В.И.АРНОЛЬД

Моя «беседа» с профессором кафедры дифференциальных уравнений Мехмата МГУ, академиком РАН Владимиром Игоревичем Арнольдом происходила, так сказать, «заочным образом».

Я подготовил свои вопросы (под названием «Сценарий интервью») летом 2008 года. Но встретиться с Владимиром Игоревичем, сразу в начале сентября, на Мехмате МГУ мне как-то не удавалось. А потом он и вовсе отправился с командировкой в Китай. Поэтому я обратился к его племяннику - заместителю директора Московского Центра Непрерывного Математического Образования (МЦНМО) Виталию Дмитриевичу Арнольду - с просьбой передать (пронумерованные мною) вопросы предполагаемого интервью (датируя своё сопроводительное письмо 1 -м сентябрём 2008 года) Владимиру Игоревичу по возвращении его в Москву. И в конце октября мне сообщили, что у Виталия Дмитриевича в Независимом Московском Университете (НМУ) находится для меня записка от Владимира Игоревича, к которой прилагался рукописный текст с подробным ответом на все мои вопросы. Содержание записки таково: «Дорогой Василий Борисович, Ваше любезное письмо (от 1 сентября 2008), со «сценарием», достигло меня только 1 октября. Прилагаемые ответы можно публиковать только вместе с вопросами, которые я не переписываю: ответы были бы непонятны, если бы в вопросах что-либо было изменено ! Рисунки обязательны !».

Согласно воле Владимира Игоревича, ниже приводятся его ответы на мои вопросы (оформленные в виде нашей «беседы») *с необходимыми рисунками* («отсканированными с оригиналов», по моей просьбе, моими университетскими друзьями физиком Эдуардом Иоханнесовичем Кэбиным и математиком Александром Савельевичем Кочуровым). При этом приводится и нумерация вопросов, поскольку в некоторых случаях Владимир Игоревич счёл необходимым дать единый ответ, объединяя сразу несколько вопросов.

ИНТЕРВЬЮ С В.И.АРНОЛЬДОМ

Д - 1. Я очень рад, Владимир Игоревич, что Вы согласились на это интервью. В первом своём вопросе я всегда прошу рассказать немного о себе и о своих родителях.

Я знаю, что родились Вы в Одессе, и что отец Ваш - Игорь Владимирович Арнольд – был известным математиком и педагогом. Более того, я знаю от своего отца, что Игорь Владимирович заведовал организованными (кажется, в 20 –ые годы прошлого века для имеющих высшее «педагогическое» образование) при Научно-исследовательском институте математики и механики МГУ (НИИММ) «курсами» (а по существу «спецаспирантурой» – отобранных туда специальной «Комиссией» к обучению официально называли «аспирантами») для подготовки преподавателей ВТУЗов, и у меня даже сохранилось Удостоверение (выписанное 15 июня 1932 года, N 255) об окончании этих курсов моим отцом (выпускника педагогического факультета Белорусского государственного университета) за подписями Директора НИИММ А.Я.Хинчина и Зав. курсами И.В.Арнольда, где перечисляются все «проработанные аспирантом» дисциплины (математические, общественные и иностранный язык), на основании чего заключается, что «… гр. Демидович Б.П. признан подготовленным для преподавания во ВТУЗах по специальности «Математика»».

Из Вашей интересной книги «Истории давние и недавние» я узнал, что Ваш дед Владимир Фёдорович Арнольд, был земским статистиком и занимался матэкономикой в стиле Леона Вальраса и его ученика Вильфредо Парето (в честь этих выдающихся специалистов, работавших в Швейцарии, в Лозанском университете ныне открыт даже так называемый «Центр междисциплинарных исследований Вальраса-Парето»).

Но как звали Вашу маму и была ли она «связана с математикой»? Из Вашей книги я только понял, что она прекрасно владела английский языком.

А. Моя мать, Нина Александровна Арнольд (урожденная Исакович) была по профессии искусствоведом, работала в юности в Пушкинском музее, участвовала в археологических экспедициях в Причерноморье, позже преподавала английский язык. В математике она ничего не понимала. Но её мать была сестрой замечательного физика академика Леонида Исааковича Мандельштама, основателя московской школы теории колебаний, волн, радиофизики и даже радиолокации. В число его учеников входили, например, Н.Д. Папалекси, Г.С. Ландсберг, И.Е. Тамм, М.А. Леонтович, А.А. Андронов, С.М. Рытов и много других светил нашей физики и техники. Нобелевскую премию за его открытие «комбинационного рассеяния света» получил его друг Раман, открывший «Раман-эффект» того же рода позже, но опубликовавший его несколькими неделями раньше, так как Мандельштам (по словам В.Л. Гинзбурга) тратил время, скорее, на попытки извлечь из ГУЛАГа попавшего туда родственника, чем на пропаганду своего открытия. Поэтому и мне с раннего возраста (даже до 4 лет) довелось общаться с собеседником этого Нобелевского уровня. Меня до сих пор поражает, как много может ребёнок дошкольного уровня почерпнуть из подобных разговоров. Причём, в основном, это вовсе не профессиональные знания, а понимание того, как собеседник думает во время разговора, какие доводы убедительны и какие доказательны, что его удивляет, а что ему очевидно.

По дошедшим до меня рассказам, Игорь Евгеньевич Тамм утверждал, что разница между школами Нильса Бора в Копенгагене и Ландау у нас состоит в том, что Нильс Бор гордился тем, что «никогда не скрывал от своих учеников, какие мы дураки», а Ландау – «какие они» (т.е. ученики).

Правдив ли этот рассказ об ответе Бора на вопросы московских студентов, я не знаю, но что Игорь Евгеньевич строго придерживался именно его позиции, я твердо знал несмотря даже на то, что, когда мне было лет 10, на мои вопросы о его науке Игорь Евгеньевич отвечал мне рассказами об альпинистских походах за мумиё на Памире и помогал закоптить стекла для наблюдения солнечного затмения, хотя после этих разговоров ехал из района Братовщины на Скалбе на полигон ближе к Семипалатинску.
Помимо его рассказов о восхождении на Эльбрус – то с моим отцом, то с Дираком – и о тысячах километров, проеханных им по Дании и Англии на велосипедах то с Дираком, то с Бором, он и меня пытался научить ездить так же ловко, но его роскошная белая брючина попала в цепь моего велосипеда, и есть даже фотография, где Игорь Евгеньевич лежит под этим велосипедом у моих ног.

Георгий Гамов был другом детства моей матери (но она осуждала его за то, что он не помогал из Лос-Аламоса голодавшему в России отцу). По-моему, именно Гамов заслужил 3 Нобелевских премии – за теорию α-распада (основанную на туннельной асимптотике, открытой его учителями, Мандельштамом и Леонтовичем), за объяснение реликтового излучения большим взрывом Вселенной и за начало расшифровки генетического кода, завершённой Криком и Уотсоном на базе его работы.

В Лос-Аламосе Гамов работал с другим членом нашей семьи – Рудольф Пайерлс, возглавлявший до того английский ядерный проект, был женат на Евгении Николаевне, кузине моей матери, а я в возрасте лет 12, посылал продуктовые посылки её сестре, сосланной и за это в Алма-Ату Нине Николаевне.

Другой великий физик, и близкий друг моих родителей, Михаил Александрович Леонтович, рассказывал, что «не получил Нобелевской премии за обломовскую свою лень». По его рассказу, он вычислял какие-то интегралы теории дальнего распространения радиоволн, когда к нему зашёл Франк и попросил помощи в одном расчёте (для объяснения наблюдений Черенковым эффекта, предсказанного Сергеем Ивановичем Вавиловым). «Я и сказал ему - сегодня не могу, очень много надо быстро сосчитать, а вот, в соседней комнате, сидит Игорь Евгеньевич, он сегодня свободнее, может и помочь». Черенков, Франк и Тамм получили Нобелевскую премию за это открытие Вавилова (которого наградить было нельзя, так как он умер).

Экзаменуя меня, Михаил Александрович спросил как-то: «А откуда взял Чичиков деньги покупать мертвые души?». И показал, что Гоголь на это явно указывает: первоначальный капитал (ещё до таможенных махинаций) был украден у всеимперского строительства, «проект которого вследствие этого пришлось полностью переделывать, изменив данные и место этого здания». Читателям того времени было ясно, что речь идёт о монументе в честь победы в Отечественной войне, который строили на Воробьёвых горах (где теперь МГУ), но, когда всё раскрали, то и перенесли этот храм Христа Спасителя к Москве-реке.

Д - 2. В своей книге Вы упоминаете, что в детстве были членом «добровольного научного общества» (ДНО), организованного Алексеем Андреевичем Ляпуновым у себя дома. В это общество он приглашал и моего старшего брата Колю (естественно, через нашего отца, которого Алексей Андреевич хорошо знал), поступившего на Мехмат МГУ в 1953 году. Но как-то с братом это «не сложилось», о чём отец потом часто с сожалением вспоминал.

Как Вы думаете, существует ли в наше время необходимость подобного «эксклю-зивного домашнего образования» или эту роль ныне должны взять на себя элитные школы ?

А. «ДНО» Алексея Андреевича вовсе не было «домашним образованием» - это была скорее своеобразная Академия Наук, где важнее было открывать новое (и объяснять другим), чем изучать старое. Так что школы, будь они элитными или нет, справиться с таким делом никак не могли бы. Алексей Андреевич обладал особенным талантом зажигать детей любознательностью совсем не школьной – с ним можно было обсуждать все интересное (и нельзя – ничто скучное).

Вопрос «почему Земля похожа скорее на репу, чем на лимон» - правильный. Будь она похожа на лимон, можно было бы использовать (решённую Якоби) задачу о притяжении двумя неподвижными точками, сдвинутыми от центра к полюсам, для расчёта влияния несферичности Земли на движения её спутников. Если эти две такие заменяющие лимоновидность Земли точки сдвинуты от центра к полюсам на расстояние $\pm\alpha$, то орбиты движения спутников будут отличаться от Кеплеровых эллипсов с фокусом в центре Земли на поправку порядка α, которую по формулам Якоби можно явно вычислить (через эллиптические функции).

Когда настоящие (искусственные) спутники стали запускаться вокруг настоящей (репообразной) Земли, то формулы Якоби удалось применить и тут. А именно, надо считать притягивающие точки сдвинутыми на мнимые расстояния $\alpha = i\beta$. Это направление сдвига столь же осесимметрично, как и направления к полюсам, а потому соответствует замене сферической Земли близким осесимметричным телом. Но это тело - не лимонообразное (что было бы при вещественных сдвигах α), а репообразное – и значение β можно подобрать так, чтобы аппроксимировать реальное сжатие (у Земли полярный радиус примерно на 1/300 своей величины короче экваториального).

Делать такого рода открытия – вот чему учило ДНО, а вовсе не школьному умножению десятизначных чисел «столбиком» (хотя Алексея Андреевича интересовало и то, нельзя ли сократить число n^2 элементарных операций при умножении n-значных чисел до, скажем, $n^{3/2}$, в связи с построением компьютеров).

Я сразу вспомнил ДНО Алексея Андреевича, когда дошкольники, с которыми я ехал из Москвы в Дубну читать лекции олимпиадным победителям, стали меня экзаменовать: достоин ли я такой чести. Они предложили мне свои 3 задачи - я их успешно решил, вспоминая образ мыслей Алексея Андреевича.

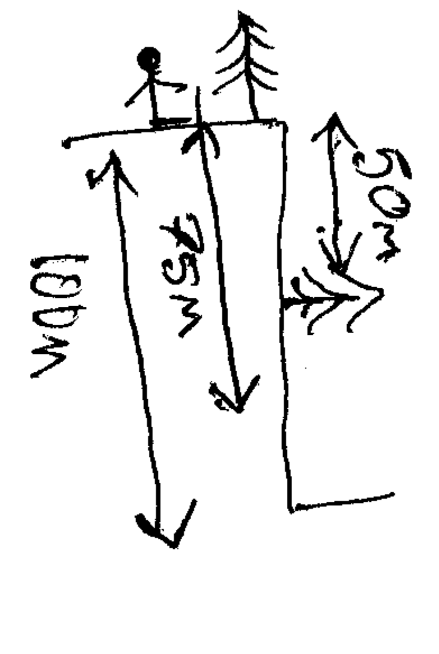
Первая задача:

Кто медведям лапы рвёт,
Зайчиков под дождь суёт,
Танин мячик бросил в речку,
Поломал быкам дощечку?
Каждый знает, это кто?
Это - ? …….

Мне помогло здесь то, что Агния Львовна была моей соседкой по даче и интересно рассказывала, как она предала своего учителя Маршака, а он её и понял, и простил – и научил написать «Снегиря».

Вторая задача:

Альпинист стоит на вершине вертикальной скалы высотой 100 метров, где растёт дерево. На середине высоты скалы из неё растет вбок ещё одно дерево. У альпиниста есть верёвка длиной 75 метров. Как ему спуститься ?



Третья задача:

Бикфордов шнур прогорает от одного конца до другого за час, но горит неравномерно: за полчаса огонь дойдёт не до середины шнура. Имея два таких (по-разному неравномерных) шнура и не располагая часами, отмерить 45 минут.

Умение решать такие задачи – совсем не то, что искусство умножать многозначные числа столбиком. Мой друг и однокурсник Игорь Шарыгин, в своих социологических исследованиях школ Магаданской области, пришёл к заключению, что отстающие на последних партах двоечники куда умнее сидящих впереди отличников, потому что двоечнику, чтобы выжить в классе, «нужно больше ума, чем для управления Гренадой и Севильей вместе», как говорил Фигаро.

Д - 3. Как я понял, школу Вы окончили в 1954 году. С медалью ли Вы её окончили?

А. В 1954 году я окончил 59-ую Московскую школу, в Староконюшенном переулке, с золотой медалью. Медалистов в нашем классе было много, чуть не четверть учеников – помню год, когда четверо из нас одновременно были кандидатами на выборах в разные отделения Академии Наук. Двое были (впоследствии) выбраны академиками, и это не исключительный случай – лет за 5 до нас из другого класса той же школы были тоже выбраны (в разные отделения) два академика РАН, ректор МАИ и посол России во Франции в том числе.

Эта школа – бывшая гимназия Медведниковых – долго оставалась лучшим в Москве центром подготовки математиков. Мой учитель математики, Иван Васильевич Морозкин, был по первоначальной профессии художником-гравёром на Трехгорной мануфактуре. Как рабфаковец, он попал на мехмат, был выпущен учителем математики. Вернувшийся с фронта офицером-артиллеристом, он военными методами заставлял всё понимать каждого.

