УДК 519.22+368
ББК 22.17
Ф19

Ф а л и н Г. И., Ф а л и н А. И. **Актуарная математика в задачах.** — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 192 с. — ISBN 5-9221-0451-9.

С помощью большого числа специально подобранных задач, для которых приведены подробные решения, излагаются основные математические модели и методы, которые используются для расчетов характеристик продолжительности жизни, разовых и периодических премий, страховых надбавок, резервов и т. д. для различных видов страхования жизни и пенсионных схем.

Книга предназначена для студентов экономико-математических специальностей, интересующихся актуарной математикой, а также для работников страховых компаний, пенсионных фондов, банков.

Табл. 35. Ил. 15. Библиогр. 26 назв.



ISBN 5-9221-0451-9

# Предисловие

Цель книги — с помощью большого числа специально подобранных задач, для которых приведены подробные решения, дать углубленное изложение основных математических моделей и методов, необходимых для определения характеристик продолжительности жизни, разовых и периодических премий, страховых надбавок, резервов и т. д. для различных видов страхования и пенсионных схем. Этот материал является важнейшей составной частью актуарной математики, которая наряду с соответствующими экономическими и юридическими дисциплинами образует теоретическую базу страхового дела.

Книга является естественным продолжением идейно близкого учебного пособия авторов *Теория риска для актуариев в задачах* (Издательство ф-та ВМиК МГУ, Москва, 2001), которое посвящено актуарным расчетам в общем страховании (страховании «не-жизни») и оценке финансовой устойчивости страховщика (вероятности «разорения»).

Основу книги составили задачи по актуарной математике квалификационных экзаменов Общества Актуариев США (The Society of Actuaries): экзамена 1 «Математические основы актуарной науки», экзамена 3 «Актуарные модели», экзаменов 150 «Актуарная математика» и 151 «Теория риска» старой (действовавшей до 2000 года) экзаменационной системы Общества, а также оригинальные задачи авторов. Часть задач взята из основных зарубежных и отечественных учебников и монографий по актуарной математике, при этом некоторые условия были уточнены и их формулировки отредактированы. Все эти задачи имеют ярко выраженную практическую направленность и позволяют получить определенное представление не только об актуарных расчетах, но и о разработке страховых продуктов, андеррайтинге и т. д.

При актуарных расчетах в долгосрочном страховании жизни широко используется теория сложных процентов. Поэтому мы сочли необходимым включить в книгу несложные задачи по финансовой математике из учебников по финансовой математике, а также задачи по финансовой математике, предлагавшиеся на квалификационном экзамене 2 Общества Актуариев США «Экономика, финансы и теория процентных ставок».

Для понимания материала, изложенного в книге, читатель должен владеть основами актуарной математики в объеме, например, наших книг [3–5] или читать соответствующие главы из этих книг параллельно с чтением предлагаемого пособия.

Первое издание книги было выпущено МГУ им. М. В. Ломоносова в 2002 г. В настоящем издании добавлены новые задачи, а перед каждой главой приведена сводка основных теоретических результатов.

Требования к математической подготовке читателя ограничиваются обычными курсами математического анализа и теории вероятностей, так что книга доступна студентам, получившим базовую математическую подготовку в объеме двух курсов университета. В книге наряду со строгой математической фразой «... с вероятностью 0,95» используется принятая в приложениях фраза «... с вероятностью 95 %».

Книга может использоваться в учебном процессе не только как сборник задач, дополняющий общий теоретический курс актуарной математики, но и как основа самостоятельного курса для студентов экономико-математических специальностей. Она также будет полезна работникам страховых компаний, пенсионных фондов, банков.

Мы будем благодарны читателям за советы и пожелания по поводу книги, которые просим направлять по e-mail: falin@mech.math.msu.su или обычной почтой по адресу: Москва 119992, МГУ им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, проф. Г. И. Фалину.

*24 февраля 2003 г.*

*Д.ф.-м.н., профессор Г. И. Фалин*
*К.ф.-м.н., доцент А. И. Фалин*

# Глава 1
# ОСНОВЫ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

## 1. Процентные ставки

*Эффективная процентная ставка*

Понятие процентов на капитал возникает в следующей простейшей ситуации.

Предположим, что в момент $t$ мы даем в долг сумму $C$ (например, кладем на свой счет в банке, вносим плату за страховку, перечисляем пенсионный взнос в пенсионный фонд и т. д.). Спустя время $h$ мы можем рассчитывать на определенный доход $C' = C \cdot i$ от инвестирования принадлежащего нам капитала $C$. Сумма $C'$ является наградой за то, что наши средства использовались другим человеком. Обычно ее измеряют в относительных единицах; величина $i = C'/C$ называется *эффективной процентной ставкой* (effective rate of interest) за рассматриваемый промежуток времени $(t,\, t+h)$.

