью потока платежей.*

Более точно внутренняя доходность потока платежей есть такая его доходность в только что определенном смысле, при которой современная величина этого потока равна нулю (такая характеристика имеется не у всякого потока платежей).

## 5.4. Другие виды доходности

Это доходность к погашению, доходность с учетом налогообложения, комиссионных и т.п. Когда доход получают в виде разности между покупной и продажной ценой ценной бумаги, правомерно рассматривать прирост курсовой стоимости как доход владельца, а падение — как убыток. Соотнеся этот доход с ценой покупки, придем к показателю доходности подобной сделки. Например, доходность ГКО с позиции владельца бумаги рассчитывается по так называемому показателю доходности к аукциону:

(Цена продажи — Цена покупки)/(Цена покупки),

но эту абсолютную доходность пересчитывают в процентах годовых. Последняя и есть доходность к аукциону.

Если учитывать налоги, комиссионные и другие побочные платежи, которые весьма часто сопровождают финансовые операции, то эти платежи могут значительно изменить доходность операции.

**Пример 1.** Вексель учтен по ставке $d = 10\%$ за 160 дней до его оплаты (временная годовая база равна 360 дням). При выполнении операции учета с владельца векселя удержаны комиссионные в размере 0,5% от номинала векселя.

Р е ш е н и е. При расчете доходности векселя его номинал часто не играет роли. Абсолютная доходность операции без учета комиссионных:

$$d = \frac{1}{1-0{,}1} - 1 = 11{,}11\,\%;$$

с учетом комиссионных:

$$\frac{1}{0{,}9-0{,}05} - 1 = 11{,}17\,\%.$$

Эффективность операции, т.е. доходность в процентах годовых:

$$(1{,}111)^{(360/160)} - 1 = 0{,}267, \text{ т.е. } 26{,}7\%;$$

с учетом комиссионных:

$$(1{,}117)^{(360/160)} - 1 = 0{,}282, \text{ т.е. } 28{,}2\%.$$

## 5.5. Мгновенная доходность

Пусть в момент $t$ капитал равен $K(t)$, а через небольшое время $\Delta t$ капитал равен $K(t + \Delta t)$, тогда средняя доходность $\bar{d}$ на отрезке $[t, t + \Delta t]$ в процентах годовых (в долях) равна

$$K(t+\Delta t)/K(t) = (1+\bar{d})^{\Delta t},$$

при малом $\Delta t$ величина $(1+\bar{d})^{\Delta t}$ с точностью до бесконечно малых 2-го порядка равна $1 + \bar{d} \cdot \Delta t$. Устремляя $\Delta t$ к нулю, получаем

$$d = \lim_{\Delta t \to 0} [K(t+\Delta t) - K(t)]/[K(t) \cdot \Delta t] = K'(t)/K(t) = [\ln K(T)]'.$$

Итак, мгновенная доходность есть производная по времени натурального логарифма капитала или, как говорят, логарифмическая производная.

В частности, при постоянной мгновенной доходности $d$ капитал растет во времени по экспоненте: $K(t) = K(0) \cdot e^{dt}$.

**Пример 2.** Капитал растет во времени с постоянной скоростью $v$, т.е. $K(t) = K_0 \cdot (1 + vt)$. Найти мгновенную доходность в произвольный момент времени.

Решение. Обозначим искомую мгновенную доходность $d(t)$, тогда $d(t) = K'(t)/K(t) = K_0 v/K_0(1 + vt) = v/(1 + vt)$. Итак, доходность со временем уменьшается. Это и понятно — приращение капитала за единицу времени постоянно и равно $K_0 v$, а сам капитал растет.

## 5.6. Эффективная и эквивалентная ставки процента

*Эффективной ставкой* называется годичная ставка сложных процентов, наращение по которой начальной суммы $S(0)$ дает к моменту $t$ сумму $S(t)$, наращенную по какой-то схеме наращения. Ясно, что эффективная ставка $f$ находится из уравнения $(1 + f)^t = S(t)/S(0)$. Пусть, например, наращение происходит по схеме сложных процентов $m$ раз в году, каждый раз начисляется $i/m$ процентов. Тогда эффективная ставка находится из уравнения: $(1 + f) = (1 + i/m)^m$, так что $f = (1 + i/m)^m - 1$.

Для данной операции с начальной и конечной оценками $(H, K)$ *эквивалентной ставкой* называется доходность операции, выраженная в процентах годовых. Такая ставка $e$ находится из уравнения $K/H = (1 + e)^t$, где $t$ — длительность операции. Понятие эквивалентной ставки введено для сравнения различных операций по скорости наращивания ими капитала.

**Пример 3.** Определить проценты наращения, эквивалентные учетной ставке в 20%.

Р е ш е н и е. Обозначим учетную ставку $d$, ставку процентов $i$, тогда имеем уравнение $1/(1-d) = 1 + i$, отсюда $i = d/(1 - d)$. По данным примера получаем $i = 0,2/0,8 = 0,25$. Итак, по своей доходности учетная ставка 20% эквивалентна наращению простых процентов по ставке 25%.

Таким образом можно определить эквивалентность ставок различных операций.

**З а м е ч а н и е 1.** На финансовом рынке постоянно происходит сравнение цены актива с его доходностью. На этом рынке действует аналог знаменитого закона А. Смита: средняя норма доходности по всем отраслям народного хозяйства должна быть примерно одинакова. Поэтому активы, которые не могут обеспечить среднюю по рынку доходность, падают в цене, и наоборот, очень доходные активы поднимаются в цене.

**З а м е ч а н и е 2.** Распространенное мнение, что ценные металлы, драгоценности являются хорошим средством сохранения богатства во время инфляции, нередко не подтверждается. Во время безумного 1993 г. (в начале этого года Гайдар «отпустил» цены) многие цены в России возросли за год в 1000—5000 раз, и цены на серебро, золото не поспевали за ценами на продовольствие, определяющими фактически жизненный уровень большинства населения. Кое-кто из этого большинства вынужден был продавать эти металлы, теряя значительную часть их прошлой стоимости. Фактически за такой огромной инфляцией в условиях обнищания значительной части населения могут поспеть только цены на товары высокой потребительской полезности (проще говоря, товары первой необходимости).

## ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

**1.** Если доходность одной операции в процентах годовых больше, чем аналогичная характеристика другой, значит ли это, что первую операцию надо предпочесть второй?

**2.** Значения капитала в моменты времени 0, 1, 2, 4 есть 100, 200, 300, 400. Найти доходность и среднюю доходность на отдельных промежутках (в процентах годовых).

Р е ш е н и е. Найдем, например, среднюю доходность на промежутке [1; 4]. В начале этого промежутка капитал равен 200, в конце 400. Приращение равно 200, таким образом доходность равна $200/200 = 1$, или 100%. Это абсолютная доходность. Если же хотим найти эффективность, т.е. доходность в процентах годовых $d$, то надо решить уравнение $(1 + d)^2 = 400/200$. Получим $d = 0,41$, или 41% годовых.

**3.** Ссуда выдана на 2 года с обязательством выплатить на 30% больше (т.е. под 15 ежегодных простых процентов). Найдите эквивалентную ставку сложных годовых процентов.

**4.** На какую годовую ставку процентов нужно заменить номинальную ставку годовых сложных процентов $i = 12\%$, если начислять сложные проценты ежеквартально по 4%?

**5.** Найти внутреннюю доходность «циклического» инвестиционного проекта — см. задачу 1 из § 1.4.

Р е ш е н и е. Достаточно найти внутреннюю доходность потока платежей одного цикла, для чего следует решить уравнение $30\,000 = 10\,000 \cdot a(9, j)$, где $j$ — искомая доходность. По таблице коэффициентов приведения ренты (приложение 3) подбираем $j$, чтобы $a(9, j) = 3$. Получаем $j = 30\%$.

**6.** Зависимость мгновенной доходности от времени задана формулой $d(t) = at$, где $a$ — константа. Найдите изменение капитала во времени.

У к а з а н и е. Нужно решить дифференциальное уравнение $K'(t) = K(t) \cdot at$ — это уравнение с разделяющимися переменными.

**7.** Иногда операции с иностранной валютой могут быть очень доходными. Пусть за ноябрь 1998 г. курс доллара возрос с 16 до 18 руб. Банк в начале месяца купил доллары за рубли, а в конце месяца продал доллары, получив рубли. Найдите доходность этой операции в процентах годовых. Если инфляция за этот месяц была 10%, то какова реальная доходность операции?

**8.** По срочному годовому рублевому вкладу банк платит 42% годовых. Прогноз повышения курса доллара за год — с 20 до 30 руб. Какое принять решение: нести рубли в банк или купить на них доллары и хранить их «в банке, а банку в тумбочке» («естественной» инфляцией доллара в 2–3% в год пренебречь)?

**9.** По срочному годовому рублевому вкладу банк платит 42% годовых, а по такому же валютному — 8%. Прогноз повышения курса доллара за год — с 20 до 26 руб. Какое принять решение: нести рубли в банк или купить на них доллары и положить их на валютный вклад (после 17 августа 1998 г. доверия к банкам у россиян нет, поэтому ограничимся просто теоретическим подсчетом, что выгоднее).

**10.** В советское время легковую машину можно было купить с большим трудом. Гражданин К. купил в 1977 г. «Жигули» за 8000 руб. Подрабатывая на ней частным извозом (в то время незаконным), он зарабатывал на ней в месяц «чистыми» 300 руб. (это примерно соответствовало зарплате доцента вуза), а через два года продал ее за 8200 руб. Найдите и объясните на этом примере, что такое текущая и полная доходность (расходом на бензин и т.п. издержками пренебречь).

**11.** Обменные курсы валют в банке: по доллару США — 22,8/23,6 руб. за доллар; по итальянской лире — 13,6/15,4 руб. за 1000 лир (чем менее распространена валюта, тем больше по ней банковская маржа). Какова доходность для банка операции по обмену лир на доллары?

Р е ш е н и е. Банк купит 1000 лир по кросс-курсу следующим образом: мысленно работник банка выдаст сдающему лиры 13,6 руб. за каждую тысячу лир, а потом на эти рубли продаст доллары в количестве \$1 за 23,6 руб. Таким образом, за каждую тысячу лир будет выдано 13,6/23,6 = 0,576 долл. То есть доходность операции $f$ находится из уравнения $1 + f = (1 + d)(1 + l) = (23{,}6/22{,}8)(15{,}4/13{,}6) = 1{,}17$. Итак, доходность операции равна 17%.

# Глава 6

# ХАРАКТЕРИСТИКИ ФИНАНСОВЫХ ИНСТРУМЕНТОВ

*Финансовый инструмент* — это любой документ, который может участвовать в финансовых операциях: акции, облигации, депозитные сертификаты, векселя и т.д. Финансовые инструменты делятся на основные и производные. К *основным* относятся банковский счет, облигации и акции. Все остальные инструменты называются *производными*: депозитные сертификаты, векселя, форвардные и фьючерсные контракты, опционы и всевозможные их комбинации. Важнейшими характеристиками финансовых инструментов являются цена (для облигаций — курс), доходность (текущая и полная), ликвидность и т.п.

Собственно, продажа и покупка указанных финансовых инструментов и составляют финансовый рынок. На таком рынке продают и покупают ценные металлы и драгоценности, совершают различные операции с валютой других стран и деньгами своей страны (дают и берут взаймы).

## 6.1. Общие сведения о финансовых инструментах

В этом параграфе рассмотрим финансовые инструменты: облигации, акции, депозитные сертификаты, векселя, фьючерсы. Сначала кратко опишем первые два: облигации и акции.

***Облигации*** — это ценные бумаги, обычно на предъявителя. Облигации имеют номинальную стоимость, или номинал $N$, который присваивают облигации в момент ее эмиссии. С течением времени цена облигации может меняться, но обычно говорят не о цене облигации $P$, а об отношении цены к номиналу и это отношение, выраженное в процентах, называют *курсом облигации* $K$. Итак, курс облигации $K = P/N$ или $P = KN$, а в процентах – $K = 100P/N$, $P = NK/100$.

Часто облигации имеют купон, который характеризуется купонной ставкой $q$, что дает владельцу купонный доход, равный доле $q$ от номинала. Например, если $q = 10\%$, а $N = 1000$ д.е., то разовый купонный доход равен 100 д.е. Купонный доход выплачивается периодически или только один раз, например, при погашении облигации. Купонный доход рассматривается как текущий.

Часто облигации имеют установленный период действия, после чего они могут быть погашены, т.е. владелец получает их номинальную стоимость.

Облигации обычно называются по имени их эмитента: государственные, если их выпустило государство, муниципальные, корпоративные и т.п.

Благодаря фиксированному текущему доходу облигации — весьма популярные ценные бумаги, по своей стоимости они превосходят остальные ценные бумаги.

***Акция*** — это ценная бумага, обычно ее владелец занесен в особый список (реестр) акционеров, что дает ему некоторые права. Тот, кто выпускает (эмитирует) акции, называется *эмитент*. Акция дает ее владельцу право на получение дивидендов раз в квартал или с другой периодичностью. Дивиденды формируют текущий доход владельца акции. Если акции продаются и покупаются, то они имеют цену. Цена акции определяется многими факторами, некоторые из них носят случайный характер. Акции имеют номинальную стоимость, но обычно она не играет никакой роли.

Акции делятся на две большие группы: *обыкновенные* и *привилегированные*. Выплаты дивидендов и возврат капитала при банкротстве эмитента сначала производятся по привилегированным акциям и только после этого по обыкновенным. Недостаток привилегированных акций в том, что если компания успешно ведет дела, то дивиденды на обычные акции растут, а на привилегированные — нет.

Отметим для дальнейшего, что доходность облигации есть ее внутренняя доходность, понимаемая в смысле потока платежей (см. § 5.3) и определяемая номиналом облигации в смысле современной или наращенной величины — см. далее § 6.7—6.10. Цена же зависит и от внешних условий, в частности, от ставки процента. Цена ценной бумаги формируется спросом и предложением. При определении цены ценной бумаги продавцы и покупатели стараются учесть все виды доходов, которые может принести ценная бумага.

## 6.2. Курс и доходность облигации без погашения с периодической выплатой купонных процентов

Доход от такой облигации получают только в виде купонных процентов. Пусть ставка купона $q$, ставка процента $i$, номинал облигации $N$. Тогда купонные выплаты $\{qN\}$ образуют вечную ренту. Дисконтируя все эти выплаты по ставке процента $i$, получим современную величину этой ренты, что и есть теоретическая цена облигации $P$. Итак,

$$P = qN/(1 + i) + qN/(1 + i)^2 + \ldots = qN/i.$$

Следовательно, курс облигации есть $K = 100 \cdot q/i$. Если выплата купонных денег происходит $p$ раз в году величиной $qN/p$, так что за год получается опять же $qN$, то эти купонные выплаты $\{qN/p\}$ надо дисконтировать по ставке $(1 + i)^{1/p}$. Получаем формулу

$$K = (100q/p)/[(1 + i)^{1/p} - 1].$$

Пусть теперь курс облигации $K$ известен. Найдем текущую доходность облигации указанного типа. Если купонные выплаты производятся раз в год, то за год облигация приносит доход $qN$, а в нее вложено $P$, следовательно, доходность равна $j = qN/P$, или $qN/(KN) = q/K$ — если курс считать долей, а в процентах — $j = 100q/K$.

Можно предложить и другой способ определения доходности облигаций указанного типа. Пусть доходность облигации равна $j$, тогда купонные выплаты наращивают стоимость облигации по этой годовой ставке, значит, если дисконтировать этот поток по ставке $j$, то получим современную величину этого потока, а это и есть уже известная цена облигации. Купонные выплаты представляют собой вечную ренту, ее современная величина равна $qN/j$. Итак, имеем уравнение $qN/j = KN/100$, откуда $j = 100q/K$.

Для облигаций рассматриваемого типа текущая и полная доходности совпадают.

## 6.3. Курс и доходность бескупонной облигации с погашением по номиналу

Доход от такой облигации получают как разницу между номиналом $N$ при погашении и ценой $P$ облигации. Так как текущих выплат нет, то текущая доходность нулевая. Если облигация куплена за $m$ лет до погашения, то, дисконтируя платеж $N$ по ставке процента $i$ к современному моменту, получим теоретическую цену облигации $P = N/(1 + i)^m$, следовательно, курс облигации $K = 100/(1 + i)^m$ (понятно, что для такой облигации курс всегда меньше 100).

Теперь найдем доходность облигации, считая цену известной. Это просто: цена $P$, наращиваемая по ставке доходности $j$, через $m$ лет станет равной номиналу облигации. Следовательно, $P(1 + j)^m = N$ или $(KN/100)(1 + j)^m = N$, окончательно $j = (100/K)^{1/m} - 1$.

## 6.4. Курс и доходность бескупонной облигации с выплатой купонных процентов при погашении

Проценты по такой облигации начисляются с капитализацией по сложной купонной ставке $q$ и выплачиваются в конце срока одновременно с погашением. Так как текущих выплат нет, то текущая доходность нулевая. Пусть $q$, $i$ — ставки купона и процента, и через $n$ лет после выпуска облигация будет погашена. Таким образом, общая сумма, которую выплатят владельцу при погашении, равна $N \cdot (1 + q)^n$. Пусть облигация куплена за $m$ лет до погашения. Дисконтируя к этому моменту сумму $N \cdot (1 + q)^n$ по ставке процента $i$, получим теоретическую цену облигации $P$. Итак, $P = N(1 + q)^n/(1 + i)^m$, следовательно, курс облигации $K = 100(1 + q)^n/(1 + i)^m$.

Теперь определим доходность облигации. Известная цена $P$, наращиваемая по ставке доходности $j$, через $m$ лет должна вырасти до $N \cdot (1 + q)^n$, поэтому имеем уравнение $P(1 + j)^m = N \cdot (1 + q)^n$, откуда

$$j = (100/K)^{1/m} \cdot (1 + q)^{n/m} - 1.$$

## 6.5. Курс и доходность облигации с периодической выплатой процентов и погашением

Это самый общий тип облигаций. Суммарный доход от облигаций данного типа складывается из регулярных купонных выплат, роста курса, что дает доход при продаже облигации, или от погашения облигации — здесь доход может определяться разницей ставок процента при выпуске облигации и в момент ее погашения. Купонные выплаты формируют текущую доходность.

Пусть $q$, $i$ — ставки купона и процента. Если облигация куплена за $m$ лет до погашения, то будущие купонные доходы $\{qN\}$ есть годовая рента и ее современная величина есть $qN \cdot a(m, i)$, где $a(m, i)$ — коэффициент приведения этой ренты, т.е. $[1 - (1 + i)^{-m}]/i$. Добавив сюда еще современную величину номинала погашения $N \cdot (1 + i)^{-m}$, получим теоретическую цену облигации $P$. Итак, $P = N \cdot (1 + i)^{-m} + qN \cdot [1 - (1 + i)^{-m}]/i$, следовательно, курс облигации

$$K = 100 \cdot ((1 + i)^{-m} + q \cdot [1 - (1 + i) - m]/i).$$

Теперь определим доходность облигации рассматриваемого типа. Дисконтируя номинал облигации при погашении и купонные платежи по (пока неизвестной) ставке доходности $j$, должны получить цену облигации $P$. Следовательно, имеем уравнение $N(1 + j)^{-m} + qN \cdot a(m, j) = P$, откуда и можно найти $j$. Приближенное решение этого уравнения несложно получить с помощью компьютера.

## 6.6. Зависимость цены (курса) облигации от ставки процента

Рассмотрим самый общий тип облигаций — с периодической выплатой процентов и погашением. Цена такой облигации $P = N(1+i)^{-m} + qN[1-(1+i)^{-m}]/i$ складывается из дисконтированных к современному моменту номинала погашения $N$ и купонных выплат $\{qN\}$. Легко видеть, что обе эти величины убывают при повышении ставки процента $i$, значит, и цена облигации при этом также падает. Это падение тем больше, чем дальше момент гашения облигации.

В примере 1 приведены результаты компьютерного исследования.

**Пример 1.** Взяты две облигации: I и II, обе номиналом 1000. Первая будет погашена через 6 лет, вторая — через 18 лет. Купонная ставка одинакова — 8%. Получилась такая зависимость цен облигаций от ставки процента:

| Ставка процента | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Цена облигаций I | 709 | 634 | 568 | 510 | 469 | 413 |
| Цена облигаций II | 359 | 258 | 186 | 136 | 100 | 74 |

## 6.7. Цена вечной акции (доход — только дивиденды)

Доход от такой акции получают только в виде дивидендов, т.е. ее продажа не предусмотрена. Поэтому теоретическую или расчетную цену акции $P$ определяют как дисконтированную к современному моменту вечную ренту будущих дивидендов по действующей ставке $i$. Если предположить, что дивиденды постоянны, равны $d$ и выплачиваются раз в году, то $d/i$ есть современная величина этой ренты, а также и цена акции $P$. Если выплаты дивидендов происходят $p$ раз в году, то дисконтировать надо по ставке $(1+i)^{1/p}$ и расчетная цена акции будет $d/[(1+i)^{1/p}-1]$.

## 6.8. Банковские депозитные сертификаты

Такие сертификаты выдаются банками в обмен на размещаемые у них средства. Сертификаты отличаются от обычных банковских депозитов тем, что могут обращаться на вторичном рынке. Там они оцениваются исходя из текущей стоимости будущих денежных поступлений. Расчет их текущей стоимости интересен тем, что за время действия сертификата может произойти изменение текущей процентной ставки.

Пусть депозитный сертификат был выпущен на сумму 1000 руб. под 12% годовых. Следовательно, при его гашении через год его владелец получит 1120 руб. Предположим, что через полгода ставка уменьшилась до 6%. Какова будет цена этого сертификата в этот момент?

*О т в е т.* Эта цена $P$, наращенная по ставке 6% годовых, через полгода должна нарасти до 1120. Имеем уравнение $P(1 + 0{,}06)^{1/2} =$ $= 1120$, отсюда получаем $P = 1087$ руб.

## 6.9. Арбитраж и характеристики финансовых инструментов

Если на одном рынке товар стоит дешевле, чем на другом, то можно купить товар на первом рынке, продать его на втором и получить некоторую прибыль. В советское время это называлось спекуляцией. Конечно, такое положение может быть лишь временным. Найдется много желающих проводить такие операции — они называются *арбитражными.* Эта операция приведет к повышению цены на первом рынке и к ее падению на втором. Разница цен может остаться (арбузы в Узбекистане всегда будут дешевле, чем в Москве), но она не сможет компенсировать транспортных и других издержек по этой операции. Финансовый рынок принципиально немногим отличается от обычных товарных рынков. Пожалуй, он более развит. Арбитражные операции проводятся и на нем. Отметим, что часто арбитражные операции покупки и продажи осуществляются одновременно.

Рассмотрим ценообразование фьючерсных и форвардных контрактов с учетом возможности арбитражных сделок.

*Форвардные* и *фьючерсные контракты* — это контракты на покупку или продажу определенного количества какого-либо товара на определенную дату в будущем, но по цене, установленной в момент заключения контракта. Фьючерсные контракты отличаются от форвардных лишь тем, что они обезличены, являются фактически стандартными и торговля ими ведется лишь на специализированных биржах, в то время как форвардные контракты могут быть весьма индивидуальны (например, между банком и его клиентом). В силу этого термин «фьючерс» можно употреблять также и по отношению к форвардным контрактам.

Рассмотрим ценообразование фьючерсов на покупку какого-то актива ровно через год. Пусть нынешняя цена актива равна $10 000, банковская процентная ставка составляет 10%. Предположим, что этот актив приносит чистого дохода тоже 10% в год. Тогда справедливая цена такого актива через год составит 110% от нынешних $10 000, т.е. $11 000 (надо понимать, что доход, который принесет актив за год, добавляется к активу и за оба вместе и платят \$11 000). Столько и должен стоить фьючерс на покупку такого актива. В самом деле, предположим, что этот фьючерс сейчас продается за меньшую сумму: например, за \$10 000. Тогда арбитражер купит фьючерс, продаст сейчас имеющийся у него актив за \$10 000, положит вырученные деньги в банк, через год они нарастут до \$10 000 + \$1000, по имеющемуся у него фьючерсу купит точно такой же актив, какой продал год назад, за \$10 000 и получит в итоге прибыль \$1000.

Если же фьючерс будет переоценен, т.е. он дает право продать через год актив по большей цене, скажем за \$12 000, то арбитражер приобретает фьючерс, покупает актив сейчас за \$10 000, воспользовавшись банковским кредитом под 10% годовых. Через год этот актив он продаст по фьючерсу за \$12 000 и в итоге получает прибыль \$1000 (т.е. \$12 000 − \$11 000).

Торговлю фьючерсами на биржах организует клиринговая палата. Допустим, что сегодня \$2000 — фьючерсная цена поставки актива через 3 дня, в момент $t = 3$. Если завтра фьючерсная цена поставки актива в момент $t$ станет \$1900, то клиринговая палата перечислит на счет поставщика \$100. Эти \$100 будут сняты со счета покупателя и ему будет предложено пополнить свой счет. Если вдруг (под влиянием каких-нибудь событий, слухов и т.п.) послезавтра фьючерсная цена поставки актива в момент $t = 3$ поднимется до \$2200, то палата перечислит на счет покупателя \$300, сняв их со счета поставщика. Так клиринговая палата обеспечивает исполнение контракта ровно по цене \$2000.

**Замечание 1.** Для ориентировки приведем сведения о доходности некоторых конкретных ценных бумаг в странах со стабильной развитой экономикой (США, Германия, Великобритания и т.д.).

*Годовые процентные ставки (%), декабрь 1995 г.*

| | |
|---|---|
| Банковский депозит с недельным сроком извещения о снятии средств | 4,5 |
| Трехмесячный банковский депозитный сертификат | 6,38 |
| Трехмесячный коммерческий вексель | 6,45 |
| Трехмесячный казначейский вексель (Великобритания) | 6,45 |
| Шестимесячный межбанковский кредит | 6,34 |
| Государственная облигация со сроком погашения 5 лет (Великобритания) | 7,0 |
| Государственная облигация со сроком погашения 10 лет (Великобритания) | 7,4 |
| Государственная облигация со сроком погашения 10 лет (Германия) | 5,88 |

| | |
|---|---|
| Корпоративная облигация со сроком погашения 5 лет, обеспеченная активами корпорации (Великобритания) | 8,1 |
| Корпоративная облигация со сроком погашения 5 лет, не обеспеченная активами корпорации (Великобритания) | 9,2 |

Для сравнения: по состоянию на 28.01.1999 г. облигации сберегательного займа России имели купоны годовой доходности 50—60%.

**Замечание 2.** Ликвидность является одним из важнейших свойств финансовых инструментов и вообще активов, поэтому рассмотрим это свойство.

Говорят, что финансовый инструмент, актив *высоколиквиден*, если его можно быстро и без значительных потерь обратить в деньги. Это определение качественное. С количественной стороны можно определить ликвидность по формуле $l = 1/(\Delta t \Delta P)$, где $\Delta t$ — время обращения (продажи) актива в деньги; $\Delta P$ — относительный размер потерь, т.е. доля потерь ценности актива при этом обращении в деньги.

На практике ликвидность активов, котирующихся на бирже и стандартизованных, обычно оценивают путем сопоставления числа заявок на покупку и продажу данного типа активов.

**Замечание 3.** 17 августа 1998 г. пирамида ГКО была обрушена. ГКО (государственное казначейское обязательство) — это вексель на 3 месяца, допускающий свободную перепродажу. Номинальная стоимость 100 000 руб. выплачивалась при погашении, а продавались ГКО с дисконтом, величина которого определялась на аукционе. Участники аукциона заблаговременно подавали заявку, в которой указывали объем покупки и цену в процентах от номинала. Распорядители аукциона отбирали заявки по самой большой цене до тех пор, пока не набирали нужный им объем, остальные заявки не принимались во внимание. Выпуск этих ГКО был назван пирамидой потому, что гашение векселей (ГКО предыдущих выпусков) производилось, как правило, из сумм, вырученных от продажи нового тиража ГКО.

## ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

Купонный доход назначается раз в году, если не указано обратное.

**1.** Что хорошо для владельца ценной бумаги: увеличение или уменьшение действующей процентной ставки в период владения этой бумагой, если эта бумага: а) облигация; б) акция; в) депозитный сертификат и т.д.?

**2.** Найдите курс облигации без погашения с периодической — раз в год — выплатой процентов при $q = 8\%$, $i = 5\%$. Вычислите доходность такой облигации, если ее курс равен 120.

**3.** Найдите курс бескупонной облигации за 5 лет до погашения при $i = 6\%$. Вычислите доходность такой облигации, если ее курс равен 70.

**4.** Для бескупонной облигации с выплатой купонных процентов при погашении с помощью компьютера вычислен курс облигации — 212,7. Проверьте компьютерные расчеты, если купонная процентная ставка 10%, срок облигации — 10 лет, до гашения осталось 4 года и процентная ставка — 6% годовых.

**5.** Найдите курс бескупонной облигации с выплатой процентов при погашении за 5 лет до погашения при $i = 4\%$, если облигация выпущена на 10 лет и $q = 8\%$. Вычислите доходность такой облигации, если ее курс равен 100.

**6.** Найдите курс облигации без погашения с периодической выплатой — раз в год — процентов при $q = 8\%$, $i = 5\%$. Вычислите доходность такой облигации, если ее курс равен 120.

**7.** Найдите цену вечной акции с квартальными дивидендами 200 при годовой ставке $i = 8\%$.

**8.** Вычислите доходность операции учета векселя по ставке $d = 30\%$ за 3 месяца до его оплаты (временная годовая база равна 360 дней — месяц равен 30 дням). При выполнении операции учета с владельца векселя удержаны комиссионные в размере 0,5% от достоинства векселя (см. § 5.4).

**9.** Какова доходность ГКО (в процентах годовых и к погашению), если данный тираж был размещен по цене 71,8% от номинала (цены гашения)?

# Дополнение к части I

*В дополнение вошли две главы, которые могут быть использованы в более продвинутых курсах финансовой математики, а также в разнообразных студенческих работах (курсовых, дипломных и т.п.). Материал главы 8 данного дополнения актуален в условиях перехода к рыночной экономике.*

## Глава 7

## СИСТЕМА ПРЕДПОЧТЕНИЙ ИНДИВИДА И УЧЕТ ЕЕ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ

Материал, излагаемый здесь, затрагивает фундаментальные вопросы финансовой математики: почему люди дают деньги взаймы, как и когда предпочитают их отдавать, какова для них ценность или полезность денег и т.п. Расчеты и пояснения, приведенные в ч. I, полностью объективны, сейчас же они приобретут и субъективные нюансы. Излагаемый здесь материал будет также использован в ч. II пособия.

### 7.1. Система предпочтений индивида

Одним из основных элементов, участников экономики, финансового рынка является индивид — конкретный человек, домашнее хозяйство, рассматриваемое как целое, предприятие, банк и т.п.

Будем считать, что поведение участника финансового рынка полностью описывается следующей аксиомой.

***Аксиома индивида.*** Каждый индивид принимает решения о покупках, обмене, взятии денег в долг и т.п. исходя исключительно из своей системы предпочтений.

Эта аксиома чрезвычайно упрощает анализ поведения потребителя. Далее мы сформулируем эту аксиому в строгих математических терминах.

Но сначала изучим систему предпочтений индивида. Это понятие применимо не только к участникам финансового рынка, но и в общеэкономическом смысле, да, пожалуй, и в общечеловеческом.

Под товаром понимается некоторое благо или услуга, поступившие в продажу в определенное время и в определенном месте.

Будем считать, что имеется $n$ различных товаров, количество $i$-го товара обозначается $x_i$, тогда некоторый набор товаров обозначается $X = (x_1, ..., x_n)$. В число товаров входят и деньги как особый специфический товар.

Потребитель различает наборы товаров, предпочитая один набор товаров другому. Запись $X \preceq Y$ означает, что потребитель предпочитает набор $Y$ набору $X$ либо же не делает между ними различий. Из-за последнего обстоятельства это отношение называется *слабым предпочтением.* Оно формирует еще два отношения: отношение *равноценности* (или безразличия) — $X \sim Y$, если и только если $X \preceq Y$ и $Y \preceq X$, и отношение *предпочтения* (или строгого предпочтения) — $X \prec Y$, если и только если $X \preceq Y$, и неверно, что $X \sim Y$. Какими же свойствами обладают эти три отношения?

Математики называют отношение *рефлексивным,* если $X \preceq X$ для всякого $X$; *симметричным*, если $X \preceq Y$ влечет то, что и $Y \preceq X$; *транзитивным*, если $X \preceq Y$ и $Y \preceq Z$ влечет $X \preceq Z$; *совершенным* (или полным), если для любых двух наборов $X$, $Y$ либо $X \preceq Y$, либо $Y \preceq X$.

***Аксиома:***

1) отношение слабого предпочтения рефлексивно, транзитивно и совершенно;
2) отношение равноценности рефлексивно, симметрично и транзитивно;
3) отношение предпочтения транзитивно;
4) для любого $X$ множество слабой предпочтительности $P_X = \{Y\colon X \preceq Y\}$ выпукло;
5) каждый товар желателен для индивида — если $X \leq Y$, то и $X \preceq Y$, а если к тому же $x_i < y_i$ для некоторого $i$, то $X \prec Y$.

Подчеркнем, что это именно аксиома, выражающая фундаментальные свойства системы предпочтений индивида, вообще говоря, живого человека. Рефлективность и совершенность представляются вполне понятными: *рефлективность* означает, что любой набор товаров равноценен сам себе, а *совершенность* — что индивид в состоянии сравнить по привлекательности любые два набора товаров. Пятое свойство также понятно и в разъяснениях не нуждается.

Какой смысл имеет четвертое свойство системы предпочтений? *Выпуклость* означает, что лучше иметь комбинацию товаров, пусть в меньших количествах, чем просто только какой-то один из этих товаров (лучше иметь немножко соли, сахара, кофе, хлеба, чем одну только соль, или один сахар, кофе, хлеб, хотя бы и в большем количестве).

Свойство транзитивности, которым обладают отношения предпочтения и слабого предпочтения, не совсем очевидно, не очень наглядно и не сразу осознается потребителем, но если ему объяснить, что получится, если его система предпочтений не транзитивна, то он согласится, что свойство транзитивности должно быть, и произведет необходимую переоценку привлекательности для него тех или иных наборов товаров. Об аргументах в пользу транзитивности можно прочесть во многих книгах[1].

Отношение равноценности рефлексивно, симметрично и транзитивно. Любое отношение, обладающее этими тремя свойствами, называется эквивалентностью. Любая эквивалентность на любом множестве разбивает его на непересекающиеся подмножества, называемые классами эквивалентности. Итак, отношение равноценности является эквивалентностью и разбивает пространство товаров на непересекающиеся подмножества, называемые классами или множествами равноценности (или безразличия), а в случае двух или трех товаров эти классы называются кривыми или поверхностями равноценности. Каждое отдельное множество или класс равноценности состоит из наборов товаров, одинаково привлекательных для потребителя — он не отдает предпочтения ни одному из этих наборов. При этом каждый набор из пространства товаров попадает в какой-нибудь из классов равноценности, а именно в тот, где собраны наборы, одинаково ценные с ним.

Типичная картина для двух видов товаров показана на рис. 7.1.

Здесь $K_x$, $K_y$ — классы равноценности наборов $X$, $Y$ соответственно, $X < Y$, стрелка показывает направление предпочтения, заштриховано множество слабого предпочтения $P_y$.

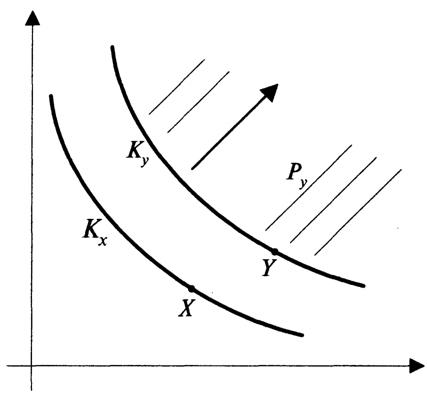



**Рис. 7.1**

Простой обмен наборами товаров может быть чрезвычайно выгодным для обоих участников. В свое время А. Смит привел поразительный пример такого обмена: дальнозоркий и близорукий имеют каждый не те очки, и в результате обмена получают ценнейшие для себя вещи.

---

[1] См., например: *Райфа Г.* Анализ решений. — М.: Наука, 1972.

Похожий вариант обмена показан на рис. 7.2. Пусть первый участник имеет набор товаров $A$, а второй — набор товаров $B$. Теперь представим, что они поменялись этими наборами. Так как набор $B$ лежит выше кривой равноценности первого участника (сплошная линия), на которой лежит прежний набор $A$, то набор $B$ для него ценнее. Аналогично и для второго участника (кривая равноценности которого изображена штриховой линией).

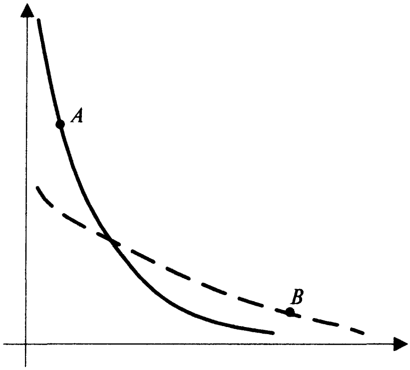



**Рис. 7.2**

Теперь пусть одним из товаров являются деньги. Тогда подобный вариант обмена есть покупка товара одним из участников у другого участника и эта сделка обоюдовыгодна.

Система предпочтений индивида указывает, какой из двух наборов предпочтительнее для него. Во многих случаях, однако, весьма желательно и удобно оценивать привлекательность набора товаров количественно, т.е. приписать каждому набору $X$ из пространства товаров $C$ какое-то число $u(X)$. Получается функция $u$: $C \to R$. Главное требование к такой функции — она должна отражать отношение (слабого) предпочтения на $C$, т.е.

$u(X) \leq u(Y)$, если и только если $X \preceq Y$;

$u(X) = u(Y)$, если и только если $X \sim Y$, значит, и

$u(X) < u(Y)$, если и только если $X \prec Y$.

Такая функция $u(X)$ называется *функцией полезности*. Работать с функцией полезности гораздо удобнее, чем с системой предпочтения.

## 7.2. Временная ценность денег для индивида

В § 1.6 определена математическая эквивалентность денежных сумм в различные моменты времени при определенной процентной ставке: денежные суммы $S(T)$ в момент $T$ и $s(t)$ в момент $t$ называются эквивалентными по ставке сравнения $i$, если $S(T) = s(t)(1 + i)^{T-t}$. Можно сказать и по-другому: определим эквивалентность на множестве пар $(s, t)$, где $s$ — денежная сумма, а $t$ — момент времени, так: пары $(s, t)$, $(S, T)$ эквивалентны, если $S(T) = s(t)\ (1 + i)^{T-t}$.

Графически эта эквивалентность показана на рис.7.3.

На плоскости $t$ (время) — $S$ (деньги) проведены две кривые безразличия.

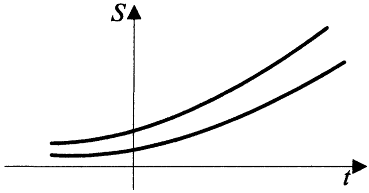


Рис. 7.3

Каждая из кривых безразличия есть класс эквивалентности и задается уравнением $S(T) = s(t)(1 + i)^{T-t}$.

Каждая кривая определяется точкой $t = 0$ своего пересечения с осью, т.е. значением денежной суммы при $t = 0$. В финансовых операциях при расчетах используют именно математическую эквивалентность на пáрах (время—деньги).

Следовательно, можно сказать, что сумма $s$ в момент $t$ будет эквивалентна «сиюмоментной» сумме $s(1 + i)^{-t}$. При этом можно ограничиться рассмотрением единичной суммы и неотрицательными моментами времени. Обозначим «сиюмоментную» ценность единичной суммы в момент $t$ через $V(t)$. Тогда $V(t) = (1 + i)^{-t}$, график этой функции изображен на рис. 7.4 кривой *а*.

Функцию $V(t) = (1 + i)^{-t}$ назовем *объективной функцией временной ценности денег.*

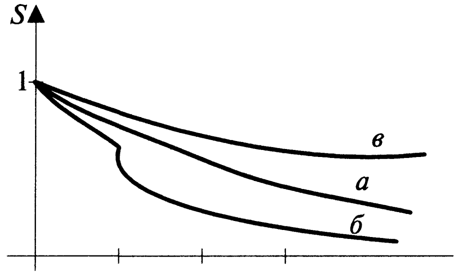


Рис. 7.4

Однако у конкретного индивида эквивалентность (время—деньги) не обязательно совпадает с математической. Положение вполне аналогично отношению конкретного индивида к деньгам и ценам на разные товары: в магазинах висят ценники на товары, и все это создает эквивалентность на пространстве наборов товаров вместе с деньгами — это, так сказать, всеобщая эквивалентность — аналог математической. Вместе с тем у каждого индивида свое конкретное отношение к деньгам, товарам и времени...

У конкретного индивида поэтому своя функция временной ценности денег, и она может отличаться от математической. Например, у человека, который через год вступит во владение большим наследством, она может выглядеть примерно, как кривая *б* на рис. 7.4. Зато для человека, у которого через два года доходы значительно уменьшатся, график временной ценности денег может выглядеть примерно, как кривая *в*.

Вообще можно чисто условно выделить три типа функций временной ценности денег, называя их (по отношению к объективной функции временной ценности денег — кривая 0 на рис. 7.5): пессимистической, нейтральной и оптимистической — кривые соответственно I, II и III на рис. 7.5.

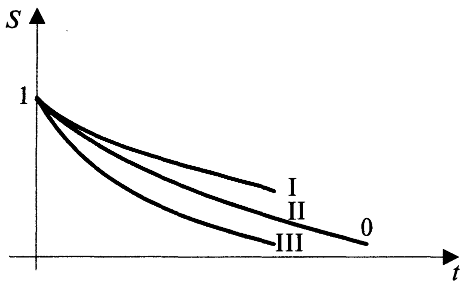



**Рис. 7.5**

Теперь можно сформулировать принцип дачи и взятия денег взаймы: берут взаймы в промежутки большей ценности денег, отдают в промежутки меньшей ценности. Таким образом, индивиду *А* (рис. 7.6) (его функция временнóй ценности денег изображена кривой *А*) выгодно брать взаймы на промежутке ($a$, $b$) и отдавать на промежутке ($c$, $d$). Определите по графику функции временной ценности индивида *Б*, когда ему выгодно дать деньги взаймы (кривая *Б*) на рис. 7.6.

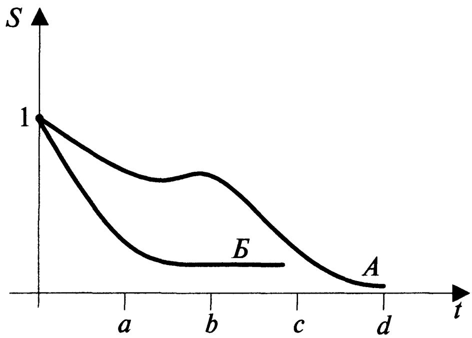



**Рис. 7.6**

## 7.3. Полезность денег

Хорошо известно разное отношение людей к деньгам. Обозначим $d(x)$ — полезность денежной суммы $x$ для индивида. Тогда примерный график $d(x)$ показан на рис. 7.7.

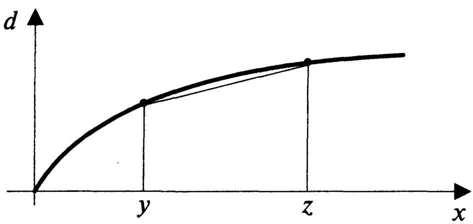



**Рис. 7.7**

Самое важное свойство этой функции — ее вогнутость, т.е. $d(z+y) \leq \leq d(z) + d(y)$ для любых сумм $z, y$, или, другими словами: отрезок, соединяющий две точки графика функции, лежит ниже этого графика. Можно сформулировать это свойство и так: прирост полезности денег уменьшается с увеличением их количества. Это утверждение ниоткуда не следует, однако подтверждается всей человеческой практикой и потому его надо рассматривать как аксиому, характеризующую поведение индивидуума.

Если функция $d(x)$ дифференцируема, то из того, что полезность денег увеличивается с ростом их количества, следует, что $d'(x) > 0$, а сформулированная выше аксиома влечет, что $d''(x) < 0$.

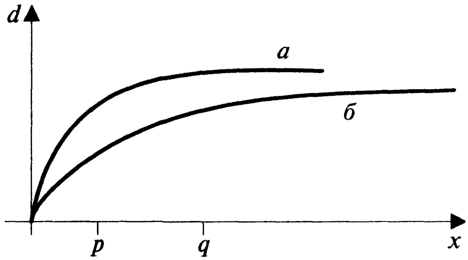



**Рис. 7.8**

С помощью функций полезности денег можно выразить характерное отношение к ним индивида. Например, пусть график функции полезности индивида *А* — это кривая *а* на рис. 7.8, а индивида *Б* — кривая *б* на том же рисунке. Тогда можно сказать, что индивид *А* хотел бы и будет доволен, если его доход лежит на промежутке $[p, q]$, при превышении такого дохода он начинает ценить деньги меньше, возможно, он переключается на другие «радости» жизни. Для индивида *Б* такое состояние наступает позже.

## ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

**1.** Функция временной ценности денег индивида изображена на рис. 7.9, здесь же штриховой линией проведена кривая нейтральной функции временной ценности денег.

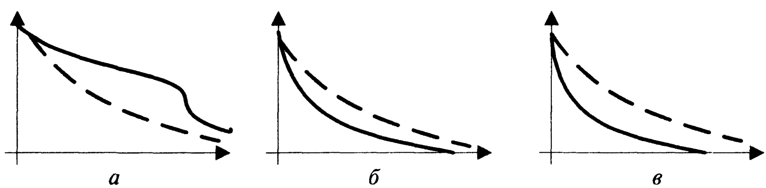



**Рис. 7.9**

Пусть индивид решает вопрос, как ему отдать заем: 1) одним платежом в конце, 2) равными выплатами во все время займа или 3) равными выплатами основного долга (и уменьшающимися выплатами процентных денег) (об этих способах погашения займа см. §§ 2.1—2.3. Тогда в случае *а* индивиду наиболее выгоден вариант 1, в случае *б* — вариант 2 и в случае *в* — вариант 3. Если же его функция нейтральна, то все три варианта для него равноприемлемы.

**2.** Проверьте, что функции $U(z) = \sqrt{z}$ и $U(z) = \ln(1 + z)$ удовлетворяют требованиям к функции полезности денег.

**3.** Два индивида имеют одинаковую функцию полезности денег — $U(z) = \sqrt{z}$. Разделите 1 д.е. между ними, чтобы суммарная полезность была наибольшей.

**4.** Допустим, что временная ценность денег индивида совпадает с объективной при ставке 10% годовых, а функция полезности денег есть $U(z) = \sqrt{z}$. Какова для него полезность суммы \$400 сейчас плюс \$500 через год?

Указание. Надо дисконтировать \$500 и затем оценить полезность суммарной суммы.

**5.** В нормальной экономике, где любой набор товаров можно купить, функцию полезности индивида $u(X)$, определенную на наборах товаров, можно заменить функцией полезности денег по правилу: $u(X) = d\big(c(X)\big)$, где $c(X)$ — цена или стоимость набора товаров $X$, а $d(z)$ — полезность денежной суммы $z$ для того же индивида.

Постройте функцию полезности на пространстве двух товаров с ценами 2 и 5 д.е. за единицу товара и функцией полезности денег $d(z) = \sqrt{z}$.

# Глава 8

# МОДЕЛИ ТОРГОВ

До сего момента рассматривались исключительно вопросы взаимоотношений участников финансового рынка без дискуссий, состязательности не было. Реальная жизнь, однако, изобилует примерами другого рода: банки борются за клиентов, повышая ставки; строительные фирмы удешевляют проекты, стараясь сделать их более привлекательными для инвестора; магазины снижают цены для привлечения покупателей. Поэтому всякого рода торги за приобретение прав на собственность или за преимущества при предоставлении услуг являются важным видом действий на финансовом рынке. Ниже дается описание простейших моделей торгов.

## 8.1. Аукционные торги: два лица и два объекта. Общее описание

На таких торгах для приобретения объекта, выставленного на аукцион, покупатели повышают цену не меньше, чем на некоторую величину $\Delta > 0$, установленную правилами аукциона, и тот, кто предложит самую большую цену, приобретает выставленный объект.

Обычно выставляется несколько объектов подряд, и участник аукциона должен рассчитать свои силы, чтобы... что? Какова его цель? То есть еще до начала аукциона участвующий должен определить цель своего участия в аукционе.

Для определенности, а также для упрощения предположим, что участников аукциона всего двое. Тогда цели участника могут быть, например, такими: 1) максимизировать свой доход; 2) минимизировать доход своего конкурента (чтобы ослабить его); 3) максимизировать разность своего дохода и дохода конкурента.

Из этих трех целей (а их может быть и больше) самой естественной представляется первая: максимизировать свой доход. Начнем, однако, с анализа действий, преследующих третью цель — максимизировать разность своего дохода и дохода конкурента.

## 8.2. Максимизация разности доходов

Для определенности предположим, что на аукцион последовательно выставлены два объекта известной стоимости $V_1$ и $V_2$. Два участника $A$ и $B$ борются за право собственности на эти объекты.

Пусть $A$ имеет $S_A$ д.е. для участия в аукционе, а $B$ — $S_B$. Пусть силы $A$ и $B$ примерно равны, математически это выражается так: $1/2 < (S_A / S_B) < 2$.

Выясним, как должен вести себя участник $A$ для достижения третьей цели.

Приступим к анализу аукционного процесса. Предположим, что $B$ предложил текущую аукционную цену $X$. Примет ли ее $A$? Если $A$ не захочет платить такую цену, то $B$ купит 1-й объект, в итоге он получит прибыль $R_B = V_1 - X$. Но израсходовав столь много на покупку 1-го объекта, он уступит 2-й объект участнику $A$, если тот предложит хотя бы немного больше, чем вообще сможет предложить $B$. Итак, у $B$ осталось $S_B - X$, значит, если $A$ предложит $S_B - X + \Delta$, то $A$ приобретает 2-й объект и его доход оказывается равным $R_A = V_2 - (S_B - X + \Delta)$ и разность доходов

$$R_A - R_B = (V_2 - S_B - X + \Delta) - (V_1 - X). \qquad \mathbf{(8.1)}$$

Если же $A$ не захотел уступить 1-й объект участнику $B$ и увеличил цену, предложив $X + \Delta$, и $B$ уступил, то $B$ выиграет торги за 2-й объект, предложив за него $\left(S_A - (X + \Delta) + \Delta\right) = (S_A - X)$. В этом случае разность доходов

$$R_A - R_B = (V_1 - X + \Delta) - [V_2 - (S_A - X)]. \qquad \mathbf{(8.2)}$$

Таким образом, $A$ должен уступить 1-й объект участнику $B$, если и только если разность доходов в этом случае больше, чем когда $A$ идет на повышение и предлагает за 1-й объект $X + \Delta$. Итак, $A$ должен предложить за 1-й объект $X + \Delta$, если $(V_2 - S_B + X - \Delta) - (V1 - X) \leq (V_1 - X - \Delta) - [V_2 - (S_A - X)]$, или $4X \leq 2V_1 - 2V_2 + S_A + S_B$, или $X \leq (2V_1 - 2V_2 + S_A + S_B)/4$.

Следовательно, $A$ будет повышать цену до значения $X$, определяемого равенством

$$X = \left(2V_1 - 2V_2 + S_A + S_B\right)/4\ . \qquad \mathbf{(8.3)}$$

Дальше повышать цену ему нецелесообразно (не забудьте, что он преследует третью цель). Для нахождения разности между доходами значение $X$ можно подставить в формулу (8.2) или (8.3) — результат будет одинаков. Искомая разность между доходами $A$ и $B$:

$$R_A - R_B = \left(S_A - S_B\right)/2 - \Delta\ . \qquad \mathbf{(8.4)}$$

Доход $A$ при этом равен $R_A = (V + V)/2 - (S + S)/4 - \Delta$.

**Пример 1.** Пусть $A$ решил потратить на аукционе не более 1200 руб., а $B$ — не более 1000. На взгляд $A$, 1-й предмет, выставленный на аукцион, стоит 700 руб., 2-й — 800 руб. Тогда $A$ будет повышать цену до значения $X = \big(2(700 - 800) + 1200 + 1000\big)/4 = 500$ руб. Пусть 1-й предмет куплен за эту цену. Если его купил $B$, то его доход $R_B = 200$ руб., а доход $A$ есть $R_A = 800 - 500 = 300$ руб., так что разность доходов равна 100 руб. Можно убедиться, что такова же разность доходов и в случае, когда 1-й предмет был бы куплен $A$.

## 8.3. Максимизация собственного дохода

Пусть целью $A$ является максимизация собственного дохода. Теперь $A$ будет повышать цену и предлагать $X + \Delta$ за 1-й объект, если это позволит увеличить его аукционный доход. Значит, он поступит так, если

$$V_1 - (X + \Delta) \geq V_2 - (S_B - X + \Delta) \qquad \textbf{(8.5)}$$

или когда $X \leq (V_1 - V_2 + S_B)/2$ . **(8.6)**

Если $B$ также преследует цель максимизации своего аукционного дохода, то он предложит цену $X + \Delta$, когда

$$X \leq (V_1 - V_2 + S_A)/2 .$$

Поэтому торги окончатся, как только аукционная цена превысит наименьшую из величин $(V_1 - V_2 + S_B)/2$ и $(V_1 - V_2 + S_A)/2$ .

Если $S_B > S_A$, то 1-й предмет будет куплен $A$. Для нахождения его дохода надо подставить $X = (V_1 - V_2 + S_A)/2$ в левую часть неравенства (8.5). Получим

$$R_A = (V_1 + V_2 - S_A)/2 - \Delta. \qquad \textbf{(8.7)}$$

Если же $S_A > S_B$, то 1-й предмет будет куплен $B$. Для нахождения дохода $A$ надо подставить $X = (V_1 - V_2 + S_B)/2$ в правую часть неравенства (8.5). Получим

$$R_A = (V_1 + V_2 - S_B)/2 - \Delta.$$

Можно доказать, что доход, полученный $A$ при максимизации его собственного дохода, всегда больше получаемого им дохода в случае, когда он стремится к максимизации разности своего дохода и дохода своего конкурента $B$.

**Пример 2.** Продолжим рассмотрение примера 1. Поскольку $S_A = 1200 > S_B = 1000$, то $A$ должен купить 1-й объект и его доход по формуле (8.7) равен $R_A = (700 + 800 - 1000)/2 = 250$ руб. Основываясь на формуле (8.5), видим, что $A$ не должен предлагать за 1-й объект больше, чем $(700 - 800 + 1000)/2 = 450$ руб.

## 8.4. Одновременные торги

Отличие этих торгов от ранее рассмотренных — в том, что аукцион проводится одновременно по обоим объектам. Для упрощения предположим, что оба участника $A$ и $B$ располагают одной суммой $S$ и $S < V_1 + V_2$. В случае равенства предложений победитель определяется жребием. При этом по-прежнему в основном интересуемся стратегией для $A$.

Оптимальные цены $A_1$, $A_2$, которые должен предлагать $A$ за объекты 1-й и 2-й соответственно, определяются из очевидного принципа: они должны обеспечивать равные доходы. Если обозначить этот доход $d$, то $V_1 - A_1 = d = V_2 - A_2$. Кто бы ни выиграл один из объектов, за оба объекта будет заплачено $S$. Это позволяет найти $d$: $2d = V_1 + V_2 - S$, значит, $d = (V_1 + V_2 - S)/2$. Отсюда находим цены: $A_1 = V_1 - d = (V_1 - V_2 + S)/2$. Если какая-либо цена получается отрицательной, то она полагается равной 0 и вся сумма $S$ предлагается за другой объект.

Эта стратегия также оптимальна и для $B$. Если оба участника будут придерживаться этой оптимальной стратегии, то они будут назначать одинаковые цены и все будет определяться жребием — по 1-му объекту, 2-й объект достанется другому участнику. Ожидаемый доход каждого из участников равен при этом $d$.

Пусть, однако, $B$ уклонится от оптимальной стратегии и предложит за 1-й объект $V_1 - d + e$. Тогда 1-й объект достанется ему, но за 2-й объект он сможет предложить только $V_2 - d - e$, поэтому этот объект достанется $A$, который предложит $V_2 - d$. Но в этом случае доходы участников окажутся разными: $R_B = d - e$, $R_A = d > R_B$. Таким образом, используя оптимальную стратегию, каждый из участников может всегда получить доход не менее $d$ и всегда может воспрепятствовать другому участнику получить доход более $d$.

**Пример 3.** Пусть 1-й и 2-й аукционные объекты стóят соответственно 600 и 900 руб., каждый из участников располагает суммой 1000 руб. Тогда $d = 250$, значит, за 1-й объект не нужно предлагать более 350 руб., а за 2-й — не более 650 руб. Доход каждого из участников при оптимальной его стратегии не меньше 250 руб.

## 8.5. Торги, в которых число лиц велико и может быть неизвестным

Такие торги уже очень близки к реальным. Обычно они проходят по следующей схеме (применяемой и в России).

Правительственное учреждение приглашает все заинтересованные компании принять участие в приватизационном торге. Компании присылают закрытые конверты, в которых назначают цену приватизационному объекту. Компания, назначившая высшую цену, объявляется победителем. Существуют научные рекомендации и по таким торгам, однако осуществление этих рекомендаций на практике требует большой работы по сбору сведений о конкурентах. Если не удается получить сведений об их поведении на предстоящих торгах, то нужно анализировать их поведение на аналогичных торгах в прошлом.

Самым интересным в моделировании таких торгов является возможность для участников образовывать коалиции, проще говоря, сговариваться и действовать сообща всей коалицией. Ниже в нескольких задачах рассматривается образование коалиций.

## ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

**1.** Рассмотрим аукцион по продаже двух объектов, которые, на взгляд участника *А*, стоят 2000 и 3000 руб., в то время как в распоряжении *А* — сумма 2500, в распоряжении *Б* — 3000 руб.

Найдите стратегию *А* по максимизации разности доходов и максимизации собственного дохода.

**2.** По данным предыдущей задачи найдите аукционную стратегию *А* по минимизации дохода конкурента.

**3.** Представим себе миллиардера, имеющего трех племянников и завещающего свое наследство тому, кого они назовут большинством голосов. По-видимому, двое из племянников договорятся голосовать за одного из них, чтобы наследник перечислил половину (или сколько?) наследства своему партнеру. Но третий, оставшийся в стороне, возможно, не позволит столь просто это сделать и попытается переманить одного из сообщников, обещая ему бóльшую часть наследства. Получается противоречивая ситуация и разделить наследство согласно завещанию оказывается весьма сложно.

**4.** (Известная задача). Два человека хотят разделить торт. Как им это сделать, чтобы никто из них не обиделся?

**5.** (Известная задача, продолжение предыдущей). Три разбойника делят награбленную добычу. Как им это сделать, чтобы каждый верил, что разделили поровну?

**6.** На аукцион выставлены два предмета. Два участника располагают одинаковыми денежными суммами. Каждый из них подает закрытый конверт, в котором написано, какую сумму предлагает данный участник за каждый из этих предметов. Кто предложит за данный предмет больше, тот и становится его владельцем. Каковы стратегии участников?

Рассмотрите частный случай, когда оба предмета совершенно одинаковы. Должны ли устроители аукциона предусмотреть возможность сговора участников? Может быть, достаточно обязать участников аукциона указать в конверте такие суммы, чтобы вместе они были не менее некоторой заданной?

# Часть II

# ОСНОВЫ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ



## ДОПОЛНЕНИЕ К ЧАСТИ II

Определенность — это когда известно все необходимое для расчетов. Неопределенность (отрицание определенности) приводит к неоднозначным результатам, что и есть риск. В условиях неопределенности у финансовых операций появляется еще одна характеристика — рискованность. Риску посвящены гл. 10—12, да и в остальных это понятие — одно из центральных. В гл. 9 изложены некоторые изменения в финансовых расчетах, проводимых в условиях неполной определенности. В гл. 13 рассмотрена биномиальная модель ценообразования на финансовом рынке и некоторые ее модификации. В гл. 14 описаны стратегии ставок в игре «рулетка» для максимально быстрого роста капитала. Гл. 15 посвящена опционам — производным финансовым инструментам, играющим сегодня наиболее важную роль на финансовом рынке. В гл. 16, 17 изложена теория оптимального портфеля, в гл. 18 коротко описаны некоторые модели финансовых рынков. Дополнение к ч. II содержит изложение теории полезности и отношения ЛПР (инвесторов) к риску.

Стремление уменьшить риск и увеличить возможный доход — вот главное в действиях в условиях неопределенности. Не все случайное можно «измерить» вероятностью. Неопределенность — более широкое понятие. Неопределенность того, какой цифрой вверх ляжет игральный кубик, отличается от неопределенности того, каково будет состояние российской экономики через 15 лет. Кратко говоря, уникальные единичные случайные явления связаны с неопределенностью, массовые случайные явления обязательно допускают некоторые закономерности вероятностного характера.

В этой части предполагается знание читателем вузовского курса теории вероятностей и математической статистики.

# Глава 9

# ИЗМЕНЕНИЕ РАСЧЕТНЫХ СХЕМ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Суть того, что изложено в этой главе, поясним на примере. Рассмотрим три схемы выплаты дивидендов:

1) в середине каждого квартала выплачиваются дивиденды в размере 100 д.е.;

2) в середине каждого квартала выплачиваются дивиденды случайного размера, в среднем 100 д.е.;

3) в каждом квартале выплачиваются в некоторый случайный день дивиденды в размере 100 д.е.

Какая из этих трех схем предпочтительнее для владельца акций? Анализу аналогичных вопросов посвящена данная глава.

## 9.1. Плавающая ставка процента

Аналогично предыдущему примеру рассмотрим три варианта начисления процентов за пользование деньгами на единичном промежутке:

1) в конце промежутка по ставке $i$ начисляются проценты;

2) в конце промежутка начисляются проценты по случайной ставке, в среднем ставка равна $i$ процентов;

3) проценты начисляются дважды: половина — незадолго до конца промежутка и вторая половина — на таком же временном расстоянии после окончания промежутка.

Рассматриваемая задача довольно абстрактна, однако из нее последуют прозрачные и несложные выводы.

Первый вариант начисления процентов — это вариант детерминированного финансового анализа, т.е. анализа в условиях определенности. Поэтому проанализируем второй и третий варианты. Достаточно ограничиться рассмотрением единичной денежной суммы.

Второй вариант. Пусть $f(x)$ — плотность распределения случайной ставки $X$, тогда начисляемые процентные деньги есть случайная величина $I(X) = X$ с плотностью $f(x)$ и математическим ожиданием $M[I] = M[X] = i$. Другими словами, детерминированный эквивалент случайной ставки есть $i$.

Третий вариант. Пусть первая порция процентных денег по ставке $i/2$ начисляется в момент $1 - \varepsilon$, а вторая, также по ставке $i/2$, в момент $1 + \varepsilon$, где $\varepsilon$ — небольшое положительное число. Тогда в первый раз начисленные процентные деньги $I_1 = i/2$, во второй раз также $I_2 = i/2$. Приведем эти суммы к моменту 1, для чего $I_1$ умножим на $(1 + i)^{\varepsilon}$, а $I_2$ умножим на $(1 + i)^{-\varepsilon}$. Получаем эквивалент суммарных процентных денег в момент $1 - (i/2)(1 + i)^{\varepsilon} + (i/2)(1 + i)^{-\varepsilon}$. Так как $(1 + i)^{\varepsilon}+(1 + i)^{-\varepsilon} > 2$, то получившиеся процентные деньги больше, чем $i$, т.е. детерминированный вариант таким образом начисляемой процентной ставки больше, чем $i$.

Как можно представить второй и третий варианты? Пусть банк имеет много филиалов, относительно самостоятельных в части выплаты процентов (в какой-то мере таковым является Сбербанк). Второй вариант получается, когда все они начисляют проценты в конце промежутка, но сами проценты случайные, хотя в среднем по всему банку процентная ставка равна $i$ (усреднение по географическому признаку). Такой вариант назовем случайными процентами. Третий вариант получается, когда в каждом филиале начисляются одни и те же проценты, но день начисления случаен. Такая случайность есть начисление процентов (неслучайных) в случайный момент времени (здесь усреднение по времени начисления процентов).

Итак, детерминированный эквивалент случайных процентов (второй вариант) равен математическому ожиданию случайной величины начисляемых процентов. Детерминированный эквивалент случайного (во времени) начисления процентов (третий вариант) больше, чем математическое ожидание (по моменту времени) начисляемых процентов.

Аналогичные выводы следуют по поводу различных вариантов дисконтирования к современному моменту будущих сумм. Рассмотрим три варианта выплаты займа (в долг взята единичная сумма), взятого на единичный промежуток времени по ставке $i$ процентов:

1) в конце промежутка выплачивается сумма $(1 + i)$ — детерминированный вариант;

2) в конце промежутка выплачивается случайная сумма, в среднем равная $(1 + i)$;

3) сумма выплачивается дважды: половина — незадолго до конца промежутка и вторая половина — на таком же временном расстоянии после окончания промежутка.

Анализ, подобный приведенному выше, показывает, что во втором варианте средняя величина дисконтированных к современному моменту выплат равна 1, т.е. второй вариант эквивалентен детерминированному варианту; в третьем варианте средняя величина оказывается больше, чем 1. Итак, для кредитора предпочтительнее третий вариант. Это же верно и для случая трех вариантов выплаты дивидендов в начале главы — для владельца акций предпочтительнее третий вариант.

Все это хорошо известно финансистам и может быть выражено словами: *если возможно, свой долг плати позже, а долги себе собирай пораньше.*

## 9.2. Случайные потоки платежей

Такие потоки могут быть весьма разнообразны:

1) полностью детерминированный поток — моменты платежей и величины платежей полностью определены;

2) частично детерминированный поток — полностью определены моменты платежей либо величины платежей и т.д.

Ограничимся рассмотрением двух примеров.

**Пример 1.** По договору в течение 5 лет в конце каждого квартала издательство переводит на счет автора случайную сумму денег (зависит от числа проданных книг). Предположим, что эта сумма равномерно распределена от 1000 до 1400 руб. Как найти современную величину этой ренты?

Решение. Так как момент платежей точно определен, то для расчетов можно заменить поток реальных платежей потоком их математических ожиданий и использовать соответствующую формулу из детерминированного анализа. Так как переводимая сумма равномерно распределена, то ее математическое ожидание есть середина промежутка распределения, т.е. 1200 руб. Для простоты пусть квартальная ставка сложных процентов $i = 3\%$, тогда искомая современная величина равна

$$1200 \cdot a(20,3) = 1200 \cdot 14{,}877 = 17\ 852 \text{ руб.}$$

**Пример 2.** Предположим, что единичные платежи следуют друг за другом через случайные промежутки времени, распределенные по показательному закону с параметром $\lambda > 0$ (пуассоновский поток платежей). Найдем современную величину такого случайного потока платежей (точнее, математическое ожидание этой величины).

Дисконтируем к современному моменту первый платеж. Для этого надо подсчитать интеграл:

$$\int_0^{\infty}(1+i)^{-t}\cdot\lambda e^{-\lambda t}dt = \int_0^{\infty}\lambda e^{-t(\lambda+\ln(1+i))}dt = \lim_{A\to\infty}\int_0^{A}\lambda e^{-t(\lambda+\ln(1+i))}dt =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{\lambda}{\lambda+\ln(1+i)}e^{-t(\lambda+\ln(1+i))}\Big|_0^A\right) = \lambda/[(\lambda+\ln(1+i))].$$

Вспомним, что параметр $\lambda$ в показательном законе есть обратная величина к математическому ожиданию, и получаем, что $\lambda = 1/T$, где $T$ —

среднее время между платежами, и окончательно, что математическое ожидание современной величины первого платежа равно $1/[1 + T \cdot \ln(1 + i)]$.

Поскольку промежуток времени между платежами распределен одинаково, то математическое ожидание современной величины второго платежа равно $1/[1 + T \cdot \ln(1 + i)]^2$, третьего — $1/[1 + T \cdot \ln(1 + i)]^3$, и т.д. Сумма всех этих величин и даст искомую величину. Поскольку $1/[1 + T \cdot \ln(1 + i)] < 1$, то члены суммы есть члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии и, значит, вся сумма равна $1/[T \cdot \ln(1 + i)]$.

В частности, при $T = 1$ получаем $1/\ln(1 + i)$. Заметим, что если бы поток был неслучайным и платежи следовали бы друг за другом через единичный промежуток времени (тогда частота платежей была бы той же самой), то современная величина такого потока была бы $1/i$. Так как $\ln(1 + i) < i$, то современная величина случайной ренты больше, чем регулярной.

Потоки платежей со случайным временем платежа часто встречаются на практике. Например, таков поток платежей оплаты за квартиру — ведь редко кто платит за квартиру в строго определенный день. Если бы в примере 1 издательство переводило автору деньги за каждую проданную тысячу экземпляров книги, то получился бы поток неслучайных платежей в случайные моменты времени.

Еще одним важным примером случайного потока (неслучайных) платежей является поток выплат страховых сумм на случай смерти родственникам умершего. Анализом подобных потоков платежей занимается так называемая актуарная математика.

## 9.3. Рисковые инвестиционные процессы

В замечании в конце гл. 4 указывалось, что для оценки характеристик инвестиционных проектов важнейшее значение имеет ставка дисконтирования будущих доходов к современному моменту. Если будущие платежи рискованны, т.е. не являются жестко определенными, то инвесторы уменьшают сегодняшнюю оценку будущих доходов. Тем самым для оценки сегодняшнего значения будущих доходов приходится применять увеличенную ставку дисконтирования. Самое простое — расклассифицировать проекты на низкорисковые, среднерисковые и высокорисковые и приписать каждой группе некоторый добавок к обычному коэффициенту дисконтирования. Например, для низкорисковых к ставке прибавляется 2%, к среднерисковым — 4%, к высокорисковым — 6%. Совершенно ясно, что «добавок» зависит от величины обычного коэффициента дисконтирования. Но сам этот коэффициент зависит от темпов инфляции, от доверия к правительству и других факторов. В некоторых моделях финансового рынка этот вопрос решается по-своему (см. § 17.3).

Во всяком случае отсюда следует вывод: чтобы увеличить привлекательность выдвигаемых проектов, фирма должна заботиться об уменьшении этого рискованного «добавка». Для этого она должна привлекать к себе доверие потенциальных инвесторов. Привлечение доверия включает своевременную выплату дивидендов, соблюдение прав акционеров и др. Особенно это важно для фирмы, намеревающейся долго работать. Такой фирме просто необходимо быть честной, ей это выгодно.

## 9.4. Подсчет доходности вероятностных операций в условиях неопределенности

В детерминированном анализе доходность $d$ финансовой операции определяется из уравнения $K = H(1+d)$ или $d = (K - H)/H = K/H - 1$, где $H$, $K$ — денежные оценки соответственно начала операции (затраты, инвестиции) и конца операции (доход, наращенный капитал). Вообще говоря, эти величины также могут быть неопределенны. Однако начальная оценка чаще все же точно известна. Неопределенность конечной оценки может быть двоякой: неполностью известна ее величина, но момент окончания операции известен точно; или же известна полностью ее величина, но окончиться операция может в случайный момент. Подсчет доходности операции в процентах годовых в этих двух случаях производится поразному. В первом случае вместо конечной оценки используется ее математическое ожидание. Для иллюстрации подсчета доходности во втором случае рассмотрим следующий пример.

**Пример 3.** Начальный капитал «челнока» равен \$1000. Опытные люди сказали ему, что в результате поездки за товаром и его последующей реализации капитал может с равной вероятностью возрасти в два раза, не измениться или уменьшиться в два раза (с вычетом сопутствующих издержек). Найти среднюю ожидаемую доходность планируемой операции.

Р е ш е н и е. Математическое ожидание конечной оценки капитала равно, очевидно, $(2000+1000+500)/3 = 3500/3$, так что средняя ожидаемая доходность будет $(3500/3 - 1000)/1000 = 500/3000 = 17\%$.

**Пример 4.** Запас золота в месторождении известен, как и начальные инвестиции в его разработку. Фактически полная отдача месторождения тоже фиксирована, следовательно, доходность (в процентах годовых) будет зависеть от длительности выработки месторождения: чем дольше будет вырабатываться месторождение, тем меньше доходность.

В случае, когда начальная оценка операции не может быть точно определена, доходность операции может быть рассчитана как математическое ожидание доходностей вариантов операции с учетом их вероятностей[1].

**Пример 5.** Базовый вариант операции, вероятность которого оценивается в 0,9, предусматривает затраты $10 000, а прибыль — $3000, следовательно, его доходность равна 0,3; с вероятностью 0,1 возможен и другой вариант, при котором затраты равны $20 000, а прибыль равна $10 000. Какова средняя ожидаемая доходность операции?

Решение. Эта доходность равна $0{,}9 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}5 = 0{,}32$.