Не так давно замечательный скульптор Елена Борисовна Преображенская, начав меня лепить на Николиной горе, сказала мне, что, когда она лепила Петра Леонидовича Капицу, он потребовал, чтобы портрет не вышел со скучным выражением, чтобы во всё время позирования она травила ему анекдоты. «Чем я хуже?» - ответил я, и Ёла немедленно рассказала следующее.

- Я с детства ненавидела математику, потому что ничего в ней не понимала – ведь, как говорил Пастернак, «заготовленные неожиданности скучнее арифметических задач». Ненавидела же я её из-за того, что наш учитель всегда мне говорил: «сотри с доски эту гадость и напиши другую».

Услышав знакомые слова, я тут же спросил Ёлу: «а как звали учителя ?»
Она ответила - «Иван Васильевич» - и мы поняли, что из одной школы (Ёла училась даже в одном классе с другим мехматянином, вице-президентом Московского математического общества, Юлием Сергеевичем Ильяшенко).

Оказалось, что Морозкин решил проблему Ёлы так: «я не буду проверять ни одну твою работу, буду за всё, не читая, ставить тройку, хотя больше, чем на двойку, ты не потянешь, я вижу, никогда. Но ты зато, почаще, дари мне свои рисунки – ведь я вижу, как ты любишь рисовать, и как здорово у тебя получается».

Мой учитель Андрей Николаевич Колмогоров, будучи деканом, всегда говорил: «нужно уметь прощать талантливым людям их талантливость (хоть это нам и трудно)».
И он спас от исключения из МГУ немало талантливых студентов (вплоть до уровня академиков).

Одного, например, хотели исключить за игру в карты в общежитии (он же, впрочем, «не выпускался за границу за то, что облевал милиционера») - Колмогоров же сослался на открытые им теоремы.

Другого студента хотели исключить за то, что он напал на комсомольский патруль, проверявший (в общежитии), кто с кем спит. А у этого студента (ученика Колмогорова Толи Карацубы, родом из Грозного) ночевал в это время навещавший его брат – хорошо, что альпинист Толя, взявший впоследствии 3 семитысячника на Памире, не пустил тогда в ход свой ледоруб, так что патруль остался в живых. Спасти Толю от снятия со стипендии не удалось – но Андрей Николаевич из своих личных денег платил ему тогда сумму большую, чем отнятая стипендия, и Толя благополучно окончил мехмат (став впоследствии заведующим отделом Теории чисел Математического института имени В.А. Стеклова Российской Академии Наук - он скончался 28 сентября 2008 года).

Возвращаясь к 59-ой школе, вспоминаю ещё нашего завуча, Марию Сергеевну Борисевич, преподававшую нам литературу. Например, она вдохновенно читала нам на уроках стихи (Пастернака и Ахматовой, Мандельштама и Цветаевой, Гумилёва и Есенина, Волошина и Ходасевича, Маяковского и Северянина) - чтобы объяснить, «как низко пало искусство» в предреволюционные годы. Мы до сих пор помним именно с её слов и акмеистов, и Блока, и сонеты Шекспира, и «папу Вильяма» Льюиса Кэрролла, и лимерики Лира, и Бёрнса (Маршака) – а ведь в те годы никакой «иностранной литературы» в школе не предполагалось!

Зато политическое образование школа давала безупречное. Например, Вера Владимировна Сказкина, учившая нас истории, так объяснила преимущество колхозного строя перед кулацкой деревней: «а чем коллективно вести хозяйство легче и удобнее, чем единолично, вам лучше меня объяснят ваши родители».

Но мне было как-то приятнее то, что рассказывал у нее дома Сергей Данилович Сказкин, её муж, знаменитый историк средневековья (и академик АН СССР). Зато Вера Владимировна ежегодно вывозила свой класс к Парамоновскому оврагу на Волгуше (около Влахернской Обители близ станции «Турист», не доезжая немного до Яхромы и Дмитрова) – кататься неделю весенних школьных каникул на лыжах.

Бывая и сейчас то в Горках и Шиблове, то в Стрекове и Ольгове близ Парамонова, я у каждого белого гриба и лесного родника вспоминаю, как бегал здесь на лыжах шестиклассником и как класс едва успевал высушить насквозь промокшую одежду на топившейся всю ночь русской печи в доставшейся нам избе.

Д - 4. Расскажите, пожалуйста, как происходило Ваше поступление на Мехмат МГУ.

Именно, если Вы закончили школу с медалью, то кто проводил с Вами вступительное собеседование и чем оно Вам запомнилось ?

А если медали не было, то кто принимал у Вас устный экзамен по математике и был ли он для Вас трудным ?

А. Про собеседование при поступлении ничего не помню – я каждый год награждался на Московских Математических Олимпиадах, но обычно получал вторую премию (как в своё время Максвелл или Кельвин) – возможно, это тоже учитывалось при приёме.

Д - 5. Я у всех своих собеседников спрашиваю, кто были у них первыми лекторами:

а) по Математическому анализу,
б) по Алгебре,
в) по Аналитической геометрии ?

Этот же вопрос я обращаю и к Вам.

А. Анализ читал Лев Абрамович Тумаркин, алгебру – Евгений Борисович Дынкин, аналитическую геометрии – Павел Сергеевич Александров.

Лекции Льва Абрамовича я и сейчас вспоминаю с удовольствием. Хотя он сам и был менее крупным по своим личным открытиям математиком, чем другие лекторы (а ведь рядом такие же лекции читал Александр Яковлевич Хинчин), его лекции были удивительно богатыми (не всеми оцениваемой информацией).

По-видимому, он просто добросовестно излагал классические французские курсы типа (трехтомного) учебника Гурса - а ведь в них было много такого, чего в «более современном» изложении из анализа вычеркнули (хотя кое-что восходило и к «Введению в анализ бесконечно малых» Эйлера, который я тоже очень полюбил на первом курсе).

Вот пример: Тумаркин (говоря о теореме о неявной функции) рассказал первокурсникам, что алгебраическое уравнение степени *n*

$$f(x, y) = 0$$

задает алгебраическую кривую на проективной плоскости CP^2, комплексные точки которой (включая бесконечно удаленные) образуют поверхность, диффеоморфную (как вещественное многообразие) сфере S^2 с *g* ручками. Число *g* («род» римановой поверхности кривой) для гладкой поверхности выражается через степень *n* формулой

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

(при степенях *n* равных 1 и 2 поверхность сферична).

Если же есть особые точки, то их число не превосходит указанного числа (даже с учётом их кратностей), а род поверхности уменьшается на число особых точек.

Если риманова поверхность сфера, то любой интеграл от рациональной функции *R*

$$I(X) = \int_{f(x,y)=0}^{X} R(x, y)dx$$

берётся в элементарных функциях. Например, это всегда так при *n* = 1 и 2, причём интегралы тогда берутся уже при помощи таблиц Ньютона или «подстановок Эйлера».

Если же поверхность не сфера, то существуют такие рациональные функции *R*, что интеграл через элементарные функции от *x* не выражается. Например, это так, когда риманова поверхность – тор, как для интеграла

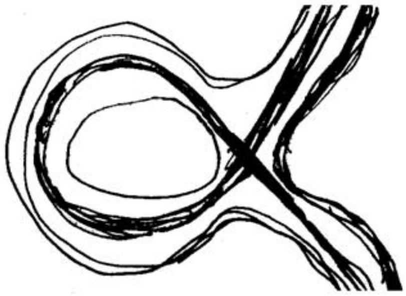
$$I(X) = \int_{X_0}^{X} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + ax + b}}$$

называемого эллиптическим, $g = 1$.

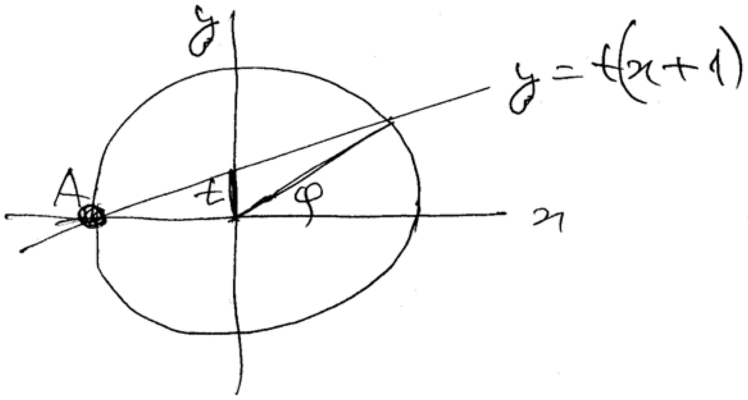
Кроме того, если кривая рода $g = 0$ вещественна, то всю её можно нарисовать (на проективной плоскости) одним росчерком пера, не отрывая его от бумаги. Например, это так для случая $n = 2$.

Гипербола тоже рисуется одним росчерком, а не двумя: около бесконечно-удалённой проективной прямой в RP^2 картинки таковы:

Напротив, эллиптическая кривая $y^2 = x^3 + ax + b$ в RP^2 может состоять из одной или из двух компонент связности (даже если она гладкая и её комплексные точки образуют тор, $g = 1$)



Вдобавок, из того, что риманова поверхность окружности $y^2 + x^2 = 1$ есть сфера (то есть комплексная проективная прямая CP^1), сразу видно, как найти все «египетские треугольники», имеющие катеты и гипотенузы целых длин ($3^2+4^2=5^2$, $12^2+5^2=13^2$ и т.д.)



Для этого проведем через точку A ($x= -1$, $y=0$) на окружности прямую $y=t(x+1)$ наклона t ($t=tg\ \varphi/2$ при $\varphi=arg(x+iy)$). Одна из точек пересечения этой прямой с окружностью, нам известна – это A. Подстановка y из уравнения прямой в уравнение окружности дает для x квадратное уравнение. Зная один из его корней ($x = -1$ в точке A), находим (по теореме Виета) второй:

$$x^2 + t^2 (x^2 + 2x + 1) = 1 \quad \Rightarrow \qquad x^2(1 + t^2) + 2t^2x + (t^2 - 1) = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$x^2 + \left(1 + \frac{t^2-1}{t^2+1}\right)x + \frac{t^2-1}{t^2+1} = 0 \Rightarrow \qquad x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad y = t\left(\frac{1-t^2}{1+t^2} + 1\right) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Числа x и y рациональны если и только если t рационально. А если $t = u/v$ (с целыми u и v), то

$$x = \frac{v^2-u^2}{v^2+u^2}, \qquad y = \frac{2uv}{v^2+u^2}$$

и числа

$$X = v^2 - u^2, \qquad Y = 2uv, \qquad Z = v^2 + u^2$$

составляют (любой) египетский треугольник:

$$X^2 + Y^2 = Z^2.$$

Эти странички из лекции Тумаркина доставляют первокурсникам, например, следующие 11 вещей:
- ясное понимание проективной геометрии кривых;
- понятие римановой поверхности алгебраической кривой;
- понятие топологического рода g поверхности;
- формулу («Римана-Гурвица») для рода (вместе с желанием доказать её);
- понятие абелева интеграла:
- элементарность абелевых интегралов рода 0;
- неэлементарность эллиптических (и других) абелевых интегралов;
- геометрический смысл подстановок Эйлера;
- рациональность кривых рода 0;
- связь рациональности кривых с явной разрешимостью диофантовых уравнений;
- уникурсальность вещественных алгебраических кривых (и неуникурсальность, например, левой кривой хотя правая и уникурсальна).

Все эти многообразные связи разных областей математики (вплоть до логики и теории чисел с одной стороны, топологии и элементарного интегрирования – с другой) скрываются за простыми примерами скучнейших интегралов, в которых можно часами упражняться, вовсе не понимая красоты огромного мира идей десятка выделенных выше теорий, осознание тесной связи которых между собой само является, быть может, самым ярким вкладом описанной выше лекции Тумаркина в воспитание его слушателей.

Я с сожалением должен заметить, что десятки более «современных» курсов анализа проходят мимо всего этого богатства классического материала (боюсь, что из-за того, что сами лекторы им не владеют). Некоторые из моих сверстников пытаются оживить сложившиеся традиции скучных курсов. Но, к сожалению, иногда и они уступают классическому совершенству стиля Гурса и Тумаркина.

Например, я встречал рассуждение такого типа: «Площадь Мадагаскара в 10 раз больше площади Сицилии. Величина площади имеет размерность квадрата линейного размера. Следовательно (согласно П-теореме классической статфизики) жители Мадагаскара в среднем в $\sqrt{10} \approx 3$ раза выше жителей Сицилии».

Евгений Борисович Дынкин в своем курсе лекций по алгебре явно следовал школе Ландау. Например, типичная его лекция начиналась со слов: «В прошлый раз мы рассматривали чётные и нечётные перестановки. Девушка в третьем ряду, слева, в красном платье – ответьте, пожалуйста, перестановка (3, 2, 1) цифр 1, 2, 3 – чётная она или нечётная?».

Как это ни странно, сейчас я вижу, что он многого сам не понимал как следует в той элементарной и линейной алгебре, которую нам преподавал (и которую он обогатил своими замечательными теоремами, например, в теории групп и алгебр Ли).

Например, это относится к «теории параллелограмма Ньютона», которую Ньютон называл «своим главным вкладом в математику, доставляющим решения всех её уравнений – и алгебраических, и дифференциальных и интегральных», или к «правилу знаков» Декарта (оценивающим число вещественных корней системы многочленов числом ненулевых коэффициентов этих многочленов), или к «характеристике Штурма» пары вещественных многочленов (перенесенной Кронекером на наборы $n + 1$ вещественного многочлена от n вещественных переменных) – связи всего этого с вещественной алгебраической геометрией (и её – с квантовой теорией поля) – явно не были известны нашему лектору.

Зато для подготовки к экзамену Евгений Борисович приготовил нам десятки задач, некоторые из которых хотелось решать.

Формулируя эти задачи, он заметил: «вот, задачу 18 я и сам решать не умею – если кто-нибудь из вас её решит, сообщите мне об этом на консультации перед экзаменом, это ведь будет новый научный результат!»

К указанной консультации задачу решили двое – В.И. Арнольд и А.А. Кириллов. Рассказанные ими решения были совершенно разными: у меня – скорее, топологические, а у Кириллова – скорее, алгебраические рассуждения.