*Простые и составные проценты*

Предположим теперь, что сумма $C$ может инвестироваться на два последовательных промежутка времени; пусть $i_k$, $k = 1, 2$, — эффективная процентная ставка на $k$-м промежутке. Существуют две схемы исчисления дохода $C'$ на объединенном интервале:

1. Принцип простых процентов (simple interest) предполагает, что проценты начисляются только на основной капитал. Поэтому $C' = Ci_1 + Ci_2$. Соответственно, итоговая процентная ставка $i = C'/C = i_1 + i_2$.

2. Принцип сложных процентов (compound interest) предполагает, что проценты начисляются не только на основной капитал, но и на уже заработанные проценты. Поэтому в конце второго интервала

времени основной капитал $C$ вырастет до величины

$$C + C' = C \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2).$$

Соответственно, итоговая процентная ставка $i$ определяется из условия $1 + i = (1 + i_1)(1 + i_2)$, т. е. $i = i_1 + i_2 + i_1 i_2$.

Принцип сложных процентов фактически означает, что инвестор может свободно распоряжаться своими средствами. Поэтому в актуарной математике принято использовать принцип сложных процентов при определении дохода от вложения средств.

Процентные ставки, используемые в большинстве расчетов в актуарной математике, определяются, исходя из консервативных оценок доходности реальных будущих инвестиций страховщика. Они намного ниже реальных процентных ставок, предлагаемых рынком для различных видов инвестиционных проектов. Их значение заключается в том, чтобы как-нибудь учесть рост денег, внесенных в качестве платы за страховое покрытие. Поэтому их называют *техническими процентными ставками.* На самом деле страховая компания зарабатывает гораздо бóльшие проценты; более того, это один из самых главных (если не самый главный) источник дохода страховщика.

*Накопления*

Выберем некоторый промежуток времени в качестве единичного (как правило, это будет один год) и предположим, что процентная ставка за этот промежуток равна $i$. Допустим, что в момент $t_0 = 0$ сумма $C$ инвестируется на $t$ единиц времени. Принцип сложных процентов влечет, что в момент $t_0 + t$ капитал $C$ превратится в сумму $C(t) = C \cdot (1 + i)^t$. Величина $A(t) = (1 + i)^t$ называется коэффициентом накопления за время $t$.

*Интенсивность процентов*

*Интенсивность процентов* (force of interest) $\delta$ — это мгновенная относительная скорость накопления средств

$$\delta \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{C(t + \Delta t) - C(t)}{C(t)\Delta t} = \frac{C'(t)}{C(t)} = (\ln C(t))' = \ln(1 + i).$$

Поскольку $i = e^\delta - 1$, коэффициент накопления за время $t$ дается формулой

$$A(t) = e^{\delta t}.$$

Интенсивность процентов удобно использовать для изучения накоплений в случае изменяющихся процентных ставок. В этом случае $\delta = \delta(t)$ и

$$C(t) = C(t_0) \exp\left\{ \int\limits_{t_0}^{t} \delta(u)\, du \right\}.$$

*Номинальные процентные ставки*

Рассмотрим промежуток времени длиной $1/p$. Если в качестве единицы измерения принят один год, то наиболее интересными являются случаи: $p = 12$ (рассматриваемый промежуток времени равен одному месяцу), $p = 4$ (рассматриваемый промежуток времени равен одному кварталу), $p = 2$ (рассматриваемый промежуток времени равен полугодию).

Эффективная процентная ставка $i_*^{(p)}$ за этот промежуток времени есть

$$i_*^{(p)} = (1+i)^{1/p} - 1 = e^{\delta/p} - 1.$$

Однако в финансовой математике принято характеризовать доходность вложения средств на промежутке $1/p$ не эффективной (т. е. реальной) процентной ставкой $i_*(p)$, а так называемой *номинальной процентной ставкой* (nominal rate of interest)

$$i^{(p)} = p \cdot i_*^{(p)}.$$

Иногда величину $i^{(p)}$ называют *номинальной процентной ставкой, выплачиваемой (начисляемой) с частотой* $p$ (nominal rate of interest payable (convertible) $p$ thly).

## 2. Приведенная ценность

Предположим, что в момент $t > 0$ в будущем мы должны будем выплатить некоторую сумму $C$. Чтобы к моменту $t$ иметь в точности требуемую сумму $C$, в настоящее время $t_0 = 0$ нужно располагать суммой $P = C \cdot (1+i)^{-t}$, так как после инвестирования на время $t$ сумма $P$ превратится в сумму $P(1+i)^t = C$. Величина $P$ называется *современной ценностью* (present value) суммы $C$ в момент $t$. Иногда употребляется термин современная стоимость, приведенная стоимость и т. д.

Величину $v = (1+i)^{-1} = e^{-\delta}$ называют *коэффициентом дисконтирования* (*учета*) (discount factor). С ее помощью формулу для приведенной стоимости можно записать в виде

$$P = Cv^t.$$

*Учетная ставка*

Предположим, что в момент $t_0 = 0$ мы даем взаймы сумму $C$. Тогда в момент $t = 1$ нам должны вернуть сумму $C \cdot (1+i)$, которая складывается из двух частей: возврата основного капитала $C$ и процентов на капитал $C' = C \cdot i$.