## 9.5. Общее понятие детерминированного эквивалента финансового показателя

Пусть $f$ — какой-нибудь финансовый показатель (ставка процента, доходность, срок окупаемости и т.п.), являющийся случайной величиной. Предполагается, что финансовая операция, показателем которой $f$ является, может быть повторена большое число раз (теоретически, хотя бы мысленно, неограниченное число раз). Тогда детерминированный эквивалент финансового показателя $f$ есть такое значение его в детерминированном финансовом анализе, которое дает в среднем тот же результат, что и он сам.

Часто детерминированным эквивалентом является математическое ожидание $f$.

**Замечание.** Реально ситуация с плавающими процентными ставками или случайными потоками платежей еще более сложна, чем описано выше. Большинство инвесторов не согласны заменять что-то случайное его математическим ожиданием и требуют большего. Ведь всякая неопределенность связана с риском и поэтому инвесторы для рисковых операций требуют большей доходности, для дисконтирования к современному моменту будущих доходов по инвестиционному проекту они требуют применять большую ставку (тем самым уменьшая значение будущих доходов) и т.д. Осуществить на практике учет этих требований инвесторов довольно сложно (см. дополнение к ч. II).

[1] Есть и другой способ расчета доходности операции.

## ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

(недостающие данные — по усмотрению читателя)

**1.** Дайте определение детерминированного эквивалента плавающей процентной ставки в простейшем случае начисления процентов за пользование деньгами на единичном промежутке.

**2.** Найдите детерминированный вариант процентной ставки, если ее начисление происходит дважды: первая половина в момент 0,9; вторая половина — в момент 1,1.

**3.** Найти детерминированный вариант процентной ставки, если с вероятностью 1/3 ее начисление происходит в момент 0,9, и с вероятностью 2/3 — в момент 1,1.

Решение. Пусть величина ставки равна $i$, а сумма единичная, тогда математическое ожидание наращенной суммы в момент 1 равно

$$(1/3)\cdot i\cdot(1+i)^{0,1}+(2/3)\cdot i\cdot(1+i)^{-0,1}=i\cdot[(1/3)(1+0,1\cdot i+\ldots)+$$
$$+(2/3)(1-0,1\cdot i+\ldots)]=i\cdot[1-i/30+\ldots],$$

т.е. детерминированный вариант чуть меньше $i$.

**4.** Найдите детерминированный вариант процентной ставки, если момент ее начисления равномерно распределен на временном отрезке [0,9; 1,1].

**5.** Проанализируйте инвестиционный проект (−1000, 600, 600), процентная ставка 8%. Окупаются ли инвестиции? Эксперты признали проект среднерисковым и увеличили процент дисконтирования будущих доходов до 13%. Окупятся ли инвестиции в этом случае?

**6.** В случайный момент, равномерно распределенный на отрезке [0,1], приходит платеж 1. Найдите математическое ожидание его современной величины.

**7.** Найдите математическое ожидание современной величины случайной ренты: платежи 1000 д.е. осуществляются раз в год: с равной вероятностью либо 1 октября, либо 1 декабря.

**8.** Найдите математическое ожидание современной величины случайной ренты, в которой момент годового платежа равномерно распределен в текущем году.

**9.** Сегодня днем цена акции равна 100 руб. За сутки цена может вырасти на 10% с вероятностью 1/3, с такой же вероятностью уменьшится в 1,1 раза и с такой же вероятностью 1/3 остаться равной 100 руб. Найдите распределение цены акции завтра и послезавтра.

**10.** Осуществляется одновременно множество инвестиционных проектов («золотая лихорадка на Клондайке»). Инвестиции в каждый проект равны $5000, а будущий годовой доход случаен по проектам — равномерно распределен от 500 до 3000 долл. Какая часть проектов окупится в течение 10 лет? (Процентная ставка 8% в год.)

**11.** В начале года страховая компания кладет в банк 1 д.е. под $i$% годовых. В любой момент года возможен страховой случай, когда компании придется выплатить 1 д.е. страхового возмещения. Найдите математическое ожидание суммы на счете компании к концу года.

**12.** Проанализируйте инвестиционный проект, начальные инвестиции в который равны 1 в момент 0, а поток будущих доходов есть пуассоновский поток единичных платежей с плотностью 1 платеж в единицу времени. Ставка процента равна $i$.

**13.** Предположим, что вкладчик срочного годового вклада может в любой момент востребовать свой вклад (в России это можно, во многих других странах нельзя). При этом банк выплачивает за действительное время вклада проценты из расчета 10% годовых вместо 30% по срочному вкладу. Каков в среднем потерянный процент вкладчика?

Р е ш е н и е. Предполагаем, что момент отзыва вклада равномерно распределен в течение года. Если вклад отзывается в момент $x$, то выплаченные проценты равны $(1 + 0{,}1)^x$, а должны были быть равны $(1 + 0{,}3)^x$. Эту разницу проинтегрируем, имея в виду единичную плотность распределения момента отзыва вклада. Получим

$$\int_0^1 \left(1{,}3^x - 1{,}1^x\right)dx = 0{,}3 \cdot \ln 1{,}3 - 0{,}1 \cdot \ln 1{,}1 \approx 0{,}093, \text{ т.е. около } 9{,}3\%.$$

**14.** Игрок в казино бросает игральный кубик и передвигает свою фишку на выпавшее число секторов и получает (или отдает) выигрыш, написанный в том секторе, куда он попал. В начальный момент его фишка стоит в секторе «Вход» (рис. 9.1), и игра заканчивается, когда фишка попадает в этот же сектор. Каков средний доход хозяина казино за одну игру? Сколько бросков в среднем продолжается одна игра?

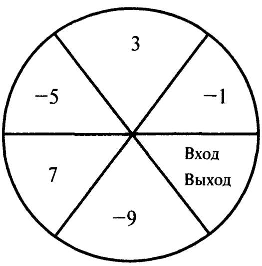



**Рис. 9.1**

У к а з а н и е. Обозначим через $Z(t)$ дальнейший средний проигрыш игрока, когда его фишка стоит уже на секторе $t$. Тогда легко видеть, что $Z(t) = Z(t')$ для любых секторов $t$, $t'$. Это позволит найти решение задачи. Вообще же рассматриваемый случайный процесс может быть отнесен к случайным процессам с независимыми приращениями, играющими важную роль в стохастической финансовой математике.

Глава 10

# КЛАССИЧЕСКАЯ СХЕМА ОЦЕНКИ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Неопределенность привносит риск. Риск — одно из важнейших понятий, сопутствующих любой активной деятельности человека. Вместе с тем это одно из самых неясных, многозначных и запутанных понятий. Однако несмотря на его неясность, многозначность и запутанность, во многих ситуациях суть риска очень хорошо понимается и воспринимается. Эти же качества риска являются серьезной преградой для его количественной оценки, которая во многих случаях необходима и для развития теории, и на практике.

Рассмотрим классическую схему принятия решений в условиях неопределенности. В этой схеме риск появляется весьма естественно и его количественная оценка здесь весьма проста.

## 10.1. Определение и сущность риска

Напомним, что *финансовой* называется операция, начальное и конечное состояния которой имеют денежную оценку и цель проведения которой заключается в максимизации дохода — разности между конечной и начальной оценками (или какого-нибудь другого подобного показателя).

Почти всегда финансовые операции проводятся в условиях неопределенности и потому их результат невозможно предсказать заранее. Поэтому финансовые операции *рискованны:* при их проведении возможны как прибыль, так и убыток (или не очень большая прибыль по сравнению с той, на что надеялись проводившие эту операцию).

Проводящий операцию (принимающий решение) называется ЛПР — *лицо, принимающее решение.* Естественно, ЛПР заинтересовано в успехе операции и является за нее ответственным (иногда только перед самим собой). Во многих случаях ЛПР — это инвестор, вкладывающий деньги в банк, в какую-то финансовую операцию, покупающий ценные бумаги и т.п.

***Определение.*** Операция называется *рискованной,* если она может иметь несколько исходов, не равноценных для ЛПР.

**Пример 1.** Рассмотрим три операции с одним и тем же множеством двух исходов — альтернатив $A$, $B$, которые характеризуют доходы, получаемые ЛПР.

Все три операции рискованные. Понятно, что рискованными являются первая и вторая операции, так как в результате каждой операции возможны убытки. Но почему должна быть признана рискованной третья операция, ведь она сулит только положительные доходы ЛПР? А вот почему. Рассматривая возможные исходы третьей операции, видим, что можем получить доход в размере 20 единиц, поэтому возможность получения дохода в 15 единиц рассматривается как неудача, как риск недобрать 5 единиц дохода.

| | $A$ | $B$ |
|---|---|---|
| $O_1$: | −5 | 25 |
| $O_2$: | −10 | 50 |
| $O_3$: | 15 | 20 |

Итак, понятие риска обязательно предполагает *рискующего* — того, к кому этот риск относится, кто озабочен результатом операции. Сам риск возникает, только если операция может окончиться исходами, не равноценными для него, несмотря на все возможные его усилия по управлению этой операцией. (О системе предпочтений индивида см. § 7.1.) В последующем изложении всюду будем считать, что исходы операций отличаются доходами, получаемыми ЛПР, и этого достаточно для их различения и оценки риска операции. (И только в дополнении к ч. II в § 19.5 системе предпочтений индивида, его функции полезности и отношению его к риску будет уделено много внимания.)

Итак, в условиях неопределенности операция приобретает еще одну характеристику — риск.

Как оценить операцию с точки зрения ее доходности и риска? На этот вопрос не так просто ответить, главным образом из-за многогранности понятия риска.

Существует несколько разных способов такой оценки. Рассмотрим один из таких подходов.

## 10.2. Матрицы последствий и рисков

Допустим, рассматривается вопрос о проведении финансовой операции. Неясно, чем она может закончиться. В связи с этим проводится анализ нескольких возможных решений и их последствий. Так приходим к следующей общей схеме принятия решений (в том числе финансовых) в условиях неопределенности.

Предположим, что ЛПР рассматривает несколько возможных решений $i = 1, \ldots, m$. Ситуация неопределенна, понятно лишь, что наличествует какой-то из вариантов $j = 1, \ldots, n$. Если будет принято $i$-е решение, а ситуация есть $j$-я, то фирма, возглавляемая ЛПР, получит доход $q_{ij}$. Матрица $Q = (q_{ij})$ называется *матрицей последствий* (возможных решений). Какое же решение нужно принять ЛПР? В этой неопределенной ситуации могут быть высказаны лишь некоторые рекомендации предварительного характера. Они не обязательно будут приняты ЛПР. Многое будет зависеть, например, от его склонности к риску. Но как оценить риск в данной схеме?

Допустим, мы хотим оценить риск, который несет $i$-е решение. Нам неизвестна реальная ситуация. Но если бы мы ее знали, то выбрали бы наилучшее решение, т.е. приносящее наибольший доход. Если ситуация $j$-я, то было бы принято решение, дающее доход $q_j = \max\limits_i q_{ij}$. Значит, принимая $i$-е решение, мы рискуем получить не $q_j$, а только $q_{ij}$, т.е. принятие $i$-го решения несет риск недобрать $r_{ij} = q_j - q_{ij}$. Матрица $R = (r_{ij})$ называется *матрицей рисков.*

**Пример 2.** Пусть матрица последствий есть

$$Q = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Составим матрицу рисков. Имеем $q_1 = \max\limits_i q_{i1} = 8$, $q_2 = 5$, $q_3 = 8$, $q_4 = 12$.

Следовательно, матрица рисков есть

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

## 10.3. Анализ связанной группы решений в условиях полной неопределенности

Ситуация полной неопределенности характеризуется отсутствием какой бы то ни было дополнительной информации (например, о вероятностях тех или иных вариантов реальной ситуации). Какие же существуют правила-рекомендации по принятию решений в этой ситуации?

***Правило Вальда*** (*правило крайнего пессимизма*). Рассматривая $i$-е решение, будем полагать, что на самом деле ситуация складывается самая плохая, т.е. приносящая самый малый доход: $a_i = \min\limits_j q_{ij}$. Но теперь выберем решение $i_0$ с наибольшим $a_{i_0}$. Итак, правило Вальда рекомендует принять решение $i_0$ такое, что $a_{i_0} = \max\limits_i a_i = \max\limits_i \left( \min\limits_j q_{ij} \right)$. Так, в примере 2 имеем $a_1 = 2$, $a_2 = 2$,

$a_3 = 3$, $a_4 = 1$. Теперь из чисел 2, 2, 3, 1 находим максимальное — 3. Значит, правило Вальда рекомендует принять 3-е решение.

***Правило Сэвиджа*** (*правило минимального риска*). При применении этого правила анализируется матрица рисков $R = (r_{ij})$. Рассматривая $i$-е решение, будем полагать, что на самом деле складывается ситуация максимального риска $b_i = \max_j r_{ij}$. Но теперь выберем решение $i_0$ с наименьшим $b_{i_0}$. Итак, правило Сэвиджа рекомендует принять решение $i_0$ такое, что $b_{i_0} = \min_i b_i = \min_i \left( \max_j r_{ij} \right)$. Так, в примере 2 имеем $b_1 = 8$, $b_2 = 6$, $b_3 = 5$, $b_4 = 7$. Теперь из чисел 8, 6, 5, 7 находим минимальное, т.е. 5. Значит, правило Сэвиджа рекомендует принять 3-е решение.

***Правило Гурвица*** (*взвешивающее пессимистический и оптимистический подходы к ситуации*). Принимается решение $i$, на котором достигается максимум $\left\{ \lambda \min_j q_{ij} + (1 - \lambda) \max_j q_{ij} \right\}$, где $0 \le \lambda \le 1$. Значение $\lambda$ выбирается из субъективных соображений. Если $\lambda$ приближается к 1, то правило Гурвица приближается к правилу Вальда, при приближении $\lambda$ к 0 правило Гурвица приближается к правилу «розового оптимизма» (догадайтесь сами, что это значит). В примере 2 при $\lambda = 1/2$ правило Гурвица рекомендует второе решение.

## 10.4. Анализ связанной группы решений в условиях частичной неопределенности

Предположим, что в рассматриваемой схеме известны вероятности $p_j$ того, что реальная ситуация развивается по варианту $j$. Именно такое положение называется частичной неопределенностью. Как здесь принимать решение? Можно выбрать одно из следующих правил.

***Правило максимизации среднего ожидаемого дохода.*** Доход, получаемый фирмой при реализации $i$-го решения, является случайной величиной $Q_i$ с рядом распределения $\left| \frac{q_{i_1}}{p_1} \right| \ldots \left| \frac{q_{i_n}}{p_n} \right|$. Математическое ожидание $M[Q_i]$ и есть средний ожидаемый доход, обозначаемый также $\overline{Q_i}$. Итак, правило рекомендует принять решение, приносящее максимальный средний ожидаемый доход.

Предположим, что в схеме примера 2 вероятности есть 1/2, 1/6, 1/6, 1/6. Тогда $\overline{Q_1} = 29/6$, $\overline{Q_2} = 25/6$, $\overline{Q_3} = 7$, $\overline{Q_4} = 17/6$. Максимальный средний ожидаемый доход равен 7 и соответствует третьему решению.

***Правило минимизации среднего ожидаемого риска.*** Риск фирмы при реализации $i$-го решения является случайной величиной $R_i$ с рядом распределения $\left|\frac{r_{i_1}}{p_1}\right| \dots \left|\frac{r_{i_n}}{p_n}\right|$. Математическое ожидание $M[R_i]$ и есть средний ожидаемый риск, обозначаемый также $\overline{R_i}$. Правило рекомендует принять решение, влекущее минимальный средний ожидаемый риск.

Вычислим средние ожидаемые риски при указанных выше вероятностях. Получаем $\overline{R_1} = 20/6$, $\overline{R_2} = 4$, $\overline{R_3} = 7/6$, $\overline{R_4} = 32/6$. Минимальный средний ожидаемый риск равен 7/6 и соответствует третьему решению.

**З а м е ч а н и е.** Отличие частичной (вероятностной) неопределенности от полной неопределенности очень существенно. Конечно, принятые по правилам Вальда, Сэвиджа, Гурвица решения никто не считает окончательными, самыми лучшими. Это только лишь первый шаг, некоторые предварительные соображения. Далее пытаются узнать что-то о вариантах реальной ситуации, в первую очередь о возможности того или иного варианта, о его вероятности. Но когда мы начинаем оценивать вероятность варианта, это уже предполагает повторяемость рассматриваемой схемы принятия решений: это уже было в прошлом, или это будет в будущем, или это повторяется где-то в пространстве, например, в филиалах фирмы.

## 10.5. Оптимальность по Парето

Итак, при попытке выбрать наилучшее решение мы столкнулись в предыдущем параграфе с тем, что каждое решение имеет две характеристики — средний ожидаемый доход и средний ожидаемый риск. Теперь имеем оптимизационную двухкритериальную задачу по выбору наилучшего решения.

Существует несколько способов постановки таких оптимизационных задач.

Рассмотрим такую задачу в общем виде. Пусть $A$ — некоторое множество операций, каждая операция $a$ имеет две числовые характеристики $E(a)$, $r(a)$ (эффективность и риск, например) и разные операции обязательно различаются хотя бы одной характеристикой. При выборе наилучшей операции желательно, чтобы $E$ было больше, а $r$ меньше.

Будем говорить, что операция $a$ доминирует операцию $b$, и обозначать $a \succ b$, если $E(a) \ge E(b)$ и $r(a) \le r(b)$ и хотя бы одно из этих неравенств строгое. При этом операция $a$ называется *доминирующей*, а операция $b$ — *доминируемой*. Ясно, что ни при каком разумном выборе наилучшей операции доминируемая операция не может быть признана таковой. Следовательно, наилучшую операцию надо искать среди недоминируемых операций. Множество этих операций называется *множеством Парето* или *множеством оптимальности по Парето*.

Имеет место чрезвычайно важное утверждение

***Утверждение.*** На множестве Парето каждая из характеристик $E$, $r$ — (однозначная) функция другой. Другими словами, если операция принадлежит множеству Парето, то по одной ее характеристике можно однозначно определить другую.

Доказательство. Пусть $a$, $b$ — две операции из множества Парето, тогда $r(a)$ и $r(b)$ — числа. Предположим, что $r(a) \le r(b)$, тогда $E(a)$ не может быть равно $E(b)$, так как обе точки $a$, $b$ принадлежат множеству Парето. Доказано, что по характеристике $r$ можно определить характеристику $E$. Так же просто доказывается, что по характеристике $E$ можно определить характеристику $r$.

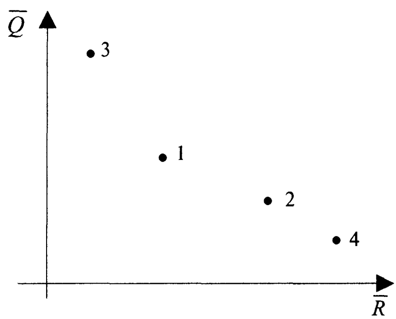



**Рис. 10.1**

Продолжим анализ приведенного в § 10.2примера. Рассмотрим графическую иллюстрацию. Каждую операцию (решение) $(\overline{R}, \overline{Q})$ отметим как точку на плоскости — доход откладываем вверх по вертикали, а риск — вправо по горизонтали (рис. 10.1). Получили четыре точки и продолжаем анализ примера 2. Чем выше точка $(\overline{R}, \overline{Q})$, тем более доходная операция, чем точка правее, тем более она рисковая. Значит, нужно выбирать точку выше и левее. В нашем случае множество Парето состоит только из одной третьей операции.

Для нахождения лучшей операции иногда применяют подходящую взвешивающую формулу, которая для операции $Q$ с характеристиками $(\overline{R}, \overline{Q})$ дает одно число, по которому и определяют лучшую операцию. Например, пусть взвешивающая формула есть $f(Q) = 2\overline{Q} - \overline{R}$. Тогда для операций (решений) примера 2 имеем: $f(Q_1) = 2 \cdot 29/6 - 20/6 = 6{,}33$; $f(Q_2) = 4{,}33$; $f(Q_3) = 12{,}83$; $f(Q_4) = 0{,}33$. Видно, что третья операция — лучшая, а четвертая — худшая.

Взвешивающая формула выражает отношение ЛПР к доходу и риску. Если ЛПР применяет только что рассмотренную формулу, то оно согласно на увеличение риска операции на две единицы, если доход операции увеличивается при этом не менее чем на одну единицу. Разумеется, такая формула может передать отношение ЛПР к доходу и риску лишь приблизительно.

## 10.6. Правило Лапласа равновозможности

Такое правило применяют иногда в условиях полной неопределенности: все неизвестные вероятности $p_j$ считают равными. После этого можно выбрать какое-нибудь из двух приведенных выше правил — рекомендаций принятия решений, т.е. правило максимизации среднего ожидаемого дохода или правило минимизации среднего ожидаемого риска.

### ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

**1.** С помощью компьютера проанализирована матрица доходов, построена по ней матрица рисков и отмечены операции, оптимальные по критериям Вальда, Сэвиджа и Гурвица (при $\lambda = 1/2$) в условиях полной неопределенности. Проверьте компьютерные расчеты.

Матрица доходов

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | 4 | 6 | 12 | 6 | |
| | 2 | 2 | 6 | 8 | 14 | 8 | |
| Вальд → | 0 | 0 | 1 | 2 | 8 | 4 | ← Гурвиц |
| | 2 | 2 | 2 | 4 | 10 | 6 | |

Матрица рисков

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Сэвидж → | 6 | 2 | 5 | 6 | 6 |
| | 4 | 0 | 3 | 4 | 4 |

**2.** С помощью компьютера проанализирована матрица доходов, построена по ней матрица рисков и отмечены операции, оптимальные по критериям максимальной эффективности и минимального риска в условиях частичной неопределенности. Проверьте компьютерные расчеты.

| Матрица доходов | | | | Эффективность и риск | | | Матрица рисков | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 6 | 18 | 4,8 ← max | | 0,8 | 0 | 2 | 2 | 0 |
| 0 | 4 | 6 | 12 | 3,2 | | 2,4 | 2 | 2 | 2 | 6 |
| 2 | 6 | 8 | 14 | 5,2 | min → | 0,4 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| 0 | 1 | 2 | 8 | 1,4 | | 4,2 | 2 | 5 | 6 | 10 |
| 0,5 | 0,2 | 0,2 | 0,1 | Вероятности состояний | | | 0,5 | 0,2 | 0,2 | 0,1 |

**3.** Рассмотрим рискованную операцию $Q$ с исходами $q_1, \ldots, q_n$. Построим для нее вектор $R$ с компонентами $r_1, \ldots, r_n$, где $r_j = \max\{q_i : i = 1, \ldots, n\} - q_j$, и назовем этот вектор вектором рисков. Если операция вероятностная, т.е. у исходов есть вероятности, то можно определить средний риск операции и т.д.

**4.** Для матрицы из примера 2 § 10.2 примените правило Лапласа равновозможности и найдите решения, наилучшие по среднему ожидаемому доходу и по среднему ожидаемому риску.

**5.** Элемент матрицы называется седловой точкой в ней, если он минимален в своей строке и максимален в своем столбце. Докажите, что при наличии в матрице доходов седловой точки критерий Вальда рекомендует решение-строку, в которой находится седловая точка.

**6.** Рассмотрим схему принятия решений или связанную группу операций с матрицей доходов $Q$. Говорят, что 1-е решение (операция) доминирует по доходам $k$-е решение (операцию), если $q_{ij} \geq q_{kj}$ для любого $j = 1, \ldots, n$. Доминирование решений по риску определяется аналогично, но с заменой неравенства на противоположное. Докажите, что доминирование по доходам эквивалентно доминированию по риску. Выведите отсюда, что доминируемое в рассматриваемом смысле решение не может быть рекомендовано ни одним из рассмотренных выше правил-критериев. Поэтому такое решение не должно рассматриваться вообще и соответствующая строка подлежит удалению из матрицы доходов.

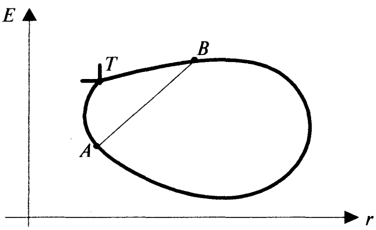


**Рис. 10.2**

**7.** Представим, что множество операций $A$ из § 10.5 изображено на рис. 10.2. Найдите множество Парето. Докажите, что операция $T$ оптимальна по Парето, если построенный в ней «уголок» — второй квадрант с вершиной в ней, пересекается с множеством $A$ только по этой точке-операции.

**8.** Обратимся к рис. 10.2. Соединим две точки — операции $A$, $B$ — отрезком. Каждую точку $F$ на этом отрезке можно задать числом $0 \leq f \leq 1$, так что $F = fA + (1 - f)B$. Характеристики операции $F$ получаются так же, как линейные комбинации соответствующих характеристик операций $A$, $B$. Присоединим все операции отрезка к изображенным на рис. 10.2.

Докажите, что если обе операции $A$, $B$ — доминируемые по Парето, то и все операции отрезка $A$, $B$ тоже доминируемы. Может ли так быть, что сами операции $A$, $B$ недоминируемые, а все внутренние точки отрезка $A$, $B$ доминируемые?

# Глава 11

# ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ

Финансовая операция называется *вероятностной*, если существует вероятность каждого ее исхода. Прибыль такой операции — разность конечной и начальной денежных ее оценок — является случайной величиной. Для такой операции удается ввести количественную оценку риска, согласующуюся с нашей интуицией.

## 11.1. Количественная оценка риска

В предыдущей главе дано определение рискованной операции как имеющей по крайней мере два исхода, не равноценных в системе предпочтений ЛПР. В контексте данной главы вместо ЛПР можно употреблять также термин «инвестор» или какой-либо подобный, отражающий заинтересованность в ее успехе проводящего операцию (возможно, пассивно).

При исследовании риска операции встречаемся с фундаментальным утверждением.

***Утверждение.*** Количественная оценка риска операции возможна только при вероятностной характеристике множества исходов операции.

**Пример 1.** Рассмотрим две вероятностные операции:

$$Q_1: \left|\begin{array}{c|c} -5 & 25 \\ \hline 0{,}01 & 0{,}99 \end{array}\right|, \qquad Q_2: \left|\begin{array}{c|c} 15 & 25 \\ \hline 0{,}5 & 0{,}5 \end{array}\right|.$$

Несомненно, риск первой операции меньше риска второй операции. Что же касается того, какую операцию выберет ЛПР, это зависит от его склонности к риску (подобные вопросы подробно рассмотрены в дополнении к ч. II).

## 11.2. Риск отдельной операции

Так как мы хотим количественно оценить рискованность операции, а это невозможно сделать без вероятностной характеристики операции, то ее исходам припишем вероятности и оценим каждый исход доходом, который ЛПР получает при этом исходе. В итоге получим случайную величину $Q$, которую естественно назвать случайным доходом операции, или просто *случайным доходом*. Пока ограничимся дискретной случайной величиной (д.с.в.):

$$Q:\ \begin{array}{|c|}\hline q_1\\ \hline p_1\\ \end{array}\ \ldots\ \begin{array}{|c|}\hline q_j\\ \hline p_j\\ \end{array}\ \ldots\ \begin{array}{|c|}\hline q_n\\ \hline p_n\\ \end{array},$$

где $q_j$ — доход, а $p_j$ — вероятность этого дохода.

Операцию и представляющую ее случайную величину — случайный доход — будем отождествлять при необходимости, выбирая из этих двух терминов более удобный в конкретной ситуации.

Теперь можно применить аппарат теории вероятностей и найти следующие характеристики операции.

*Средний ожидаемый доход* — математическое ожидание с.в. $Q$, т.е. $M[Q] = q_1p_1 + \ldots + q_np_n$, обозначается еще $m_Q$, $\overline{Q}$, употребляется также название *эффективность операции.*

*Дисперсия операции* — дисперсия с.в. $Q$, т.е. $D[Q] = M[(Q - m_Q)^2]$, обозначается также $D_Q$.

*Среднее квадратическое отклонение* с.в. $Q$, т.е. $\sigma[Q] = \sqrt{D[E]}$, обозначается также $\sigma_Q$.

Отметим, что средний ожидаемый доход, или эффективность операции, как и среднее квадратическое отклонение, измеряется в тех же единицах, что и доход.

Напомним фундаментальный смысл математического ожидания с.в.

Среднее арифметическое значений, принятых с.в. в длинной серии опытов, примерно равно ее математическому ожиданию.

Все более признанной становится оценка рискованности всей операции посредством среднего квадратического отклонения случайной величины дохода $Q$, т.е. посредством $\sigma_Q$. В данной книге это основная количественная оценка риска.

Итак, *риском операции* называется число $\sigma_Q$ — среднее квадратическое отклонение случайного дохода операции $Q$. Обозначается также $r_Q$.

**Пример 2.** Найдем риски первой и второй операций из примера 1:

$$Q_1:\ \begin{array}{|c|c|}\hline -5 & 25\\ \hline 0{,}01 & 0{,}99\\ \end{array},\qquad Q_2:\ \begin{array}{|c|c|}\hline 15 & 25\\ \hline 0{,}5 & 0{,}5\\ \end{array}.$$

Сначала вычисляем математическое ожидание с.в. $Q_1$: $m_1 = -5 \cdot 0{,}01 + 25 \cdot 0{,}99 = 24{,}7$. Теперь вычислим дисперсию по формуле $D_1 = M[Q_1^2] - m_1^2$. Имеем $M[Q_1^2] = 25 \cdot 0{,}01 + 625 \cdot 0{,}99 = 619$. Значит, $D_1 = 619 - (24{,}7)^2 = 8{,}91$ и окончательно $r_1 = 2{,}98$.

Аналогичные вычисления для второй операции дают $m_2 = 20$; $r_2 = 5$. Как и «полагала интуиция», первая операция менее рискованная.

Предлагаемая количественная оценка риска вполне согласуется с интуитивным пониманием риска как степени разбросанности исходов операции — ведь дисперсия и среднее квадратическое отклонение (квадратный корень из дисперсии) и суть меры такой разбросанности.

**Пример 3.** ЛПР рассматривает две возможные игры. В одной бросают монету, и ЛПР получает 10 денежных единиц, если монета упадет «орлом» вверх, и платит 10 единиц, если она упадет «решкой» вверх. Выплаты в этой игре образуют ряд распределения слева:

Монета

| "Решка" | "Орел" |
|---|---|
| −10 | 10 |
| 0,5 | 0,5 |

Игральный кубик

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Выплаты | −20 | −10 | 0 | 0 | 10 | 20 |
| | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 |

В другой игре бросают игральный кубик и выплаты ЛПР образуют ряд распределения справа.

Средний ожидаемый выигрыш в обоих случаях равен 0. Однако интуитивно разбросанность платежей во второй игре больше. Вычисления дисперсии и риска подтверждают это:

$D_1 = 100 \cdot 0{,}5 + 100 \cdot 0{,}5 = 100$; $D_2 = (400 + 100)2/6 = 500/3 \approx 167$; $r_1 = \sqrt{D_1} = 10$; $r_2 = \sqrt{D_2} \approx 13$.

Средний ожидаемый доход операции $Q$, т.е. ее эффективность $m_Q$ и ее риск $r_Q$ связаны известным неравенством Чебышева:

$$P\left(\left|Q - m_Q\right| > \varepsilon\right) \le r_Q^2/\varepsilon^2, \text{ или } P\left(\left|Q - m_Q\right| \le \varepsilon\right) > 1 - r_Q^2/\varepsilon^2 .$$

Однако известно, что это неравенство весьма грубое и на практике почти не применяется.

Если доход операции есть случайная величина, распределенная по нормальному закону, то риск довольно точно указывает некоторые вероятности, связанные с эффективностью:

$P(|Q - m_Q| < 3r_Q) \approx 0{,}997$; $P(|Q - m_Q| < 2r_Q) \approx 0{,}95$. Иногда эти оценки весьма полезны.

Следующие утверждения о риске являются следствиями соответствующих утверждений о дисперсии и среднем квадратическом отклонении из теории вероятностей.

***Утверждения. А.*** При увеличении масштаба операции в $k$ раз, т.е. при увеличении всех значений случайного дохода в $k$ раз, эффективность операции увеличивается в $k$ раз, а риск — в $|k|$ раз.

***В.*** При изменении всех доходов на одно и то же постоянное число эффективность операции также изменяется на это число, а риск не изменяется.

*C*. Пусть операции $Q_1$ и $Q_2$ некоррелированы, тогда дисперсия их суммы равна сумме дисперсий, поэтому риск суммарной операции равен $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

*D*. В общем случае, т.е. для двух произвольных операций $Q_1$ и $Q_2$, риск суммарной операции равен $\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2k_{12}}$, где $k_{12}$ — коэффициент корреляции случайных доходов операций; заметим, что $|k_{12}| \le 1$; из этой формулы вытекает, что риск суммарной операции может быть как больше величины $r_1 + r_2$ (если $k_{12} > 0$ — при так называемой положительной корреляции доходов операций), так и меньше этой величины (если $k_{12} < 0$ — при отрицательной корреляции доходов операций).

Напомним, что случайные величины $X$, $Y$ называются некоррелированными, если их корреляционный момент $K_{XY} = M[(X - m_X) \times (Y - m_Y)]$ равен 0; корреляционный момент $K_{XY}$ и коэффициент корреляции $k_{XY}$ связаны формулой $K_{XY} = \sigma_X \cdot \sigma_Y \cdot k_{XY}$; независимые случайные величины некоррелированы.

**Пример 4.** Пусть операции $Q_1$ и $Q_2$ некоррелированы, найдем риск операции $Q = 0{,}5 \cdot Q_1 + 0{,}5 \cdot Q_2$ (например, денег не хватит на проведение обеих операций в полном объеме):

$Q_1$:

| | |
|---|---|
| –5 | 25 |
| 0,01 | 0,99 |

$Q_2$:

| | |
|---|---|
| 15 | 25 |
| 0,5 | 0,5 |

Риски обеих операций уже найдены в примере 2: $r_1 = 2{,}98$; $r_2 = 5$. Значит, $r_Q = \sqrt{2{,}98^2 + 5^2}/2 \approx \left(\sqrt{8{,}91 + 25}\right)/2 \approx 5{,}82/2 = 2{,}91$.

***Другие измерители риска.*** По нашему мнению, среднее квадратическое отклонение является наилучшим измерителем риска отдельной операции. В гл. 10 рассмотрены классическая схема принятия решений в условиях неопределенности и оценки риска в этой схеме. Полезно познакомиться и с другими измерителями риска. В большинстве случаев эти измерители — просто вероятности нежелательных событий.

## 11.3. Некоторые общие измерители риска

Пусть известна функция распределения $F$ случайного дохода операции $Q$. Зная ее, можно придать смысл следующим вопросам и ответить на них.

**1.** Какова вероятность того, что доход операции будет менее заданного $s$? Можно спросить по-другому: каков риск получения дохода менее заданного? *О т в е т*: $F(s)$.

**2.** Какова вероятность того, что операция окажется неуспешной, т.е. ее доход будет меньше среднего ожидаемого дохода $m$? *О т в е т:* $F(m)$.

**3.** Какова вероятность убытков и каков их средний ожидаемый размер? Или каков риск убытков и их оценка?

$$\textit{Ответ: } F(0), \quad \int_{-\infty}^{0} x\,dF(x)/F(0).$$

**4.** Каково отношение средних ожидаемых убытков к среднему ожидаемому доходу? Чем меньше это отношение, тем меньше риск разорения, если ЛПР вложил в операцию все свои средства. *О т в е т:* $\int_{-\infty}^{0} x\,dF(x)/\int_{-\infty}^{\infty} x\,dF(x)$.

При анализе операций ЛПР желает иметь доход побольше, а риск поменьше. Такие оптимизационные задачи называют двухкритериальными. При их анализе два критерия — доход и риск — часто «свертывают» в один критерий. Так возникает, например, понятие *относительного риска операции*. Дело в том, что одно и то же значение среднего квадратического отклонения $\sigma_Q$, которое измеряет риск операции, воспринимается по-разному в зависимости от величины среднего ожидаемого дохода $m_Q$, поэтому величину $\sigma_Q / m_Q$ иногда называют относительным риском операции. Такую меру риска можно трактовать как свертку двухкритериальной задачи:

$$m_Q \to \max,$$
$$\sigma_Q \to \min,$$

т.е. максимизировать средний ожидаемый доход при одновременной минимизации риска.

## 11.4. Риск разорения

Так называется вероятность столь больших потерь, которые ЛПР не может компенсировать и которые, следовательно, ведут к его разорению.

**Пример 5.** Пусть случайный доход операции $Q$ имеет следующий ряд распределения, и потери 35 или более ведут к разорению ЛПР. Следовательно, риск разорения в результате данной операции равен 0,8:

| $Q$: | –50 | –40 | –35 | 100 |
|---|---|---|---|---|
| | 0,1 | 0,2 | 0,5 | 0,2 |

Серьезность риска разорения оценивается именно величиной соответствующей вероятности. Если эта вероятность очень мала, то ею часто пренебрегают (в конце концов вероятность разорения отлична от нуля почти в любой сделке — из-за весьма маловероятных катастрофических событий на финансовых рынках, в масштабах государства, из-за природных явлений и т.п.).

**Пример 6.** ЛПР имело долг в \$40 000. Но оно имело рублевый вклад в 300 000 руб., который при курсе 6 руб. за доллар превышал долг. Вероятность трехкратной девальвации рубля оценивалась всего в 0,01, но она произошла. ЛПР было разорено, так как выплатить примерно \$25 000 не могло.

## 11.5. Показатели риска в виде отношений

Если средства ЛПР равны $C$, то при превышении убытков $Y$ над С возникает реальный риск разорения. Для предотвращения этого отношение $K_1 = Y/C$, называемое *коэффициентом риска*, ограничивают специальным числом $\xi_1$. Операции, для которых этот коэффициент превышает $\xi_1$, считают особо рискованными. Часто учитывают также вероятность $p$ убытков $Y$ и тогда рассматривают коэффициент риска $K_2 = pY/C$, который ограничивают другим числом $\xi_2$ (ясно, что $\xi_2 \le \xi_1$). В финансовом менеджменте чаще применяют обратные отношения $C/Y$ и $C/(pY)$, которые называют коэффициентами покрытия рисков и которые ограничиваются снизу числами $1/\xi_1$ и $1/\xi_2$.

Именно такой смысл имеет так называемый коэффициент Кука, равный отношению:

$$\frac{\text{Собственные средства}}{\text{Активы, взвешенные с учетом риска}}.$$

Коэффициент Кука используется банками и другими финансовыми компаниями. В роли весов при «взвешивании» выступают вероятности — риски потери соответствующего актива.

## 11.6. Кредитный риск

Так называется вероятность невозврата в срок взятого кредита.

**Пример 7.** Статистика запросов кредитов в банке такова: 10% — государственные органы, 30% — другие банки и остальные — физические лица. Вероятности невозврата взятого кредита соответственно таковы: 0,01; 0,05 и 0,2. Найти вероятность невозврата очередного запроса на кредит.

Начальнику кредитного отдела доложили, что получено сообщение о невозврате кредита, но в факсовом сообщении имя клиента было плохо пропечатано. Какова вероятность, что данный кредит не возвращает какой-то банк?

Р е ш е н и е. Вероятность невозврата найдем по формуле полной вероятности. Пусть $H_1$ — запрос, поступивший от госоргана, $H_2$ — от банка, $H_3$ — от физического лица и $A$ — невозврат рассматриваемого кредита. Тогда

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}A + P(H_2)P_{H_2}A + P(H_3)P_{H_3}A = 0{,}1 \cdot 0{,}01 + {} + 0{,}3 \cdot 0{,}05 + 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}136.$$

Вторую вероятность найдем по формуле Байеса. Имеем

$$P_A H_2 = P(H_2)P_{H_2}A / P(A) = 0{,}015/0{,}136 = 15/136 \approx 1/9.$$

Как в реальности определяют все приведенные в этом примере данные, например, условные вероятности $P_{H_i}A$?

По частоте невозврата кредита для соответствующей группы клиентов. Пусть физические лица взяли всего 1000 кредитов и 200 не вернули. Значит, соответствующая вероятность $P_{H_3}A$ оценивается как 0,2. Соответствующие данные — 1000 и 200 берутся из информационной базы данных банка.

## 11.7. Депозитный риск

Так называется вероятность досрочного отзыва депозита. Очевидно, что депозитный риск нарушает нормальную работу банка, заставляя его перегруппировать свои активы по-другому, что всегда чревато потерями. Массовый отток депозитов вполне может привести к банкротству банка.

В общем случае депозитный риск зависит от длины анализируемого периода, динамики изъятия вкладов и многих других обстоятельств.

**Пример 8.** Пусть в банке много мелких клиентов (как в Сбербанке), и вероятность отзыва депозита для каждого из них примерно одна и та же. Тогда по интегральной формуле Муавра—Лапласа $P(k_1 \le k \le k_2) \approx$ $\approx \Phi\left[(k_2 - np)/\sqrt{npq}\right] - \Phi\left[(k_1 - np)/\sqrt{npq}\right]$, где $n$ — число клиентов; $p$ — вероятность отзыва; $q = 1 - p$; $k_1$, $k_2$ — границы числа отзываемых вкладов; $\Phi$ — функция Лапласа. Таким образом, при большом числе независимых примерно одинаковых клиентов отток депозитов можно более или менее уверенно прогнозировать.

### ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

**1.** Рассмотрите следующие высказывания и определите, что порождает риск — незнание или случайность:

а) вы не имеете данных об изменениях курса доллар—рубль в течение прошлого года;

б) вы не имеете данных о состоянии активов вашего банка;

в) вы не знаете, как скажется на деловых операциях последнее постановление правительства о...;

г) окажутся ли выгодными ваши фьючерсные контракты (это зависит от погоды в предстоящие 3 месяца);

д) вы решаете вопрос о выдаче кредита клиенту, о котором нет детальных сведений, но понятна его принадлежность к определенной социальной группе;

е) известна статистика возврата кредитов предприятиями группы, к которой принадлежит данное предприятие. Что здесь порождает риск невозврата?

ж) при страховании автомобиля какие факторы машины и владельца имеют важность и к чему они относятся: к незнанию или к случайности?

и) выдан кредит под залог жилого дома дебитора. Каковы возможные последствия и чем они обусловлены?

л) как стаж работы кассира связан с незнанием и случайными ошибками?

**2.** Для четырех операций с помощью компьютера вычислены эффективности (математические ожидания) и риски (квадратные корни из дисперсий):

| *Операции* | *Математическое ожидание* | *Риск* |
|---|---|---|
| (0,1/3)(1,1/3)(2,1/6)(8,1/6) | 2,00 | 2,77 |
| (2,1/6)(3,1/3)(4,1/3)(10,1/6) | 4,33 | 2,62 |
| (0,1/5)(4,1/5)(6,1/5)(10,2/5) | 6,00 | 3,79 |
| (2,1/5)(6,1/5)(8,1/5)(12,2/5) | 8,00 | 3,79 |

Проверьте компьютерные расчеты. Нанесите операции как точки на плоскость риск—эффективность и убедитесь, что первая и третья операции — доминируемые, а вторая и четвертая — недоминируемые, значит, оптимальные по Парето.

**3.** Пусть операция имеет два различных денежных исхода $a$ и $b$ с вероятностями соответственно $p$ и $1 - p$. Изобразите графики зависимостей средней ожидаемой эффективности и риска операции от $p$.

**4.** Операции $Q$ с эффективностью $e$ и риском $r$ и $Q'$ с $e'$ и $r'$, соответственно, некоррелированы. Рассмотрим операцию $Q_f = fQ + (1 - f)Q'$. Найдите ее риск как функцию $f$. При каком $f$ риск минимален? Изобразите примерный график зависимости риска операции $Q_f$ от $f$.

**5.** Пусть результатом операции является денежный доход, равномерно распределенный от $a$ до $b$, $a < b$. Каков риск этой операции?

*Ответ*: $|b-a|/\sqrt{12}$, так как дисперсия с.в., равномерно распределенной на отрезке $[a, b]$, равна $(b - a)^2/12$.

**6.** Доход операции $Q$ случаен и имеет следующий ряд распределения:

$$Q:\begin{array}{|c|c|}0 & A(1-p) \\ \hline 1-p & p\end{array}.$$

Найдите эффективность и риск операции как функцию $p$. При каком $p$ эффективность максимальна и чему равно это максимальное значение? Найдите ответы на эти вопросы и для риска операции.

**7.** Пусть даны две некоррелированные операции $O_1$ и $O_2$, эффективности и риски которых (в смысле среднего квадратического отклонения) равны соответственно $(r_1, e_1)$ и $(r_2, e_2)$. Изобразите на плоскости эти операции и (примерно) множество $L$ всевозможных их линейных комбинаций (учтите утверждение из § 11.2). Есть ли в $L$ операция, риск которой меньше минимального из рисков $r_1$, $r_2$? Найдите множество Парето для операций из $L$ (опять учтите указанное утверждение). Рассмотрите также частные случаи: а) когда $r_1 = r_2$ и б) когда $e_1 = e_2$.

*Решение* этой задачи поучительно. Найдем решение только для случая, когда $r_1, < r_2$ и $e_1 < e_2$ (рис. 11.1). Рассмотрим операцию $O_f = fO_1 + (1 - f)O_2$. Тогда ее эффективность равна $e_f = fe_1 + (1-f)e_2$ и ее риск $r_f = \sqrt{f^2r_1^2 + (1-f)^2r_2^2}$. Найдем производную от $e_f$ по $r_f$ по правилу дифференцирования параметрически зависящих аргумента и функции. Имеем $de_f/dr_f =$ $= (de_f/df) : (dr_f/df) = (e_1 - e_2) : 2\left[r_1^2 f - r_2^2(1-f)\right] \Big/ \sqrt{r_1^2 f^2 + r_2^2(1-f)^2} =$

$$= \left[\sqrt{r_1^2 f^2 + r_2^2(1-f)^2}\right](e_1 - e_2) \Big/ 2\left[r_1^2 f - r_2^2(1-f)\right].$$ Видно, что искомая производная:

отрицательна при $1 \geq f > r_2^2/(r_1^2 + r_2^2)$,

не существует при $f = r_2^2/(r_1^2 + r_2^2)$,

положительна при $0 \leq f < r_2^2/(r_1^2 + r_2^2)$.

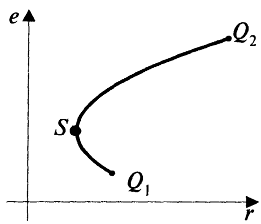


Рис. 11.1

Это значит, что искомое множество $L$ операций примерно изображается кривой, как показано на рис. 11.1. В частности, множество Парето будет частью $SQ_2$ этой кривой. Интересно также, что операция $Q_1$ перестает быть оптимальной по Парето.

**8.** Случайные доходы двух взаимосвязанных операций имеют таблицу распределения:

| | −1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,1 | 0,2 | 0,1 |
| 2 | 0,1 | 0 | 0,5 |

Найти эффективность и риск суммарной операции.

Р е ш е н и е. Ряд распределения суммарного дохода $Q$ таков:

| $Q$: | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0,1 | 0,2 | 0,2 | 0 | 0,5 |

Следовательно, эффективность суммарной операции равна 1,6, а риск суммарной операции равен 1,5.

**9.** Предположим, что ЛПР доступна безрисковая операция $T$ с эффективностью $e_0$. Пусть $O$ — какая-нибудь другая операция с эффективностью $e > e_0$ и риском $r$. Рассмотрите операцию $S_f = fO + (1 - f)T$ и выразите ее риск через ее эффективность.

Р е ш е н и е. Эффективность этой операции равна $e_f = fe + (1 - f)e_0$, а риск равен $r_f = |f|r$ (см. утверждение из § 11.2). Имеем $f = (e_f - e_0)/(e - e_0)$ и, подставляя это выражение, получаем $r_f = r|e_f - e_0|/(e - e_0) = (r/(e - e_0))|\, e_f - e_0|$.

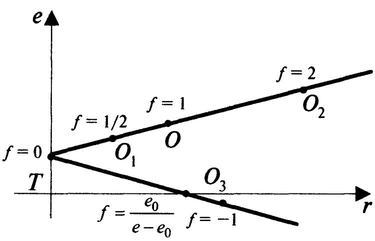



**Рис. 11.2**

Продолжим исследование. На рис. 11.2 показаны эффективность и риск операций $fO + (1 - f)T$ при различных $f$. Обратите внимание, что в принципе возможно достижение любой эффективности и любого риска. Далее конкретизируем на примере. Пусть операция $O$ — это вкладывание некоторой суммы $S$ на 3 месяца на выращивание ранней клубники, эффективность — 20% и некоторый риск (см. точку $O$ на рис. 11.2), операция $T$ — сдача этой суммы в Сбербанк на те же 3 месяца под 5% (см. точку $T$). Тогда операция $O_1$ представляет собой два действия:

операция $O_1$ – сумма $S/2$ вкладывается в выращивание клубники,
сумма $S/2$ вкладывается в банк;

операция $O_2$ – сумма $2S$ вкладывается в выращивание клубники, для чего в банке берется ссуда в размере $S$ под 5%;

операция $O_3$ – у кого-то еще, кто выращивает клубнику, берется взаймы на 3 месяца сумма $S$ с обещанием возвратить и ее, и «клубничный» доход с нее через 3 месяца и вся сумма $2S$ вкладывается в банк под 5%.

Наверное, последняя операция нецелесообразна. Да, повторять систематически ее, наверное, нецелесообразно. Ну, а если ЛПР имеет конфиденциальную информацию о предстоящих сильных заморозках?

**10.** Рассмотрим задачу **3** из гл. 10. В ней для операции $Q$ с исходами $q_i, \ldots, q_n$ был определен вектор $R$ с компонентами $r_1, \ldots, r_n$, где $r_j = \max\{q_i: i = 1,.., n\} - q_j$. Назван этот вектор вектором рисков. Пусть операция $Q$ вероятностная, т.е. у исходов есть вероятности. Докажите, что риск операции $Q$ (в смысле среднего квадратического отклонения — СКО) равен СКО вектора рисков $R$.

# Глава 12

# ОБЩИЕ МЕТОДЫ УМЕНЬШЕНИЯ РИСКОВ

Как правило, риск стараются уменьшить. Для этого существует немало методов. Большая группа таких методов связана с подбором других операций, таких, чтобы суммарная операция имела меньший риск.

## 12.1. Диверсификация

Напомним, что дисперсия суммы некоррелированных случайных величин равна сумме дисперсий. Из этого вытекает следующее утверждение, лежащее в основе метода диверсификации.

***Утверждение 1.*** Пусть $O_1, \ldots, O_n$ — некоррелированные операции с эффективностями $e_1, \ldots, e_n$ и рисками $r_1, \ldots, r_n$. Тогда операция «среднее арифметическое» $O = (O_1 + \ldots + O_n)/n$ имеет эффективность $e = (e_1 + \ldots + e_n)/n$ и риск $r = \sqrt{(r_1^2 + \ldots + r_n^2)}\,/n$.

Доказательство этого утверждения — простое упражнение на свойства математического ожидания и дисперсии.

***Следствие 1.*** Пусть операции некоррелированы и $a \le e_i$ и $b \le \le r_i \le c$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Тогда эффективность операции «среднее арифметическое» не меньше $a$ (т.е. наименьшей из эффективностей операций), а риск удовлетворяет неравенству $b/\sqrt{n} \le r \le c/\sqrt{n}$ и, таким образом, при увеличении $n$ уменьшается. Итак, при увеличении числа некоррелированных операций их среднее арифметическое имеет эффективность из промежутка эффективностей этих операций, а риск однозначно уменьшается.

Этот вывод называется ***эффектом диверсификации*** (разнообразия) и представляет собой в сущности единственно разумное правило работы на финансовом и других рынках. Этот же эффект воплощен в народной мудрости — «не клади все яйца в одну корзину». Принцип диверсификации гласит, что нужно проводить разнообразные, не связанные друг с другом операции, тогда эффективность окажется усредненной, а риск однозначно уменьшится.

При применении этого правила нужно быть осторожным. Так, нельзя отказаться от некоррелированности операций.

*Предложение 2.* Предположим, что среди операций есть ведущая, с которой все остальные находятся в положительной корреляционной связи. Тогда риск операции «среднее арифметическое» не уменьшается при увеличении числа суммируемых операций.

Действительно, для простоты примем более сильное предположение, именно, что все операции $O_i$, $i = 1, ..., n$, просто копируют операцию $O_1$ в каких-то масштабах, т.е. $O_i = k_iO_1$ и все коэффициенты пропорциональности $k_i$ положительны. Тогда операция «среднее арифметическое» $O = (O_1 + ... + O_n) / n$ есть просто операция $O_1$ в масштабе $\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right) / n$ и риск этой операции $r = r_1\left(\sum_{i=1}^{n} k_i/n\right)^2$. Поэтому, если операции примерно одинаковы по масштабности, т.е. $k_i \approx 1$, то и $r \approx r_1\left(\sum_{i=1}^{n} k_i/n\right)^2 \approx r_1$. Мы видим, что риск операции «среднее арифметическое» не уменьшается при увеличении числа операций.

**Пример 1.** Предположим, ЛПР имеет возможность составить операцию из четырех некоррелированных операций, эффективности и риски которых даны в таблице:

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $e_i$ | 3 | 5 | 8 | 10 |
| $r_i$ | 2 | 4 | 6 | 8 |

Рассмотрим несколько вариантов составления операций из этих операций с равными весами.

1. Операция составлена только из 1-й и 2-й операций. Тогда $e_{12} = (3 + 5)/2 = 4$; $r_{12} = \sqrt{2^2 + 4^2}/2 \approx 2{,}24$.

2. Операция составлена только из 1-й, 2-й и 3-й операций. Тогда $e_{123} = (3 + 5 + 8)/3 = 5{,}3$; $r_{123} = \sqrt{2^2 + 4^2 + 6^2}/3 \approx 2{,}49$.

3. Операция составлена из всех четырех операций. Тогда $e_{1-4} = (3 + 5 + 8 + 10)/4 = 6{,}5$; $r_{1-4} = \sqrt{2^2 + 4^2 + 6^2 + 12^2}/4 \approx 3{,}54$.

Видно, что при составлении операции из все большего числа операций риск растет весьма незначительно, оставаясь близко к нижней границе рисков составляющих операций, а эффективность каждый раз равна среднему арифметическому составляющих эффективностей.

Принцип диверсификации применяется не только для усреднения операций, проводимых одновременно, но в разных местах (усреднение в пространстве), но и проводимых последовательно во времени, например, при повторении одной операции во времени (усреднение во времени). Например, вполне разумной является стратегия покупки акций какой-нибудь стабильно работающей компании 20-го января каждого года. Неизбежные колебания курса акций этой компании благодаря этой процедуре усредняются и в этом проявляется эффект диверсификации.

Теоретически эффект диверсификации только положителен — эффективность усредняется, а риск уменьшается. Однако усилия по проведению большого числа операций, по отслеживанию их результатов могут, конечно, свести на нет все плюсы от диверсификации.

## 12.2. Хеджирование

В эффекте диверсификации ЛПР составляло новую операцию из нескольких, имеющихся в его распоряжении. При хеджировании (от англ. *hedge* — изгородь) ЛПР подбирает или даже специально конструирует новые операции, чтобы, проводя их совместно с основной, уменьшить риск.

**Пример 2.** По контракту российская фирма через полгода должна получить крупный платеж от украинской компании. Платеж равен 100 000 гривен (примерно 600 тыс. руб.) и будет произведен именно в гривнах. У российской фирмы есть опасения, что за эти полгода курс гривны упадет по отношению к российскому рублю. Фирма хочет подстраховаться от такого падения и заключает форвардный контракт с одним из украинских банков на продажу тому 100 000 гривен по курсу 6 руб. за гривну. Таким образом, что бы ни произошло за это время с курсом рубль—гривна, российская фирма не понесет из-за этого убытков.

В этом и заключается суть хеджирования. При диверсификации наибольшую ценность представляли независимые (или некоррелированные) операции. При хеджировании подбираются операции, жестко связанные с основной, но, так сказать, другого знака, говоря более точно, отрицательно коррелированные с основной операцией.

Действительно, пусть $O_1$ — основная операция, ее риск $r_1$; $O_2$ — некоторая дополнительная операция, ее риск $r_2$; $O$ — операция-сумма, тогда дисперсия этой операции $D = r_1^2 + 2k_{12}r_1r_2 + r_2^2$, где $k$ — коэффициент корреляции эффективностей основной и дополнительной операций. Эта дисперсия может быть меньше дисперсии основной операции, только если этот коэффициент корреляции отрицателен (точнее: должно быть $2k_{12}r_1r_2 + r_2^2 < 0$, т.е. $k_{12} < -r_2/(2r_1)$).

**Пример 3.** Пусть ЛПР решает проводить операцию $O_1$.

$O_1$:

| | |
|---|---|
| −10 | 20 |
| 0,5 | 0,5 |

$S$:

| | |
|---|---|
| 5 | −5 |
| 0,5 | 0,5 |

| | | |
|---|---|---|
| $O_1$: | −10 | 20 |
| $S$: | 5 | −5 |
| $O$ | −5 | 15 |
| | 0,5 | 0,5 |

Ему советуют провести одновременно операцию $S$, жестко связанную с $O$. В сущности обе операции надо изобразить с одним и тем же множеством исходов.

Обозначим суммарную операцию через $O$, эта операция есть сумма операций $O_1$ и $S$. Вычислим характеристики операций: $M[O_1] = 5$, $D[O_1] = 225$, $r_1 = 15$; $M[S] = 0$, $D[S] = 25$; $M[O] = 5$, $D[O] = 100$, $r = 10$. Средняя ожидаемая эффективность операции осталась неизменной, а риск уменьшился из-за сильной отрицательной коррелированности дополнительной операции $S$ по отношению к основной операции.

Конечно, на практике не так легко подобрать дополнительную операцию, отрицательно коррелированную с основной, да еще с нулевой эффективностью. Обычно допускается небольшая отрицательная эффективность дополнительной операции и из-за этого эффективность суммарной операции становится меньше, чем у основной. Насколько допускается уменьшение эффективности на единицу уменьшения риска, зависит от отношения ЛПР к риску (см. дополнение к ч. II).

Универсальным инструментом хеджирования являются опционы (см. гл. 14).

## 12.3. Страхование

Можно рассматривать страхование как один из видов хеджирования. Поясним некоторые термины.

*Страхователь* (или застрахованный) — тот, кто страхуется.

*Страховщик* — тот, кто страхует.

*Страховая сумма* — сумма денежных средств, на которую застраховано имущество, жизнь, здоровье страхователя. Эта сумма выплачивается страховщиком страхователю при наступлении страхового случая. Выплата страховой суммы называется *страховым возмещением.*

*Страховой платеж* выплачивается страхователем страховщику.

Обозначим страховую сумму $w$, страховой платеж $s$, вероятность страхового случая $p$. Предположим, что застрахованное имущество оценивается в $z$. По правилам страхования $w \leq z$.

Таким образом, можно предложить следующую схему:

| *Операции* | $1-p$ | $p$ | *Вероятности* |
|---|---|---|---|
| Страхования нет | $0$ | $-z$ | |
| Операция страхования | $-s$ | $w-s$ | |
| Итоговая операция (страхование есть) | $-s$ | $w-s-z$ | |

Найдем характеристики операции без страхования и итоговой операции. Из теории страхования известно, что при нулевой рентабельности страховщика можно считать, что $s = pw$. Получаем:

| | *Характеристики операций* |
|---|---|
| Страхования нет | $M_1 = -pz,\ D_1 = p(1-p)z^2,\ r_1 = z\sqrt{p(1-p)}$ |
| Операция страхования | $M = -s(1-p) + p(w-s-z) = p(w-z) - s = -pz,$ |
| Итоговая операция | $D = s^2(1-p) + (w-s-z)^2 p - (pz)^2.$ |

Предположим далее, что $w = z$, т.е. страховое возмещение равно оценке застрахованного имущества, тогда $D = 0$.

Таким образом, страхование представляется выгоднейшим мероприятием с точки зрения уменьшения риска, если бы не страховой платеж. Иногда страховой платеж составляет заметную часть страховой суммы и представляет собой солидную сумму.

## 12.4. Качественное управление рисками

Риск — столь сложное понятие, что весьма часто невозможна его количественная оценка. Поэтому широко развиты методы управления риском качественного характера, без количественной оценки. К таким относятся многие банковские риски. Наиболее важные из них — это кредитный риск и риски неликвидности и неплатежеспособности.

1. *Кредитный риск и способы его уменьшения.* При выдаче кредита (или ссуды) всегда есть опасение, что клиент не вернет кредит. Предотвращение невозврата, уменьшение риска невозврата кредитов — это важнейшая задача кредитного отдела банка. Какие же существуют способы уменьшения риска невозврата кредита?

- Отдел должен постоянно систематизировать и обобщать информацию по выданным кредитам и их возвращению. Информация по выданным кредитам должна быть систематизирована по величине выданных кредитов, должна быть построена классификация клиентов, которые взяли кредит (физические лица, госорганы, предприятия, другие банки и т.п.);

- отдел (банк в целом) должен вести так называемую кредитную историю своих клиентов, в том числе и потенциальных (т.е. когда, где, какие кредиты брал и как их возвращал клиент). Пока у нас в стране большинство клиентов не имеет своей кредитной истории. Кроме того, обычно оценивается возможность возврата клиентом кредита с помощью анализа его баланса — если это банк; планов и технического уровня производства, перспектив развития — если это предприятие; и т.п.;
- есть различные способы обеспечения кредита, например, клиент отдает что-то в залог и если не возвращает кредит, то банк становится собственником залога;
- в банке должна быть четкая инструкция по выдаче кредита (кому какой кредит можно выдать и на какой срок);
- должны быть установлены четкие полномочия по выдаче кредита. Скажем, рядовой сотрудник отдела может выдать кредит не более $1000, кредиты до $10 000 может выдать начальник отдела, свыше $10 000, но не более $100 000, может выдать вице-президент по финансам и кредиты свыше $100 000 выдает только совет директоров (читайте роман А. Хейли «Менялы»);
- для выдачи особо больших и опасных кредитов объединяются несколько банков и сообща выдают этот кредит;
- существуют страховые компании, которые страхуют невозврат кредита (но есть точка зрения, что невозврат кредита не подлежит страхованию — это риск самого банка);
- существуют внешние ограничения по выдаче кредитов (например, установленные Центральным банком); скажем, не разрешается выдавать очень крупный кредит одному клиенту;

и т.д.

2. *Риски неликвидности, неплатежеспособности и способы их уменьшения.* Говорят, что средства банка достаточно ликвидны, если банк способен быстро и без особых для себя потерь обеспечить выплату своим клиентам денежных средств, которые они доверили банку на кратковременной основе. Риск неликвидности — это и есть риск не справиться с этим. Впрочем, этот риск лишь для краткости назван так, полное его название — *риск несбалансированности баланса в части ликвидности.*

Все активы банка по их ликвидности делятся на три группы:

1) первоклассные ликвидные средства (кассовая наличность, средства банка на корреспондентском счете в Центробанке, государственные ценные бумаги, векселя крупных надежных компаний); 2) ликвидные средства (ожидаемые краткосрочные платежи

банку, некоторые виды ценных бумаг, некоторые материальные активы, которые могут быть быстро и без больших потерь проданы, и т.п.); 3) неликвидные средства (просроченные кредиты и ненадежные долги, многие материальные активы банка, прежде всего здания и сооружения).

При анализе риска неликвидности учитываются в первую очередь первоклассные ликвидные средства.

Говорят, что банк платежеспособен, если способен расплатиться со всеми своими клиентами, но, возможно, для этого придется провести какие-нибудь крупные и длительные операции, вплоть до продажи оборудования, зданий, принадлежащих банку, и т.д. Риск неплатежеспособности возникает, когда неясно, сумеет ли банк расплатиться.

*Платежеспособность банка* зависит от очень многих факторов. Центральный банк устанавливает ряд условий, которые банки должны выполнять для поддержания своей платежеспособности. Самые важные из них: ограничение обязательств банка; рефинансирование банков Центральным банком; резервирование части средств банка на корреспондентском счете в Центральном банке.

Риск неликвидности ведет к возможным излишним потерям банка: чтобы расплатиться с клиентом, банку, возможно, придется одолжить деньги у других банков по более высокой процентной ставке, чем в обычных условиях. Риск неплатежеспособности вполне может привести к банкротству банка.

И ликвидность и платежеспособность банка рассчитываются по специальным методикам, которые утверждаются Центральным банком. Он же утверждает специальные нормативы по ликвидности и платежеспособности, которые банки должны выполнять. В нынешних условиях, имея хорошую вычислительную технику, банк ежедневно может рассчитывать эти нормативы и корректировать свои действия.

## 12.5. Форвардная и фьючерсная торговля

Уменьшить риск позволяют и форвардные контракты. Такие контракты обязательны для исполнения обеими сторонами в будущем по ценам, зафиксированным в момент заключения контракта. Например, 1 января фермер заключает форвардный контракт с мельником на поставку тому пшеницы в августе по определенной цене. В январе невозможно предсказать, каков будет урожай пшеницы и какова будет реальная цена пшеницы в августе. Если она будет выше, чем в контракте, — прогадает фермер, а мельник выгадает; если цена будет ниже — выиграет фермер, а в проигрыше окажется мельник. Фьючерсные контракты — это также форвардные, но они стандартизованы, обезличены и ими торгуют на биржах.

Но почему такие контракты уменьшают риск? Дело в том, что снижение риска здесь происходит не только напрямую, но и косвенным образом: несомненно, что форвардные контракты делают рынок более предсказуемым, более стабильным, а значит, менее рискованным. Форвардные контракты напоминают постройку далеко впереди маяков, к которым идут участники рынка.

Вообще верно чрезвычайно общее утверждение — все, что делается открыто, с прицелом, прогнозом на будущее, с ясными поставленными целями, понятными всем, и т.п. — все это увеличивает предсказуемость, стабильность экономики, уменьшает риск. Верно и обратное — все, что делается тайно, без объявления целей, непредсказуемо — все это уменьшает стабильность рынка и увеличивает рискованность операций на таком рынке.

Чрезвычайно важным примером здесь является ипотечное кредитование (см. § 3.10). Напомним, что это долгосрочная ссудная операция под небольшие проценты под залог недвижимости заемщика, причем договоры об ипотечной ссуде действуют в неизменном виде десятки лет. В такой стране, как США, тысячи фирм занимаются таким кредитованием. Они представляют мощную силу, противостоящую любой нестабильности в стране, а также инфляции, которые могут значительно уменьшить их нормальную работу, а то и привести к разорению.

Капитализм извлек хороший урок из Великой депрессии 1929—1938 гг. В 1934 г. из-за несравнимости финансовых отчетов и по ряду других причин Конгресс США создал специальную комиссию по биржам и ценным бумагам. Одна из целей работы этой комиссии — обеспечить точность финансовой информации в отчетах фирм, объективное отражение экономических действий, что уменьшает риск.

В заключение обобщим пример 2: хеджирование в валютных сделках. Валютная сделка называется *спот,* если она осуществляется по сиюмоментной цене и окончательный расчет должен быть произведен не позднее второго рабочего дня после дня совершения сделки. *Форвардный валютный контракт* — это сделка, определяющая сумму валюты, которая должна быть обменена на другую валюту в определенный день в будущем по курсу, который записан в контракте. Форвардные операции служат для хеджирования возникающего валютного риска. Например, российский импортер купил товар в Германии. Счет был выписан в немецких марках и должен быть оплачен через 90 дней. Для устранения риска повышения курса немецкой марки за этот период импортер осуществляет форвардную покупку немецких марок.

Третий вид валютных сделок — это операция *своп,* которая представляет собой сочетание покупки валюты на условиях спот и ее одновременной форвардной продажи. Операция спот весьма распространена. Когда речь идет о простой форвардной операции, то используют термин *аутрайт.*

## ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

**1.** Имеет ли смысл диверсификация с безрисковыми операциями?

*Ответ*: относительный, поскольку при диверсификации данной операции с характеристиками $r$, $e$ с безрисковой операцией эффективности $e_0$ пропорционально уменьшаются и риск, и надбавка за риск, т.е. разница $e - e_0$. Смысл диверсификации — в гашении колебаний доходности за счет некоррелированности или попарной отрицательной коррелированности составляющих случайных доходов.

**2.** Немецкий банк разместил в английском банке свободные средства на три месяца. Как захеджировать возникший риск возможного падения курса фунта стерлингов относительно немецкой марки?

**3.** Российская фирма взяла полугодовой кредит в немецком банке. Как захеджировать возникший риск падения курса рубля относительно немецкой марки?

**4.** Российский ученый поехал работать в Мексику на три месяца. Оплата его труда была предусмотрена в мексиканских песо. В период его работы в Мексике вся страна жила в ожидании девальвации мексиканского песо. Какие меры мог бы предпринять российский ученый для уменьшения своих потерь из-за девальвации песо?

# Глава 13

# МОДЕЛИ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ АКТИВОВ

Никто не отказался бы узнать завтрашние цены. Среди практиков-финансистов бытует мнение, что цены следуют некоторым ритмам, циклам, трендам. В наши дни, с развитием компьютерной техники и компьютерных сетей, связывающих весь мир в единое целое, поведение цен можно увидеть на экране компьютера в реальном времени. Так называемый технический анализ утверждает, что отдельные части графиков цен повторяются, и по начальному участку такой характерной фигуры можно понять, как график пойдет далее. В этом и заключается возможность предсказания поведения цены.

С целью получения ответа на вопрос, предсказуемо ли движение цен, было проведено множество исследований. Они принесли неожиданный и парадоксальный результат: скорее всего цены изменяются совершенно случайно, примерно так же, как изменяются скорости молекул газа в их хаотическом броуновском движении. Окончательно этот вопрос не решен и, по-видимому, не будет решен никогда, так как снова и снова будут появляться удачливые финансисты, уверенные, что они могут предугадывать будущее поведение цен.

В данной главе изложены три модели ценообразования активов. В этих моделях цена актива случайно меняется с течением времени. Первые две модели весьма простые — колебания цены имеют всего лишь два значения, из-за чего эти модели называются биномиальными. На основе этих моделей построены более сложные, имеющие уже практическое значение и используемые в реальных финансовых расчетах (см. гл. 14, посвященную ценообразованию опционов).

## 13.1. Простейшая биномиальная модель

В этой модели $S$ — цена актива без каких-либо специальных ограничений типа цены облигации с погашением (в момент погашения цена равна номиналу облигации), например, это цена акции. Пусть единица временного промежутка есть день. Тогда цена актива к концу $n$-го дня будет $S_n = S_0 + x_1 + \ldots + x_n$, где $S_0$ — цена в начале наблюдения, $x_i$, $i = 1, \ldots, n$ — независимые и одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения $-1$, $+1$ с вероятностью $1/2$. Поведение возможной цены актива изобразим на рис. 13.1.

На рисунке изображено так называемое биномиальное дерево. Поведение цены можно представить как случайное движение по этому дереву слева направо.

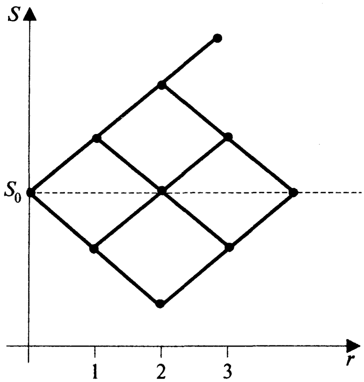



Рис. 13.1

Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины $S_n$. Имеем

$$M[S_n] = M[S_0] + \sum_{i=1}^{n} M[x_i] = S_0,$$

так как математическое ожидание каждой с.в. $x_i$ равно 0. Далее в силу независимости с.в. $x_i$ дисперсия их суммы равна сумме их дисперсий. Но дисперсия каждой с.в. $x_i$ равна 1, следовательно, $D[S_n] = n$.

Обозначим $x_1 + \ldots + x_n$ через $X_n$. Найдем ряд распределения $X_n$. Вероятность того, что из $n$ с.в. $x_i$ $k$ приняли значение +1, а остальные $(n - k)$ приняли значение −1, равна $C_n^k(1/2)^n$. Следовательно, $P(X_n = 2k - n) = C_n^k(1/2)^n$. Ряды распределения $X_1$, $X_2$, $X_3$ показаны на рис. 13.2.

$X_1$:

| | |
|---|---|
| 1 | −1 |
| 1/2 | 1/2 |

$X_2$:

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 0 | −2 |
| 1/4 | 1/2 | 1/4 |

$X_3$:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 1 | −1 | −3 |
| 1/8 | 3/8 | 3/8 | 1/8 |

Рис. 13.2

При $n > 10$ уже можно воспользоваться центральной предельной теоремой, гласящей, что сумма большого числа независимых и одинаково распределенных слагаемых приближенно распределена по нормальному закону. Итак, при $n > 10$ $X_n \in N(0, \sqrt{n})$ и, значит, $P(\alpha < S_n - S_0 < \beta) \approx \Phi(\beta/\sqrt{n}) - \Phi(\alpha/\sqrt{n})$, где Φ — функция Лапласа. Отсюда следует, что при $n > 10$ $P(|S_n - S_0| < 3\sqrt{n}) = 0{,}9973$.

В частности, при $n = 16$ имеем $P(|S_n - S_0| < 12) = 0{,}9973$, т.е. за 16 дней цена изменится не более чем на 12 единиц (предполагается, что $S_0$ значительно превосходит 12).