Я помню, что Евгений Борисович сразу же заподозрил моё геометрическое решение в несамостоятельности. Он стал (публично) задавать мне вопросы о соотношении моих идей с понятиями индекса векторного поля и степени гладкого отражения, с гомологиями и гомотопиями. Я никаких этих терминов и понятий не знал, понимал вопросы с трудом – придумал всё совершенно независимо от каких-либо теорий, а Евгений Борисович пытался уличить меня в плагиате. Минут через десять он понял, что ничего я заранее не знал и не использовал, что никто мне не помогал. Тогда он предложил нам написать (в Успехи математических наук) совместную статью, с обоими доказательствами. Так возникла моя первая научная работа.

Переписывали мы эту статью с Кирилловым семь раз – и каждый из нас критиковал часть другого, и Дынкин громил обоих. В конце концов, возник текст, удовлетворявший всех троих. Мне было поручено перепечатать его и отнести в редакцию (в те годы я уже подрабатывал в редакции ДАН СССР как «формулист» - вставлял формулы в перепечатанные тексты). Но я, вернувшись домой, случайно взял на книжной полке отцовской библиотеки старинную книгу в толстом кожаном переплете – «Analis» Коши (кажется, даже «Алгебраический анализ») – это была та самая книга, где Коши впервые навел бурбакистскую строгость ε-δ определений, изгоняя очевидные Ньютону понятия его анализа «предел при $n \to \infty$» или «предел при $x \to 0$». Открыв этот томик на случайной странице, я обнаружил там свою теорему: Коши выражал число нулей комплексного многочлена в области через индекс заданного многочленом векторного поля вдоль границы этой области, а из его формулы вывести наши результаты было уже нетрудно.

Так наша с Кирилловым первая научная работа и осталась неопубликованной.

Все же, эта ситуация не столь плоха, как история, происшедшая с читавшим Коши Абелем. Молодой человек, приехав в Париж, прочёл первую «строгую теорему», доказанную в курсе Коши: «если на отрезке [0, 1] последовательность непрерывных функций сходится в каждой точке, то и предельная функция тоже непрерывна на этом отрезке». Абель, занимаясь степенными рядами, хорошо знал, что x^n при $n \to \infty$ стремится к 0 при $0 \le x < 1$, но стремится к 1 при $x = 1$. Он сообщил об этом Коши.

В то же время Академия Наук отправила Коши на отзыв статью Абеля, где он доказывал невозможность решить в радикалах общее уравнение степени 5 (например, уравнение $x^5 + ax = 1$).

Коши умер через много лет, так и не дав на работу Абеля никакого отзыва. Она оставалась неизвестной несколько десятков лет, и когда Абель давно уже умер, Лиувилль обнаружил его мемуары в бумагах, оставшихся после Коши (рядом с мемуарами Галуа, которого постигла похожая участь, хотя он ошибок Коши и не указывал). В результате такого поведения Коши развитие и теории групп, и теории уравнений, и алгебраической геометрии, и даже теории чисел отстало лет на сорок (от того, что было бы, если бы релятивистские идеи Абеля о нормальных делителях стали сразу известными).

Так обстояло дело с анализом и с алгеброй для меня – первокурсника.

Что же касается аналитической геометрии, то здесь положение было иным: я перестал ходить на лекции Александрова, как только увидел, что он вовсе ничего не понимает в своей науке (путает аксиомы с теоремами и доказательства с определениями).

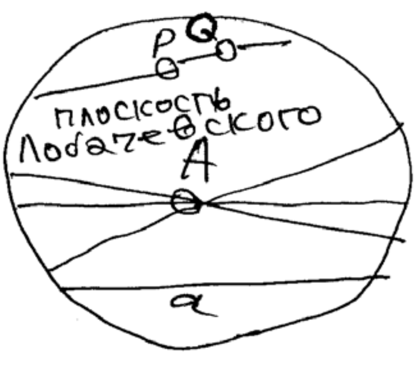
Вот типичный пример: что такое «геометрия Лобачевского»? Не стану повторять ошибочных её описаний, скажу только (обычно скрываемую) правду.

Лобачевский сформулировал *гипотезу* : постулат Евклида, что «через точку вне данной прямой на плоскости проходит одна и только одна прямая, не пересекающая данную прямую» независим от остальных (то есть не может быть из них выведен). Он пытался доказать эту гипотезу от противного в течение нескольких десятилетий. Для этого он пытался вывести из существования больше одной не пересекающей данную прямой противоречие, а для этого выводил из такого существования всё новые и новые следствия. Если бы какое-нибудь из этих следствий оказалось бы неверным, независимость была бы опровергнута. Однако работа Лобачевского к таким неверным следствиям его все не приводила. Он сделал вывод, что все эти следствия составляют новую геометрию, где постулат Евклида не выполняется, а противоречий нет.

Никакой теоремой этот вывод не был: это просто гипотеза. Лобачевский всегда понимал, что он её не доказал. Восхвалители Лобачевского восторженно говорят, что он свою геометрию построил. Но точный смысл этих слов – только то, что его попытки опровергнуть её не удались ему. Замечательно, однако, то, что гипотеза Лобачевского на самом деле верна. Это доказали (уже после него) несколько математиков

Мне больше всего нравится доказательство, данное Артуром Кэли (недооцененным, на мой взгляд, английским математиком XIX века). Кэли предлагает следующую модель геометрии Лобачевского (обычно называемую «Модель Клейна», подобно тому, как Америка не носит имени Колумба):

Рассмотрим в качестве «плоскости Лобачевского» открытый круг на Евклидовой плоскости и назовем «прямыми Лобачевского» все его хорды. Легко проверить, что все обычные аксиомы («через две разные точки P и Q проходит одна и только одна прямая» и т.д.) выполнены, но через точку A вне прямой а проходит много прямых, не пересекающих прямой a.



Если бы предположенное Лобачевским нарушение аксиомы параллельных Евклида противоречило остальным аксиомам геометрии Евклида, то противоречивой оказалась бы уже представляющая её модель: обычная геометрия Евклида (хорд круга).

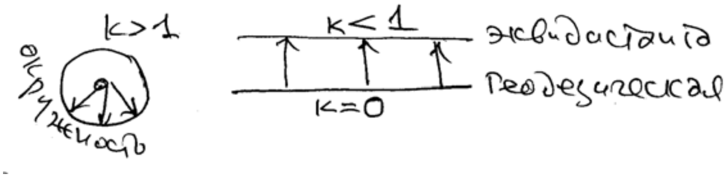
Ни в одном учебнике геометрии этого рассуждения нет – и я быстро понял, что Александров ни геометрии Лобачевского, ни проективной геометрии (о которой Кэли говорил, что «она – вся геометрия») просто не знал. Даже тот факт, что дополнение к точке на вещественной проективной плоскости есть лист Мёбиуса (каковой потому этот лист и открыл) был для Александрова «трудным примером абстрактной общей теории».

Векторное произведение тоже выходило за рамки его понимания. Даже тождество Якоби для него в курсе Александрова отсутствовало.

Взамен я читал на первом курсе увлекательный учебник Делоне и Райкова.
Борис Николаевич Делоне, альпинистский друг моего отца, еще до университета немало разговаривал со мной о математике – больше всего о квадратичных формах и решётках, цепных дробях и диофантовых приближениях.

Я тогда не стал всерьез этим заниматься, но после 1980 года вернулся к этим темам и использовал многие его советы в десятках своих статей о цепных дробях, их статистиках, палиндромах, многомерных обобщениях и связях с классификацией коммутативных градуированных алгебр Ли.

Из работ первого курса об этом я помню такую. Рассмотрим в n-мерном пространстве Лобачевского «спираль» постоянной геодезической кривизны k_1, постоянного «геодезического кручения» k_2 и т.д. (до «кручения» k_{n-1}, измеряющего отклонение кривой от проективной плоскости размерности n - 1). «Как они выглядят?» - спросил я себя.
Если, например, $n = 2$, то кривые постоянной геодезической кривизны k (на плоскости Лобачевского) оказываются окружностями при $k > 1$ и эквидистантами (равноудаленными везде от единой прямой) при $k < 1$:



А как обстоит дело в больших размерностях ?

Оказывается, ответ зависит от величины некоторой цепной дроби (элементы которой просто выражаются через кручения ($k_1, \ldots, k_{n-1}$)). А именно, если значение этой дроби больше 1, то кривая ограничена, а замыкание кривой компактно (и является тором некоторой размерности, чаще всего равной n - 1). Если же значение цепной дроби меньше 1, то кривая не ограниченна (а именно, равномерно движущаяся по ней точка уходит в бесконечность, как для эквидистанты).

Как это ни удивительно, я до сих пор нигде не видел опубликованного доказательства ни этой теоремы, ни других моих открытий того времени из аналитической и проективной геометрии.

Вот пример моего результата пятидесятых годов, который я опубликовал только недавно: *три высоты треугольника Лобачевского пересекаются в одной точке.*

Эта теорема является просто тождеством Якоби

$$[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0$$

в алгебре Ли квадратичных форм [1]

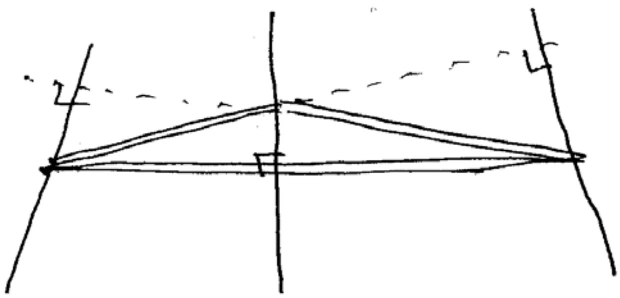
$$Ep^2 + Fpq + Gq^2$$

на симплектической плоскости R^2 (с формой $\omega = dp\Lambda dq$).

---

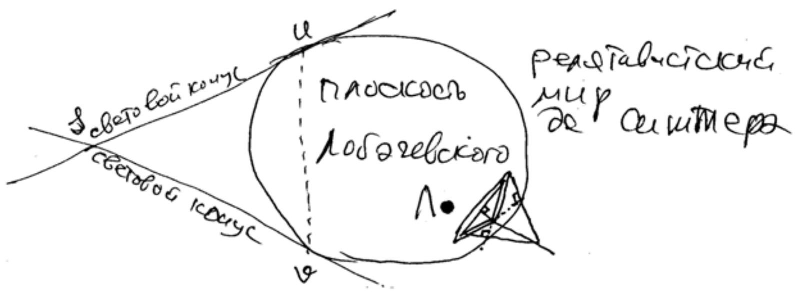
[1] «Скобка Пуассона» $[a, b]$ квадратичных форм a и b определяется формулой $[a,b] = \frac{\partial a}{\partial p}\frac{\partial b}{\partial q} - \frac{\partial a}{\partial q}\frac{\partial b}{\partial p}$.

Интересно, что к этой теореме имеются и контрпримеры, очень тупоугольные треугольники, один из углов которых больше 120 градусов:



эти три высоты в геометрии Лобачевского общей точки не имеют.

Оказывается, в таких случаях точка пересечения высот, все же, есть, только она не принадлежит плоскости Лобачевского, а лежит в релятивистском «мире де Ситтера».
Мир де Ситтера получается из модели Кэли плоскости Лобачевского так: круг модели Кэли надо считать частью своей проективной плоскости. Лист Мёбиуса, дополняющий круг до этой проективной плоскости (грубо говоря, это дополнение к кругу геометрии Лобачевского на плоскости, содержащей этот круг) и есть двухмерный мир де Ситтера.



Теорема о пересечении высот верна для треугольников с вершинами внутри или вне плоскости Лобачевского всё равно, – только эти точки пересечения тоже могут оказаться где угодно. В описании при помощи квадратичных форм точки плоскости Лобачевского – это знакоопределённые квадратичные формы (рассматриваемые с точностью до скалярного множителя), а точки мира де Ситтера – гиперболические. Причём точки s мира де Ситтера можно рассматривать как прямые uv плоскости Лобачевского, а точки плоскости Лобачевского – как прямые мира де Ситтера (чтобы понять это, полезно нарисовать соответствующую точке Λ прямую λ в мире де Ситтера).

Ни всей этой геометрии, ни проективной теории, ни мира де Ситтера, ни замечательных эллиптических координат элементарной аналитической геометрии в курсе Александрова, к сожалению, не было – он их и не знал, и, вдобавок, (в отличие от Делоне) изгнал из своего курса, следуя требованию Декарта, все чертежи (вместе со всевозможными связями с физической реальностью, экспериментами и воображением). Подобная аналитическая геометрия изучает не кривые и поверхности, а, скорее, идеалы и модули. Но уж тогда следовало бы сообщить, хотя бы, о теоремах Гильберта о конечности базисов и о сизигиях, о базисах Грёбнера вычислительной математики и экологии, о теореме Тарского-Зайденберга и о проблемах алгоритмической разрешимости задач алгебраической и диофантовой геометрий – а ничего этого Александров, я думаю, не знал.

Д - 6. Легко ли Вы влились в "студенческую атмосферу" Мехмата МГУ ? Или такой проблемы для Вас не существовало, поскольку уже на 1-ом курсе сразу же оказалось много Ваших знакомых по ляпуновскому «добровольному научному обществу» ?

А. Проблема была (и остаётся) в том, что мои точки зрения на математику и её роль в науке всегда резко отличались от господствовавших.

Несколько лет назад (около 2000) мой давний друг Юра Манин так объяснил мне разницу. «Ты утверждаешь, - сказал он, - что математика полезна для научно-технического прогресса: и физика, и техника, и ускорители, и спутники без математики не были бы построены. Между тем, на самом деле огромный вклад математики в дело человечества не ускорение, а именно замедление этого научно-технического прогресса. Если бы талантливейшие люди, доказавшие теорему Ферма, использовали бы свои таланты для совершенствования самолетов или автомобилей, то вреда было бы гораздо больше».

Положение остается примерно таким же и сегодня. Другой мой давний друг, Дима Аносов, сказал о наших разногласиях так: «Арнольд верно пишет, что Гильберт в своей статье 1930 года «Математика и естествознание» утверждает, что геометрия – часть физики. И тот же Арнольд цитирует слова Серра, что «математика и физика не имеют ничего общего». Если бы Арнольд, как я, прочёл и понял Аристотеля, то он увидел бы, как и я, что противоречия у этих двух великих математиков нет: раз геометрия – часть физики, а у математики с физикой нет ничего общего, то у математики с геометрией нет ничего общего, так что геометрию пора исключить из курсов средней школы (чего Арнольд, не понимая, не хочет)».