Если сумму $C \cdot i$, которая должна быть выплачена в момент $t = 1$, привести к моменту $t_0 = 0$, то мы получим сумму $C \cdot i \cdot (1+i)^{-1}$. Поэтому если проценты на капитал могут быть выплачены заранее, в момент

$t_0 = 0$ получения займа, то эти проценты, выплачиваемые вперед, составляют $d = i/(1+i)$ от суммы займа $C$. Величина $d$ называется *эффективной учетной ставкой* (effective rate of discount) за единицу времени.

Учетная ставка $d$ может быть выражена и через интенсивность процентов $\delta$ и коэффициент дисконтирования $v$:

$$d = 1 - v = 1 - e^{-\delta}.$$

Предположим теперь, что сумма $C = 1$ дается в долг на время $1/p$ с заблаговременной выплатой процентов. Как мы видели, эффективная процентная ставка есть $i_*^{(p)} = i^{(p)}/p = (1+i)^{1/p} - 1$. Именно эта сумма должна быть выплачена в момент $t = 1/p$ в виде процентов. Если ее привести к моменту $t_0 = 0$, то она превратится в сумму $i_*^{(p)} \cdot (1+i)^{-1/p} = 1 - (1+i)^{-1/p}$. Поскольку $i = d/(1-d)$, для эффективной учетной ставки $d_*^{(p)}$ за время $1/p$ получим формулу

$$d_*^{(p)} = 1 - (1-d)^{1/p}.$$

Однако в финансовой математике принято работать не с эффективными (т. е. реальными) учетными ставками за время $1/p$, а с так называемыми *номинальными* (т. е. условными, не существующими реально) *учетными ставками* (nominal rate of discount)

$$d^{(p)} \equiv p \cdot d_*^{(p)} = p(1 - (1-d)^{1/p}).$$

Величину $d^{(p)}$ называют *номинальной учетной ставкой, начисляемой с частотой* $p$ (nominal rate of discount convertible $p$ thly).

## 3. Оценивание серии платежей. Детерминированные ренты

Если мы хотим оценить серию выплат, которые должны быть сделаны в разные моменты времени, то все эти выплаты должны быть приведены к некоторому фиксированному моменту $t_0 = 0$, после чего эти выплаты можно складывать, сравнивать и т. д.

С точки зрения приложений к страхованию и пенсионным схемам наиболее важной является задача определения современной стоимости $a$ серии из $n$ выплат величиной $b_1, b_2, \ldots, b_n$ соответственно, которые будут сделаны в некоторые моменты $t_1, t_2, \ldots, t_n$ в будущем. Величина $a$ может рассматриваться, например, как сумма, которую человек должен внести в пенсионный фонд в момент заключения договора (этот момент обычно принимают за начальный) с тем, чтобы в будущем, в моменты $t_1, t_2, \ldots, t_n$, получать пенсию величиной $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Как следует из вышесказанного,

$$a = b_1 v^{t_1} + b_2 v^{t_2} + \ldots + b_n v^{t_n}.$$

Если плата за пенсии производится в виде нескольких платежей величиной $c_1, \ldots, c_k$, сделанных в моменты $\tau_1, \ldots, \tau_k$, то справедливое соотношение между взносами $c_i$ и пенсионными выплатами $b_i$ находится из принципа эквивалентности обязательств:

$$c_1 v^{\tau_1} + \ldots + c_k v^{\tau_k} = b_1 v^{t_1} + \ldots + b_n v^{t_n}.$$

Левая часть этой формулы выражает современную ценность всех взносов в пенсионный фонд или страховую компанию, а правая — современную стоимость всех пенсионных выплат.

Описанная выше общая модель детерминированной пенсионной схемы на практике обычно не применяется. Реально используются схемы, обладающие той или иной формой регулярности как по величине взносов и выплат, так и по моментам осуществления этих платежей. Особо важным является случай серии платежей фиксированной величины, которые производятся через равные промежутки времени фиксированное число раз. Такие серии платежей обычно называют *постоянными рентами* (level annuity). Часто, если нет опасности путаницы с терминами, слово «постоянные» опускают.

*Детерминированные постоянные ренты*

Рассмотрим $n$ последовательных единичных промежутков времени $(0, 1), \ldots, (n-1, n)$. Под моментом $t_0 = 0$ мы обычно будем подразумевать настоящий момент, а в качестве единичного промежутка времени будем рассматривать один год (этот выбор, конечно, условен, так что приводимые ниже формулы можно применять и в случае, если в качестве единичного промежутка времени выбрана одна неделя, один месяц, одни квартал и т. д.).

Серия из $n$ выплат, каждая величиной 1, сделанных в конце этих промежутков, т. е. в моменты $1, 2, \ldots, n$, называется *запаздывающей рентой* (annuity payable in arrear или immediate annuity). Этот денежный поток изображен на рис. 1.1.