В этой самой простой биномиальной модели цены не могут расти систематически, как, например, растет цена бескупонной облигации при приближении момента ее гашения. Ясно также, что математическое ожидание доходности актива равно 0. Поэтому и безрисковая ставка должна быть равна 0 (многочисленные наблюдения убеждают, что математическое ожидание доходности любого рискового актива не может быть меньше безрисковой ставки). Все эти соображения делают данную модель пригодной лишь для некоторых поясняющих иллюстративных расчетов (см. § 14.4).

## 13.2. Биномиальная модель Кокса—Росса—Рубинштейна

В этой модели есть два вида активов: банковский счет величиной $B$ с постоянной процентной ставкой $r$, такой, что его величина к концу $n$-го временного промежутка $B_n = (1+r)\,B_{n-1} = (1+r)^n B_0$, и актив ценой $S$ со случайной ставкой наращения $f_i$, причем все ставки $f_i$ — независимые и одинаково распределенные с.в., принимающие два значения — $a$, $b$, причем $a < b$ с вероятностью 1/2, т.е. процентная ставка — плавающая (такие ставки рассмотрены в § 9.1). Следовательно, цена актива в момент $n$ равна $S_0 \cdot \prod_{i=1}^{n} (1+f_i)$.

В частном случае, когда $b = \lambda - 1$, $a = 1/\lambda - 1$, где $\lambda > 1$, имеем

$$S_n = \begin{cases} \lambda S_{n-1}, & \text{если } f_n = b; \\ \lambda^{-1} S_{n-1}, & \text{если } f_n = a. \end{cases}$$

Если ввести случайную переменную $\varepsilon_n = \pm 1$ с вероятностью 1/2, то $S_n = S_0 \lambda^{\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n}$.

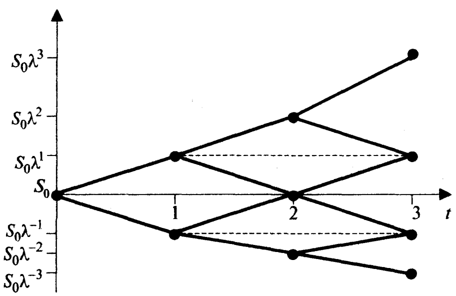



**Рис. 13.3**

Очевидно, что в данном случае цена актива $S$ «блуждает» по множеству $\{S_0\,\lambda^k$: $k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ — см. рис. 13.3.

Математическое ожидание доходности актива равно $(a + b)/2$, так что должно быть $(a + b)/2 > r$. Докажем, что цена актива растет в среднем по этой ставке. Найдем математическое ожидание цены в $n$-й момент времени: $S_n = S_0 \cdot \prod_{i=1}^{n} (1+f_i)$. Так как с.в. $(1 + f_i)$, $i = 1, \ldots, n$, независимы, то математическое ожидание их произведения равно произведению их математических ожиданий, значит,

$$M[S_n] = S_0 \cdot \prod_{i=1}^{n} M(1+f_i) = S_0 \cdot [1 + (a+b)/2]^n. \quad \textbf{(13.1)}$$

Аналог формулы (13.1) верен, даже если ставки $f_i$ являются не постоянными, а меняются с изменением номера $n$.

## 13.3. Общая экспоненциальная биномиальная модель

В ходе исследований поведения цен было выяснено, что «случайно блуждают» не сами цены, а их логарифмы, т.е.

$$S_n = S_0 \, e^{H_n},$$

где $H_n = h_1 + \ldots + h_n$ и эти с.в. $h_i$ независимы и «примерно одинаковы».

Отсюда можно заключить по центральной предельной теореме, что величины $H_n$ при $n > 10$ распределены приближенно по нормальному закону. Параметры этого закона: математическое ожидание и дисперсия вполне определяются математическими ожиданиями с.в. $h_i$ и их дисперсиями. Заменим «дискретное» время «непрерывным». Тогда, в частности, получится, что для любого момента $t$ *и* любого $T > t$ натуральный логарифм отношения цен $S(t + T)/S(t)$ распределен по нормальному закону.

Когда натуральный логарифм случайной величины распределен по нормальному закону, то распределение самой с.в. называется *логнормальным*. Примерный график плотности логнормального распределения показан на рис. 13.4.

Можно доказать, что если $\ln Y$ распределен нормально с параметрами $a$, $\sigma$, то $M[Y] = e^{a + \sigma^2/2}$ и $D[y] = e^{2a + \sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$.

Итак, в общей биномиальной модели отношение цен через любой временной промежуток распределено логнормально. Заметим, что $S(t + T)/S(t)$ — в сущности средняя доходность на промежутке времени, понимаемая как коэффициент или множитель наращения (это один из возможных вариантов понятия доходности — см. § 5.1). Следовательно, средняя доходность (таким образом понимаемая) на любом временном промежутке распределена логнормально.

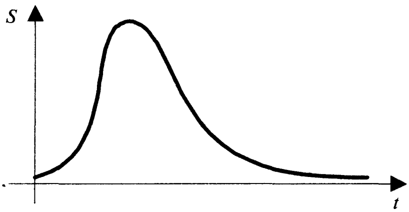


Рис. 13.4

Однако убедительного соответствия этих предположений практике не наблюдается.

## 13.4. Фундаментальный и технический анализ цен

*Фундаментальный анализ* состоит в изучении и анализе общеэкономических (главным образом долгосрочных) тенденций на рынке, установлении факторов и скрытых взаимосвязей, влияющих на развитие рынка. При фундаментальном анализе используются разнообразные статистические данные, опубликованные в печати или имеющиеся в электронном виде. Широко применяются различные экономико-математические методы и модели.

В большинстве случаев фундаментальный анализ является скорее качественным, чем количественным. Он позволяет лишь выявить начала определенных тенденций и их направленность. Как правило, для более определенных выводов необходимы дополнительные исследования.

*Технический анализ* проводится с целью сиюминутного анализа рынка и улавливания краткосрочных аспектов поведения его. Технический анализ состоит в построении диаграмм, изучении только что заключенных контрактов и т.п. Прежде всего он направлен на изучение динамики цен на конкретный актив с целью предугадывания движения цены в ближайший период. Для этого на графиках поведения цен отыскивают повторяющиеся характерные фигуры («голова и плечи», «двойной верх» и т.п.) и действуют в предположении движения цены по этой фигуре.

### ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

**1.** В простейшей биномиальной модели из § 13.1 определите: а) какова вероятность того, что цена станет меньше первоначальной за 1 день; за 2 дня; за 3 дня; б) останется неизменной в течение 2 дней; 3 дней; в) станет такой же через 1 день; через 2 дня; через 3 дня.

**2.** Докажите, что в простейшей биномиальной модели из § 13.1 цена «не помнит» своего прошлого, т.е. ее случайное поведение есть марковский процесс. Графически это отображается так: в биномиальном дереве вырастающее из любого «сучка» дальнейшее дерево изоморфно первичному биномиальному дереву.

**3.** Владелец магазина гордится тем, что цены у него стабильны в течение недели. Он говорит: «В понедельник я цены назначаю по обстоятельствам. Но затем, если не происходит ничего из ряда выдающегося, я стараюсь их не менять». Формальное описание: если за предыдущие $n$ дней было $k$ изменений цены, то вероятность того, что на следующий день цена не изменится, равна $(n-k)/(n+1)$. Убедитесь, что такие цены «помнят» свое прошлое.

**4.** В простейшей биномиальной модели из § 13.1 определим с.в. $C_n = \max(0, S_n - S_0)$. Составьте ряды распределения для с.в. $C_1$, $C_2$, $C_3$.

**Замечание.** Подобные с.в. играют важную роль в теории ценообразования опционов (см. гл. 14).

**5.** По простейшей биномиальной модели из § 13.1 некий наблюдатель наблюдает цены через день. Как для него выглядит множество возможных цен?

**6.** Нарисуйте дерево возможных цен актива в биномиальной модели Кокса—Росса—Рубинштейна (КРР) при $a = 0$, $b = 0{,}1$, $S_0 = 10$ до $n = 5$. Какова наибольшая возможная цена актива в этой модели? Какова вероятность, что к $n = 5$ цена окажется 10, не больше 11, не больше 12? Найдите вероятность того, что в $n$-й момент цена будет больше первоначальной. Найдите математическое ожидание цены актива в моменты $n = 1, 2$.

**7.** Рассмотрите аналог простейшей биномиальной модели из § 13.1, в которой вероятности повышения и понижения цены не равны 1/2.

**8.** То же, что в п. 7, относительно модели КРР.

**9.** Пусть в модели КРР $a = -0{,}1$; $b = 0{,}3$. Найдите вероятность того, что при достаточно больших $n$ ($>10$) $S_n > S_0$ ($S_0$ считать достаточно большим).

**10.** Как выглядит формула (13.1) в общей экспоненциальной модели с «дискретным» временем?

**11.** Предположим, что логарифм отношения цен через единичный промежуток времени распределен по нормальному закону с параметрами $a$ и $\sigma$ и поведение цены на непересекающихся временных промежутках независимо. Найдите распределение логарифма отношения цен через $n$ единичных промежутков времени. Считая начальную цену $S_0$ фиксированной, найдите математическое ожидание и дисперсию цены $S_n$.

**12.** Пусть начальная цена актива $S_0 = 100$ и за единицу времени цена возрастает на 3 или убывает на 1 с вероятностью 1/2. Найдите вероятность того, что при $n > 10$ цена $S_n > S_0$.

**13.** Простейшая триномиальная модель отличается от простейшей биномиальной модели тем, что в ней цена актива к концу $n$-го дня есть $S_n = S_0 + x_1 + ... + x_n$, где $S_0$ — цена в начале наблюдения, а $x_i$, $i = 1, ..., n$, — независимые и одинаково распределенные с.в., принимающие значения $-1, 0, +1$ с вероятностью 1/3. Поведение возможной цены актива можно изобразить на рис. 13.5.

Этот график изображает так называемое триномиальное дерево. Поведение цены можно представить как случайное движение по этому дереву слева направо.

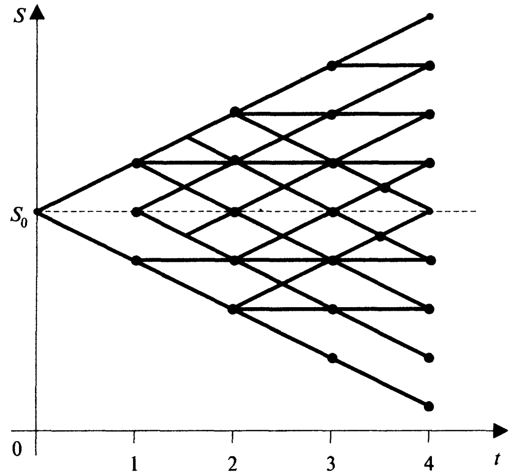



**Рис. 13.5**

Исследуйте простейшую триномиальную модель подобно тому, как это сделано в отношении простейшей биномиальной модели в § 13.2.

# Глава 14

# БЫСТРЫЙ РОСТ КАПИТАЛА

Рассматривается рост капитала при заключении контрактов, дающих случайный доход. Если заключить мало контрактов, то и капитал будет расти медленно, если много, — то можно и разориться при неудаче.

## 14.1. Постановка задачи о росте капитала

Рассмотрим ценную бумагу, которая за некоторый временной период дает какой-то случайный (с.) доход $\xi$. Это текущий доход. Основную стоимость бумаги будем считать постоянной. Пусть участник рынка имеет капитал $K$. Предположим, он желает в начале каждого указанного временного периода покупать сколько-то экземпляров указанной ценной бумаги, скажем, $m$, так что величина (в.) $m/K$ остается постоянной от периода к периоду, хотя обе величины $m$, $K$ могут меняться. Обозначим отношение $m/K$ через $s$, так что $m = sK$.

Хорошим теоретическим примером является покупка одного и того же опциона в каком-то числе экземпляров — так как обычно премия—цена покупки опциона много меньше возможного выигрыша, и потому иногда этой премией—ценой опциона пренебрегают (об опционах см. следующую главу).

Но в конце концов, деньги, необходимые для покупки нужного числа экземпляров ценной бумаги, можно занять.

Приращение капитала за период есть

$$\Delta K = m\xi = sK\xi,$$

так что в конце периода — начале следующего капитал будет равен

$$K + \Delta K = K(1 + s\xi).$$

Следовательно, в конце 1-го периода капитал будет

$$K_1 = K(1 + s\xi_1),$$

в конце 2-го периода будет

$$K(1 + s\xi_1)(1 + s\xi_2),$$

в конце $n$-го периода капитал будет равен

$$K_n = K(1 + s\xi_{1)})\dots(1 + s\xi_n),$$

где $K$ — капитал в начале 1-го периода, $\xi_1, \dots, \xi_n$ — значения текущих доходов рассматриваемой ценной бумаги за соответствующие периоды.

Отношение $K_n/K$ есть скорость роста за все $n$ периодов, а $\sqrt[n]{K_n/K}$ естественно назвать скоростью роста в среднем за период или просто средней скоростью роста. Спрашивается, каким должно быть $s$, чтобы эта средняя скорость была максимальной?

Имеем $\ln K_n = \ln K + ... + \ln(1 + s\xi_n)$. Будем считать, что с.в. $\xi_1, ..., \xi_n$ одинаково распределены (как с.в. $\xi$) и независимы в совокупности (хотя достаточно было бы лишь их некоррелированости), тогда с.в. $W_n = \sum_{i=1}^{n} \ln(1 + s\xi_i)$ имеет математическое ожидание $a_n = na$, где $a = M[\ln(1 + s\xi)]$ и дисперсию $d_n = nd$, где $d = D[\ln(1 + s\xi]$.

Теперь имеем $\ln(K_n/K) = W_n$, или $K_n/K = e^{W_n}$. Средняя скорость роста $\sqrt[n]{K_n/K} = e^{W_n/n}$. Рассмотрим с.в. $G(s) = W_n/n$. Из вышеуказанного следует, что $G(s)$ имеет математическое ожидание $a$ и дисперсию $d/\sqrt{n}$ (см. выше). Поэтому при больших $n$ это будет приближенно постоянная величина $a$. Из всего этого вытекает, что для исследования максимизации средней скорости роста, равной $e^{G(s)}$, можно ограничиться исследованием с.в. $G(s)$, последнее же можно заменить исследованием максимизации математического ожидания этой с.в. Имеем

$$M[G(s)] = M[W_n/n] = M[\ln(1 + s\xi)].$$

## 14.2. Рост капитала при постоянной доле контрактов

Обозначим $M[\ln(1 + s\xi)]$ через $\varphi(s)$ и эту функцию исследуем на максимум, обозначая точку максимума через $s^*$. По смыслу, область определения функции $\varphi$ есть $[0, \infty)$.

Можно рассматривать разные стратегии управления капиталом, например, рассмотрим стратегию постоянного $s$.

***Предложение 1.*** Если $p = P(\xi \leq -1/s) > 0$, то разорение неизбежно. Среднее число периодов до разорения равно $1/p$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вероятность разорения за один период есть $p$, тогда $(1-p)p$ есть вероятность не разориться за 1-й период и разориться за 2-й и т.д. В результате получим, что вероятность разорения $p+(1-p)p+(1-p)^2 p+...=1$, — следовательно, разорение неизбежно. Число периодов до разорения, включая последний, есть с.в., распределенная по закону геометрической прогрессии, ее среднее значение есть $1/p$.

Пусть $b=\inf\{c : P(\xi<c)>0)\}$.

***Предложение 2.*** Если $P(\xi=b)>0$ и $-1/s \geq b$ или если $P(\xi=b)=0$ и $-1/s>b$, то при таком $s$ неизбежно разорение.

Доказательство. Поскольку $P(\xi \leq -1/s)>0$ при данном $s$, то можно сослаться на предложение *1*.

***Следствие 1.*** Если $P(\xi<c)>0$ для всякого $c$, то любая стратегия с постоянным $s$ ведет к разорению.

Рассмотрим случай дискретной (д.) с.в. $\xi$, пусть ее возможные значения есть $a_i$ с вероятностями $p_i$.

Имеем: $\varphi(s)=\sum\limits_i p_i \ln(1+a_i s)$, $\quad \varphi'(s)=\sum\limits_i a_i p_i /(1+a_i s)$,

$\varphi''(s)=-\sum\limits_i a_i{}^2 p_i/(1+a_i s)^2$. Отметим, что $\varphi'(0)=\sum\limits_i a_i p_i = M[\xi]$.

Условие максимума для дискретного случая:

$$\sum_i a_i p_i /(1+a_i s)=0\,. \tag{14.1}$$

***Предложение 3*** (следствие из предложения 2). Если отрицательных возможных значений с.в. $\xi$ нет, то нет и опасности разорения; если же есть отрицательные возможные значения, то при любом постоянном $s$, большем, чем $t=\inf\{-1/a_i : a_i<0\}$, если наименьшего возможного отрицательного значения нет, или не меньшем, чем $t=-1/\min a_i$, если такое наименьшее возможное значение есть, вероятность разорения равна 1. Средняя длительность до разорения равна $1/p$ (о величине $p$ см. ранее, в доказательстве предложения *1*).

Если разорения не допускать, то для нахождения $s^*$ полезно следующее предложение.

***Предложение 4***: *А*) если $M[\xi]\leq 0$, то $s^*=0$; *Б*) пусть $M[\xi]>0$, тогда $0<s^*<t$.

Действительно, на промежутке $[0,\ t)$ (о $t$ см. в предложении *3*) $\varphi$ имеет обе первые производные, и если $M[\xi]\leq 0$, то, очевидно,

$s^* = 0$; если же $M[\xi] > 0$, то, поскольку $\lim\limits_{s \to t-0} \varphi'(s) = -\infty$, $\varphi'$ имеет нуль на промежутке $[0, t)$. (Напомним, что $\varphi'(0) = M[\xi]$.)

**Замечание 1.** Между любыми двумя положительными числами $-1/a_i$, $-1/a_j$ находится нуль первой производной, и этот нуль есть точка максимума функции $\varphi$, однако исследование соответствующей ситуации сильно осложняется необходимостью заменить вышеуказанные рассуждения о росте капитала в силу опасности разорения за один период (об этом уже упоминалось выше, см. также далее — п. 5).

В случае непрерывной (н.) с.в. $\xi$ пусть ее плотность вероятности есть $f(x)$, тогда условие максимума:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx/(1+sx) = 0. \qquad \textbf{(14.2)}$$

В случае произвольной с.в. $\xi$ пусть ее функция распределения есть $F(x)$, тогда условие максимума:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\, dF(x)/(1+sx) = 0. \qquad \textbf{(14.3)}$$

Мы опустим исследование, связанное с возможностью обращения $1+sx$ в нуль.

**Пример 1. А)** $\xi$ есть д.с.в., принимающая значения $2$, $-1$ с равной вероятностью.

Условие максимума (14.1) есть $2\cdot(1/2)/(1+2s) - 1\cdot(1/2)/(1-s) = 0$, откуда получаем $s^* = 1/4$.

Итак, если капитал участника равен 400 д.е., то он приобретет 100 экземпляров рассматриваемой ценной бумаги (если у него хватит этой суммы, чтобы их купить, — это предполагается!). Но это только в начале 1-го периода.

**Б)** (формулы Келли — см. о них в [1]). Рассмотрим игру, в которой выигрыш $a$ с вероятностью $p$ и проигрыш $a$ с дополнительной вероятностью. Чему здесь должно быть равно $s^*$?

Условие максимума (14.1) дает $s^* = (2p-1)/a$. Это так называемая *первая формула Келли.*

Далее рассмотрим игру, в которой выигрыш $b$ с вероятностью $p$ и проигрыш $a$ с дополнительной вероятностью. Чему здесь должно быть равно $s^*$?

Условие максимума (14.1) дает $s^* = \bigl(bp - a(1-p)\bigr)/(ab)$. Это так называемая *вторая формула Келли.*

**В)** $\xi$ есть н.с.в., равномерно распределенная на промежутке $[-1,\ 2]$. Условие максимума есть $\int\limits_{-1}^{2} x\,dx/(3(1+sx)) = 0$. Выкладки приводят к трансцендентному уравнению $(1+2s)(1-s) = e^{3s}$. На промежутке $[0,\ 1]$ это уравнение имеет одно решение, приблизительно $s^* = 0{,}72$.

**Замечание 2.** Легко видеть, что в данной ситуации важны не значения с.в. $\xi$, а произведение $s\xi$. Это видно и по формулам (14.1)—(14.3).

## 14.3. Безгранично делимые и бесплатные рулетки и ценные бумаги

Кроме ценных бумаг, рассмотрим игру в рулетку с безгранично делимой ставкой.

Кратко повторим постановку задачи в этом случае. Участие в игре бесплатное. При ставке 1 выигрыш есть с.в. $\xi$. Можно сразу поставить ставку $s$, тогда выигрыш будет $s\xi$. Собственно говоря, в п. 14.1 было подробно изложено, как вести себя оптимально в данном случае — с постоянным $s$.

Вместо того чтобы участвовать в рискованных играх, особенно если выигрыш невелик, участник может положить деньги в банк и они будут нарастать со скоростью банковского процента $\alpha$. Поэтому он должен решить, что ему выгоднее: участвовать в вышеуказанной бесплатной лотерее или положить деньги в банк и довольствоваться банковским процентом.

Относительное приращение капитала равно:

$\alpha$ — если деньги положены в банк,

$s\xi$ — если участвовать в лотерее.

Следовательно, если $M[s\xi] > a$, то надо участвовать в лотерее, иначе надо класть деньги в банк. Тем самым отсекаются не очень выгодные лотереи.

В реальности ценные бумаги, конечно, не являются безгранично делимыми, т.е. нельзя рассматривать и оперировать произвольными долями этих бумаг. Учет этого приводит к проблемам целочисленности, которые вовсе не являются чисто техническими (но здесь мы от них уклонимся). Однако нельзя уклониться от проблем, связанных с их стоимостью.

Предположим, что для их закупки участник рынка занимает деньги под банковский процент $\alpha$. Если в начале периода он имеет капитал $K$, а бумага стоит $C$ и ее приходится покупать под указанный процент, то при каком-то $s$ для оправданности операции должно быть $Ks\xi - sK\alpha C > 0$, , т.е. $M[\xi] > \alpha C$ . Необходимость учета этого требования опять-таки отсекает не слишком выгодные лотереи.

### 14.4. Еще одна стратегия управления капиталом

Как было указано выше, иногда $s$ невозможно выбрать, чтобы избежать опасности разорения. Однако в такой ситуации можно попробовать использовать другую стратегию.

Рассмотрим следующую стратегию управления капиталом (в основных чертах своих реально используемую участниками финансового рынка). Участник рынка рискует не всем капиталом, а некоторой постоянной по величине суммой $T$, а все дополнительные доходы кладет в банк. Если он случайно указанную сумму «проиграет», то он не отчаивается, берет из накопленных в банке к этому моменту денег нужную сумму и продолжает с ней «играть».

Итак, пусть вначале у участника есть сумма $B$ в банке, банковский процент равен $\alpha$. Участник, кроме того, играет в бесплатную лотерею $\xi$ с каким-то $s$ и суммой-ставкой $T$. Тогда в конце $n$-го периода его капитал составит сумму $T$ и в банке у него будет наращенная сумма $B(1+\alpha)^n + sT\sum_{i=1}^{n}(1+\alpha)^{n-i}\xi_i$ (учитывается нарастание по сложным процентам сумм, ранее положенных в банк). К сожалению, сумма независимых с.в. $(1+\alpha)^{n-i}\xi_i$ *не удовлетворяет условиям центральной предельной теоремы*, тем не менее, кое-что сказать можно.

***Предложение 5.*** Вероятность разорения в 1-м же периоде равна

$$P\big(\xi \le -B(1+\alpha)/(sT)\big).$$

Таким образом, если $\inf\{c : P(\xi < c) > 0\} = -\infty$, то разорение возможно при этой стратегии при любой сумме $B$. Однако разорение не является неизбежным.

Итак, с такой стратегией можно не разориться. Плохо другое. Будем считать сумму $T = 1$, или, что то же самое, пусть $B/T = V$. Тогда после $n$ периодов у участника в банке будет сумма $V(1+\alpha)^n + s\sum_{i=1}^{n}(1+\alpha)^{n-i}\xi_i$ . Если средней скоростью роста капитала за период считать $\sqrt[n]{M\left[s\sum_{i=1}^{n}(1+\alpha)^{n-i}\xi_i\right]}$ , то несложные вычисления показывают, что эта скорость асимптотически стремится к $(1+\alpha)$. Значит, не следует играть в лотерею, а надо положить деньги в банк!

## ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

**1.** Пусть с равной вероятностью выигрыш равен 1 и −0,1. Каково $s^*$ для максимально быстрого роста капитала?

**2.** Докажите, что если возможные выигрыши неотрицательные и есть хотя бы один положительный, то $s$ надо брать как можно больше (теоретически бесконечно большим, но на практике величина $s$ будет ограничена. Из-за каких обстоятельств?).

**3.** Докажите, что если с.в. $\xi$ нормально распределена, то любая стратегия с постоянным $s$ ведет к разорению.

Указание. См. следствие 1.

**4.** При стратегии постоянного $s$ отношение $K_n/K_0$ распределено логнормально (см. п. 14.1). Воспользовавшись формулами из п. 13.3 найдите математическое ожидание и дисперсию этого отношения.

**5.** Пусть с положительных выигрышей платится постоянный налог. Как это повлияет на выбор $s$?

**6.** В п. 14.4 указано, что стратегия риска постоянной суммой может не привести к разорению. Приведите соответствующий пример.

Вот такой пример. Пусть $\xi$ принимает значения: −1, −2, ..., $-k$, ... с вероятностями соответственно $4^{-1}, 4^{-2}, ..., 4^{-k}, ....$ и с оставшейся вероятностью 11/15 принимает значение 15/11. Тогда математическое ожидание $\xi$ будет более 10. Пусть $B/T = V = 1$, $\alpha = 0{,}1$. Пусть $s = 1$. Тогда вероятность разорения за 1-й период равна $p = P(\xi \le -V(1+\alpha)) = P(\xi \le -1{,}1) = 1/15$.

Следовательно, вероятность неразорения за 1-й период равна $(1 - p) = 14/15$. При этом $V$ увеличится за этот 1-й период в среднем не менее чем на 10, так что вероятность разориться на следующем периоде $p_1$ будет меньше, чем $p/2$, и т.д.

В итоге вероятность разорения будет меньше, чем $p + (1-p)p_1 + $ $+ (1-p)(1-p_1)p_2 + \dots$, где $p_k < 2^{-k}$. Ясно, что эта сумма меньше 1.

# Глава 15

# ОПЦИОНЫ И ЦЕНООБРАЗОВАНИЕ ОПЦИОНОВ

Опционы являются производными ценными бумагами, производным финансовым инструментом. Организованная торговля ими началась только в 1973 г. В данной главе рассматриваются использование опционов для уменьшения риска финансовых операций, а также определение цены на них.

## 15.1. Опционы

Опцион на покупку (call-option) дает право его владельцу (держателю опциона) купить актив по установленной в этом документе цене не позже определенной даты (*американский опцион*) или на момент такой даты (*европейский опцион*). Цена эта называется *ценой исполнения*. Владелец опциона может отказаться от указанной покупки актива без всяких штрафов.

Аналогично опцион на продажу (put-option) дает право его владельцу продать актив по установленной в этом документе цене не позже определенной даты (*американский опцион*) или на момент такой даты (*европейский опцион*).

Далее рассматриваются только европейские опционы.

Тот, кто выписал опцион, т.е. его продавец, несет определенное обязательство во все время действия опциона. В частности, если он выписал опцион на покупку, то несет обязательство обеспечить поставку актива по цене исполнения в момент исполнения опциона, а если он выписал опцион на продажу, то должен купить актив по цене исполнения в момент исполнения опциона.

Наоборот, держатель опциона никаких обязательств не несет, но он покупает опцион и платит выписавшему опцион некоторую сумму, называемую *премией* или просто *стоимостью опциона*.

Рассмотрим более подробно европейский опцион на покупку. Когда наступает дата исполнения опциона, то держатель опциона сравнивает рыночную цену на актив $S$ и цену исполнения $R$, т.е. указанную в опционе. Если $S > R$, то он реализует свое право покупки актива по цене $R$, покупает актив по этой цене (и может немедленно же его продать и получить прибыль $S - R$). Но как фактически реализуется его право купить актив по более низкой цене, чем рыночная? Это право ему обеспечивает продавец опциона, поставляя физический актив или доплачивая разницу

$S - R$ держателю опциона (эти обязательства обеспечиваются специальным биржевым механизмом — клиринговой палатой, см. § 6.9). Держатель опциона оказывается в выигрыше и тем больше, чем больше разница $S - R$. Но если рыночная цена не превышает цену исполнения, то держателю опциона незачем покупать актив. В этом случае он в проигрыше, так как за опцион он заплатил премию и она пропала зря.

Следовательно, опцион на покупку покупают тогда и те, кто надеется на повышение рыночной цены актива к дате исполнения опциона.

Аналогично обстоит дело и с опционом на продажу.

В зависимости от соотношения между ценой актива в момент продажи опциона $S$ и ценой исполнения $R$, указанной в нем, опционы называются опционами с выигрышем, с нулевым выигрышем и с проигрышем. Для опционов колл (на покупку) это означает, что $S > R$, $S = R$ и $S < R$.

Торговля опционами — дело довольно сложное и происходит на биржах. Сегодня в мире опционов ежедневно продают и покупают миллионы штук. Дело, однако, редко доходит до поставки физических активов. Обычно проигравшая сторона оплачивает свой проигрыш деньгами.

Как сказано выше, американский опцион можно предъявить к исполнению в любой момент не позже определенной даты. Поэтому держатель такого опциона все время в напряжении: а вдруг сейчас и есть этот самый выгодный момент и дальше может быть только хуже. Из-за этой возможности выбора наивыгоднейшего момента американский опцион должен быть дороже; это подтверждают и теория, и практика.

## 15.2. Определение стоимости опциона на момент исполнения

При организованной торговле опционами они обезличены и становятся совершенно обычными ценными бумагами на предъявителя. Опцион может быть куплен или продан в любой момент до даты его исполнения. Определим его цену непосредственно перед исполнением (всякого рода издержками на оформление сделки и т.п. пренебрежем).

Итак, пусть рыночная цена актива $S$, цена исполнения $R$, а $C$ — стоимость опциона на покупку. Ясно, что $C = S - R$, если $S > R$ и $C = 0$, если $S \le R$. Это можно записать так: $C = \max\{0, S - R\}$. Аналогично в случае опциона на продажу его стоимость $C = \max\{0, R - S\}$.

Теперь отметим еще одно различие в позициях продавца и покупателя опциона. Купивший опцион сразу же несет убытки в размере цены опциона, который он купил. Но на этом все его убытки кончились. В будущем он может только получить доход, причем в случае опциона на покупку теоретически неограниченный — ведь его возможный доход — это разница между рыночной ценой актива в момент исполнения опциона и ценой исполнения. Наоборот, продавший опцион сразу же получил доход в размере стоимости опциона, который он продал. Но на этом все его доходы кончились. Впереди его ждут только возможные убытки, причем в случае опциона на покупку теоретически неограниченные — эти возможные убытки есть разница между рыночной ценой актива в момент исполнения опциона и ценой исполнения.

## 15.3. Ценообразование опционов на основе биномиальной модели

Идея оценки опциона состоит в создании безрискового портфеля путем покупки актива и продажи (выписки) нескольких опционов на покупку этого же актива. Последующий анализ этого портфеля позволяет определить стоимость опциона. Допустим, поведение цены актива описывается биномиальной однопериодной моделью.

Итак, пусть цена актива $S = 60$ д.е., такова же и цена исполнения опциона на покупку. Срок действия опциона европейского типа — один месяц. Предположим, что к концу месяца с вероятностью 1/2 цена актива либо поднимается на 15 д.е., либо опустится на столько же. В первом случае опцион непосредственно перед исполнением будет стоить 15 д.е., во втором случае не будет стоить ничего. Поэтому в первом случае продавец опциона должен заплатить держателю опциона 15 д.е., во втором случае он не должен ничего платить. Так как размах колебаний цен актива равен 30 д.е. и ровно в два раза превосходит колебания стоимости опциона перед исполнением, то для создания безрискового портфеля продавец опционов должен выписать 2 опциона на покупку.

Проверим, что портфель из актива и этих двух опционов действительно безрисковый. В самом деле, в рамках рассматриваемой модели к концу месяца цена актива будет либо 75 д.е., либо 45 д.е. В первом случае владелец портфеля вынужден будет доплатить держателям опционов 30 д.е., во втором случае — ничего. В обоих случаях к концу месяца портфель будет стоить 45 д.е. независимо от цены актива. Это и означает его безрисковость.

Теперь перейдем непосредственно к определению цены опциона. Пусть банковская безрисковая ставка равна 10%. Так как портфель безрисковый, то его современную стоимость найдем, дисконтируя его стоимость в конце месяца по безрисковой ставке. Итак, его современная стоимость равна $45/(1 + 0{,}1) = 41$ д.е. Но сейчас актив стоит 60 д.е., поэтому два опциона вместе стоят $60 - 41 = 19$ д.е. Следовательно, один опцион стоит 9,5 д.е. За такую цену оба опциона и должны быть проданы.

Интересно детально проследить за состоянием (богатством) продавца опционов. Сначала у него был только актив стоимостью 60 д.е. Потом он выписал и продал два опциона, каждый по 9,5 д.е. Теперь у него денег 19 д.е. за проданные опционы, актив стоимостью 60 д.е. и обязательства по обеспечению двух опционов, цена этих обязательств 19 д.е. и они образуют его пассив. Актив и этот пассив вместе образуют безрисковый портфель стоимостью 41 д.е. К концу месяца 19 д.е. возрастут по безрисковой ставке до $19 \cdot (1 + 0{,}1) = 21$ д.е., стоимость безрискового портфеля возрастет по безрисковой ставке до $41 \cdot (1 + 0{,}1) = 45$ д.е. Всего у продавца опционов будет $21 + 45 = 66$ д.е. — в точности как если бы его актив был безрисковым и его стоимость возросла бы по безрисковой ставке до $60 \cdot (1 + 0{,}1) = 66$! Умелое хеджирование полностью оградило от риска.

## 15.4. Другой подход к ценообразованию опционов

Как было показано выше, при биномиальной модели (см. § 13.1) цена актива к концу $n$-го промежутка есть биномиально распределенная величина, которую можно представить в виде $S_n = S_0 + x_1 + \ldots + x_n$, где случайные величины $x_i, i = 1, \ldots, n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины принимающие два значения: 1, −1, с вероятностями 1/2 каждое. Пусть цена исполнения опциона равна $S_0$, т.е. равна рыночной цене актива в настоящий момент 0. При этом предполагается, что $S_0 > n$.

Доход держателя опциона при исполнении опциона есть

$$C_n = \max\{0, S_n - S_0\} = \max\{0, x_1 + \ldots + x_n\}.$$

Ограничимся, как и в предыдущем параграфе, только одним периодом, тогда $C = \max\{0, x_1\}$.

Понятно, что $C$ — случайная величина. Так как торговля опционами носит массовый характер, то при определении их цены можно использовать средние числа. В частности, средний ожидаемый доход держателя опциона от одного опциона на покупку есть математическое ожидание случайной величины $C_1$, которое можно определить как математическое ожидание случайной величины $\max\{0, x_1\}$, т.е.

$$C_1 = M[\max\{0, x_1\}].$$

Докажем, что это и есть «справедливая« цена опциона. При этом для упрощения примем, что безрисковая ставка равна 0. «Справедливость» цены означает, что продавец опциона сумеет обеспечить исполнение опциона и не более, т.е. никакой прибыли на выписке опциона он не заработает.

Далее опустим индекс у $C_1$ и $x_1$. Докажем, что $C = 1/2$. Проще всего найти $C$, мысленно произведя над случайной величиной $x$ большое число опытов, скажем, 100. При этом в 50 опытах $x$ примет значение 1 и потому $M[\max\{0, x\}] = 1/2$.

Теперь покажем, как продавец опциона может распорядиться этой суммой, чтобы обеспечить исполнение опциона. Он берет в банке заем величиной $S_0/2 - 1/2$, добавляет к этой сумме вырученную за продажу опциона 1/2 д.е. и на сумму $S_0/2$ покупает половину единицы актива. Итак, сейчас у него имеется единица актива и портфель, состоящий из долга банку, актива стоимостью $S_0/2$ и еще обязательства обеспечить исполнение опциона. Убедимся, что этот портфель безрисковый стоимостью 0.

В самом деле, если к моменту исполнения опциона цена актива увеличится на 1 д.е., то стоимость актива в портфеле увеличится до $1/2 \cdot (S_0 + 1)$, из этой суммы 1 д.е. пойдет держателю опциона, а остальное, т.е. $S_0/2 - 1/2$, — на погашение займа у банка. Если же цена актива упадет на 1 д.е., то держателю опциона ничего не надо платить, а актив портфеля будет продан за $1/2 \cdot (S_0 - 1)$ — это в точности долг банку.

Докажем далее, что опцион не может стоить меньше, чем $C$, в данном случае не может стоить меньше, чем 1/2, ибо если он меньше 1/2, то это не позволит продавцу опциона обеспечить исполнение опциона, что означало бы крах всей опционной торговли. В самом деле, если бы опцион стоил меньше и при этом продавец как-то умудрялся обеспечивать исполнение опционов, то покупатель опциона имел бы строго положительный доход. Это позволило бы ему сговориться с продавцом опциона и они вместе построили бы «денежную машину»: продавец без конца выписывал бы опционы, покупатель их покупал, а этот строго положительный доход они бы делили, т.е. производили бы деньги из ничего. Но это невозможно.

В заключение остановимся на стоимости опциона в конце не одного расчетного периода, а многопериодного промежутка. Тогда

$C_n = M[\max\{0, x_1 + ... + x_n\}]$ (цена исполнения по-прежнему равна цене на момент продажи опциона).

При $n > 10$, согласно Центральной Предельной Теореме, сумма $x_1 + ... + x_n$ распределена приближенно по нормальному закону с параметрами: математическое ожидание равно 0, дисперсия равна $n$. Следовательно, искомое математическое ожидание $\mathrm{M}[\{0, x_1 + ... + x_n\}]$ равно

$$\int_0^\infty 1/\sqrt{2\pi n} \cdot e^{-x^2/2n} \cdot dx/2 = \sqrt{n/2\pi}\,.$$

Итак, для многопериодного расчетного промежутка стоимость опциона на покупку равна

$$C = \sqrt{n/(2\pi)}. \qquad \textbf{(15.1)}$$

## 15.5. Создание с помощью опционов безрисковых портфелей

Пример создания такого портфеля приведен в § 15.4. При этом были использованы опционы на покупку, которые выписал владелец актива. Создать безрисковый портфель можно и с помощью опционов на продажу. Рассмотрим аналогичный пример.

Пусть цена актива $S$ равна 60 д.е., такова же и цена исполнения опциона на продажу. Срок действия опциона европейского типа один месяц. Предположим, что к концу месяца с вероятностью 1/2 цена актива либо поднимется на 15 д.е., либо опустится на столько же. В первом случае опцион непосредственно перед исполнением будет стоить 15 д.е., во втором — не будет стоить ничего. Поэтому в первом случае продавец опциона должен заплатить держателю опциона 15 д.е., во втором случае он не должен платить ничего. Так как размах колебаний цен актива равен 30 д.е. и ровно в два раза превосходит колебания стоимости опциона перед исполнением, то для создания безрискового портфеля держатель актива должен купить 2 опциона на продажу. Проверим, что портфель из актива и этих двух опционов действительно безрисковый.

В самом деле, в рамках рассматриваемой модели к концу месяца цена актива будет либо 75 д.е., либо 45 д.е. В первом случае владелец портфеля ничего не будет делать с купленными им опционами на продажу, во втором случае продавец опционов выплатит ему по 15 д.е. за опцион. В обоих случаях к концу месяца портфель будет стоить 75 д.е. независимо от цены актива. Это и означает его безрисковость.

Теперь перейдем непосредственно к определению цены опциона. Пусть банковская безрисковая ставка равна 10%. Так как портфель безрисковый, то его современную стоимость найдем, дисконтируя его стоимость в конце месяца по безрисковой ставке. Итак, его современная стоимость равна $75/(1 + 0{,}1) = 68{,}2$ д.е. Но сейчас актив стоит 60 д.е. и поэтому два опциона вместе стоят $68{,}2 - 60 = 8{,}2$ д.е. Следовательно, один опцион стоит 4,1 д.е. За такую цену оба опциона и должны быть куплены.

Проследим детально, как в § 15.4, за капиталом покупателя опционов. Сначала у него был только актив стоимостью 60 д.е. Потом он купил два опциона, каждый по 4,1 д.е. Теперь у него денег: $-8{,}2$ д.е. — долг за купленные опционы, актив стоимостью 60 д.е. и два опциона, являющиеся фактически тоже активами, цена этих активов 8,2 д.е. Прежний актив и эти два опциона вместе образуют безрисковый портфель стоимостью 68,2 д.е. К концу месяца $-8{,}2$ д.е. уменьшатся по безрисковой ставке до $-8{,}2 \cdot (1 + 0{,}1) = -9$ д.е., стоимость безрискового портфеля возрастает по безрисковой ставке до 75 д.е., всего у покупателя будет $75 - 9 = 66$ д.е. — в точности как если бы его актив был безрисковым и его стоимость возросла бы по безрисковой ставке до $60 \cdot (1 + 0{,}1) = 66$ д.е.! Умелое хеджирование, как и в § 15.4, полностью оградило покупателя от риска.

С помощью опциона на покупку можно застраховаться от излишне высокого повышения цены на интересующий актив и обеспечить его приобретение по сегодняшней цене. Это делается следующим образом.

Купим опцион на покупку этого актива по цене исполнения $E$ и одновременно денежную сумму величиной $E \cdot (1 + b)^{-T}$, вложим в банк по безрисковой ставке $b$. К моменту исполнения опциона, т.е. через время $T$, эта сумма возрастет до $E$. Если цена актива к этому моменту не превысит $E$, то купим актив; иначе купим актив с помощью имеющегося у нас опциона на покупку.

Между стоимостями опционов на покупку и на продажу есть связь, известная как *теорема паритета опционов*.

Пусть $C$, $P$ — стоимости соответственно опциона на покупку и опциона на продажу и $S$, $E$ — цена актива в момент продажи-покупки опционов и соответственно цена исполнения. Тогда

$$P = C + E \cdot (1 + b)^{-T} - S, \qquad \textbf{(15.2)}$$

где $b$ — безрисковая ставка, $T$ — время опциона.

Для доказательства этой формулы проведем два мысленных эксперимента.

1. Приобретем актив по цене $S$ и опцион на продажу с ценой исполнения $E$ и стоимостью $P$, затратив всего $S + P$. Если цена актива в момент исполнения опциона превысит $E$, то актив сохраним, в противном случае актив продадим по цене $E$.

2. Купим опцион на покупку этого актива с ценой исполнения $E$ и стоимостью $C$ и одновременно вложим по безрисковой ставке $b$ денежную сумму величиной $E \cdot (1 + b)^{-T}$, всего затратим $C + E \cdot (1 + b)^{-T}$; к моменту исполнения опциона, т.е. через время $T$, эта сумма возрастет по безрисковой ставке до $E$. Если цена актива к этому моменту не превысит $E$, то купим актив; иначе купим актив с помощью имеющегося у нас опциона на покупку.

В рамках рассматриваемой модели оба эксперимента дают в конце один результат: если цена актива к моменту исполнения опциона превысит $E$, то будем иметь актив, иначе — денежную сумму $E$. Следовательно, и в начале этих экспериментов наш капитал должен быть одинаковым, т.е. должно быть $S + P = C + E \cdot (1 + b)^{-T}$, откуда и следует формула (15.2). Если цена исполнения опционов совпадает с сегодняшней рыночной ценой актива, то опцион на покупку дороже опциона на продажу.

В заключение отметим, что различным расчетам, связанным с опционами, посвящено огромное число научных работ. Начало этому положили работы Ф. Блэка и М. Шоулса в 1973 г. и Р.С. Мертона (в то же время), посвященные ценообразованию опционов. Эти работы без преувеличения совершили революцию в финансовых расчетах.

## ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

**1.** Рассмотрите два опциона на покупку, во всем одинаковых, но с разными ценами исполнения. Какой опцион дороже?

**2.** Ответьте на тот же вопрос относительно стоимости опционов на продажу.

**3.** В однопериодной биномиальной модели для создания безрискового портфеля надо продать 2 опциона. Сколько опционов надо продать для той же цели в многопериодной биномиальной модели?

**4.** Проведите подробный вывод формулы (15.1).

# Глава 16

# ОПТИМАЛЬНЫЙ ПОРТФЕЛЬ ЦЕННЫХ БУМАГ

На финансовом рынке обращается, как правило, множество ценных бумаг: государственные ценные бумаги, муниципальные облигации, корпоративные акции и т.п. Если у участника рынка есть свободные деньги, то их можно отнести в банк и получать проценты или купить на них ценные бумаги и получать дополнительный доход. Но в какой банк отнести? Какие ценные бумаги купить? Малорисковые ценные бумаги, как правило, и малодоходны, высокодоходные, как правило, более рисковые. Экономическая наука может дать некоторые рекомендации для решения этого вопроса.

Итак, инвестор ищет на финансовом рынке активы, способные удовлетворить его пожелания относительно доходности и рискованности. Это — его спрос на рынке.

## 16.1. Постановка задачи об оптимальном портфеле

Рассмотрим общую задачу распределения капитала, который участник рынка хочет потратить на покупку ценных бумаг, по различным видам ценных бумаг. Предваряя точные математические постановки, *констатируем очевидную общую цель инвестора* — вложить деньги так, чтобы сохранить свой капитал, а при возможности и нарастить его.

Набор ценных бумаг, находящихся у участника рынка, называется его *портфелем*. Стоимость портфеля — это суммарная стоимость всех составляющих его бумаг. Если сегодня его стоимость есть $P$, а через год она окажется равной $P'$, то $(P' - P)/P$ естественно назвать доходностью портфеля в процентах годовых. То есть *доходность портфеля* — это доходность на единицу его стоимости.

Пусть $x_i$ — доля капитала, потраченная на покупку ценных бумаг $i$-го вида. Рассуждения о долях эквивалентны тому, что весь выделенный капитал принимается за единицу. Пусть $d_i$ — доходность в процентах годовых ценных бумаг $i$-го вида в расчете на одну денежную единицу.

Найдем доходность всего портфеля $d_P$. С одной стороны, через год капитал портфеля будет равен $1 + d_P$, с другой — стоимость бумаг $i$-го вида увеличится с $x$ до $x_i + d_i x_i$, так что суммарная стоимость портфеля будет $\sum_i x_i + \sum_i x_i d_i = 1 + \sum_i x_i d_i$. Приравнивая оба выражения для стоимости портфеля, получаем

$$d_p = \sum_i x_i d_i. \qquad \textbf{(16.1)}$$

Итак, задача увеличения капитала портфеля эквивалентна аналогичной задаче о доходности портфеля, выраженной через доходности бумаг и их доли формулой (16.1).

Как правило, доходность бумаг колеблется во времени, так что будем считать ее случайной величиной. Пусть $m_i$, $\sigma_i$ — средняя ожидаемая доходность и среднее квадратическое отклонение (СКО) этой случайной доходности, т.е. $m_i = M[d_i]$ — математическое ожидание доходности и $r_i = \sqrt{V_{ii}}$, где $V_{ii}$ — вариация или дисперсия $i$-й доходности. Будем называть $m_i$, $r_i$ соответственно эффективностью и риском $i$-й ценной бумаги. Через $V_{ij}$ обозначим ковариацию доходностей ценных бумаг $i$-го и $j$-го видов (или корреляционный момент $K_{ij}$).

Так как доходность составляющих портфель ценных бумаг случайна, то и доходность портфеля есть также случайная величина. Математическое ожидание доходности портфеля есть $M[d_P] = x_1 M[d_1] + \ldots + x_n M[d_n] = \sum_i x_i m_i$, обозначим его через $m_P$. Дисперсия доходности портфеля есть $D[dp] = \sum_{i,j} x_i x_j V_{ij}$. Так же, как и для ценных бумаг, назовем $m_P$ эффективностью портфеля, а величину $\sigma_P = \sqrt{D[d_P]}$ риском портфеля $r_P$. Обычно дисперсия доходности портфеля называется его вариацией $V_P$.

Итак, эффективность и риск портфеля выражены через эффективности составляющих его ценных бумаг и их совместные ковариации.

**Пример 1.** Портфель наполовину (по стоимости) состоит из бумаг первого вида с доходностью 14% годовых и из бумаг второго вида с доходностью 8% годовых. Какова эффективность портфеля?

Решение. Оба термина — доходность и эффективность — специально упомянуты вместе.

*Ответ:* 0,5 · 14 + 0,5 · 8 = 11% годовых.

Каждый владелец портфеля ценных бумаг сталкивается с дилеммой: хочется иметь эффективность побольше, а риск поменьше. Однако поскольку «нельзя поймать двух зайцев сразу», необходимо сделать определенный выбор между эффективностью и риском (этот выбор в конечном счете определяется отношением ЛПР к эффективности и риску — см. дополнение к ч. II).

Рассмотрим два портфеля ценных бумаг. Так как портфель оценивается по двум характеристикам — эффективности и риску, то между портфелями есть отношение доминирования. Скажем, что 1-й портфель с эффективностью $e_1$ и риском $r_1$ доминирует 2-й с $e_2$, $r_2$, если $e_1 \geq e_2$ и $r_1 \leq r_2$, и хотя бы одно из этих неравенств строгое. Недоминируемые портфели назовем *оптимальными по Парето,* такие портфели называют еще *эффективными.* Конечно, инвестор должен остановить свой выбор только на эффективных портфелях.

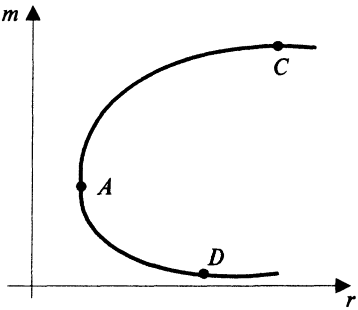


Рис. 16.1

Если рассмотреть какое-нибудь множество портфелей и нанести их характеристики — риск $r_P$ и эффективность $m_P$ на плоскость риск—доходность, то типичное множество эффективных портфелей выглядит, как кривая $DAC$ на рис. 16.1.

## 16.2. Диверсификация портфеля

Любой инвестор заинтересован в уменьшении риска портфеля при поддержании его эффективности на определенном уровне. Какие существуют рекомендации общего характера по снижению риска портфеля?

Пусть в портфеле собрано $N$ различных видов ценных бумаг. Рассмотрим дисперсию портфеля $V_P = \sum_{i,j} x_i x_j V_{ij}$. Разобьем слагаемые на две группы: $V_P = \sum_i x_i^2 V_{ii} + \sum_{i \neq j} x_i x_j V_{ij}$. В первой группе слагаемых $N$, во второй — $N(N-1)$. Предположим для простоты, что стоимость портфеля распределена равными долями по этим видам ценных бумаг, т.е. все $x_i = 1/N$. Тогда по формулам для дисперсии имеем $V_P = (1/N^2)\sum_i V_{ii} + (1/N^2)\sum_{i \neq j} V_{ij} =$ $= (1/N)(\sum_i V_{ii}/N) + (N-1/N)(\sum_{i \neq j} V_{ij}/[N(N-1)]$. Величина $(\sum_i V_{ii}/N)$

может быть названа средней дисперсией ценных бумаг, входящих в портфель, а величина $\sum_{i \neq j} V_{ij}/[N(N-1)]$ — их средней ковариацией. Поэтому предыдущую формулу можно выразить словами: дисперсия портфеля равна $(1/N)$ средней дисперсии плюс $(1 - 1/N)$ средней ковариации. Это и есть эффект диверсификации портфеля: с ростом числа входящих в портфель ценных бумаг в его дисперсии (и риске) вклад средней дисперсии (среднего риска) становится все меньше, зато все больше — вклад средней ковариации. Так что если входящие в портфель ценные бумаги мало коррелированы друг с другом, то дисперсия портфеля уменьшается с ростом числа входящих в портфель бумаг.

В реальности, однако, практически все ценные бумаги, обращающиеся на рынке, испытывают воздействие общеэкономических факторов и изменяются под их воздействием. Это приводит к тому, что их взаимная корреляция является вполне заметной величиной. Эта взаимная корреляция обусловливает так называемый *рыночный*, или *систематический*, *риск портфеля*. На рис. 16.2 показано возможное поведение риска портфеля при увеличении числа ценных бумаг в нем.

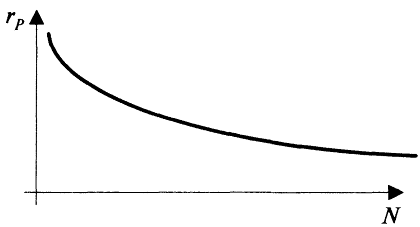



Рис. 16.2

Конечно, в силу особенностей работы эмитентов ценных бумаг каждая конкретная ценная бумага испытывает свои колебания эффективности, иногда совершенно не связанные с общерыночными. Эти колебания обусловливают так называемый *индивидуальный*, или *несистематический*, *риск* ценной бумаги.

Диверсификация портфеля может почти полностью устранить влияние на риск всего портфеля индивидуального риска отдельных ценных бумаг, но она не в силах устранить рыночный риск всего портфеля.

Рассмотрим более конкретно упрощенные примеры влияния корреляции разных ценных бумаг. Предположим сначала, что ценные бумаги различных видов ведут себя независимо, они некоррелированы, т.е. $V_{ij} = 0$, если $i \neq j$. Тогда $V_P = \sum_i x_i^2 V_{ii}$ и $\sum_i x_i = 1$.

Предположим далее, что деньги вложены равными долями, т.е. $x_i = 1/n$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Тогда $m_P = (\sum_i m_i)/n$ — средняя ожидаемая эффективность портфеля, и риск портфеля равен $r_P = \sqrt{\sum_i V_{ii}} / n$. Пусть $\gamma^2 = \max V_{ii}$, тогда $r_P \le \gamma / \sqrt{n}$.

Отсюда в ы в о д: если ценные бумаги некоррелированы, то при росте числа их видов $n$ в портфеле риск портфеля ограничен и стремится к 0 при $n \to \infty$.

**Пример 2.** Предположим, инвестор имеет возможность составить портфель из четырех видов некоррелированных ценных бумаг, эффективности и риски которых даны в таблице.

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $e_i$ | 2 | 4 | 8 | 12 |
| $\sigma_i$ | 1 | 2 | 4 | 6 |

Рассмотрим несколько вариантов составления портфеля из этих бумаг равными долями. Напомним, что эффективность портфеля есть среднее арифметическое эффективностей, а риск в данном случае $r = \sqrt{r_1^2 + \ldots + r_n^2} / n$ (см. также пример 1 из § 12.1).

А) Портфель образован только из бумаг 1-го и 2-го видов. Тогда $m_{12} = (2 + 4)/2 = 3$; $r_{12} = \sqrt{1^2 + 2^2}/2 \approx 1{,}12$.

Б) Портфель образован только из бумаг 1-го, 2-го и 3-го видов. Тогда $m_{1-3} = (2 + 4 + 8)/3 = 4{,}67$; $r_{1-3} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2}/3 \approx 1{,}53$.

В) Портфель образован из бумаг всех четырех видов. Тогда $m_{1-4} = (2 + 4 + 8 + 12)/4 = 6{,}5$; $r_{1-4} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2 + 6^2}/4 \approx 1{,}89$.

Как видим, при составлении портфеля из все большего числа ценных бумаг риск растет весьма незначительно, а эффективность растет быстро.

Однако, как указано выше, полная некоррелированность ценных бумаг по существу невозможна.

Рассмотрим теперь, как отражается корреляция между видами ценных бумаг на характеристиках портфеля. Корреляция не влияет на эффективность портфеля, ибо $m_P = \sum_i x_i m_i$, но она сказывается на его вариации, дисперсии или риске, ибо $V_P = \sum_{i,j} x_i x_j V_{ij}$. Введем в рассмотрение величины $k_{ij} = V_{ij} / (\sigma_i \sigma_j)$ — в курсе теории вероятностей они называются коэффициентами корреляции.

Тогда $V_{ij} = (\sigma_i x_i)(\sigma_j x_j)k_{ij}$. Для того чтобы понять влияние корреляции, рассмотрим два крайних случая.

Сначала случай полной прямой корреляции, когда все $k_{ij} = 1$ — это значит, что при изменении $i$-го фактора $j$-й также изменяется, причем прямо пропорционально. Тогда $V_P = \sum_i \sum_j \sigma_i x_i \sigma_j x_j = \left( \sum_i \sigma_i x_i \right)^2$. Если при этом вложить деньги равными долями, т.е. $x_i = 1/n$, то $V_P = \left( \sum_i \sigma_i \right)^2 \Big/ n^2$ и риск портфеля $r_P = \sum_i \sigma_i \Big/ n$. Если $\sigma_i \geq \gamma$, то и $r_P \geq \gamma$.

Следовательно, при полной прямой корреляции диверсификация портфеля не дает никакого эффекта — риск портфеля равен среднему арифметическому рисков составляющих его ценных бумаг и не стремится к нулю при росте числа видов ценных бумаг.

Положительная корреляция между эффективностями двух ценных бумаг имеет место, когда курс обеих определяется одним и тем же внешним фактором, причем изменение этого фактора действует на обе бумаги в одну и ту же сторону. Диверсификация портфеля путем покупки обеих бумаг бесполезна — риск портфеля от этого не уменьшится.

Теперь рассмотрим ситуацию полной обратной корреляции, т.е. когда $k_{ij} = -1$, если $i \neq j$. Для понимания сути дела достаточно рассмотреть портфель, состоящий всего из двух видов ценных бумаг ($n = 2$). Тогда $V_P = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 - 2\sigma_1 x_1 \sigma_2 x_2 = (\sigma_1 x_1 - \sigma_2 x_2)^2$ и если $x_2 = x_1 \sigma_1 / \sigma_2$, то $V_P = 0$.

Таким образом, при полной обратной корреляции возможно такое распределение вложений между различными видами ценных бумаг, что риск полностью отсутствует.

Полная обратная корреляция довольно редкое явление и обычно она очевидна.

## 16.3. Портфель Марковица минимального риска

Рассмотрим сначала математическую формализацию задачи формирования оптимального портфеля, которую предложил американский экономист Г. Марковиц (H. Markovitz) в 1952 г., за что позднее получил Нобелевскую премию.

Найдем $x_i$, минимизирующие вариацию портфеля

$$V_P = \sum_{i,j} x_i x_j V_{ij} \qquad \textbf{(16.2)}$$

при условии, что обеспечивается заданное значение эффективности портфеля $m_P$, т.е. $\sum_i x_i m_i = m_P$.

Поскольку $x_i$ — доли, то в сумме они должны составлять единицу: $\sum_i x_i = 1$.

В такой постановке минимизация вариации равносильна минимизации риска портфеля, поэтому задача Марковица может быть сформулирована следующим образом.

Найти $x_i$, минимизирующие риск портфеля

$$r_P = \sqrt{\sum_{i,j} x_i x_j V_{ij}}$$

при условии, что обеспечивается заданное значение эффективности портфеля $m_P$, т.е.

$$\sum_i x_i m_i = m_P;$$

поскольку $x_i$ — доли, то в сумме они должны составлять единицу:

$$\sum_i x_i = 1.$$

Решение (оптимальное) этой задачи обозначим значком «*». Если $x_i^* \geq 0$, то это означает рекомендацию вложить долю $x_i^*$ наличного капитала в ценные бумаги $i$-го вида. Если же $x_i^* < 0$, то содержательно это означает провести операцию «short sale» («короткая продажа»). Если такие операции невозможны, значит, необходимо ввести ограничения $x_i^* \geq 0$.

Что это за операция? Инвестор, формирующий портфель, обязуется через какое-то время поставить ценные бумаги $i$-го вида (вместе с доходом, какой они принесли бы их владельцу за это время). За это сейчас он получает их денежный эквивалент. Эти деньги он присоединяет к своему капиталу и покупает рекомендуемые оптимальным решением ценные бумаги. Так как ценные бумаги других видов (т.е. не $i$-го вида) более эффективны, то инвестор оказывается в выигрыше! Собственно, можно обойтись и без операции «short sale», если инвестору доступны займы денежных средств по безрисковой ставке.

Этот портфель минимального риска из всех портфелей заданной эффективности называется *портфелем Марковица минималь-*

*ного риска.* Ясно, что его риск $r_P$ есть функция его заданной эффективности $m_P$.

**Пример 3.** С помощью компьютера найден оптимальный портфель Марковица для трех ценных бумаг с эффективностями и рисками: (4,10); (10,40); (40,80); нижняя граница доходности задана равной 15. Доли бумаг оказались равными: 46%, 28%, 26%, минимальный риск — 25,4, доходность оказалась равной заданной — 15.

## 16.4. Портфель Тобина минимального риска

Через несколько лет после исследования Марковица другой крупнейший американский экономист Д. Тобин (D. Tobin — также впоследствии лауреат Нобелевской премии) заметил, что если на рынке есть безрисковые бумаги (к таким можно с некоторой натяжкой отнести государственные ценные бумаги), то решение задачи об оптимальном портфеле сильно упрощается и приобретает замечательное новое качество.

Пусть $m_0$ — эффективность безрисковых бумаг (фактически это безрисковая банковская ставка, в СССР таковой можно было считать годовую процентную ставку Сбербанка по вкладам до востребования, она была 2—3%), а $x_0$ — доля капитала, в них вложенного, тогда в рисковую часть портфеля вложена $(1 - x_0)$ часть всего капитала. Пусть $m_r$ — эффективность и $V_r$ — вариация (дисперсия) рисковой части портфеля и $r_r = \sqrt{V_r}$ — риск этой рисковой части. Тогда эффективность всего портфеля равна $m_P = x_0 m_0 + (1 - x_0)\, m_r$, вариация портфеля равна $V_P = (1 - x_0)^2 V_r$ и риск портфеля равен $r_P = |1 - x_0| r_r$ (считается, что безрисковые бумаги некоррелированы с остальными). Исключая $x_0$, получим $m_P = m_0 + r_P\,(m_r - m_0)/r_r$, т.е. эффективность портфеля линейно зависит от его риска. Рисковые виды ценных бумаг будем нумеровать числами от 1 до $n$.

Задача Марковица об оптимальном портфеле в этом случае такова:

$$\sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j V_{ij} \to \min,$$

$$x_0 m_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i m_i = m_P, \qquad \textbf{(16.3)}$$

$$x_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

Изложим теперь окончательное решение этой задачи, полученное Тобиным. Пусть $V$ — матрица ковариаций рисковых видов ценных бумаг, $X = (x_i)$, $M = (m_i)$ — вектор-столбцы долей $x$ капитала, вкладываемых в $i$-й вид рисковых ценных бумаг и ожидаемых эффективностей этого вида, $i = 1, .., n$. Пусть также $I$ — $n$-мерный вектор-столбец, компоненты которого равны 1. Тогда оптимальное значение долей $x_i$ есть

$$X^* = \frac{m_P - m_0}{(M - m_0 I)V^{-1}(M - m_0 I)} V^{-1}(M - m_0 I). \qquad \textbf{(16.4)}$$

Здесь $V^{-1}$ — матрица, обратная к $V$. В числителе дроби стоит число, в знаменателе, если выполнить все действия (операция транспонирования первого сомножителя в знаменателе не указана, но подразумевается), тоже получится число, причем константа, определяемая рынком и не зависящая от инвестора, $V^{-1}(M - m_0 I)$ — вектор-столбец размерности $n$. Как видим, этот вектор не зависит от эффективности портфеля $m_P$. Таким образом, вектор долей рисковых видов ценных бумаг, пропорциональный этому вектору, также не зависит от $m_P$. Следовательно, структура рисковой части портфеля не зависит от $m_P$. Однако сумма компонент вектора $X^*$ зависит от $m_P$, а именно, компоненты вектора $X^*$ пропорционально увеличиваются с ростом $m_P$, поэтому доля $x_0$ безрисковых вложений будет при этом сокращаться.

Выразим риск оптимального портфеля в зависимости от его доходности. Для этого в формулу вариации портфеля $V_P = X^T V X$ подставим оптимальный вектор $X^*$ из формулы (16.4), обозначив знаменатель формулы (16.3) через $d^2$. Получим

$$\begin{aligned} V_P &= \left[(m_P - m_0)^2 / d^4\right]\left[V^{-1}(M - m_0 I)\right]^T V\left[V^{-1}(M - m_0 I)\right] = \\ &= \left[(m_P - m_0)^2 / d^4\right](M - m_0 I)V^{-1}(M - m_0 I) = \\ &= (m_P - m_0)^2 / d^2. \end{aligned}$$

Окончательно:

$$V_P = (m_P - m_0)^2/d^2, \text{ или } r_P = (m_P - m_0)/d.$$

Можно также написать выражение эффективности оптимального портфеля от его риска: $m_P - m_0 = d r_P$ или $m_P = m_0 + d r_P$. Видно, что зависимости эти линейные.

Будем называть полученный оптимальный портфель *портфелем Тобина минимального риска*, т.е. портфель Тобина — это портфель Марковица при наличии на рынке безрисковых ценных бумаг.

## 16.5. Портфель Марковица и Тобина максимальной эффективности

Постановку Марковица задачи формирования оптимального портфеля (16.2) или (16.3) можно словами сформулировать так: сформировать портфель минимального риска из всех портфелей, имеющих эффективность не менее заданной.

Но столь же естественна и задача формирования портфеля максимальной эффективности из всех портфелей, имеющих риск не более заданного:

Найти $x_i$, максимизирующие ожидаемую эффективность портфеля

$$m_P = \sum_i x_i m_i \to \max$$

при условии, что обеспечивается заданное значение риска портфеля, т.е. $\sum_{i,j} x_i x_j V_{ij} = r_P^2$;

поскольку $x_i$ — доли, то в сумме они должны составлять единицу: $\sum_i x_i = 1$.

Назовем данную формализацию *портфелем Марковица максимальной эффективности.*

**Пример 4.** С помощью компьютера найден оптимальный портфель максимальной эффективности для трех ценных бумаг с доходностью и риском: (4,10); (10,40); (40, 80) (те же ценные бумаги, что и в примере 1); верхняя граница риска задана равной 50. Доли бумаг оказались равными: 6%, 34%, 60%, эффективность — 27,6, риск — 49,9 (компьютер перебирал доли ценных бумаг с шагом 0,02 — этим и объясняется несовпадение риска с заданным).

Если на рынке есть безрисковые бумаги, то задача формирования портфеля максимальной эффективности имеет решение, похожее на решение Тобина (см. § 16.3):

Оптимальное значение долей $x$ рисковых бумаг есть

$$X^* = \frac{r_P}{\sqrt{(M - m_0 I)V^{-1}(M - m_0 I)}} V^{-1}(M - m_0 I). \qquad \textbf{(16.5)}$$

В матрично-векторной форме задача формирования портфеля максимальной эффективности при наличии на рынке безрисковых ценных бумаг такова:

$$x_0 m_0 + MX \to \max,$$

$$XVX = r_P^2,$$

$$x_0 + IX = 1$$

(операция транспонирования подразумевается, как и прежде, см. комментарий к формуле (16.4)).

Для нахождения условного максимума составим функцию Лагранжа:

$$L = x_0 m_0 + MX + \lambda_0\left(XVX - r_P^2\right) + \lambda_1\left(x_0 + IX - 1\right).$$

Находим частные производные $L$ по $X$ и по $x_0$ и приравниваем их к нулю:

$$\begin{cases} dL/dX = 0 \\ dL/dx_0 = 0, \end{cases} \text{ получаем } \begin{cases} m_0 + \lambda_1 = 0, \\ M + \lambda_0 VX + \lambda_1 I = 0. \end{cases}$$

Выразим из второго уравнения $\lambda_1$ и подставим в первое, получим $M - m_0 I = -x_0 VX$, так что $X = (-1/\lambda_0) V^{-1}(M - m_0 I)$.

Для нахождения $\lambda_0$ подставим найденное $X$ в равенство $XVX = r_P^2$, получим

$$(-1/\lambda_0)(M - m_0 I)V^{-1}V(-1/\lambda_0)V^{-1}(M - m_0 I) = r_P^2,$$

(так как матрица $V$ симметрична, то транспонированная обратная к ней матрица совпадает с обратной же). Далее имеем

$$\left[(-1/\lambda_0)^2\right]\ (M - m_0 I)V^{-1}(M - m_0 I) = r_P^2.$$

Обозначая $(M - m_0 I)V^{-1}(M - m_0 I)$ через $d^2$, получаем $(-1/\lambda_0) = r_P/d$ и окончательно $X^* = (r_P/d)V^{-1}(M - m_0 I)$, т.е. формулу (16.5).

Опять видно, что структура рисковой части оптимального в этом смысле портфеля также не зависит от ограничения на величину риска.

Выразим эффективность портфеля максимальной эффективности в зависимости от заданного его риска $r_P$, т.е. найдем величину $x_0^* m + MX^*$, где $x_0^*$ и $X^*$ — оптимальные доли вложений. Имеем $x_0^* = 1 - IX^*$, подставляя это выражение и $X$ из формулы (16.5), получаем $x_0^* m_0 + MX^* = \left(1 - I(r_P/d)V^{-1}\cdot(M - m_0 I)\right)m_0 + M(r_P/d)V^{-1}(M - m_0 I) =$ $m_0 + (r_P/d)(M - m_0 I)\,V^{-1}(M - m_0 I) = m_0 + dr_P$. Будем называть полученный оптимальный портфель *портфелем Тобина максимальной эффективности.*

**Замечание 1.** Обратим внимание, что структура рисковой части оптимального портфеля одна и та же в обеих постановках и не зависит от задаваемых доходности или риска портфеля.

**Замечание 2.** В реальности, однако, редко кто из инвесторов озабочен составлением оптимальных портфелей. Обычно инвесторы создают специализированные портфели, содержащие ценные бумаги какого-нибудь определенного профиля: по отрасли промышленности, государственные или какого-нибудь пенсионного фонда и т.п.

## ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

**1.** Проверьте доходность и риск портфелей из примеров 3, 4.

**2.** Из двух некоррелированных ценных бумаг с эффективностями 2 и 6 и рисками 10 и 20 с помощью компьютера составлено шесть портфелей: в портфеле с номером $k$ доля первых бумаг $x = 1 - 0{,}2\,k$, доля вторых равна $(1 - x)$, т.е. портфель, состоящий только из бумаг 1-го вида, получает номер 0, а портфель, состоящий только из бумаг 2-го вида, получает номер 5. Компьютер нашел их эффективности и риски.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Эффективности | 2,0 | 2,8 | 3,6 | 4,4 | 5,2 | 6,0 |
| Риски | 10,0 | 8,9 | 10,0 | 12,6 | 16,1 | 20 |
| Портфели | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

Проверьте компьютерные расчеты. Затем нанесите портфели как точки на плоскость риск— эффективность и отметьте доминируемые и недоминируемые портфели, т.е. оптимальные по Парето.

**3.** Имея безрисковые ценные бумаги с эффективностью 4 и некоррелированные рисковые с эффективностями 8 и 14 и рисками 10 и 30, с помощью компьютера составили портфель Тобина эффективности 12. Доли бумаг получились такими: −0,51; 1,18; 0,33. Проверьте компьютерные расчеты. Как понимать отрицательную долю безрисковых бумаг?

**4.** В портфеле бумаги с доходностью 5% годовых составляют 30% по стоимости, а остальные бумаги имеют доходность 8% годовых. Какова доходность портфеля?

**5.** Сформировать портфель Тобина минимального риска из двух видов ценных бумаг: безрисковых с эффективностью 2 и рисковых с эффективностью 10 и риском 5. Найти зависимость эффективности портфеля от его риска.

Р е ш е н и е. Задача формирования оптимального портфеля в данной ситуации (см. формулу (16.2)):

$$
\begin{aligned}
&5x_1 \to \min,\\
&2x_0 + 10x_1 = m_P,\\
&x_0 + x_1 = 1.
\end{aligned}
$$

Отсюда $x_0^* = (10 - m_P)/8$, $x_1^* = (m_P - 2)/8$. Тогда $m_P = 2 + 8x_1^* =$ $= 2 + 8r_P/5$.

**6.** Решить задачу формирования портфеля Тобина минимального риска при наличии безрисковых бумаг и некоррелированных остальных в общем виде.

Р е ш е н и е. Используем формулу (16.4). Матрица $V$ ковариаций рисковых видов ценных бумаг является в данном случае диагональной, обратная к ней также диагональная:

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \sigma_2^2 & \\ 0 & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}, \qquad V^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1^2 & & 0 \\ & 1/\sigma_2^2 & \\ 0 & & 1/\sigma_n^2 \end{pmatrix}.$$

Произведя необходимые вычисления, получаем вектор долей рисковых бумаг

$$X^* = \frac{m_p - m_0}{\sum_{i=1}^{n} (m_i - m_0)^2/\sigma_r^2} \begin{pmatrix} (m_1 - m_0)/\sigma_1^2 \\ \vdots \\ (m_n - m_0)/\sigma_n^2 \end{pmatrix}.$$

**7.** Сформировать портфель Тобина максимальной эффективности и риска не более заданного из трех видов ценных бумаг: безрисковых с эффективностью 2 и некоррелированных рисковых ожидаемой эффективности 4 и 10 и рисками 2 и 4. Каковы соотношения доли бумаг в рисковой части оптимального портфеля?