Но я всегда старался заниматься такой математикой, которая позволяет разбираться в естественнонаучных вопросах. Когда в 1960-е годы мои с А.Н. Колмогоровым работы были выдвинуты на Ленинскую премию, математическая комиссия забраковала их. Мне рассказывали, что доводы были такие: эти работы не доставляют никаких новых сведений ни об элементах пустых множеств, ни о всюду расходящихся рядах, ни о нигде не дифференцируемых функциях.

Против этих доводов возражали специалисты других специальностей. Например, М.В. Келдыш хвалил работы по небесной механике, которые его ученики использовали при анализе движения искусственных спутников Земли, а занимающиеся ускорителями и управляемыми термоядерными реакциями физики – для удержания заряженных частиц в магнитных ловушках и для обеспечения устойчивости пучков ускоряемых частиц.

Общее собрание комитета премию присудило, но Людмила Всеволодовна Келдыш (бывшая оппонентом моей кандидатской диссертации) предупредила меня: «бойся Славки – он хочет и Серёжу (её сына) и тебя сделать такими же генералами от науки, каким стал сам. Но у него, когда кончал мехмат, был выбор – либо делаться генералом от науки, либо расстреляют, как многих его друзей. А вас с Серёжей теперь никто расстреливать не хочет – занимайтесь спокойно своей наукой, не поддавайтесь на приманки, закидываемые Славкой».

К тому времени, однако, я и сам уже всерьёз спорил с Мстиславом Всеволодовичем. А именно, у меня было предложение о компьютерном расчёте многолетних орбит небесных тел. Дело в том, что уравнения Гамильтона небесной механики не имеют аттракторов (так как фазовый поток сохраняет объёмы передвигаемых им областей фазового пространства).

Между тем, при компьютерных расчетах такие аттракторы наблюдались. Объяснялось это тем, что разностные схемы, по которым вычислялось движение точек фазового пространства, аппроксимировали непрерывный поток разностной схемой, а для неё аттракторы уже возможны (так как аппроксимирующий поток объёмов уже не сохраняет). И поэтому я предложил М.В. Келдышу, что коэффициенты аппроксимирующих схем надо бы подобрать так, чтобы получающийся поток с дискретным временем состоял из симплектоморфизмов («канонических преобразований» в терминах механики), тогда аттракторы станут невозможными и у разностных схем, так что парадоксальные компьютерные выводы о стремлении орбит с разными начальными условиями к одному предельному положению исчезнут.

Ответ Келдыша крайне меня удивил: он сказал, что «вычислить такие коэффициенты схем невозможно потому, что для этого нужны были бы большие компьютерные мощности, а у нас в стране их нет и не будет, потому что я доложил руководству, что стране компьютерную технику развивать незачем: американские атомные бомбы рассчитывались фон Нейманом при помощи компьютеров, а советские – такими замечательными математиками, как Канторович, который сумел и без компьютеров вычислить всё, что было нужно».

Я не в силах был с этим согласиться: пытался убедить Мстислава Всеволодовича, что отставания в компьютерной технике нанесли стране большой ущерб, причём, не только в деле расчёта взрывов бомб и орбит ракет, но и в многообразных хозяйственных проблемах, вплоть даже до выбора цен в супермаркетах.

Единственное, чего я добился, был совет Мстислава Всеволодовича передать моё предложение представителям NASA, которые должны вскоре приехать в Москву. Но и американцы отказались реализовывать мои предложения. Они сказали, что у них столь дешевы и столь многочисленны компьютеры, что они в состоянии в тысячи раз уменьшить шаг расчетов орбит по времени. И тогда аппроксимация будет столь мало отличаться от истинного (несжимаемого) фазового потока, определяемого дифференциальными уравнениями Гамильтона, что нужда в реализации моего предложения отпадёт – только расчёт станет, правда, дороже.

Через несколько лет я встретил в Париже китайского стажёра Фенг Канга, который сразу оценил мое предложение положительно. И когда он, вернувшись в Китай, стал там главным действующим лицом в деле расчёта спутниковых орбит, то он нашёл достаточно компьютеров, чтобы вычислить нужные коэффициенты аппроксимирующих разностных уравнений.

Но начавшаяся затем культурная революция отправила его в шахты простым шахтёром. Его здоровья хватило на те годы, после которых начальство узнало, что и американцы переняли его схемы и рассчитывают теперь свои орбиты по ним (позже у американцев их позаимствовали и российские исследователи орбит спутников). В результате Фенг Канг был избран в академики, вернулся к расчётам спутниковых орбит в Пекине, его труды были роскошно изданы с золотым тиснением на обложке.

В 1998 году я провел семестр в Гонконге (в качестве профессора Университета Науки и Технологии), но пекинские представители сагитировали меня заехать на несколько недель и туда. Я надеялся снова встретить Фенг Канга, но, к несчастью, он не дожил до моего приезда: умер вследствие чрезмерно утомительных торжеств, устроенных Академией для его чествования. Предложенный таким образом метод расчёта называется сегодня «симплектическим интегрированием».

Несмотря на сопротивление большинства, мне удалось реализовать многие свои идеи – и симплектическое интегрирование, и восстановление школьного математического образования в России (включающего и логарифмы, и геометрию, и понимание того, что в арифметике дробей $1/2 + 1/3 \neq 2/5$).

Но, отвечая на Ваш вопрос, я вспомнил и о неприятии А. Пуанкаре математиками его эпохи: его учитель Эрмит, например, браковал его (даже на вступительном экзамене в Эколь Нормаль) за то, что «на его чертежах окружности неотличимы от треугольников».

Пуанкаре нашел выход – он поступил не в Эколь Нормаль, а в Эколь Политехник, да и в Академию Наук был избран не по математике, а по астрономии (для чего и написал свою главную математическую книгу «Новые методы небесной механики»).

Но самое главное – он изобрел топологию, в которой треугольники и окружности эквивалентны.

Я понял, что и мне нужно идти по его пути – перечислять созданные мною за 60 лет работы области математики и физики было бы слишком длинно, но я упомяну, например, «теорию КАМ», «диффузию Арнольда», «квантовую теорию катастроф», «теорию каустик и волновых фронтов», «вещественную алгебраическую геометрию», «симплектическую и контактную топологию», «статистику многомерных цепных дробей», «теорию сложности динамических систем», «теорию бифуркаций инвариантных многообразий», «исследование резонансов в теории сердечной аритмии», «теорию адиобатических инвариантов», «теорию арифметической турбулентности», «проективную геометрию и эргодическую теорию полей Галуа».

Д - 7. Вы с 1 -го курса начали посещать спецсеминары и спецкурсы ? Чей-нибудь спецкурс или спецсеминар Вам особенно запомнился ?

А. Среди многочисленных замечательно интересных семинаров я помню огромный семинар И.М. Гельфанда, оказавший решающее влияние на математическую жизнь в Москве – несмотря на его крайнее бесчеловечие (разносы были тем более резкие, чем выше был социальный статус охаимаевого, будь он докладчиком или слушателем, указавшим докладчику контрпример).

Напротив того, А.Н.Колмогоров поражал (неожиданно) доброжелательным отношением ко всем участникам семинара – он исходил из (странного) предположения, будто всякий собеседник столь же умён, как он сам, и ему не мешала даже явная ошибочность этого благородного предположения. Зато, в отличие от сразу становившихся знаменитыми резких высказываний Гельфанда, предложения Колмогорова обычно оставались никем не понятыми (и, во многих случаях – например, в описании «природы турбулентности» – появились десятилетия спустя в печати под именами списавших эти предложения математиков других стран).

Когда я начинал читать лекции на мехмате, Колмогоров сказал мне: «Ни одно слово лекции никакого значения для слушателей не имеет – они всё равно ничего не поймут. Нужно только, чтобы они поняли из курса лекций, какие вопросы будут им заданы на экзамене и как на эти вопросы надо отвечать».

Меня поразило здесь то, насколько точно Колмогоров понимал реакцию студентов на его курсы: его действительно никто не понимал (да и невозможно это было, так как ни одна фраза не была грамматически правильной – то ни одного подлежащего, то сразу три сказуемых, с неразборчивым мычанием вместо дополнения). Я, правда, извлек из этих (непонятных) лекций (о самых разных предметах, включая теорию случайных процессов и гидродинамику, теорию передачи информации и эргодическую теорию динамических систем) чрезвычайно много полезного, так как никогда не пытался разгадывать его грамматические ребусы, а стремился поскорее понять его цели, идеи и методы, превращая эти замыслы в теоремы и доказательства (иногда совсем не те, что у него) совершенно самостоятельно. Гельфанд или Дынкин запрезирали бы меня за такое (чего я, впрочем, не боялся), но Колмогоров, напротив, только радовался.

Ближе к Колмогорову, чем большинство математиков, оказались такие мои многолетние собеседники, как Я.Б. Зельдович, И.Г. Петровский, В.А. Рохлин, М.М. Постников, С. Смейл, Ю. Мозер, Р. Том, Дж. Милнор, Э. Брискорн, Х. Уитни, Ж. Лере, Л. Шварц, А. Вейль, Д.К. Фаддеев, Ю.В. Линник. О семинарах каждого из них можно было бы долго рассказывать, и список, конечно, не полон, я включил в него только тех, от кого устно научился особенно многому.

Д - 8. Правильно ли я понял (всё из той же Вашей книги), что первую свою курсовую работу (на 2 –ом курсе) Вы писали у Евгения Борисовича Дынкина и лишь на 3 –ем курсе стали учеником Андрея Николаевича Колмогорова ?

А. Ещё до обучения у Дынкина, в течение всего первого курса, я многому научился у Анатолия Георгиевича Витушкина – это был «кружок по анализу», где давались только определения и формулировки теорем, а доказательства (неделю спустя) предлагали студенты. Именно эта суровая школа (с беспощадной критикой со стороны ровесников и нетерпимостью к любым ссылкам на что-либо прочитанное) научила меня отличать правильное доказательство от неправильного. К каким только измышлениям друзей не приходилось ежедневно придумывать контрпримеры !

Учение у Колмогорова заключалось для меня в том, что он сформулировал к семинару десяток задач – и уехал в Париж. Когда он вернулся, я показал ему свои решения - и он объяснил мне, что я, не зная об этом, решил 13-ю проблему Гильберта (доказав противоположное предположению Гильберта утверждение). Но уроки Колмогорова были многообразны: еще до отъезда он одобрил одну мою (мелкую) работу, и я отдал ему пять страниц для математической статьи, чтобы он представил её в ДАН СССР.

Через неделю Андрей Николаевич вернул мой текст с такими словами: «Ни один, даже самый гениальный, студент не в состоянии написать хорошую научную статью, даже если у него правильно доказаны интересные результаты: искусство доказывать теоремы и решать задачи – совсем не то, что искусство писать статьи. Поэтому долг научного руководителя – переписать, от слова до слова, весь текст первой работы студента. Не надо добавлять никаких новых результатов или точек зрения: иногда достаточно разбить фразу на три, иногда нужно отделить определение изучаемого объекта от формулировки теоремы о нём, иногда следует сделать где-нибудь красную строку. Если студент умён, его вторую работу переписывать уже не придется, он научится, как писать самому. Но бывают и другие ученики – причём вовсе не обязательно их результаты слабее, чем у умного…»

Мне не раз случалось потом узнавать стиль Колмогорова в чьих-либо первых работах (даже у таких математиков, о которых я узнавал лишь позже, что они действительно были его учениками).

Если мне не изменяет память, в трёх томах собрания сочинений Гельфанда имеются всего две статьи без соавторов. Одна из них (в томе III) подписана одним В.И. Арнольдом (я отказался писать с Израилем Моисеевичем совместные работы, сказав ему, что «предпочитаю сохранить с Вами хорошие личные отношения». Израиль Моисеевич ответил: «О, так значит, не только я, но и Вы это тоже понимаете ! Ни о какой совместной работе речи нет – она будет Ваша, только опубликовать её я прошу в моем собрании сочинений»).

Вторая работа без соавторов – «Нормированные кольца» (то есть «Банаховы алгебры»). Я думаю, это, в сущности, первая работа Израиля Моисеевича (а он был, как и я, учеником Колмогорова – Андрей Николаевич говаривал даже, что «только в беседах с этими двумя учениками испытывал ощущение присутствия высшего разума (то есть, нечеловеческое провидение)»).

После моей студенческой работы о проблеме Гильберта Колмогоров сказал мне, что я ему больше не ученик – обсуждать со мной он готов что угодно, но не как с учеником, а как с независимым самостоятельным исследователем. Жаль, что я не записывал эти интереснейшие разговоры.

Д – 9. Регулярно ли Вы встречались с Андреем Николаевичем или (как нередко сейчас бывает у студентов с их научными руководителями) подолгу "исчезали" из его поля зрения ?

А. Когда Колмогоров был в Москве, он обычно просил меня еженедельно приезжать к нему на дачу в Комаровку – зимой это означало примерно сорокакилометровый лыжный пробег в плавках, причем я даже обычно его обгонял под конец, хотя вначале одевался теплее.

В последний год своей жизни, когда ученики устраивали непрерывную смену восьмичасовых дежурств у Андрея Николаевича, что и я исполнял раза два в неделю, Андрей Николаевич однажды (в марте) встретил меня такими словами: «Не заболели ли Вы ? У меня тут был Леня Бассалыга, и он рассказал о Вас странную вещь: он встретил Вас на лыжах где-то между Ясеневым и Дубровицами. Ваш маршрут, 60 км: Ясенево – Дубровицы – Троицк - Теплый Стан я знаю и одобряю. Но Леня говорит, что, хотя было всего -20^{0}С, и рубахи на вас не было, штаны Вы, все-таки, не сняли. В чем тут дело – может быть, пора уже вас лечить ?»

Но в более ранние годы Андрей Николаевич ездил так много (да и я немало), что встречи с ним были вовсе не еженедельными. Только под конец Андрей Николаевич стал жаловаться, что из-за болезни Паркинсона с трудом справлялся с морскими волнами у Батума. А после этого, когда мы бегали с ним на лыжах и переходили по мартовскому (или даже февральскому) льду Клязьму, ему стало трудно перепрыгивать на лыжах через забереги (лужи воды поверх льда вдоль его примыкающей к берегу линии). Уже почти ослепнув, Андрей Николаевич все же хотел пройти свой обычный сорокакилометровый маршрут по моей лыжне.