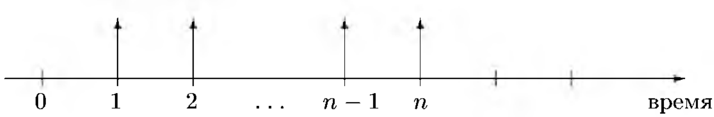


Рис. 1.1

Серия из $n$ выплат, каждая величиной 1, сделанных в начале этих промежутков, т. е. в моменты 0, 1, 2, ..., $n-1$, называется *упреждающей рентой* (annuity payable in advance или annuity-due). Этот денежный поток изображен на рис. 1.2.

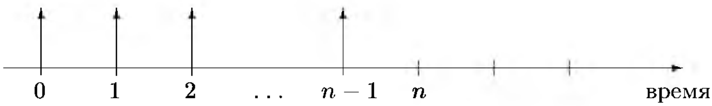


Рис. 1.2

Различие между запаздывающей рентой и упреждающей рентой условное и связано с выбором начала отсчета. Ясно, что если в качестве начального момента выбрать момент $t = 1$, то запаздывающая рента может рассматриваться как упреждающая.

Приведенная ценность *упреждающей* ренты в финансовой математике обозначается $\ddot{a}_{\overline{n}|}$. Это — ценность серии из $n$ платежей величиной 1, производимых через единичные интервалы времени. Стоимость этой серии рассчитывается в момент совершения первого платежа.

В случае, когда ценность данной серии платежей рассчитывается не на момент первого платежа, а на единицу времени раньше (условный ноль), то приведенная ценность называется *запаздывающей* и обозначается $a_{\overline{n}|}$.

Чтобы подсчитать эти величины, нужно привести каждый из $n$ платежей к начальному моменту времени $t_0 = 0$, а затем сложить полученные значения:

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \ldots + v^n = \frac{1 - v^n}{i},$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1} = \frac{1 - v^n}{d}.$$

Величины $a_{\overline{n}|}$ и $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ позволяют подсчитать величину суммы, которую нужно инвестировать в данный момент для того, чтобы получать фиксированный регулярный доход в будущем. С их помощью также можно определить величину регулярных выплат в случае, когда долг возвращается не одним платежом, а серией одинаковых платежей.

Рассмотренные выше рентные платежи начинались на первом же промежутке $(0, 1)$ (в начале его, т. е. в момент $t_0 = 0$, для упреждающей ренты и в конце, т. е. в момент $t_1 = 1$, для запаздывающей ренты). Для приложений важны также так называемые *отсроченные ренты* (deferred annuities). Чтобы их определить, рассмотрим последовательные единичные промежутки времени $(0, 1), (1, 2), \ldots, (m - 1, m), (m, m + 1), \ldots, (m + n - 1, m + n)$. Как и раньше, под моментом $t_0 = 0$ мы будем подразумевать настоящий момент.

Серия из $n$ выплат, каждая величиной 1, сделанных в конце промежутков $(m, m + 1), \ldots, (m + n - 1, m + n)$, т. е. в моменты $m + 1, \ldots, m + n$, называется *запаздывающей отсроченной рентой* (deferred immediate annuity). Ее ценность в настоящий момент $t_0 = 0$ обозначается ${}_{m|}a_{\overline{n}|}$. Чтобы подсчитать эту величину, приведем каждый из $n$ платежей в моменты $m + 1, \ldots, m + n$ к начальному моменту времени, а затем сложим полученные значения:

$$ {}_{m|}a_{\overline{n}|} = v^{m+1} + \ldots + v^{m+n} = v^m a_{\overline{n}|}. $$

Этот денежный поток изображен на рис. 1.3.

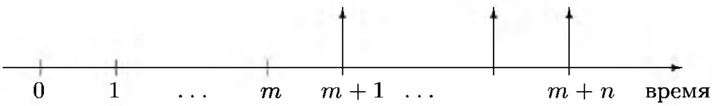


Рис. 1.3

Серия из $n$ выплат, каждая величиной 1, сделанных в начале промежутков $(m, m+1), \ldots, (m+n-1, m+n)$, т. е. в моменты $m, \ldots, m+n-1$, называется *отсроченной упреждающей рентой* (deferred annuity-due). Ее ценность в настоящий момент $t_0 = 0$ обозначается ${}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|}$. Чтобы подсчитать эту величину, приведем каждый из $n$ платежей в моменты $m, \ldots, m+n-1$ к настоящему моменту времени, а затем сложим полученные значения:

$$ {}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|} = v^m + \ldots + v^{m+n-1} = v^m \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|}. $$

Этот денежный поток изображен на рис. 1.4.

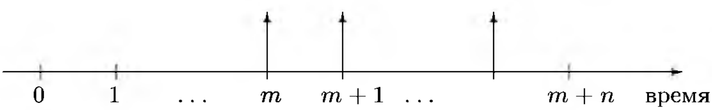


Рис. 1.4

Часто полезно знать ценность ренты не в начальный момент времени, а в конце последнего платежного периода. Эту ценность можно интерпретировать как общую сумму, накопленную на банковском счете после серии регулярных взносов. Ее обозначают так же, как и соответствующую приведенную ценность в начальный момент, но с заменой буквы $a$ на букву $s$.