Р е ш е н и е. Итак, $m_0 = 2$, $M = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$. Ограничим риск портфеля величиной $r_P$. Воспользуемся формулой (16.4):

$$X^* = (r_P/d)V^{-1}(M - m_0 I).$$

Матрицу, обратную к $V$, найдем методом миноров:

$V^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/16 \end{pmatrix}$. Вычислим $d^2 = (M - m_0 I)^T V^{-1}(M - m_0 I) =$

$$= (M - m_0 I)^T \left[V^{-1}(M - m_0 I)\right] = (2;8)\left[\begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}\right] = (2;\, 8)\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = 5.$$

Окончательно вектор долей рисковых бумаг $X^* = \left(r_P/\sqrt{5}\right)\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

Таким образом, рисковые доли должны быть одинаковы и каждая из них равна $r_P/\sqrt{20}$. Следовательно, $x_0^* = 1 - r_P/\sqrt{5}$.

**8.** Поставить обе задачи сформировать портфели Тобина: минимального риска при заданной эффективности и максимальной эффективности при заданном риске из трех видов ценных бумаг. безрисковых с эффективностью 2 и рисковых с ожидаемой эффективностью 6 и 8 и рисками 4 и 9 и взаимной корреляцией 9.

*О т в е т:*

$$16x_1^2x + 18x_1x_2 + 81x_2^2 \to \min, \quad 2x_0 + 6x_1 + 8x_2 \to \max,$$
$$2x_0 + 6x_1 + 8x_2 = m, \quad 16x_1^2 + 18x_1x_2 + 81x_2^2 = r_P^2,$$
$$x_0 + x_1 + x_2 = 1, \quad x_0 + x_1 + x_2 = 1.$$

**9.** Запишем вариацию доходности портфеля $V_P = \sum_{i,j} x_i x_j V_{ij}$ так: $V_P = \sum_i x_i \left( \sum_j x_j V_{ij} \right)$ и назовем величину $R_i = \sum_j x_j V_{ij}$ портфельной ковариацией доходности $i$-й ценной бумаги. Оказывается, что в оптимальном портфеле эти ковариации пропорциональны превышению эффективности ценных бумаг над безрисковыми вложениями (подразумевается, что последние на рынке имеются).

Действительно, вектор портфельных ковариаций $R = VX^*$, где $X^*$ — вектор долей рисковых вложений. В оптимальном портфеле $X^*$ определяется формулами (16.4), (16.5), т.е. имеет вид: $X^* = \gamma V^{-1}(M - m_0 I)$, где $\gamma$ — скаляр, равный $(m_P - m_0)/d^2$ или $r_P/d$. Подставляя $X^*$ из этих выражений, получим $R = V\gamma V^{-1}(M - m_0 I) = \gamma VV^{-1}(M - m_0 I) = \gamma (M - m_0 I)$, т.е. видно, что векторы $R$ и $(M - m_0 I)$ пропорциональны.

**10.** Докажите, что характеристики портфелей Тобина будут действительно равны заданным.

У к а з а н и е. Используйте формулы (16.4) и (16.5).

# Глава 17

# ФОРМИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ С ПОМОЩЬЮ ВЕДУЩЕГО ФАКТОРА ФИНАНСОВОГО РЫНКА

Цель анализа финансового рынка — разработка рекомендаций для инвесторов — в какие ценные бумаги вкладывать капитал и в каком количестве. Выше было рассмотрено решение задачи формирования оптимального портфеля ценных бумаг. Однако оно носит формальный характер, поскольку опирается на предположение о том, что доходности вложений в ценные бумаги являются случайными величинами с заданными вероятностными характеристиками. Фактически требуется знание математических ожиданий и ковариаций доходностей. Откуда взять эти величины? Как их найти, учитывая имеющуюся информацию?

## 17.1. Прямой статистический подход

В развитых странах регулярно публикуются сведения о биржевом курсе ценных бумаг, прежде всего акций ведущих компаний. Таким образом, можно проанализировать последовательности, отражающие историю курсов и выплачиваемых дивидендов за достаточно длительный период.

Пусть значения доходностей $d$ образуют ряд чисел ($d_1$, ..., $d_n$). Можно применить методы математической статистики и найти среднее $\bar{d} = \sum_i d_i / n$ и оценку дисперсии или вариации $\hat{V} = \sum_i (d_i - \bar{d})^2 / n$ и затем использовать их в качестве приближенных значений математического ожидания и дисперсии или вариации. Примерно так же можно поступить с ковариациями.

Реальные цифры таковы. Число ведущих компаний, акции которых котируются на биржах США и составляют основную (по общей стоимости) часть рынка, обычно оценивается в $n = 500$ (такое число учитывается в наиболее популярном издании «Standard and Poor's index»). Длительность ежеквартальных временных рядов, имеющих смысл для статистической обработки, $T = 100$

(экономические условия и даже список ведущих компаний за период более 25 лет слишком сильно изменяются, чтобы столь устаревшие данные считать представляющими ту же генеральную совокупность).

Таким образом, имеется $n \cdot T = 5000$ чисел, а оценить нужно $n = 500$ средних и $n(n-1)/2 > 100\,000$ ковариаций, т.е. оценить нужно намного больше величин, чем имеем данных, в силу чего точность оценок не может быть хорошей. Поэтому прямой статистический подход для получения оценок ковариаций малопригоден, хотя необходим для нахождения средних (и тем самым для оценки математических ожиданий).

## 17.2. Влияние ведущего фактора на составляющие финансового рынка

Выход был найден — это анализ зависимостей курсов и других характеристик ценных бумаг от ведущих факторов финансового рынка. Что же такое ведущий фактор?

Как уже подчеркивалось, в экономической жизни все взимосвязано, но есть факторы, которые влияют сразу практически на все показатели. Например, уровень цен на ближневосточную нефть влияет на котировку акций почти всех компаний США, поскольку эта нефть покрывает более половины энергетических потребностей США. Если цена на нефть поднимется, станет дороже бензин для автомобилей, уменьшится спрос на бензин, на автомобили, на металл для их изготовления, повысятся цены на сельскохозяйственные продукты, поскольку затраты на топливо — основной компонент их себестоимости.

Рассмотрим один из таких ведущих факторов, не определяя пока его природу. Обозначим его $f$ и будем считать, что доходности всех ценных бумаг зависят от него. Пусть $d$ — доходность какой-нибудь фиксированной ценной бумаги. Простейшая форма зависимости — линейная, так что примем гипотезу, что $d$ линейно зависит от $f$: $d \approx a + bf$. Так как обе величины $d$, $f$ случайны, то равенство вряд ли может быть точным, поэтому использован знак приближенного равенства. Как найти константы $a$, $b$? Рассмотрим эту задачу в общем случае, для произвольных двух случайных величин $X$, $Y$.

Попробуем подобрать линейную зависимость $y = a + bx = \varphi(x)$ такую, чтобы $F(a, b) = M[(Y - a - bX)^2]$ было минимальным. Имеем $F(a, b) = M[Y^2 - 2aY - 2bXY + a^2 + 2abX + b^2X^2] = M[Y^2] - 2aM[Y] - 2bM[XY] + a^2 + 2abM[X] + b^2M[X^2]$. Дифференцируя $F(a, b)$ частным образом по $a$ и $b$ и приравнивая частные производные 0, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a + bM[X] = M[Y], \\ aM[X] + bM[X^2] = M[XY]. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим:

$$b = K_{XY}/D_X, \quad a = M[Y] - M[X] \cdot K_{XY}/D_{X_i},$$

значит, искомая линейная зависимость есть $y = \varphi(x) = (M[Y] - M[X] \cdot K_{XY}/D_X) + x \cdot K_{XY}/D_X = M[Y] + (x - M[X])K_{XY}/D_{X_i}$.

Найдем математическое ожидание случайной величины $Z = M[Y] + (X - M[X])K_{XY}/D_X$, являющейся функцией от случайной величины $X$. Имеем $M[Z] = M[Y]$. Значит, в частности, при найденных $a$, $b$ для математических ожиданий с.в. $X$, $Y$ верно не приближенное равенство, а точное:

$$M[Y] = a + bM[X]. \tag{17.1}$$

На практике совместное распределение случайных величин $(X, Y)$ неизвестно, известны только результаты наблюдений, т.е. выборка пар $(x, y)$ значений $(X, Y)$. Все рассмотренные величины заменяются их выборочными аналогами. Так, для определения $a$, $b$ получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} a + b\overline{X} &= \overline{Y}, \\ a\overline{X} + b\overline{X^2} &= \overline{XY}, \end{aligned} \tag{17.2}$$

где, напомним, $\overline{X} = \left(\sum_i x_i\right)\Big/ n$, $\overline{Y} = \left(\sum_i y_i\right)\Big/ n$, $\overline{X^2} = \left(\sum_i x_i^2\right)\Big/ n$, $\overline{XY} = \left(\sum_i x_i y_i\right)\Big/ n$.

Решая эту систему, получим $b = (\overline{XY} - \overline{X} \cdot \overline{Y})\big/[(\overline{X^2} - (\overline{X})^2] = \hat{K}_{XY}\big/\overline{s_X^2}$, $a = \overline{Y} - \overline{X}\hat{K}_{XY}\big/\overline{s_X^2}$, значит, прямая линия регрессии имеет уравнение $y = \overline{Y} + (x - \overline{X})\hat{K}_{XY}\big/\overline{s_X^2}$. Через $\hat{K}_{XY}$, $\overline{s_X^2}$ обозначаем выборочные аналоги корреляционного момента случайной величины $X$, $Y$ и дисперсии $X$ соответственно.

Кстати, как можно убедиться, для средних арифметических значений верно точное равенство

$$\overline{Y} = a + b \cdot \overline{X}. \tag{17.3}$$

**Пример 1.** Найти оценки параметров линейной регрессии по выборке (9, 6), (10, 4), (12, 7), (5, 3). Изобразить заданные точки и прямую регрессии в прямоугольной системе координат.

Решение. Находим $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{X^2}$, $\overline{XY}$. Получаем $\overline{X} = (9+10+12+$ $+5)/4 = 9$, $\overline{Y} = 5$, $\overline{X^2} = 350/4$, $\overline{XY} = 193/4$. Значит, $b = 1/2$; $a = 1/2$ (см. систему (17.2). Итак, уравнение регрессии есть $y = 1/2 + x/2$. Изобразим указанные точки и линию регрессии в системе координат на плоскости (рис. 17.1):

Итак, в теоретическом плане линейная (приближенная) зависимость доходности $d$ рассматриваемой бумаги от $f$ выглядит так: $d \approx a + bf$, где $b = V_{fd}/V_{ff}$, $a = m_d - b \cdot m_f$. На практике же приходится использовать соответствующие выборочные оценки и тогда получим: $b = \hat{V}_{fd} / \hat{V}_{ff}$, $a = \bar{d} - b \cdot \bar{f}$, где $\hat{V}_{fd} = \overline{df} - \bar{d} \cdot \bar{f}$ и $\hat{V}_{ff} = \overline{f^2} - (\bar{f})^2$.

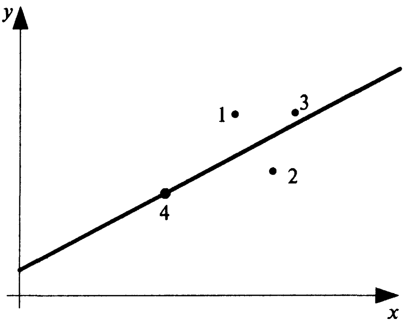


**Рис. 17.1**

(Напоминаем, что $\hat{V}_{ff}$, $\hat{V}_{fd}$ обозначают выборочные аналоги вариации случайной величины $f$ и ковариации $d$, $f$, в частности, через $\bar{d}$ обозначено среднее выборочное значение доходности $d$ и т.д. — см. пример 1.)

Отметим, как и выше (см. формулу (17.1)), что для математических ожиданий или выборочных средних значений верно точное равенство, аналогичное (17.1) или (17.3).

Если гипотеза о влиянии ведущего фактора на данную ценную бумагу верна, то все отклонения от прямой $a + b \cdot f$ вверх и вниз являются действительно случайными и если в будущем возникнет новая ситуация, новая пара величин ($f$, $e$), то соответствующая точка расположится в окрестности указанной прямой.

Если ведущий фактор $f$ выбран удачно, то его влиянием определяются почти все случайные колебания доходности $d$, а остаточные колебания $e = d - (a + bf)$ оказываются сравнительно небольшими и некоррелированными и друг с другом и с другими доходностями $d$. Обозначим через $v_{ii}$ вариацию остаточного колебания $e_i$ и через $v_{ij}$ — совместную ковариацию различных остаточных величин $e_i$, $e_j$. Итак, окончательно получаем: $d_i = a_i + b_i \times \times f + e_i$ и $v_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Если для каждой ценной бумаги аналогичная зависимость ее доходности $d$ от ведущего фактора $f$ найдена, то можно легко найти и все нужные величины для формирования оптимального портфеля. Действительно, имеем для эффективности $i$-й бумаги точное равенство $m_i = a_i + b_i m_f$, где $m_f$ — эффективность ведущего фактора, для вариации $i$-й ценной бумаги и совместных ковариаций имеем точные равенства:

$$V_{ii} = b_i^2 V_{ff} + v_{ii}, \quad V_{ij} = b_i b_j V_{ff}. \tag{17.4}$$

## 17.3. Эффективность рынка как ведущий фактор

В роли ведущего фактора $f$ наиболее удобно брать среднюю доходность рисковых бумаг самого финансового рынка. Это взвешенная (с учетом капитала) сумма доходностей всех рисковых ценных бумаг, обращающихся на рынке.

**Пример 2.** На рынке обращаются рисковые ценные бумаги, доли (среди рисковых бумаг) и эффективности которых (средние годовые доходности в процентах) таковы:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Доли | 20 | 10 | 10 | 10 | 5 | 5 | 40 |
| Эффективности | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 6 |

Эффективность рынка (средняя годовая доходность рисковых бумаг) равна $(20 \cdot 8 + 10 \cdot 10 + 10 \cdot 12 + 10 \cdot 14 + 5 \cdot 16 + 5 \cdot 18 + 40 \cdot 6)/100 = 9{,}3\%$.

Определенная таким образом эффективность рынка является абстракцией. Ведь на финансовом рынке обращается огромное число ценных бумаг, среди которых много кратковременных (за год образуются и погибают тысячи корпораций, выпускающих свои ценные бумаги), есть малорисковые, относительно которых не ясно, не признать ли их безрисковыми. Выход состоит в отслеживании характеристик наиболее важных для рынка ценных бумаг с длительной историей. Обработка этих бумаг по специальным правилам позволяет получать разнообразные индексы (см. в § 17.4 описание таких индексов), каждый из которых может отображать эффективность рынка, как она определена выше. В дальнейшем эффективность рынка понимается как один из таких глобальных рыночных индексов.

**Пример 3.** В таблице указаны доходности ценной бумаги $d$ и (средняя) доходность рынка $f$ (по рисковым бумагам) на протяжении ряда кварталов. Найти регрессию $d$ на $f$.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d$ | 10 | 12 | 9 | 10 | 9 | 10 | 12 | 10 | 8 | 10 |
| $f$ | 15 | 16 | 14 | 15 | 14 | 15 | 17 | 16 | 13 | 15 |

Решение. Находим оценки для математического ожидания, дисперсии $d, f$ и т.п. оценки и получим

$$\bar{d}=10, \quad \bar{f}=15, \quad \hat{V}_{ff}=\sum_{i=1}^{10}(f_i-15)^2/10=1{,}2;$$

$$\hat{V}_{ef}=\sum_{i=1}^{10}(e_i-10)(f_i-15)/10=1{,}2\,.$$

Значит, $b=\hat{V}_{ef}\,/\,\hat{V}_{ff}=(1{,}2)/(1{,}2)=1$, $a=\bar{d}-b\cdot\bar{f}=10-1\cdot 15=-5$ .

Таким образом, уравнение линейной зависимости $d$ от $f$ есть: $d\approx f-5$.

Итак, предполагаем, что доходности всех ценных бумаг зависят от доходности рынка $f$: $d_i = a_i + b_i f + e_i$, причем эффективности бумаги $m_i$ и рынка $m_f$ (средние ожидаемые доходности) связаны точным равенством $m_i = a_i + b_i m_f$. Вариация доходности $i$-й бумаги при этом равна $V_{ii}=b_i^2V_{ff}+v_{ii}$ — см. (17.4), где $V_{ff}$ — вариация средней рыночной доходности (средней доходности на единицу стоимости ценных бумаг рынка).

Рассмотрим в этой ситуации портфель ценных бумаг. Оказывается, эффективность (рисковой части) портфеля с зафиксированными долями бумаг также линейно зависит от эффективности рынка. В самом деле, пусть доля $i$-й ценной бумаги есть $x_i$, тогда эффективность портфеля

$$m_P=\sum_i x_i(a_i+b_im_f)=\sum_i x_ia_i+\left(\sum_i x_ib_i\right)\cdot m_f \qquad \textbf{(17.5)}$$

или, обозначив $a_P=\sum_i a_ix_i$, $b_P=\sum_i x_ib_i$, получим $m_P=a_P+b_Pm_f$ .

Далее, дисперсия рассматриваемого портфеля $D_P=\sum_{i,j}x_ix_jV_{ij}$ может быть разбита на две части: $D_P=\sum_i x_i^2(b_i^2V_{ff}+v_{ii})+\sum_{i\neq j}x_ix_jb_ib_jV_{ff}=$

$$=\sum_i x_i^2v_{ii}+\sum_{i,j}x_ix_jb_ib_jV_{ff}=D_1+D_2\,.$$

Поскольку первая часть $D_1 = \sum_i x_i^2 v_{ii}$ представляет взвешенную сумму собственных дисперсий доходностей бумаг, входящих в портфель, то эта часть может быть названа *собственной дисперсией портфеля*, а квадратный корень из нее, т.е. $r_1 = \sqrt{\sum_i x_i^2 v_{ii}}$, может быть назван *собственным риском портфеля.*

Вторая часть $D_2 = \sum_{i,j} x_i x_j b_i b_j V_{ff} = \left(\sum_i x_i b_i\right)^2 V_{ff}$ должна быть названа *рыночной дисперсией.* Извлекая из нее квадратный корень, получаем *рыночный риск портфеля* $r_2 = r_f \mid \sum_i x_i b_i \mid$, где $r_f$ — риск всего рынка, т.е. квадратный корень яз дисперсии доходности рынка (средней доходности на единицу стоимости ценных бумаг рынка).

Предположим, что капитал портфеля вложен равными долями во все ценные бумаги, тогда собственная дисперсия портфеля равна $\left(\sum_i v_{ii}\right)\Big/ n$ и убывает к нулю при $n \to \infty$, если собственные риски бумаг $\sqrt{v_{ii}}$ ограничены сверху (так как слагаемых всего *n*), так же ведет себя и собственный риск портфеля. Таким образом, еще раз подтверждается вывод Марковица об уменьшении собственного риска портфеля при увеличении числа бумаг, входящих в него. Наоборот, рыночный риск портфеля при $n \to \infty$ стремится к $r_f \mid \sum_i b_i \mid / n$, и если коэффициенты $b_i$ ограничены снизу, то этот риск к нулю вовсе не стремится (так как число слагаемых *n).*

Задачу Марковица (см. (16.2)) о формировании портфеля заданной эффективности $m_P$ и минимального риска теперь можно сформулировать так:

$$\left(r_f \sum_i x_i b_i\right)^2 + \sum_i x_i^2 v_{ii} \to \min,$$

$$\sum_i x_i (a_i + b_i m_f) = m_P, \qquad \textbf{(17.6)}$$

$$\sum_i x_i = 1$$

и в зависимости, разрешена или нет операция «short sale» с добавлением требовательности неотрицательности переменных.

Как видим, получилась «почти» задача линейного программирования. Отличие — в нелинейной добавке в целевой функции.

## 17.4. Эффективность рынка, эффективность ценной бумаги и ее «бета»

Итак, предполагаем, что доходность любой ценной бумаги зависит от доходности рынка $f$: $d_t = a_i + b_i f + e_i$ (повторим еще раз, что под доходностью рынка понимается средняя доходность рисковых бумаг). Обычно вместо буквы $b_i$ используют букву $\beta_i$. Этот коэффициент так и называют: «бета ценных бумаг вида $i$ относительно рынка» или, короче, «бета $i$-го вклада». Эта величина определяет влияние рынка на данные ценные бумаги: если $\beta_i > 0$, то доходность бумаг $i$-го вида колеблется в такт с рынком, а если $\beta_i < 0$, то поведение бумаги прямо противоположно колебаниям доходности рынка в целом.

Как отмечено выше, вариация доходности $V_{ii}$ каждой ценной бумаги равна $\beta_i^2 V_{ff} + v_{ii}$, т.е. состоит из двух слагаемых: «собственной» вариации $v_{ii}$, не зависящей от рынка, и «рыночной» части вариации $\beta_i^2 V_{ff}$, определяемой случайным поведением рынка в целом. Их отношение $\beta_i^2 V_{ff} / v_{ii}$ обозначается $R_i^2$ и называется $R$-squared. Это отношение характеризует долю риска данных ценных бумаг, вносимую рынком. Те бумаги, для которых $R$-squared велико, в каком-то смысле предпочтительнее, так как их поведение более предсказуемо.

Продолжим рассмотрение примера 1. Регрессия $d$ на $f$ найдена: $d \approx f - 5$. Следовательно, случайная величина остаточных колебаний $e$ есть $d - (f - 5)$. Проще всего найти вариацию этого остатка, составив ряд значений $e$:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | −1 | 0 | 0 |

Среднее, естественно, равно 0, и потому $\hat{v} = 2/10$. Далее,

$\beta = b = 1, \quad R^2 = 1 \cdot \hat{V}_{ff} / \hat{v} = (1{,}2)/(0{,}2) = 6.$

(Напоминаем, что $\hat{V}_{ff}, \hat{v}$, и обозначают выборочные аналоги вариаций случайных величин $f$, $e$, в частности,

$$\hat{V}_{ff} = \sum_{i=1}^{10} (f_i - 15)^2 / 10 = 1{,}2).$$

Эффективность ценных бумаг удобно отсчитывать от эффективности безрискового вклада $m_0$. Итак, $m_i = a_i + \beta_i m_f = m_0 + \beta_i(m_f - m_0) + \alpha_i$, где $\alpha_i = a_i + (\beta_i - 1)m_0$. Превышение эффективности ценной бумаги над безрисковой эффективностью $m_0$ называется *премией за риск*. Таким образом, эта премия за риск в основном линейно зависит от премии за риск, складывающейся для рынка в целом, и коэффициентом является «бета» данной бумаги. Это, однако, верно, если $\alpha = 0$. Такие ценные бумаги называются, справедливо оцененными». Те же бумаги, у которых $\alpha > 0$, рынком недооценены, а если $\alpha < 0$, то рынком переоценены.

В частности, в рассматриваемом примере $\alpha$ ценной бумаги равна $\alpha + 4(b - 1) = -5$, следовательно, эта бумага переоценена рынком (эффективность безрисковых вложений принята равной 4).

Заметим, что в силу формулы (17.5) можно утверждать, что не только бумаги имеют «беты», но также и портфели, и «бета» портфеля равна взвешенной сумме «бета» бумаг, входящих в портфель. Подобным образом $\alpha_P$ портфеля равна $a_P + (\beta_P - 1)\ m_0$, т.е. выражается аналогично «бета» портфеля. Как и для бумаг, портфель называется «справедливо оцененным», недооцененным, переоцененным, если соответственно $\alpha_P = 0$, $\alpha_P > 0$, $\alpha_P < 0$ (рис. 17.2).

Прямая на рисунке называется *линией ценных бумаг* (Security Market Line — SML). По горизонтальной оси отложены коэффициенты $\beta$, по вертикальной — эффективности бумаг и портфелей. Но эта прямая SML отражает идеальную зависимость между $\beta$ и эффективностью бумаг и портфелей (такая зависимость постулируется как реальная в модели САРМ — см. § 18.3). Все точки, лежащие на прямой SML, соответствуют «справедливо оцененным» бумагам (портфелям), а те, которые лежат выше/ниже этой линии, — недооцененным/переоцененным.

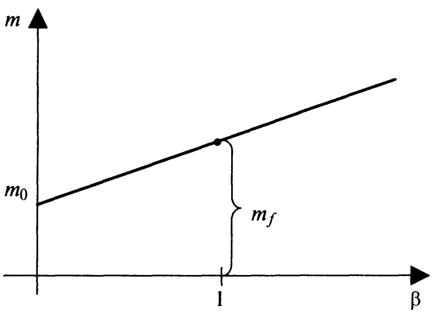



**Рис. 16.2**

В частности, одна из задач финансового аналитика состоит в нахождении недооцененных рынком бумаг и в рекомендации инвестору приобретать их.

## 17.5. Другие ведущие факторы рынка

Таких факторов довольно много. К наиболее известным из них относятся средние и индексы Доу Джонса (Dow Jones). Промышленный индекс Доу Джонса DJIA (Dow Jones Industrial Average) составляется по ценным бумагам 30 крупнейших индустриальных компаний. Он рассчитывается путем сложения цен включенных в него акций на момент закрытия биржи и деления полученной суммы на определенный коэффициент. В дальнейшем изложении подразумевается именно этот индекс Доу Джонса.

Аналогично построены и другие индексы.

Помимо показателей Доу Джонса, широко распространены: Standard&Poor's 500 index — индекс крупнейших 400 индустриальных + 20 транспортных + 40 коммунальных + 40 финансовых компаний.

The NYSE Composite index — составной индекс Нью-Йоркской биржи — по всем ценным бумагам, которые на ней котируются.

Значение индекса DJIA за 15 апреля 1999 г. было равно 10 462.

Что касается российских индексов, то до краха пирамиды ГКО 17 августа 1998 г. использовались несколько индексов, устроенных подобно указанным выше. Сейчас (весной 2003 г.), пожалуй, какого-то лидирующего нет; можно отметить индекс РТС (Российской Торговой Системы) и фондовый индекс «Коммерсанта» — широко известной газеты. На рис.17.3 приведена диаграмма значений индекса «Коммерсанта» за первую половину апреля 1999 г.

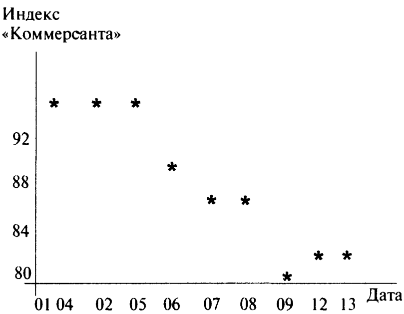



**Рис. 16.3**

### ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

**1.** По каким причинам может меняться безрисковая ставка?

**2.** Как подсчитать β данной ценной бумаги?

**3.** Почему бумаги с отрицательной β воспринимаются как необычные, экстравагантные?

**4.** Почему бумаги с отрицательной β хороши для диверсификации портфеля?

**5.** Портфель состоит наполовину по стоимости из ценной бумаги с $\beta = 1{,}2$ и из ценной бумаги с $\beta = 0{,}9$. Найдите $\beta$ портфеля.

**6.** Пусть у двух бумаг $\beta$ равны соответственно 1,2 и $-0{,}8$. Постройте портфель с $\beta = 0$ из этих двух бумаг.

**7.** Если $\beta$ портфеля равна 0, означает ли это, что портфель безрисковый?

**8.** Даны значения доходности ценной бумаги (нижняя строка) и рынка (верхняя строка) на протяжении десяти кварталов:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 9 | 9 | 10 | 10 | 11 | 11 | 12 | 10 | 8 |
| 23 | 21 | 20 | 22 | 23 | 24 | 25 | 27 | 25 | 20 |

С помощью компьютера подсчитаны характеристики ценной бумаги: $a = 4{,}67$; $b = 1{,}83$; $\alpha = 8{,}00$; собственная вариация — 0,77; рыночная — 4,03; $R$-squared = 5,26. Эффективность безрисковых вложений равна 4. Проверьте компьютерные расчеты.

# Глава 18

# ФИНАНСОВЫЙ РЫНОК И ЕГО МОДЕЛИ

## 18.1. Соглашения о финансовом рынке

На финансовом рынке его участники проводят финансовые операции с помощью финансовых инструментов.

Результат большинства операций невозможно предсказать. Невозможно в общем предсказать и другие какие-либо характеристики операций, например доход и доходность. Но практическая работа настойчиво требует этого. Выход заключается в принятии определенных соглашений о рынке, позволяющих привлекать для анализа хотя бы какие-то научные доводы. В основном настаивают на трех предположениях:

1. «Скрытые» параметры типа психологических мотивов не учитываются. Любой участник рынка стремится действовать так, чтобы обеспечить себе наибольший доход, а не действовать «назло» своему конкуренту и тем самым непредсказуемо с объективной точки зрения. Данное предположение служит принципиальным основанием для применения научных методов анализа рынка.

2. Хотя с чисто абстрактной точки зрения состояний рынка бесконечно много и они полностью, со всеми деталями, не повторяются, все же довольно часто для данного сегодняшнего анализируемого состояния может найтись близкое аналогичное состояние в прошлом или в другом месте. Это позволяет надеяться, что и дальнейшее развитие сегодняшнего состояния пойдет примерно так же, как и найденного аналогичного (с учетом изменений, происшедших на рынке). Такой способ анализа называется *поиском аналогов.* Это предположение о рынке можно развить далее, допустив, что различные показатели рынка можно моделировать как случайные величины. Данное предположение открывает путь к использованию теоретико-вероятностных методов. Нужно совершенно четко сказать, что в полной мере это предположение не выполняется. Однако нужно признать, что так всегда обстоит дело с применением теоретико-вероятностных, статистических закономерностей на практике.

3. Об анализируемом финансовом инструменте (или о близких в некотором смысле к нему) должна быть накоплена опреде-

ленная информация. В настоящее время это не так сложно, как можно подумать. В базах данных, рассеянных по всему миру, накоплены огромные массивы разнообразной информации и толково составленный запрос может принести много нужной информации (например, о курсе доллара и других валют на мировых валютных рынках в данный момент или о поведении курсов этих валют за последние годы). Этой информации вполне может быть достаточно для статистической обработки, чтобы получить оценки интересующих нас показателей с нужной точностью.

Три сформулированных предположения служат основной для исследования финансовых рынков научными методами (математическими, с помощью компьютерной техники и т.д.), построения моделей таких рынков, все более полно описывающих и отражающих реальные финансовые рынки. Этим моделям и посвящена данная глава.

## 18.2. Эффективный рынок

Хотя гипотеза поведения цен как случайного блуждания далеко не сразу была принята экономистами и финансистами (финансовыми аналитиками), по всей видимости она привела к (теперь уже) классической концепции эффективного рынка. Эффективность означает, что рынок ведет себя «рационально». Под этим подразумевается, что на рынке:

1) мгновенно производится коррекция цен на изменение внешних условий, цены становятся опять «справедливыми», не оставляя участникам рынка чисто спекулятивных возможностей получения прибыли только за счет разницы в ценах;

2) участники рынка однородно оценивают поступающую информацию, мгновенно корректируя свои решения;

3) участники рынка преследуют свои собственные (эгоистические) цели, которые характеризуются некоторым объективным образом; данное предположение позволяет анализировать действия конкретного участника, опираясь на некоторые объективные его устремления.

Эти предположения выражены чисто словами. Тем более удивительно, что они вместе с гипотезой о случайном блуждании цен позволяют развить стройную и довольно сложную математическую теорию эффективного рынка.

Один из выводов этой теории — об отсутствии на эффективном рынке арбитражных возможностей. Арбитраж — это купля-продажа активов, позволяющая извлечь прибыль из разницы цен на разных рынках. На эффективном рынке такое невозможно, ибо арбитражеры будут своими действиями устранять разницу цен на активы со схожими характеристиками. В частности, ценная бумага, «доминируемая» по своим характеристикам какой-нибудь другой, не может долго функционировать на таком рынке и должна исчезнуть.

Ключевое положение о поведении цен на таком рынке — что они «случайно» блуждают — приводит к тому, что наилучший прогноз цены на завтра есть сегодняшняя цена.

Еще один вывод этой теории — каждый участник рынка обязан диверсифицировать свой портфель и тем самым свести к нулю несистематический риск. Следовательно, только систематический риск портфеля будет оценен рынком и потому доходность портфеля должна зависеть только от такого риска. Этот вывод был сделан уже после появления упоминавшейся выше теории Марковица о строении оптимального портфеля.

Математическая теория эффективного портфеля базируются на довольно сложной теории случайных процессов и здесь не излагается.

Весьма примечательно, что теория эффективного рынка послужила толчком к образованию некоторых конкретных и ранее неизвестных финансовых инструментов вроде «фондов взаимных вложений». Специфика таких фондов состоит в том, что они инвестируют средства своих клиентов в акции компаний, которые давно котируются на рынке и утвердили себя в качестве весьма надежных, но не самых доходных. Дело в том, что рядовые инвесторы не могут быстро реагировать на изменения на рынке, как того требует теория эффективного рынка, и потому вкладывают свои средства (через фонды взаимных вложений) в ценные бумаги тех компаний, которые могут себе позволить не откликаться на всевозможные кратковременные колебания рынка.

## 18.3. Модель CAPM (Capital Asset Prising Model — модель ценообразования капитальных активов)

Эта теория базируется на концепции равновесного рынка и является дальнейшим развитием понятия эффективного рынка в некоторых направлениях. Вспомним, что инвестор, озабоченный формированием своего портфеля ценных бумаг, ищет такие бумаги на рынке. То же делают другие. Если их совокупный спрос превышает предложение соответствующих бумаг, имеющихся на рынке, то цена таких бумаг повышается, а других — падает. В конце концов рынок может прийти в равновесие, когда спрос по любой ценной бумаге в точности равен ее наличию на рынке. В концепции равновесного рынка считается также, что отсутствуют операционные издержки (по оформлению сделок) и что все участники рынка имеют равные возможности оценивания информации, которая всем одинаково доступна. Предполагается также, что на рынке имеются безрисковые ценные бумаги.

Основной постулат этой модели состоит в том, что средний ожидаемый доход по активу выражается в виде линейной функции от безрисковой ставки дохода $m_0$, ожидаемого дохода по рыночному портфелю (это взвешенная доходность по всем бумагам, обращающимся на рынке) $m_f$ и уровня систематического риска, присущего активу и выражаемого через риск всего рынка и коэффициент $\beta$ данного актива. В этом нет ничего удивительного: предполагается, что участники рынка достаточно грамотны и знают про эффект диверсификации, а поэтому должны эту диверсификацию обязательно осуществлять. Поэтому в портфеле оценивается только систематический риск, т.е. рыночный. Итак, ожидаемый доход по активу $i$ определяется как $m_i = m_0 + \beta_i (m_f - m_0)$. В § 17.4 указанная формула имеет добавок — член, называемый «альфа» данной ценной бумаги. Значит, в модели САРМ для любой бумаги $\alpha = 0$, т.е. все точки, изображающие ценные бумаги и портфели, лежат на линии *SML* — см. рис. 17.2. В § 17.4 было показано, что не только у ценных бумаг есть $\alpha$, но и у портфеля, и $\beta$ портфеля равна взвешенной сумме $\beta$ всех бумаг, входящих в портфель.

В модели САРМ решается задача дисконтирования рисковых активов к текущему моменту. Выше уже отмечено, что будущие доходы рисковых активов надо дисконтировать по более высокой ставке, чем безрисковая.

Рассмотрим операцию с ценной бумагой: покупку ее в начале периода по цене $P$ и продажу в конце по цене $P'$. Если есть текущие доходы в этом периоде, например, дивиденды, если эта ценная бумага — акция, то обозначим их $D'$. В детерминированном финансовом анализе за возможную оценку курсовой стоимости в начале периода, т.е. за цену $P$ принимается величина

$$P = (D' + P')/(1 + i),$$

где $i$ — процентная ставка.

В детерминированном финансовом анализе роль этой процентной ставки играет эффективность безрискового вложения — безрисковая процентная ставка $m_0$. Вместе с тем для инвестора более точной сегодняшней оценкой будущей стоимости является величина будущего ожидаемого дохода, дисконтированная по ставке доходности, которую он прогнозирует в качестве эффективности вклада. В модели САРМ эта ставка $m_i$ определяется эффективностью $i$-го вложения и равна

$$m_i = m_0 + \beta_i(m_f - m_0).$$

Дисконтируя по этой ставке, получим оценку текущей стоимости:

$$P = (M[P'] + M[D'])/[1 + m_i + \beta_i(m_f - m_0)].$$

В числителе этой формулы стоит сумма ожидаемых от акции доходов: от будущей продажи и дивидендов, а в знаменателе — единица плюс ставка доходности на рынке.

При положительной коррелированности с рынком чем больше вносимый рынком риск, тем больше ставка доходности, тем меньше современная оценка будущих доходов от акции. Напротив, при отрицательной коррелированности актива с рынком чем больше рыночный риск, тем больше сегодняшняя оценка будущих доходов от актива.

## 18.4. Модель APT (Arbitrage Prising Theory — арбитражная модель ценообразования)

В модели САРМ эффективность актива зависит от эффективности большого рынка и коэффициента актива, отражающего риск этого актива и взаимосвязь актива и рынка. Таким образом, в этой модели эффективность актива зависит от одного фактора — эффективности «большого» рынка.

Модель APT — это обобщение модели САРМ, в ней доходность актива (как случайной величины) зависит от нескольких факторов — случайных величин $f_1, ..., f_n$, которые попарно некоррелированы и у которых математическое ожидание и дисперсия равны 0. Кроме этих факторов, есть еще дополнительный «шумовой» член (как и в теории САРМ), не некоррелированный ни с факторами $f_1, ..., f_n$, ни с «шумовыми» членами других активов.

Однако модель APT проигрывает модели САРМ в простоте и наглядности и поэтому модель САРМ продолжает оставаться одной из самых распространенных при расчетах ценных бумаг.

## 18.5. Идеальный финансовый рынок

Под таким рынком понимают рынок, все участники которого располагают одинаковой информацией и принимают на ее основе наилучшие, оптимальные решения. Следовательно, такой рынок должен быть эффективным. Далее каждый участник рынка стремится сформировать оптимальный портфель своих ценных бумаг. Но согласно теории Тобина структура рисковой части оптимального портфеля одна и та же и не зависит от склонности инвестора к риску (в предположении существования безрисковых бумаг). Поэтому все захотят сформировать портфель, одинаковый по своей рисковой части. Однако структура продаваемых ценных бумаг может не быть таковой. Тогда пойдут обычные перераспределительные процессы: ценные бумаги, спрос на которые больше их предложения, начнут повышаться в цене, а те, спрос на которые меньше, — понижаться. В конце концов установится равновесие, при котором оптимальный портфель в своей рисковой части будет такой же, как и весь рынок в рисковой части. Следовательно, и для рынка в целом будет справедливо соотношение: $m_f = m_0 + \beta_f(m_f - m_0)$, где $m_f$ — средняя эффективность всего рынка в целом, т.е. коэффициент $\beta_f$ всего рынка равен 1. Итак, премия за риск, связанный с данной ценной бумагой, пропорциональна премии за риск рынка в целом и коэффициентом пропорциональности является «бета» данной ценной бумаги. Видим, что на идеальном рынке выполняется основной постулат модели САРМ.

Итак, оптимальный портфель на идеальном конкурентном рынке имеет ту же структуру рисковых бумаг, что и весь рынок. Таким образом, при формировании портфеля надо довериться рынку и сформировать структуру рисковой части портфеля аналогично рыночной структуре в его рисковой части. Если, скажем, в общей стоимости всех рисковых бумаг на рынке акции компании IBM составляют 1,5%, то и инвестор должен вложить 1,5% своего капитала, предназначенного для рисковых ценных бумаг, в акции IBM.

Но как разделить капитал на рисковую и безрисковую части, теория не может подсказать, это разделение зависит от склонности инвестора к риску. Желая увеличить эффективность своего портфеля, инвестор должен будет уменьшать долю безрисковых бумаг и увеличивать доли рисковых бумаг, сохраняя оптимальные пропорции между ними.

## 18.6. Инвесторы на идеальном финансовом рынке

Обозначим $\gamma_k$ — долю безрискового актива в портфеле $k$-го инвестора. Как выше отмечалось, эта доля определяется склонностью к риску (или его неприятием) данного инвестора. Следовательно, $(1 - \gamma_k)$ — доля рискового актива в портфеле $k$-го инвестора.

Если $\gamma_k = 1$, то инвестор составил портфель только из безрисковых бумаг, если $\gamma_k < 0$, то инвестор занял деньги под безрисковый процент и купил на эти деньги рисковых активов, так что $(1 - \gamma_k) > 1$.

Обозначим $W_k$ — суммарный капитал инвестора, а $Y_k = (1-\gamma_k)W_k$ — капитал, вложенный в рисковую часть портфеля. Пусть соотношение $S_1 : S_2 : ...: S_n$, $\sum_i S_i = 1$, задает пропорции между стоимостями различных рисковых бумаг на рынке или в рисковой части оптимального портфеля. По предположению, рисковые части всех оптимальных портфелей инвесторов устроены одинаково. Итак,

$$S_i = V_i/V, \qquad \textbf{(18.1)}$$

где $V$ — суммарная стоимость всех рисковых рыночных активов на рынке; $V_i$ — стоимость рисковых активов $i$-й фирмы (отождествляем акции с выпустившими их фирмами).

Так как рынок разделен между инвесторами, то $\sum_k Y_k = \sum_i V_i = V$. Одним из важных свойств идеального финансового рынка является то, что каждый инвестор $k$ владеет одинаковой, присущей ему долей $Z_k$ каждой фирмы. Действительно, из формулы (18.1) вытекает, что $S_i/V_i = 1/V$. Отсюда доля стоимости $i$-й фирмы, принадлежащей инвестору $k$, равна

$$Z_i^k = (S_i Y_k)/V_i = Y_k/V = Y_k/(\sum_j Y_j),$$

не зависит от фирмы и одинакова для всех фирм. Эта доля равна доле его участия на рынке рисковых активов.

**Замечание.** Описанные модели финансовых рынков частично перекрывают друг друга, так что каких-то очень четких границ каждой модели не существует. Можно лишь выделить некоторые ключевые положения этих моделей:

- *эффективный рынок*: рациональность действий участников, цены случайно блуждают; в портфеле инвестора нет «доминируемых» ценных бумаг;
- *модель CAPM*: оценивается только систематический риск, доходность актива линейно зависит от его систематического риска и средней рыночной доходности; «бета» портфеля равна линейной комбинации от «бета» активов с их долями;

• *модель APT*: доходность актива зависит от нескольких факторов;

• *идеальный рынок*: портфель каждого инвестора оптимален и совпадает с рыночным портфелем в своей рисковой части, каждый инвестор владеет одной и той же присущей ему долей любой фирмы.

Какой-либо самой лучшей, общепризнанной модели финансового рынка не существует.

## ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

**1.** В § 18.2, где говорится об эффективном рынке, упомянуто, что «ценная бумага, доминируемая по своим характеристикам какой-нибудь другой, не может долго функционировать на таком рынке и должна исчезнуть». Как надо понимать это утверждение?

**2.** За день индекс Доу Джонса упал на 7%. Какую часть своей суммарной стоимости потеряли акции, «бета», которых 1,2?

**3.** Безрисковая ставка увеличилась, другие параметры, например «бета» данной бумаги, не изменились. Поднялись или опустились эффективности ценных бумаг (в модели CAPM)?

**4.** В модели CAPM известны эффективности и «бета» двух ценных бумаг. Как найти безрисковую ставку и эффективность рынка?

**5.** В модели CAPM известны безрисковая ставка, эффективность и «бета» некоторой ценной бумаги. Нарисуйте линию *SML*.

**6.** В модели CAPM сформировать портфель максимальной эффективности, «бета» которого не более 1,1, из бумаг со следующими «бета»: 1; 1,2; 0,8. Безрисковая ставка равна 4, эффективность рынка равна 8. Операция «short sale» не разрешена.

Р е ш е н и е. В указанной модели превышение эффективности портфеля над безрисковой ставкой пропорционально $\beta$ портфеля. Поэтому надо составить портфель с максимально возможной $\beta$, т.е. с $\beta = 1{,}1$.

Для этого достаточно взять любые две бумаги, $\beta$ которых лежат по разные стороны от 1,1; например, вторые бумаги с $\beta = 1{,}2$ и третьи — с $\beta = 0{,}8$, и решить систему уравнений:

$$\begin{aligned} 1{,}2x_2 + 0{,}8x_3 &= 1{,}1, \\ x_2 + \quad x_3 &= 1\,. \end{aligned}$$

Получим $x_2 = 3/4$, $x_3 = 1/4$. Таким образом, искомый портфель можно составить только из вторых и третьих бумаг.

**7.** На идеальном финансовом рынке 10% по стоимости составляют безрисковые бумаги и 90% — рисковые. Рисковых всего три: первые составляют 1/6 и их $\beta = 0{,}8$; вторые — 1/3 и $\beta = 1$. Найти долю и $\beta$ третьих бумаг. Найти эффективности всех рисковых бумаг и среднюю доходность по всему рынку, если эффективность рынка (средняя доходность по рисковым бумагам) равна 8%, а безрисковая ставка равна 4%.

Р е ш е н и е. Разумеется, доля третьих бумаг равна 1/2. Для нахождения $\beta$ этих бумаг надо вспомнить, что для рыночного портфеля $\beta = 1$. Следовательно,

$$1/6 \cdot 0{,}8 + 1/3 \cdot 1 + 1/2 \cdot \beta_3 = 1,$$

откуда $\beta_3 = 1{,}4$. Эффективность каждой ценной бумаги равна

$$m_i = m_0 + \beta_i(m_f - m_0) = 4 + \beta_i(8 - 4) = 4 + 4\beta_i,$$

т.е. $m_1 = 7{,}2\%$; $m_2 = 8$; $m_3 = 13{,}6$. Далее, средняя доходность по всему рынку равна $0{,}1 \cdot 4 + 0{,}9 \cdot 8 = 7{,}6\%$.

# Дополнение к части II

*В этом дополнении рассмотрена теория ожидаемой полезности и на ее основе охарактеризовано отношение ЛПР, инвестора к риску. Теория ожидаемой полезности изложена во многих книгах на русском языке. Некоторые же вопросы об отношении к риску, например коэффициент Эрроу—Пратта неприятия риска, на русском языке излагаются впервые.*

# Глава 19

# ТЕОРИЯ ОЖИДАЕМОЙ ПОЛЕЗНОСТИ

Теория полезности существует в двух видах: теория предпочтений индивида и отражающая ее функции полезности — это детерминированный вариант, и теория ожидаемой полезности — стохастический вариант. Детерминированный вариант изложен в дополнении к ч. I (к созданию § 7.1 имели отношение экономисты). Стохастический вариант излагается ниже. Может показаться странным, но основы стохастической теории полезности были заложены Д. Бернулли в 1738 г. раньше, чем детерминированной.

## 19.1. Простейшие лотереи

Представьте, что вам предлагают купить лотерейный билет, по которому немедленно будет проведен розыгрыш. У вас равные шансы выиграть сумму $S = 100$ долл. И остаться при своих — ничего не выиграть и не проиграть. За какую сумму вы купили бы этот билет?

Если за 50 долл., то вы «объективист». Так называют тех, кто покупает билет за сумму $M$, равную математическому ожиданию выигрыша — в данном случае $M = 50$ долл. Вообще говоря, знание теории вероятностей способствует «объективности», т.е. среди знающих теорию вероятностей гораздо больше объективистов, чем в среднем по всему разумному человечеству.

Если вы согласны заплатить за билет лишь менее $M$, например только 45 долл., то вы не любите рисковать. Условно будем называть не любящих рисковать «пессимистами» (они не верят в выигрыш).

Если же вы согласны заплатить за билет более $M$, например 55 долл., то вы уверены, что вам повезет и вы выиграете 100 долл. В этом случае ваше отношение к риску положительное. Вас можно назвать «оптимистом» или «любящим риск» (risk lover).

Можно узнать о вашем отношении к риску, рассуждая подобным образом о продажной цене лотерейного билета.

Представьте, что описанный выше лотерейный билет у вас уже есть и вам предлагают его продать. За какую сумму вы бы его продали?

Если за 50 долл., то вы «объективист». Если вы согласны продать билет за сумму менее $M$, например за 45 долл., то вы не любите рисковать и стараетесь избавиться от риска даже ценой некоторых потерь, эти потери есть ваша плата за избавление от риска.

Если же вы согласны продать билет лишь за сумму более $M$, например за 55 долл., то ваше отношение к риску положительное. Вы уверены, что Вам повезет и с возможностью выиграть вы расстаетесь неохотно, лишь если вам за это приплатят.

Фиксируем теперь сумму 100 долл. и будем изменять вероятность выигрыша $p$. Рассматриваемый лотерейный билет при данном значении $p$ дает выигрыш 100 долл. с вероятность $p$. Теперь можно нарисовать графики покупной и продажной цены такого билета для объективиста, пессимиста и оптимиста (рис. 19.1).

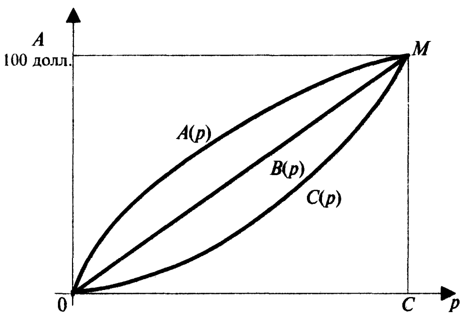



**Рис. 19.1**

Прямая линия — это график покупной и продажной цены $B(p)$ лотерейного билета для объективиста, верхняя кривая $A(p)$ — для оптимиста и нижняя $C(p)$ — для пессимиста.

Таким образом, лотерейный билет при $p = 0{,}5$ объективист купит или продаст ровно за математическое ожидание его выигрыша, т.е. за 50 долл., оптимист — за $A(0{,}5)$ (выше эта сумма была 55 долл.), пессимист — за $C(0{,}5)$ (выше эта сумма была 45 долл.).

Вообще-то говоря, покупная и продажная цены не обязательно должны совпадать для оптимиста и пессимиста, как изображено на рис. 19.1, но мы этим пренебрегли для упрощения.

Рассмотрим плоскую фигуру, образованную ломаной $OCM$ и прямой объективиста или кривой оптимиста или пессимиста. Обозначим $f$ долю, которую занимает эта фигура в прямоугольнике $OAMC$. Для объективиста эта фигура есть треугольник $OCM$ и $f = 0{,}5$; для пессимиста эта фигура образована ломаной $OCM$ и его кривой и $0 < f < 0{,}5$ и для оптимиста эта фигура образована ломаной $OCM$ и его кривой и $0{,}5 < f < 1$. Число $f$ оценивает отношение ЛПР к риску. Если $f = 0{,}5$, то это объективист и его отношение к риску нейтральное, при $0 < f < 0{,}5$ — это пессимист, он риск не любит, и чем меньше $f$, тем больше он не любит риск; наконец, если $0{,}5 < f < 1$, то это оптимист и чем ближе $f$ к 1, тем благожелательнее его отношение к риску.

Эти рассуждения выглядят безупречно. На самом деле огромное большинство людей не любят рисковать и потому, по нашей терминологии, они пессимисты. Кроме того, имея достаточно много денег и терпения, оптимиста можно разорить, после чего он, возможно, пересмотрит свое отношение к риску. Сделать это можно примерно так. Пусть он покупает у вас лотерейный билет за 55 долл. Вы присоединяете к этой сумме свои 45 долл. И разыгрываете билет с $p = 0{,}5$; 100 долл. попадают к нему или к вам. Потом эта операция повторяется. Таким образом, за каждый розыгрыш он проигрывает 5 долл. в среднем. Если таким образом сыграть $n$ раз, то его средний выигрыш с большой вероятностью будет близок к 50 долл., в то время как затраты его будут в среднем на один розыгрыш равны 55 долл. Но, может быть, ему действительно повезет в нескольких первых партиях и в этом случае переубедить его будет очень трудно.

Как увидим далее (§ 20.3) весьма общие и принципиальные свойства системы предпочтений ЛПР вынуждают его относиться к риску неприязненно, не принимать его. Найдем мы и способ измерения этого неприятия. Так что оптимисты представляют собой лишь чистый курьез, во всех серьезных решениях риск предпочитают уменьшать.

## 19.2. Теория ожидаемой полезности

Выше рассмотрены лотереи с двумя исходами: выигрышем 100 долл. и статус-кво. Рассмотрим теперь более общие лотереи с $n$ исходами 1, ..., $n$. Эти исходы неравноценны в системе предпочтений ЛПР.

Простой лотереей называется распределение вероятностей на множестве исходов $L = (p_1, ..., p_n)$. Из простых лотерей можно конструировать более сложные. Возьмем $k$ простых лотерей $L_1$, ..., $L_k$. Припишем каждому $i = 1, ..., k$ вероятность $p_i$ и получим составную лотерею $(L_1, p_1; ...; L_k, p_k)$. Эта лотерея осуществляется так: сначала разыгрывается распределение вероятностей $(p_1, ..., p_k)$ с помощью подходящего случайного механизма и получаем какой-то номер $i$ из множества номеров 1, ..., $k$. Затем разыгрывается уже простая лотерея $L_i$. Такую лотерею называют составной лотереей 1-го порядка. Из таких лотерей можно сконструировать составную лотерею 2-го порядка и т.д.

Априори ясно, что разные лотереи имеют для ЛПР разную ценность, поэтому на множестве всех лотерей возникает отношение предпочтения: запись $L \preceq L'$ означает, что ЛПР предпочитает лотерею $L'$ лотерее $L$. Отношение предпочтения описано в § 7.1. Главными свойствами предпочтения являются рефлексивность, транзитивность и совершенность. Рефлексивность означает, что $L' \preceq L$ для любой лотереи, транзитивность означает, что если $L_1 \preceq L_2$ и $L_2 \preceq L_3$, то $L_1 \preceq L_3$, и совершенность означает, что для любых двух лотерей $L$, $L'$ верно либо $L \preceq L'$, либо $L' \preceq L$.

Многие исследователи признают, что это отношение предпочтения весьма зыбкое: многие пары лотерей столь близки друг к другу, что ЛПР с большим трудом может выбрать из них лучшую. Трудность выбора лучшей лотереи усугубляет также их сложная природа — ведь можно построить составные лотереи сколь угодно высокого порядка. В процессе исследования данного круга вопросов были найдены три аксиомы, которые значительно упрощают систему предпочтений ЛПР на множестве лотерей:

***Аксиома сводимости.*** Составная лотерея 1-го порядка ($L_1$, $p_1$; ...; $L_k$, $p_k$) эквивалентна (в системе предпочтений ЛПР) простой лотерее, в которой вероятность $j$-го исхода есть $\sum_i p_i p_{ij}$, где $p_{ij}$ — вероятность $j$-го исхода в $i$-й простой лотерее $L_i$.

**Пример 1.** Пусть исходов всего два. Возьмем две простые лотереи $L_1 = (0{,}1; 0{,}9)$ и $L_2 = (0{,}4; 0{,}6)$. Теперь рассмотрим составную лотерею ($L_1$, 0,3; $L_2$, 0,7). По аксиоме сводимости эта составная лотерея эквивалентна простой $(0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}7 \cdot 0{,}4; 0{,}3 \cdot 0{,}9 + 0{,}7 \cdot 0{,}6) = (0{,}31; 0{,}69)$.

Итак, аксиома сводимости позволяет ограничиться только простыми лотереями, которые будем называть просто лотереями. Множество всех лотерей обозначим $\mathcal{L}$. Для случая $n$ исходов это множество есть $\{(p_1, ..., p_n)$: все $p_i \geq 0$ и $\sum_i p_i = 1\}$ и называется $(n - 1)$-мерным симплексом.

Формулировки двух других аксиом — непрерывности и независимости опустим, отметим только, что они довольно естественны.

Если все три аксиомы принять, то можно доказать следующую теорему:

***Теорема.*** Возможно каждому исходу $i = 1, ..., n$ приписать число $u_i$ такое, что для любых двух лотерей $L = (p_1, ..., p_n)$,

$L' = (p'_1, ..., p'_n)$ будет верно $L \preceq L'$, если и только если $\sum_i p_i u_i \leq \sum_i p'_i u_i$.

Число $u_i$, приписанное $i$-му исходу, называется его *полезностью.* Число же $u(L) = \sum_i p_i u_i$, которое приписывается лотерее $L$, называется *средней ожидаемой полезностью* этой лотереи. С точки зрения теории вероятностей это просто математическое ожидание лотереи.

Полезности же лотерей можно вычислить по формуле математического ожидания.

**Пример 2.** Продолжим рассмотрение примера 1. Припишем исходу 0 полезность 0, а исходу 1 — полезность 100. Найдем средние ожидаемые полезности всех трех упомянутых лотерей: двух простых $L_1 = (0{,}1;\ 0{,}9)$ и $L_2 = (0{,}4;\ 0{,}6)$ и одной составной $(L_1,\ 0{,}3;\ L_2,\ 0{,}7)$.

Итак, $u_0 = 0$, $u_1 = 100$. Значит, $u(L_1) = 0{,}1 \cdot 0 + 0{,}9 \cdot 100 = 90$; $u(L_2) = 0{,}4 \cdot 0 + 0{,}6 \cdot 100 = 60$; поскольку по аксиоме сводимости составная лотерея эквивалентна простой $(0{,}31;\ 0{,}69)$, то ее средняя ожидаемая полезность равна $0{,}31 \cdot 0 + 0{,}69 \cdot 100 = 69$.

**Пример 3.** Пусть начальный капитал ЛПР составляет 4 долл., а его функция полезности денег есть $u(x) = \sqrt{x}$ (см. § 7.3). Ему предлагают лотерею, в которой возможны выигрыши 12 долл. с вероятностью 0,5 и «выигрыш» 0 долл. также с вероятностью 0,5. Следует ли ЛПР участвовать в такой лотерее?

Решение. Полезность 4 для ЛПР равна $u(4) = \sqrt{4} = 2$. Полезность его капитала после выигрыша 12 долл. равна $u(4 + 12) = 4$; после «выигрыша» 0 долл. — $u(4) = 2$; средняя ожидаемая полезность равна $0{,}5 \cdot 4 + 0{,}5 \cdot 2 = 3$, что больше первоначальной. Следовательно, ему нужно участвовать в лотерее.

А сколько ему можно заплатить за право участия в этой лотерее? Обозначим эту плату $a$. Тогда $a$ определяется из уравнения $0{,}5 \cdot (4 - a + 12) + 0{,}5 \cdot (4 - a) = 2$ и элементарные подсчеты показывают, что $a = 3{,}75$.

## ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

**1.** Найдите вероятность, что за $n$ розыгрышей лотереи оптимист потеряет не менее 50 долл. (см. § 19.1).

**2.** Пусть функция покупной (и продажной) цены лотерейного билета, по которому выигрыш 1 с вероятностью $p$ и статус-кво с дополнительной вероятностью есть $p^2$. Кто перед нами — оптимист, объективист или пессимист?

**3.** Рассмотрим лотереи с двумя исходами. Возьмем две простые лотереи $L_1 = (0,2; 0,8)$ и $L_2 = (0,4; 0,6)$. Опишите и изобразите на плоскости все лотереи, составленные из этих двух (см. пример **1**).

**4.** Сведите к простой составную лотерею $(L_1; 0,1; L_2; 0,1; L_3; 0,8)$, где $L_1 = (0,1; 0,2; 0,7)$ и $L_2 = (0,2; 0,6; 0,2)$, $L_3 = (0,3; 0,4; 0,3)$.

**5.** Рассмотрим лотереи с тремя исходами. Возьмем три простые лотереи $L_1 = (0,1; 0,2; 0,7)$ и $L_2 = (0,2; 0,6; 0,2)$, $L_3 = (0,3; 0,4; 0,3)$. Опишите и изобразите в пространстве все лотереи, составленные из этих трех — см. пример **1** и задачу **3**.

**6.** Проанализируйте пример **3** в общем случае — для произвольного уровня начального богатства ЛПР, для произвольной вероятности выигрыша и т.п.

# Глава 20

# ОТНОШЕНИЕ ЛПР, ИНВЕСТОРА К РИСКУ

Известно, что разные люди относятся к риску по-разному: одни не любят рисковать, другие считают себя «счастливчиками», которым непременно повезет. Оказывается, существуют способы выявить и даже количественно оценить отношение ЛПР к риску и тем самым лучше понять особенности принятия им решений.

## 20.1. Измерение неприятия риска

Выше рассмотрены лотереи с конечным множеством исходов. Сейчас рассмотрим более общую ситуацию. Множество исходов есть множество всех неотрицательных денежных сумм $R^+ = [0, \infty)$. Лотерея задается распределением вероятностей на $R^+$ с помощью функции распределения $F$, которую и отождествим с самой лотереей. В данной ситуации $F(x)$ — вероятность того, что при розыгрыше лотереи ЛПР получит доход меньше $x$. Из теории ожидаемой полезности (см. гл. 19) следует, что можно определить для ЛПР функцию полезности $u(x)$, определенную на $R^+$, после чего полезность лотереи $F$ рассчитывается по формуле $u(F) = \int\limits_{R^+} u(x)dF(x)$, а если рассматриваемое распределение непрерывно, т.е. имеет плотность распределения $f$, то $u(F) = \int\limits_{R^+} u(x)f(x)dx.$ Эту полезность лотереи также называют средней ожидаемой полезностью лотереи. Функция $u(x)$ — функция Бернулли, а $u(F)$, определенная на лотереях рассматриваемого вида, — функция Неймана—Моргенштерна. Фактически функция Бернулли — это функция полезности денег (§ 7.3).

**Пример 1.** Пусть функция Бернулли есть $u(x) = \sqrt{x}$, а выигрыши лотереи равномерно распределены на отрезке [0, 1]. Тогда средняя ожидаемая полезность лотереи будет $\int\limits_0^1 \sqrt{x}dx = 2/3$.

Напомним свойства функции полезности денег $u(x)$ — она непрерывная, возрастающая и вогнутая, а если предположить ее дифференцируемость, то ее первая производная положительная, но должна убывать, что известно как убывающая предельная полезность денег (а в самой общей форме — для любой функции полезности, как 1-й закон Госсена). В дифференциальной форме убывание первой производной выражается отрицательностью 2-й производной.

Но отрицательность 2-й производной — это и есть характеристика вогнутости функции. На рис. 20.1 это иллюстрировано выпуклостью части плоскости, расположенной вправо и вниз от графика функции. Напомним, что вогнутость функции $f$ характеризуется тем, что $f(0{,}5a + 0{,}5b) \geq$ $\geq 0{,}5f(a) + 0{,}5f(b)$ для любых $a$, $b$ из области определения $f$ (см. рис. 20.1), что эквивалентно в свою очередь тому, что $f(\lambda a + (1-\lambda)b) \geq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$ для любых $a$, $b$ из области определения $f$ (область определения $f$ также должна быть выпуклой).

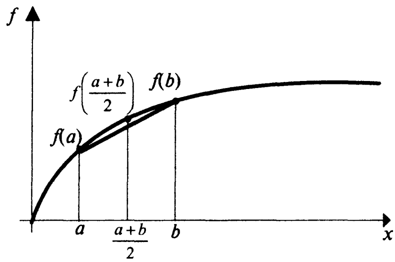



**Рис. 20.1**

Поскольку интеграл $\int\limits_{R^+} u(x)\,dF(x)$ есть аналог суммы $\sum\limits_i p_i u(x_i)$, где $p_1 + ... + p_n = 1$, то свойство вогнутости функции полезности $u$ эквивалентно выполнению неравенства

$$U(F) = \int\limits_{R^+} u(x)\,dF(x) \leq u\left(\int\limits_{R^+} x\,dF(x)\right) \qquad \textbf{(20.1)}$$

для любой лотереи $F$.

Какой содержательный смысл этого неравенства?

Как известно, $U(F) = \int\limits_R u(x)\,dF(x)$ — это средняя ожидаемая полезность лотереи $F$. С другой стороны, $\int\limits_R x\,dF(x)$ — это средний ожидаемый размер денежной суммы, которую ЛПР может выиграть в лотерее $F$. Следовательно, для ЛПР ценность усредненной денежной суммы больше усредненной полезности этих денежных сумм (см. рис. 20.1). Тем самым ЛПР напоминает «пессимиста» из § 19.1, который больше ценил 50 долл. — ожидаемое среднее лотереи, чем усредненную полезность исходов лотереи.

Обозначим $c(F)$ тот размер денежной суммы, который для ЛПР равноценен величине $\int\limits_{R^+} u(x)\,dF(x)$, т.е. для которого выполняется равенство $u(c(F)) = \int\limits_{R^+} u(x)\,dF(x)$ — это аналог покупной или продажной цены лотерейного билета. Как видно из неравенства (20.1), $c(F)$ не больше $u\left(\int\limits_{R^+} x\,dF(x)\right)$ — полезности среднего ожидаемого размера денежной суммы, которую ЛПР может выиграть в лотерее $F$. Величина $c(F)$ называется *безусловным эквивалентом лотереи* $F$ (эквивалентом без всяких вероятностных соображений). Разность $\int\limits_{R^+} x\,dF(x) - c(F)$ и показывает степень неприятия риска ЛПР.

**Пример 2.** Пусть $u(x) = \ln(x+1)$, а $F$ задает равномерное распределение на отрезке [9, 19]. Такое распределение задается постоянной плотностью $f(x) = 0{,}1$ на отрезке [9, 19]. Вычислим $c(F)$. Имеем

$$\int\limits_9^{19} u(x)\,dF(x) = \int\limits_9^{19} 0{,}1\cdot\ln(x+1)\,dx = 0{,}1(x+1)\left(\ln(x+1)-1\right)\Big|_9^{19} = \ln 40 - 1.$$

Теперь надо найти $c$ из уравнения $\ln(c+1) = \ln 40 - 1$. Окончательно получаем $c(F) = 40/\mathrm{e} - 1 \approx 13{,}76$. Вычислим теперь $\int\limits_{R^+} x\,dF(x)$. Для рассматриваемого равномерного распределения математическое ожидание $\int\limits_9^{19} x\,dF(x) = (9 + 19)/2 = 14$. Как и должно быть, $13{,}75 < 14$.

Следующая теорема, приводимая без доказательства, подводит итог изложенному в этом параграфе.

***Теорема.*** Вогнутость функции полезности ЛПР $u$ на множестве денежных сумм $[0,\infty)$ равносильна тому, что $c(F) \le \int\limits_{R^+} x\,dF(x)$ для любой лотереи $F$, и любое из этих двух равносильных условий свидетельствует о неприятии риска ЛПР.

## 20.2. Некоторые известные конкретные функции полезности денег

Известно несколько таких функций. Рассмотрим две наиболее типичные.

*Квадратичная функция полезности* (рис. 20.2)

$$U(x) = ax - bx^2\text{, где } a,\ b > 0. \qquad \textbf{(20.2)}$$

Эта функция известна еще как функция полезности Неймана—Моргенштерна. Она широко используется в теории финансов, в частности, в теории ценных бумаг. Конечно, как функция полезности, она должна рассматриваться только на отрезке $[0,\ a/2b]$, где она вогнутая. Широкое ее использование объясняется теоремой Неймана—Моргенштерна о том, что при определенных естественных допущениях экономическое поведение направлено на максимизацию ожидаемого значения полезности функции $U$.

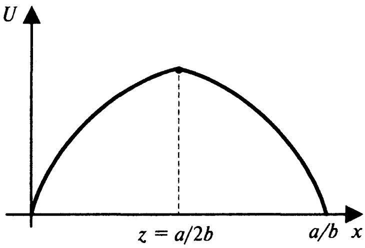



**Рис. 20.2**

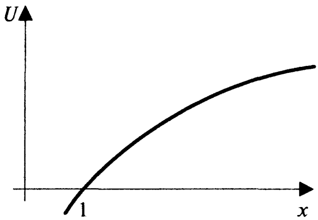



**Рис. 20.3**

*Логарифмическая функция полезности* (рис. 20.3)

$$U(x) = \log_a x\text{, где } a > 0. \qquad \textbf{(20.3)}$$

Эта функция вогнута на всей своей области определения. Впервые она была рассмотрена Бернулли в 1738 г.

## 20.3. Коэффициент Эрроу—Пратта неприятия риска

Отношение ЛПР к риску очень важно для анализа принятия им различных решений и, как видно из теоремы, сформулированной в § 20.1, все дело в строении его функции полезности денег $u(x)$ — функции Бернулли. Поэтому эту функцию тщательно изучали и сделаны даже попытки измерить степень неприятия риска в конкретных точках области определения функции Бернулли.

Коэффициентом Эрроу—Пратта неприятия риска в точке $x$ для ЛПР с функцией Бернулли $u$ называется число $r_э(x) = -u''(x)/u'(x)$.

Так как для функции полезности 1-я производная положительна, а 2-я — отрицательна, то $r_э(x) > 0$ во всякой точке $x$. Это и есть обещанное в конце § 19.1 утверждение о неприятии риска ЛПР.

**Пример 3.** Найти коэффициент Эрроу—Пратта неприятия риска для функции Бернулли $u(x) = 1 - e^{-ax}$, $a > 0$. Имеем $u'(x) = ae^{-ax}$, $u''(x) = -a^2e^{-ax}$, значит, $r_э(x) = a$.

Поясним происхождение коэффициента Эрроу—Пратта. Выше была сформулирована теорема о том, что степень неприятия риска определяется вогнутостью функции полезности. Математически степень вогнутости определяется величиной 2-й производной. Однако одной 2-й производной недостаточно: если функцию полезности увеличить, например, в 2 раза, то система предпочтений ЛПР не изменится, но 2-я производная тоже возрастет в 2 раза, хотя неприятие риска, очевидно, не изменилось. Для устранения этого вместо 2-й производной применяется отношение ее к 1-й производной.

Еще одно объяснение строения коэффициента Эрроу—Пратта. Фиксируем какую-нибудь вероятность $p$ и предложим ЛПР сыграть в игру: с вероятностью $p$ он получит сумму $x$ и с вероятностью $1 - p$ — сумму $y$. Конечно, в некоторые такие игры ЛПР откажется играть (например, если обе величины $x$, $y$ отрицательны). Обозначим множество игр $(x, y)$, в которые ЛПР соглашается играть при уровне его богатства $w$, через $A(w)$ и назовем это множество множеством игр, приемлемых для него. Если ЛПР не склонен к риску, то это множество выпукло. Граница этого множества состоит из «пограничных» игр $(x, y)$, таких, что $p \cdot u(w + x) + (1 - p) \cdot u(w + y) = u(w)$.

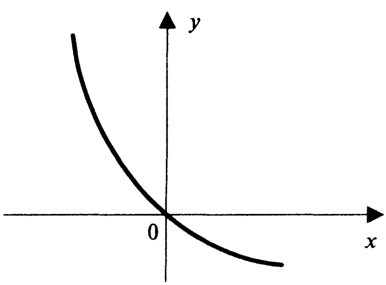



**Рис. 20.4**

Эта граница задает график функции $y(x)$ (рис. 20.4). Найдем производную этой функции в т. 0: $p \cdot u'(w) + (1 - p) \cdot u'(w) \cdot y'(0) = 0$.

Итак, $y'(0) = -p/(1 - p)$.

Можно использовать множество приемлемых игр $A(w)$ для оценки склонности ЛПР к риску. Пусть оценивается склонность к риску двух ЛПР — $A$ и $B$. Найдем их множества приемлемых игр $A(w)$ и $B(w)$. Если $A(w) \subseteq B(w)$ при любом $w$, то можно сказать, что $B$ более склонен к риску, чем $A$. Теперь оценим эти множества локально в некоторой окрестности 0. Ясно, что чем больше кривизна кривой $y(x)$, тем меньше множество приемлемых игр, тем больше ЛПР не любит риск. Но кривизна кривой оценивается 2-й производной. Найдем 2-ю производную $y''(0)$: $p \cdot u''(w) + (1-p) \cdot u''(w) \cdot (y'(0))^2 + (1-p) \cdot u'(w) \cdot y''(0) = 0$. Используя найденное выше значение $y'(0)$, получим окончательно $y''(0) = (p/(1-p)^2)\ [-u''(w)/u'(w)]$.

Видно, что значение 2-й производной пропорционально коэффициенту Эрроу—Пратта.

## 20.4. Коллективные решения и разделение риска

Как сравнить ЛПР по их отношению к риску? Этот вопрос уже частично рассмотрен в предыдущих параграфах. Здесь рассмотрим разделение риска и ответственности между двумя ЛПР.

Рассмотрим частный случай процедуры исследования системы предпочтения ЛПР, описанной в предыдущем параграфе.