Зато в байдарочном походе (от Селижарова до Дубны, через озеро Селигер, озеро Серемо, реку Граничную, озеро Граничное, реку Шлину, озеро Шлино, Вышневолоцкое Заводское водохранилище, реку Тверцу, Волгу, Лисицкий Бор, остров «Грабиловоу» на Московском море) Андрей Николаевич убедил меня, что проходить, как мы это делали, в день на веслах по семьдесят километров – норма (хотя я и пытался выгадать время для сбора земляники, которую он тоже любил).

Помню его рассказ, как он еще до войны с опасением переплывал на байдарке многокилометровой ширины залив озера Ильмень: волны были много выше метра высотой. И вдруг, посредине залива, встретилась лошадь, спокойно переходившая этот залив вброд, таща за собой телегу.

В походе Андрей Николаевич вдохновенно фотографировал (особенно, любимую им гранитную архитектуру Вышнего Волочка, где шлюзы, плотины, мосты, Сиверсов канал и каналы Мсты и Тверцы имеют вполне Петербургский вид, хотя назначенный для этого Екатериной Сиверс, устроитель водного пути с Волги в Петербург, и был голландцем).

Д - 10. При окончании Мехмата МГУ Вас, разумеется, рекомендовали в факультетскую аспирантуру, поскольку Вы уже математически прославились решением XIII проблемы Гильберта. Но для поступления в аспирантуру требовалось ещё успешно сдать Госэкзамен по основам марксизма.-ленинизма. С его сдачей не было ли у Вас проблем , подобных тем, которые Вы красочно описали в своей книге, когда уже Вам самим довелось участвовать в его приёме ?

(примеч. Д.: Поскольку Владимир Игоревич объединил ответ на этот вопрос с ответами на последующие четыре вопроса, то я привожу сразу и эти вопросы).

Д - 11. Я думаю, излишне спрашивать, как прошёл для Вас экзамен по атематике при поступлении в аспирантуру – несомненно, он прошёл блестяще. Но всё же, кто его у Вас принимал ? И запомнилось ли Вам что-нибудь с этого экзамена ?

Д - 12. Кандидатскую диссертацию Вы защитили в 1961 году, то есть за год до окончания аспирантуры. Кто по ней были у Вас оппоненты и где происходила её защита – на Мехмате МГУ ? И вообще, запомнилась ли Вам её защита чем-нибудь особенным ?

Д - 13. После защиты кандидатской диссертации Вы стали ассистентом Мехмата МГУ (как я понимаю, по кафедре дифференциальных уравнений) и начали преподавать на нашем факультете. Сразу же Вы нашли «свой стиль» проведения занятий ? Много ли Вы к ним готовились или Вы предпочитали «педагогические экспромты» ?

Д – 16. Вы защитили свою докторскую диссертацию в 1963 году. Кто были по ней оппоненты и где происходила её защита ?

А. На вопросы 10, 11, 12, 13 и 16 подробно отвечать не буду – кое-что об этом содержится в предыдущих ответах, а интересного добавить вроде бы нечего. Пожалуй, только одна фраза: когда за решение проблемы Гильберта кто-то предложил присудить сразу докторскую степень, то Колмогоров ответил: «А зачем ? Не надо – у него другие результаты прекрасно составят докторскую диссертацию на совсем другую тему».

И правда, в 1961 году, во время защиты кандидатской диссертации, у меня уже было немало результатов по той «теории КАМ», которая была защищена в 1963 как докторская диссертация «Проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике». Например, работа с решением проблемы Биркгофа (об устойчивости эллиптических неподвижных точек отображений плоскости на плоскость) была опубликована уже в 1961 году, а основные результаты об устойчивости планетных систем, опубликованные в 1962 году, уже были во время защиты 1961 года получены – только «диффузия Арнольда» добавлена в 1963 году, да и к этому открытию я был в 1961 году близок.

Д - 14. Когда появился на нашем факультете Ваш собственный спецсеминар ? Быстро ли он "оброс" студентами ? Легко ли Вы находили к ним свой подход ?

(примеч. Д.: здесь я также привожу сразу следующий вопрос, так как Владимир Игоревич, по существу, дал объединённый ответ на оба эти вопроса).

Д – 15. Кто был Вашим 1 –м аспирантом ?

А. Ещё в студенческие годы я еженедельно вёл занятия («кружок») со школьниками, многие из которых стали впоследствии моими учениками на мехмате.

Помню, что Андрей Николаевич Колмогоров, будучи председателем оргкомитета очередной московской математической олимпиады, рассказал мне, как происходило награждение одного из моих учеников. Рядом с Андреем Николаевичем сидела дама из Гороно, и на неё вид этого призера произвел особое впечатление. «Как приятно, - сказала она, - что первую премию на московской математической олимпиаде (это была целая связка чудесных книг, вроде «Что такое математика» Куранта и Роббинса, «Числа и фигуры» Радемахера и Теплица, «Наглядная геометрия» Гильберта и Кон-Фоссена, «Задачи из анализа» Полиа и Сеге) получает простой деревенский школьник: вот, он учится в школе деревни Хотьково !» Колмогоров не стал ей объяснять, что Андрей Леонтович, действительно имевший вполне деревенский вид, живёт в соседнем с Хотьковым академическом посёлке Абрамцево, а его отец – академик Михаил Александрович Леонтович (впрочем, навещавшим Михаила Александровича в деревне профессорам приходилось иногда подолгу ждать его, так как «академик пошёл выгонять корову», но это было не в Хотькове, а на Москве-реке у Кремешни, напротив Тучкова).

В сочинениях Колмогорова есть работа (о площади окрестности траектории Броуновского движения), про которую редакция сообщает: «У этой работы 2 автора, математик и физик, и две части – физическая и математическая. Читателя следует предупредить, что математическую часть написал физик, а физическую – математик».

Точно такое же примечание сопровождает эту статью и в сочинениях Михаила Александровича Леонтовича: он лучше Колмогорова считал интегралы (преобразуя контуры интегрирования на римановых поверхностях, т.е. используя теорию Пикара-Левшеца выявления абелевых интегралов), но физические приближения асимптотик, сводящие вопрос о Броуновских траекториях к интегралам, придумал Колмогоров.

Андрей Леонтович был одним из первых моих аспирантов – он сделал много замечательного, и, в частности, им написаны современные комментарии к одной математической теореме ученика моего отца, Андрея Дмитриевича Сахарова. Андрей Дмитриевич так полюбил математику, что сделал впоследствии десятки математических открытий, а после его смерти меня попросили их комментировать (при издании тетрадки, куда он, ничего не публикуя, записывал свою математику).

Теорема, которую комментировал Андрей Леонтович – о рубке капусты. Жена попросила Андрея Дмитриевича порубить осенью качаны капусты для шинкования. Он пишет, что кочан режется сначала на горизонтальные круговые слои, а затем каждый такой круг кладется на стол и рубится на мелкие кусочки случайным ударом ножа.

Занимаясь этой утомительной физической работой, Андрей Дмитриевич не мог не думать, а потому задал себе вопрос: некоторые кусочки – треугольники, некоторые – пятиугольники (встречаются всевозможные выпуклые многоугольники). А сколько вершин у такого многоугольника в среднем?

Посчитав свои кусочки, Андрей Дмитриевич пришел к выводу, что среднее равно четырём. Впоследствии оказалось, что он был не первым, кто исследовал этот вопрос статистической геометрии: уже в 1852 году немецкий геометр Шлэфли в своей диссертации решил аналогичную задачу, даже для n-мерной капусты. А именно, он доказал, что для получающихся n-мерных выпуклых многоугольников среднее число k-мерных граней такое же, как число k-мерных граней n-мерного куба.

Например, в обычном трехмерном пространстве среднее число граней кусочка равно 6, среднее число вершин равно 8 и среднее число ребер равно 12. При этом сами кусочки вовсе не похожи на кубики или параллелепипеды: ведь эти средние достигаются не на одном и том же кусочке, так что у типичного кусочка вовсе не обязательно (6,8,12) граней размерностей (2, 0, 1).

Кроме школьного кружка 1950-х годов (где моим учеником был ещё, например, Андрей Николаевич Тюрин, ставший после поступления в университет учеником Игоря Ростиславовича Шафаревича, но продолжавший ходить на мой семинар и впоследствии, до своей недавней безвременной смерти, он стал замечательным алгебраическим геометром и работал в МИАН), я стал в 1963 году, по просьбе А.Н. Колмогорова, преподавать в созданном им в Давыдкове Интернате (№ 18) для одарённых математически школьников.

Мои лекции 1963-1964 года были позже изданы одним из слушателей (они доставляли школьникам, в виде серии задач, топологическое доказательство теоремы Абеля о неразрешимости общих уравнений степени 5 в радикалах, причём в процессе решения этих задач мои ученики больше узнавали о группах и о римановых поверхностях, комплексных числах и спинах, косах и кубах Кеплера (вписанных им в додекаэдр), монодромии и разветвлённых накрытиях, разрешимых группах и релятивистских идеях, чем дают любые университетские курсы).

Из моих замечательных учеников этого класса школы-интерната № 18 Н.Нехорошев стал специалистом по теории гамильтоновых систем и небесной механике, С. Воронин и Г. Архипов – по теории чисел, В. Алексеев – по компьютерам, а вначале в эту группу входил еще и вернувшийся затем в Ленинград Ю. Матиясевич (доказавший, в частности, алгоритмическую неразрешимость диафантовых уравнений высокой степени).

Одновременно начался и студенческий семинар – причём, школьники иногда бывали и там. Впрочем, среди активнейших участников моего студенческого семинара на мехмате были и такие замечательные математики, как В.М. Алексеев и Я.Г. Синай, Д.В. Аносов и С.П. Новиков, А.Г. Хованский, А.Н. Тюрин и Г. Н. Тюрина, Д.Б. Фукс и Д.А. Каждан, Г. Маргулис, А. Каток, А Стёпин и т.д. – полный список слишком длинен, а обзор, в каком году кто что сделал, можно извлечь из сборника «Задачи Арнольда», где изданы задачи семинара за примерно полвека. Ю.И.Манин и А.А.Кириллов, И.И.Шапиро-Пятецкий и М.Л.Лидов постоянными членами семинара не были, но их работы занимали в нём большое место.

В начале каждого семестра я формулировал пару десятков задач, которые участники семинара затем решали – период полураспада задачи (после которого она на 50% решена) составил, по многолетним наблюдениям, в среднем 7 лет, так что даже некоторые из задач 60-х годов и сегодня остаются нерешёнными. В других случаях решения задач семинара стали сегодня знаменитыми теориями. Например, теория «Систем Аносова» является замечательным развитием контрпримера Аносова к ошибочному решению одной из задач семинара (опубликованному с этой ошибкой в статье Арнольда с Синаем в 1963 году).

Никакого «подхода» к студентам я не находил – просто формулировал интересующие меня вопросы. При этом я не считал нужным рекомендовать определенному студенту определённую задачу. Пусть выбирает себе сам, это – как выбор невесты сыну !

Что из этого вышло – судить лучше ученикам, а не мне. Их мнение изложено в статье «Владимир Игоревич Арнольд глазами учеников» в «Трудах МИАН», том 259, 2007, стр. 5-9.

Д - 17. В 1965 году Вы стали уже профессором Мехмата МГУ. И в том же году поехали на годичную научную стажировку во Францию (в Сорбонский университет), где занимались под руководством Жана Лере.

Показалось ли Вам что-нибудь «необычным» в общении во Франции «шефа» с подопечными стажёрами по сравнению с тем, как это происходит у нас ?

А. Лере сразу сказал мне: «Хоть ты мне и студент, требовать я от тебя буду не сдавать экзамены, а читать лекции (о теории динамических систем, у нас почти не известной, хотя основал её и Пуанкаре – ведь продолжатели Пуанкаре живут, в основном, в России !)»

Слушатели этого семестрового курса лекций включали много академиков. Помню участие Лере и Шварца, А. Картана и М. Фреше, Серра, Тома и Лихнеровица, Годемана и Дуади, и даже Данжуа, рассказавшего мне, как Пуанкаре принимал у него аспирантский экзамен во время еженедельного «чая математиков»: «Мы мешали чай с лимоном ложечками в своих чашках у вот этой доски, как мешаем сейчас с тобой, и я говорил: «а это слагаемое получается в формуле в верхнем правом углу доски из этой формулы в левом нижнем» и показывал ногой, так как руки были заняты, а гимнастом я тогда был лучшим, чем сейчас, в 90 лет». Других учеников у Пуанкаре во Франции, видимо, не было.

Один из профессоров-слушателей, Андре Авец, записал мои лекции 1965 года и издал их в виде книжки: Arnold and Avez « Ergodic Problems of Classical Mechanics».

В это время я сформулировал уже «гипотезу Арнольда» (о неподвижных точках симплектоморфизмов, и о пересечениях лагранжевых многообразий) в основанной мною около 1960 года симплектической топологии – эта гипотеза до сих пор не доказана, несмотря на многие сотни посвященных ей работ, доказывающих её ослабленные версии.

В литературе «гипотезой Арнольда» часто называют такую ослабленную версию, где число неподвижных точек или лагранжевых пересечений оценивается снизу суммой чисел Бетти нужного многообразия, в то время как я всегда задавал вопрос об оценке снизу бо́льшим числом Морса (минимальным числом критических точек гладкой функции на многообразии).

Первые случаи, где доказана гипотеза Арнольда в простейшей ситуации (для тора, где эта гипотеза является прямым обобщением «последней геометрической теоремы» Пуанкаре, в главе о которой в лекциях 1965 года стояла гипотеза) были найдены в 1983 году Конли и Цендером. Наилучшие из известных более общих её случаев доказаны А. Флоером (покончившим, однако, самоубийством, когда ему не удалось справиться с самым общим случаем): это привело его к знаменитым «гомологиям Флоера», а затем – к связям всей этой тематики с квантовой теорией поля, с «инваринтами Зайберга-Виттена и Громова» и т.д.

Э. Виттен объяснил мне как-то, что он относит мою гипотезу, скорее, к физике, чем к математике: «Она утверждает, что с бесконечномерной топологией можно смело обращаться так, как если бы её трудностей не было и все расходящиеся ряды сходились. Конечно, такая математика (нужная и для обоснования всей квантовой теории поля) пока отсутствует, причем, отсутствует не только доказательство, но и точные теоремы. Но нам с тобой лучше не обращать внимания на эти временные трудности: пройдет лет двести, и они будут преодолены».