Итак, $s_{\overline{n}|}$ — это приведенная ценность запаздывающей ренты в момент $t_n = n$ последнего платежа, а $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ — это приведенная ценность упреждающей ренты в момент $t_n = n$, т. е. спустя единицу времени после последнего платежа.

Формулы для накоплений $s_{\overline{n}|}$, $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ можно получить непосредственно, приведя каждый из $n$ платежей к моменту $t_n = n$ и затем складывая полученные значения:

$$ s_{\overline{n}|} = (1+i)^{n-1} + \ldots + 1 = \frac{(1+i)^n - 1}{i}, $$

$$ \ddot{s}_{\overline{n}|} = (1+i)^n + \ldots + (1+i) = \frac{(1+i)^n - 1}{d}. $$

*Детерминированные постоянные ренты, выплачиваемые с частотой $p$*

Рассмотрим $n$ последовательных единичных промежутков времени $(0,1),(1,2),\ldots,(n-1,n)$. Под моментом $t_0 = 0$ мы обычно будем подразумевать настоящий момент, а в качестве единичного промежутка времени будем рассматривать один год.

Разобьем каждый из $n$ единичных промежутков на $p$ равных частей длиной $1/p$ каждая. Если, как мы отмечали, в качестве единицы времени принят один год, то наиболее интересными являются случаи:

1) $p = 12$ (промежуток времени $1/p$ соответствует одному месяцу),

2) $p = 4$ (промежуток времени $1/p$ соответствует одному кварталу),

3) $p = 2$ (промежуток времени $1/p$ соответствует одному полугодию).

Серия из $np$ выплат, каждая величиной $1/p$, сделанных в конце этих подпромежутков, т. е. в моменты

$$1/p,\ldots,\ p/p = 1;\ldots;\ n-1+1/p,\ldots,\ n-1+p/p = n,$$

называется *запаздывающей рентой, выплачиваемой с частотой $p$* (annuity payable $p$thly in arrear или immediate annuity payable $p$thly). Ее ценность в настоящий момент $t_0 = 0$ обозначается $a_{\overline{n}|}^{(p)}$, а ценность в момент $t_n = n$ последнего платежного периода называется накоплением и обозначается $s_{\overline{n}|}^{(p)}$.

Обратим внимание читателя на то, что каждая выплата имеет величину $1/p$, так что в качестве единицы измерения денежных сумм рассматривается *алгебраическая* сумма всех выплат за единичный промежуток времени (в типичном случае — за год).

Серия из $np$ выплат, каждая величиной $1/p$, сделанных в начале подпромежутков, т. е. в моменты

$$0,\ 1/p,\ldots,\ (p-1)/p;\ldots;\ n-1, n-1+1/p,\ldots,\ n-1+(p-1)/p,$$

называется *упреждающей рентой, выплачиваемой с частотой $p$* (annuity payable $p$thly in advance или $p$thly annuity-due). Ее ценность в настоящий момент $t_0 = 0$ обозначается $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)}$, а ценность в момент $t_n = n$ окончания последнего платежного периода называется накоплением и обозначается $\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(p)}$.

Величины $a_{\overline{n}|}^{(p)}$ и $s_{\overline{n}|}^{(p)}$, так же как и величины $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)}$ и $\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(p)}$, оценивают одну и ту же серию платежей, но в разные моменты времени. Поэтому между ними немедленно может быть установлена простая связь:

$$a_{\overline{n}|}^{(p)} = s_{\overline{n}|}^{(p)} \cdot v^n, \qquad s_{\overline{n}|}^{(p)} = a_{\overline{n}|}^{(p)} \cdot (1+i)^n,$$

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} = \ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|} \cdot v^n, \quad \ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|} = \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} \cdot (1+i)^n,$$

$$a^{(p)}_{\overline{n}|} = \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p} v^n.$$

Итак, нам достаточно иметь формулу для величины $\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}$.

С этой целью рассмотрим в качестве единичного отрезка времени $p$-ю долю первоначального единичного отрезка (например, если $p = 12$ и исходный единичный промежуток времени был один год, то новым единичным отрезком времени будет один месяц). Эффективная процентная ставка для этого нового единичного отрезка равна $i^{(p)}_* = i^{(p)}/p$, где $i^{(p)}$ — номинальная процентная ставка для основного единичного промежутка, начисляемая с частотой $p$. Соответственно, новая учетная ставка равна $d^{(p)}_* = d^{(p)}/p$, а новое значение коэффициента дисконтирования есть $v^{(p)}_* = v^{1/p}$.