Предложим ЛПР сыграть в игру, в которой он с равными шансами получит сумму $x$ или заплатит сумму $y$. Обозначим множество игр $(x, y)$, в которые ЛПР соглашается играть, через $A$. Граница этого множества состоит из «пограничных» игр и является графиком некоторой функции $g(x)$. Если ЛПР не склонен к риску, то множество $A$ выпукло, функция $g$ вогнута. Эти моменты уже привычны и на них не останавливаемся (рис. 20.5). Итак, равновероятная лотерея $(x, y)$ приемлема для ЛПР, только если $y \le g(x)$.

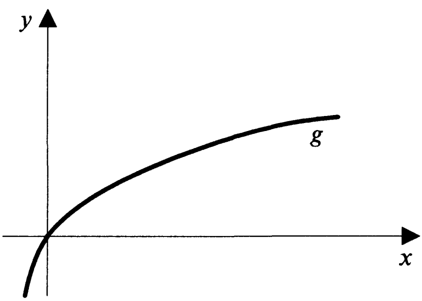



**Рис. 20.5**

Специально отметим, что функция $g(x)$ несомненно характеризует отношение ЛПР к риску — чем более вогнута эта функция, тем больше неприятие риска ЛПР.

Пусть теперь два ЛПР пытаются совместно разыграть лотерею $(x, y)$ указанного вида. При этом они согласны внести совместно сумму $y$ при проигрыше и разделить на двоих выигрыш $x$. Как найти множество лотерей, приемлемых для них? Может ли, в частности, найтись лотерея, приемлемая для обоих совместно, но неприемлемая для каждого в отдельности? На рис. 20.6 график функции $g_1$ для первого ЛПР показан сплошной линией, $g_2$ для второго — пунктирной.

Можно попробовать разделить выигрыш и проигрыш пропорционально. Скажем, первый берет долю $d = 3/4$, а долю $d = 1/4$ берет на себя второй. Тогда в лотерее (1000, 500) доля первого была бы (750, 375), а второго — (250, 125). Из рис. 20.6 видно, что такая лотерея приемлема для второго, а для первого неприемлема. И вообще видно, что пропорциональное разделение лотерей не подходит для первого — ведь все такие лотереи лежат на диагонали, а она не пересекается с множеством $A$ приемлемых для первого ЛПР лотерей. С другой стороны, почему обязателен пропорциональный подход к разделению лотерей? Мало ли как могут договориться два ЛПР. Например, они могут разделить лотерею (1000, 500) так: первый — (500, 175), второй — (500, 325). Из рис. 20.6 видно, что это приемлемо для обоих ЛПР.

Пусть $g_1$, $g_2$ — функции, указанные выше для обоих ЛПР. Найдем функцию $g$ для «коллектива» двух ЛПР.

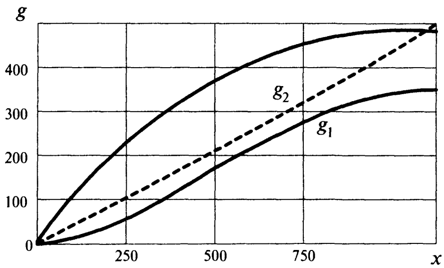



**Рис. 20.6**

Рассмотрим лотерею $(a, b)$. Она приемлема для коллектива, если и только если найдутся $x_1$, $x_2$, $y_1$, $y_2$ такие, что $x_1 + x_2 = a$, $y_1 + y_2 = b$ и $y_1 \le g(x_1)$, $y_2 \le g_2(x)$.

Отсюда ясно, что $g(a) = \max\limits_{0 \le x \le a} \{g_1(x) + g_2(a - x)\}$.

Предположим теперь, что обе функции $g_1$, $g_2$ имеют необходимые производные, тогда максимальное значение функции $\{g_1(x) + g_2(a - x)\}$ достигает в точке $c$, для которой $g_1'(c) = g_2'(a - c)$. Если оба ЛПР риск не любят, то обе функции, как выше отмечено, вогнуты. Отсюда вытекает, что равенство производных функций $g_1'(x)$, $g_2'(a - x)$ может быть только в одной точке. Итак, точка максимума, если она есть, единственна, обозначим ее $h(a)$. Имеем две функции $g$ и $h$. Эти функции полностью описывают условия проведения лотерей в коллективе двух ЛПР. Опишем только «граничные» лотереи, т.е. лотереи $(a, b)$, для которых $b = g(a)$. Выигрыш делится так: первый получает $h(a)$, второй — остальную сумму $a - h(a)$; проигрыш распределяется следующим образом: первый вносит $g_1(h(a))$, второй — остальную сумму $g(a) - g_2(h(a))$.

Теперь можно несколькими способами сравнить отношение этих двух ЛПР к риску. Например, с помощью следующего утверждения.

***Утверждение.*** Следующие высказывания эквивалентны:

а) второй не приемлет риск в большей степени, чем первый;

б) $g_2(x) \le g_1(x)$;

в) $g_2''(x) \ge g_1''(x)$.

## 20.5. Учет отношения ЛПР к риску

Введем в рассмотрение функцию $U(r, m)$, с помощью которой ЛПР оценивает операцию с риском $r$ и эффективностью $m$ (напомним, что эффективность — это средняя ожидаемая доходность операции). Такая функция относится к классу функций полезности, так и будем ее называть. Любая линия уровня функции $U$ дает операции, равноприемлемые для ЛПР, поэтому они называются еще ***кривыми безразличия***. В зависимости от отношения ЛПР к риску такие функции могут быть трех видов (на рис. 20.7 изображены кривые безразличия).

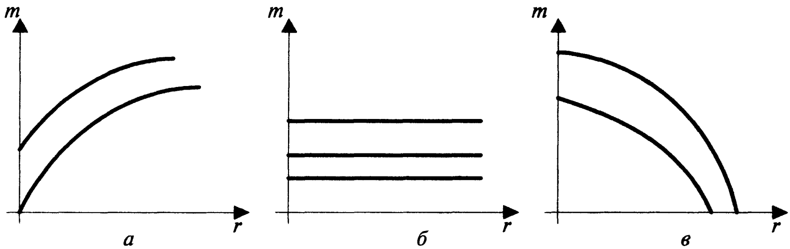



**Рис. 20.7**

Рис. 20.7, *а* соответствует неприятию риска — двигаясь по кривой безразличия, ЛПР компенсирует увеличение риска все большим увеличением дохода; рис. 20.7, *б* — нейтральному, или лучше сказать, безразличному отношению к риску; рис. 20.7, *в* — благожелательному отношению к риску, когда ЛПР считает, что ему непременно повезет и предпочитает более рисковые операции. Наиболее естественным представляется поведение ЛПР с неприятием риска. Типичная функция такого ЛПР есть, например, $U(r,m) = m - 2r$, т.е. когда ЛПР готов поступиться увеличением риска на единицу, если при этом эффективность увеличится на 2 единицы.

Продолжим теперь решение задач об оптимальном портфеле, изложенных в гл. 16, 17, с учетом отношения ЛПР к риску посредством его функции полезности: среди всех портфелей найти портфель, наиболее полезный для данного ЛПР, т.е. максимизирующий его функцию полезности. Конечно, такой портфель надо искать среди портфелей, оптимальных по Парето, или эффективных. Обозначим множество таких портфелей $\mathcal{P}$, тогда надо решить задачу:

$$U(P) \to \max$$
$$P \in \mathcal{P}. \qquad \textbf{(20.4)}$$

Естественной функцией полезности является такая, которая возрастает с увеличением эффективности портфеля и уменьшением его риска. Поэтому можно ограничиться лишь портфелями, оптимальными по Марковицу, т.е. имеющими минимальный риск при данной эффективности или максимальную эффективность при данном риске.

Если на рынке есть безрисковые бумаги, то задача (20.4) сильно упрощается. В самом деле, для оптимальных портфелей Тобина зависимость эффективности от риска линейная — $m_p = m_0 + d \cdot r_p$ (см. § 16.7). Подставляя эту линейную зависимость в функцию полезности, сведем задачу (20.4) к максимизации функции одной переменной.

Итак, при наличии безрисковых бумаг есть две возможности учесть отношение ЛПР к риску: выбором доли $x_0$ безрисковых бумаг и с помощью функции полезности.

## ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

**1.** Пусть функция полезности ЛПР есть $u(x) = \ln(1 + x)$, уровень его капитала $w$. Ему предлагают лотерею, в которой выигрыш $x$ и проигрыш $x$ имеют вероятность соответственно $p$ и $1 - p$. Найдите $x$, при котором такая лотерея ему безразлична. Каков ответ при $p = 0{,}5$?

**2.** Пусть функция Бернулли индивидуума есть $u(x)$, уровень его богатства $w$. Рассмотрим лотерею, которая с вероятностью $p$ дает выигрыш $C$ и с вероятностью $(1 - p)$ — выигрыш $B$. Найдите продажную и покупную цену этой лотереи в общем виде. Решите эту задачу при конкретных данных: $u(x) = \sqrt{x}$, $w = 10$, $C = 10$, $B = 5$.

**3.** Пусть функция полезности индивидуума есть $u(x) = \sqrt{x}$. При уровне богатства 16 найти вероятностную премию за риск в лотерее, которая с вероятностью 1/2 дает выигрыш 4 и проигрыш 4.

Решение. Эта вероятностная премия $e$ за риск удовлетворяет уравнению $u(x) = (1/2 + e)\ u(x + 4) + (1/2 - e)\ u(x - 4)$, т.е. $16 = (1/2 + e) \cdot \sqrt{(16 + 4)} + (1/2 - e) \cdot \sqrt{(16 - 4)}$. Решая это уравнение находим $e = 0{,}04$.

Следовательно, данному индивидууму при таком уровне его богатства безразлична лотерея, которая дает выигрыш 4 с вероятностью 0,54 и проигрыш 4 с вероятностью 0,46.

**4.** Пусть ЛПР приглашает сыграть в две лотереи:

$$X_1: \begin{array}{c|c} 0 & 4 \\ \hline 1/2 & 1/2 \end{array} \quad m_1 = 2,\ D_1 = 4; \qquad X_2: \begin{array}{c|c} 1 & 9 \\ \hline 7/9 & 1/8 \end{array} \quad m_2 = 2,\ D_2 = 7.$$

Справа от табличек написаны средний ожидаемый выигрыш и дисперсия обеих лотерей. Если отвлечься от самого ЛПР, то определенно лотерея $X_1$ явно лучше — средний ожидаемый выигрыш тот же, а риск меньше. Однако если функция полезности ЛПР, например, есть $u(z) = \sqrt{z},$ то средняя ожидаемая полезность лотереи $X_1$ равна 1, т.е. $(1/2 \cdot u(0) + 1/2 \cdot u(4) = 0 + 1/2 \cdot 2 = 1)$, а лотереи $X_2$ равна 10/8. Это обстоятельство способно повлиять на выбор лотереи данным ЛПР.

На самом деле, и это всем прекрасно известно, окончательное решение, принимаемое ЛПР, зависит от его вкусов, симпатий, настроения и т.п.

**5.** Пусть функция полезности инвестора есть $f(P) = m - \sqrt{r}$. Заданы характеристики двух ценных бумаг: эффективности и их риски равны 4, 8; 6, 30; совместная вариация доходностей равна 20. С помощью компьютера перебрали с шагом $h = 0{,}2$ долю $x[1] = 1 - k \cdot h$ 1-й бумаги в портфеле и определили характеристики портфелей с такими долями бумаг ($x[2]$ при этом равно $1 - x[1]$). Таким образом, нулевой портфель состоит только из бумаг 1-го вида, а 5-й — из бумаг 2-го вида.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Эффективность | 4,0 | 4,4 | 4,8 | 5,2 | 5,6 | 6,0 |
| Риск портфеля | 8,0 | 9,1 | 13,3 | 18,3 | 24,2 | 30,0 |
| Полезность портфеля | 1,2 | 1,4 | 1,2 | 0,9 | 0,7 | 0,5 |
| Номер портфеля | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

Проверьте компьютерные расчеты, убедитесь, что 1-й портфель имеет наибольшую полезность.

**6.** Пусть оценка ЛПР полезности портфеля $P$ есть $u(P) = m - r^2$, где $m$, $r$ — эффективность и риск портфеля. Портфель составляется из двух некоррелированных ценных бумаг с эффективностями и рисками соответственно (2, 4), (4, 8). Найдите самый полезный портфель. Найдите эффективность и риск этого портфеля.

# УКАЗАНИЯ И ОТВЕТЫ К ВОПРОСАМ И ЗАДАЧАМ

## Глава 1

**1.** 6. **2.** 1653. **3.** Пусть $\alpha$ — инфляция за год, тогда инфляция за квартал $x$ находится из уравнения $(1 + x)^4 = 1 + \alpha$. **4.** ...., 851, 926, 1000, 1080, 1166, ... . **5.** 11. **7.** 4,76 (простые проценты). 4,1 (сложные). **10.** 18,7. **11.** $S(1 + \sum_{k=1}^{n} i_k)$. **12.** $S \cdot \prod_{k=1}^{n}(1 + i_k)$. **13.** Плательщику.

## Глава 2

**2.** 721, 835. **3.** 9. **4.** 1636. **5.** 20518. **6.** 6002. **7.** 3443. **9.** 773. **10.** 8. **11.** 648. **12.** При 10% — второй, при 5% — первый. **13.** Увеличение на год. **14.** 3000. **16.** Да, например, для годовой ренты длительностью 1 год. **18.** На первое место надо поставить максимальный платеж, затем — максимальный из оставшихся и т.д. **19.** $R(1 + i)^t/i$ минимальна при $t = 0$; максимума нет. **20.** При $i > 1{,}01$ (1,01 — это 101% годовых!) предпочтительнее увеличение платежа, при $i < 1{,}01$ — уменьшение ставки процента. **21.** Да.

**22.**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1000 | 1050 | 2214 | 3535 |
| | | 1000 | 1000 | 1000 |
| | | ... | ... | ... |
| | | 2050 | 3214 | 4535 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

Современную величину такой ренты $A$ можно найти из уравнения $A(1{,}05) + (1{,}05A + 1000)1{,}05 + [(1{,}05A + 1000)1{,}05 + 1000]1{,}08 + \{[(1{,}05A + 1000)1{,}05 + 1000]1{,}08 + 1000\}1{,}1 = 4535$. **25.** $\mu/\mu(-1)$. **26.** Ответ автору неизвестен. **27.** Да. **28.** $1/\ln \mu$.

## Глава 3

**1.** Для заемщиков. **7.** Да. **8.** В конце 1-го года — 1025; 2-го — 975, ..., в конце 8-го – 675. **9.** 3480. **10.** 7950. **11.** 0,242, ..., 242.

## Глава 4

**1.** Не дана ставка процента, пусть она равна 6%. Рассмотрим подробно 1-й цикл: расходы в конце 1-го года, доходы в конце 2-го года, ..., в конце 10-го года. Современная величина этих платежей равна $(10\,000 \cdot a(9{,}6) - 30\,000)/1{,}06 = 35\,858$. Современная величина всех платежей по проекту равна $35\,858/(1 - 1{,}06^{10}) = 81\,126$. Это и есть NPV проекта. **6.** Брать бóльшие суммы и «проедать». **8.** 349. **9.** Арендовать. **10.** NPV = 777, $q = 38\%$.

## Глава 5

**3.** 14. **4.** 17. **6.** $K(t) = K(0) \cdot e^{\alpha t}$. **7.** 411. 2,27. **8.** Купить доллары и хранить их... . **9.** Нести рубли в банк.

## Глава 6

**1.** Во всех трех случаях лучше уменьшение ставки процента. **2.** 160; 5. **3.** 74,7; 7,4. **5.** 188,2. **6.** 200; 6,7. **7.** 10 295. **8.** Доходность абсолютная 0,4316; в процентах годовых 319. **9.** Доходность абсолютная 0,392; в процентах годовых 276.

## Глава 7

**3.** Каждому по 0,5. **4.** 29,23. **5.** $u(x_1, x_2) = \sqrt{2x_1 + 5x_2}$.

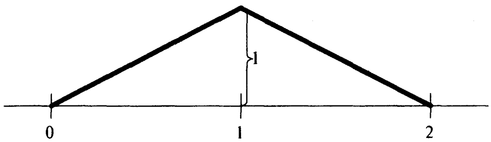
## Глава 8

**4.** Пусть один — разрезает торт, а второй — берет понравившийся ему кусок первым. **5.** Пусть один из разбойников отбирает в отдельную кучку треть всей добычи, по его мнению; если из оставшихся разбойников никто эту кучку не берет, то ее должен взять тот, кто отбирал часть добычи в эту кучку, и т.д.

## Глава 9

**1.** $i/2[(1 + i)^{0,1} + (1 + i)^{-0,1}] > i$. **4.** $\int_{0,9}^{1,1} i(1+i)^t 5dt$. **5.** Нет. **6.** $i/\big((1+i)\ln(1+i)\big)$.

**7.** Примем платеж пока равным 1, первый платеж может быть с равной вероятностью 1,10 и 1,12; математическое ожидание его современной величины равно $1/2\left((1+i)^{-9/12}\right) + 1/2\left((1+i)^{-11/12}\right)$, обозначим его $a_1$; второй платеж с вероятностью 1/2 последует через 1 год после первого, с вероятностью 1/4 через 11 месяцев и с вероятностью 1/4 через 14 месяцев, поэтому математическое ожидание его величины, дисконтированной к моменту первого платежа равно $1/2\left((1+i)^{-1}\right) + 1/4\left((1+i)^{-11/12}\right) + 1/4\left((1+i)^{-14/12}\right)$; обозначим его через $a_2$, тогда математическое ожидание современной величины второго платежа есть $a_1 a_2$, аналогично, математическое ожидание современной величины третьего платежа есть $a_1$, $a_2^2$, и т.д., так что математическое ожидание современной величины рассматриваемой ренты равно $1000a_1 / (1 - a_2)$. **8.** Задача аналогична предыдущей: $a_1 = i/\big((1+i)\ln(1+i)\big)$ (см. задачу *б*); $a_2 = \int_0^2 (1+i)^t \cdot f(t)\,dt$, где график плотности $f$ таков:




**9.**

Завтра:

| | | |
|---|---|---|
| 90,9 | 100 | 1110 |
| 1/3 | 1/3 | 1/3 |

Послезавтра:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 89,6 | 90,9 | 100 | 110 | 121 |
| 1/9 | 2/9 | 3/9 | 2/9 | 1/9 |

**10.** Находим по таблице коэффициент приведения $a(10,7) = 6,71$; далее находим $x$ из уравнения: $6,71 \cdot x = 5000$; $x = 745$. Значит, искомая часть проектов равна $(3000 - 745)/2500 = 90\%$. **11.** $(1+i)-i$ : $:\big((1+i)\ln(1+i)\big)$ (см. задачу *б*). **12.** Современная величина всех платежей равна $1/\ln(1 + i)$ (см. пример *2*). **14.** Средний доход хозяина с каждого захода в казино равна сумме всех платежей, взятой с минусом, т.е. 5.

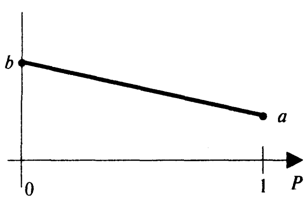
## Глава 10

**4.** Третья операция — лучшая по обоим критериям. **8.** Может.

## Глава 11

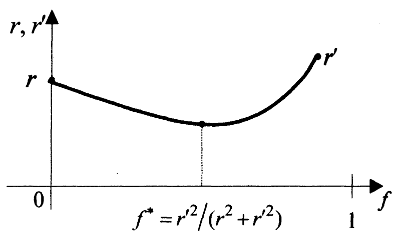
**1.** *а*) незнание; *б*) незнание; *в*) незнание; *г*) случайность; *д*) случайность; *е*) случайность; *л*) при увеличении стажа уменьшаются и незнание, и случайные ошибки.

**3.**




**4.** $r_f = \sqrt{f^2 \cdot r^2 + (1-f^2)\cdot r'^2}$,

$f^* = r'^2/(r^2 + r'^2)$;



**6.** $e = pA(1-p)$, $p^* = 1/2$, $e^* = A/4$; $r = A(1-p)\sqrt{p(1-p)}$, $r^* = 3\sqrt{3}\,A/16$; при $p = 1/4$.

## Глава 12

**2.** См. пример 2. **3.** См. пример 2. **4.** Мало что можно сделать в этой ситуации. Если у российского ученого есть в Мексике друзья, то они могут купить автомобиль как бы на его «будущие деньги», а потом отдать ему доллары по сегодняшнему курсу.

## Глава 13

**1.** *а*) 1/2, 1/4, 1/2; *б*) 0, 0; *в*) 1/2, 0, 1/4.

**4.**

$$C_1:\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 1/2 & 1/2 \end{array};\quad C_2:\ \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 0 \\ \hline 1/4 & 3/4 \end{array};\quad C_3:\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 1 & 0 \\ \hline 1/8 & 3/8 & 1/2 \end{array}.$$

**6.** 16,1; 1/32; 5/32; 15/32; $1-(1/2)^n$; 10,5; 11. **9.** $1/2 - \Phi((1-0{,}078n)/(0{,}557n))$, где $\Phi$ — функция Лапласа; при $n = 12$ эта вероятность равна 0,46. **10.** $M[S_n] = S_0(M[e^h]^n)$, где $h$ распределены как $h$. **11.** Так как $\ln S = \ln S + h$, то $\ln(S)$ распределено нормально с математическим ожиданием $\ln S + nM[h]$ и дисперсией $nD[h]$, далее нужно воспользоваться формулами из п. 13.3. **12.** При $n > 10S - S\ N(n, 2n)$, так что $P(S > S) = 1/2 - \Phi(n/2n)$.

## Глава 14

**1.** s = 4,5. **3.** $M[K_n/K_0] = e^{na+nd/2} : D[K_n/K_0] = e^{2na+nd}\cdot(e^{nd}-1)$.

## Глава 15

**1.** Тот, у которого цена исполнения меньше. **2.** Тот, у которого цена исполнения больше. **3.** $2n$, где $n$ — число периодов (см. § 13.1).

## Глава 16

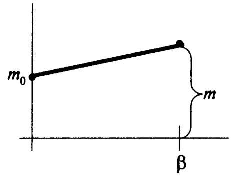
**4.** 7,1%.

## Глава 17

**1.** Безрисковая ставка в США — учетная ставка Федеральной Резервной системы. Такая ставка фактически определяет цену кредитных денег: чем она меньше, тем они дешевле обходятся заемщикам. Поэтому снижение такой ставки вызывает оживление деловой активности, повышение — уменьшение деловой активности, что предохраняет экономику от «перегрева». **2.** Вообще-то $\alpha$ и $\beta$ важнейших бумаг регулярно публикуются в специализированных печатных изданиях, самостоятельно считать эти параметры трудно. **3.** Потому что их поведение противоположно поведению рынка в целом: на рынке котировки важнейших бумаг идут вверх, а котировки этих бумаг падают, и наоборот. **4.** Такие бумаги используются для уменьшения риска бумаг, положительно коррелированных с рынком в целом. **5.** 1,05. **6.** (0,4; 0,6). **7.** Нет.

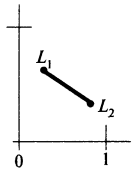
## Глава 18

**2.** 8,4%. **3.** Зависит от $\beta$, при $\beta > 1$ уменьшается, при $\beta < 1$ увеличивается. **4.** $m_0 = m_r - (m_2 - m_1)/(\beta_2 - \beta_1)$. **5.**




## Глава 19

**1.** $1/2 + \Phi\ ((n - 10)/10\sqrt{n})$, где $\Phi$ — функция Лапласа. **2.** Пессимист, $f = 1/3$. **3.** Отрезок $L_1L_2$.




**4.** (0,27; 0,40; 0,33). **5.** Треугольник, координаты вершин которого лотереи.

## Глава 20

**1.** 0. **2.** Покупная цена $x$ определяется из уравнения: $pu(w - x + C) + (1 - p)u(w - x + B) = u(w)$. **3.** Продажная цена $y$ определяется из уравнения: $pu(w + C) + (1 - p)u(w + B) = u(w + y)$. **5.** 155. **6.** (0,95; 0,05); 3,9; 1,93.

# УКАЗАТЕЛЬ ФИНАНСОВЫХ ТЕРМИНОВ

# БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК


1. *Вэриан Х.Р.* Микроэкономика. — М.: ЮНИТИ, 1998.
2. *Капитоненко В.В.* Финансовая математика и ее приложения. — М.: Приор, 1998.
3. *Кутуков В.Б.* Основы финансовой и страховой математики. — М.: Дело, 1998.
4. *Мелкумов Я.С.* Теоретическое и практическое пособие по финансовым вычислениям. — М.: Инфра-М, 1996.
5. *Первозванский А.Т., Первозванская Т.Н.* Финансовый рынок: расчет и риск. — М.: Инфра-М, 1994.
6. *Уотшем Т. Дж., Паррамоу Л.* Количественные методы в финансах: Пер. с англ. — М. ЮНИТИ, 1998.
7. *Четыркин Е.М.* Методы финансовых и коммерческих расчетов. — М.: Дело, 1995.
8. *Черчмен У., Акоф Р., Арноф Л.* Введение в исследование операций. — М.: Наука, 1968.
9. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 1, 2. — М.: Фазис, 1998.
10. *Малыхин В.И.* Оптимальные портфели и пакеты ценных бумаг. — М.: ГУУ, 2002.

*Приложение 1*

## МУЛЬТИПЛИЦИРУЮЩИЕ МНОЖИТЕЛИ

| Число периодов | Ставка процентов | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1,50 | 2,00 | 2,50 | 3,00 | 3,50 | 4,00 | 4,50 |
| 1 | 1,015000 | 1,02000 | 1,025000 | 1,030000 | 1,035000 | 1,040000 | 1,045000 |
| 2 | 1,030225 | 1,040400 | 1,050625 | 1,060900 | 1,071225 | 1,081600 | 1,092025 |
| 3 | 1,045678 | 1,061208 | 1,076891 | 1,092727 | 1,108718 | 1,124864 | 1,141166 |
| 4 | 1,061364 | 1,082432 | 1,103813 | 1,125509 | 1,147523 | 1,169859 | 1,192519 |
| 5 | 1,077284 | 1,104081 | 1,131408 | 1,159274 | 1,187686 | 1,216653 | 1,246182 |
| 6 | 1,093443 | 1,126162 | 1,159693 | 1,194052 | 1,229255 | 1,265319 | 1,302260 |
| 7 | 1,109845 | 1,148686 | 1,188686 | 1,229874 | 1,272279 | 1,315932 | 1,360862 |
| 8 | 1,126493 | 1,171659 | 1,218403 | 1,266770 | 1,316809 | 1,368569 | 1,422101 |
| 9 | 1,143390 | 1,195093 | 1,248863 | 1,304773 | 1,362897 | 1,423312 | 1,486095 |
| 10 | 1,160541 | 1,218994 | 1,280085 | 1,343916 | 1,410599 | 1,480244 | 1,552969 |
| 11 | 1,177949 | 1,243374 | 1,312087 | 1,384234 | 1,459970 | 1,539454 | 1,622853 |
| 12 | 1,195618 | 1,268242 | 1,344889 | 1,425761 | 1,511069 | 1,601032 | 1,695881 |
| 13 | 1,213552 | 1,293607 | 1,378511 | 1,468534 | 1,563956 | 1,665074 | 1,772196 |
| 14 | 1,231756 | 1,319479 | 1,412974 | 1,512590 | 1,618695 | 1,731676 | 1,851945 |
| 15 | 1,250232 | 1,345868 | 1,448298 | 1,557967 | 1,675349 | 1,800944 | 1,935282 |
| 16 | 1,268986 | 1,372786 | 1,484506 | 1,604706 | 1,733986 | 1,872981 | 2,022370 |
| 17 | 1,288020 | 1,400241 | 1,521618 | 1,652848 | 1,794676 | 1,947900 | 2,113377 |
| 18 | 1,307341 | 1,428246 | 1,559659 | 1,702433 | 1,857489 | 2,025817 | 2,208479 |
| 19 | 1,326951 | 1,456811 | 1,598650 | 1,753506 | 1,922501 | 2,106849 | 2,307860 |
| 20 | 1,346855 | 1,485947 | 1,638616 | 1,806111 | 1,989789 | 2,191123 | 2,411714 |
| 21 | 1,367058 | 1,515666 | 1,679582 | 1,860295 | 2,059431 | 2,278768 | 2,520241 |
| 22 | 1,387564 | 1,545980 | 1,721571 | 1,916103 | 2,131512 | 2,369919 | 2,633652 |
| 23 | 1,408377 | 1,576899 | 1,764611 | 1,973587 | 2,206114 | 2,464716 | 2,752166 |
| 24 | 1,429503 | 1,608437 | 1,808726 | 2,032794 | 2,283328 | 2,563304 | 2,876014 |
| 25 | 1,450945 | 1,640606 | 1,853944 | 2,093778 | 2,363245 | 2,665836 | 3,005434 |
| 26 | 1,472710 | 1,673418 | 1,900293 | 2,156591 | 2,445959 | 2,772470 | 3,140679 |
| 27 | 1,494800 | 1,706886 | 1,947800 | 2,221289 | 2,531567 | 2,883369 | 3,282010 |
| 28 | 1,517222 | 1,741024 | 1,996495 | 2,287928 | 2,620172 | 2,998703 | 3,429700 |
| 29 | 1,539981 | 1,775845 | 2,046407 | 2,356566 | 2,711878 | 3,118651 | 3,584036 |
| 30 | 1,563080 | 1,811362 | 2,097568 | 2,427262 | 2,806794 | 3,243398 | 3,745318 |
| 31 | 1,586526 | 1,847589 | 2,150007 | 2,500080 | 2,905031 | 3,373133 | 3,913857 |
| 32 | 1,610324 | 1,884541 | 2,203757 | 2,575083 | 3,006708 | 3,508059 | 4,089981 |
| 33 | 1,364479 | 1,922231 | 2,258851 | 2,652335 | 3,111942 | 3,648381 | 4,274030 |
| 34 | 1,658996 | 1,960676 | 2,315322 | 2,731905 | 3,220860 | 3,794316 | 4,466362 |
| 35 | 1,683881 | 1,999890 | 2,373205 | 2,813862 | 3,333590 | 3,946089 | 4,667348 |
| 36 | 1,709140 | 2,039887 | 2,432535 | 2,898278 | 3,450266 | 4,103933 | 4,877378 |
| 37 | 1,734777 | 2,080685 | 2,493349 | 2,985227 | 3,571025 | 4,268090 | 5,096860 |
| 38 | 1,760798 | 2,122299 | 2,555682 | 3,074783 | 3,696011 | 4,438813 | 5,326219 |
| 39 | 1,787210 | 2,164745 | 2,619574 | 3,167027 | 3,825372 | 4,616366 | 5,565899 |
| 40 | 1,814018 | 2,208040 | 2,685064 | 3,262038 | 3,959260 | 4,801021 | 5,816365 |
| 41 | 1,841229 | 2,252200 | 2,752190 | 3,359899 | 4,097834 | 4,993061 | 6,078101 |
| 42 | 1,868847 | 2,297244 | 2,820995 | 3,460696 | 4,241258 | 5,192784 | 6,351615 |
| 43 | 1,896880 | 2,343189 | 2,891520 | 3,564517 | 4,389702 | 5,400495 | 6,637438 |
| 44 | 1,925333 | 2,390053 | 2,963808 | 3,671452 | 4,543342 | 5,616515 | 6,936123 |
| 45 | 1,954213 | 2,437854 | 3,037903 | 3,781596 | 4,702359 | 5,841176 | 7,248248 |
| 46 | 1,983526 | 2,486611 | 3,113851 | 3,895044 | 4,866941 | 6,074823 | 7,574420 |
| 47 | 2,013279 | 2,536344 | 3,191697 | 4,011895 | 5,037284 | 6,317816 | 7,915268 |
| 48 | 2,043478 | 2,587070 | 3,271490 | 4,132252 | 5,213589 | 6,570528 | 8,271456 |
| 49 | 2,074130 | 2,638812 | 3,353277 | 4,256219 | 5,396065 | 6,833349 | 8,643671 |
| 50 | 2,105242 | 2,691588 | 3,437109 | 4,383906 | 5,584927 | 7,106683 | 9,032636 |

## МУЛЬТИПЛИЦИРУЮЩИЕ МНОЖИТЕЛИ

| Число периодов | Ставка процентов | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 5,00 | 5 50 | 6,00 | 6,50 | 7,00 | 7,50 | 8,00 |
| 1 | 1,0500000 | 1,0550000 | 1,0600000 | 1,0650000 | 1,0700000 | 1,0750000 | 1,0800000 |
| 2 | 1,1025000 | 1,1130250 | 1,1236000 | 1,1342250 | 1,1449000 | 1,1556250 | 1,1664000 |
| 3 | 1,1576250 | 1,1742414 | 1,1910160 | 1,2079496 | 1,2250430 | 1,2422969 | 1,2597120 |
| 4 | 1,2155063 | 1,2388247 | 1,2624770 | 1,2864664 | 1,3107960 | 1,3354691 | 1,3604890 |
| 5 | 1,2762816 | 1,3069600 | 1,3382256 | 1,3700867 | 1,4025517 | 1,4356293 | 1,4693281 |
| 6 | 1,3400956 | 1,3788428 | 1,4185191 | 1,4591423 | 1,5007304 | 1,5433015 | 1,5868743 |
| 7 | 1,4071004 | 1,4546792 | 1,5036303 | 1,5539865 | 1,6057815 | 1,6590491 | 1,7138243 |
| 8 | 1,4774554 | 1,5346865 | 1,5938481 | 1,6549957 | 1,7181862 | 1,7834778 | 1,8509302 |
| 9 | 1,5513282 | 1,6190943 | 1,6894790 | 1,7625704 | 1,8384592 | 1,9172387 | 1,9990046 |
| 10 | 1,6288946 | 1,7081445 | 1,7908477 | 1,8771375 | 1,9671514 | 2,0610316 | 2,1589250 |
| 11 | 1,7103394 | 1,8020924 | 1,8982986 | 1,9991514 | 2,1048520 | 2,2156089 | 2,3316390 |
| 12 | 1,7958563 | 1,9012075 | 2,0121965 | 2,1290962 | 2,2521916 | 2,3817796 | 2,5181701 |
| 13 | 1,8856491 | 2,0057739 | 2,1329283 | 2,2674875 | 2,4098450 | 2,5604131 | 2,7196237 |
| 14 | 1,9799316 | 2,1160915 | 2,2609040 | 2,4148742 | 2,5785342 | 2,7524440 | 2,9371936 |
| 15 | 2,0789282 | 2,2324765 | 2,3965582 | 2,5718410 | 2,7590315 | 2,9588774 | 3,1721691 |
| 16 | 2,1828746 | 2,3552627 | 2,5403517 | 2,7390107 | 2,9521637 | 3,1807932 | 3,4259426 |
| 17 | 2,2920183 | 2,4848021 | 2,6927728 | 2,9170464 | 3,1588152 | 3,4193526 | 3,7000181 |
| 18 | 2,4066192 | 2,6214663 | 2,8543392 | 3,1066544 | 3,3799323 | 3,6758041 | 3,9960195 |
| 19 | 2,5269502 | 2,7656469 | 3,0255995 | 3,3085869 | 3,6165275 | 3,9514894 | 4,3157011 |
| 20 | 2,6532977 | 2,9177575 | 3,2071355 | 3,5236451 | 3,8696845 | 4,2478511 | 4,6609571 |
| 21 | 2,7859626 | 3,0782342 | 3,3995636 | 3,7526820 | 4,1405624 | 4,5664399 | 5,0338337 |
| 22 | 2,9252607 | 3,2475370 | 3,6035374 | 3,9966063 | 4,4304017 | 4,9089229 | 5,4365404 |
| 23 | 3,0715238 | 3,4261516 | 3,8197497 | 4,2563857 | 4,7405299 | 5,2770921 | 5,8714636 |
| 24 | 3,2250999 | 3,6145899 | 4,0489346 | 4,5330508 | 5,0723670 | 5,6728741 | 6,3411807 |
| 25 | 3,3863549 | 3,8133923 | 4,2918707 | 4,8276991 | 5,4274326 | 6,0983396 | 6,8484752 |
| 26 | 3,5556727 | 4,0231289 | 4,5493830 | 5,1414996 | 5,8073529 | 6,5557151 | 7,3963532 |
| 27 | 3.7334563 | 4,2444010 | 4,8223459 | 5,4756970 | 6,2138676 | 7,0473937 | 7,9880615 |
| 28 | 3,9201291 | 4,4778431 | 5,1116867 | 5,8316173 | 6,6488384 | 7,5759482 | 8,6271064 |
| 29 | 4,1161356 | 4,7241244 | 5,4183879 | 6,2106725 | 7,1142570 | 8,1441444 | 9,3172749 |
| 30 | 4,3219424 | 4,9839513 | 5,7434912 | 6,6143662 | 7,6122550 | 8,7549552 | 10,062657 |
| 31 | 4,5380395 | 5,2580686 | 6,0881006 | 7,0443000 | 8,1451129 | 9,4115768 | 10,867669 |
| 32 | 4,7649415 | 5,5472624 | 6,4533867 | 7,5021795 | 8,7152708 | 10,117445 | 11,737083 |
| 33 | 5,0031885 | 5,8523618 | 6,8405899 | 7,9898211 | 9,3253398 | 10,876253 | 12,676050 |
| 34 | 5,2533480 | 6,1742417 | 7,2510253 | 8,5091595 | 9,9781135 | 11,691972 | 13,690134 |
| 35 | 5,5160154 | 6,5138250 | 7,6860868 | 9,0622549 | 10,676581 | 12,568870 | 14,785344 |
| 36 | 5,7918161 | 6,8720854 | 8,1472520 | 9,6513014 | 11,423942 | 13,511536 | 15,968172 |
| 37 | 6,0814069 | 7,2500501 | 8,6360871 | 10,278636 | 12,223618 | 14,524901 | 17,245626 |
| 38 | 6,3854773 | 7,6488028 | 9,1542523 | 10,946747 | 13,079271 | 15,614268 | 18,625276 |
| 39 | 6,7047512 | 8,0694870 | 9,7035075 | 11,658286 | 13,994820 | 16,785339 | 20,115298 |
| 40 | 7,0399887 | 8,5133088 | 10,285718 | 12,416075 | 14,974458 | 18,044239 | 21,724521 |
| 41 | 7,3919881 | 8,9815408 | 10,902861 | 13,223119 | 16,022670 | 19,397557 | 23,462483 |
| 42 | 7,7615876 | 9,4755255 | 11,557033 | 14,082622 | 17,144257 | 20,852374 | 25,339482 |
| 43 | 8,1496669 | 9,9966794 | 12,250455 | 14,997993 | 18,344355 | 22,416302 | 27,366640 |
| 44 | 8,5571503 | 10,546497 | 12,985482 | 15,972862 | 19,628460 | 24,097524 | 29,555972 |
| 45 | 8,9850078 | 11,126554 | 13,764611 | 17,011096 | 21,002452 | 25,904839 | 31,920449 |
| 46 | 9,4342582 | 11,738515 | 14,590487 | 18,116820 | 22,472623 | 27,847702 | 34,474085 |
| 47 | 9,9059711 | 12,384133 | 15,465917 | 19,294413 | 24,045707 | 29,936279 | 37,232012 |
| 48 | 10,401270 | 13,065260 | 16,393872 | 20,548550 | 25,728907 | 32,181500 | 40,210573 |
| 49 | 10,921333 | 13,783849 | 17,377504 | 21,884205 | 27,529930 | 34,595113 | 43,427419 |
| 50 | 11,467400 | 14,541961 | 18,420154 | 23,306679 | 29,457025 | 37,189746 | 46,901613 |

## МУЛЬТИПЛИЦИРУЮЩИЕ МНОЖИТЕЛИ

| Число периодов | Ставка процентов | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 8,50 | 9,00 | 9,50 | 10,00 | 10,50 | 11,00 | 11,50 |
| 1 | 1,0850000 | 1,0900000 | 1,0950000 | 1,1000000 | 1,1050000 | 1,1100000 | 1,1150000 |
| 2 | 1,1772250 | 1,1881000 | 1,1990250 | 1,2100000 | 1,2210250 | 1,2321000 | 1,2432250 |
| 3 | 1,2772891 | 1,2950290 | 1,3129324 | 1,3310000 | 1,3492326 | 1,3676310 | 1,3861959 |
| 4 | 1,3858587 | 1,4115816 | 1,4376610 | 1,4641000 | 1,4909021 | 1,5180704 | 1,5456084 |
| 5 | 1,5036567 | 1,5386240 | 1,5742387 | 1,6105100 | 1,6474468 | 1,6850582 | 1,7233534 |
| 6 | 1,6314675 | 1,6771001 | 1,7237914 | 1,7715610 | 1,8204287 | 1,8704146 | 1,9215390 |
| 7 | 1,7701422 | 1,8280391 | 1,8875516 | 1,9487171 | 2,0115737 | 2,0761602 | 2,1425160 |
| 8 | 1,9206043 | 1,9925626 | 2,0668690 | 2,1435888 | 2,2227889 | 2,3045378 | 2,3889053 |
| 9 | 2,0838557 | 2,1718933 | 2,2632216 | 2,3579477 | 2,4561818 | 2,5580369 | 2,6636294 |
| 10 | 2,2609834 | 2,3673637 | 2,4782276 | 2,5937425 | 2,7140808 | 2,8394210 | 2,9699468 |
| 11 | 2,4531670 | 2,5804264 | 2,7136592 | 2,8531167 | 2,9990593 | 3,1517573 | 3,3114907 |
| 12 | 2,6616862 | 2,8126648 | 2,9714569 | 3,1384284 | 3,3139606 | 3,4984506 | 3,6923121 |
| 13 | 2,8879296 | 3,0658046 | 3,2537453 | 3,4522712 | 3,6619264 | 3,8832802 | 4,1169280 |
| 14 | 3,1334036 | 3,3417270 | 3,5628511 | 3,7974983 | 4,0464287 | 4,3104410 | 4,5903748 |
| 15 | 3,3997429 | 3,6424825 | 3,9013219 | 4,1772482 | 4,4713037 | 4,7845895 | 5,1182679 |
| 16 | 3,6887210 | 3,9703059 | 4,2719475 | 4,5949730 | 4,9407906 | 5,3108943 | 5,7068687 |
| 17 | 4,0022623 | 4,3276334 | 4,6777825 | 5,0544703 | 5,4595736 | 5,8950927 | 6,3631586 |
| 18 | 4,3424546 | 4,7171204 | 5,1221719 | 5,5599173 | 6,0328288 | 6,5435529 | 7,0949218 |
| 19 | 4,7115632 | 5,1416613 | 5,6087782 | 6,1159090 | 6,6662759 | 7,2633437 | 7,9108378 |
| 20 | 5,1120461 | 5,6044108 | 6,1416121 | 6,7274999 | 7,3662348 | 8,0623115 | 8,8205842 |
| 21 | 5,5465700 | 6,1088077 | 6,7250653 | 7,4002499 | 8,1396895 | 8,9491658 | 9,8349513 |
| 22 | 6,0180285 | 6,6586004 | 7,3639465 | 8,1402749 | 8,9943569 | 9,9335740 | 10,965971 |
| 23 | 6,5295609 | 7,2578745 | 8,0635214 | 8,9543024 | 9,9387644 | 11,026267 | 12,227057 |
| 24 | 7,0845736 | 7,9110832 | 8,8295559 | 9,8497327 | 10,982335 | 12,239157 | 13,633169 |
| 25 | 7,6867624 | 8,6230807 | 9,6683637 | 10,834706 | 12,135480 | 13,585464 | 15,200983 |
| 26 | 8,3401372 | 9,3991579 | 10,586858 | 11,918177 | 13,409705 | 15,079865 | 16,949096 |
| 27 | 9,0490488 | 10,245082 | 11,592610 | 13,109994 | 14,817724 | 16,738650 | 18,898243 |
| 28 | 9,8182180 | 11,167140 | 12,693908 | 14,420994 | 16,373585 | 18,579901 | 21,071540 |
| 29 | 10,652766 | 12,172182 | 13,899829 | 15,863093 | 18,092812 | 20,623691 | 23,494768 |
| 30 | 11,558252 | 13,267678 | 15,220313 | 17,449402 | 19,992557 | 22,892297 | 26,196666 |
| 31 | 12,540703 | 14,461770 | 16,666242 | 19,194342 | 22,091775 | 25,410449 | 29,209282 |
| 32 | 13,606663 | 15,763329 | 18,249535 | 21,113777 | 24,411412 | 28,205599 | 32,568350 |
| 33 | 14,763229 | 17,182028 | 19,983241 | 23,225154 | 26,974610 | 31,308214 | 36,313710 |
| 34 | 16,018104 | 18,728411 | 21,881649 | 25,547670 | 29,806944 | 34,752118 | 40,489787 |
| 35 | 17,379642 | 20,413968 | 23,960406 | 28,102437 | 32,936673 | 38,574851 | 45,146112 |
| 36 | 18,856912 | 22,251225 | 26,236644 | 30,912681 | 36,395024 | 42,818085 | 50,337915 |
| 37 | 20,459750 | 24,253835 | 28,729126 | 34,003949 | 40,216501 | 47,528074 | 56,126776 |
| 38 | 22,198828 | 26,436680 | 31,458393 | 37,404343 | 44,439234 | 52,756162 | 62,581355 |
| 39 | 24,085729 | 28,815982 | 34,446940 | 41,144778 | 49,105354 | 58,259340 | 69,778211 |
| 40 | 26,133016 | 31,409420 | 37,719399 | 45,259256 | 54,261416 | 65,000867 | 77,802705 |
| 41 | 28,354322 | 34,236268 | 41,302742 | 49,785181 | 59,958864 | 72,150963 | 86,750016 |
| 42 | 30,764439 | 37,317532 | 45,226503 | 54,763699 | 66,254545 | 80,087569 | 96,726268 |
| 43 | 33,379417 | 40,676110 | 49,523020 | 60,240069 | 73,211272 | 88,897201 | 107,84979 |
| 44 | 36,216667 | 44,336960 | 54,227707 | 66,264076 | 80,898456 | 98,675893 | 120,25251 |
| 45 | 39,295084 | 48,327286 | 59,379340 | 72,890484 | 89,392794 | 109,53024 | 134,08155 |
| 46 | 42,635166 | 52,676742 | 65,020377 | 80,179532 | 98,779037 | 121,57857 | 149,50093 |
| 47 | 46,259155 | 57,417649 | 71,197313 | 88,197485 | 109,15084 | 134,95221 | 166,69354 |
| 48 | 50,191183 | 62,585237 | 77,961057 | 97,017234 | 120,61167 | 149,79695 | 185,86330 |
| 49 | 54,457434 | 68,217908 | 85,367358 | 106,71896 | 133,27590 | 166,27462 | 207,23758 |
| 50 | 59,086316 | 74,357520 | 93,477257 | 117,39085 | 147,26987 | 184,56483 | 231,06990 |

# МУЛЬТИПЛИЦИРУЮЩИЕ МНОЖИТЕЛИ

| Число периодов | Ставка процентов | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 12,00 | 12,50 | 13,00 | 13,50 | 14,00 | 14,50 | 15,00 |
| 1 | 1,1200000 | 1,1250000 | 1,1300000 | 1,1350000 | 1,1400000 | 1,1450000 | 1,1500000 |
| 2 | 1,2544000 | 1,2656250 | 1,2769000 | 1,2882250 | 1,2996000 | 1,3110250 | 1,3225000 |
| 3 | 1,4049280 | 1,4238281 | 1,4428970 | 1,4621354 | 1,4815440 | 1,5011236 | 1,5208750 |
| 4 | 1,5735194 | 1,6018066 | 1,6304736 | 1,6595237 | 1,6889602 | 1,7187866 | 1,7490063 |
| 5 | 1,7623417 | 1,8020325 | 1,8424352 | 1,8835593 | 1,9254146 | 1,9680106 | 2,0113572 |
| 6 | 1,9738227 | 2,0272865 | 2,0819518 | 2,1378399 | 2,1949726 | 2,2533721 | 2,3130608 |
| 7 | 2,2106814 | 2,2806973 | 2,3526055 | 2,4264482 | 2,5022688 | 2,5801111 | 2,6600199 |
| 8 | 2,4759632 | 2,5657845 | 2,6584442 | 2,7540187 | 2,8525864 | 2,9542272 | 3,0590229 |
| 9 | 2,7730788 | 2,8865076 | 3,0040419 | 3,1258113 | 3,2519485 | 3,3825902 | 3,5178763 |
| 10 | 3,1058482 | 3,2473210 | 3,3945674 | 3,5477958 | 3,7072213 | 3,8730657 | 4,0455577 |
| 11 | 3,4785500 | 3,6532362 | 3,8358612 | 4,0267482 | 4,2262323 | 4,4346603 | 4,6523914 |
| 12 | 3,8959760 | 4,1098907 | 4,3345231 | 4,5703592 | 4,8179048 | 5,0776860 | 5,3502501 |
| 13 | 4,3634931 | 4,6236270 | 4,8980111 | 5,1873577 | 5,4924115 | 5,8139505 | 6,1527876 |
| 14 | 4,8871123 | 5,2015804 | 5,5347525 | 5,8876510 | 6,2613491 | 6,6569733 | 7,0757058 |
| 15 | 5,4735658 | 5,8517779 | 6,2542704 | 6,6824839 | 7,1379380 | 7,6222344 | 8,1370616 |
| 16 | 6,1303937 | 6,5832502 | 7,0673255 | 7,5846193 | 8,1372493 | 8,7274584 | 9,3576209 |
| 17 | 6,8660409 | 7,4061564 | 7,9860778 | 8,6085429 | 9,2764642 | 9,9929399 | 10,761264 |
| 18 | 7,6899658 | 8,3319260 | 9,0242680 | 9,7706961 | 10,575169 | 11,441916 | 12,375454 |
| 19 | 8,6127617 | 9,3734167 | 10,197423 | 11,089740 | 12,055693 | 13,100994 | 14,231772 |
| 20 | 9,6462931 | 10,545094 | 11,523088 | 12,586855 | 13,743490 | 15,000638 | 16,366537 |
| 21 | 10,803848 | 11,863231 | 13,021089 | 14,286080 | 15,667578 | 17,175731 | 18,821518 |
| 22 | 12,100310 | 13,346134 | 14,713831 | 16,214701 | 17,861039 | 19,666212 | 21,644746 |
| 23 | 13,552347 | 15,014401 | 16,626629 | 18,403686 | 20,361585 | 22,517812 | 24,891458 |
| 24 | 15,178629 | 16,891201 | 18,788091 | 20,888184 | 23,212207 | 25,782895 | 28,625176 |
| 25 | 17,000064 | 19,002602 | 21,230542 | 23,708088 | 26,461916 | 29,521415 | 32,918953 |
| 26 | 19,040072 | 21,377927 | 23,990513 | 26,908680 | 30,166584 | 33,802020 | 37,856796 |
| 27 | 21,324881 | 24,050168 | 27,109279 | 30,541352 | 34,389906 | 38,703313 | 43,535315 |
| 28 | 23,883866 | 27,056438 | 30,633486 | 34,664435 | 39,204493 | 44,315293 | 50,065612 |
| 29 | 26,749930 | 30,438493 | 34,615839 | 39,344133 | 44,693122 | 50,741011 | 57,575454 |
| 30 | 29,959922 | 34,243305 | 39,115898 | 44,655591 | 50,950159 | 58,098457 | 66,211772 |
| 31 | 33,555113 | 38,523718 | 44,200965 | 50,684096 | 58,083181 | 66,522734 | 76,143538 |
| 32 | 37,581726 | 43,339183 | 49,947090 | 57,526449 | 66,214826 | 76,168530 | 87,565068 |
| 33 | 42,091533 | 48,756581 | 56,440212 | 65,292520 | 75,484902 | 87,212967 | 100,69983 |
| 34 | 47,142517 | 54,851153 | 63,777439 | 74,107010 | 86,052788 | 99,858847 | 115,80480 |
| 35 | 52,799620 | 61,707547 | 72,068506 | 84,111457 | 98,100178 | 114,33838 | 133,17552 |
| 36 | 59,135574 | 69,420991 | 81,437412 | 95,466503 | 111,83420 | 130,91744 | 153,15185 |
| 37 | 66,231843 | 78,098615 | 92,024276 | 108,35448 | 127,49099 | 149,90047 | 176,12463 |
| 38 | 74,179664 | 87,860942 | 103,98743 | 122,98234 | 145,33973 | 171,63604 | 202,54332 |
| 39 | 83,081224 | 98,843559 | 117,50580 | 139,58495 | 165,68729 | 196,52327 | 232,92482 |
| 40 | 93,050970 | 111,19900 | 132,78155 | 158,42892 | 188,88351 | 225,01914 | 267,86355 |
| 41 | 104,21709 | 125,09888 | 150,04315 | 179,81682 | 215,32721 | 257,64692 | 308,04308 |
| 42 | 116,72314 | 140,73624 | 169,54876 | 204,09210 | 245,47301 | 295,00572 | 354,24954 |
| 43 | 130,72991 | 158,32827 | 191,59010 | 231,64453 | 279,83924 | 337,78155 | 407,38697 |
| 44 | 146,41750 | 178,11930 | 216,49682 | 262,91654 | 319,01673 | 386,75988 | 468,49502 |
| 45 | 163,98760 | 200,38422 | 244,64140 | 298,41027 | 363,67907 | 442,84006 | 538,76927 |
| 46 | 183,66612 | 225,43224 | 276,44478 | 338,69566 | 414,59414 | 507,05187 | 619,58466 |
| 47 | 205,70605 | 253,61127 | 312,38261 | 384,41957 | 472,63732 | 580,57439 | 712,52236 |
| 48 | 230,39078 | 285,31268 | 352,99234 | 436,31622 | 538,80655 | 664,75768 | 819,40071 |
| 49 | 258,03767 | 320,97677 | 398,88135 | 495,21890 | 614,23946 | 761,14754 | 942,31082 |
| 50 | 289,00219 | 361,09886 | 450,73593 | 562,07346 | 700,23299 | 871,51393 | 1083,6574 |

## МУЛЬТИПЛИЦИРУЮЩИЕ МНОЖИТЕЛИ

| Число периодов | Ставка процентов | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 15,50 | 16,00 | 16,50 | 17,00 | 17,50 | 18,00 | 18,50 |
| 1 | 1,1550000 | 1,1600000 | 1,1650000 | 1,1700000 | 1,1750000 | 1,1800000 | 1,1850000 |
| 2 | 1,3340250 | 1,3456000 | 1,3572250 | 1,3689000 | 1,3806250 | 1,3924000 | 1,4042250 |
| 3 | 1,5407989 | 1,5608960 | 1,5811671 | 1,6016130 | 1,6222344 | 1,6430320 | 1,6640066 |
| 4 | 1,7796227 | 1,8106394 | 1,8420597 | 1,8738872 | 1,9061254 | 1,9387778 | 1,9718479 |
| 5 | 2,0554642 | 2,1003417 | 2,1459996 | 2,1924480 | 2,2396973 | 2,2877578 | 2,3366397 |
| 6 | 2,3740612 | 2,4363963 | 2,5000895 | 2,5651642 | 2,6316444 | 2,6995542 | 2,7689180 |
| 7 | 2,7420407 | 2,8262197 | 2,9126042 | 3,0012421 | 3,0921821 | 3,1854739 | 3,2811679 |
| 8 | 3,1670570 | 3,2784149 | 3,3931839 | 3,5114533 | 3,6333140 | 3,7588592 | 3,8881839 |
| 9 | 3,6579508 | 3,8029613 | 3,9530593 | 4,1064003 | 4,2691440 | 4,4354539 | 4,6074980 |
| 10 | 4,2249332 | 4,4114351 | 4,6053141 | 4,8068284 | 5,0162441 | 5,2338356 | 5,4598851 |
| 11 | 4,8797978 | 5,1172647 | 5,3651909 | 5,6239892 | 5,8940669 | 6,1759260 | 6,4699638 |
| 12 | 5,6361665 | 5,9360270 | 6,2504474 | 6,5800674 | 6,9255521 | 7,2875926 | 7,6669072 |
| 13 | 6,5097723 | 6,8857914 | 7,2817712 | 7,6986788 | 8,1375237 | 8,5993593 | 9,0852850 |
| 14 | 7,5187870 | 7,9875180 | 8,4832635 | 9,0074542 | 9,5615903 | 10,147244 | 10,766063 |
| 15 | 8,6841989 | 9,2655209 | 9,8830019 | 10,538721 | 11,234860 | 11,973748 | 12,757784 |
| 16 | 10,030250 | 10,748004 | 11,513697 | 12,330304 | 13,200971 | 14,129023 | 15,117974 |
| 17 | 11,584938 | 12,467685 | 13,413457 | 14,426456 | 15,511141 | 16,672247 | 17,914800 |
| 18 | 13,380604 | 14,462514 | 15,626678 | 16,878953 | 18,225590 | 19,673251 | 21,229038 |
| 19 | 15,454596 | 16,776517 | 18,205080 | 19,748375 | 21,415068 | 23,214436 | 25,156410 |
| 20 | 17,850060 | 19,460759 | 21,206918 | 23,105599 | 25,162705 | 27,393035 | 29,810345 |
| 21 | 20,616820 | 22,574481 | 24,708389 | 27,033551 | 29,566179 | 32,323781 | 35,325259 |
| 22 | 23,812427 | 26,186398 | 28,785273 | 31,629255 | 34,740260 | 38,142061 | 41,860432 |
| 23 | 27,503353 | 30,376222 | 33,534843 | 37,006228 | 40,819806 | 45,007632 | 49,604612 |
| 24 | 31,766372 | 35,236417 | 39,068093 | 43,297287 | 47,963272 | 53,109006 | 58,781465 |
| 25 | 36,690160 | 40,874244 | 45,514328 | 50,657326 | 56,356844 | 62,668627 | 69,656036 |
| 26 | 42,377135 | 47,414123 | 53,024192 | 59,269656 | 66,219292 | 73,948980 | 82,542403 |
| 27 | 48,945591 | 55,000362 | 61,773184 | 69,345497 | 77,807668 | 87,259797 | 97,812748 |
| 28 | 56,532157 | 63,800444 | 71,965759 | 81,134232 | 91,424010 | 102,96656 | 115,90811 |
| 29 | 65,294642 | 74,008515 | 83,840109 | 94,927051 | 107,42321 | 121,50054 | 137,35111 |
| 30 | 75,415311 | 85,849877 | 97,673727 | 111,06465 | 126,22227 | 143,37064 | 162,76106 |
| 31 | 87,104684 | 99,585857 | 113,78989 | 129,94564 | 148,31117 | 169,17735 | 192,87186 |
| 32 | 100,60501 | 115,51959 | 132,56522 | 152,03640 | 174,26563 | 199,62928 | 228,55315 |
| 33 | 116,19983 | 134,00273 | 154,43849 | 177,88259 | 204,76211 | 235,56255 | 270,83548 |
| 34 | 134,21080 | 155,44317 | 179,92084 | 208,12263 | 240,59548 | 277,96381 | 320,94005 |
| 35 | 155,01347 | 180,31407 | 209,60777 | 243,50347 | 282,69969 | 327,99729 | 380,31396 |
| 36 | 179,04056 | 209,16432 | 244,19306 | 284,89906 | 332,17213 | 387,03680 | 450,67204 |
| 37 | 206,79185 | 242,63062 | 284,48491 | 333,33191 | 390,30226 | 456,70343 | 534,04636 |
| 38 | 238,84459 | 281,45151 | 331,42492 | 389,99633 | 458,60515 | 538,91004 | 632,84494 |
| 39 | 275,86550 | 326,48376 | 386,11004 | 456,29805 | 538,86106 | 635,91385 | 749,92126 |
| 40 | 318,62465 | 378,72116 | 449,81819 | 533,86871 | 633,16174 | 750,37834 | 888,65669 |
| 41 | 368,01147 | 439,31654 | 524,03819 | 624,62639 | 743,96505 | 885,44645 | 1053,0582 |
| 42 | 425,05325 | 509,60719 | 610,50449 | 730,81288 | 874,15893 | 1044,8268 | 1247,8739 |
| 43 | 490,93650 | 591,14434 | 711,23774 | 855,05107 | 1027,13674 | 1232,8956 | 1478,7306 |
| 44 | 567,03166 | 685,72744 | 828,59196 | 1000,40975 | 1206,88567 | 1454,8168 | 1752,2958 |
| 45 | 654,92156 | 795,44383 | 965,30964 | 1170,47941 | 1418,09066 | 1716,6839 | 2076,4705 |
| 46 | 756,43441 | 922,71484 | 1124,5857 | 1369,46091 | 1666,25653 | 2025,6870 | 2460,6175 |
| 47 | 873,68174 | 1070,3492 | 1310,1424 | 1602,26927 | 1957,85142 | 2390,3106 | 2915,8318 |
| 48 | 1009,1024 | 1241,6051 | 1526,3159 | 1874,65504 | 2300,47542 | 2820,5665 | 3455,2607 |
| 49 | 1165,5133 | 1440,2619 | 1778,1580 | 2193,34640 | 2703,05862 | 3328,2685 | 4094,4839 |
| 50 | 1346,1678 | 1670,7038 | 2071,5540 | 2566,21528 | 3176,09388 | 3927,3569 | 4851,9634 |

## МУЛЬТИПЛИЦИРУЮЩИЕ МНОЖИТЕЛИ

| Число периодов | Ставка процентов | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 19,00 | 19,50 | 20,00 | 20,50 | 21,00 | 21,50 | 22,00 |
| 1 | 1,1900000 | 1,1950000 | 1,2000000 | 1,2050000 | 1,2100000 | 1,2150000 | 1,2200000 |
| 2 | 1,4161000 | 1,4280250 | 1,4400000 | 1,4520250 | 1,4641000 | 1,4762250 | 1,4884000 |
| 3 | 1,6851590 | 1,7064899 | 1,7280000 | 1,7496901 | 1,7715610 | 1,7936134 | 1,8158480 |
| 4 | 2,0053392 | 2,0392554 | 2,0736000 | 2,1083766 | 2,1435888 | 2,1792403 | 2,2153346 |
| 5 | 2,3863537 | 2,4369102 | 2,4883200 | 2,5405938 | 2,5937425 | 2,6477769 | 2,7027082 |
| 6 | 2,8397609 | 2,9121077 | 2,9859840 | 3,0614155 | 3,1384284 | 3,2170489 | 3,2973040 |
| 7 | 3,3793154 | 3,4799687 | 3,5831808 | 3,6890057 | 3,7974983 | 3,9087145 | 4,0227108 |
| 8 | 4,0213853 | 4,1585626 | 4,2998170 | 4,4452519 | 4,5949730 | 4,7490881 | 4,9077072 |
| 9 | 4,7854486 | 4,9694823 | 5,1597804 | 5,3565285 | 5,5599173 | 5,7701420 | 5,9874028 |
| 10 | 5,6946838 | 5,9385313 | 6,1917364 | 6,4546169 | 6,7274999 | 7,0107225 | 7,3046314 |
| 11 | 6,7766737 | 7,0965450 | 7,4300837 | 7,7778133 | 8,1402749 | 8,5180279 | 8,9116503 |
| 12 | 8,0642417 | 8,4803712 | 8,9161004 | 9,3722651 | 9,8497327 | 10,349404 | 10,872213 |
| 13 | 9,5964476 | 10,134044 | 10,699321 | 11,293579 | 11,918177 | 12,574526 | 13,264100 |
| 14 | 11,419773 | 12,110182 | 12,839185 | 13,608763 | 14,420994 | 15,278049 | 16,182202 |
| 15 | 13,589530 | 14,471668 | 15,407022 | 16,398560 | 17,449402 | 18,562829 | 19,742287 |
| 16 | 16,171540 | 17,293643 | 18,488426 | 19,760264 | 21,113777 | 22,553837 | 24,085590 |
| 17 | 19,244133 | 20,665903 | 22,186111 | 23,811119 | 25,547670 | 27,402913 | 29,384420 |
| 18 | 22,900518 | 24,695754 | 26,623333 | 28,692398 | 30,912681 | 33,294539 | 35,848992 |
| 19 | 27,251616 | 29,511426 | 31,948000 | 34,574339 | 37,404343 | 40,452865 | 43,735771 |
| 20 | 32,429423 | 35,266154 | 38,337600 | 41,662079 | 45,259256 | 49,150230 | 53,357640 |
| 21 | 38,591014 | 42,143055 | 46,005120 | 50,202805 | 54,763699 | 59,717530 | 65,096321 |
| 22 | 45,923307 | 50,360950 | 55,206144 | 60,494380 | 66,264076 | 72,556799 | 79,417512 |
| 23 | 54,648735 | 60,181336 | 66,247373 | 72,895728 | 80,179532 | 88,156511 | 96,889364 |
| 24 | 65,031994 | 71,916696 | 79,496847 | 87,839353 | 97,017234 | 107,11016 | 118,20502 |
| 25 | 77,388073 | 85,940452 | 95,396217 | 105,84642 | 117,39085 | 130,13885 | 144,21013 |
| 26 | 92,091807 | 102,69884 | 114,47546 | 127,54494 | 142,04293 | 158,11870 | 175,93636 |
| 27 | 109,58925 | 122,72511 | 137,37055 | 153,69165 | 171,87195 | 192,11422 | 214,64236 |
| 28 | 130,41121 | 146,65651 | 164,84466 | 185,19844 | 207,96506 | 233,41877 | 261,86368 |
| 29 | 155,18934 | 175,25453 | 197,81359 | 223,16411 | 251,63772 | 283,60381 | 319,47368 |
| 30 | 184,67531 | 209,42916 | 237,37631 | 268,91276 | 304,48164 | 344,57863 | 389,75789 |
| 31 | 219,76362 | 250,26785 | 284,85158 | 324,03967 | 368,42278 | 418,66303 | 475,50463 |
| 32 | 261,51871 | 299,07008 | 341,82189 | 390,46805 | 445,79157 | 508,67559 | 580,11565 |
| 33 | 311,20726 | 357,38875 | 410,18627 | 470,51400 | 539,40780 | 618,04084 | 707,74109 |
| 34 | 370,33664 | 427,07955 | 492,22352 | 566,96937 | 652,68344 | 750,91962 | 863,44413 |
| 35 | 440,70061 | 510,36007 | 590,66823 | 683,19809 | 789,74696 | 912,36733 | 1053,4018 |
| 36 | 524,43372 | 609,88028 | 708,80187 | 823,25370 | 955,59382 | 1108,5263 | 1285,1502 |
| 37 | 624,07613 | 728,80693 | 850,56225 | 992,02070 | 1156,2685 | 1346,8595 | 1567,8833 |
| 38 | 742,65059 | 870,92429 | 1020,6747 | 1195,3849 | 1399,0849 | 1636,4343 | 1912,8176 |
| 39 | 883,75421 | 1040,7545 | 1224,8096 | 1440,4389 | 1692,8927 | 1988,2676 | 2333,6375 |
| 40 | 1051,6675 | 1243,7017 | 1469,7716 | 1735,7288 | 2048,4002 | 2415,7452 | 2847,0378 |
| 41 | 1251,4843 | 1486,2235 | 1763,7259 | 2091,5532 | 2478,5643 | 2935,1304 | 3473,3861 |
| 42 | 1489,2664 | 1776,0371 | 2116,4711 | 2520,3217 | 2999,0628 | 3566,1834 | 4237,5310 |
| 43 | 1772,2270 | 2122,3643 | 2539,7653 | 3036,9876 | 3628,8659 | 4332,9128 | 5169,7878 |
| 44 | 2108,9501 | 2536,2253 | 3047,7183 | 3659,5700 | 4390,9278 | 5264,4891 | 6307,1411 |
| 45 | 2509,6506 | 3030,7892 | 3657,2620 | 4409,7819 | 5313,0226 | 6395,3542 | 7694,7122 |
| 46 | 2986,4842 | 3621,7932 | 4388,7144 | 5313,7872 | 6428,7574 | 7771,5704 | 9387,5489 |
| 47 | 3553,9162 | 4328,0428 | 5266,4573 | 6403,1136 | 7778,7964 | 9442,4580 | 11452,810 |
| 48 | 4229,1603 | 5172,0112 | 6319,7487 | 7715,7519 | 9412,3437 | 11472,587 | 13972,428 |
| 49 | 5032,7008 | 6180,5533 | 7583,6985 | 9297,4810 | 11388,936 | 13939,193 | 17046,362 |
| 50 | 5988,9139 | 7385,7612 | 9100,4382 | 11203,465 | 13780,612 | 16936,119 | 20796,561 |

## МУЛЬТИПЛИЦИРУЮЩИЕ МНОЖИТЕЛИ

| Число периодов | Ставка процентов | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 22,50 | 23,00 | 23,50 | 24,00 | 24,50 | 25,00 | 25,50 |
| 1 | 1,2250000 | 1,2300000 | 1,2350000 | 1,2400000 | 1,2450000 | 1,2500000 | 1,2550000 |
| 2 | 1,5006250 | 1,5129000 | 1,5252250 | 1,5376000 | 1,5500250 | 1,5625000 | 1,5750250 |
| 3 | 1,8382656 | 1,8608670 | 1,8836529 | 1,9066240 | 1,9297811 | 1,9531250 | 1,9766564 |
| 4 | 2,2518754 | 2,2888664 | 2,3263113 | 2,3642138 | 2,4025775 | 2,4414063 | 2,4807038 |
| 5 | 2,7585474 | 2,8153057 | 2,8729945 | 2,9316251 | 2,9912090 | 3,0517578 | 3,1132832 |
| 6 | 3,3792205 | 3,4628260 | 3,5481482 | 3,6352151 | 3,7240552 | 3,8146973 | 3,9071704 |
| 7 | 4,1395451 | 4,2592760 | 4,3819630 | 4,5076667 | 4,6364487 | 4,7683716 | 4,9034989 |
| 8 | 5,0709428 | 5,2389094 | 5,4117243 | 5,5895067 | 5,7723786 | 5,9604645 | 6,1538911 |
| 9 | 6,2119049 | 6,4438586 | 6,6834795 | 6,9309883 | 7,1866114 | 7,4505806 | 7,7231333 |
| 10 | 7,6095835 | 7,9259461 | 8,2540971 | 8,5944255 | 8,9473312 | 9,3132257 | 9,6925323 |
| 11 | 9,3217398 | 9,7489137 | 10,193810 | 10,657088 | 11,139427 | 11,641532 | 12,164128 |
| 12 | 11,419131 | 11,991164 | 12,589355 | 13,214789 | 13,868587 | 14,551915 | 15,265981 |
| 13 | 13,988436 | 14,749132 | 15,547854 | 16,386338 | 17,266391 | 18,189894 | 19,158806 |
| 14 | 17,135834 | 18,141432 | 19,201599 | 20,319059 | 21,496657 | 22,737368 | 24,044301 |
| 15 | 20,991396 | 22,313961 | 23,713975 | 25,195633 | 26,763338 | 28,421709 | 30,175598 |
| 16 | 25,714461 | 27,446172 | 29,286760 | 31,242585 | 33,320355 | 35,527137 | 37,870376 |
| 17 | 31,500214 | 33,758792 | 36,169148 | 38,740806 | 41,483842 | 44,408921 | 47,527321 |
| 18 | 38,587762 | 41,523314 | 44,668898 | 48,038599 | 51,647384 | 55,511151 | 59,646788 |
| 19 | 47,270009 | 51,073676 | 55,166089 | 59,567863 | 64,300993 | 69,388939 | 74,856719 |
| 20 | 57,905761 | 62,820622 | 68,130120 | 73,864150 | 80,054736 | 86,736174 | 93,945183 |
| 21 | 70,934557 | 77,269364 | 84,140698 | 91,591546 | 99,668146 | 108,42022 | 117,90120 |
| 22 | 86,894833 | 95,041318 | 103,91376 | 113,57352 | 124,08684 | 135,52527 | 147,96601 |
| 23 | 106,44617 | 116,90082 | 128,33350 | 140,83116 | 154,48812 | 169,40659 | 185,69734 |
| 24 | 130,39656 | 143,78801 | 158,49187 | 174,63064 | 192,33771 | 211,75824 | 233,05017 |
| 25 | 159,73578 | 176,85925 | 195,73746 | 216,54199 | 239,46045 | 264,69780 | 292,47796 |
| 26 | 195,67634 | 217,53688 | 241,73576 | 268,51207 | 298,12825 | 330,87225 | 367,05984 |
| 27 | 239,70351 | 267,57036 | 298,54366 | 332,95497 | 371,16968 | 413,59031 | 460,66010 |
| 28 | 293,63680 | 329,11155 | 368,70142 | 412,86416 | 462,10625 | 516,98788 | 578,12842 |
| 29 | 359,70508 | 404,80720 | 455,34626 | 511,95156 | 575,32228 | 646,23485 | 725,55117 |
| 30 | 440,63872 | 497,91286 | 562,35263 | 634,81993 | 716,27624 | 807,79357 | 910,56672 |
| 31 | 539,78244 | 612,43282 | 694,50549 | 787,17672 | 891,76391 | 1009,7420 | 1142,7612 |
| 32 | 661,23349 | 753,29237 | 857,71428 | 976,09913 | 1110,2461 | 1262,1774 | 1434,1654 |
| 33 | 810,01102 | 926,54961 | 1059,2771 | 1210,3629 | 1382,2564 | 1577,7218 | 1799,8775 |
| 34 | 992,26350 | 1139,6560 | 1308,2073 | 1500,8500 | 1720,9092 | 1972,1523 | 2258,8463 |
| 35 | 1215,5228 | 1401,7769 | 1615,6360 | 1861,0540 | 2142,5319 | 2465,1903 | 2834,8521 |
| 36 | 1489,0154 | 1724,1856 | 1995,3104 | 2307,7070 | 2667,4522 | 3081,4879 | 3557,7394 |
| 37 | 1824,0439 | 2120,7483 | 2464,2084 | 2861,5567 | 3320,9780 | 3851,8599 | 4464,9629 |
| 38 | 2234,4538 | 2608,5204 | 3043,2974 | 3548,3303 | 4134,6177 | 4814,8249 | 5603,5284 |
| 39 | 2737,2058 | 3208,4801 | 3758,4722 | 4399,9295 | 5147,5990 | 6018,5311 | 7032,4282 |
| 40 | 3353,0772 | 3946,4305 | 4641,7132 | 5455,9126 | 6408,7607 | 7523,1638 | 8825,6974 |
| 41 | 4107,5195 | 4854,1095 | 5732,5158 | 6765,3317 | 7978,9071 | 9403,9548 | 11076,250 |
| 42 | 5031,7114 | 5970,5547 | 7079,6570 | 8389,0113 | 9933,7393 | 11754,944 | 13900,694 |
| 43 | 6163,8465 | 7343,7823 | 8743,3764 | 10402,374 | 12367,505 | 14693,679 | 17445,371 |
| 44 | 7550,7120 | 9032,8522 | 10798,070 | 12898,944 | 15397,544 | 18367,099 | 21893,941 |
| 45 | 9249,6221 | 11110,408 | 13335,616 | 15994,690 | 19169,943 | 22958,874 | 27476,895 |
| 46 | 11330,787 | 13665,802 | 16469,486 | 19833,416 | 23866,579 | 28698,593 | 34483,504 |
| 47 | 13880,214 | 16808,937 | 20339,815 | 24593,436 | 29713,890 | 35873,241 | 43276,797 |
| 48 | 17003,262 | 20674,992 | 25119,672 | 30495,860 | 36993,794 | 44841,551 | 54312,381 |
| 49 | 20828,996 | 25430,240 | 31022,795 | 37814,867 | 46057,273 | 56051,939 | 68162,038 |
| 50 | 25515,521 | 31279,195 | 38313,152 | 46890,435 | 57341,305 | 70064,923 | 85543,357 |