Необычным во Франции было то, что, согласно до сих пор не отмененному приказу правительства 1793 года, жителям Парижа запрещается называть друг друга дворянским местоимением «Вы»: все обязаны друг другу «тыкать», а кто нарушит – подлежит гильотинированию.

Ж.-П. Серр, хоть и старше меня лет на 15, строго требует от меня выполнения этого правила (уже с 1965 года), так что мы были с ним на «ты» даже во время публичной дуэли в Институте А. Пуанкаре (13 марта 2001 года).

В 1965 году он научил меня, как отличать хорошую математическую работу от плохой. Надо пойти в библиотеку Института Анри Пуанкаре, где образцовый библиотекарь Бельгодер (обгонявший когда-то Кошуля, как лучший студент курса) пустит нас к книжным полкам. Там нужно найти номер журнала со статьей, о которой идёт речь: если её еще не украли, работа была слабой. У нас у обоих были статьи в недавнем томе журнала «Ann. Inst. Fourier» (Grenoble). Том оказался уже украденным. Сейчас, с появлением ксероксов, этот чудесный метод Серра уже не действует: вместо того, чтобы уносить том или вырезать бритвой нужные страницы, проще сделать копию.

Но другие черты французских математиков более устойчивы. Абель, например, писал друзьям в Христианию, что в Париже 1820 года ни с одним математиком поговорить нельзя, «так как они все хотят учить, но ничему они не желают учиться». (Лесков отмечал в «Несмертельном Головане», что «одни только французы умеют учить тому, чего сами вовсе не понимают»).

Согласно Абелю, каждый французский математик – специалист в одной узкой области, не интересующийся ничем другим: «Один знает много о теории тепла [это Фурье] – но не спрашивай его ничего о теории чисел», «Другой – специалист по теории упругости [это Пуассон], но не спрашивай его о многогранниках», «Третий – знает всю небесную механику [это Лаплас], но не понимает алгебраических кривых».

А.Н. Колмогоров говорил мне: «Ни с одним французским математиком нельзя говорить ни о чём вне его математической специальности – таков даже мой друг Лере, который доверил мне пятку внука при его купании в ванночке (что не совсем обычно для приёма академика одной страны академиком другой и служит явным доказательством нашей давней дружбы). Только один математик во всей Франции может рассматриваться как естествоиспытатель и интересуется более широко разными областями – с ним интересно, но он далеко от Парижа, в Бюр-сюр-Иветт, это Рене Том».

И я, действительно, больше всего подружился в 1965 году именно с Томом. Беда только в том, что я никак не мог понять его теоремы из статьи «О топологических методах в биологии», где он заложил основы теории катастроф.

Том ясно отвечал мне (пару десятков лет) на вопросы об этой теореме: «Всегда найдутся дураки, чтобы находить для наших теорем доказательства». В конце концов, я попросил своего аспиранта Б.А. Хесина разобраться с этой ситуацией, и тот обнаружил, что объявленная Томом много десятков лет назад теорема не верна. А именно, Том утверждал, что число «элементарных катастроф» (бифуркаций общего положения в пространстве параметров для фазовых портретов градиентных динамических систем, рассматриваемых с точностью до топологической эквивалентности) равно семи (при четырех параметрах нашего пространства-времени). Оказалось же, что это «число катастроф Тома» не может быть меньше 13 (и, вдобавок, до сих пор никто не знает даже, конечно ли их число, или же существует бесконечно много различных катастроф).

И всё же Колмогоров прав в главном – с Томом было интересно, и я многому у него научился (хотя и сохранил не признаваемое Томом уважение к логической строгости и к необходимости доказательств).

Замечу, кстати, что и сам Колмогоров говорил мне не раз: «Не ищите в моих работах о теории турбулентности доказательств – их там нет, и я не знаю, появятся ли они когда-либо. Я нигде не утверждаю, что мои результаты вытекают из исходных уравнений Навье-Стокса. Они не доказаны, а верны, и это – гораздо важнее !»

Хотя я и пытаюсь многое доказывать, верных открытий у меня тоже во много раз больше, чем доказанных теорем. И.М. Виноградов называл Колмогорова «математиком без теорем» – ссылаясь даже на мою работу 1963 года, доказывающую теорему Колмогорова, анонсированную им в 1954 году.

Д – 18. В том, что состоялась эта Ваша зарубежная стажировка («тогда» и сразу «в капстрану» !), большую роль, как я понимаю, сыграл Иван Георгиевич Петровский. Не расскажите ли Вы что-нибудь про Ваше общение с ним ?

А. Иван Георгиевич сыграл удивительно большую роль в моём математическом развитии (не говоря уже о его огромной роли ректора в создании неповторимой атмосферы мехмата вообще).

Около 1970 года он вручил мне докторскую диссертацию своего ученика, Дмитрия Андреевича Гудкова, посвящённую 16-й проблеме Гильберта - о топологии алгебраических кривых степени n на вещественной проективной плоскости. Он сказал: Гудков продолжает мои работы 30-х годов по вещественным алгебраическим кривым, решая, в частности, задачу Гильберта о кривых степени 6, состоящих из 11 овалов (а больше их быть не может).

В своей формулировке проблемы 1900 года Гильберт пишет, что возможных топологически различных расположений 11 овалов только два: лишь один овал содержит в ограниченном им диске другие, и их число может быть лишь 1 или 9. Но Гильберт так и не опубликовал доказательства своей теоремы. Гудков, используя (в Нижнем Новгороде) работы своего второго учителя, физика А.А. Андронова, доказал теорему Гильберта, и я опубликовал его заметку с этим доказательством в ДАН СССР с год назад.

Но теперь вот Гудков привез диссертацию, в которой опровергнута и теорема Гильберта, и его собственное её доказательство: бывает, он утверждает, еще третье расположение одиннадцати овалов (с пятью овалами внутри и пятью снаружи). Поэтому, – добавил Иван Георгиевич, – очень необходимо серьезно разобрать эту огромную работу по вещественной алгебраической геометрии (использующую и бифуркационные методы физиков): кто же прав, Гильберт или Гудков ?

Хотя эта тема никак меня не касалась, я все же заинтересовался работой Гудкова и стал её читать. Результатом оказался мой восторженный положительный отзыв. Только я не сумел включить в него формулировки пары сотен доказанных Гудковым теорем, и заменил их единым более общим утверждением, содержавшим и все теоремы Гудкова, и еще бесконечный набор далеких обобщений.

Этот общий результат я назвал в своем отзыве «гипотезой Гудкова», так как доказательства этого результата (в самом общем случае) в диссертации не было, а была всего лишь пара сотен частных случаев общего факта.

Дмитрий Андреевич быстро стал моим близким другом, он ежегодно приезжал в Москву из Нижнего, привозил даже своих учеников, и мы проводили в моей квартире в Ясеневе долгие вечера, обсуждая новые теоремы и гипотезы, примеры и контрпримеры последнего года.

Думая о «гипотезе Гудкова», я пришел к выводу, что её утверждение о делимости на 16 Эйлеровой характеристики поверхности с краем, заданной неравенством $\{f(x, y)\geq 0\}$, должно бы было быть связанным с теоремой топологии четырехугольных гладких многообразий, где на 16 делится сигнатура формы пересечений (на пространстве двумерных гомологий). Вопрос состоял в том, чтобы связать топологию вещественных кривых (задачи Гильберта и гипотезы Гудкова) с вещественно- четырехмерными многообразиями.

Размышляя об этом, я придумал такую конструкцию: для комплексификации неравенства $\{f(x, y)\geq 0\}$ заменим его равенством $\{f(x, y) = z^2\}$, и будем считать координаты (x,y,z) комплексными числами. Тогда поверхность, краем которой является изучаемая кривая $\{f(x,y)=0\}$, превратится в двумерную в комплексном смысле (то есть четырехмерную в вещественном смысле) поверхность – к ней можно применять теоремы топологии четырёхмерных многообразий.

Эта идея привела меня к доказательству ослабленного варианта гипотезы Гудкова (со сравнением по модулю 8 вместо сравнения по модулю 16). Через несколько лет В.А. Рохлин, которому я всё это рассказал, дополнил мои рассуждения своим доказательством «сравнений по модулю 16 в 16-й проблеме Гильберта».

Сегодня все эти теории составили основу большой новой области математики – вещественной алгебраической геометрии, где переход от топологии кривых к топологии четырехмерных многообразий доставляет также полезные связи с квантовой теорией поля, с симплектической геометрией и с инвариантами Флоера-Виттена-Громова (о которых шла речь выше).

И всё это – развитие замечательных идей И.Г. Петровского, который первым понял все значения фундаментальной проблемы Гильберта и первым после Гильберта не побоялся исследовать её.

Д – 19. Вы были кандидатом на Филдсовскую медаль 1974 года, но, как Вы пишите в своей книге, не получили её, поскольку представлявший Советский Союз в Филдсовском Комитете Лев Семёнович Понтрягин ультимативно заявил что « … если присуждение медали Арнольду состоится, то СССР выйдет из Международного Математического Союза». Не думаете ли Вы, что (неизбежно) субъективные решения подобных вопросов (о присуждении или не присуждении той или иной награды) негативно влияют на развитие математики ?

А. Я много раз писал уже и повторю ещё раз: по моему мнению, Нобелевские премии, медали Филдса и другие подобные награды оказывают, к счастью, мало влияния на поступательное развитие нашей науки. Так ли задержало развитие Нового Света то, что его назвали Америкой, а не Колумбией ?

После Понтрягина одним из следующих представителей России в Филдсовском Комитете назначили В.И. Арнольда. И, хотя я однажды даже вышел из состава Комитета в знак протеста против несправедливого, по моему мнению, решения, даже это (несправедливое) решение не принесло столь уж большого вреда.

А.Н. Колмогоров сказал мне как-то, что бóльшее значение для математика, чем всевозможные премии и выборы во всевозможные научные академии, играет избрание в Почётные Члены Лондонского Математического Общества – здесь дискриминация минимальна, и список почётных членов сильнее любого списка академиков, лауреатов медалей Филдса и т.п.

Он сказал мне это, когда меня избрали таким почётным членом ЛМО – и, как он и предвидел, десяток Академий разных стран так же выбрали меня в свои иностранные члены (через несколько лет).

Для себя я расцениваю все подобные награды как своеобразный дождь: он может быть и стихийным бедствием, и подарком Данае от Зевса.

В одном недавнем очерке о награждении Арнольда (в «Троицком варианте» №8, 2008) я прочитал, что и сам-то Владимир Игоревич – это просто стихийное бедствие, критиковать которое столь же бесполезно, как и критиковать Везувий за его извержения. Я говорю это здесь не для характеристики Арнольда, а о премиях: то, что они существуют, что научная деятельность человечеством может быть иногда вознаграждена, оказывает, вероятно, скорее, положительное влияние на развитие наук (хотя хорошие открытия делаются не ради премий, а зачастую ими и не награждаются).

В актовом зале Математического института имени В.А. Стеклова висят портреты работавших в нём академиков, но до сих пор отсутствует портрет Алексея Николаевича Крылова, основавшего институт, и портрет Якова Викторовича Успенского (учителя Ивана Матвеевича Виноградова, который добился оставления последнего в аспирантуре, несмотря на отсутствие самостоятельных научных результатов в студенческие годы: «Верно, результатов ещё нет, но я, Успенский, говорю вам: они будут»).

Именно Крылов (вместе со своим другом Л.И. Мандельштамом, о котором я писал выше) посоветовали Сталину назначить президентом АН СССР Сергея Ивановича Вавилова, несмотря на то, что его гениальный брат, Николай Иванович, погиб в тюрьме.

А Успенский передал в Кембридж, в Кавендишскую лабораторию П.Л. Капице письмо от Крылова, чтобы тот опасался своих ежегодных возвращений в Россию, так как Сталин собирается однажды его не отпустить обратно (об этом подробно написано в книге «Мои воспоминания», опубликованной недавно внуком Крылова, Сергеем Петровичем Капицей).

П.Л. Капица все же возвращался ежегодно, а вот сам Успенский внял предупреждению Крылова и не вернулся (в 1929 году), отчего и «исчез» из списков на стене МИАН.

Негативно влияет на развитие науки (в том числе, и математики) невозможность прокормить своих детей нищенской зарплатой – вклад в это влияние несправедливых награждений составляет ничтожную долю этой беды (из-за которой лучшие ученики, которые у нас всё ещё появляются, вынуждены искать работы за границей).

Д – 20. Как обмолвился в своём интервью Марко Иосифович Вишик, у Вас «также» были «сложные отношения» с зав. кафедрой Ольгой Арсеньевной Олейник. Возможно ли подобное во взаимоотношениях между руководителем и авторитетнейшим подчинённым в западных университетах, скажем, в той же Сорбонне ?

А. Об Ольге Арсеньевне Олейник я хотел бы сказать здесь хорошее – оно известно куда меньше, чем её (очевидные) недостатки.

Диссертация Ольги Арсеньевны, написанная по следам пионерских работ её учителя, Ивана Георгиевича Петровского, заложивших основу вещественной алгебраической геометрии, ценились ею самою ниже последующих работ по уравнениям с частными производными, и мало кто о ней знает.

Между тем, эта замечательная работа обогнала уровень науки своего времени на десятилетия и не была должным образом оценена именно вследствие этого. (Правда, А.Г. Витушкин вывел из этих работ Олейник свое решение 13-й проблемы Гильберта для гладких функций, но и он почему-то в конце жизни забывал на неё ссылаться).

Основной целью этой работы было исследование топологических свойств вещественных алгебраических многообразий фиксированной степени в вещественных проективных пространствах. Для кривых на плоскости аналогичная работа была выполнена двадцатью годами раньше И.Г. Петровским, но случай поверхностей ему не поддавался. Теоремы Ольги Арсеньевны оценивали числа Бетти этих многообразий некоторыми сложно выписываемыми многочленами от степеней их уравнений.

В 1965 году мои друзья Дж. Милнор (в США) и Р. Том (в Париже) прислали мне свои (независимые друг от друга) препринты об этих числах Бетти. При сравнении с результатами Ольги Арсеньевны (которых они не знали) я обнаружил, что, хотя их оценки и выглядят приятнее, они во много раз слабее полученных Ольгой Арсеньевной оценок.