Теперь на упреждающую ренту, выплачиваемую с частотой $p$ на промежутке $(0, n)$, можно смотреть как на обычную упреждающую ренту, выплачиваемую на промежутке $(0, np)$. Поскольку каждая выплата равна $1/p$, мы имеем:

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|@i} = \frac{1}{p} \cdot \ddot{a}_{\overline{np}|@i^{(p)}/p},$$

где символ $@i$ указывает эффективную процентную ставку на промежутке, который рассматривается в качестве единичного. Отсюда следует, что:

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|@i} = \frac{1-v^n}{d^{(p)}} = \frac{d}{d^{(p)}} \ddot{a}_{\overline{n}|}.$$

Для $a^{(p)}_{\overline{n}|}$ верна аналогичная формула:

$$a^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i^{(p)}} = \frac{i}{i^{(p)}} a_{\overline{n}|}.$$

*Непрерывные ренты*

Рассмотрим теперь упреждающую и запаздывающую ренты, которые выплачиваются с частотой $p$ на промежутке $[0, n]$, и предположим, что $p \to \infty$. Нетрудно показать, что

$$\lim_{p\to\infty} \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{d}{\delta} \ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{\delta},$$

$$\lim_{p\to\infty} a^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{i}{\delta} a_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{\delta}.$$

Тот факт, что эти пределы совпадают, легко объяснить интуитивно.

Если $p \to \infty$, то мы имеем дело с большим числом малых платежей (величиной $1/p$ каждый), совершаемых через малые промежутки времени $1/p$. В пределе при $p \to \infty$ можно рассматривать поступление средств как непрерывный процесс, подобный течению жидкости. При этом в пределе различие между платежами в начале и в конце промежутков исчезнет. Появившийся в этом рассуждении непрерывный поток платежей называется *непрерывно выплачиваемой рентой* (continuously payable annuity). Приведенная стоимость непрерывного потока платежей в момент $t_0 = 0$ обозначается $\overline{a}_{\overline{n}|}$.

Рассматривая поступление средств в предельном случае $p = \infty$ как непрерывный поток жидкости, легко непосредственно определить величину $\overline{a}_{\overline{n}|}$ как интеграл

$$\overline{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n v^t\,dt \equiv \int_0^n e^{-\delta t}\,dt = \frac{1 - v^n}{\delta}.$$

Можно ввести и произвольную непрерывную ренту на промежутке $[0, n]$, которая характеризуется произвольной скоростью $\rho(t)$ поступления средств в момент $t$. Для такой ренты приведенная стоимость в момент $t_0 = 0$ равна интегралу

$$\int_0^n v^t \rho(t)\,dt.$$

Непрерывные ренты часто используются как приближения для рент, которые выплачиваются достаточно часто:

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} \approx \overline{a}_{\overline{n}|}, \qquad a^{(p)}_{\overline{n}|} \approx \overline{a}_{\overline{n}|}.$$

Можно получить и более точные формулы:

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} = \overline{a}_{\overline{n}|} \cdot \left(1 + \frac{\delta}{2p}\right) + o\left(\frac{1}{p}\right),$$

$$a^{(p)}_{\overline{n}|} = \overline{a}_{\overline{n}|} \cdot \left(1 - \frac{\delta}{2p}\right) + o\left(\frac{1}{p}\right).$$

Сумма, накопленная к моменту $t$ при непрерывном поступлении средств со скоростью 1, обозначается $\overline{s}_{\overline{t}|}$. Она может быть подсчитана приведением суммы $\overline{a}_{\overline{t}|}$ к моменту $t$:

$$\overline{s}_{\overline{t}|} = \overline{a}_{\overline{t}|} \cdot (1 + i)^t = \frac{(1 + i)^t - 1}{\delta}.$$

*Детерминированные возрастающие ренты*

Рассмотрим $n$ последовательных единичных промежутков времени $(0,1), (1,2), \ldots, (n-1, n)$. Под моментом $t_0 = 0$ мы обычно будем подразумевать настоящий момент, а в качестве единичного промежутка времени будем рассматривать один год.

Серия из $n$ выплат величиной $1, 2, \ldots, n$, сделанных в конце этих промежутков, т. е. в моменты $t_1 = 1, t_2 = 2, \ldots, t_n = n$, называется *запаздывающей возрастающей рентой* (increasing immediate annuity). Ее приведенная ценность в момент $t_0 = 0$ в финансовой математике обозначается $(Ia)_{\overline{n}|}$. Для подсчета этой величины нужно все платежи привести к начальному моменту, а затем сложить:

$$(Ia)_{\overline{n}|} = v + 2v^2 + \ldots + nv^n = v\frac{1-(n+1)v^n + nv^{n+1}}{(1-v)^2}.$$

Этот денежный поток изображен на рис. 1.5.

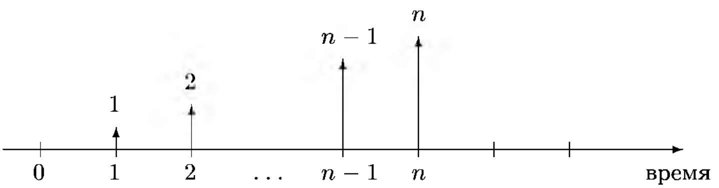


Рис. 1.5

Серия из $n$ выплат величиной $1, 2, \ldots, n$, сделанных в начале промежутков $(0,1), \ldots, (n-1, n)$, т. е. в моменты $t_0 = 0, \ldots, t_{n-1} = n-1$, называется *упреждающей возрастающей рентой* (increasing annuity-due). Ее приведенная ценность в момент $t_0 = 0$ обозначается $(I\ddot{a})_{\overline{n}|}$:

$$(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = 1 + 2v + 3v^2 + \ldots + nv^{n-1} = \frac{1-(n+1)v^n + nv^{n+1}}{(1-v)^2}.$$

Этот денежный поток изображен на рис. 1.6.