# МУЛЬТИПЛИЦИРУЮЩИЕ МНОЖИТЕЛИ

| Число периодов | Ставка процентов | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 26,00 | 26,50 | 27,00 | 27,50 | 28,00 | 28,50 | 29,00 |
| 1 | 1,2600000 | 1,2650000 | 1,2700000 | 1,2750000 | 1,2800000 | 1,2850000 | 1,2900000 |
| 2 | 1,5876000 | 1,6002250 | 1,6129000 | 1,6256250 | 1,6384000 | 1,6512250 | 1,6641000 |
| 3 | 2,0003760 | 2,0242846 | 2,0483830 | 2,0726719 | 2,0971520 | 2,1218241 | 2,1466890 |
| 4 | 2,5204738 | 2,5607201 | 2,6014464 | 2,6426566 | 2,6843546 | 2,7265440 | 2,7692288 |
| 5 | 3,1757969 | 3,2393109 | 3,3038369 | 3,3693872 | 3,4359738 | 3,5036090 | 3,5723052 |
| 6 | 4,0015041 | 4,0977282 | 4,1958729 | 4,2959687 | 4,3980465 | 4,5021376 | 4,6082737 |
| 7 | 5,0418952 | 5,1836262 | 5,3287586 | 5,4773601 | 5,6294995 | 5,7852468 | 5,9446730 |
| 8 | 6,3527880 | 6,5572872 | 6,7675234 | 6,9836341 | 7,2057594 | 7,4340422 | 7,6686282 |
| 9 | 8,0045128 | 8,2949683 | 8,5947547 | 8,9041335 | 9,2233720 | 9,5527442 | 9,8925304 |
| 10 | 10,085686 | 10,493135 | 10,915339 | 11,352770 | 11,805916 | 12,275276 | 12,761364 |
| 11 | 12,707965 | 13,873816 | 13,862480 | 14,474782 | 15,111573 | 15,773730 | 16,462160 |
| 12 | 16,012035 | 16,791377 | 17,605350 | 18,455347 | 19,342813 | 20,269243 | 21,236186 |
| 13 | 20,175165 | 21,241092 | 22,358794 | 23,530568 | 24,758801 | 26,045977 | 27,394680 |
| 14 | 25,420707 | 26,869981 | 28,395668 | 30,001474 | 31,691265 | 33,469081 | 35,339137 |
| 15 | 32,030091 | 33,990526 | 36,062499 | 38,251879 | 40,564819 | 43,007769 | 45,587487 |
| 16 | 40,357915 | 42,998015 | 45,799373 | 48,771146 | 51,922969 | 55,264983 | 58,807859 |
| 17 | 50,850973 | 54,392489 | 58,165204 | 62,183211 | 66,461400 | 71,015503 | 75,862137 |
| 18 | 64,072226 | 68,806499 | 73,869809 | 79,283593 | 85,070592 | 91,254922 | 97,862157 |
| 19 | 80,731005 | 87,040221 | 93,814658 | 101,08658 | 108,89036 | 117,26257 | 126,24218 |
| 20 | 101,72107 | 110,10588 | 119,14462 | 128,88539 | 139,37966 | 150,68241 | 162,85242 |
| 21 | 128,16854 | 139,28394 | 151,31366 | 164,32887 | 178,40596 | 193,62689 | 210,07962 |
| 22 | 161,49236 | 176,19418 | 192,16835 | 209,51931 | 228,35963 | 248,81056 | 271,00271 |
| 23 | 203,48038 | 222,88564 | 244,05380 | 267,13713 | 292,30033 | 319,72157 | 349,59349 |
| 24 | 256,38528 | 281,95033 | 309,94833 | 340,59984 | 374,14442 | 410,84222 | 450,97560 |
| 25 | 323,04545 | 356,66717 | 393,63438 | 434,26479 | 478,90486 | 527,93225 | 581,75853 |
| 26 | 407,03727 | 451,18397 | 499,91566 | 553,68761 | 612,99822 | 678,39294 | 750,46850 |
| 27 | 512,86696 | 570,74772 | 634,89289 | 705,95170 | 784,63772 | 871,73493 | 968,10436 |
| 28 | 646,21236 | 721,99587 | 806,31397 | 900,08842 | 1004,3363 | 1120,1794 | 1248,8546 |
| 29 | 814,22758 | 913,32478 | 1024,0187 | 1147,6127 | 1285,5504 | 1439,4305 | 1611,0225 |
| 30 | 1025,9267 | 1155,3558 | 1300,5038 | 1463,2062 | 1645,5046 | 1849,6682 | 2078,2190 |
| 31 | 1292,6677 | 1461,5251 | 1651,6398 | 1865,5879 | 2106,2458 | 2376,8236 | 2680,9025 |
| 32 | 1628,7613 | 1848,8293 | 2097,5826 | 2378,6246 | 2695,9947 | 3054,2184 | 3458,3642 |
| 33 | 2052,2392 | 2338,7691 | 2663,9299 | 3032,7464 | 3450,8732 | 3924,6706 | 4461,2898 |
| 34 | 2585,8215 | 2958,5429 | 3383,1910 | 3866,7517 | 4417,1177 | 5043,2017 | 5755,0639 |
| 35 | 3258,1350 | 3742,5567 | 4296,6525 | 4930,1084 | 5653,9106 | 6480,5142 | 7424,0324 |
| 36 | 4105,2501 | 4734,3343 | 5456,7487 | 6285,8882 | 7237,0056 | 8327,4608 | 9577,0018 |
| 37 | 5172,6152 | 5988,9329 | 6930,0709 | 8014,5074 | 9263,3671 | 10700,787 | 12354,332 |
| 38 | 6517,4951 | 7576,0001 | 8801,1900 | 10218,497 | 11857,110 | 13750,511 | 15937,089 |
| 39 | 8212,0438 | 9583,6401 | 11177,5113 | 13028,584 | 15177,101 | 17669,407 | 20558,844 |
| 40 | 10347,1752 | 12123,3047 | 14195,4393 | 16611,444 | 19426,689 | 22705,188 | 26520,909 |
| 41 | 13037,4408 | 15335,9804 | 18028,2080 | 21179,591 | 24866,162 | 29176,167 | 34211,973 |
| 42 | 16427,1754 | 19400,0153 | 22895,8241 | 27003,979 | 31828,687 | 37491,374 | 44133,445 |
| 43 | 20698,2410 | 24541,0193 | 29077,6966 | 34430,073 | 40740,720 | 48176,416 | 56932,144 |
| 44 | 26079,7837 | 31044,3894 | 36928,6747 | 43898,343 | 52148,121 | 61906,695 | 73442,466 |
| 45 | 32860,5275 | 39271,1526 | 46899,4169 | 55970,388 | 66749,595 | 79550,103 | 94740,782 |
| 46 | 41404,2646 | 49678,0081 | 59562,2594 | 71362,244 | 85439,481 | 102221,88 | 122215,61 |
| 47 | 52169,3734 | 62842,6802 | 75644,0695 | 90986,861 | 109362,54 | 131355,12 | 157658,13 |
| 48 | 65733,4105 | 79495,9904 | 96067,9683 | 116008,25 | 139984,05 | 168791,33 | 203378,99 |
| 49 | 82824,0972 | 100562,428 | 122006,320 | 147910,52 | 179179,58 | 216896,86 | 262358,90 |
| 50 | 104358,362 | 127211,471 | 154948,026 | 188585,91 | 229349,86 | 278712,46 | 338442,98 |

# МУЛЬТИПЛИЦИРУЮЩИЕ МНОЖИТЕЛИ

| Число периодов | Ставка процентов | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 29,50 | 30,00 | 30,50 | 31,00 | 31,50 | 32,00 | 32,50 |
| 1 | 1,2950000 | 1,3000000 | 1,3050000 | 1,3100000 | 1,3150000 | 1,3200000 | 1,3250000 |
| 2 | 1,6770250 | 1,6900000 | 1,7030250 | 1,7161000 | 1,7292250 | 1,7424000 | 1,7556250 |
| 3 | 2,1717474 | 2,1970000 | 2,2224476 | 2,2480910 | 2,2739309 | 2,2999680 | 2,3262031 |
| 4 | 2,8124129 | 2,8561000 | 2,9002942 | 2,9449992 | 2,9902191 | 3,0359578 | 3,0822191 |
| 5 | 3,6420746 | 3,7129300 | 3,7848839 | 3,8579490 | 3,9321381 | 4,0074642 | 4,0839404 |
| 6 | 4,7164867 | 4,8268090 | 4,9392734 | 5,0539131 | 5,1707616 | 5,2898528 | 5,4112210 |
| 7 | 6,1078502 | 6,2748517 | 6,4457518 | 6,6206262 | 8,7995515 | 6,9826057 | 7,1698678 |
| 8 | 7,9096660 | 8,1573072 | 8,4117062 | 8,6730203 | 8,9414103 | 9,2170395 | 9,5000748 |
| 9 | 10,243018 | 10,604499 | 10,977277 | 11,361657 | 11,757955 | 12,166492 | 12,587599 |
| 10 | 13,264708 | 13,785849 | 14,325346 | 14,883770 | 15,461710 | 16,059770 | 16,678569 |
| 11 | 17,177796 | 17,921604 | 18,694576 | 19,497739 | 20,332149 | 21,198896 | 22,099104 |
| 12 | 22,245246 | 23,298085 | 24,396422 | 25,542038 | 26,736776 | 27,982543 | 29,281312 |
| 13 | 28,807594 | 30,287511 | 31,837331 | 33,460070 | 35,158860 | 36,936956 | 38,797739 |
| 14 | 37,305834 | 39,373764 | 41,547717 | 43,832692 | 46,233901 | 48,756782 | 51,407004 |
| 15 | 48,311056 | 51,185893 | 54,219771 | 57,420826 | 60,797580 | 64,358953 | 68,114281 |
| 16 | 62,562817 | 66,541661 | 70,756801 | 75,221282 | 79,948818 | 84,953818 | 90,251422 |
| 17 | 81,018848 | 86,504159 | 92,337625 | 98,539879 | 105,132695 | 112,139039 | 119,583134 |
| 18 | 104,91941 | 112,45541 | 120,50060 | 129,08724 | 138,24949 | 148,02353 | 158,44765 |
| 19 | 135,87063 | 146,19203 | 157,25328 | 169,10429 | 181,79808 | 195,39106 | 209,94314 |
| 20 | 175,95247 | 190,04964 | 205,21553 | 221,52662 | 239,06448 | 257,91620 | 278,17466 |
| 21 | 227,85845 | 247,06453 | 267,80627 | 290,19987 | 314,36979 | 340,44939 | 368,58142 |
| 22 | 295,07669 | 321,18389 | 349,48719 | 380,16183 | 413,39628 | 449,39319 | 488,37039 |
| 23 | 382,12432 | 417,53905 | 456,08078 | 498,01199 | 543,61611 | 593,19901 | 647,09076 |
| 24 | 494,85099 | 542,80077 | 595,18541 | 652,39571 | 714,85518 | 783,02269 | 857,39526 |
| 25 | 640,83203 | 705,64100 | 776,71697 | 854,63838 | 940,03456 | 1033,5900 | 1136,0487 |
| 26 | 829,87748 | 917,33330 | 1013,6156 | 1119,5763 | 1236,1454 | 1364,3387 | 1505,2646 |
| 27 | 1074,6913 | 1192,5333 | 1322,7684 | 1466,6449 | 1625,5313 | 1800,9271 | 1994,4755 |
| 28 | 1391,7253 | 1550,2933 | 1726,2128 | 1921,3048 | 2137,5736 | 2377,2238 | 2642,6801 |
| 29 | 1802,2842 | 2015,3813 | 2252,7077 | 2516,9093 | 2810,9093 | 3137,9354 | 3501,5511 |
| 30 | 2333,9581 | 2619,9956 | 2939,7835 | 3297,1512 | 3696,3457 | 4142,0748 | 4639,5552 |
| 31 | 3022,4757 | 3405,9943 | 3836,4175 | 4319,2681 | 4860,6946 | 5467,5387 | 6147,4107 |
| 32 | 3914,1061 | 4427,7926 | 5006,5248 | 5658,2413 | 6391,8134 | 7217,1511 | 8145,3191 |
| 33 | 5068,7673 | 5756,1304 | 6533,5149 | 7412,2960 | 8405,2347 | 9526,6395 | 10792,5479 |
| 34 | 6564,0537 | 7482,9696 | 8526,2369 | 9710,1078 | 11052,884 | 12575,164 | 14300,126 |
| 35 | 8500,4496 | 9727,8604 | 11126,739 | 12720,241 | 14534,542 | 16599,217 | 18947,667 |
| 36 | 11008,082 | 12646,219 | 14520,395 | 16663,516 | 19112,923 | 21910,966 | 25105,659 |
| 37 | 14255,466 | 16440,084 | 18949,115 | 21829,206 | 25133,493 | 28922,475 | 33264,998 |
| 38 | 18460,829 | 21372,109 | 24728595 | 28596,260 | 33050,544 | 38177,667 | 44076,122 |
| 39 | 23906,774 | 27783,742 | 32270,817 | 37461,100 | 43461,465 | 50394,520 | 58400,861 |
| 40 | 30959,272 | 36118,865 | 42113,416 | 49074,042 | 57151,826 | 66520,767 | 77381,141 |
| 41 | 40092,257 | 46954,524 | 54958,007 | 64286,994 | 75154,652 | 87807,412 | 102530,012 |
| 42 | 51919,473 | 61040,882 | 71720,200 | 84215,963 | 98828,367 | 115905,78 | 135852,27 |
| 43 | 67235,717 | 79353,146 | 93594,861 | 110322,91 | 129959,30 | 152995,64 | 180004,25 |
| 44 | 87070,254 | 103159,09 | 122141,29 | 144523,01 | 170896,48 | 201954,24 | 238505,63 |
| 45 | 112755,98 | 134106,82 | 159394,39 | 189325,15 | 224728,87 | 266579,60 | 316019,97 |
| 46 | 146018,99 | 174338,86 | 208009,68 | 248015,94 | 295518,47 | 351885,07 | 418726,46 |
| 47 | 189094,60 | 226640,52 | 271452,63 | 324900,89 | 388606,79 | 464488,29 | 55481255 |
| 48 | 244877,50 | 294632,68 | 354245,68 | 425620,16 | 511017,93 | 613124,54 | 735126,63 |
| 49 | 317116,36 | 383022,48 | 462290,61 | 557562,41 | 671988,57 | 809324,39 | 974042,79 |
| 50 | 410665,69 | 497929,22 | 603289,25 | 730406,76 | 883664,97 | 1068308,2 | 1290606,7 |

# ДИСКОНТИРУЮЩИЕ МНОЖИТЕЛИ

| Число периодов | Ставка процентов | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1,50 | 2,00 | 2,50 | 3,00 | 3,50 | 4,00 | 4,50 |
| 1 | 0,9852217 | 0,9803922 | 0,9756098 | 0,9078738 | 0,9661836 | 0,9615385 | 0,9569378 |
| 2 | 0,9706617 | 0,9611688 | 0,9518144 | 0,9425959 | 0,9335107 | 0,9245562 | 0,9157300 |
| 3 | 0,9563170 | 0,9423223 | 0,9285994 | 0,9151417 | 0,9019427 | 0,8889964 | 0,8762966 |
| 4 | 0,9421842 | 0,9238454 | 0,9059506 | 0,8884870 | 0,8714422 | 0,8548042 | 0,8385613 |
| 5 | 0,9282603 | 0,9057308 | 0,8838543 | 0,8626088 | 0,8419732 | 0,8219271 | 0,8024510 |
| 6 | 0,9145422 | 0,8879714 | 0,8622969 | 0,8374843 | 0,8135006 | 0,7903145 | 0,7678957 |
| 7 | 0,9010268 | 0,8705602 | 0,8412652 | 0,8130915 | 0,7859910 | 0,7599178 | 0,7348285 |
| 8 | 0,8877111 | 0,8534904 | 0,8207466 | 0,7894092 | 0,7594116 | 0,7306902 | 0,7031851 |
| 9 | 0,8745922 | 0,8367553 | 0,8007284 | 0,7664167 | 0,7337310 | 0,7025867 | 0,6729044 |
| 10 | 0,8616672 | 0,8203483 | 0,7811984 | 0,7440939 | 0,7089188 | 0,6755642 | 0,6439277 |
| 11 | 8,8489332 | 0,8042630 | 0,7621448 | 0,7224213 | 0,6849457 | 0,6495809 | 0,6161987 |
| 12 | 0,8363874 | 0,7884932 | 0,7435559 | 0,7013799 | 0,6617833 | 0,6245970 | 0,5896639 |
| 13 | 0,8240270 | 0,7730325 | 0,7254204 | 0,6809513 | 0,6394042 | 0,6005741 | 0,5642716 |
| 14 | 0,8118493 | 0,7578750 | 0,7077272 | 0,6611178 | 0,6177818 | 0,5774751 | 0,5399729 |
| 15 | 0,7998515 | 0,7430147 | 0,6904656 | 0,6418619 | 0,5968906 | 0,5552645 | 0,5167204 |
| 16 | 0,7880310 | 0,7284458 | 0,6736249 | 0,6231669 | 0,5767059 | 0,5339082 | 0,4944693 |
| 17 | 0,7763853 | 0,7141626 | 0,6571951 | 0,6050164 | 0,5572038 | 0,5133732 | 0,4731764 |
| 18 | 0,7649116 | 0,7001594 | 0,6411659 | 0,5873946 | 0,5383611 | 0,4936281 | 0,4528004 |
| 19 | 0,7536075 | 0,6864308 | 0,6255277 | 0,5702860 | 0,5201557 | 0,4746424 | 0,4333018 |
| 20 | 0,7424704 | 0,6729713 | 0,6102709 | 0,5536758 | 0,5025659 | 0,4563869 | 0,4146429 |
| 21 | 0,7314979 | 0,6597758 | 0,5953863 | 0,5375493 | 0,4855709 | 0,4388336 | 0,3967874 |
| 22 | 0,7206876 | 0,6468390 | 0,5808647 | 0,5218925 | 0,4691506 | 0,4219554 | 0,3797009 |
| 23 | 0,7100371 | 0,6341559 | 0,5666972 | 0,5066917 | 0,4532856 | 0,4057263 | 0,3633501 |
| 24 | 0,6995439 | 0,6217215 | 0,5528754 | 0,4919337 | 0,4379571 | 0,3901215 | 0,3477035 |
| 25 | 0,6892058 | 0,6095309 | 0,5393906 | 0,4776056 | 0,4231470 | 0,3751168 | 0,3327306 |
| 26 | 0,6790205 | 0,5975793 | 0,5262347 | 0,4636947 | 0,4088377 | 0,3606892 | 0,3184025 |
| 27 | 0,6689857 | 0,5858620 | 0,5133997 | 0,4501891 | 0,3950122 | 0,3468166 | 0,3046914 |
| 28 | 0,6590992 | 0,5743746 | 0,5008778 | 0,4370768 | 0,3816543 | 0,3334775 | 0,2915707 |
| 29 | 0,6493589 | 0,5631123 | 0,4886613 | 0,4243464 | 0,3687482 | 0,3206514 | 0,2790150 |
| 30 | 0,6397624 | 0,5520709 | 0,4767427 | 0,4119868 | 0,3562784 | 0,3083187 | 0,2670000 |
| 31 | 0,6303078 | 0,5412460 | 0,4651148 | 0,3999871 | 0,3442303 | 0,2964603 | 0,2555024 |
| 32 | 0,6209929 | 0,5306333 | 0,4537706 | 0,3883370 | 0,3325897 | 0,2850579 | 0,2444999 |
| 33 | 0,6118157 | 0,5202287 | 0,4427030 | 0,3770262 | 0,3213427 | 0,2740942 | 0,2339712 |
| 34 | 0,6027741 | 0,5100282 | 0,4319053 | 0,3660449 | 0,3104761 | 0,2635521 | 0,2238959 |
| 35 | 0,5938661 | 0,5000276 | 0,4213711 | 0,3553834 | 0,2999769 | 0,2534155 | 0,2142544 |
| 36 | 0,5850897 | 0,4902232 | 0,4110937 | 0,3450324 | 0,2898327 | 0,2436687 | 0,2050282 |
| 37 | 0,5764431 | 0,4806109 | 0,4010670 | 0,3349829 | 0,2800316 | 0,2342968 | 0,1961992 |
| 38 | 0,5679242 | 0,4711872 | 0,3912849 | 0,3252262 | 0,2705619 | 0,2252854 | 0,1877504 |
| 39 | 0,5595313 | 0,4619482 | 0,3817414 | 0,3157535 | 0,2614125 | 0,2166206 | 0,1796655 |
| 40 | 0,5512623 | 0,4528904 | 0,3724306 | 0,3065568 | 0,2525725 | 0,2082890 | 0,1719287 |
| 41 | 0,5431156 | 0,4440102 | 0,3633469 | 0,2976280 | 0,2440314 | 0,2002779 | 0,1645251 |
| 42 | 0,5350892 | 0,4353041 | 0,3544848 | 0,2889592 | 0,2357791 | 0,1925749 | 0,1574403 |
| 43 | 0,5271815 | 0,4267688 | 0,3458389 | 0,2805429 | 0,2278059 | 0,1851682 | 0,1506605 |
| 44 | 0,5193907 | 0,4184007 | 0,3374038 | 0,2723718 | 0,2201023 | 0,1780463 | 0,1441728 |
| 45 | 0,5117149 | 0,4101968 | 0,3291744 | 0,2644386 | 0,2126592 | 0,1711984 | 0,1379644 |
| 46 | 0,5041527 | 0,4021537 | 0,3211458 | 0,2567365 | 0,2054679 | 0,1646139 | 0,1320233 |
| 47 | 0,4967021 | 0,3942684 | 0,3133129 | 0,2492588 | 0,1985197 | 0,1582826 | 0,1263381 |
| 48 | 0,4893617 | 0,3865376 | 0,3056712 | 0,2419988 | 0,1918065 | 0,1521948 | 0,1208977 |
| 49 | 0,4821297 | 0,3789584 | 0,2982158 | 0,2349503 | 0,1853202 | 0,1463411 | 0,1156916 |
| 50 | 0,4750047 | 0,3715279 | 0,2909422 | 0,2281071 | 0,1790534 | 0,1407126 | 0,1107096 |

## ДИСКОНТИРУЮЩИЕ МНОЖИТЕЛИ

| Число периодов | Ставка процентов | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 5,00 | 5,50 | 6,00 | 6,50 | 7,00 | 7,50 | 8,00 |
| 1 | 0,9523810 | 0,9478673 | 0,9433962 | 0,9389671 | 0,9345794 | 0,9302326 | 0,9259259 |
| 2 | 0,9070295 | 0,8984524 | 0,8899964 | 0,8816593 | 0,8734387 | 0,8653326 | 0,8573388 |
| 3 | 0,8638376 | 0,8516137 | 0,8396193 | 0,8278491 | 0,8162979 | 0,8049606 | 0,7938322 |
| 4 | 0,8227025 | 0,8072167 | 0,7920937 | 0,7773231 | 0,7628952 | 0,7488005 | 0,7350299 |
| 5 | 0,7835262 | 0,7651344 | 0,7472582 | 0,7298808 | 0,7129862 | 0,6965586 | 0,6805832 |
| 6 | 0,7462154 | 0,7252458 | 0,7049605 | 0,6853341 | 0,6663422 | 0,6479615 | 0,6301696 |
| 7 | 0,7106813 | 0,6874368 | 0,6650571 | 0,6435062 | 0,6227497 | 0,6027549 | 0,5834904 |
| 8 | 0,6768394 | 0,6515989 | 0,6274124 | 0,6042312 | 0,5820091 | 0,5607022 | 0,5402689 |
| 9 | 0,6446089 | 0,6176293 | 0,5918985 | 0,5673532 | 0,5439337 | 0,5215835 | 0,5002490 |
| 10 | 0,6139133 | 0,5854306 | 0,5583948 | 0,5327260 | 0,5083493 | 0,4851939 | 0,4631935 |
| 11 | 0,5846793 | 0,5549105 | 0,5267875 | 0,5002122 | 0,4750928 | 0,4513432 | 0,4288829 |
| 12 | 0,5568374 | 0,5259815 | 0,4969694 | 0,4696829 | 0,4440120 | 0,4198541 | 0,3971138 |
| 13 | 0,5303214 | 0,4985607 | 0,4688390 | 0,4410168 | 0,4149644 | 0,3905620 | 0,3676979 |
| 14 | 0,5050680 | 0,4725694 | 0,4423010 | 0,4141002 | 0,3878172 | 0,3633135 | 0,3404610 |
| 15 | 0,4810171 | 0,4479330 | 0,4172651 | 0,3888265 | 0,3624460 | 0,3379660 | 0,3152417 |
| 16 | 0,4581115 | 0,4245811 | 0,3936463 | 0,3650953 | 0,3387346 | 0,3143870 | 0,2918905 |
| 17 | 0,4362967 | 0,4024465 | 0,3713644 | 0,3428125 | 0,3165744 | 0,2924530 | 0,2702690 |
| 18 | 0,4155207 | 0,3814659 | 0,3503438 | 0,3218897 | 0,2958639 | 0,2720493 | 0,2502490 |
| 19 | 0,3957340 | 0,3615791 | 0,3305130 | 0,3022438 | 0,2765083 | 0,2530691 | 0,2317121 |
| 20 | 0,3768895 | 0,3427290 | 0,3118047 | 0,2837970 | 0,2584190 | 0,2354131 | 0,2145482 |
| 21 | 0,3589424 | 0,3248616 | 0,2941554 | 0,2664761 | 0,2415131 | 0,2189890 | 0,1986557 |
| 22 | 0,3418499 | 0,3079257 | 0,2775051 | 0,2502123 | 0,2257132 | 0,2037107 | 0,1839405 |
| 23 | 0,3255713 | 0,2918727 | 0,2617973 | 0,2349411 | 0,2109469 | 0,1894983 | 0,1703153 |
| 24 | 0,3100679 | 0,2766566 | 0,2469785 | 0,2206020 | 0,1971466 | 0,1762775 | 0,1576993 |
| 25 | 0,2953028 | 0,2622337 | 0,2329986 | 0,2071380 | 0,1842492 | 0,1639791 | 0,1460179 |
| 26 | 0,2812407 | 0,2485628 | 0,2198100 | 0,1944958 | 0,1721955 | 0,1525387 | 0,1352018 |
| 27 | 0,2678483 | 0,2356045 | 0,2073680 | 0,1826252 | 0,1609304 | 0,1418964 | 0,1251868 |
| 28 | 0,2550936 | 0,2233218 | 0,1956301 | 0,1714790 | 0,1504022 | 0,1319967 | 0,1159137 |
| 29 | 0,2429463 | 0,2116794 | 0,1845567 | 0,1610132 | 0,1405628 | 0,1227876 | 0,1073275 |
| 30 | 0,2313774 | 0,2006440 | 0,1741101 | 0,1511861 | 0,1313671 | 0,1142210 | 0,0993773 |
| 31 | 0,2203595 | 0,1901839 | 0,1642548 | 0,1419587 | 0,1227730 | 0,1062521 | 0,0920160 |
| 32 | 0,2098662 | 0,1802691 | 0,1549574 | 0,1332946 | 0,1147411 | 0,0988392 | 0,0852000 |
| 33 | 0,1998725 | 0,1708712 | 0,1461862 | 0,1251592 | 0,1072347 | 0,0919434 | 0,0788889 |
| 34 | 0,1903548 | 0,1619632 | 0,1379115 | 0,1175204 | 0,1002193 | 0,0855288 | 0,0730453 |
| 35 | 0,1812903 | 0,1535196 | 0,1301052 | 0,1103478 | 0,0936629 | 0,0795616 | 0,0676345 |
| 36 | 0,1726574 | 0,1455162 | 0,1227408 | 0,1036130 | 0,0875355 | 0,0740108 | 0,0626246 |
| 37 | 0,1644356 | 0,1379301 | 0,1157932 | 0,0972892 | 0,0818088 | 0,0688473 | 0,0579857 |
| 38 | 0,1566054 | 0,1307394 | 0,1092389 | 0,0913513 | 0,0764569 | 0,0640440 | 0,0536905 |
| 39 | 0,1491480 | 0,1239236 | 0,1030555 | 0,0857759 | 0,0714550 | 0,0595758 | 0,0497134 |
| 40 | 0,1420457 | 0,1174631 | 0,0972222 | 0,0805408 | 0,0667804 | 0,0554194 | 0,0460309 |
| 41 | 0,1352816 | 0,1113395 | 0,0917190 | 0,0756251 | 0,0624116 | 0,0515529 | 0,0426212 |
| 42 | 0,1288396 | 0,1055350 | 0,0865274 | 0,0710095 | 0,0583286 | 0,0479562 | 0,0394641 |
| 43 | 0,1227044 | 0,1000332 | 0,0816296 | 0,0666756 | 0,0545127 | 0,0446104 | 0,0365408 |
| 44 | 0,1168613 | 0,0948182 | 0,0770091 | 0,0626062 | 0,0509464 | 0,0414980 | 0,0338341 |
| 45 | 0,1112965 | 0,0898751 | 0,0726501 | 0,0587852 | 0,0476135 | 0,0386028 | 0,0313279 |
| 46 | 0,1059967 | 0,0851897 | 0,0685378 | 0,0551973 | 0,0444986 | 0,0359096 | 0,0290073 |
| 47 | 0,1009492 | 0,0807485 | 0,0646583 | 0,0518285 | 0,0415875 | 0,0334043 | 0,0268586 |
| 48 | 0,0961421 | 0,0765389 | 0,0609984 | 0,0486652 | 0,0388668 | 0,0310738 | 0,0248691 |
| 49 | 0,0915639 | 0,0725487 | 0,0575457 | 0,0456951 | 0,0363241 | 0,0289058 | 0,0230269 |
| 50 | 0,0872037 | 0,0687665 | 0,0542884 | 0,0429062 | 0,0339478 | 0,0268891 | 0,0213212 |

## ДИСКОНТИРУЮЩИЕ МНОЖИТЕЛИ

| Число периодов | Ставка процентов | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 8,50 | 9,00 | 9,50 | 10,00 | 10,50 | 11,00 | 11,50 |
| 1 | 0,9216590 | 0,9174312 | 0,9132420 | 0,9090909 | 0,9049774 | 0,9009009 | 0,8968610 |
| 2 | 0,8494553 | 0,8416800 | 0,8340110 | 0,8264463 | 0,8189841 | 0,8116224 | 0,8043596 |
| 3 | 0,7829081 | 0,7721835 | 0,7616539 | 0,7513148 | 0,7411620 | 0,7311914 | 0,7213988 |
| 4 | 0,7215743 | 0,7084252 | 0,6955743 | 0,6830135 | 0,6707349 | 0,6587310 | 0,6469944 |
| 5 | 0,6650454 | 0,6499314 | 0,6352277 | 0,6209213 | 0,6069999 | 0,5934513 | 0,5802640 |
| 6 | 0,6129451 | 0,5962673 | 0,5801166 | 0,5644739 | 0,5493212 | 0,5346408 | 0,5204162 |
| 7 | 0,5649264 | 0,5470342 | 0,5297868 | 0,5131581 | 0,4971232 | 0,4816584 | 0,4667410 |
| 8 | 0,5206694 | 0,5018663 | 0,4838236 | 0,4665074 | 0,4498853 | 0,4339265 | 0,4186018 |
| 9 | 0,4798797 | 0,4604278 | 0,4418480 | 0,4240976 | 0,4071360 | 0,3909248 | 0,3754276 |
| 10 | 0,4422854 | 0,4224108 | 0,4035142 | 0,3855433 | 0,3684489 | 0,3521845 | 0,3367064 |
| 11 | 0,4076363 | 0,3875329 | 0,3685061 | 0,3504939 | 0,3334379 | 0,3172833 | 0,3019788 |
| 12 | 0,3757017 | 0,3555347 | 0,3365353 | 0,3186308 | 0,3017537 | 0,2858408 | 0,2708330 |
| 13 | 0,3462688 | 0,3261786 | 0,3073381 | 0,2896644 | 0,2730803 | 0,2575143 | 0,2428996 |
| 14 | 0,3191418 | 0,2992465 | 0,2806741 | 0,2633313 | 0,2471315 | 0,2319948 | 0,2178471 |
| 15 | 0,2941399 | 0,2745380 | 0,2563234 | 0,2393920 | 0,2236484 | 0,2090043 | 0,1953786 |
| 16 | 0,2710967 | 0,2518698 | 0,2340853 | 0,2176291 | 0,2023968 | 0,1882922 | 0,1752274 |
| 17 | 0,2498587 | 0,2310732 | 0,2137765 | 0,1978447 | 0,1831645 | 0,1696326 | 0,1571547 |
| 18 | 0,2302845 | 0,2119937 | 0,1952297 | 0,1798588 | 0,1657597 | 0,1528222 | 0,1409459 |
| 19 | 0,2122438 | 0,1944897 | 0,1782920 | 0,1635080 | 0,1500088 | 0,1376776 | 0,1264089 |
| 20 | 0,1956164 | 0,1784309 | 0,1628237 | 0,1486436 | 0,1357546 | 0,1240339 | 0,1133712 |
| 21 | 0,1802916 | 0,1636981 | 0,1486974 | 0,1351306 | 0,1228548 | 0,1117423 | 0,1016782 |
| 22 | 0,1661674 | 0,1501817 | 0,1357968 | 0,1228460 | 0,1111808 | 0,1006687 | 0,0911912 |
| 23 | 0,1531497 | 0,1377814 | 0,1240153 | 0,1116782 | 0,1006161 | 0,0906925 | 0,0817858 |
| 24 | 0,1411518 | 0,1264049 | 0,1132560 | 0,1015256 | 0,0910553 | 0,0817050 | 0,0733505 |
| 25 | 0,1300938 | 0,1159678 | 0,1034301 | 0,0922960 | 0,0824030 | 0,0736081 | 0,0657852 |
| 26 | 0,1199021 | 0,1063925 | 0,0944567 | 0,0839055 | 0,0745729 | 0,0663136 | 0,0590002 |
| 27 | 0,1105089 | 0,0976078 | 0,0862619 | 0,0762777 | 0,0674867 | 0,0597420 | 0,0529150 |
| 28 | 0,1018515 | 0,0895484 | 0,0787779 | 0,0693433 | 0,0610740 | 0,0538216 | 0,0474574 |
| 29 | 0,0938723 | 0,0821545 | 0,0719433 | 0,0630394 | 0,0552706 | 0,0484879 | 0,0425627 |
| 30 | 0,0865183 | 0,0753711 | 0,0657017 | 0,0573086 | 0,0500186 | 0,0436828 | 0,0381728 |
| 31 | 0,0797403 | 0,0691478 | 0,0600015 | 0,0520987 | 0,0452657 | 0,0393539 | 0,0342357 |
| 32 | 0,0734934 | 0,0634384 | 0,0547959 | 0,0473624 | 0,0409644 | 0,0354540 | 0,0307047 |
| 33 | 0,0677359 | 0,0582003 | 0,0500419 | 0,0430568 | 0,0370719 | 0,0319405 | 0,0275378 |
| 34 | 0,0624294 | 0,0533948 | 0,0457004 | 0,0391425 | 0,0335492 | 0,0287752 | 0,0246976 |
| 35 | 0,0575386 | 0,0489861 | 0,0417355 | 0,0355841 | 0,0303613 | 0,0259236 | 0,0221503 |
| 36 | 0,0530310 | 0,0449413 | 0,0381146 | 0,0323492 | 0,0274763 | 0,0233546 | 0,0198657 |
| 37 | 0,0488765 | 0,0412306 | 0,0348079 | 0,0294083 | 0,0248654 | 0,0210402 | 0,0178168 |
| 38 | 0,0450474 | 0,0378262 | 0,0317880 | 0,0267349 | 0,0225026 | 0,0189551 | 0,0159792 |
| 39 | 0,0415184 | 0,0347030 | 0,0290302 | 0,0243044 | 0,0203644 | 0,0170767 | 0,0143311 |
| 40 | 0,0382658 | 0,0318376 | 0,0265116 | 0,0220949 | 0,0184293 | 0,0153844 | 0,0128530 |
| 41 | 0,0352680 | 0,0292088 | 0,0242115 | 0,0200863 | 0,0166781 | 0,0138598 | 0,0115274 |
| 42 | 0,0325051 | 0,0267971 | 0,0221109 | 0,0182603 | 0,0150933 | 0,0124863 | 0,0103385 |
| 43 | 0,0299586 | 0,0245845 | 0,0201926 | 0,0166002 | 0,0136591 | 0,0112489 | 0,0092722 |
| 44 | 0,0276116 | 0,0225545 | 0,0184408 | 0,0150911 | 0,0123612 | 0,0101342 | 0,0083158 |
| 45 | 0,0254485 | 0,0206922 | 0,0168409 | 0,0137192 | 0,0111866 | 0,0091299 | 0,0074581 |
| 46 | 0,0234548 | 0,0189837 | 0,0153798 | 0,0124720 | 0,0101236 | 0,0082251 | 0,0066889 |
| 47 | 0,0216173 | 0,0174162 | 0,0140455 | 0,0113382 | 0,0091616 | 0,0074100 | 0,0059990 |
| 48 | 0,0199238 | 0,0159782 | 0,0128269 | 0,0103074 | 0,0082911 | 0,0066757 | 0,0053803 |
| 49 | 0,0183630 | 0,0146589 | 0,0117141 | 0,0093704 | 0,0075032 | 0,0060141 | 0,0048254 |
| 50 | 0,0169244 | 0,0134485 | 0,0106978 | 0,0085186 | 0,0067903 | 0,0054182 | 0,0043277 |

## ДИСКОНТИРУЮЩИЕ МНОЖИТЕЛИ

| Число периодов | Ставка процентов | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 12,00 | 12,50 | 13,00 | 13,50 | 14,00 | 14,50 | 15,00 |
| 1 | 0,8928571 | 0,8888889 | 0,8849558 | 0,8810573 | 0,8771930 | 0,8733624 | 0,8695652 |
| 2 | 0,7971939 | 0,7901235 | 0,7831467 | 0,7762619 | 0,7694675 | 0,7627620 | 0,7561437 |
| 3 | 0,7117802 | 0,7023320 | 0,6930502 | 0,6839312 | 0,6749715 | 0,6661677 | 0,6575162 |
| 4 | 0,6355181 | 0,6242951 | 0,6133187 | 0,6025826 | 0,5920803 | 0,5818058 | 0,5717532 |
| 5 | 0,5674269 | 0,5549290 | 0,5427599 | 0,5309097 | 0,5193687 | 0,5081273 | 0,4971767 |
| 6 | 0,5066311 | 0,4932702 | 0,4803185 | 0,4677619 | 0,4555865 | 0,4437793 | 0,4323276 |
| 7 | 0,4523492 | 0,4384624 | 0,4250606 | 0,4121250 | 0,3996373 | 0,3875802 | 0,3759370 |
| 8 | 0,4038832 | 0,3897443 | 0,3761599 | 0,3631057 | 0,3505591 | 0,3384980 | 0,3269018 |
| 9 | 0,3606100 | 0,3464394 | 0,3328848 | 0,3199169 | 0,3075079 | 0,2956314 | 0,2842624 |
| 10 | 0,3219732 | 0,3079461 | 0,2945883 | 0,2818652 | 0,2697438 | 0,2581934 | 0,2471847 |
| 11 | 0,2874761 | 0,2737299 | 0,2606977 | 0,2483393 | 0,2366174 | 0,2254964 | 0,2149432 |
| 12 | 0,2566751 | 0,2433155 | 0,2307059 | 0,2188012 | 0,2075591 | 0,1969401 | 0,1869072 |
| 13 | 0,2291742 | 0,2162804 | 0,2041645 | 0,1927764 | 0,1820694 | 0,1720001 | 0,1625280 |
| 14 | 0,2046198 | 0,1922493 | 0,1806766 | 0,1698470 | 0,1597100 | 0,1502184 | 0,1413287 |
| 15 | 0,1826963 | 0,1708882 | 0,1598908 | 0,1496450 | 0,1400965 | 0,1311951 | 0,1228945 |
| 16 | 0,1631217 | 0,1519007 | 0,1414962 | 0,1318458 | 0,1228917 | 0,1145809 | 0,1068648 |
| 17 | 0,1456443 | 0,1350228 | 0,1252179 | 0,1161637 | 0,1077997 | 0,1000707 | 0,0929259 |
| 18 | 0,1300396 | 0,1200203 | 0,1108123 | 0,1023469 | 0,0945611 | 0,0873979 | 0,0808051 |
| 19 | 0,1161068 | 0,1066847 | 0,0980640 | 0,0901734 | 0,0829484 | 0,0763301 | 0,0702653 |
| 20 | 0,1036668 | 0,0948308 | 0,0867823 | 0,0794480 | 0,0727617 | 0,0666638 | 0,0611003 |
| 21 | 0,0925596 | 0,0842941 | 0,0767985 | 0,0699982 | 0,0638261 | 0,0582217 | 0,0531307 |
| 22 | 0,0826425 | 0,0749281 | 0,0679633 | 0,0616724 | 0,0559878 | 0,0508486 | 0,0462006 |
| 23 | 0,0737880 | 0,0666027 | 0,0601445 | 0,0543369 | 0,0491121 | 0,0444093 | 0,0401744 |
| 24 | 0,0658821 | 0,0592024 | 0,0532252 | 0,0478740 | 0,0430808 | 0,0387854 | 0,0349343 |
| 25 | 0,0588233 | 0,0526244 | 0,0471020 | 0,0421797 | 0,0377902 | 0,0338737 | 0,0303776 |
| 26 | 0,0525208 | 0,0467772 | 0,0416831 | 0,0371627 | 0,0331493 | 0,0295840 | 0,0264153 |
| 27 | 0,0468936 | 0,0415798 | 0,0368877 | 0,0327425 | 0,0290783 | 0,0258376 | 0,0229699 |
| 28 | 0,0418693 | 0,0369598 | 0,0326440 | 0,0288480 | 0,0255073 | 0,0225656 | 0,0199738 |
| 29 | 0,0373833 | 0,0328531 | 0,0288885 | 0,0254167 | 0,0223748 | 0,0197079 | 0,0173685 |
| 30 | 0,0333779 | 0,0292028 | 0,0255651 | 0,0223936 | 0,0196270 | 0,0172122 | 0,0151031 |
| 31 | 0,0298017 | 0,0259580 | 0,0226239 | 0,0197301 | 0,0172167 | 0,0150325 | 0,0131331 |
| 32 | 0,0266087 | 0,0230738 | 0,0200212 | 0,0173833 | 0,0151024 | 0,0131288 | 0,0114201 |
| 33 | 0,0237577 | 0,0205101 | 0,0177179 | 0,0153157 | 0,0132477 | 0,0114662 | 0,0099305 |
| 34 | 0,0212123 | 0,0182312 | 0,0156795 | 0,0134940 | 0,0116208 | 0,0100141 | 0,0086352 |
| 35 | 0,0189395 | 0,0162055 | 0,0138757 | 0,0118890 | 0,0101937 | 0,0087460 | 0,0075089 |
| 36 | 0,0169103 | 0,0144049 | 0,0122794 | 0,0104749 | 0,0089418 | 0,0076384 | 0,0065295 |
| 37 | 0,0150985 | 0,0128043 | 0,0108667 | 0,0092290 | 0,0078437 | 0,0066711 | 0,0056778 |
| 38 | 0,0134808 | 0,0113816 | 0,0096165 | 0,0081312 | 0,0068804 | 0,0058263 | 0,0049372 |
| 39 | 0,0120364 | 0,0101170 | 0,0085102 | 0,0071641 | 0,0060355 | 0,0050885 | 0,0042932 |
| 40 | 0,0107468 | 0,0089929 | 0,0075312 | 0,0063120 | 0,0052943 | 0,0044441 | 0,0037332 |
| 41 | 0,0095954 | 0,0079937 | 0,0066647 | 0,0055612 | 0,0046441 | 0,0038813 | 0,0032463 |
| 42 | 0,0085673 | 0,0071055 | 0,0058980 | 0,0048997 | 0,0040738 | 0,0033898 | 0,0028229 |
| 43 | 0,0076494 | 0,0063160 | 0,0052195 | 0,0043170 | 0,0035735 | 0,0029605 | 0,0024547 |
| 44 | 0,0068298 | 0,0056142 | 0,0046190 | 0,0038035 | 0,0031346 | 0,0025856 | 0,0021345 |
| 45 | 0,0060980 | 0,0049904 | 0,0040876 | 0,0033511 | 0,0027497 | 0,0022582 | 0,0018561 |
| 46 | 0,0054447 | 0,0044359 | 0,0036174 | 0,0029525 | 0,0024120 | 0,0019722 | 0,0016140 |
| 47 | 0,0048613 | 0,0039430 | 0,0032012 | 0,0026013 | 0,0021158 | 0,0017224 | 0,0014035 |
| 48 | 0,0043405 | 0,0035049 | 0,0028329 | 0,0022919 | 0,0018560 | 0,0015043 | 0,0012204 |
| 49 | 0,0038754 | 0,0031155 | 0,0025070 | 0,0020193 | 0,0016280 | 0,0013138 | 0,0010612 |
| 50 | 0,0034602 | 0,0027693 | 0,0022186 | 0,0017791 | 0,0014281 | 0,0011474 | 0,0009228 |

## ДИСКОНТИРУЮЩИЕ МНОЖИТЕЛИ

| Число периодов | Ставка процентов | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 15,50 | 16,00 | 16,50 | 17,00 | 17,50 | 18,00 | 18,50 |
| 1 | 0,8658009 | 0,8620690 | 0,8583691 | 0,8547009 | 0,8510638 | 0,8474576 | 0,8438819 |
| 2 | 0,7496111 | 0,7431629 | 0,7367975 | 0,7305136 | 0,7243096 | 0,7181844 | 0,7121366 |
| 3 | 0,6490140 | 0,6406577 | 0,6324442 | 0,6243706 | 0,6164337 | 0,6086309 | 0,6009591 |
| 4 | 0,5619169 | 0,5522911 | 0,5428706 | 0,5336500 | 0,5246245 | 0,5157889 | 0,5071385 |
| 5 | 0,4865081 | 0,4761130 | 0,4659833 | 0,4561112 | 0,4464889 | 0,4371092 | 0,4279650 |
| 6 | 0,4212191 | 0,4104423 | 0,3999857 | 0,3898386 | 0,3799906 | 0,3704315 | 0,3611519 |
| 7 | 0,3646919 | 0,3538295 | 0,3433354 | 0,3331954 | 0,3233962 | 0,3139250 | 0,3047695 |
| 8 | 0,3157506 | 0,3050255 | 0,2947085 | 02847824 | 0,2752308 | 0,2660382 | 0,2571895 |
| 9 | 0,2733771 | 0,2629530 | 0,2529686 | 0,2434037 | 0,2342390 | 0,2254561 | 0,2170375 |
| 10 | 0,2366901 | 0,2266836 | 0,2171405 | 0,2080374 | 0,1993523 | 0,1910645 | 0,1831540 |
| 11 | 0,2049265 | 0,1954169 | 0,1863867 | 0,1778097 | 0,1696616 | 0,1619190 | 0,1545604 |
| 12 | 0,1774256 | 0,1684628 | 0,1599885 | 0,1519741 | 0,1443928 | 0,1372195 | 0,1304307 |
| 13 | 0,1536152 | 0,1452266 | 0,1373292 | 0,1298924 | 0,1228875 | 0,1162877 | 0,1100681 |
| 14 | 0,1330002 | 0,1251953 | 0,1178792 | 0,1110192 | 0,1045851 | 0,0985489 | 0,0928845 |
| 15 | 0,1151517 | 0,1079270 | 0,1011838 | 0,0948882 | 0,0890086 | 0,0835160 | 0,0783835 |
| 16 | 0,0996984 | 0,0930405 | 0,0868531 | 0,0811010 | 0,0757520 | 0,0707763 | 0,0661464 |
| 17 | 0,0863190 | 0,0802074 | 0,0745520 | 0,0693171 | 0,0644698 | 0,0599799 | 0,0558198 |
| 18 | 0,0747350 | 0,0691443 | 0,0639931 | 0,0592454 | 0,0548679 | 0,0508304 | 0,0471053 |
| 19 | 0,0647057 | 0,0596071 | 0,0549297 | 0,0506371 | 0,0466961 | 0,0430766 | 0,0397513 |
| 20 | 0,0560222 | 0,0513855 | 0,0471500 | 0,0432796 | 0,0397414 | 0,0365056 | 0,0335454 |
| 21 | 0,0485041 | 0,0442978 | 0,0404721 | 0,0369911 | 0,0338224 | 0,0309370 | 0,0283084 |
| 22 | 0,0419949 | 0,0381878 | 0,0347400 | 0,0316163 | 0,0287850 | 0,0262178 | 0,0238889 |
| 23 | 0,0363592 | 0,0329205 | 0,0298197 | 0,0270225 | 0,0244979 | 0,0222185 | 0,0201594 |
| 24 | 0,0314798 | 0,0283797 | 0,0255963 | 0,0230961 | 0,0208493 | 0,0188292 | 0,0170122 |
| 25 | 0,0272553 | 0,0244653 | 0,0219711 | 0,0197403 | 0,0177441 | 0,0159569 | 0,0143563 |
| 26 | 0,0235976 | 0,0210908 | 0,0188593 | 0,0168720 | 0,0151013 | 0,0135228 | 0,0121150 |
| 27 | 0,0204308 | 0,0181817 | 0,0161883 | 0,0144205 | 0,0128522 | 0,0114600 | 0,0102236 |
| 28 | 0,0176890 | 0,0156739 | 0,0138955 | 0,0123253 | 0,0109380 | 0,0097119 | 0,0086275 |
| 29 | 0,0153152 | 0,0135120 | 0,0119275 | 0,0105344 | 0,0093090 | 0,0082304 | 0,0072806 |
| 30 | 0,0132599 | 0,0116482 | 0,0102382 | 0,0090038 | 0,0079225 | 0,0069749 | 0,0061440 |
| 31 | 0,0114804 | 0,0100416 | 0,0087881 | 0,0076955 | 0,0067426 | 0,0059110 | 0,0051848 |
| 32 | 0,0099398 | 0,0086565 | 0,0075435 | 0,0065774 | 0,0057384 | 0,0050093 | 0,0043753 |
| 33 | 0,0086059 | 0,0074625 | 0,0064751 | 0,0056217 | 0,0048837 | 0,0042452 | 0,0036923 |
| 34 | 0,0074510 | 0,0064332 | 0,0055580 | 0,0048049 | 0,0041564 | 0,0035976 | 0,0031158 |
| 35 | 0,0064511 | 0,0055459 | 0,0047708 | 0,0041067 | 0,0035373 | 0,0030488 | 0,0026294 |
| 36 | 0,0055853 | 0,0047809 | 0,0040951 | 0,0035100 | 0,0030105 | 0,0025837 | 0,0022189 |
| 37 | 0,0048358 | 0,0041215 | 0,0035151 | 0,0030000 | 0,0025621 | 0,0021896 | 0,0018725 |
| 38 | 0,0041868 | 0,0035530 | 0,0030173 | 0,0025641 | 0,0021805 | 0,0018556 | 0,0015802 |
| 39 | 0,0036250 | 0,0030629 | 0,0025899 | 0,0021916 | 0,0018558 | 0,0015725 | 0,0013335 |
| 40 | 0,0031385 | 0,0026405 | 0,0022231 | 0,0018731 | 0,0015794 | 0,0013327 | 0,0011253 |
| 41 | 0,0027173 | 0,0022763 | 0,0019083 | 0,0016010 | 0,0013441 | 0,0011294 | 0,0009496 |
| 42 | 0,0023526 | 0,0019623 | 0,0016380 | 0,0013683 | 0,0011440 | 0,0009571 | 0,0008014 |
| 43 | 0,0020369 | 0,0016916 | 0,0014060 | 0,0011695 | 0,0009736 | 0,0008111 | 0,0006763 |
| 44 | 0,0017636 | 0,0014583 | 0,0012069 | 0,0009996 | 0,0008286 | 0,0006874 | 0,0005707 |
| 45 | 0,0015269 | 0,0012572 | 0,0010359 | 0,0008544 | 0,0007052 | 0,0005825 | 0,0004816 |
| 46 | 0,0013220 | 0,0010838 | 0,0008892 | 0,0007302 | 0,0006001 | 0,0004937 | 0,0004064 |
| 47 | 0,0011446 | 0,0009343 | 0,0007633 | 0,0006241 | 0,0005108 | 0,0004184 | 0,0003430 |
| 48 | 0,0009910 | 0,0008054 | 0,0006552 | 0,0005334 | 0,0004347 | 0,0003545 | 0,0002894 |
| 49 | 0,0008580 | 0,0006943 | 0,0005624 | 0,0004559 | 0,0003700 | 0,0003005 | 0,0002442 |
| 50 | 0,0007428 | 0,0005986 | 0,0004827 | 0,0003897 | 0,0003149 | 0,0002546 | 0,0002061 |

# ДИСКОНТИРУЮЩИЕ МНОЖИТЕЛИ

| Число периодов | Ставка процентов | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 19,00 | 19,50 | 20,00 | 20,50 | 21,00 | 21,50 | 22,00 |
| 1 | 0,8403361 | 0,8368201 | 0,8333333 | 0,8298755 | 0,8264463 | 0,8230453 | 0,8196721 |
| 2 | 0,7061648 | 0,7002679 | 0,6944444 | 0,6886934 | 0,6830135 | 0,6774035 | 0,6718624 |
| 3 | 0,5934158 | 0,5859982 | 0,5787037 | 0,5715298 | 0,5644739 | 0,5575338 | 0,5507068 |
| 4 | 0,4986688 | 0,4903751 | 0,4822531 | 0,4742986 | 0,4665074 | 0,4588755 | 0,4513991 |
| 5 | 0,4190494 | 0,4103557 | 0,4018776 | 0,3936088 | 0,3855433 | 0,3776753 | 0,3699993 |
| 6 | 0,3521423 | 0,3433939 | 0,3348980 | 0,3266463 | 0,3186308 | 0,3108439 | 0,3032781 |
| 7 | 0,2959179 | 0,2873589 | 0,2790816 | 0,2710758 | 0,2633313 | 0,2558386 | 0,2485886 |
| 8 | 0,2486705 | 0,2404677 | 0,2325680 | 0,2249591 | 0,2176291 | 0,2105667 | 0,2037611 |
| 9 | 0,2089668 | 0,2012282 | 0,1938067 | 0,1866881 | 0,1798588 | 0,1733060 | 0,1670173 |
| 10 | 0,1756024 | 0,1683918 | 0,1615056 | 0,1549279 | 0,1486436 | 0,1426387 | 0,1368994 |
| 11 | 0,1475650 | 0,1409136 | 0,1345880 | 0,1285708 | 0,1228460 | 0,1173981 | 0,1122127 |
| 12 | 0,1240042 | 0,1179194 | 0,1121567 | 0,1066978 | 0,1015256 | 0,0966239 | 0,0919776 |
| 13 | 0,1042052 | 0,0986773 | 0,0934639 | 0,0885459 | 0,0839055 | 0,0795259 | 0,0753915 |
| 14 | 0,0875674 | 0,0825751 | 0,0778866 | 0,0734821 | 0,0693433 | 0,0654534 | 0,0617963 |
| 15 | 0,0735861 | 0,0691005 | 0,0649055 | 0,0609810 | 0,0573086 | 0,0538711 | 0,0506527 |
| 16 | 0,0618370 | 0,0578247 | 0,0540879 | 0,0506066 | 0,0473624 | 0,0443384 | 0,0415186 |
| 17 | 0,0519639 | 0,0483889 | 0,0450732 | 0,0419972 | 0,0391425 | 0,0364925 | 0,0340316 |
| 18 | 0,0436671 | 0,0404928 | 0,0375610 | 0,0348524 | 0,0323492 | 0,0300350 | 0,0278948 |
| 19 | 0,0366951 | 0,0338852 | 0,0313009 | 0,0289232 | 0,0267349 | 0,0247201 | 0,0228646 |
| 20 | 0,0308362 | 0,0283558 | 0,0260841 | 0,0240026 | 0,0220949 | 0,0203458 | 0,0187415 |
| 21 | 0,0259128 | 0,0237287 | 0,0217367 | 0,0199192 | 0,0182603 | 0,0167455 | 0,0153619 |
| 22 | 0,0217754 | 0,0198567 | 0,0181139 | 0,0165305 | 0,0150911 | 0,0137823 | 0,0125917 |
| 23 | 0,0182987 | 0,0166164 | 0,0150949 | 0,0137182 | 0,0124720 | 0,0113435 | 0,0103211 |
| 24 | 0,0153770 | 0,0139050 | 0,0125791 | 0,0113844 | 0,0103074 | 0,0093362 | 0,0084599 |
| 25 | 0,0129219 | 0,0116360 | 0,0104826 | 0,0094477 | 0,0085186 | 0,0076841 | 0,0069343 |
| 26 | 0,0108587 | 0,0097372 | 0,0087355 | 0,0078404 | 0,0070401 | 0,0063244 | 0,0056839 |
| 27 | 0,0091250 | 0,0081483 | 0,0072796 | 0,0065065 | 0,0058183 | 0,0052052 | 0,0046589 |
| 28 | 0,0076681 | 0,0068187 | 0,0060663 | 0,0053996 | 0,0048085 | 0,0042841 | 0,0038188 |
| 29 | 0,0064437 | 0,0057060 | 0,0050553 | 0,0044810 | 0,0039740 | 0,0035260 | 0,0031301 |
| 30 | 0,0054149 | 0,0047749 | 0,0042127 | 0,0037187 | 0,0032843 | 0,0029021 | 0,0025657 |
| 31 | 0,0045503 | 0,0039957 | 0,0035106 | 0,0030860 | 0,0027143 | 0,0023886 | 0,0021030 |
| 32 | 0,0038238 | 0,0033437 | 0,0029255 | 0,0025610 | 0,0022432 | 0,0019659 | 0,0017238 |
| 33 | 0,0032133 | 0,0027981 | 0,0024379 | 0,0021253 | 0,0018539 | 0,0016180 | 0,0014129 |
| 34 | 0,0027002 | 0,0023415 | 0,0020316 | 0,0017638 | 0,0015321 | 0,0013317 | 0,0011582 |
| 35 | 0,0022691 | 0,0019594 | 0,0016930 | 0,0014637 | 0,0012662 | 0,0010960 | 0,0009493 |
| 36 | 0,0019068 | 0,0016397 | 0,0014108 | 0,0012147 | 0,0010465 | 0,0009021 | 0,0007781 |
| 37 | 0,0016024 | 0,0013721 | 0,0011757 | 0,0010080 | 0,0008649 | 0,0007425 | 0,0006378 |
| 38 | 0,0013465 | 0,0011482 | 0,0009797 | 0,0008366 | 0,0007148 | 0,0006111 | 0,0005228 |
| 39 | 0,0011315 | 0,0009608 | 0,0008165 | 0,0006942 | 0,0005907 | 0,0005030 | 0,0004285 |
| 40 | 0,0009509 | 0,0008041 | 0,0006804 | 0,0005761 | 0,0004882 | 0,0004140 | 0,0003512 |
| 41 | 0,0007991 | 0,0006728 | 0,0005670 | 0,0004781 | 0,0004035 | 0,0003407 | 0,0002879 |
| 42 | 0,0006715 | 0,0005631 | 0,0004725 | 0,0003968 | 0,0003334 | 0,0002804 | 0,0002360 |
| 43 | 0,0005643 | 0,0004712 | 0,0003937 | 0,0003293 | 0,0002756 | 0,0002308 | 0,0001934 |
| 44 | 0,0004742 | 0,0003943 | 0,0003281 | 0,0002733 | 0,0002277 | 0,0001900 | 0,0001586 |
| 45 | 0,0003985 | 0,0003299 | 0,0002734 | 0,0002268 | 0,0001882 | 0,0001563 | 0,0001300 |
| 46 | 0,0003348 | 0,0002761 | 0,0002279 | 0,0001882 | 0,0001556 | 0,0001287 | 0,0001065 |
| 47 | 0,0002814 | 0,0002311 | 0,0001899 | 0,0001562 | 0,0001286 | 0,0001059 | 0,0000873 |
| 48 | 0,0002365 | 0,0001933 | 0,0001582 | 0,0001296 | 0,0001062 | 0,0000872 | 0,0000716 |
| 49 | 0,0001987 | 0,0001618 | 0,0001319 | 0,0001076 | 0,0000878 | 0,0000717 | 0,0000587 |
| 50 | 0,0001670 | 0,0001354 | 0,0001099 | 0,0000893 | 0,0000726 | 0,0000590 | 0,0000481 |

# ДИСКОНТИРУЮЩИЕ МНОЖИТЕЛИ

| Число периодов | Ставка процентов | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 22,50 | 23,00 | 23,50 | 24,00 | 24,50 | 25,00 | 25,50 |
| 1 | 0,8163265 | 0,8130081 | 0,8097166 | 0,8064516 | 0,8032129 | 0,8000000 | 0,7968127 |
| 2 | 0,6663890 | 0,6609822 | 0,6556410 | 0,6503642 | 0,6451509 | 0,6400000 | 0,6349106 |
| 3 | 0,5439910 | 0,5373839 | 0,5308834 | 0,5244873 | 0,5181935 | 0,5120000 | 0,5059048 |
| 4 | 0,4440743 | 0,4368975 | 0,4298651 | 0,4229736 | 0,4162197 | 0,4096000 | 0,4031114 |
| 5 | 0,3625096 | 0,3552012 | 0,3480689 | 0,3411077 | 0,3343130 | 0,3276800 | 0,3212043 |
| 6 | 0,2959262 | 0,2887815 | 0,2818372 | 0,2750869 | 0,2685245 | 0,2621440 | 0,2559397 |
| 7 | 0,2415724 | 0,2347817 | 0,2282082 | 0,2218443 | 0,2156823 | 0,2097152 | 0,2039360 |
| 8 | 0,1972020 | 0,1908794 | 0,1847840 | 0,1789067 | 0,1732388 | 0,1677722 | 0,1624988 |
| 9 | 0,1609812 | 0,1551865 | 0,1496227 | 0,1442796 | 0,1391476 | 0,1342177 | 0,1294811 |
| 10 | 0,1314132 | 0,1261679 | 0,1211520 | 0,1163545 | 0,1117652 | 0,1073742 | 0,1031722 |
| 11 | 0,1072761 | 0,1025755 | 0,0980987 | 0,0938343 | 0,0897712 | 0,0858993 | 0,0822089 |
| 12 | 0,0875723 | 0,0833947 | 0,0794322 | 0,0756728 | 0,0721054 | 0,0687195 | 0,0655051 |
| 13 | 0,0714876 | 0,0678006 | 0,0643176 | 0,0610264 | 0,0579160 | 0,0549756 | 0,0521953 |
| 14 | 0,0583572 | 0,0551224 | 0,0520790 | 0,0492149 | 0,0465189 | 0,0439805 | 0,0415899 |
| 15 | 0,0476386 | 0,0448150 | 0,0421692 | 0,0396894 | 0,0373645 | 0,0351844 | 0,0331394 |
| 16 | 0,0388886 | 0,0364350 | 0,0341451 | 0,0320076 | 0,0300117 | 0,0281475 | 0,0264059 |
| 17 | 0,0317458 | 0,0296219 | 0,0276479 | 0,0258126 | 0,0241058 | 0,0225180 | 0,0210405 |
| 18 | 0,0259150 | 0,0240829 | 0,0223869 | 0,0208166 | 0,0193621 | 0,0180144 | 0,0167654 |
| 19 | 0,0211551 | 0,0195796 | 0,0181271 | 0,0167876 | 0,0155519 | 0,0144115 | 0,0133589 |
| 20 | 0,0172694 | 0,0159183 | 0,0146778 | 0,0135384 | 0,0124915 | 0,0115292 | 0,0106445 |
| 21 | 0,0140975 | 0,0129417 | 0,0118849 | 0,0109180 | 0,0100333 | 0,0092234 | 0,0084817 |
| 22 | 0,0115082 | 0,0105217 | 0,0096234 | 0,0088049 | 0,0080589 | 0,0073787 | 0,0067583 |
| 23 | 0,0093944 | 0,0085543 | 0,0077922 | 0,0071007 | 0,0064730 | 0,0059030 | 0,0053851 |
| 24 | 0,0076689 | 0,0069547 | 0,0063095 | 0,0057264 | 0,0051992 | 0,0047224 | 0,0042909 |
| 25 | 0,0062603 | 0,0056542 | 0,0051089 | 0,0046180 | 0,0041761 | 0,0037779 | 0,0034191 |
| 26 | 0,0051105 | 0,0045969 | 0,0041367 | 0,0037242 | 0,0033543 | 0,0030223 | 0,0027244 |
| 27 | 0,0041718 | 0,0037373 | 0,0033496 | 0,0030034 | 0,0026942 | 0,0024179 | 0,0021708 |
| 28 | 0,0034056 | 0,0030385 | 0,0027122 | 0,0024221 | 0,0021640 | 0,0019343 | 0,0017297 |
| 29 | 0,0027801 | 0,0024703 | 0,0021961 | 0,0019533 | 0,0017382 | 0,0015474 | 0,0013783 |
| 30 | 0,0022694 | 0,0020084 | 0,0017782 | 0,0015752 | 0,0013961 | 0,0012379 | 0,0010982 |
| 31 | 0,0018526 | 0,0016328 | 0,0014399 | 0,0012704 | 0,0011214 | 0,0009904 | 0,0008751 |
| 32 | 0,0015123 | 0,0013275 | 0,0011659 | 0,0010245 | 0,0009007 | 0,0007923 | 0,0006973 |
| 33 | 0,0012346 | 0,0010793 | 0,0009440 | 0,0008262 | 0,0007235 | 0,0006338 | 0,0005556 |
| 34 | 0,0010078 | 0,0008775 | 0,0007644 | 0,0006663 | 0,0005811 | 0,0005071 | 0,0004427 |
| 35 | 0,0008227 | 0,0007134 | 0,0006190 | 0,0005373 | 0,0004667 | 0,0004056 | 0,0003528 |
| 36 | 0,0006716 | 0,0005800 | 0,0005012 | 0,0004333 | 0,0003749 | 0,0003245 | 0,0002811 |
| 37 | 0,0005482 | 0,0004715 | 0,0004058 | 0,0003495 | 0,0003011 | 0,0002596 | 0,0002240 |
| 38 | 0,0004475 | 0,0003834 | 0,0003286 | 0,0002818 | 0,0002419 | 0,0002077 | 0,0001785 |
| 39 | 0,0003653 | 0,0003117 | 0,0002661 | 0,0002273 | 0,0001943 | 0,0001662 | 0,0001422 |
| 40 | 0,0002982 | 0,0002534 | 0,0002154 | 0,0001833 | 0,0001560 | 0,0001329 | 0,0001133 |
| 41 | 0,0002435 | 0,0002060 | 0,0001744 | 0,0001478 | 0,0001253 | 0,0001063 | 0,0000903 |
| 42 | 0,0001987 | 0,0001675 | 0,0001412 | 0,0001192 | 0,0001007 | 0,0000851 | 0,0000719 |
| 43 | 0,0001622 | 0,0001362 | 0,0001144 | 0,0000961 | 0,0000809 | 0,0000681 | 0,0000573 |
| 44 | 0,0001324 | 0,0001107 | 0,0000926 | 0,0000775 | 0,0000649 | 0,0000544 | 0,0000457 |
| 45 | 0,0001081 | 0,0000900 | 0,0000750 | 0,0000625 | 0,0000522 | 0,0000436 | 0,0000364 |
| 46 | 0,0000883 | 0,0000732 | 0,0000607 | 0,0000504 | 0,0000419 | 0,0000348 | 0,0000290 |
| 47 | 0,0000720 | 0,0000595 | 0,0000492 | 0,0000407 | 0,0000337 | 0,0000279 | 0,0000231 |
| 48 | 0,0000588 | 0,0000484 | 0,0000398 | 0,0000328 | 0,0000270 | 0,0000223 | 0,0000184 |
| 49 | 0,0000480 | 0,0000393 | 0,0000322 | 0,0000264 | 0,0000217 | 0,0000178 | 0,0000147 |
| 50 | 0,0000392 | 0,0000320 | 0,0000261 | 0,0000213 | 0,0000174 | 0,0000143 | 0,0000117 |