Том и Милнор доказывали неравенство $b<1\ 000\ 000$, когда у Олейник было $b\leq 98$. Более того, неравенства Олейник достигаются (при подходящем выводе коэффициентов уравнения числа Бетти достигают указанных ею оценок), тогда как неравенства Тома и Милнора нереалистично завышены. Я тотчас послал обоим друзьям - филдсовским лауреатам - информацию о статьях Ольги Арсеньевны, и они успели вставить ссылки на эти статьи в свои опубликованные работы. Но и сегодня неравенства Олейник на Западе цитируются под именем «неравенства Милнора-Тома».

Удивительным образом я встретился с теми же неравенствами еще раз по совсем другому поводу. Живя ещё в Москве, Израиль Моисеевич Гельфанд пригласил меня раз к себе, чтобы обсудить свои сложные результаты в теории представлений групп. Сложность состояла в том, что ответы доставлялись очень длинной формулой (занимавшей много страниц), и Израиль Моисеевич предположил (с обычной своей интуицией), что формулы такого рода могут быть связаны с моей областью математики – теорией особенностей гладких отображений.

Он угадал верно – посмотрев несколько минут на его формулы, я понял, что уже раза три встречал их в разных областях математики, в том числе и в диссертации Ольги Арсеньевны, где они использовались для оценок чисел Бетти.

Сущность дела состоит в следующем. Рассмотрим десять точек на плоскости. Их выпуклая оболочка представляет собой многоугольник. Площадь этого выпуклого многоугольника выражается через двадцать координат этих точек. Но это явное выражение записывается довольно сложно: ведь даже записать координаты вершин выпуклой оболочки заданных точек не так уж просто !

Если же точек не десять, а с сотню, и лежат они не на плоскости, а в пятимерном пространстве, то формулы становятся совсем сложными – они-то и испугали Гельфанда.

Мой совет состоял в том, что, вместо длинных формул, надо писать «объём выпуклой оболочки таких-то точек» (или, иногда, «смешанный объём Минковского») - и все формулы заменятся простой геометрией (разработанной, вдобавок, моими учениками, Хованским и Варченко, под именем «теории многогранников Ньютона», так как Ньютон считал изобретение этой науки своим лучшим вкладом в математику, опубликовав его даже в виде «длинной диаграммы» о решении всех уравнений).

Сообразив всё это, я вспомнил, где видел те же формулы еще раз: Пьер Делинь, приезжая в Москву, когда он был ещё женихом дочери Лены моего друга Володи Алексеева, рассказал (переплывая со мной вплавь Десну или Пахру около Дубровиц) о своей теории смешанных структур Ходжа полуалгебраических многообразий. Продумывая его теорию, я просчитал, в качестве примера, чему равны числа Ходжа этой структуры для простейших особых многообразий (называемых сферами Брискорна).

Оказалось, что ответы выражаются через данные задачи довольно сложными формулами – теми же, что у Олейник и Гельфанда, так что я быстро свёл их вычисление к теории многогранников Ньютона (и использовал всё это для решения интересовавшей меня тогда задачи об индексах особых точек голоморфных дифференциальных форм на особых гиперповерхностях).

Продумывая всю эту ситуацию вследствие вопроса Гельфанда, я сообразил, что в работе Олейник было сделано гораздо больше, чем она сказала. А именно, за пару десятков лет до Делиня она изобрела смешанные структуры Ходжа комплексных многообразий, оценила через них числа Бетти вещественных многообразий и вычислила упомянутые смешанные структуры в интересовавших её частных случаях.

Разумеется, определение смешанных структур в самом общем случае в работах Олейник не содержится – оно и не было ей нужно. Она выписала всё, что нужно, в том случае, который был ей нужен для получения оценок чисел Бетти общих гиперповерхностей фиксированных степеней – но получить эти оценки она смогла только благодаря найденным ею свойствам её смешанных структур.

Жалко, конечно, что ни сама Ольга Арсеньевна, ни Иван Георгиевич Петровский, ни Дмитрий Андреевич Гудков, ни Владимир Абрамович Рохлин, продолжавшие её работы, не заметили их связей с теорией смешанных структур Ходжа.

Я пытался сделать это, поручив детали своему польскому студенту Мариушу Водзитскому, но тут в Польше разразилось военное положение Ярузельского, и я потерял право научного руководства польскими аспирантами в МГУ (это разрешалось только коммунистам). Из-за этого Мариуша нельзя было взять в аспирантуру в МГУ.

Но я нашёл выход – попросил Юру Манина взять это руководство на себя (в Институте Стеклова, где Юра работал, драконовские меры против польских аспирантов не были еще приняты). Мариуш (сейчас он в Беркли) стал замечательным математиком и в школе Манина, так что его удалось спасти. Но вот его исследование связей смешанных структур Ходжа – Делиня с вещественной алгебраической геометрией осталось незаконченным. Тут можно винить и кафедру, руководимую Ольгой Арсеньевной, но как она могла помочь?

Зато Ольга Арсеньевна замечательно помогла мне, когда издательство «Классики науки» отказалось принять моё предложение перевести на русский язык избранные сочинения Пуанкаре. Главный редактор А.А. Логунов, написал мне (около 1970 года), что «В.И. Ленин камня на камне не оставил от идеалиста Пуанкаре в своей книге «Материализм и эмпириокритицизм», а потому никакие сочинения Пуанкаре в нашей стране изданы быть не могут».

Увидев этот ответ Логунова, Ольга Арсеньевна тут же нашла выход:

«Во-первых, предлагать Пуанкаре надо не одному, а вместе со мной – тогда отказать будет труднее.

Во-вторых, надо попросить помочь Николая Николаевича Боголюбова, потому что:

1. Он очень любит А. Пуанкаре, его работы по методу усреднения – прямое развитие теории Пуанкаре;

2. Он очень любит В.И. Арнольда – был у него оппонентом при защите докторской диссертации, а после этого написал книжку, где решает свои задачи заимствованным из диссертации Арнольда методом;

3. Логунов – личный ученик Николая Николаевича, он не посмеет отказать, если мы включим и Николая Николаевича в число редакторов перевода».

Николай Николаевич (днем позже) помог мне – об этом я подробно рассказываю в посвященной ему статье, повторять здесь не буду.

Логунов вскоре ответил, раскритиковав наше предложение только так: «лучше издать не два тома, как вы предлагаете, а три». Эти три тома вышли в 1972 году и являются сейчас лучшим в мире изданием Пуанкаре: комментарии, написанные крупнейшими специалистами, описывают сегодняшнее состояние соответствующих вопросов, вместе с историей ошибок Пуанкаре и их исправления, обобщений, найденных самим Пуанкаре и другими и так далее. И всё это полезнейшее издание осуществилось только благодаря её мудрой поддержке (тома изданы под редакцией В.И. Арнольда, Н.Н. Боголюбова и О.А. Олейник).

Д - 21. В 1986 году Вы перешли на работу (на полную ставку) в Стекловский математический институт, оставшись на Мехмате МГУ лишь на полставки. Декан нашего факультета, Олег Борисович Лупанов, не отговаривал ли Вас от этого шага ? Или сразу с пониманием отнёсся к Вашим аргументам ?

А. Факультет явно демонстрировал мне свою враждебность уже несколько лет: то не находил помещений для спецкурсов и спецсеминаров, то требовал заполнения ненужных бумаг о давно истекших хоздоговорных работах (в МИЭМ). Вспоминать об этом неохота - я просто вспомнил слова Гумилева (в «Мои читатели»): «повернуться, и уйти, и не возвращаться боле». Но всё это – не в момент перехода на полставки, а позже, когда я и это совместительство оставил (то есть перестал получать за него деньги: семинар-то работает без перерыва до сегодняшнего дня).

Зато руководить аспирантами в МГУ мне начали запрещать давно. Например, один раз Комитет Комсомола отверг моего кандидата в аспирантуру за то, что в его деле было письмо из милиции о том, что он «подозревался в краже рыбы». К счастью, эта рыба не помешала мне устроить его в аспирантуру в другом месте – помогали и ИПМ, и Институт Системных Исследований, так что сейчас этот мой ученик – один из лучших математиков России (к сожалению, редко в ней живущий – а все из-за рыб).

Д - 22. Весной 2001 года в Институте Анри Пуанкаре (Париж) состоялась Ваша знаменитая «математическая дуэль вокруг школы Бурбаки», на которую Вас вызвал известный лидер бурбакистской школы Жан-Пьер Серр. Не изменила ли Ваша эмоциональная критика «бурбакизма» отношение к Вам французских математиков ?

А. Французские математики сформулировали свою точку зрения так: «сколько бы ты не критиковал бурбакизм, мы-то знаем, что главный бурбакист в Москве – это ты». А бывший (при Шираке) министром науки, образования и технологии геофизик Клод Аллегре, продлив мой профессорский век на 3 года после предельного возраста «65 лет», назначил меня еще и членом своей «Комиссии по борьбе за защиту наследия французской науки от иностранцев». Он сказал мне при этом: «Ты, ведь, лучше всех знаешь и наследие французской науки, вроде Пуанкаре, и самых опасных для нас иностранцев – русских !»

Большого толка от меня в этой Комиссии не было, потому что при выборах новых профессоров в Университете я получил такую отповедь: «Твое предложение основываться при выборе лучшего кандидата на его научных достижениях для нас неприемлемо, потому что тогда на все посты придётся назначать одних только русских – ведь каждому из нас ясно, и насколько лучше они подготовлены, и насколько сильнее их научные результаты».

Зато некоторую пользу я принес в «Комитете Республики Франции по науке» (где заседала сотня крупнейших французских учёных, причём математику представляли двое: Ж.-Л. Лионс и В.И. Арнольд). Многочасовое заседание было посвящено дележу денег: парламент постановил увеличить годовые ассигнования на науки с 5% валового дохода страны до 7% (для сравнения: в России по официальным сведениям это 1,5 %, но, как рассказали мне знающие люди, в действительности речь идет о сумме в 0,5%, так как в эти 1,5% входят расходы на военные науки).

Важные «крупнейшие французские учёные» в течение нескольких часов доказывали, что «Франция, как старшая дочь католической церкви, ни в каких новых научных исследованиях не нуждается: у нас наука уже есть, были Лаувазье, Пастер, Кюри, мы вот ещё есть. Поэтому добавленные деньги надо потратить на покупку разработанных в США рецептов новых лекарств – изготавливать их, продавать, а заработанные тем самым деньги положить в карман».

Выдержав несколько часов такой болтовни, я все же взял слово, сказав: «Франция, как старшая дочь католической церкви, не вправе лишать ни свой народ, ни Европейское сообщество, частью которого она теперь является, ни мировую науку, своего, традиционно значительного, вклада в научные исследования».

Я победил – следующие несколько часов шла уже серьёзная дележка новых 2% (отклонили поддержку космических исследований, медицины, атомной энергетики, вирусологии, информатики и многого другого, но, в конце концов, постановили поддержать три науки: исследование СПИДа, психоанализ и разработку психотропных средств, способных за пять минут превратить миллионную восставшую толпу в послушное стадо). С тех пор я на заседания таких комитетов не хожу (даже в комиссию по переводу студентов Университета на следующий курс – это после того, как я обнаружил студента со средним баллом 11,8 из сорока отметок, которые все были ниже 10, при «отлично» = 20). Но изменилось тут отношение не французских математиков ко мне, а моё к ним. Впрочем, Тютчев правильно сказал:

Не рассуждай, не хлопочи !
Безумство ищет, глупость студит;
Дневные раны сном лечи,
А завтра быть чему, то будет.

Д - 23. Вы совершенно справедливо ратуете за стилистически чёткое изложение текстов, представляемых к публикации. Но ведь пресловутой «нечёткостью» грешат порой и «маститые» специалисты. В частности, просматривая свои ранние работы, не находите ли Вы и в них повод для подобной критики ? И делал ли Андрей Николаевич Колмогоров литературные замечания по их первоначальному изложению ?

А. Поводов для критики писаний разных математиков очень много. Я расскажу здесь только один необычный случай, когда я согласился с критиком – и до сих пор об этом немножко жалею (хотя он и желал мне добра).

Дело началось со звонка Якова Борисовича Зельдовича (как обычно, в седьмом часу утра). Он просил меня о помощи. Я, как всегда, охотно согласился, только спросил: «А что надо делать ?» Он ответил: «Да вот, некролог надо помочь написать». Тут я осмелился осведомиться: «А чей ?» Яков Борисович ответил: «Да мой: тут Академия к юбилею хочет издать мои сочинения, и к ним нужно предисловие. Вот про математические мои работы я и прошу Вас написать: хвалить себя самого неловко, а Вы знаете все эти работы прекрасно и сумеете их похвалить».

Я написал несколько страниц и отправил их в издательство. И вот тут (уже не в седьмом часу утра, а в шестом часу вечера) – неожиданный звонок: « Владимир Игоревич, с Вами говорит Юлий Борисович. Я с удовольствием прочитал Ваш текст о математических работах Якова Борисовича. Но Академия назначила меня главным редактором его Сочинений, так что я должен подписывать и Ваши страницы. Так вот, с некоторыми вашими математическими утверждениями я не согласен – подписывать их не хочу, вот и звоню Вам, чтобы эти разногласия обсудить». Он не сомневался, что в СССР только один Юлий Борисович (Харитон). Я тоже об этом знал. Читатель может найти жизнеописание Юлия Борисовича в книге «Научный руководитель», Саров, 2004 к столетию основавшего «Саров» научного руководителя Ядерного центра Арзамас-16 («Лос-Арзамас»).

В данном случае речь шла о моей похвале книги Я.Б. Зельдовича «Высшая математика для начинающих физиков и техников», о которой я сказал, что она даёт читателю гораздо больше, «чем элементарный учебник Куранта и Гильберта». Именно это сравнение и не понравилось Харитону. Он сказал: «««Методы математической физики» Куранта и Гильберта – крупнейшее достижение науки XX века, мы постоянно его используем. Как же можно называть это монументальное сочинение «элементарным учебником» ?»

И Игорь Евгеньевич Тамм, и Яков Борисович Зельдович, и Андрей Дмитриевич Сахаров – все они давно уже научили меня, что советов Юлия Борисовича, каким бы мягким тоном он их ни высказывал и какими бы ни были контрдоводы, следует немедленно слушаться: они всегда глубоко продуманы (хотя это может и быть не видно невооруженным глазом), разумны и, как правило, предлагаемые им варианты лучше всех других. Поэтому я не стал объяснять своей фразы и согласился вычеркнуть слово «элементарный» – в таком виде мои слова и опубликованы в Сочинениях Я.Б.Зельдовича.