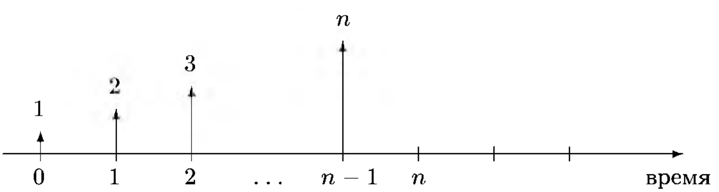


Рис. 1.6

## 4. Доходность инвестиционных проектов

Инвестиционный проект — это сделка, в которой инвестор в определенные моменты времени $t'_1, t'_2, \ldots$ вкладывает средства в размере $a'_1, a'_2, \ldots$ соответственно, а затем в моменты $t''_1, t''_2, \ldots$ получает доход в размере $a''_1, a''_2, \ldots$ соответственно.

Моменты $t'_1, t'_2, \ldots$, когда инвестор вкладывает средства, не обязаны предшествовать моментам $t''_1, t''_2, \ldots$, когда инвестор получает доход (хотя в приложениях к страхованию это обычно имеет место), а могут чередоваться.

Для упрощения теоретических рассуждений удобно рассматривать объединенную последовательность моментов времени $t_1 < t_2 < \ldots$ $\ldots < t_n$ и считать, что

1) если $t_k = t''_i$, то в момент $t_k$ проект приносит прибыль в размере $c_k = a''_i$,

2) если $t_k = t'_j$, то в момент $t_k$ проект приносит отрицательный доход в размере $c_k = -a'_j$.

Последовательность $(t_1, c_1), \ldots, (t_n, c_n)$ называется чистым денежным потоком.

Простейшей мерой доходности инвестиционного проекта является *внутренняя ставка доходности* (internal rate of return — IRR). Эта величина удовлетворяет следующему *уравнению доходности* (yield equation):

$$\sum_{k=1}^{n} c_k (1+i)^{-t_k} = 0.$$

Вообще говоря, уравнение доходности имеет несколько действительных корней. Интерпретировать как процентную ставку можно лишь корень, который больше, чем $-1$; при этом лишь положительный корень означает собственно доход. Ясно, что если не делать никаких предположений о структуре инвестиционного проекта, то уравнение доходности может иметь несколько таких корней. В этом случае считают, что внутренняя ставка доходности не определена.

В приложениях к страхованию жизни приходится иметь дело с проектами, в которых все отрицательные платежи предшествуют положительным. Для таких проектов уравнение доходности имеет единственный корень $i_0 > -1$, который принимают в качестве IRR. Если, кроме того, сумма абсолютных величин всех отрицательных платежей меньше, чем сумма всех положительных, то этот корень уравнения доходности положителен.

## 5. Задачи и решения

**Задача 1.1.** *Негосударственный пенсионный фонд начисляет по пенсионным счетам $i = 7\%$ годовых. 1 января 2001 года вкладчик перечислил $C = 8500$ руб. Какие проценты будут начислены на эту сумму к 31 декабря 2007 года?*

**Решение**

С 1 января 2001 года до 31 декабря 2007 года пройдет $t = 7$ лет. По основной формуле сложных процентов к 31 декабря 2007 года на пенсионном счете будет накоплена сумма

$$A = C(1+i)^t = 8500 \cdot (1{,}07)^7 \approx 8500 \cdot 1{,}60578 \approx 13\,649{,}14.$$

Поэтому проценты составляют

$$A - C \approx 13\,649{,}14 - 8500 = 5\,149{,}14 \text{ руб.}$$

**Задача 1.2.** *Вкладчик внес на счет $C = 10\,000$ руб. Банк гарантирует, что на протяжении трех ближайших лет эффективная годовая процентная ставка будет равна $i_1 = 7\%$. Через три года банк установит процентную ставку $i_2$ на следующие три года. Известно, что новая ставка не выйдет за пределы промежутка $[6\,\%, 8\,\%]$.*

*Что можно сказать о сумме, которая будет накоплена за шесть лет?*

**Решение**

По основной формуле сложных процентов искомое накопление есть

$$A = C\,(1+i_1)^3\,(1+i_2)^3 = 10\,000(1{,}07)^3\,(1+i_2)^3\,.$$

Величина $(1+i_2)^3$ не выйдет за пределы отрезка $[1{,}06^3; 1{,}08^3]$. Поэтому можно гарантировать, что $A \in [14\,590{,}46; 15\,432{,}01]$.