# ДИСКОНТИРУЮЩИЕ МНОЖИТЕЛИ

| Число периодов | Ставка процентов | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 26,00 | 26,50 | 27,00 | 27,50 | 28,00 | 28,50 | 29,00 |
| 1 | 0,7936508 | 0,7905138 | 0,7874016 | 0,7843137 | 0,7812500 | 0,7782101 | 0,7751938 |
| 2 | 0,6298816 | 0,6249121 | 0,6200012 | 0,6151480 | 0,6103516 | 0,6056110 | 0,6009254 |
| 3 | 0,4999060 | 0,4940017 | 0,4881900 | 0,4824690 | 0,4768372 | 0,4712926 | 0,4658337 |
| 4 | 0,3967508 | 0,3905152 | 0,3844015 | 0,3784071 | 0,3725290 | 0,3667647 | 0,3611114 |
| 5 | 0,3148816 | 0,3087076 | 0,3026784 | 0,2967899 | 0,2910383 | 0,2854200 | 0,2799313 |
| 6 | 0,2499060 | 0,2440377 | 0,2383294 | 0,2327764 | 0,2273737 | 0,2221167 | 0,2170010 |
| 7 | 0,1983381 | 0,1929151 | 0,1876610 | 0,1825697 | 0,1776357 | 0,1728535 | 0,1682178 |
| 8 | 0,1574112 | 0,1525021 | 0,1477645 | 0,1431919 | 0,1387779 | 0,1345163 | 0,1304014 |
| 9 | 0,1249295 | 0,1205550 | 0,1163500 | 0,1123074 | 0,1084202 | 0,1046820 | 0,1010864 |
| 10 | 0,0991504 | 0,0953004 | 0,0916142 | 0,0880842 | 0,0847033 | 0,0814646 | 0,0783615 |
| 11 | 0,0786908 | 0,0753363 | 0,0721372 | 0,0690857 | 0,0661744 | 0,0633965 | 0,0607454 |
| 12 | 0,0624530 | 0,0595544 | 0,0568009 | 0,0541848 | 0,0516988 | 0,0493358 | 0,0470894 |
| 13 | 0,0495659 | 0,0470786 | 0,0447251 | 0,0424979 | 0,0403897 | 0,0383936 | 0,0365034 |
| 14 | 0,0393380 | 0,0372163 | 0,0352166 | 0,0333317 | 0,0315544 | 0,0298783 | 0,0282972 |
| 15 | 0,0312206 | 0,0294200 | 0,0277296 | 0,0261425 | 0,0246519 | 0,0232516 | 0,0219358 |
| 16 | 0,0247783 | 0,0232569 | 0,0218344 | 0,0205039 | 0,0192593 | 0,0180946 | 0,0170045 |
| 17 | 0,0196653 | 0,0183849 | 0,0171924 | 0,0160815 | 0,0150463 | 0,0140814 | 0,0131818 |
| 18 | 0,0156074 | 0,0145335 | 0,0135373 | 0,0126130 | 0,0117549 | 0,0109583 | 0,0102185 |
| 19 | 0,0123868 | 0,0114889 | 0,0106593 | 0,0098925 | 0,0091835 | 0,0085279 | 0,0079213 |
| 20 | 0,0098308 | 0,0090822 | 0,0083932 | 0,0077588 | 0,0071746 | 0,0066365 | 0,0061405 |
| 21 | 0,0078022 | 0,0071796 | 0,0066088 | 0,0060854 | 0,0056052 | 0,0051646 | 0,0047601 |
| 22 | 0,0061922 | 0,0056756 | 0,0052038 | 0,0047728 | 0,0043791 | 0,0040191 | 0,0036900 |
| 23 | 0,0049145 | 0,0044866 | 0,0040975 | 0,0037434 | 0,0034211 | 0,0031277 | 0,0028605 |
| 24 | 0,0039004 | 0,0035467 | 0,0032263 | 0,0029360 | 0,0026728 | 0,0024340 | 0,0022174 |
| 25 | 0,0030955 | 0,0028037 | 0,0025404 | 0,0023027 | 0,0020881 | 0,0018942 | 0,0017189 |
| 26 | 0,0024568 | 0,0022164 | 0,0020003 | 0,0018061 | 0,0016313 | 0,0014741 | 0,0013325 |
| 27 | 0,0019498 | 0,0017521 | 0,0015751 | 0,0014165 | 0,0012745 | 0,0011471 | 0,0010329 |
| 28 | 0,0015475 | 0,0013850 | 0,0012402 | 0,0011110 | 0,0009957 | 0,0008927 | 0,0008007 |
| 29 | 0,0012282 | 0,0010949 | 0,0009765 | 0,0008714 | 0,0007779 | 0,0006947 | 0,0006207 |
| 30 | 0,0009747 | 0,0008655 | 0,0007689 | 0,0006834 | 0,0006077 | 0,0005406 | 0,0004812 |
| 31 | 0,0007736 | 0,0006842 | 0,0006055 | 0,0005360 | 0,0004748 | 0,0004207 | 0,0003730 |
| 32 | 0,0006140 | 0,0005409 | 0,0004767 | 0,0004204 | 0,0003709 | 0,0003274 | 0,0002892 |
| 33 | 0,0004873 | 0,0004276 | 0,0003754 | 0,0003297 | 0,0002898 | 0,0002548 | 0,0002242 |
| 34 | 0,0003867 | 0,0003380 | 0,0002956 | 0,0002586 | 0,0002264 | 0,0001983 | 0,0001738 |
| 35 | 0,0003069 | 0,0002672 | 0,0002327 | 0,0002028 | 0,0001769 | 0,0001543 | 0,0001347 |
| 36 | 0,0002436 | 0,0002112 | 0,0001833 | 0,0001591 | 0,0001382 | 0,0001201 | 0,0001044 |
| 37 | 0,0001933 | 0,0001670 | 0,0001443 | 0,0001248 | 0,0001080 | 0,0000935 | 0,0000809 |
| 38 | 0,0001534 | 0,0001320 | 0,0001136 | 0,0000979 | 0,0000843 | 0,0000727 | 0,0000627 |
| 39 | 0,0001218 | 0,0001043 | 0,0000895 | 0,0000768 | 0,0000659 | 0,0000566 | 0,0000486 |
| 40 | 0,0000966 | 0,0000825 | 0,0000704 | 0,0000602 | 0,0000515 | 0,0000440 | 0,0000377 |
| 41 | 0,0000767 | 0,0000652 | 0,0000555 | 0,0000472 | 0,0000402 | 0,0000343 | 0,0000292 |
| 42 | 0,0000609 | 0,0000515 | 0,0000437 | 0,0000370 | 0,0000314 | 0,0000267 | 0,0000227 |
| 43 | 0,0000483 | 0,0000407 | 0,0000344 | 0,0000290 | 0,0000245 | 0,0000208 | 0,0000176 |
| 44 | 0,0000383 | 0,0000322 | 0,0000271 | 0,0000228 | 0,0000192 | 0,0000162 | 0,0000136 |
| 45 | 0,0000304 | 0,0000255 | 0,0000213 | 0,0000179 | 0,0000150 | 0,0000126 | 0,0000106 |
| 46 | 0,0000242 | 0,0000201 | 0,0000168 | 0,0000140 | 0,0000117 | 0,0000098 | 0,0000082 |
| 47 | 0,0000192 | 0,0000159 | 0,0000132 | 0,0000110 | 0,0000091 | 0,0000076 | 0,0000063 |
| 48 | 0,0000152 | 0,0000126 | 0,0000104 | 0,0000086 | 0,0000071 | 0,0000059 | 0,0000049 |
| 49 | 0,0000121 | 0,0000099 | 0,0000082 | 0,0000068 | 0,0000056 | 0,0000046 | 0,0000038 |
| 50 | 0,0000096 | 0,0000079 | 0,0000065 | 0,0000053 | 0,0000044 | 0,0000036 | 0,0000030 |

## ДИСКОНТИРУЮЩИЕ МНОЖИТЕЛИ

| Число периодов | Ставка процентов | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 29,50 | 30,00 | 30,50 | 31,00 | 31,50 | 32,00 | 32,50 |
| 1 | 0,7722008 | 0,7692308 | 0,7662835 | 0,7633588 | 0,7604563 | 0,7575758 | 0,7547170 |
| 2 | 0,5962940 | 0,5917160 | 0,5871904 | 0,5827166 | 0,5782937 | 0,5739210 | 0,5695977 |
| 3 | 0,4604587 | 0,4551661 | 0,4499544 | 0,4448219 | 0,4397671 | 0,4347887 | 0,4298851 |
| 4 | 0,3555666 | 0,3501278 | 0,3447926 | 0,3395587 | 0,3344237 | 0,3293853 | 0,3244416 |
| 5 | 0,2745688 | 0,2693291 | 0,2642089 | 0,2592051 | 0,2543146 | 0,2495344 | 0,2448616 |
| 6 | 0,2120222 | 0,2071762 | 0,2024589 | 0,1978665 | 0,1933951 | 0,1890412 | 0,1848012 |
| 7 | 0,1637237 | 0,1593663 | 0,1551409 | 0,1510431 | 0,1470685 | 0,1432130 | 0,1394726 |
| 8 | 0,1264276 | 0,1225895 | 0,1188819 | 0,1153001 | 0,1118392 | 0,1084947 | 0,1052623 |
| 9 | 0,0976275 | 0,0942996 | 0,0910973 | 0,0880153 | 0,0850488 | 0,0821930 | 0,0794433 |
| 10 | 0,0753880 | 0,0725382 | 0,0698063 | 0,0671873 | 0,0646759 | 0,0622674 | 0,0599572 |
| 11 | 0,0582147 | 0,0557986 | 0,0534915 | 0,0512880 | 0,0491832 | 0,0471723 | 0,0452507 |
| 12 | 0,0449534 | 0,0429220 | 0,0409896 | 0,0391511 | 0,0374017 | 0,0357366 | 0,0341515 |
| 13 | 0,0347131 | 0,0330169 | 0,0314097 | 0,0298864 | 0,0284423 | 0,0270732 | 0,0257747 |
| 14 | 0,0268055 | 0,0253976 | 0,0240687 | 0,0228140 | 0,0216292 | 0,0205100 | 0,0194526 |
| 15 | 0,0206992 | 0,0195366 | 0,0184435 | 0,0174153 | 0,0164480 | 0,0155379 | 0,0146812 |
| 16 | 0,0159839 | 0,0150282 | 0,0141329 | 0,0132941 | 0,0125080 | 0,0117711 | 0,0110802 |
| 17 | 0,0123428 | 0,0115601 | 0,0108298 | 0,0101482 | 0,0095118 | 0,0089175 | 0,0083624 |
| 18 | 0,0095311 | 0,0088924 | 0,0082987 | 0,0077467 | 0,0072333 | 0,0067557 | 0,0063112 |
| 19 | 0,0073599 | 0,0068403 | 0,0063592 | 0,0059135 | 0,0055006 | 0,0051179 | 0,0047632 |
| 20 | 0,0056834 | 0,0052618 | 0,0048729 | 0,0045141 | 0,0041830 | 0,0038772 | 0,0035949 |
| 21 | 0,0043887 | 0,0040475 | 0,0037340 | 0,0034459 | 0,0031810 | 0,0029373 | 0,0027131 |
| 22 | 0,0033889 | 0,0031135 | 0,0028613 | 0,0026305 | 0,0024190 | 0,0022252 | 0,0020476 |
| 23 | 0,0026169 | 0,0023950 | 0,0021926 | 0,0020080 | 0,0018395 | 0,0016858 | 0,0015454 |
| 24 | 0,0020208 | 0,0018423 | 0,0016801 | 0,0015328 | 0,0013989 | 0,0012771 | 0,0011663 |
| 25 | 0,0015605 | 0,0014172 | 0,0012875 | 0,0011701 | 0,0010638 | 0,0009675 | 0,0008802 |
| 26 | 0,0012050 | 0,0010901 | 0,0009866 | 0,0008932 | 0,0008090 | 0,0007330 | 0,0006643 |
| 27 | 0,0009305 | 0,0008386 | 0,0007560 | 0,0006818 | 0,0006152 | 0,0005553 | 0,0005014 |
| 28 | 0,0007185 | 0,0006450 | 0,0005793 | 0,0005205 | 0,0004678 | 0,0004207 | 0,0003784 |
| 29 | 0,0005549 | 0,0004962 | 0,0004439 | 0,0003973 | 0,0003558 | 0,0003187 | 0,0002856 |
| 30 | 0,0004285 | 0,0003817 | 0,0003402 | 0,0003033 | 0,0002705 | 0,0002414 | 0,0002155 |
| 31 | 0,0003309 | 0,0002936 | 0,0002607 | 0,0002315 | 0,0002057 | 0,0001829 | 0,0001627 |
| 32 | 0,0002555 | 0,0002258 | 0,0001997 | 0,0001767 | 0,0001565 | 0,0001386 | 0,0001228 |
| 33 | 0,0001973 | 0,0001737 | 0,0001531 | 0,0001349 | 0,0001190 | 0,0001050 | 0,0000927 |
| 34 | 0,0001523 | 0,0001336 | 0,0001173 | 0,0001030 | 0,0000905 | 0,0000795 | 0,0000699 |
| 35 | 0,0001176 | 0,0001028 | 0,0000899 | 0,0000786 | 0,0000688 | 0,0000602 | 0,0000528 |
| 36 | 0,0000908 | 0,0000791 | 0,0000689 | 0,0000600 | 0,0000523 | 0,0000456 | 0,0000398 |
| 37 | 0,0000701 | 0,0000608 | 0,0000528 | 0,0000458 | 0,0000398 | 0,0000346 | 0,0000301 |
| 38 | 0,0000542 | 0,0000468 | 0,0000404 | 0,0000350 | 0,0000303 | 0,0000262 | 0,0000227 |
| 39 | 0,0000418 | 0,0000360 | 0,0000310 | 0,0000267 | 0,0000230 | 0,0000198 | 0,0000171 |
| 40 | 0,0000323 | 0,0000277 | 0,0000237 | 0,0000204 | 0,0000175 | 0,0000150 | 0,0000129 |
| 41 | 0,0000249 | 0,0000213 | 0,0000182 | 0,0000156 | 0,0000133 | 0,0000114 | 0,0000098 |
| 42 | 0,0000193 | 0,0000164 | 0,0000139 | 0,0000119 | 0,0000101 | 0,0000086 | 0,0000074 |
| 43 | 0,0000149 | 0,0000126 | 0,0000107 | 0,0000091 | 0,0000077 | 0,0000065 | 0,0000056 |
| 44 | 0,0000115 | 0,0000097 | 0,0000082 | 0,0000069 | 0,0000059 | 0,0000050 | 0,0000042 |
| 45 | 0,0000089 | 0,0000075 | 0,0000063 | 0,0000053 | 0,0000044 | 0,0000033 | 0,0000032 |
| 46 | 0,0000068 | 0,0000057 | 0,0000048 | 0,0000040 | 0,0000034 | 0,0000028 | 0,0000024 |
| 47 | 0,0000053 | 0,0000044 | 0,0000037 | 0,0000031 | 0,0000026 | 0,0000022 | 0,0000018 |
| 48 | 0,0000041 | 0,0000034 | 0,0000028 | 0,0000023 | 0,0000020 | 0,0000016 | 0,0000014 |
| 49 | 0,0000032 | 0,0000026 | 0,0000022 | 0,0000018 | 0,0000015 | 0,0000012 | 0,0000010 |
| 50 | 0,0000024 | 0,0000020 | 0,0000017 | 0,0000014 | 0,0000011 | 0,0000009 | 0,0000008 |

# КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРИВЕДЕНИЯ ГОДОВОЙ РЕНТЫ

| Число периодов | Ставка процентов | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1,50 | 2,00 | 2,50 | 3,00 | 3,50 | 4,00 | 4,50 |
| 1 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 |
| 2 | 2,015000 | 2,020000 | 2,025000 | 2,030000 | 2,035000 | 2,040000 | 2,045000 |
| 3 | 3,045225 | 3,060400 | 3,075625 | 3,090900 | 3,106225 | 3,121600 | 3,137025 |
| 4 | 4,090903 | 4,121608 | 4,152516 | 4,183627 | 4,214943 | 4,246464 | 4,278191 |
| 5 | 5,152267 | 5,204040 | 5,256329 | 5,309136 | 5,362466 | 5,416323 | 5,470710 |
| 6 | 6,229551 | 6,308121 | 6,387737 | 6,468410 | 6,550152 | 6,632975 | 6,716892 |
| 7 | 7,322994 | 7,434283 | 7,547430 | 7,662462 | 7,779408 | 7,898294 | 8,019152 |
| 8 | 8,432839 | 8,582969 | 8,736116 | 8,892336 | 9,051687 | 9,214226 | 9,380014 |
| 9 | 9,559332 | 9,754628 | 9,954519 | 10,15911 | 10,36850 | 10,58280 | 10,80211 |
| 10 | 10,70272 | 10,94972 | 11,20338 | 11,46388 | 11,73139 | 12,00611 | 12,28821 |
| 11 | 11,86326 | 12,16872 | 12,48347 | 12,80780 | 13,14199 | 13,48635 | 13,84118 |
| 12 | 13,04121 | 13,41209 | 13,79555 | 14,19203 | 14,60196 | 15,02581 | 15,46403 |
| 13 | 14,23683 | 14,68033 | 15,14044 | 15,61779 | 16,11303 | 16,62684 | 17,15991 |
| 14 | 15,45038 | 15,97394 | 16,51895 | 17,08632 | 17,67699 | 18,29191 | 18,93211 |
| 15 | 16,68214 | 17,29342 | 17,93193 | 18,59891 | 19,29568 | 20,02359 | 20,78405 |
| 16 | 17,93237 | 18,63929 | 19,38022 | 20,15688 | 20,97103 | 21,82453 | 22,71934 |
| 17 | 19,20136 | 20,01207 | 20,86473 | 21,76159 | 22,70502 | 23,69751 | 24,74171 |
| 18 | 20,48938 | 21,41231 | 22,38635 | 23,41444 | 24,49969 | 25,64541 | 26,85508 |
| 19 | 21,79672 | 22,84056 | 23,94601 | 25,11687 | 26,35718 | 27,67123 | 29,06356 |
| 20 | 23,12367 | 24,29737 | 25,54466 | 26,87037 | 28,27968 | 29,77808 | 31,37142 |
| 21 | 24,47052 | 25,78332 | 27,18327 | 28,67649 | 30,26947 | 31,96920 | 33,78314 |
| 22 | 25,83758 | 27,29898 | 28,86286 | 30,53678 | 32,32890 | 34,24797 | 36,30338 |
| 23 | 27,22514 | 28,84496 | 30,58443 | 32,45288 | 34,46041 | 36,61789 | 38,93703 |
| 24 | 28,63352 | 30,42186 | 32,34904 | 34,42647 | 36,66653 | 39,08260 | 41,68920 |
| 25 | 30,06302 | 32,03030 | 34,15776 | 36,45926 | 38,94986 | 41,64591 | 44,56521 |
| 26 | 31,51397 | 33,67091 | 36,01171 | 38,55304 | 41,31310 | 44,31174 | 47,57064 |
| 27 | 32,98668 | 35,34432 | 37,91200 | 40,70963 | 43,75906 | 47,08421 | 50,71132 |
| 28 | 34,48148 | 37,05121 | 39,85980 | 42,93092 | 46,29063 | 49,96758 | 53,99333 |
| 29 | 35,99870 | 38,79223 | 41,85630 | 45,21885 | 48,91080 | 52,96629 | 57,42303 |
| 30 | 37,53868 | 40,56808 | 43,90270 | 47,57542 | 51,62268 | 56,08494 | 61,00707 |
| 31 | 39,10176 | 42,37944 | 46,00027 | 50,00268 | 54,42947 | 59,32834 | 64,75239 |
| 32 | 40,68829 | 44,22703 | 48,15028 | 52,50276 | 57,33450 | 62,70147 | 68,66625 |
| 33 | 42,29861 | 46,11157 | 50,35403 | 55,07784 | 60,34121 | 66,20953 | 72,75623 |
| 34 | 43,93309 | 48,03380 | 52,61289 | 57,73018 | 63,45315 | 69,85791 | 77,03026 |
| 35 | 45,59206 | 49,99448 | 54,92821 | 60,46208 | 66,67401 | 73,65222 | 81,49662 |
| 36 | 47,27597 | 51,99437 | 57,30141 | 63,27594 | 70,00760 | 77,59831 | 86,16397 |
| 37 | 48,98511 | 54,03425 | 59,73395 | 66,17422 | 73,45787 | 81,70225 | 91,04134 |
| 38 | 50,71989 | 56,11494 | 62,22730 | 69,15945 | 77,02889 | 85,97034 | 96,13820 |
| 39 | 52,48068 | 58,23724 | 64,78298 | 72,23423 | 80,72491 | 90,40915 | 101,4644 |
| 40 | 54,26789 | 60,40198 | 67,40255 | 75,40126 | 84,55028 | 95,02552 | 107,0303 |
| 41 | 56,08191 | 62,61002 | 70,08762 | 78,66330 | 88,50954 | 99,82654 | 112,8467 |
| 42 | 57,92314 | 64,86222 | 72,83981 | 82,02320 | 92,60737 | 104,8196 | 118,9248 |
| 43 | 59,79199 | 67,15947 | 75,66080 | 85,48389 | 96,84863 | 110,0124 | 125,2764 |
| 44 | 61,68887 | 69,50266 | 78,55232 | 89,04841 | 101,2383 | 115,4129 | 131,9138 |
| 45 | 63,61420 | 71,89271 | 81,51613 | 92,71986 | 105,7817 | 121,0294 | 138,8500 |
| 46 | 65,56841 | 74,33056 | 84,55403 | 96,50146 | 110,4840 | 126,8706 | 146,0982 |
| 47 | 67,55194 | 76,81718 | 87,66789 | 100,3965 | 115,3510 | 132,9454 | 153,6726 |
| 48 | 69,56522 | 79,35352 | 90,85958 | 104,4084 | 120,3883 | 139,2632 | 161,5879 |
| 49 | 71,60870 | 81,94059 | 94,13107 | 108,5406 | 125,6018 | 145,8337 | 169,8594 |
| 50 | 73,68283 | 84,57940 | 97,48435 | 112,7969 | 130,9979 | 152,6671 | 178,5030 |

# КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРИВЕДЕНИЯ ГОДОВОЙ РЕНТЫ

| Число периодов | Ставка процентов | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 5,00 | 5,50 | 6,00 | 6,50 | 7,00 | 7,50 | 8,00 |
| 1 | 0,9523810 | 0,9478673 | 0,9433962 | 0,9389671 | 0,9345794 | 0,9302326 | 0,9259259 |
| 2 | 1,8594104 | 1,8463197 | 1,8333927 | 1,8206264 | 1,8080182 | 1,7955652 | 1,7832647 |
| 3 | 2,7232480 | 2,6979334 | 2,6730119 | 2,6484755 | 2,6243160 | 2,6005257 | 2,5770970 |
| 4 | 3,5459505 | 3,5051501 | 3,4651056 | 3,4257986 | 3,3872113 | 3,3493263 | 3,3121268 |
| 5 | 4,3294767 | 4,2702845 | 4,2123638 | 4,1556794 | 4,1001974 | 4,0458849 | 3,9927100 |
| 6 | 5,0756921 | 4,9955303 | 4,9173243 | 4,8410136 | 4,7665397 | 4,6938464 | 4,6228797 |
| 7 | 5,7863734 | 5,6829671 | 5,5823814 | 5,4845198 | 5,3892894 | 5,2966013 | 5,2063701 |
| 8 | 6,4632128 | 6,3345660 | 6,2097938 | 6,0887510 | 5,9712985 | 5,8573036 | 5,7466389 |
| 9 | 7,1078217 | 6,9521952 | 6,8016923 | 6,6561042 | 6,5152322 | 6,3788870 | 6,2468879 |
| 10 | 7,7217349 | 7,5376258 | 7,3600871 | 7,1888302 | 7,0235815 | 6,8640810 | 6,7100814 |
| 11 | 8,3064142 | 8,0925363 | 7,8868746 | 7,6890425 | 7,4986743 | 7,3154241 | 7,1389643 |
| 12 | 8,8632516 | 8,6185178 | 8,3838439 | 8,1587253 | 7,9426863 | 7,7352783 | 7,5360780 |
| 13 | 9,3935730 | 9,1170785 | 8,8526830 | 8,5997421 | 8,3576507 | 8,1258403 | 7,9037759 |
| 14 | 9,8986409 | 9,5896479 | 9,2949839 | 9,0138423 | 8,7454680 | 8,4891537 | 8,2442370 |
| 15 | 10,3796580 | 10,0375809 | 9,7122490 | 9,4026689 | 9,1079140 | 8,8271197 | 8,5594787 |
| 16 | 10,8377696 | 10,4621620 | 10,1058953 | 9,7677642 | 9,4466486 | 9,1415067 | 8,8513692 |
| 17 | 11,2740662 | 10,8646086 | 10,4772597 | 10,1105767 | 9,7632230 | 9,4339598 | 9,1216381 |
| 18 | 11,6895869 | 11,2460745 | 10,8276035 | 10,4324664 | 10,0590869 | 9,7060091 | 9,3718871 |
| 19 | 12,0853209 | 11,6076535 | 11,1581165 | 10,7347102 | 10,3355952 | 9,9590782 | 9,6035992 |
| 20 | 12,4622103 | 11,9503825 | 11,4699212 | 11,0185072 | 10,5940142 | 10,1944914 | 9,8181474 |
| 21 | 12,8211527 | 12,2752441 | 11,7640766 | 11,2849833 | 10,8355273 | 10,4134803 | 10,0168032 |
| 22 | 13,1630026 | 12,5831697 | 12,0415817 | 11,5351956 | 11,0612405 | 10,6171910 | 10,2007437 |
| 23 | 13,4885739 | 12,8750424 | 12,3033790 | 11,7701367 | 11,2721874 | 10,8066893 | 10,3710589 |
| 24 | 13,7986418 | 13,1516990 | 12,5503575 | 11,9907387 | 11,4693340 | 10,9829668 | 10,5287583 |
| 25 | 14,0939446 | 13,4139327 | 12,7833562 | 12,1978767 | 11,6535832 | 11,1469459 | 10,6747762 |
| 26 | 14,3751853 | 13,6624954 | 13,0031662 | 12,3923725 | 11,8257787 | 11,2994845 | 10,8099780 |
| 27 | 14,6430336 | 13,8980999 | 13,2105341 | 12,5749977 | 11,9867090 | 11,4413810 | 10,9351648 |
| 28 | 14,8981273 | 14,1214217 | 13,4061643 | 12,7464767 | 12,1371113 | 11,5733776 | 11,0510785 |
| 29 | 15,1410736 | 14,3331012 | 13,5907210 | 12,9074898 | 12,2776741 | 11,6961652 | 11,1584060 |
| 30 | 15,3724510 | 14,5337452 | 13,7648312 | 13,0586759 | 12,4090412 | 11,8103863 | 11,2577833 |
| 31 | 15,5928105 | 14,7239291 | 13,9290860 | 13,2006347 | 12,5318142 | 11,9166384 | 11,3497994 |
| 32 | 15,8026767 | 14,9041982 | 14,0840434 | 13,3339293 | 12,6465553 | 12,0154776 | 11,4349994 |
| 33 | 16,0025492 | 15,0750694 | 14,2302296 | 13,4590885 | 12,7537900 | 12,1074210 | 11,5138884 |
| 34 | 16,1929040 | 15,2370326 | 14,3681411 | 13,5766089 | 12,8540094 | 12,1929498 | 11,5869337 |
| 35 | 16,3741943 | 15,3905522 | 14,4982464 | 13,6869567 | 12,9476723 | 12,2725114 | 11,6545682 |
| 36 | 16,5468517 | 15,5360684 | 14,6209871 | 13,7905697 | 13,0352078 | 12,3465222 | 11,7171928 |
| 37 | 16,7112873 | 15,6739985 | 14,7367803 | 13,8878589 | 13,1170166 | 12,4153695 | 11,7751785 |
| 38 | 16,8678927 | 15,8047379 | 14,8460192 | 13,9792102 | 13,1934735 | 12,4794135 | 11,8288690 |
| 39 | 17,0170407 | 15,9286615 | 14,9490747 | 14,0649861 | 13,2649285 | 12,5389893 | 11,8785824 |
| 40 | 17,1590864 | 16,0461247 | 15,0462969 | 14,1455269 | 13,3317088 | 12,5944087 | 11,9246133 |
| 41 | 17,2943680 | 16,1574642 | 15,1380159 | 14,2211520 | 13,3941204 | 12,6459615 | 11,9672346 |
| 42 | 17,4232076 | 18,2629992 | 15,2245433 | 14,2921615 | 13,4524490 | 12,6939177 | 12,0066987 |
| 43 | 17,5459120 | 16,3630324 | 15,3061729 | 14,3588371 | 13,5069617 | 12,7385281 | 12,0432395 |
| 44 | 17,6627733 | 16,4578506 | 15,3831820 | 14,4214433 | 13,5579081 | 12,7800261 | 12,0770736 |
| 45 | 17,7740698 | 16,5477257 | 15,4558321 | 14,4802284 | 13,6055216 | 12,8186290 | 12,1084015 |
| 46 | 17,8800665 | 16,6329154 | 15,5243699 | 14,5354257 | 13,6500202 | 12,8545386 | 12,1374088 |
| 47 | 17,9810157 | 16,7136639 | 15,5890282 | 14,5872542 | 13,6916076 | 12,8879429 | 12,1642674 |
| 48 | 18,0771578 | 16,7902027 | 15,6500266 | 14,6359195 | 13,7304744 | 12,9190166 | 12,1891365 |
| 49 | 18,1687217 | 16,8627514 | 15,7075723 | 14,6816145 | 13,7667985 | 12,9479224 | 12,2121634 |
| 50 | 18,2559255 | 16,9315179 | 15,7618606 | 14,7245207 | 13,8007463 | 12,9748116 | 12,2334846 |

# КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРИВЕДЕНИЯ ГОДОВОЙ РЕНТЫ

| Число периодов | Ставка процентов | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 8,50 | 9,00 | 9,50 | 10,00 | 10,50 | 11,00 | 11,50 |
| 1 | 0,9216590 | 0,9174312 | 0,9132420 | 0,9090909 | 0,9049774 | 0,9009009 | 0,8968610 |
| 2 | 1,7711143 | 1,7591112 | 1,7472530 | 1,7355372 | 1,7239614 | 1,7125233 | 1,7012206 |
| 3 | 2,5540224 | 2,5312947 | 2,5089068 | 2,4868520 | 2,4651235 | 2,4437147 | 2,4226194 |
| 4 | 3,2755967 | 3,2397199 | 3,2044811 | 3,1698654 | 3,1358583 | 3,1024457 | 3,0696138 |
| 5 | 3,9406421 | 3,8896513 | 3,8397088 | 3,7907868 | 3,7428582 | 3,6958970 | 3,6498778 |
| 6 | 4,5535872 | 4,4859186 | 4,4198254 | 4,3552607 | 4,2921794 | 4,2305379 | 4,1702940 |
| 7 | 5,1185135 | 5,0329528 | 4,9496122 | 4,8684188 | 4,7893026 | 4,7121963 | 4,6370350 |
| 8 | 5,6391830 | 5,5348191 | 5,4334358 | 5,3349262 | 5,2391879 | 5,1461228 | 5,0556368 |
| 9 | 6,1190626 | 5,9952469 | 5,8752838 | 5,7590238 | 5,6463239 | 5,5370475 | 5,4310644 |
| 10 | 6,5613481 | 6,4176577 | 6,2787980 | 6,1445671 | 6,0147727 | 5,8892320 | 5,7677707 |
| 11 | 6,9689844 | 6,8051906 | 6,6473041 | 6,4950610 | 6,3482106 | 6,2065153 | 6,0697495 |
| 12 | 7,3446861 | 7,1607253 | 6,9838394 | 6,8136918 | 6,6499644 | 6,4923561 | 6,3405825 |
| 13 | 7,6909549 | 7,4869039 | 7,2911775 | 7,1033562 | 6,9230447 | 6,7498704 | 6,5834821 |
| 14 | 8,0100967 | 7,7861504 | 7,5718516 | 7,3666875 | 7,1701762 | 6,9818652 | 6,8013292 |
| 15 | 8,3042366 | 8,0606884 | 7,8281750 | 7,6060795 | 7,3938246 | 7,1908696 | 6,9967078 |
| 16 | 8,5753332 | 8,3125582 | 8,0622603 | 7,8237086 | 7,5962214 | 7,3791618 | 7,1719353 |
| 17 | 8,8251919 | 8,5436314 | 8,2760368 | 8,0215533 | 7,7793858 | 7,5487944 | 7,3290899 |
| 18 | 9,0554764 | 8,7556251 | 8,4712665 | 8,2014121 | 7,9451456 | 7,7016166 | 7,4700358 |
| 19 | 9,2677202 | 8,9501148 | 8,6495584 | 8,3649201 | 8,0951543 | 7,8392942 | 7,5964447 |
| 20 | 9,4633366 | 9,1285457 | 8,8123821 | 8,5135637 | 8,2309089 | 7,9633281 | 7,7098159 |
| 21 | 9,6436282 | 9,2922437 | 8,9610796 | 8,6486943 | 8,3537637 | 8,0750704 | 7,8114940 |
| 22 | 9,8097956 | 9,4424254 | 9,0968763 | 8,7715403 | 8,4649445 | 8,1757391 | 7,9026852 |
| 23 | 9,9629452 | 9,5802068 | 9,2208916 | 8,8832184 | 8,5655607 | 8,2664316 | 7,9844711 |
| 24 | 10,1040970 | 9,7066118 | 9,3341476 | 8,9847440 | 8,6566160 | 8,3481366 | 8,0578216 |
| 25 | 10,2341908 | 9,8225796 | 9,4375777 | 9,0770400 | 8,7390190 | 8,4217447 | 8,1236068 |
| 26 | 10,3540929 | 9,9289721 | 9,5320344 | 9,1609455 | 8,8135919 | 8,4880583 | 8,1826070 |
| 27 | 10,4646017 | 10,0265799 | 9,6182963 | 9,2372232 | 8,8810786 | 8,5478002 | 8,2355220 |
| 28 | 10,5664532 | 10,1161284 | 9,6970742 | 9,3065665 | 8,9421526 | 8,6016218 | 8,2829793 |
| 29 | 10,6603255 | 10,1982829 | 9,7690176 | 9,3696059 | 8,9974232 | 8,6501098 | 8,3255420 |
| 30 | 10,7468438 | 10,2736540 | 9,8347192 | 9,4269145 | 9,0474418 | 8,6937926 | 8,3637148 |
| 31 | 10,8265842 | 10,3428019 | 9,8947208 | 9,4790132 | 9,0927075 | 8,7331465 | 8,3979505 |
| 32 | 10,9000776 | 10,4062403 | 9,9495167 | 9,5263756 | 9,1336719 | 8,7686004 | 8,4286552 |
| 33 | 10,9678134 | 10,4644406 | 9,9995586 | 9,5694324 | 9,1707438 | 8,8005409 | 8,4561930 |
| 34 | 11,0302428 | 10,5178354 | 10,0452590 | 9,6085749 | 9,2042931 | 8,8293161 | 8,4808906 |
| 35 | 11,0877814 | 10,5668215 | 10,0869945 | 9,6441590 | 9,2346543 | 8,8552398 | 8,5030409 |
| 36 | 11,1408123 | 10,6117628 | 10,1251092 | 9,6765082 | 9,2621306 | 8,8785944 | 8,5229066 |
| 37 | 11,1896888 | 10,6529934 | 10,1599170 | 9,7059165 | 9,2869960 | 8,8996346 | 8,5407234 |
| 38 | 11,2347362 | 10,6908196 | 10,1917051 | 9,7326514 | 9,3094987 | 8,9185897 | 8,5567026 |
| 39 | 11,2762546 | 10,7255226 | 10,2207352 | 9,7569558 | 9,3298631 | 8,9356664 | 8,5710337 |
| 40 | 11,3145203 | 10,7573602 | 10,2472468 | 9,7790507 | 9,3482924 | 8,9510508 | 8,5838868 |
| 41 | 11,3497883 | 10,7865690 | 10,2714582 | 9,7991370 | 9,3649705 | 8,9649106 | 8,5954141 |
| 42 | 11,3822934 | 10,8133660 | 10,2935692 | 9,8173973 | 9,3800638 | 8,9773970 | 8,6057526 |
| 43 | 11,4122520 | 10,8379505 | 10,3137618 | 9,8339975 | 9,3937229 | 8,9886459 | 8,6150247 |
| 44 | 11,4398636 | 10,8605050 | 10,3322026 | 9,8490887 | 9,4060840 | 8,9987801 | 8,6233406 |
| 45 | 11,4653120 | 10,8811973 | 10,3490434 | 9,8628079 | 9,4172706 | 9,0079100 | 8,6307987 |
| 46 | 11,4887669 | 10,9001810 | 10,3644232 | 9,8752799 | 9,4273942 | 9,0161351 | 8,6374876 |
| 47 | 11,5103842 | 10,9175972 | 10,3784687 | 9,8866181 | 9,4365559 | 9,0235452 | 8,6434867 |
| 48 | 11,5303080 | 10,9335755 | 10,3912956 | 9,8969255 | 9,4448469 | 9,0302209 | 8,6488670 |
| 49 | 11,5486710 | 10,9482344 | 10,4030097 | 9,9062959 | 9,4523502 | 9,0362350 | 8,6536923 |
| 50 | 11,5655954 | 10,9616829 | 10,4137075 | 9,9148145 | 9,4591404 | 9,0416532 | 8,6580200 |

## КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРИВЕДЕНИЯ ГОДОВОЙ РЕНТЫ

| Число периодов | Ставка процентов | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 12,00 | 12,50 | 13,00 | 13,50 | 14,00 | 14,50 | 15,00 |
| 1 | 0,8928571 | 0,8888889 | 0,8849558 | 0,8810573 | 0,8771930 | 0,8733624 | 0,8695652 |
| 2 | 1,6900510 | 1,6790123 | 1,6681024 | 1,6573192 | 1,6466605 | 1,6361244 | 1,6257089 |
| 3 | 2,4018313 | 2,3813443 | 2,3611526 | 2,3412504 | 2,3216320 | 2,3022921 | 2,2832251 |
| 4 | 3,0373493 | 3,0056394 | 2,9744713 | 2,9438329 | 2,9137123 | 2,8840979 | 2,8549784 |
| 5 | 3,6047762 | 3,5605683 | 3,5172313 | 3,4747427 | 3,4330810 | 3,3922252 | 3,3521551 |
| 6 | 4,1114073 | 4,0538385 | 3,9975498 | 3,9425046 | 3,8886675 | 3,8360046 | 3,7844827 |
| 7 | 4,5637565 | 4,4923009 | 4,4226104 | 4,3546296 | 4,2883048 | 4,2235848 | 4,1604197 |
| 8 | 4,9676398 | 4,8820453 | 4,7987703 | 4,7177353 | 4,6388639 | 4,5620828 | 4,4873215 |
| 9 | 5,3282498 | 5,2284847 | 5,1316551 | 5,0376522 | 4,9463718 | 4,8577142 | 4,7715839 |
| 10 | 5,6502230 | 5,5364308 | 5,4262435 | 5,3195174 | 5,2161156 | 5,1159076 | 5,0187686 |
| 11 | 5,9376991 | 5,8101607 | 5,6869411 | 5,5678567 | 5,4527330 | 5,3414040 | 5,2337118 |
| 12 | 6,1943742 | 6,0534762 | 5,9176470 | 5,7866579 | 5,6602921 | 5,5383441 | 5,4206190 |
| 13 | 6,4235484 | 6,2697566 | 6,1218115 | 5,9794343 | 5,8423615 | 5,7103442 | 5,5831470 |
| 14 | 6,6281682 | 6,4620059 | 6,3024881 | 6,1492813 | 6,0020715 | 5,8605626 | 5,7244756 |
| 15 | 6,8108645 | 6,6328941 | 6,4623788 | 6,2989263 | 6,1421680 | 5,9917578 | 5,8473701 |
| 16 | 6,9739862 | 6,7847948 | 6,6038751 | 6,4307720 | 6,2650596 | 6,1063386 | 5,9542349 |
| 17 | 7,1196305 | 6,9198176 | 6,7290930 | 6,5469357 | 6,3728593 | 6,2064093 | 6,0471608 |
| 18 | 7,2496701 | 7,0398378 | 6,8399053 | 6,6492826 | 6,4674205 | 6,2938072 | 6,1279659 |
| 19 | 7,3657769 | 7,1465225 | 6,9379693 | 6,7394560 | 6,5503688 | 6,3701373 | 6,1982312 |
| 20 | 7,4694436 | 7,2413534 | 7,0247516 | 6,8189040 | 6,6231306 | 6,4368012 | 6,2593315 |
| 21 | 7,5620032 | 7,3256474 | 7,1015501 | 6,8889022 | 6,6869566 | 6,4950229 | 6,3124622 |
| 22 | 7,6446457 | 7,4005755 | 7,1695133 | 6,9505746 | 6,7429444 | 6,5458715 | 6,3586627 |
| 23 | 7,7184337 | 7,4671782 | 7,2296578 | 7,0049115 | 6,7920565 | 6,5902808 | 6,3988372 |
| 24 | 7,7843158 | 7,5263806 | 7,2828830 | 7,0527855 | 6,8351373 | 6,6290662 | 6,4337714 |
| 25 | 7,8431391 | 7,5790050 | 7,3299850 | 7,0949652 | 6,8729274 | 6,6629399 | 6,4641491 |
| 26 | 7,8956599 | 7,6257822 | 7,3716681 | 7,1321279 | 6,9060767 | 6,6925239 | 6,4905644 |
| 27 | 7,9425535 | 7,6673620 | 7,4085559 | 7,1648704 | 6,9351550 | 6,7183615 | 6,5135343 |
| 28 | 7,9844228 | 7,7043218 | 7,4411999 | 7,1937184 | 6,9606623 | 6,7409271 | 6,5335081 |
| 29 | 8,0218060 | 7,7371749 | 7,4700884 | 7,2191352 | 6,9830371 | 6,7606350 | 6,5508766 |
| 30 | 8,0551840 | 7,7663777 | 7,4956534 | 7,2415288 | 7,0026641 | 6,7778472 | 6,5659796 |
| 31 | 8,0849857 | 7,7923357 | 7,5182774 | 7,2612589 | 7,0198808 | 6,7928796 | 6,5791127 |
| 32 | 8,1115944 | 7,8154095 | 7,5382986 | 7,2786422 | 7,0349832 | 6,8060084 | 6,5905328 |
| 33 | 8,1353521 | 7,8359196 | 7,5560164 | 7,2939579 | 7,0482308 | 6,8174746 | 6,6004633 |
| 34 | 8,1565644 | 7,8541507 | 7,5716960 | 7,3074519 | 7,0598516 | 6,8274887 | 6,6090985 |
| 35 | 8,1755039 | 7,8703562 | 7,5855716 | 7,3193408 | 7,0700453 | 6,8362347 | 6,6166074 |
| 36 | 8,1924142 | 7,8847611 | 7,5978510 | 7,3298157 | 7,0789871 | 6,8438731 | 6,6231369 |
| 37 | 8,2075127 | 7,8975654 | 7,6087177 | 7,3390447 | 7,0868308 | 6,8505442 | 6,6288147 |
| 38 | 8,2209935 | 7,9089470 | 7,6183343 | 7,3471759 | 7,0937112 | 6,8563705 | 6,6337519 |
| 39 | 8,2330299 | 7,9190640 | 7,6268445 | 7,3543400 | 7,0997467 | 6,8614589 | 6,6380451 |
| 40 | 8,2437767 | 7,9280569 | 7,6343756 | 7,3606520 | 7,1050409 | 6,8659030 | 6,6417784 |
| 41 | 8,2533720 | 7,9360506 | 7,6410404 | 7,3662132 | 7,1096850 | 6,8697843 | 6,6450247 |
| 42 | 8,2619393 | 7,9431561 | 7,6469384 | 7,3711130 | 7,1137588 | 6,8731740 | 6,6478475 |
| 43 | 8,2695887 | 7,9494721 | 7,6521579 | 7,3754299 | 7,1173323 | 6,8761345 | 6,6503022 |
| 44 | 8,2764185 | 7,9550863 | 7,6567769 | 7,3792334 | 7,1204669 | 6,8787201 | 6,6524367 |
| 45 | 8,2825165 | 7,9600767 | 7,6608645 | 7,3825845 | 7,1232166 | 6,8809783 | 6,6542928 |
| 46 | 8,2879611 | 7,9645126 | 7,6644819 | 7,3855370 | 7,1256286 | 6,8829504 | 6,6559068 |
| 47 | 8,2928225 | 7,9684557 | 7,6676831 | 7,3881383 | 7,1277444 | 6,8846729 | 6,6573102 |
| 48 | 8,2971629 | 7,9719606 | 7,6705160 | 7,3904303 | 7,1296003 | 6,8861772 | 6,6585306 |
| 49 | 8,3010383 | 7,9750761 | 7,6730230 | 7,3924496 | 7,1312284 | 6,8874910 | 6,6595919 |
| 50 | 8,3044985 | 7,9778454 | 7,6752416 | 7,3942287 | 7,1326565 | 6,8886384 | 6,6605147 |

## КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРИВЕДЕНИЯ ГОДОВОЙ РЕНТЫ

| Число периодов | Ставка процентов | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 15,50 | 16,00 | 16,50 | 17,00 | 17,50 | 18,00 | 18,50 |
| 1 | 0,8658009 | 0,8620690 | 0,8583691 | 0,8547009 | 0,8510638 | 0,8474576 | 0,8438819 |
| 2 | 1,6154120 | 1,6052319 | 1,5951666 | 1,5852144 | 1,5753735 | 1,5656421 | 1,5560184 |
| 3 | 2,2644260 | 2,2458895 | 2,2276108 | 2,2095850 | 2,1918072 | 2,1742729 | 2,1569776 |
| 4 | 2,8263428 | 2,7981806 | 2,7704814 | 2,7432350 | 2,7164317 | 2,6900618 | 2,6641161 |
| 5 | 3,3128509 | 3,2742937 | 3,2364647 | 3,1993462 | 3,1629206 | 3,1271710 | 3,0920811 |
| 6 | 3,7340701 | 3,6847359 | 3,6364504 | 3,5891848 | 3,5429111 | 3,4976026 | 3,4532330 |
| 7 | 4,0987620 | 4,0385654 | 3,9797858 | 3,9223801 | 3,8663073 | 3,8115276 | 3,7580025 |
| 8 | 4,4145125 | 4,3435909 | 4,2744942 | 4,2071625 | 4,1415382 | 4,0775658 | 4,0151920 |
| 9 | 4,6878896 | 4,6065439 | 4,5274628 | 4,4505662 | 4,3757772 | 4,3030218 | 4,2322295 |
| 10 | 4,9245798 | 4,8332275 | 4,7446033 | 4,6586036 | 4,5751295 | 4,4940863 | 4,4153836 |
| 11 | 5,1295063 | 5,0286444 | 4,9309900 | 4,8364134 | 4,7447911 | 4,6560053 | 4,5699440 |
| 12 | 5,3069319 | 5,1971072 | 5,0909785 | 4,9883875 | 4,8891839 | 4,7932249 | 4,7003746 |
| 13 | 5,4605471 | 5,3423338 | 5,2283077 | 5,1182799 | 5,0120714 | 4,9095126 | 4,8104427 |
| 14 | 5,5935472 | 5,4675291 | 5,3461869 | 5,2292991 | 5,1166565 | 5,0080615 | 4,9033272 |
| 15 | 5,7086989 | 5,5754562 | 5,4473707 | 5,3241872 | 5,2056651 | 5,0915776 | 4,9817107 |
| 16 | 5,8083973 | 5,6684967 | 5,5342238 | 5,4052882 | 5,2814171 | 5,1623539 | 5,0478571 |
| 17 | 5,8947163 | 5,7487040 | 5,6087758 | 5,4746053 | 5,3458869 | 5,2223338 | 5,1036769 |
| 18 | 5,9694513 | 5,8178483 | 5,6727689 | 5,5338507 | 5,4007548 | 5,2731642 | 5,1507822 |
| 19 | 6,0341570 | 5,8774554 | 5,7276986 | 5,5844878 | 5,4474509 | 5,3162409 | 5,1905335 |
| 20 | 6,0901792 | 5,9288409 | 5,7748486 | 5,6277673 | 5,4871923 | 5,3527465 | 5,2240789 |
| 21 | 6,1386833 | 5,9731387 | 5,8153207 | 5,6647584 | ,5,5210147 | 5,3836835 | 5,2523873 |
| 22 | 6,1806782 | 6,0113265 | 5,8500607 | 5,6963747 | 5,5497997 | 5,4099012 | 5,2762762 |
| 23 | 6,2170374 | 6,0442470 | 5,8798804 | 5,7233972 | 5,5742976 | 5,4321197 | 5,2964356 |
| 24 | 6,2485172 | 6,0726267 | 5,9054768 | 5,7464933 | 5,5951469 | 5,4503489 | 5,3134478 |
| 25 | 6,2757725 | 8,0970920 | 5,9274479 | 5,7662336 | 5,6128910 | 5,4669058 | 5,3278040 |
| 26 | 6,2993701 | 6,1181827 | 5,9463072 | 5,7831056 | 5,6279923 | 5,4804287 | 5,3399190 |
| 27 | 6,3198010 | 6,1363644 | 5,9624954 | 5,7975262 | 5,6408446 | 5,4918887 | 5,3501426 |
| 28 | 6,3374900 | 6,1520383 | 5,9763909 | 5,8098514 | 5,6517826 | 5,5016006 | 5,3587701 |
| 29 | 6,3528052 | 6,1655503 | 5,9883184 | 5,8203859 | 5,6610916 | 5,5098310 | 5,3660508 |
| 30 | 6,3660651 | 6,1771985 | 5,9985566 | 5,8293896 | 5,6690141 | 5,5168060 | 5,3721947 |
| 31 | 6,3775456 | 6,1872401 | 6,0073447 | 5,8370851 | 5,6757567 | 5,5227169 | 5,3773795 |
| 32 | 6,3874853 | 6,1958966 | 6,0148881 | 5,8436625 | 5,6814950 | 5,5277262 | 5,3817549 |
| 33 | 6,3960912 | 6,2033592 | 6,0213632 | 5,8492842 | 5,6863788 | 5,5319713 | 5,3854471 |
| 34 | 6,4035422 | 6,2097924 | 6,0269212 | 5,8540891 | 5,6905351 | 5,5355689 | 5,3885630 |
| 35 | 6,4099932 | 6,2153383 | 6,0316920 | 5,8581958 | 5,6940724 | 5,5386177 | 5,3911924 |
| 36 | 6,4155785 | 6,2201192 | 6,0357871 | 5,8617058 | 5,6970829 | 5,5412015 | 5,3934113 |
| 37 | 6,4204143 | 6,2242407 | 6,0393023 | 5,8647058 | 5,6996450 | 5,5433911 | 5,3952838 |
| 38 | 6,4246011 | 6,2277937 | 6,0423195 | 5,8672699 | 5,7018256 | 5,5452467 | 5,3968640 |
| 39 | 6,4282261 | 6,2308566 | 6,0449095 | 5,8694615 | 5,7036813 | 5,5468192 | 5,3981974 |
| 40 | 6,4313646 | 6,2334971 | 6,0471326 | 5,8713346 | 5,7052607 | 5,5481519 | 5,3993227 |
| 41 | 6,4340819 | 6,2357734 | 6,0490409 | 5,8729355 | 5,7066049 | 5,5492813 | 5,4002724 |
| 42 | 6,4364345 | 6,2377357 | 6,0506789 | 5,8743039 | 5,7077488 | 5,5502384 | 5,4010737 |
| 43 | 6,4384715 | 6,2394273 | 6,0520849 | 5,8754734 | 5,7087224 | 5,5510495 | 5,4017500 |
| 44 | 6,4402350 | 6,2408856 | 6,0532917 | 5,8764730 | 5,7095510 | 5,5517368 | 5,4023206 |
| 45 | 6,4417619 | 6,2421428 | 6,0543277 | 5,8773273 | 5,7102562 | 5,5523193 | 5,4028022 |
| 46 | 6,4430839 | 6,2432265 | 6,0552169 | 5,8780576 | 5,7108563 | 5,5528130 | 5,4032086 |
| 47 | 6,4442285 | 6,2441608 | 6,0559801 | 5,8786817 | 5,7113671 | 5,5532314 | 5,4035516 |
| 48 | 6,4452195 | 6,2449662 | 6,0566353 | 5,8792151 | 5,7118018 | 5,5535859 | 5,4038410 |
| 49 | 6,4460775 | 6,2456605 | 6,0571977 | 5,8796710 | 5,7121717 | 5,5538864 | 5,4040852 |
| 50 | 6,4468203 | 6,2462591 | 6,0576804 | 5,8800607 | 5,7124866 | 5,5541410 | 5,4042913 |

## КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРИВЕДЕНИЯ ГОДОВОЙ РЕНТЫ

| Число периодов | Ставка процентов | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 19,00 | 19,50 | 20,00 | 20,50 | 21,00 | 21,50 | 22,00 |
| 1 | 0,8403361 | 0,8368201 | 0,8333333 | 0,8298755 | 0,8264463 | 0,8230453 | 0,8196721 |
| 2 | 1,5465010 | 1,5370879 | 1,5277778 | 1,5185689 | 1,5094597 | 1,5004488 | 1,4915345 |
| 3 | 2,1399168 | 2,1230861 | 2,1064815 | 2,0900987 | 2,0739337 | 2,0579825 | 2,0422414 |
| 4 | 2,6385855 | 2,6134612 | 2,5887346 | 2,5643972 | 2,5404410 | 2,5168581 | 2,4936405 |
| 5 | 3,0576349 | 3,0238169 | 2,9906121 | 2,9580060 | 2,9259843 | 2,8945334 | 2,8636398 |
| 6 | 3,4097772 | 3,3672108 | 3,3255101 | 3,2846523 | 3,2446152 | 3,2053773 | 3,1669178 |
| 7 | 3,7056951 | 3,6545697 | 3,6045918 | 3,5557280 | 3,5079464 | 3,4612159 | 3,4155064 |
| 8 | 3,9543657 | 3,8950374 | 3,8371598 | 3,7806872 | 3,7255755 | 3,6717826 | 3,6192676 |
| 9 | 4,1633325 | 4,0962656 | 4,0309665 | 3,9673752 | 3,9054343 | 3,8450886 | 3,7862849 |
| 10 | 4,3389349 | 4,2646574 | 4,1924721 | 4,1223031 | 4,0540780 | 3,9877272 | 3,9231843 |
| 11 | 4,4864999 | 4,4055711 | 4,3270601 | 4,2508739 | 4,1769239 | 4,1051253 | 4,0353970 |
| 12 | 4,6105041 | 4,5234904 | 4,4392167 | 4,3575717 | 4,2784495 | 4,2017492 | 4,1273746 |
| 13 | 4,7147093 | 4,6221677 | 4,5326806 | 4,4461176 | 4,3623550 | 4,2812751 | 4,2027661 |
| 14 | 4,8022768 | 4,7047429 | 4,6105672 | 4,5195997 | 4,4316983 | 4,3467284 | 4,2645623 |
| 15 | 4,8758628 | 4,7738434 | 4,6754726 | 4,5805807 | 4,4890069 | 4,4005995 | 4,3152150 |
| 16 | 4,9376998 | 4,8316681 | 4,7295605 | 4,6311873 | 4,5363693 | 4,4449379 | 4,3567336 |
| 17 | 4,9896637 | 4,8800570 | 4,7746338 | 4,6731845 | 4,5755118 | 4,4814304 | 4,3907653 |
| 18 | 5,0333309 | 4,9205498 | 4,8121948 | 4,7080369 | 4,6078610 | 4,5114653 | 4,4186601 |
| 19 | 5,0700259 | 4,9544350 | 4,8434957 | 4,7369601 | 4,6345959 | 4,5361855 | 4,4415246 |
| 20 | 5,1008621 | 4,9827908 | 4,8695797 | 4,7609627 | 4,6566908 | 4,5565312 | 4,4602661 |
| 21 | 5,1267749 | 5,0065195 | 4,8913164 | 4,7808819 | 4,6749511 | 4,5732767 | 4,4756279 |
| 22 | 5,1485503 | 5,0263761 | 4,9094304 | 4,7974124 | 4,6900422 | 4,5870590 | 4,4882196 |
| 23 | 5,1668490 | 5,0429926 | 4,9245253 | 4,8111306 | 4,7025142 | 4,5984025 | 4,4985407 |
| 24 | 5,1822261 | 5,0568976 | 4,9371044 | 4,8225150 | 4,7128217 | 4,6077387 | 4,5070006 |
| 25 | 5,1951480 | 5,0685335 | 4,9475870 | 4,8319627 | 4,7213402 | 4,6154228 | 4,5139349 |
| 26 | 5,2060067 | 5,0782707 | 4,9563225 | 4,8398031 | 4,7283804 | 4,6217471 | 4,5196188 |
| 27 | 5,2151317 | 5,0864190 | 4,9636021 | 4,8463096 | 4,7341986 | 4,6269524 | 4,5242777 |
| 28 | 5,2227997 | 5,0932377 | 4,9696684 | 4,8517092 | 4,7390071 | 4,6312365 | 4,5280965 |
| 29 | 5,2292435 | 5,0989437 | 4,9747237 | 4,8561902 | 4,7429811 | 4,6347626 | 4,5312266 |
| 30 | 5,2346584 | 5,1037185 | 4,9789364 | 4,8599089 | 4,7462654 | 4,6376647 | 4,5337923 |
| 31 | 5,2392087 | 5,1077143 | 4,9824470 | 4,8629949 | 4,7489797 | 4,6400532 | 4,5358953 |
| 32 | 5,2430325 | 5,1110580 | 4,9853725 | 4,8655560 | 4,7512229 | 4,6420191 | 4,5376191 |
| 33 | 5,2462458 | 5,1138560 | 4,9878104 | 4,8676813 | 4,7530767 | 4,6436371 | 4,5390321 |
| 34 | 5,2489461 | 5,1161975 | 4,9898420 | 4,8694451 | 4,7546089 | 4,6449688 | 4,5401902 |
| 35 | 5,2512152 | 5,1181569 | 4,9915350 | 4,8709088 | 4,7558751 | 4,6460649 | 4,5411395 |
| 36 | 5,2531220 | 5,1197966 | 4,9929458 | 4,8721235 | 4,7569216 | 4,6469670 | 4,5419176 |
| 37 | 5,2547244 | 5,1211687 | 4,9941215 | 4,8731315 | 4,7577864 | 4,6477095 | 4,5425554 |
| 38 | 5,2560709 | 5,1223169 | 4,9951013 | 4,8739680 | 4,7585012 | 4,6483205 | 4,5430782 |
| 39 | 5,2572024 | 5,1232777 | 4,9959177 | 4,8746623 | 4,7590919 | 4,6488235 | 4,5435067 |
| 40 | 5,2581533 | 5,1240818 | 4,9965981 | 4,8752384 | 4,7595801 | 4,6492374 | 4,5438580 |
| 41 | 5,2589524 | 5,1247546 | 4,9971651 | 4,8757165 | 4,7599835 | 4,6495781 | 4,5441459 |
| 42 | 5,2596238 | 5,1253177 | 4,9976376 | 4,8761133 | 4,7603170 | 4,6498585 | 4,5443819 |
| 43 | 5,2601881 | 5,1257889 | 4,9980313 | 4,8764426 | 4,7605925 | 4,6500893 | 4,5445753 |
| 44 | 5,2606623 | 5,1261831 | 4,9983594 | 4,8767158 | 4,7608203 | 4,6502793 | 4,5447339 |
| 45 | 5,2610607 | 5,1265131 | 4,9986329 | 4,8769426 | 4,7610085 | 4,6504356 | 4,5448638 |
| 46 | 5,2613956 | 5,1267892 | 4,9988607 | 4,8771308 | 4,7611640 | 4,6505643 | 4,5449703 |
| 47 | 5,2616769 | 5,1270202 | 4,9990506 | 4,8772870 | 4,7612926 | 4,6506702 | 4,5450577 |
| 48 | 5,2619134 | 5,1272136 | 4,9992088 | 4,8774166 | 4,7613988 | 4,6507574 | 4,5451292 |
| 49 | 5,2621121 | 5,1273754 | 4,9993407 | 4,8775241 | 4,7614866 | 4,6508291 | 4,5451879 |
| 50 | 5,2622791 | 5,1275108 | 4,9994506 | 4,B776134 | 4,7615592 | 4,6508882 | 4,5452360 |

## КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРИВЕДЕНИЯ ГОДОВОЙ РЕНТЫ

| Число периодов | Ставка процентов | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 22,50 | 23,00 | 23,50 | 24,00 | 24,50 | 25,00 | 25,50 |
| 1 | 0,8163265 | 0,8130081 | 0,8097166 | 0,8064516 | 0,8032129 | 0,8000000 | 0,7968127 |
| 2 | 1,4827155 | 1,4739903 | 1,4653576 | 1,4568158 | 1,4483637 | 1,4400000 | 1,4317233 |
| 3 | 2,0267066 | 2,0113743 | 1,9962409 | 1,9813031 | 1,9665572 | 1,9520000 | 1,9376281 |
| 4 | 2,4707809 | 2,4482718 | 2,4261060 | 2,4042767 | 2,3827769 | 2,3616000 | 2,3407395 |
| 5 | 2,8332905 | 2,8034730 | 2,7741749 | 2,7453844 | 2,7170899 | 2,6892800 | 2,6619439 |
| 6 | 3,1292167 | 3,0922545 | 3,0560121 | 3,0204713 | 2,9856143 | 2,9514240 | 2,9178836 |
| 7 | 3,3707892 | 3,3270361 | 3,2842203 | 3,2423156 | 3,2012967 | 3,1611392 | 3,1218196 |
| 8 | 3,5679912 | 3,5179156 | 3,4690043 | 3,4212222 | 3,3745355 | 3,3289114 | 3,2843184 |
| 9 | 3,7289724 | 3,6731021 | 3,6186270 | 3,5655018 | 3,5136831 | 3,4631291 | 3,4137995 |
| 10 | 3,8603856 | 3,7992700 | 3,7397789 | 3,6818563 | 3,6254483 | 3,5705033 | 3,5169717 |
| 11 | 3,9676617 | 3,9018455 | 3,8378777 | 3,7756906 | 3,7152195 | 3,6564026 | 3,5991807 |
| 12 | 4,0552341 | 3,9852403 | 3,9173099 | 3,8513634 | 3,7873249 | 3,7251221 | 3,6646858 |
| 13 | 4,1267217 | 4,0530409 | 3,9816274 | 3,9123898 | 3,8452409 | 3,7800977 | 3,7168811 |
| 14 | 4,1850789 | 4,1081633 | 4,0337064 | 3,9616047 | 3,8917597 | 3,8240781 | 3,7584710 |
| 15 | 4,2327175 | 4,1529783 | 4,0758756 | 4,0012941 | 3,9291243 | 3,8592625 | 3,7916104 |
| 16 | 4,2716061 | 4,1894132 | 4,1100208 | 4,0333017 | 3,9591360 | 3,8874100 | 3,8180162 |
| 17 | 4,3033519 | 4,2190352 | 4,1376686 | 4,0591143 | 3,9832418 | 3,9099280 | 3,8390567 |
| 18 | 4,3292669 | 4,2431180 | 4,1600556 | 4,0799309 | 4,0026038 | 3,9279424 | 3,8558221 |
| 19 | 4,3504219 | 4,2626976 | 4,1781826 | 4,0967184 | 4,0181557 | 3,9423539 | 3,8691810 |
| 20 | 4,3676914 | 4,2786159 | 4,1928604 | 4,1102568 | 4,0306471 | 3,9538831 | 3,8798255 |
| 21 | 4,3817889 | 4,2915577 | 4,2047453 | 4,1211748 | 4,0406804 | 3,9631065 | 3,8883071 |
| 22 | 4,3932970 | 4,3020794 | 4,2143687 | 4,1299797 | 4,0487393 | 3,9704852 | 3,8950655 |
| 23 | 4,4026915 | 4,3106337 | 4,2221609 | 4,1370804 | 4,0552123 | 3,9763882 | 3,9004506 |
| 24 | 4,4103604 | 4,3175883 | 4,2284703 | 4,1428068 | 4,0604115 | 3,9811105 | 3,9047415 |
| 25 | 4,4166207 | 4,3232425 | 4,2335792 | 4,1474248 | 4,0645875 | 3,9848884 | 3,9081605 |
| 26 | 4,4217312 | 4,3278395 | 4,2377160 | 4,1511491 | 4,0679418 | 3,9879107 | 3,9108849 |
| 27 | 4,4259030 | 4,3315768 | 4,2410656 | 4,1541525 | 4,0706360 | 3,9903286 | 3,9130557 |
| 28 | 4,4293086 | 4,3346153 | 4,2437778 | 4,1565746 | 4,0728000 | 3,9922629 | 3,9147854 |
| 29 | 4,4320886 | 4,3370856 | 4,2459739 | 4,1585279 | 4,0745381 | 3,9938103 | 3,9161637 |
| 30 | 4,4343581 | 4,3390940 | 4,2477522 | 4,1601031 | 4,0759342 | 3,9950482 | 3,9172619 |
| 31 | 4,4362107 | 4,3407268 | 4,2491920 | 4,1613735 | 4,0770556 | 3,9960386 | 3,9181370 |
| 32 | 4,4377230 | 4,3420543 | 4,2503579 | 4,1623980 | 4,0779563 | 3,9968309 | 3,9188342 |
| 33 | 4,4389576 | 4,3431336 | 4,2513020 | 4,1632242 | 4,0786798 | 3,9974647 | 3,9193898 |
| 34 | 4,4399653 | 4,3440111 | 4,2520664 | 4,1638905 | 4,0792609 | 3,9979718 | 3,9198325 |
| 35 | 4,4407880 | 4,3447244 | 4,2526853 | 4,1644278 | 4,0797276 | 3,9983774 | 3,9201853 |
| 36 | 4,4414596 | 4,3453044 | 4,2531865 | 4,1648611 | 4,0801025 | 3,9987019 | 3,9204664 |
| 37 | 4,4420079 | 4,3457759 | 4,2535923 | 4,1652106 | 4,0804036 | 3,9989615 | 3,9206903 |
| 38 | 4,4424554 | 4,3461593 | 4,2539209 | 4,1654924 | 4,0806455 | 3,9991692 | 3,9208688 |
| 39 | 4,4428207 | 4,3464710 | 4,2541870 | 4,1657197 | 4,0808397 | 3,9993354 | 3,9210110 |
| 40 | 4,4431190 | 4,3467244 | 4,2544024 | 4,1659030 | 4,0809958 | 3,9994683 | 3,9211243 |
| 41 | 4,4433624 | 4,3469304 | 4,2545768 | 4,1660508 | 4,0811211 | 3,9995746 | 3,9212146 |
| 42 | 4,4435612 | 4,3470979 | 4,2547181 | 4,1661700 | 4,0812218 | 3,9996597 | 3,9212865 |
| 43 | 4,4437234 | 4,3472340 | 4,2548325 | 4,1662661 | 4,0813026 | 3,9997278 | 3,9213438 |
| 44 | 4,4438558 | 4,3473448 | 4,2549251 | 4,1663436 | 4,0813676 | 3,9997822 | 3,9213895 |
| 45 | 4,4439639 | 4,3474348 | 4,2550001 | 4,1664062 | 4,0814197 | 3,9998258 | 3,9214259 |
| 46 | 4,4440522 | 4,3475079 | 4,2550608 | 4,1664566 | 4,0814616 | 3,9998606 | 3,9214549 |
| 47 | 4,4441242 | 4,3475674 | 4,2551099 | 4,1664972 | 4,0814953 | 3,9998885 | 3,9214780 |
| 48 | 4,4441831 | 4,3476158 | 4,2551497 | 4,1665300 | 4,0815223 | 3,9999108 | 3,9214964 |
| 49 | 4,4442311 | 4,3476551 | 4,2551820 | 4,1665565 | 4,0815440 | 3,9999286 | 3,9215111 |
| 50 | 4,4442703 | 4,3476871 | 4,2552081 | 4,1665778 | 4,0815615 | 3,9999429 | 3,9215228 |

## КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРИВЕДЕНИЯ ГОДОВОЙ РЕНТЫ

| Число периодов | Ставка процентов | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 26,00 | 26,50 | 27,00 | 27,50 | 28,00 | 2830 | 29,00 |
| 1 | 0,7936508 | 0,7905138 | 0,7874016 | 0,7843137 | 0,7812500 | 0,7782101 | 0,7751938 |
| 2 | 1,4235324 | 1,4154260 | 1,4074028 | 1,3994617 | 1,3916016 | 1,3838211 | 1,3761192 |
| 3 | 1,9234384 | 1,9094276 | 1,8955928 | 1,8819308 | 1,8684387 | 1,8551137 | 1,8419529 |
| 4 | 2,3201892 | 2,2999428 | 2,2799943 | 2,2603379 | 2,2409678 | 2,2218784 | 2,2030643 |
| 5 | 2,6350708 | 2,6086504 | 2,5826727 | 2,5571277 | 2,5320061 | 2,5072983 | 2,4829955 |
| 6 | 2,8849768 | 2,8526881 | 2,8210021 | 2,7899041 | 2,7593797 | 2,7294150 | 2,6999965 |
| 7 | 3,0833149 | 3,0456032 | 3,0086631 | 2,9724738 | 2,9370154 | 2,9022685 | 2,8682144 |
| 8 | 3,2407261 | 3,1981053 | 3,1564276 | 3,1156657 | 3,0757933 | 3,0367848 | 2,9986158 |
| 9 | 3,3656557 | 3,3186603 | 3,2727777 | 3,2279731 | 3,1842135 | 3,1414668 | 3,0997022 |
| 10 | 3,4648061 | 3,4139607 | 3,3643919 | 3,3160574 | 3,2689168 | 3,2229314 | 3,1780637 |
| 11 | 3,5434969 | 3,4892970 | 3,4365290 | 3,3851430 | 3,3350913 | 3,2863279 | 3,2388091 |
| 12 | 3,6059499 | 3,5488514 | 3,4933299 | 3,4393279 | 3,3867900 | 3,3356637 | 3,2858985 |
| 13 | 3,6555158 | 3,5959300 | 3,5380551 | 3,4818258 | 3,4271797 | 3,3740574 | 3,3224019 |
| 14 | 3,6948538 | 3,6331462 | 3,5732717 | 3,5151575 | 3,4587342 | 3,4039357 | 3,3506992 |
| 15 | 3,7260745 | 3,6625662 | 3,6010013 | 3,5413000 | 3,4833861 | 3,4271873 | 3,3726350 |
| 16 | 3,7508527 | 3,6858231 | 3,6228357 | 3,5618039 | 3,5026454 | 3,4452820 | 3,3896396 |
| 17 | 3,7705180 | 3,7042080 | 3,6400281 | 3,5778854 | 3,5176917 | 3,4593634 | 3,4028214 |
| 18 | 3,7861254 | 3,7187415 | 3,6535654 | 3,5904984 | 3,5294466 | 3,4703217 | 3,4130398 |
| 19 | 3,7985123 | 3,7302304 | 3,6642248 | 3,6003909 | 3,5386302 | 3,4788496 | 3,4209611 |
| 20 | 3,8083431 | 3,7393126 | 3,6726179 | 3,6081497 | 3,5458048 | 3,4854861 | 3,4271016 |
| 21 | 3,8161453 | 3,7464922 | 3,6792267 | 3,6142351 | 3,5514100 | 3,4906506 | 3,4318617 |
| 22 | 3,8223375 | 3,7521677 | 3,6844305 | 3,6190079 | 3,5557891 | 3,4946697 | 3,4355517 |
| 23 | 3,8272520 | 3,7566543 | 3,6885279 | 3,6227513 | 3,5592102 | 3,4977975 | 3,4384122 |
| 24 | 3,8311524 | 3,7602010 | 3,6917543 | 3,6256873 | 3,5618830 | 3,5002315 | 3,4406296 |
| 25 | 3,8342479 | 3,7630048 | 3,6942947 | 3,6279900 | 3,5639711 | 3,5021257 | 3,4423485 |
| 26 | 3,8367047 | 3,7652212 | 3,6962950 | 3,6297961 | 3,5656024 | 3,5035997 | 3,4436810 |
| 27 | 3,8386545 | 3,7669733 | 3,6978701 | 3,6312126 | 3,5668769 | 3,5047469 | 3,4447140 |
| 28 | 3,8402020 | 3,7683583 | 3,6991103 | 3,6323236 | 3,5678726 | 3,5056396 | 3,4455147 |
| 29 | 3,8414302 | 3,7694532 | 3,7000869 | 3,6331950 | 3,5686504 | 3,5063343 | 3,4461354 |
| 30 | 3,8424049 | 3,7703187 | 3,7008558 | 3,6338784 | 3,5692582 | 3,5068750 | 3,4466166 |
| 31 | 3,8431785 | 3,7710030 | 3,7014613 | 3,6344145 | 3,5697329 | 3,5072957 | 3,4469896 |
| 32 | 3,8437924 | 3,7715438 | 3,7019380 | 3,6348349 | 3,5701039 | 3,5076231 | 3,4472788 |
| 33 | 3,8442797 | 3,7719714 | 3,7023134 | 3,6351646 | 3,5703936 | 3,5078779 | 3,4475029 |
| 34 | 3,8446664 | 3,7723094 | 3,7026090 | 3,6354232 | 3,5706200 | 3,5080762 | 3,4476767 |
| 35 | 3,8449734 | 3,7725766 | 3,7028417 | 3,6356261 | 3,5707969 | 3,5082305 | 3,4478114 |
| 36 | 3,8452170 | 3,7727878 | 3,7030250 | 3,6357851 | 3,5709351 | 3,5083506 | 3,4479158 |
| 37 | 3,8454103 | 3,7729548 | 3,7031693 | 3,6359099 | 3,5710430 | 3,5084440 | 3,4479967 |
| 38 | 3,8455637 | 3,7730868 | 3,7032829 | 3,6360078 | 3,5711274 | 3,5085168 | 3,4480595 |
| 39 | 3,8456855 | 3,7731912 | 3,7033724 | 3,6360845 | 3,5711933 | 3,5085734 | 3,4481081 |
| 40 | 3,8457821 | 3,7732736 | 3,7034428 | 3,6361447 | 3,5712447 | 3,5086174 | 3,4481458 |
| 41 | 3,8458588 | 3,7733388 | 3,7034983 | 3,6361919 | 3,5712849 | 3,5086517 | 3,4481751 |
| 42 | 3,8459197 | 3,7733904 | 3,7035419 | 3,6362290 | 3,5713164 | 3,5086783 | 3,4481977 |
| 43 | 3,8459680 | 3,7734311 | 3,7035763 | 3,6362580 | 3,5713409 | 3,5086991 | 3,4482153 |
| 44 | 3,8460064 | 3,7734634 | 3,7036034 | 3,6362808 | 3,5713601 | 3,5087153 | 3,4482289 |
| 45 | 3,8460368 | 3,7734888 | 3,7036247 | 3,6362987 | 3,5713751 | 3,5087278 | 3,4482395 |
| 46 | 3,8460610 | 3,7735089 | 3,7036415 | 3,6363127 | 3,5713868 | 3,5087376 | 3,4482476 |
| 47 | 3,8460801 | 3,7735249 | 3,7036547 | 3,6363237 | 3,5713959 | 3,5087452 | 3,4482540 |
| 48 | 3,8460953 | 3,7735374 | 3,7036652 | 3,6363323 | 3,5714031 | 3,5087511 | 3,4482589 |
| 49 | 3,8461074 | 3,7735474 | 3,7036733 | 3,6363391 | 3,5714086 | 3,5087558 | 3,4482627 |
| 50 | 3,8461170 | 3,7735552 | 3,7036798 | 3,6363444 | 3,5714130 | 3,5087593 | 3,4482657 |

# КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРИВЕДЕНИЯ ГОДОВОЙ РЕНТЫ

| Число периодов | Ставка процентов | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 29,50 | 30,00 | 30,50 | 31,00 | 31,50 | 32,00 | 32,50 |
| 1 | 0,7722008 | 0,7692308 | 0,7662835 | 0,7633588 | 0,7604563 | 0,7575758 | 0,7547170 |
| 2 | 1,3684948 | 1,3609467 | 1,3534740 | 1,3460754 | 1,3387500 | 1,3314968 | 1,3243147 |
| 3 | 1,8289535 | 1,8161129 | 1,8034283 | 1,7908973 | 1,7785171 | 1,7662854 | 1,7541998 |
| 4 | 2,1845201 | 2,1662407 | 2,1482209 | 2,1304559 | 2,1129408 | 2,0956708 | 2,0786413 |
| 5 | 2,4590889 | 2,4355698 | 2,4124298 | 2,3896610 | 2,3672553 | 2,3452051 | 2,3235029 |
| 6 | 2,6711111 | 2,6427460 | 2,6148888 | 2,5875275 | 2,5606505 | 2,5342463 | 2,5083041 |
| 7 | 2,8348348 | 2,8021123 | 2,7700297 | 2,7385706 | 2,7077190 | 2,6774593 | 2,6477767 |
| 8 | 2,9612624 | 2,9247018 | 2,8889117 | 2,8538707 | 2,8195582 | 2,7859540 | 2,7530390 |
| 9 | 3,0588899 | 3,0190013 | 2,9800089 | 2,9418860 | 2,9046070 | 2,8681470 | 2,8324823 |
| 10 | 3,1342779 | 3,0915395 | 3,0498153 | 3,0090733 | 2,9692829 | 2,9304144 | 2,8924394 |
| 11 | 3,1924926 | 3,1473381 | 3,1033067 | 3,0603613 | 3,0184661 | 2,9775867 | 2,9376901 |
| 12 | 3,2374460 | 3,1902601 | 3,1442963 | 3,0995124 | 3,0558677 | 3,0133232 | 2,9718416 |
| 13 | 3,2721591 | 3,2232770 | 3,1757060 | 3,1293988 | 3,0843101 | 3,0403964 | 2,9976163 |
| 14 | 3,2989645 | 3,2486746 | 3,1997747 | 3,1522128 | 3,1059392 | 3,0609064 | 3,0170689 |
| 15 | 3,3196637 | 3,2682112 | 3,2182182 | 3,1696281 | 3,1223872 | 3,0764442 | 3,0317501 |
| 16 | 3,3356477 | 3,2832394 | 3,2323511 | 3,1829222 | 3,1348952 | 3,0882153 | 3,0428303 |
| 17 | 3,3479905 | 3,2947995 | 3,2431809 | 3,1930704 | 3,1444070 | 3,0971328 | 3,0511927 |
| 18 | 3,3575216 | 3,3036920 | 3,2514796 | 3,2008171 | 3,1516403 | 3,1038885 | 3,0575039 |
| 19 | 3,3648816 | 3,3105323 | 3,2578388 | 3,2067306 | 3,1571409 | 3,1090064 | 3,0622671 |
| 20 | 3,3705649 | 3,3157941 | 3,2627117 | 3,2112447 | 3,1613239 | 3,1128837 | 3,0658620 |
| 21 | 3,3749536 | 3,3198416 | 3,2664458 | 3,2146906 | 3,1645049 | 3,1158210 | 3,0685751 |
| 22 | 3,3783425 | 3,3229551 | 3,2693071 | 3,2173211 | 3,1669239 | 3,1180462 | 3,0706227 |
| 23 | 3,3809595 | 3,3253500 | 3,2714997 | 3,2193291 | 3,1687634 | 3,1197320 | 3,0721681 |
| 24 | 3,3829803 | 3,3271923 | 3,2731798 | 3,2208619 | 3,1701623 | 3,1210091 | 3,0733344 |
| 25 | 3,3845408 | 3,3286095 | 3,2744673 | 3,2220320 | 3,1712261 | 3,1219766 | 3,0742146 |
| 26 | 3,3857458 | 3,3296996 | 3,2754539 | 3,2229252 | 3,1720350 | 3,1227095 | 3,0748790 |
| 27 | 3,3866763 | 3,3305382 | 3,2762099 | 3,2236070 | 3,1726502 | 3,1232648 | 3,0753804 |
| 28 | 3,3873948 | 3,3311832 | 3,2767892 | 3,2241275 | 3,1731180 | 3,1236854 | 3,0757588 |
| 29 | 3,3879497 | 3,3316794 | 3,2772331 | 3,2245248 | 3,1734738 | 3,1240041 | 3,0760443 |
| 30 | 3,3883781 | 3,3320611 | 3,2775732 | 3,2248281 | 3,1737443 | 3,1242455 | 3,0762599 |
| 31 | 3,3887090 | 3,3323547 | 3,2778339 | 3,2250596 | 3,1739501 | 3,1244284 | 3,0764226 |
| 32 | 3,3889645 | 3,3325805 | 3,2780336 | 3,2252363 | 3,1741065 | 3,1245670 | 3,0765453 |
| 33 | 3,3891617 | 3,3327542 | 3,2781867 | 3,2253713 | 3,1742255 | 3,1246720 | 3,0766380 |
| 34 | 3,3893141 | 3,3328879 | 3,2783040 | 3,2254742 | 3,1743160 | 3,1247515 | 3,0767079 |
| 35 | 3,3894317 | 3,3329907 | 3,2783939 | 3,2255529 | 3,1743848 | 3,1248117 | 3,0767607 |
| 36 | 3,3895226 | 3,3330697 | 3,2784627 | 3,2256129 | 3,1744371 | 3,1248574 | 3,0768005 |
| 37 | 3,3895927 | 3,3331306 | 3,2785155 | 3,2256587 | 3,1744769 | 3,1248920 | 3,0768306 |
| 38 | 3,3896469 | 3,3331774 | 3,2785559 | 3,2256936 | 3,1745071 | 3,1249181 | 3,0768533 |
| 39 | 3,3896887 | 3,3332134 | 3,2785869 | 3,2257203 | 3,1745301 | 3,1249380 | 3,0768704 |
| 40 | 3,3897210 | 3,3332410 | 3,2786107 | 3,2257407 | 3,1745476 | 3,1249530 | 3,0768833 |
| 41 | 3,3897460 | 3,3332623 | 3,2786289 | 3,2257563 | 3,1745609 | 3,1249644 | 3,0768931 |
| 42 | 3,3897652 | 3,3332787 | 3,2786428 | 3,2257681 | 3,1745711 | 3,1249730 | 3,0769004 |
| 43 | 3,3897801 | 3,3332913 | 3,2786535 | 3,2257772 | 3,1745787 | 3,1249796 | 3,0769060 |
| 44 | 3,3897916 | 3,3333010 | 3,2786617 | 3,2257841 | 3,1745846 | 3,1249845 | 3,0769102 |
| 45 | 3,3898004 | 3,3333085 | 3,2786680 | 3,2257894 | 3,1745890 | 3,1249883 | 3,0769133 |
| 46 | 3,3898073 | 3,3333142 | 3,2786728 | 3,2257934 | 3,1745924 | 3,1249911 | 3,0769157 |
| 47 | 3,3898126 | 3,3333186 | 3,2786764 | 3,2257965 | 3,1745950 | 3,1249933 | 3,0769175 |
| 48 | 3,3898167 | 3,3333220 | 3,2786793 | 3,2257989 | 3,1745970 | 3,1249949 | 3,0769189 |
| 49 | 3,3898198 | 3,3333246 | 3,2786814 | 3,2258007 | 3,1745985 | 3,1249961 | 3,0769199 |
| 50 | 3,3898223 | 3,3333266 | 3,2786831 | 3,2258020 | 3,1745996 | 3,1249971 | 3,0769207 |

# КОЭФФИЦИЕНТЫ НАРАЩЕНИЯ ГОДОВОЙ РЕНТЫ

| Число периодов | Ставка процентов | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1,50 | 2,00 | 2,50 | 3,00 | 3,50 | 4,00 | 4,50 |
| 1 | 0,985221 | 0,980392 | 0,975609 | 0,970873 | 0,966183 | 0,961538 | 0,956937 |
| 2 | 1,955883 | 1,941561 | 1,927424 | 1,913470 | 1,899694 | 1,886095 | 1,872668 |
| 3 | 2,912200 | 2,883883 | 2,856024 | 2,828611 | 2,801637 | 2,775091 | 2,748964 |
| 4 | 3,854385 | 3,807729 | 3,761974 | 3,717098 | 3,673079 | 3,629895 | 3,587526 |
| 5 | 4,782645 | 4,713460 | 4,645828 | 4,579707 | 4,515052 | 4,451822 | 4,389977 |
| 6 | 5,697187 | 5,601431 | 5,508125 | 5,417191 | 5,328553 | 5,242137 | 5,157872 |
| 7 | 6,598214 | 6,471991 | 6,349391 | 6,230283 | 6,114544 | 6,002055 | 5,892701 |
| 8 | 7,485925 | 7,325481 | 7,170137 | 7,019692 | 6,873956 | 6,732745 | 6,595886 |
| 9 | 8,360517 | 8,162237 | 7,970866 | 7,786109 | 7,607687 | 7,435332 | 7,268790 |
| 10 | 9,222185 | 8,982585 | 8,752064 | 8,530203 | 8,316605 | 8,110896 | 7,912718 |
| 11 | 10,07112 | 9,786848 | 9,514209 | 9,252624 | 9,001551 | 8,760477 | 8,528917 |
| 12 | 10,90751 | 10,57534 | 10,25776 | 9,954004 | 9,663334 | 9,385074 | 9,118581 |
| 13 | 11,73153 | 11,34837 | 10,98318 | 10,63496 | 10,30274 | 9,985648 | 9,682852 |
| 14 | 12,54338 | 12,10625 | 11,69091 | 11,29607 | 10,92052 | 10,56312 | 10,22283 |
| 15 | 13,34323 | 12,84926 | 12,38138 | 11,93794 | 11,51741 | 11,11839 | 10,73955 |
| 16 | 14,13126 | 13,57771 | 13,05500 | 12,56110 | 12,09412 | 11,65230 | 11,23402 |
| 17 | 14,90765 | 14,29187 | 13,71220 | 13,16612 | 12,65132 | 12,16567 | 11,70719 |
| 18 | 15,67256 | 14,99203 | 14,35336 | 13,75351 | 13,18968 | 12,65930 | 12,15999 |
| 19 | 16,42617 | 15,67846 | 14,97889 | 14,32380 | 13,70984 | 13,13394 | 12,59329 |
| 20 | 17,16864 | 16,35143 | 15,58916 | 14,87747 | 14,21240 | 13,59033 | 13,00794 |
| 21 | 17,90014 | 17,01121 | 16,18455 | 15,41502 | 14,69797 | 14,02916 | 13,40472 |
| 22 | 18,62082 | 17,65805 | 16,76541 | 15,93692 | 15,16712 | 14,45112 | 13,78442 |
| 23 | 19,33086 | 18,29220 | 17,33211 | 16,44361 | 15,62041 | 14,85684 | 14,14777 |
| 24 | 20,03041 | 18,91393 | 17,88499 | 16,93554 | 16,05837 | 15,24696 | 14,49548 |
| 25 | 20,71961 | 19,52346 | 18,42438 | 17,41315 | 16,48151 | 15,62208 | 14,82821 |
| 26 | 21,39863 | 20,12104 | 18,95061 | 17,87684 | 16,89035 | 15,98277 | 15,14661 |
| 27 | 22,06762 | 20,70690 | 19,46401 | 18,32703 | 17,28536 | 16,32959 | 15,45130 |
| 28 | 22,72672 | 21,28127 | 19,96489 | 18,76411 | 17,66702 | 16,66306 | 15,74287 |
| 29 | 23,37608 | 21,84438 | 20,45355 | 19,18845 | 18,03577 | 16,98371 | 16,02189 |
| 30 | 24,01584 | 22,39646 | 20,93029 | 19,60044 | 18,39205 | 17,29203 | 16,28889 |
| 31 | 24,64615 | 22,93770 | 21,39541 | 20,00043 | 18,73628 | 17,58849 | 16,54439 |
| 32 | 25,26714 | 23,46833 | 21,84918 | 20,38877 | 19,06887 | 17,87355 | 16,78889 |
| 33 | 25,87895 | 23,98856 | 22,29188 | 20,76579 | 19,39021 | 18,14765 | 17,02286 |
| 34 | 26,48173 | 24,49859 | 22,72379 | 21,13184 | 19,70068 | 18,41120 | 17,24676 |
| 35 | 27,07559 | 24,99862 | 23,14516 | 21,48722 | 20,00066 | 18,66461 | 17,46101 |
| 36 | 27,66068 | 25,48884 | 23,55625 | 21,83225 | 20,29049 | 18,90828 | 17,66604 |
| 37 | 28,23713 | 25,96945 | 23,95732 | 22,16724 | 20,57053 | 19,14258 | 17,86224 |
| 38 | 28,80505 | 26,44064 | 24,34860 | 22,49246 | 20,84109 | 19,36786 | 18,04999 |
| 39 | 29,36458 | 26,90259 | 24,73034 | 22,80822 | 21,10250 | 19,58448 | 18,22966 |
| 40 | 29,91585 | 27,35548 | 25,10278 | 23,11477 | 21,35507 | 19,79277 | 18,40158 |
| 41 | 30,45896 | 27,79949 | 25,46612 | 23,41240 | 21,59910 | 19,99305 | 18,56611 |
| 42 | 30,99405 | 28,23479 | 25,82061 | 23,70136 | 21,83488 | 20,18563 | 18,72355 |
| 43 | 31,52123 | 28,66156 | 26,16645 | 23,98190 | 22,06269 | 20,37079 | 18,87421 |
| 44 | 32,04062 | 29,07996 | 26,50385 | 24,25427 | 22,28279 | 20,54884 | 19,01838 |
| 45 | 32,55234 | 29,49016 | 26,83302 | 24,51871 | 22,49545 | 20,72004 | 19,15635 |
| 46 | 33,05649 | 29,89231 | 27,15417 | 24,77545 | 22,70092 | 20,88465 | 19,28837 |
| 47 | 33,55319 | 30,28658 | 27,46748 | 25,02471 | 22,89944 | 21,04294 | 19,41471 |
| 48 | 34,04255 | 30,67312 | 27,77315 | 25,26671 | 23,09124 | 21,19513 | 19,53561 |
| 49 | 34,52468 | 31,05208 | 28,07137 | 25,50166 | 23,27656 | 21,34147 | 19,65130 |
| 50 | 34,99969 | 31,42361 | 28,36231 | 25,72976 | 23,45562 | 21,48218 | 19,76201 |

# КОЭФФИЦИЕНТЫ НАРАЩЕНИЯ ГОДОВОЙ РЕНТЫ

| Число периодов | Ставка процентов | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 5,00 | 5,50 | 6,00 | 6,50 | 7,00 | 7,50 | 8,00 |
| 1 | 1,0000000 | 1,0000000 | 1,0000000 | 1,0000000 | 1,0000000 | 1,0000000 | 1,0000000 |
| 2 | 2,0500000 | 2,0550000 | 2,0600000 | 2,0650000 | 2,0700000 | 2,0750000 | 2,0800000 |
| 3 | 3,1525000 | 3,1680250 | 3,1836000 | 3,1992250 | 3,2149000 | 3,2306250 | 3,2464000 |
| 4 | 4,3101250 | 4,3422664 | 4,3746160 | 4,4071746 | 4,4399430 | 4,4729219 | 4,5061120 |
| 5 | 5,5256313 | 5,5810910 | 5,6370930 | 5,6936410 | 5,7507390 | 5,8083910 | 5,8666010 |
| 6 | 6,8019128 | 6,8880510 | 6,9753185 | 7,0637276 | 7,1532907 | 7,2440203 | 7,3359290 |
| 7 | 8,1420085 | 8,2668938 | 8,3938376 | 8,5228699 | 8,6540211 | 8,7873219 | 8,9228034 |
| 8 | 9,5491089 | 9,7215730 | 9,8974679 | 10,076856 | 10,259803 | 10,446371 | 10,636628 |
| 9 | 11,026564 | 11,256260 | 11,491316 | 11,731852 | 11,977989 | 12,229849 | 12,487558 |
| 10 | 12,577893 | 12,875354 | 13,180795 | 13,494423 | 13,816448 | 14,147087 | 14,486562 |
| 11 | 14,206787 | 14,583498 | 14,971643 | 15,371560 | 15,783599 | 16,208119 | 16,645487 |
| 12 | 15,917127 | 16,385591 | 16,869941 | 17,370711 | 17,888451 | 18,423728 | 18,977126 |
| 13 | 17,712983 | 18,286798 | 18,882138 | 19,499808 | 20,140643 | 20,805508 | 21,495297 |
| 14 | 19,598632 | 20,292572 | 21,015066 | 21,767295 | 22,550488 | 23,365921 | 24,214920 |
| 15 | 21,578564 | 22,408663 | 23,275970 | 24,182169 | 25,129022 | 26,118365 | 27,152114 |
| 16 | 23,657492 | 24,641140 | 25,672528 | 26,754010 | 27,888054 | 29,077242 | 30,324283 |
| 17 | 25,840366 | 26,996403 | 28,212880 | 29,493021 | 30,840217 | 32,258035 | 33,750226 |
| 18 | 28,132385 | 29,481205 | 30,905653 | 32,410067 | 33,999033 | 35,677388 | 37,450244 |
| 19 | 30,539004 | 32,102671 | 33,759992 | 35,516722 | 37,378965 | 39,353192 | 41,446263 |
| 20 | 33,065954 | 34,868318 | 36,785591 | 38,825309 | 40,995492 | 43,304681 | 45,761964 |
| 21 | 35,719252 | 37,786076 | 39,992727 | 42,348954 | 44,865177 | 47,552532 | 50,422921 |
| 22 | 38,505214 | 40,864310 | 43,392290 | 46,101636 | 49,005739 | 52,118972 | 55,456755 |
| 23 | 41,430475 | 44,111847 | 46,995828 | 50,098242 | 53,436141 | 57,027895 | 60,893296 |
| 24 | 44,501999 | 47,537998 | 50,815577 | 54,354628 | 58,176671 | 62,304987 | 66,764759 |
| 25 | 47,727099 | 51,152588 | 54,864512 | 58,887679 | 63,249038 | 67,977862 | 73,105940 |
| 26 | 51,113454 | 54,965981 | 59,156383 | 63,715378 | 68,676470 | 74,076201 | 79,954415 |
| 27 | 54,669126 | 58,989109 | 63,705766 | 68,856877 | 74,483823 | 80,631916 | 87,350768 |
| 28 | 58,402583 | 63,233510 | 68,528112 | 74,332574 | 80,697691 | 87,679310 | 95,338830 |
| 29 | 62,322712 | 67,711354 | 73,639798 | 80,164192 | 87,346529 | 95,255258 | 103,96594 |
| 30 | 66,438848 | 72,435478 | 79,058186 | 86,374864 | 94,460786 | 103,39940 | 113,28321 |
| 31 | 70,760790 | 77,419429 | 84,801677 | 92,989230 | 102,07304 | 112,15436 | 123,34587 |
| 32 | 75,298829 | 82,677498 | 90,889778 | 100,03353 | 110,21815 | 121,56593 | 134,21354 |
| 33 | 80,063771 | 88,224760 | 97,343165 | 107,53571 | 118,93343 | 131,68338 | 145,95062 |
| 34 | 85,066959 | 94,077122 | 104,18375 | 115,52553 | 128,25876 | 142,55963 | 158,62667 |
| 35 | 90,320307 | 100,25136 | 111,43478 | 124,03469 | 138,23688 | 154,25161 | 172,31680 |
| 36 | 95,836323 | 106,76519 | 119,12087 | 133,09695 | 148,91346 | 166,82048 | 187,10215 |
| 37 | 101,62814 | 113,63727 | 127,26812 | 142,74825 | 160,33740 | 180,33201 | 203,07032 |
| 38 | 107,70955 | 120,88732 | 135,90421 | 153,02688 | 172,56102 | 194,85691 | 220,31595 |
| 39 | 114,09502 | 128,53613 | 145,05846 | 163,97363 | 185,64029 | 210,47118 | 238,94122 |
| 40 | 120,79977 | 136,60561 | 154,76197 | 175,63192 | 199,63511 | 227,25652 | 259,05652 |
| 41 | 127,83976 | 145,11892 | 165,04768 | 188,04799 | 214,60957 | 245,30076 | 280,78104 |
| 42 | 135,23175 | 154,10046 | 175,95054 | 201,27111 | 230,63224 | 264,69832 | 304,24352 |
| 43 | 142,99334 | 163,57599 | 187,50758 | 215,35373 | 247,77650 | 285,55069 | 329,58301 |
| 44 | 151,14301 | 173,57267 | 199,75803 | 230,35172 | 266,12086 | 307,96699 | 356,94965 |
| 45 | 159,70016 | 184,11917 | 212,74351 | 246,32459 | 285,74931 | 332,06452 | 386,50562 |
| 46 | 168,68516 | 195,24572 | 226,50812 | 263,33568 | 306,75176 | 357,96935 | 418,42607 |
| 47 | 178,11942 | 206,98423 | 241,09861 | 281,45250 | 329,22439 | 385,81706 | 452,90015 |
| 48 | 188,02539 | 219,36837 | 256,56453 | 300,74692 | 353,27009 | 415,75333 | 490,13216 |
| 49 | 198,42666 | 232,43363 | 272,95840 | 321,29547 | 378,99900 | 447,93483 | 530,34274 |
| 50 | 209,34800 | 246,21748 | 290,33590 | 343,17967 | 406,52893 | 482,52995 | 573,77016 |

# КОЭФФИЦИЕНТЫ НАРАЩЕНИЯ ГОДОВОЙ РЕНТЫ

| Число периодов | Ставка процентов | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 8,50 | 9,00 | 9,50 | 10,00 | 10,50 | 11,00 | 11,50 |
| 1 | 1,0000000 | 1,0000000 | 1,0000000 | 1,0000000 | 1,0000000 | 1,0000000 | 1,0000000 |
| 2 | 2,0850000 | 2,0900000 | 2,0950000 | 2,1000000 | 2,1050000 | 2,1100000 | 2,1150000 |
| 3 | 3,2622250 | 3,2781000 | 3,2940250 | 3,3100000 | 3,3260250 | 3,3421000 | 3,3582250 |
| 4 | 4,5395141 | 4,5731290 | 4,6069574 | 4,6410000 | 4,6752576 | 4,7097310 | 4,7444209 |
| 5 | 5,9253728 | 5,9847106 | 6,0446183 | 6,1051000 | 6,1661597 | 6,2278014 | 6,2900293 |
| 6 | 7,4290295 | 7,5233346 | 7,6188571 | 7,7156100 | 7,8136064 | 7,9128596 | 8,0133826 |
| 7 | 9,0604970 | 9,2004347 | 9,3426485 | 9,4871710 | 9,6340351 | 9,7832741 | 9,9349216 |
| 8 | 10,830639 | 11,028474 | 11,230200 | 11,435888 | 11,645609 | 11,859434 | 12,077438 |
| 9 | 12,751244 | 13,021036 | 13,297069 | 13,579477 | 13,868398 | 14,163972 | 14,466343 |
| 10 | 14,835099 | 15,192930 | 15,560291 | 15,937425 | 16,324579 | 16,722009 | 17,129972 |
| 11 | 17,096083 | 17,560293 | 18,038518 | 18,531167 | 19,038660 | 19,561430 | 20,099919 |
| 12 | 19,549250 | 20,140720 | 20,752178 | 21,384284 | 22,037720 | 22,713187 | 23,411410 |
| 13 | 22,210936 | 22,953385 | 23,723634 | 24,522712 | 25,351680 | 26,211638 | 27,103722 |
| 14 | 25,098866 | 26,019189 | 26,977380 | 27,974983 | 29,013607 | 30,094918 | 31,220650 |
| 15 | 28,232269 | 29,360916 | 30,540231 | 31,772482 | 33,060035 | 34,405359 | 35,811025 |
| 16 | 31,632012 | 33,003399 | 34,441553 | 35,949730 | 37,531339 | 39,189948 | 40,929293 |
| 17 | 35,320733 | 36,973705 | 38,713500 | 40,544703 | 42,472130 | 44,500843 | 46,636161 |
| 18 | 39,322995 | 41,301338 | 43,391283 | 45,599173 | 47,931703 | 50,395936 | 52,999320 |
| 19 | 43,665450 | 46,018458 | 48,513454 | 51,159090 | 53,964532 | 56,939488 | 60,094242 |
| 20 | 48,377013 | 51,160120 | 54,122233 | 57,274999 | 60,630808 | 64,202832 | 68,005080 |
| 21 | 53,489059 | 56,764530 | 60,263845 | 64,002499 | 67,997043 | 72,265144 | 76,825664 |
| 22 | 59,035629 | 62,873338 | 66,988910 | 71,402749 | 76,136732 | 81,214309 | 86,660615 |
| 23 | 65,053658 | 69,531939 | 74,352856 | 79,543024 | 85,131089 | 91,147884 | 97,626586 |
| 24 | 71,583219 | 76,789813 | 82,416378 | 88,497327 | 95,069854 | 102,17415 | 109,85364 |
| 25 | 78,667792 | 84,700896 | 91,245934 | 98,347059 | 106,05219 | 114,41331 | 123,48681 |
| 26 | 86,354555 | 93,323977 | 100,91430 | 109,18177 | 118,18767 | 127,99877 | 138,68780 |
| 27 | 94,694692 | 102,72313 | 111,50116 | 121,09994 | 131,59737 | 143,07864 | 155,63689 |
| 28 | 103,74374 | 112,96822 | 123,09377 | 134,20994 | 146,41510 | 159,81729 | 174,53513 |
| 29 | 113,56196 | 124,13536 | 135,78767 | 148,63093 | 162,78868 | 178,39719 | 195,60668 |
| 30 | 124,21473 | 136,30754 | 149,68750 | 164,49402 | 180,88149 | 199,02088 | 219,10144 |
| 31 | 135,77298 | 149,57522 | 164,90781 | 181,94342 | 200,87405 | 221,91317 | 245,29811 |
| 32 | 148,31368 | 164,03699 | 181,57406 | 201,13777 | 222,96583 | 247,32362 | 274,50739 |
| 33 | 161,92034 | 179,80032 | 199,82359 | 222,25154 | 247,37724 | 275,52922 | 307,07574 |
| 34 | 176,68357 | 196,98234 | 219,80683 | 245,47670 | 274,35185 | 306,83744 | 343,38945 |
| 35 | 192,70168 | 215,71075 | 241,68848 | 271,02437 | 304,15879 | 341,58955 | 383,87924 |
| 36 | 210,08132 | 236,12472 | 265,64889 | 299,12681 | 337,09547 | 380,16441 | 429,02535 |
| 37 | 228,93823 | 258,37595 | 291,88553 | 330,03949 | 373,49049 | 422,98249 | 479,36327 |
| 38 | 249,39798 | 282,62978 | 320,61466 | 364,04343 | 413,70699 | 470,51056 | 535,49004 |
| 39 | 271,59681 | 309,06646 | 352,07305 | 401,44778 | 458,14622 | 523,26673 | 598,07140 |
| 40 | 295,68254 | 337,88245 | 386,51999 | 442,59256 | 507,25158 | 581,82607 | 667,84961 |
| 41 | 321,81555 | 369,29187 | 424,23939 | 487,85181 | 561,51299 | 646,82693 | 745,65231 |
| 42 | 350,16987 | 403,52813 | 465,54213 | 537,63699 | 621,47186 | 718,97790 | 832,40233 |
| 43 | 380,93431 | 440,84566 | 510,76864 | 592,40069 | 687,72640 | 799,06547 | 929,12860 |
| 44 | 414,31373 | 481,52177 | 560,29166 | 652,64076 | 760,93768 | 887,96267 | 1036,9784 |
| 45 | 450,53040 | 525,85873 | 614,51936 | 718,90484 | 841,83613 | 986,63856 | 1157,2309 |
| 46 | 489,82548 | 574,18602 | 673,89870 | 791,79532 | 931,22893 | 1096,1688 | 1291,3125 |
| 47 | 532,46065 | 626,86276 | 738,91908 | 871,97485 | 1030,0080 | 1217,7474 | 1440,8134 |
| 48 | 578,71980 | 684,28041 | 810,11639 | 960,17234 | 1139,1588 | 1352,6996 | 1607,5069 |
| 49 | 628,91098 | 746,86565 | 888,07745 | 1057,1896 | 1259,7705 | 1502,4965 | 1793,3702 |
| 50 | 683,36842 | 815,08356 | 973,44481 | 1163,9085 | 1393,0464 | 1668,7712 | 2000,6078 |

## КОЭФФИЦИЕНТЫ НАРАЩЕНИЯ ГОДОВОЙ РЕНТЫ

| Число периодов | Ставка процентов | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 12,00 | 12,50 | 13,00 | 13,50 | 14,00 | 14,50 | 15,00 |
| 1 | 1,0000000 | 1,0000000 | 1,0000000 | 1,0000000 | 1,0000000 | 1,0000000 | 1,0000000 |
| 2 | 2,1200000 | 2,1250000 | 2,1300000 | 2,1350000 | 2,1400000 | 2,1450000 | 2,1500000 |
| 3 | 3,3744000 | 3,3906250 | 3,4069000 | 3,4232250 | 3,4396000 | 3,4560250 | 3,4725000 |
| 4 | 4,7793280 | 4,8144531 | 4,8497970 | 4,8853604 | 4,9211440 | 4,9571486 | 4,9933750 |
| 5 | 6,3528474 | 6,4162598 | 6,4802706 | 6,5448840 | 6,6101042 | 6,6759352 | 6,7423813 |
| 6 | 8,1151890 | 8,2182922 | 8,3227058 | 8,4284434 | 8,5355187 | 8,6439458 | 8,7537384 |
| 7 | 10,089012 | 10,245579 | 10,404658 | 10,566283 | 10,730491 | 10,897318 | 11,066799 |
| 8 | 12,299693 | 12,526276 | 12,757263 | 12,992731 | 13,232760 | 13,477429 | 13,726819 |
| 9 | 14,775656 | 15,092061 | 15,415707 | 15,746750 | 16,085347 | 16,431656 | 16,785842 |
| 10 | 17,548735 | 17,978568 | 18,419749 | 18,872561 | 19,337295 | 19,814246 | 20,303718 |
| 11 | 20,654583 | 21,225889 | 21,814317 | 22,420357 | 23,044516 | 23,687312 | 24,349276 |
| 12 | 24,133133 | 24,879125 | 25,650178 | 26,447106 | 27,270749 | 28,121972 | 29,001667 |
| 13 | 28,029109 | 28,989016 | 29,984701 | 31,017465 | 32,088654 | 33,199658 | 34,351917 |
| 14 | 32,392602 | 33,612643 | 34,882712 | 36,204823 | 37,581065 | 39,013609 | 40,504705 |
| 15 | 37,279715 | 38,814223 | 40,417464 | 42,092474 | 43,842414 | 45,670582 | 47,580411 |
| 16 | 42,753280 | 44,666001 | 46,671735 | 48,774957 | 50,980352 | 53,292816 | 55,717472 |
| 17 | 48,883674 | 51,249252 | 53,739060 | 56,359577 | 59,117601 | 62,020275 | 65,075093 |
| 18 | 55,749715 | 58,655408 | 61,725138 | 64,968120 | 68,394066 | 72,013215 | 75,836357 |
| 19 | 63,439681 | 66,987334 | 70,749406 | 74,738816 | 78,969235 | 83,455131 | 88,211811 |
| 20 | 72,052442 | 76,360751 | 80,946829 | 85,828556 | 91,024928 | 96,556125 | 102,44358 |
| 21 | 81,698736 | 86,905845 | 92,469917 | 98,415411 | 104,76842 | 111,55676 | 118,81012 |
| 22 | 92,502584 | 98,769075 | 105,49101 | 112,70149 | 120,43600 | 128,73249 | 137,63164 |
| 23 | 104,60289 | 112,11521 | 120,20484 | 128,91619 | 138,29704 | 148,39871 | 159,27638 |
| 24 | 118,15524 | 127,12961 | 136,83147 | 147,31988 | 158,65862 | 170,91652 | 184,16784 |
| 25 | 133,33387 | 144,02081 | 155,61956 | 168,20806 | 181,87083 | 196,69941 | 212,79302 |
| 26 | 150,33393 | 163,02341 | 176,85010 | 191,91615 | 208,33274 | 226,22083 | 245,71197 |
| 27 | 169,37401 | 184,40134 | 200,84061 | 218,82483 | 238,49933 | 260,02285 | 283,56877 |
| 28 | 190,69889 | 208,45151 | 227,94989 | 249,36618 | 272,88923 | 298,72616 | 327,10408 |
| 29 | 214,58275 | 235,50795 | 258,58338 | 284,03062 | 312,09373 | 343,04145 | 377,16969 |
| 30 | 241,33268 | 265,94644 | 293,19922 | 323,37475 | 356,78685 | 393,78246 | 434,74515 |
| 31 | 271,29261 | 300,18974 | 332,31511 | 368,03034 | 407,73701 | 451,88092 | 500,95692 |
| 32 | 304,84772 | 338,71346 | 376,51608 | 418,71444 | 465,82019 | 518,40365 | 577,10046 |
| 33 | 342,42945 | 382,05265 | 426,46317 | 476,24089 | 532,03501 | 594,57218 | 664,66552 |
| 34 | 384,52098 | 430,80923 | 482,90338 | 541,53341 | 607,51991 | 681,78515 | 765,36535 |
| 35 | 431,66350 | 485,66038 | 546,68082 | 615,64042 | 693,57270 | 781,64400 | 881,17016 |
| 36 | 484,46312 | 547,36793 | 618,74933 | 699,75188 | 791,67288 | 895,98238 | 1014,3457 |
| 37 | 543,59869 | 616,78892 | 700,18674 | 795,21838 | 903,50708 | 1026,8998 | 1167,4975 |
| 38 | 609,83053 | 694,88753 | 792,21101 | 903,57286 | 1030,9981 | 1176,8003 | 1343,6222 |
| 39 | 684,01020 | 782,74847 | 896,19845 | 1026,5552 | 1176,3378 | 1348,4363 | 1546,1655 |
| 40 | 767,09142 | 881,59203 | 1013,7042 | 1166,1401 | 1342,0251 | 1544,9596 | 1779,0903 |
| 41 | 860,14239 | 992,79104 | 1146,4858 | 1324,5691 | 1530,9086 | 1769,9788 | 2046,9539 |
| 42 | 964,35948 | 1117,8899 | 1296,5289 | 1504,3859 | 1746,2358 | 2027,6257 | 2354,9969 |
| 43 | 1081,0826 | 1258,6262 | 1466,0777 | 1708,4780 | 1991,7088 | 2322,6314 | 2709,2465 |
| 44 | 1211,8125 | 1416,9544 | 1657,6678 | 1940,1225 | 2271,5481 | 2660,4129 | 3116,6334 |
| 45 | 1358,2300 | 1595,0737 | 1874,1646 | 2203,0391 | 2590,5648 | 3047,1728 | 3585,1285 |
| 46 | 1522,2176 | 1795,4579 | 2118,8060 | 2501,4493 | 2954,2439 | 3490,0129 | 4123,8977 |
| 47 | 1705,8838 | 2020,8902 | 2395,2508 | 2840,1450 | 3368,8380 | 3997,0648 | 4743,4824 |
| 48 | 1911,5898 | 2274,5015 | 2707,6334 | 3224,5646 | 3841,4753 | 4577,6391 | 5456,0047 |
| 49 | 2141,9806 | 2559,8141 | 3060,6258 | 3660,8808 | 4380,2819 | 5242,3968 | 6275,4055 |
| 50 | 2400,0182 | 2880,7909 | 3459,5071 | 4156,0997 | 4994,5213 | 6003,5444 | 7217,7163 |

## КОЭФФИЦИЕНТЫ НАРАЩЕНИЯ ГОДОВОЙ РЕНТЫ

| Число периодов | Ставка процентов | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 15,50 | 16,00 | 16,50 | 17,00 | 17,50 | 18,00 | 18,50 |
| 1 | 1,0000000 | 1,0000000 | 1,0000000 | 1,0000000 | 1,0000000 | 1,0000000 | 1,0000000 |
| 2 | 2,1550000 | 2,1600000 | 2,1650000 | 2,1700000 | 2,1750000 | 2,1800000 | 2,1850000 |
| 3 | 3,4890250 | 3,5056000 | 3,5222250 | 3,5389000 | 3,5556250 | 3,5724000 | 3,5892250 |
| 4 | 5,0298239 | 5,0664960 | 5,1033921 | 5,1405130 | 5,1778594 | 5,2154320 | 5,2532316 |
| 5 | 6,8094466 | 6,8771354 | 6,9454518 | 7,0144002 | 7,0839848 | 7,1542098 | 7,2250795 |
| 6 | 8,8649108 | 8,9774770 | 9,0914514 | 9,2068482 | 9,3236821 | 9,4419675 | 9,5617192 |
| 7 | 11,238972 | 11,413873 | 11,591541 | 11,772012 | 11,955326 | 12,141522 | 12,330637 |
| 8 | 13,981013 | 14,240093 | 14,504145 | 14,773255 | 15,047509 | 15,326996 | 15,611805 |
| 9 | 17,148070 | 17,518508 | 17,897329 | 18,284708 | 18,680823 | 19,085855 | 19,499989 |
| 10 | 20,806020 | 21,321469 | 21,850388 | 22,393108 | 22,949967 | 23,521309 | 24,107487 |
| 11 | 25,030954 | 25,732904 | 26,455702 | 27,199937 | 27,966211 | 28,755144 | 29,567372 |
| 12 | 29,910751 | 30,850169 | 31,820893 | 32,823926 | 33,860298 | 34,931070 | 36,037336 |
| 13 | 35,546918 | 36,786196 | 38,071341 | 39,403993 | 40,785850 | 42,218663 | 43,704243 |
| 14 | 42,056690 | 43,671987 | 45,353112 | 47,102672 | 48,923373 | 50,818022 | 52,789528 |
| 15 | 49,575477 | 51,659505 | 53,836375 | 56,110126 | 58,484964 | 60,965266 | 63,555591 |
| 16 | 58,259676 | 60,925026 | 63,719377 | 66,648848 | 69,719832 | 72,939014 | 76,313375 |
| 17 | 68,289926 | 71,673030 | 75,233075 | 78,979152 | 82,920803 | 87,068036 | 91,431350 |
| 18 | 79,874864 | 84,140715 | 88,646532 | 93,405608 | 98,431944 | 103,74028 | 109,34615 |
| 19 | 93,255468 | 98,603230 | 104,27321 | 110,28456 | 116,65753 | 123,41353 | 130,57519 |
| 20 | 108,71007 | 115,37975 | 122,47829 | 130,03294 | 138,07260 | 146,62797 | 155,73160 |
| 21 | 126,56013 | 134,84051 | 143,68721 | 153,13854 | 163,23531 | 174,02100 | 185,54194 |
| 22 | 147,17695 | 157,41499 | 168,39560 | 180,17209 | 192,80149 | 206,34479 | 220,86720 |
| 23 | 170,98937 | 183,60138 | 197,18087 | 211,80134 | 227,54175 | 244,48685 | 262,72763 |
| 24 | 198,49272 | 213,97761 | 230,71571 | 248,80757 | 268,36155 | 289,49448 | 312,33225 |
| 25 | 230,25910 | 249,21402 | 269,78381 | 292,10486 | 316,32482 | 342,60349 | 371,11371 |
| 26 | 266,94926 | 290,08827 | 315,29813 | 342,76268 | 372,68167 | 405,27211 | 440,76975 |
| 27 | 309,32639 | 337,50239 | 368,32233 | 402,03234 | 438,90096 | 479,22109 | 523,31215 |
| 28 | 358,27198 | 392,50277 | 430,09551 | 471,37783 | 516,70863 | 566,48089 | 621,12490 |
| 29 | 414,80414 | 456,30322 | 502,06127 | 552,51207 | 608,13264 | 669,44745 | 737,03300 |
| 30 | 480,09878 | 530,31173 | 585,90138 | 647,43912 | 715,55585 | 790,94799 | 874,38411 |
| 31 | 555,51409 | 616,16161 | 683,57510 | 758,50377 | 841,77812 | 934,31863 | 1037,1452 |
| 32 | 642,61878 | 715,74746 | 797,36500 | 888,44941 | 990,08929 | 1103,4960 | 1230,0170 |
| 33 | 743,22469 | 831,26706 | 929,93022 | 1040,4858 | 1164,3549 | 1303,1253 | 1458,5702 |
| 34 | 859,42451 | 965,26979 | 1084,3687 | 1218,3684 | 1369,1170 | 1538,6878 | 1729,4057 |
| 35 | 993,63531 | 1120,7130 | 1264,2895 | 1426,4910 | 1609,7125 | 1816,6516 | 2050,3457 |
| 36 | 1148,6488 | 1301,0270 | 1473,8973 | 1669,9945 | 1892,4122 | 2144,6489 | 2430,6597 |
| 37 | 1327,6893 | 1510,1914 | 1718,0904 | 1954,8936 | 2224,5843 | 2531,6857 | 2881,3317 |
| 38 | 1534,4812 | 1752,8220 | 2002,5753 | 2288,2255 | 2614,8866 | 2988,3891 | 3415,3781 |
| 39 | 1773,3258 | 2034,2735 | 2334,0002 | 2678,2238 | 3073,4917 | 3527,2992 | 4048,2230 |
| 40 | 2049,1913 | 2360,7572 | 2720,1102 | 3134,5218 | 3612,3528 | 4163,2130 | 4798,1443 |
| 41 | 2367,8159 | 2739,4784 | 3169,9284 | 3668,3906 | 4245,5145 | 4913,5914 | 5686,8009 |
| 42 | 2735,8274 | 3178,7949 | 3693,9666 | 4293,0169 | 4989,4796 | 5799,0378 | 6739,8591 |
| 43 | 3160,8806 | 3688,4021 | 4304,4711 | 5023,8298 | 5863,6385 | 6843,8646 | 7987,7331 |
| 44 | 3651,8171 | 4279,5465 | 5015,7089 | 5878,8809 | 6890,7753 | 8076,7603 | 9466,4637 |
| 45 | 4218,8488 | 4965,2739 | 5844,3008 | 6879,2907 | 8097,6609 | 9531,5771 | 11218,759 |
| 46 | 4873,7704 | 5760,7177 | 6809,6105 | 8049,7701 | 9515,7516 | 11248,261 | 13295,230 |
| 47 | 5630,2048 | 6683,4326 | 7934,1962 | 9419,2310 | 11182,008 | 13273,948 | 15755,848 |
| 48 | 6503,8865 | 7753,7818 | 9244,3386 | 11021,500 | 13139,860 | 15664,259 | 18671,679 |
| 49 | 7512,9889 | 8995,3869 | 10770,654 | 12896,155 | 15440,335 | 18484,825 | 22126,940 |
| 50 | 8678,5022 | 10435,649 | 12548,812 | 15089,502 | 18143,394 | 21813,094 | 26221,424 |

## КОЭФФИЦИЕНТЫ НАРАЩЕНИЯ ГОДОВОЙ РЕНТЫ

| Число периодов | Ставка процентов | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 19,00 | 19,50 | 20,00 | 20,50 | 21,00 | 21,50 | 22,00 |
| 1 | 1,0000000 | 1,0000000 | 1,0000000 | 1,0000000 | 1,0000000 | 1,0000000 | 1,0000000 |
| 2 | 2,1900000 | 2,1950000 | 2,2000000 | 2,2050000 | 2,2100000 | 2,2150000 | 2,2200000 |
| 3 | 3,6061000 | 3,6230250 | 3,6400000 | 3,6570250 | 3,6741000 | 3,6912250 | 3,7084000 |
| 4 | 5,2912590 | 5,3295149 | 5,3680000 | 5,4067151 | 5,4456610 | 5,4848384 | 5,5242480 |
| 5 | 7,2965982 | 7,3687703 | 7,4416000 | 7,5150917 | 7,5892498 | 7,6640786 | 7,7395826 |
| 6 | 9,6829519 | 9,8056805 | 9,9299200 | 10,055686 | 10,182992 | 10,311856 | 10,442291 |
| 7 | 12,522713 | 12,717788 | 12,915904 | 13,117101 | 13,321421 | 13,528904 | 13,739595 |
| 8 | 15,902028 | 16,197757 | 16,499085 | 16,806107 | 17,118919 | 17,437619 | 17,762306 |
| 9 | 19,923413 | 20,356319 | 20,798902 | 21,251359 | 21,713892 | 22,186707 | 22,670013 |
| 10 | 24,708862 | 25,325802 | 25,958682 | 26,607887 | 27,273809 | 27,956849 | 28,657416 |
| 11 | 30,403546 | 31,264333 | 32,150419 | 33,062504 | 34,001309 | 34,967572 | 35,962047 |
| 12 | 37,180220 | 38,360878 | 39,580502 | 40,840317 | 42,141584 | 43,485599 | 44,873697 |
| 13 | 45,244461 | 46,841249 | 48,496603 | 50,212582 | 51,991317 | 53,835003 | 55,745911 |
| 14 | 54,840909 | 56,975293 | 59,195923 | 61,506162 | 63,909493 | 66,409529 | 69,010011 |
| 15 | 66,260682 | 69,085475 | 72,035108 | 75,114925 | 78,330487 | 81,687578 | 85,192213 |
| 16 | 79,850211 | 83,557143 | 87,442129 | 91,513485 | 95,779889 | 100,25041 | 104,93450 |
| 17 | 96,021751 | 100,85079 | 105,93056 | 111,27375 | 116,89367 | 122,80424 | 129,02009 |
| 18 | 115,26588 | 121,51669 | 128,11667 | 135,08487 | 142,44134 | 150,20716 | 158,40451 |
| 19 | 138,16640 | 146,21244 | 154,74000 | 163,77727 | 173,35402 | 183,50170 | 194,25350 |
| 20 | 165,41802 | 175,72387 | 186,68800 | 198,35160 | 210,75836 | 223,95456 | 237,98927 |
| 21 | 197,84744 | 210,99002 | 225,02560 | 240,01368 | 256,01762 | 273,10479 | 291,34691 |
| 22 | 236,43846 | 253,13308 | 271,03072 | 290,21649 | 310,78131 | 332,82232 | 356,44323 |
| 23 | 282,36176 | 303,49403 | 326,23686 | 350,71087 | 377,04539 | 405,37912 | 435,86075 |
| 24 | 337,01050 | 363,67536 | 392,48424 | 423,60660 | 457,22492 | 493,53563 | 532,75011 |
| 25 | 402,04249 | 435,59206 | 471,98108 | 511,44595 | 554,24216 | 600,64579 | 650,95513 |
| 26 | 479,43056 | 521,53251 | 567,37730 | 617,29237 | 671,63301 | 730,78464 | 795,16526 |
| 27 | 571,52237 | 624,23135 | 681,85276 | 744,83731 | 813,67594 | 888,90333 | 971,10162 |
| 28 | 681,11162 | 746,95647 | 819,22331 | 898,52895 | 985,54789 | 1081,0175 | 1185,7440 |
| 29 | 811,52283 | 893,61298 | 984,06797 | 1083,7274 | 1193,5129 | 1314,4363 | 1447,6077 |
| 30 | 966,71217 | 1068,8675 | 1181,8816 | 1306,8915 | 1445,1507 | 1598,0401 | 1767,0813 |
| 31 | 1151,3875 | 1278,2967 | 1419,2579 | 1575,8043 | 1749,6323 | 1942,6188 | 2156,8392 |
| 32 | 1371,1511 | 1528,5645 | 1704,1095 | 1899,8441 | 2118,0551 | 2361,2818 | 2632,3439 |
| 33 | 1632,6698 | 1827,6346 | 2045,9314 | 2290,3122 | 2563,8467 | 2869,9574 | 3212,4595 |
| 34 | 1943,8771 | 2185,0233 | 2456,1176 | 2760,8262 | 3103,2545 | 3487,9982 | 3920,2006 |
| 35 | 2314,2137 | 2612,1029 | 2948,3411 | 3327,7955 | 3755,9379 | 4238,9178 | 4783,6447 |
| 36 | 2754,9143 | 3122,4630 | 3539,0094 | 4010,9936 | 4545,6848 | 5151,2852 | 5837,0466 |
| 37 | 3279,3481 | 3732,3433 | 4247,8112 | 4834,2473 | 5501,2787 | 6259,8115 | 7122,1968 |
| 38 | 3903,4242 | 4461,1502 | 5098,3735 | 5826,2680 | 6657,5472 | 7606,6709 | 8690,0801 |
| 39 | 4646,0748 | 5332,0745 | 6119,0482 | 7021,6530 | 8056,6321 | 9243,1052 | 10602,898 |
| 40 | 5529,8290 | 6372,8290 | 7343,8578 | 8462,0918 | 9749,5248 | 11231,373 | 12936,535 |
| 41 | 6581,4965 | 7616,5306 | 8813,6294 | 10197,821 | 11797,925 | 13647,118 | 15783,573 |
| 42 | 7832,9808 | 9102,7541 | 10577,355 | 12289,374 | 14276,489 | 16582,248 | 19256,959 |
| 43 | 9322,2472 | 10878,791 | 12693,826 | 14809,696 | 17275,552 | 20148,432 | 23494,490 |
| 44 | 11094,474 | 13001,155 | 15233,592 | 17846,683 | 20904,418 | 24481,345 | 28664,278 |
| 45 | 13203,424 | 15537,381 | 18281,310 | 21506,253 | 25295,346 | 29745,834 | 34971,419 |
| 46 | 15713,075 | 18568,170 | 21938,572 | 25916,035 | 30608,368 | 36142,188 | 42666,131 |
| 47 | 18699,559 | 22189,963 | 26327,286 | 31229,822 | 37037,126 | 43913,758 | 52053,680 |
| 48 | 22253,475 | 26518,006 | 31593,744 | 37632,936 | 44815,922 | 53356,216 | 63506,490 |
| 49 | 26482,636 | 31690,017 | 37913,492 | 45348,688 | 54228,266 | 64828,803 | 77478,917 |
| 50 | 31515,336 | 37870,570 | 45497,191 | 54646,169 | 65617,202 | 78767,995 | 94525,279 |

## КОЭФФИЦИЕНТЫ НАРАЩЕНИЯ ГОДОВОЙ РЕНТЫ

| Число периодов | Ставка процентов | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 22,50 | 23,00 | 23,50 | 24,00 | 24,50 | 25,00 | 25,50 |
| 1 | 1,0000000 | 1,0000000 | 1,0000000 | 1,0000000 | 1,0000000 | 1,0000000 | 1,0000000 |
| 2 | 2,2250000 | 2,2300000 | 2,2350000 | 2,2400000 | 2,2450000 | 2,2500000 | 2,2550000 |
| 3 | 3,7256250 | 3,7429000 | 3,7602250 | 3,7776000 | 3,7950250 | 3,8125000 | 3,8300250 |
| 4 | 5,5638906 | 5,6037670 | 5,6438779 | 5,6842240 | 5,7248061 | 5,7656250 | 5,8066814 |
| 5 | 7,8157660 | 7,8926334 | 7,9701892 | 8,0484378 | 8,1273836 | 8,2070313 | 8,2873851 |
| 6 | 10,574313 | 10,707939 | 10,843184 | 10,980063 | 11,118593 | 11,258789 | 11,400668 |
| 7 | 13,953534 | 14,170765 | 14,391332 | 14,615278 | 14,842648 | 15,073486 | 15,307839 |
| 8 | 18,093079 | 18,430041 | 18,773295 | 19,122945 | 19,479097 | 19,841858 | 20,211338 |
| 9 | 23,164022 | 23,668950 | 24,185019 | 24,712451 | 25,251475 | 25,802322 | 26,365229 |
| 10 | 29,375927 | 30,112809 | 30,868498 | 31,643440 | 32,438087 | 33,252903 | 34,088362 |
| 11 | 36,985510 | 38,038755 | 39,122596 | 40,237865 | 41,385418 | 42,566129 | 43,780894 |
| 12 | 46,307250 | 47,787669 | 49,316406 | 50,894953 | 52,524845 | 54,207661 | 55,945022 |
| 13 | 57,726381 | 59,778833 | 61,905761 | 64,109741 | 66,393432 | 68,759576 | 71,211003 |
| 14 | 71,714817 | 74,527964 | 77,453615 | 80,496079 | 83,659823 | 86,949470 | 90,369809 |
| 15 | 88,850651 | 92,669396 | 96,655214 | 100,81514 | 105,15648 | 109,68684 | 114,41411 |
| 16 | 109,84205 | 114,98336 | 120,36919 | 126,01077 | 131,91982 | 138,10855 | 144,58971 |
| 17 | 135,55651 | 142,42953 | 149,65595 | 157,25336 | 165,24017 | 173,63568 | 182,46008 |
| 18 | 167,05672 | 176,18832 | 185,82510 | 195,99416 | 206,72401 | 218,04460 | 229,98741 |
| 19 | 205,64448 | 217,71163 | 230,49399 | 244,03276 | 258,37140 | 273,55576 | 289,63419 |
| 20 | 252,91449 | 268,78531 | 285,66008 | 303,60062 | 322,67239 | 342,94470 | 364,49091 |
| 21 | 310,82025 | 331,60593 | 353,79020 | 377,46477 | 402,72713 | 429,68087 | 458,43610 |
| 22 | 381,75481 | 408,87530 | 437,93090 | 469,05632 | 502,39527 | 538,10109 | 576,33730 |
| 23 | 468,64964 | 503,91662 | 541,84466 | 582,62984 | 626,48211 | 673,62636 | 724,30331 |
| 24 | 575,09581 | 620,81744 | 670,17816 | 723,46100 | 780,97023 | 843,03295 | 910,00066 |
| 25 | 705,49237 | 764,60545 | 828,67003 | 898,09164 | 973,30794 | 1054,7912 | 1143,0508 |
| 26 | 865,22816 | 941,46470 | 1024,4075 | 1114,63363 | 1212,7684 | 1319,4890 | 1435,5288 |
| 27 | 1 060,9045 | 1159,0016 | 1266,1432 | 1383,14570 | 1510,8966 | 1650,3612 | 1802,5886 |
| 28 | 1300,6080 | 1426,5719 | 1564,6869 | 1716,10067 | 1882,0663 | 2063,9515 | 2263,2487 |
| 29 | 1594,2448 | 1755,6835 | 1933,3883 | 2128,96483 | 2344,1726 | 2580,9394 | 2841,3771 |
| 30 | 1953,9499 | 2160,4907 | 2388,7346 | 2640,91639 | 2919,4948 | 3227,1743 | 3566,9283 |
| 31 | 2394,5886 | 2658,4036 | 2951,0872 | 3275,73632 | 3635,7711 | 4034,9678 | 4477,4950 |
| 32 | 2934,3710 | 3270,8364 | 3645,5927 | 4062,91304 | 4527,5350 | 5044,7098 | 5620,2563 |
| 33 | 3595,6045 | 4024,1287 | 4503,3070 | 5039,01217 | 5637,7811 | 6306,8872 | 7054,4216 |
| 34 | 4405,6156 | 4950,6783 | 5562,5841 | 6249,37509 | 7020,0374 | 7884,6091 | 8854,2992 |
| 35 | 5397,8790 | 6090,3344 | 6870,7914 | 7750,22511 | 8740,9466 | 9856,7613 | 11113,145 |
| 36 | 6613,4018 | 7492,1113 | 8486,4274 | 9611,27913 | 10883,479 | 12321,952 | 13947,998 |
| 37 | 8102,4172 | 9216,2969 | 10481,738 | 11918,9861 | 13550,931 | 15403,440 | 17505,737 |
| 38 | 9926,4611 | 11337,045 | 12945,946 | 14780,5428 | 16871,909 | 19255,299 | 21970,700 |
| 39 | 12160,915 | 13945,566 | 15989,244 | 18328,8731 | 21006,526 | 24070,124 | 27574,228 |
| 40 | 14898,121 | 17154,046 | 19747,716 | 22728,8026 | 26154,125 | 30088,655 | 34606,656 |
| 41 | 18251,198 | 21100,476 | 24389,429 | 28184,7152 | 32562,886 | 37611,819 | 43432,354 |
| 42 | 22358,717 | 25954,586 | 30121,945 | 34950,0469 | 40541,793 | 47015,774 | 54508,604 |
| 43 | 27390,429 | 31925,140 | 37201,602 | 43339,0581 | 50475,533 | 58770,718 | 68409,298 |
| 44 | 33554,275 | 39268,923 | 45944,978 | 53741,4321 | 62843,038 | 73464,397 | 85854,669 |
| 45 | 41104,987 | 48301,775 | 56743,048 | 66640,3758 | 78240,582 | 91831,496 | 107748,61 |
| 46 | 50354,609 | 59412,183 | 70078,664 | 82635,0660 | 97410,525 | 114790,37 | 135225,51 |
| 47 | 61685,397 | 73077,985 | 86548,151 | 102468,482 | 121277,10 | 143488,96 | 169709,01 |
| 48 | 75565,611 | 89886,922 | 106887,97 | 127061,917 | 150990,99 | 179362,20 | 212985,81 |
| 49 | 92568,873 | 110561,91 | 132007,64 | 157557,778 | 187984,79 | 224203,75 | 267298,19 |
| 50 | 113397,87 | 135992,15 | 163030,43 | 195372,644 | 234042,06 | 280255,69 | 335460,22 |

## КОЭФФИЦИЕНТЫ НАРАЩЕНИЯ ГОДОВОЙ РЕНТЫ

| Число периодов | Ставка процентов | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 26,00 | 26,50 | 27,00 | 27,50 | 28,00 | 28,50 | 29,00 |
| 1 | 1,0000000 | 1,0000000 | 1,0000000 | 1,0000000 | 1,0000000 | 1,0000000 | 1,0000000 |
| 2 | 2,2600000 | 2,2650000 | 2,2700000 | 2,2750000 | 2,2800000 | 2,2850000 | 2,2900000 |
| 3 | 3,8476000 | 3,8652250 | 3,8829000 | 3,9006250 | 3,9184000 | 3,9362250 | 3,9541000 |
| 4 | 5,8479760 | 5,8895096 | 5,9312830 | 5,9732969 | 6,0155520 | 6,0580491 | 6,1007890 |
| 5 | 8,3684498 | 8,4502297 | 8,5327294 | 8,6159535 | 8,6999066 | 8,7845931 | 8,8700178 |
| 6 | 11,544247 | 11,689541 | 11,836566 | 11,985341 | 12,135880 | 12,288202 | 12,442323 |
| 7 | 15,545751 | 15,787269 | 16,032439 | 16,281309 | 16,533927 | 16,790340 | 17,050597 |
| 8 | 20,587646 | 20,970895 | 21,361198 | 21,758670 | 22,163426 | 22,575587 | 22,995270 |
| 9 | 26,940434 | 27,528182 | 28,128721 | 28,742304 | 29,369186 | 30,009629 | 30,663898 |
| 10 | 34,944947 | 35,823150 | 36,723476 | 37,646437 | 38,592558 | 39,562373 | 40,556428 |
| 11 | 45,030633 | 46,316285 | 47,638815 | 48,999207 | 50,398474 | 51,837649 | 53,317792 |
| 12 | 57,738598 | 59,590101 | 61,501295 | 63,473989 | 65,510047 | 67,611379 | 69,779952 |
| 13 | 73,750633 | 76,381478 | 79,106644 | 81,929336 | 84,852860 | 87,880623 | 91,016138 |
| 14 | 93,925798 | 97,622569 | 101,46544 | 105,45990 | 109,61166 | 113,92660 | 118,41082 |
| 15 | 119,34651 | 124,49255 | 129,86111 | 135,46138 | 141,30293 | 147,39568 | 153,74996 |
| 16 | 151,37660 | 158,48308 | 165,92360 | 173,71326 | 181,86774 | 190,40345 | 199,33744 |
| 17 | 191,73451 | 201,48109 | 211,72298 | 222,48440 | 233,79071 | 245,66843 | 258,14530 |
| 18 | 242,58548 | 255,87358 | 269,88818 | 284,66761 | 300,25211 | 316,68394 | 334,00744 |
| 19 | 306,65771 | 324,68008 | 343,75799 | 363,95121 | 385,32271 | 407,93886 | 431,86960 |
| 20 | 387,38872 | 411,72030 | 437,57265 | 465,03779 | 494,21306 | 525,20143 | 558,11178 |
| 21 | 489,10978 | 521,82618 | 556,71726 | 593,92318 | 633,59272 | 675,88384 | 720,96420 |
| 22 | 617,27832 | 661,11012 | 708,03093 | 758,25205 | 811,99868 | 869,51074 | 931,04381 |
| 23 | 778,77069 | 837,30430 | 900,19928 | 967,77137 | 1040,3583 | 1118,3213 | 1202,0465 |
| 24 | 982,25107 | 1060,1899 | 1144,2531 | 1234,9085 | 1332,6586 | 1438,0429 | 1551,6400 |
| 25 | 1238,6363 | 1342,1403 | 1454,2014 | 1575,5083 | 1706,8031 | 1848,8851 | 2002,6156 |
| 26 | 1561,6818 | 1698,8074 | 1847,8358 | 2009,7731 | 2185,7079 | 2376,8173 | 2584,3741 |
| 27 | 1968,7191 | 2149,9914 | 2347,7515 | 2563,4607 | 2798,7061 | 3055,2103 | 3334,8426 |
| 28 | 2481,5860 | 2720,7391 | 2982,6443 | 3269,4124 | 3583,3438 | 3926,9452 | 4302,9470 |
| 29 | 3127,7984 | 3442,7350 | 3788,9583 | 4169,5008 | 4587,6801 | 5047,1246 | 5551,8016 |
| 30 | 3942,0260 | 4356,0598 | 4812,9771 | 5317,1136 | 5873,2306 | 6486,5551 | 7162,8241 |
| 31 | 4967,9527 | 5511,4156 | 6113,4809 | 6780,3198 | 7518,7351 | 8336,2233 | 9241,0431 |
| 32 | 6260,6204 | 6972,9408 | 7765,1207 | 8645,9078 | 9624,9810 | 10713,047 | 11921,946 |
| 33 | 7889,3817 | 8821,7701 | 9862,7033 | 11024,532 | 12320,976 | 13767,265 | 15380,310 |
| 34 | 9941,6210 | 11160,539 | 12526,633 | 14057,279 | 15771,849 | 17691,936 | 19841,600 |
| 35 | 12527,442 | 14119,082 | 15909,824 | 17924,030 | 20188,966 | 22735,138 | 25596,664 |
| 36 | 15785,577 | 17861,639 | 20206,477 | 22854,139 | 25842,877 | 29215,652 | 33020,696 |
| 37 | 19890,828 | 22595,973 | 25663,225 | 29140,027 | 33079,883 | 37543,113 | 42597,698 |
| 38 | 25063,443 | 28584,906 | 32593,296 | 37154,535 | 42343,250 | 48243,900 | 54952,030 |
| 39 | 31580,938 | 36160,906 | 41394,486 | 47373,031 | 54200,360 | 61994,411 | 70889,119 |
| 40 | 39792,982 | 45744,546 | 52571,998 | 60401,615 | 69377,460 | 79663,818 | 91447,963 |
| 41 | 50140,157 | 57867,851 | 66767,437 | 77013,059 | 88804,149 | 102369,01 | 117968,87 |
| 42 | 63177,598 | 73203,831 | 84795,645 | 98192,651 | 113670,31 | 131545,17 | 152180,85 |
| 43 | 79604,773 | 92603,846 | 107691,47 | 125196,63 | 145499,00 | 169036,55 | 196314,29 |
| 44 | 100303,01 | 117144,87 | 136769,17 | 159626,70 | 186239,72 | 217212,96 | 253246,44 |
| 45 | 126382,80 | 148189,26 | 173697,84 | 203525,05 | 238387,84 | 279119,66 | 326688,90 |
| 46 | 159243,33 | 187460,41 | 220597,26 | 259495,43 | 305137,43 | 358669,76 | 421429,68 |
| 47 | 200647,59 | 237138,42 | 280159,52 | 330857,68 | 390576,92 | 460891,64 | 543645,29 |
| 48 | 252816,96 | 299981,10 | 355803,59 | 421844,54 | 499939,45 | 592246,76 | 701303,43 |
| 49 | 318550,37 | 379477,09 | 451871,55 | 537852,79 | 639923,50 | 761038,09 | 904682,42 |
| 50 | 401374,47 | 480039,51 | 573877,87 | 685763,30 | 819103,08 | 977934,94 | 1167041,3 |

# КОЭФФИЦИЕНТЫ НАРАЩЕНИЯ ГОДОВОЙ РЕНТЫ

| Число периодов | Ставка процентов | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 29,50 | 30,00 | 30,50 | 31,00 | 31,50 | 32,00 | 32,50 |
| 1 | 1,0000000 | 1,0000000 | 1,0000000 | 1,0000000 | 1,0000000 | 1,0000000 | 1,0000000 |
| 2 | 2,2950000 | 2,3000000 | 2,3050000 | 2,3100000 | 2,3150000 | 2,3200000 | 2,3250000 |
| 3 | 3,9720250 | 3,9900000 | 4,0080250 | 4,0261000 | 4,0442250 | 4,0624000 | 4,0806250 |
| 4 | 6,1437724 | 6,1870000 | 6,2304726 | 6,2741910 | 6,3181559 | 6,3623680 | 6,4068281 |
| 5 | 8,9561852 | 9,0431000 | 9,1307668 | 9,2191902 | 9,3083750 | 9,3983258 | 9,4890473 |
| 6 | 12,598260 | 12,756030 | 12,915651 | 13,077139 | 13,240513 | 13,405790 | 13,572988 |
| 7 | 17,314747 | 17,582839 | 17,854924 | 18,131052 | 18,411275 | 18,695643 | 18,984209 |
| 8 | 23,422597 | 23,857691 | 24,300676 | 24,751679 | 25,210826 | 25,678249 | 26,154076 |
| 9 | 31,332263 | 32,014998 | 32,712382 | 33,424699 | 34,152237 | 34,895288 | 35,654151 |
| 10 | 41,575280 | 42,619497 | 43,689659 | 44,786356 | 45,910191 | 47,061780 | 48,241750 |
| 11 | 54,839988 | 56,405346 | 58,015005 | 59,670126 | 61,371901 | 63,121550 | 64,920319 |
| 12 | 72,017784 | 74,326950 | 76,709581 | 79,167865 | 81,704050 | 84,320446 | 87,019423 |
| 13 | 94,263031 | 97,625036 | 101,106003 | 104,709903 | 108,440826 | 112,302988 | 116,300735 |
| 14 | 123,07063 | 127,91255 | 132,94333 | 138,16997 | 143,59969 | 149,23994 | 155,09847 |
| 15 | 160,37646 | 167,28631 | 174,49105 | 182,00266 | 189,83359 | 197,99673 | 206,50548 |
| 16 | 208,68751 | 218,47220 | 228,71082 | 239,42349 | 250,63117 | 262,35568 | 274,61976 |
| 17 | 271,25033 | 285,01386 | 299,46762 | 314,64477 | 330,57998 | 347,30950 | 364,87118 |
| 18 | 352,26918 | 371,51802 | 391,80525 | 413,18465 | 435,71268 | 459,44854 | 484,45432 |
| 19 | 457,18859 | 483,97343 | 512,30585 | 542,27189 | 573,96217 | 607,47207 | 642,90197 |
| 20 | 593,05922 | 630,16546 | 669,55913 | 711,37618 | 755,76026 | 802,86313 | 852,84511 |
| 21 | 769,01169 | 820,21510 | 874,77466 | 932,90280 | 994,82474 | 1060,77933 | 1131,01977 |
| 22 | 996,87014 | 1067,2796 | 1142,5809 | 1223,1027 | 1309,1945 | 1401,2287 | 1499,6012 |
| 23 | 1291,94683 | 1388,4635 | 1492,0681 | 1603,2645 | 1722,5908 | 1850,6219 | 1987,9716 |
| 24 | 1674,07115 | 1806,0026 | 1948,1489 | 2101,2765 | 2266,2069 | 2443,8209 | 2635,0623 |
| 25 | 2168,92214 | 2348,8033 | 2543,3343 | 2753,6722 | 2981,0621 | 3226,8436 | 3492,4576 |
| 26 | 2809,75417 | 3054,4443 | 3320,0513 | 3608,3106 | 3921,0967 | 4260,4336 | 4628,5063 |
| 27 | 3639,63164 | 3971,7776 | 4333,6669 | 4727,8868 | 5157,2421 | 5624,7723 | 6133,7709 |
| 28 | 4714,32298 | 5164,3109 | 5656,4353 | 6194,5318 | 6782,7734 | 7425,6994 | 8128,2464 |
| 29 | 6106,04826 | 6714,6042 | 7382,6481 | 8115,8366 | 8920,3470 | 9802,9233 | 10770,9265 |
| 30 | 7908,33249 | 8729,9855 | 9635,3558 | 10632,7460 | 11731,2563 | 12940,8587 | 14272,4776 |
| 31 | 10242,2906 | 11349,981 | 12575,139 | 13929,897 | 15427,602 | 17082,934 | 18912,033 |
| 32 | 13264,7663 | 14755,975 | 16411,557 | 18249,165 | 20288,297 | 22550,472 | 25059,443 |
| 33 | 17178,8724 | 19183,768 | 21418,082 | 23907,407 | 26680,110 | 29767,623 | 33204,763 |
| 34 | 22247,6397 | 24939,899 | 27951,596 | 31319,703 | 35085,345 | 39294,263 | 43997,310 |
| 35 | 28811,6934 | 32422,868 | 36477,833 | 41029,810 | 46138,228 | 51869,427 | 58297,436 |
| 36 | 37312,1430 | 42150,729 | 47604,573 | 53750,052 | 60672,770 | 68468,644 | 77245,103 |
| 37 | 48320,2252 | 54796,947 | 62124,967 | 70413,568 | 79785,693 | 90379,609 | 102350,762 |
| 38 | 62575,6916 | 71237,031 | 81074,082 | 92242,774 | 104919,186 | 119302,084 | 135615,759 |
| 39 | 81036,5206 | 92609,141 | 105802,677 | 120839,034 | 137969,730 | 157479,751 | 179691,881 |
| 40 | 104943,294 | 120392,88 | 138073,49 | 158300,13 | 181431,19 | 207874,27 | 238092,74 |
| 41 | 135902,566 | 156511,75 | 180186,91 | 207374,18 | 238583,02 | 274395,04 | 315473,88 |
| 42 | 175994,823 | 203466,27 | 235144,92 | 271661,17 | 313737,67 | 362202,45 | 418003,90 |
| 43 | 227914,296 | 264507,15 | 306865,12 | 355877,13 | 412566,04 | 478108,24 | 553856,16 |
| 44 | 295150,013 | 343860,30 | 400459,98 | 466200,04 | 542525,34 | 631103,87 | 733860,41 |
| 45 | 382220,267 | 447019,39 | 522601,27 | 610723,06 | 713421,82 | 833058,11 | 972366,05 |
| 46 | 494976,245 | 581126,21 | 681995,66 | 800048,21 | 938150,70 | 1099637,71 | 1288386,02 |
| 47 | 640995,238 | 755465,07 | 890005,33 | 1048064,15 | 1233669,17 | 1451522,77 | 1707112,47 |
| 48 | 830089,833 | 982105,59 | 1161457,96 | 1372965,03 | 1622275,96 | 1916011,06 | 2261925,02 |
| 49 | 1074967,33 | 1276738,3 | 1515703,6 | 1798585,2 | 2133293,9 | 2529135,6 | 2997051,7 |
| 50 | 1392083,70 | 1659760,7 | 1977994,2 | 2356147,6 | 2805282,5 | 3338460,0 | 3971094,4 |

# Оглавление

*Учебное пособие*

**Малыхин Вячеслав Иванович**

**ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА**

**Редактор *О.И. Левшина***
Корректор *Г.Б. Костромцова*
Оригинал-макет *Е.А. Игнатовой*
Оформление художника *В.А. Лебедева*

Лицензия серия ИД № 03562 от 19.12.2000 г.
Подписано в печать 08.07.2003 (с готовых ps-файлов)
Формат 60x88 1/16. Усл. печ. л. 15,0. Уч.-изд. л. 12,5
Тираж 30 000 экз. (1-й завод - 5 000). Заказ № 2791

ООО «ИЗДАТЕЛЬСТВО ЮНИТИ-ДАНА»
Генеральный директор *В.Н. Закаидзе*

123298, Москва, ул. Ирины Левченко, 1
Тел. (095) 194-00-15. Тел/факс (095) 194-00-14
www.unity-dana.ru E-mail: unity@unity-dana.ru

Отпечатано во ФГУП ИПК «Ульяновский Дом печати»
432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14