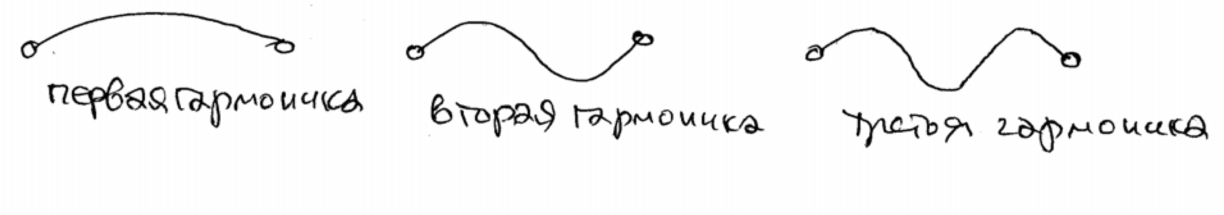
Мои сегодняшние сожаления объясняются тем (не известным Харитону) обстоятельством, что характеристика «элементарный учебник» замечательной книги Куранта-Гильберта принадлежит не мне, а самому Рихарду Куранту. Вот как обстояло дело (я постеснялся тогда рассказывать об этом Харитону, а сейчас, я думаю, полезно рассказать правду).

Все знали, что Гильберт не имел к этой книге никакого отношения. Курант добавил к своей книге имя своего учителя и из уважения к нему, и вследствие огромного влияния идей Гильберта на излагаемые в книге теории. Например, Гильберт не знал, что такое «гильбертово пространство» и никогда не пользовался ни им, ни теоремой Рисса-Фишера, ни обобщающими Гильбертово пространство функций пространствами Соболева и обоб-щающими теорему Рисса-Фишера теоремами вложения. Главным для Гильберта было то, что сейчас обычно называется предгильбертовым пространством – эта аналогия между геометрией бесконечномерных функциональных пространств и геометрией обычного евклидова пространства уже без доставляемого теоремой о полноте пространства L^2 обоснования позволяет далеко продвинуться в изучении задач математической физики. В современном (основанном Курантом) Математическом Институте Университета в Гёттингене Гильбертово пространство, все же, существует: это большое фойе перед главной аудиторией, украшенное бронзовым бюстом Гильберта.

Журналистка М. Рейд написала о Куранте большую книгу, представляющую собой продиктованные самим Рихардом Курантом объяснения того, почему он был известен в США под прозвищем «Грязный Дик». В этой книге Рейд сказано, что «Методы математической физики» не писал не только Гильберт – Курант тоже не писал этой книги, а только поручил писать разные главы разным своим ученикам, а потом вывешивал распечатанные страницы на факультете и платил по марке любому студенту за любую найденную в этих страницах ошибку.

Книга Рейд писалась так: Курант еженедельно диктовал ей на магнитофон свой новый рассказ, а она, одновременно, приносила ему на проверку распечатанный текст рассказа предыдущей недели. Но, если упоминались живые ещё лица, Рейд обращалась и к ним, для проверки, и их комментарии также включены в её книгу (с согласия Куранта). Один из учеников (возможно, Фридрихс ?) на вопрос Рейд, правда ли, что книгу писал не Курант, а ученики, ответил: «Конечно, это страшная клевета. Но, если бы эта клевета была правдой, то учеником, писавшим пятую главу, был бы я !»

Читая замечательную книгу «Методы математической физики», я нашел в ней доказательство удивительной теоремы Куранта о колебаниях многообразий любой размерности (например, струн, мембран и т.д.). Эта теорема связывает номер соответствующей гармоники (упорядочивая собственные колебания по величинам собственных частот) с топологией «многообразия узлов» этой гармоники (где амплитуда колебаний обращается в ноль). Например, для плоской струны с закреплёнными концами нули n –ой гармоники делят струну не более, чем на n частей: первая гармоника не имеет нулей внутри колеблющейся области, вторая имеет (для струны) не больше 1 -го нуля и т.д.



Доказав эту теорему, авторы добавили, что она имеет замечательное обобщение: вместо n-й гармоники можно было бы взять её линейную комбинацию со всеми предыдущими - число областей, на которые делят колеблющееся многообразие нули такой линейной комбинации, тоже не превосходит n.

Но это обобщение в книге не доказано – сказано лишь, что его доказал ученик Куранта (по фамилии Герман) и что его доказательство будет вскоре опубликовано. Несколько десятилетий спустя я, будучи не в силах найти доказательство Германа, написал Куранту письмо с просьбой о помощи. Он ответил мне, что «в элементарный учебник было естественно поместить не только полностью доказанное, с подробными доказательствами», добавив, что на учеников всегда опасно полагаться (он знал это, как ученик Гильберта), и что Герман не выполнил обещанного.

К этому времени я сумел уже вывести из теоремы о линейных комбинациях замечательные топологические следствия в вещественной алгебраической геометрии, развивающие результаты Петровского, Олейник, Гудкова, мои и Рохлина в направлении 16-й проблемы Гильберта.

Узнав об этих следствиях (имеющих приложения и в квантовой теории поля), Олег Виро написал мне, что знает контрпримеры к некоторым из них. Между тем, я знал, что мои доказательства безупречно правильно выводят эти следствия из теоремы книги Куранта и Гильберта.

Следовательно, я знал, что теорема Германа не только не доказана, но и не верна – её опровергают результаты Виро. Курант умер, не успев об этом узнать. Однако обобщение теоремы Куранта на линейные комбинации было найдено в случае одномерных сред (с использованием статистики Ферми-Дирака электронов). Это обобщение рассказал мне И.М. Гельфанд, но оно еще нигде не опубликовано.

Вот как много интересного скрывается за редактированием простого текста с похвалами Зельдовичу – я написал о книге Куранта и Гильберта «элементарный учебник», хотя знал (от Куранта), что это – соединение интереснейших правдоподобных ошибочных утверждений с полезнейшими и не всегда доказанными правильными.

Зельдович очень любил слова Пушкина (1829):

> О, сколько нам открытий чудных
> Готовят просвещенья дух,
> И опыт, сын ошибок трудных,
> И гений, парадоксов друг,
> И случай, бог-изобретатель.

Из-за этих строк он выбрал себе псевдонимом фамилию «Парадоксов» (у Пушкина стояло, конечно, «парадоксов»). Расшифровывается этот псевдоним так: «друг гения (Сахарова), т.е. Зельдович».

«Трудная ошибка» книги Куранта-Гильберта готовит нам чудные открытия. О своём величии Яков Борисович говаривал мне и такое: «И мы оба, и Сахаров, и Колмогоров – про каждого из нас можно сказать «ЧВАН» (существительное от глагола «чваниться», то есть «заражённый чванством»). Расшифровывается же это сокращение просто так: «член всех академий наук».

Чтобы я чванился поменьше, С.П. Новиков сказал мне как-то: «Недавно ты обогнал Зельдовича по годовому числу ссылок, опубликованному в журнале «Science Citations Index». Но это потому, что они относят совместные работы первому по алфавиту автору – вот все ваши совместные статьи Arnold and Zeldovich, достались тебе, а не ему».

Чтобы Новиков чванился побольше, замечу, что число ссылок на него в этом журнале раза в 2 меньше, чем, скажем, на Олейник, или на Ладыжинскую, или на Синая (хотя работы его явно сильнее). Дело здесь в том, что при ссылке на теорему Новикова в списке литературы стоит обычно не его статья, а изложение этой его теоремы кем-либо из ссылающихся на него учеников: Дубровиным, или Кричевером, или Бухштабером. Их понять легче. Чтобы много ссылались на тебя, надо писать попонятнее, чтобы не пришлось переписывать другим.

Фарадей говорил: «Изложение может быть либо популярным, либо поучительным. Соединить оба достоинства невозможно».

Д - 24. И всё же, за чёткость изложения текстов, безусловно, нужно бороться. И мне представляется, что наиболее эффективный способ борьбы содержится как раз в Вашей же книге, где приведены несколько «прелестных» фраз великих людей (Бальзака, описывающего «квадрат длинный и очень узкий», Дюма-сына, наблюдавшего «дома, сделанные наполовину из дерева, наполовину из камня, наполовину из штукатурки» и тому подобное).

Может Вам следует издать отдельную «подборку» таких «милых несуразностей», если их у Вас «набралось» достаточно много ?

А. Во Франции существует обширный «Словарь глупостей», переписывать можно сотни страниц из него. Удивительно, насколько похожи глупости разных стран и веков друг на друга.

Но это – не моя специальность. Как сказала Виктория Токарева, «математика – это то, что можно объяснить», а глупость объяснить нельзя.

Впрочем, вот пример, когда мне это удалось.

В книге Татьяны Толстой «Кысь» герой получает библиотеку, в которой книги расставлены по непонятному принципу: не по росту и не по алфавиту, не по году издания и не по языкам. Например, на одной полке стояли математик Лобачевский, педагог Ушинский, криминалист Шейнин, детский писатель Носов и т.д.

Прочитав список до этого места, я уже понял, в чем дело. Но понять это – настоящая математическая задача. Я ещё не видел читателя, заметившего и решившего её (автор нигде ничего не объясняет, вдобавок, поиздевавшись над глупостью читателя).

Д - 25. Не чрезмерным ли нагрузкам Вы подвергаете свой организм – 60-километровые лыжные «пробеги», 90 –километровые (я слышал) велосипедные «прогулки» ? Ведь известно, что спортсмены не всегда остаются самыми здоровыми людьми.

А. Не знаю, где Вы берете свои цифры. На лыжах я не раз бегал и больше ста километров – главное здесь не длина пути, а то, есть ли лыжня. Когда я веду семинар на 60 километров (Малые Вяземы – Ямщины – Скоротово – Дунино – Аксиньино – Чесноково – Вельяминово – Николо-Урюпино – Опалиха), лыжню прокладываем по очереди – так что это вовсе и не перегрузка.

Для велосипеда «90» - это, вероятно, всего 84 по счетчику под Парижем, с женой. Один же я ездил, бывало, за сутки из Москвы в Пущино и обратно, (по просёлкам, избегая шоссе). Это вовсе не 90 км (но думаю, всё же, что меньше 300).

Здоровье моё французские врачи, вытащившие меня из могилы после аварии 10 лет назад, ежегодно проверяют, и диагноз 2008 года был «impeccable». Я понимаю это французское слово как «безупречный», но словарь Ларусс объясняет его для самих французов иначе: «incappable de pecher» (то есть «неспособный грешить»).

Правилен ли диагноз врачей, не мне судить. Но в том же словаре я прочёл, например, что «Опята – очень распространённый, но не съедобный гриб», и что «Анри Пуанкаре – автор теории фуксовых функций» (ничего другого о нём не сказано).

Что спортсмены не всегда остаются самыми здоровыми людьми, вероятно, верно. «Китайскую нобелевскую премию» вручал мне в Гонгконге 9 сентября 2008 года китайский Нобиле (по имени Shaw), которому исполнился 101 года и который стойко выдержал многочасовую процедуру с китайскими церемониями (удивительно напоминающими кремлёвские), торжественными и научными речами и обедами – всё при самом активном участии его и его жены.

Он рассказал мне, что женился «недавно» (ему было тогда 82 года, а жену он взял, для симметрии, возраста 28 лет).

Но Shaw (державшийся не хуже Д.А. Медведева, заменявшего его на аналогичной церемонии в Кремле 12 июня 2008 года) – вовсе не спортсмен: он – главный в Гонгконге телевизионный магнат, так разбогатевший от этого, что доверил международной Комиссии выбор для награждения его деньгами – и английских авторов овечки Долли, и немецкого открывателя черных дыр, и японского исследователя стволовых клеток, и российских математиков.

Рассматривая списки награждённых за несколько лет, мы с Фаддеевым заключили, что уровень достижений, отмечавшихся премией Shaw, в общем, выше нобелевского.

Математиков в этом году отбирала комиссия во главе с сэром Майклом Атьей, бывшим ещё недавно Президентом Лондонского Королевского Общества (Академии Наук Великобритании), мастером Тринити Колледжа в Кэмбридже и директором построенного там Института Ньютона. Свой отзыв на наши с Фаддеевым работы он заранее прислал нам (для исправления своих ошибок).

Он, например, утверждал в своём первоначальном отзыве, будто Фаддеев – математик «целиком квантовый», а Арнольд – «целиком классический» (хоть и создавший «квантовую теорию катастроф» и «характеристический класс, входящий в условия квантования»).

Сэр Майкл приехал на награждение в Гонгконг – и его здоровью тоже можно только позавидовать (как и здоровью Shaw). Перед этой поездкой он сказал мне, что, в отличие от Кэмбриджа, в Гонгконге я не найду ядовитых грибов (рыжиков), которыми десятью годами раньше «пыталась его отравить» моя жена (научившая для этого его жену Лили их готовить).

Д - 26. Мои вопросы подошли к концу. Последний мой традиционный вопрос таков: довольны ли Вы, как сложилась у Вас судьба и ни о чём ли Вы не жалеете ?

А. Не то, чтобы я был очень доволен собой – но вот на судьбу, посланную мне свыше, жаловаться не могу. В ответ на этот вопрос продолжу начатое выше рассуждение Тютчева:

Живи, умей всё пережить:
Печаль, и радость, и тревогу.
Чего желать ? О чём тужить ?
День пережит – и слава Богу.

Добавлю, пожалуй, ещё его загадочно прозорливое описание последних лет жизни Понтрягина, пригодное нам (для самокритики):

Когда дряхлеющие силы
Нам начинают изменять,
И мы должны, как старожилы,
Пришельцам новым место дать,
Спаси тогда нас, добрый гений,
От малодушных укоризн,
От клеветы, от озлоблений
На изменяющую жизнь;
От чувства запоздалой злости
На обновляющийся мир,
Где новые садятся гости
За уготованный им пир;
От желчи горького сознанья,
Что нас поток уж не несёт
И что другие есть призванья,
Другие вызваны вперёд;
Ото всего, что тем упорней,
Чем глубже крылось с давних пор,
И старческой любви позорней
Сварливый старческий задор.

Д. Большое спасибо Вам, Владимир Игоревич, что Вы согласились на это интервью. В заключение позвольте мне от всей души пожелать Вам крепкого здоровья и исполнение всех Ваших дальнейших замыслов.

Ноябрь 2008 г.