**Задача 1.3 ([24]).** *Проценты по определенному банковскому счету начисляются в соответствии с переменной интенсивностью процентов*

$$\delta(t) = \frac{t^2}{100}, \quad t > 0.$$

*В момент $t_0 = 0$ на счет кладется сумма 100, а в момент $t = 3$ вносится дополнительная сумма $X$. Найдите эту сумму, если известно, что она равна процентам, начисленным за промежуток времени $3 \leqslant t \leqslant 6$.*

**Решение**

Предположим, что в момент $t_1$ сделан вклад в размере 1. Обозначим через $A(t_1, t_2)$ — величину вклада в момент $t_2$ [1]. Поскольку (по определению)

$$\delta(t) = \lim_{h\to 0} \frac{A(t, t+h) - 1}{h},$$

верно равенство:

$$A(t_1, t_2) = \exp\left\{ \int_{t_1}^{t_2} \delta(t)\, dt \right\}.$$

В нашем случае

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{t^2}{100}\, dt = \frac{t^3}{300}\Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{t_2^3 - t_1^3}{300},$$

так что

$$A(t_1, t_2) = \exp\left\{ \frac{t_2^3 - t_1^3}{300} \right\}.$$

В момент $t = 3 + 0$ на счете будет сумма

$$100 \cdot A(0, 3) + X = 100 \cdot e^{0,09} + X,$$

а в момент $t = 6$ она вырастет до

$$\left(100 \cdot e^{0,09} + X\right) \cdot A(3, 6) = \left(100 \cdot e^{0,09} + X\right) \cdot e^{0,63}.$$

Поэтому проценты за промежуток $3 \leqslant t \leqslant 6$ равны

$$\left(100 \cdot e^{0,09} + X\right) \cdot \left(e^{0,63} - 1\right).$$

С другой стороны, по условию эти проценты равны $X$. Решая получившееся уравнение, мы имеем:

$$X = \frac{100 \cdot e^{0,09} \cdot \left(e^{0,63} - 1\right)}{2 - e^{0,63}} \approx 784{,}59.$$

**Задача 1.4 ([7]).** *Банк начисляет проценты по вкладам, используя коэффициенты накопления, основанные на переменной интенсивности процентов. 1 июля 1983 года клиент положил £ 50 000 в банк. На 1 июля 1985 года его вклад вырос до £ 59 102. Предполагая, что интенсивность процентов являлась линейной функцией времени в течение всего периода с 1 июля 1983 года по 1 июля 1985 года, найдите интенсивность процентов 1 июля 1984 года.*

---

[1] Эту величину называют коэффициентом накопления за промежуток времени $[t_1, t_2]$.

**Решение**

Примем 1 июля 1983 года в качестве начального момента времени, а 1 год — в качестве единицы измерения времени. Тогда 1 июля 1985 года — это момент $t = 2$, а 1 июля 1984 года — это момент $t = 1$.

Поскольку (по условию) $\delta(t)$ — линейная функция от $t$, она дается формулой

$$\delta(t) = a + bt,$$

где $a$ и $b$ — некоторые параметры. Тогда для коэффициента накопления за промежуток $(0, t)$ имеем:

$$A(0,t) = \exp\left(\int_0^t \delta(u)\,du\right) = \exp\left(\int_0^t (a+bu)\,du\right) =$$

$$= \exp\left(au + \frac{bu^2}{2}\bigg|_0^t\right) = \exp\left(at + \frac{bt^2}{2}\right).$$

Мы знаем, что $A(0,2) = 59\,102/50\,000 = 1{,}18204$. С другой стороны, из полученной выше формулы для $A(0,t)$ следует, что

$$A(0,2) = \exp(2a + 2b).$$

Нас интересует $\delta(1) = a + b \cdot 1 = a + b$. Сумма $a + b$ фигурирует в вышеприведенной формуле для $A(0,2)$, откуда ее легко найти:

$$a + b = \frac{1}{2}\ln A(0,2) = \frac{1}{2}\ln 1{,}18204 \approx 0{,}083621.$$

Значит, интенсивность процентов на 1 июля 1984 года была 0,083621.

**Задача 1.5.** *Пенсионный фонд должен выплатить участнику:*

1. *5000 руб. 1 июля 2004 года;*
2. *3000 руб. 1 марта 2007 года;*
3. *2000 руб. 1 октября 2008 года;*
4. *8000 руб. 1 апреля 2010 года.*

*Найдите величину обязательств фонда по отношению к этому участнику на 1 января 2003 года. Техническая процентная ставка, используемая фондом для оценки своих обязательств, равна $i = 5\%$.*

**Решение**

Пусть время измеряется в годах, начиная с 1 января 2003 года, а один месяц равен $1/12$ года. Тогда

1. 1 июля 2004 года — это момент $t_1 = 1\frac{6}{12}$;
2. 1 марта 2007 года — это момент $t_2 = 4\frac{2}{12}$;

3. 1 октября 2008 года — это момент $t_3 = 5\frac{9}{12}$;

4. 1 апреля 2010 года — это момент $t_4 = 7\frac{3}{12}$.

Коэфициент дисконтирования $v$ дается формулой

$$v = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1{,}05} \approx 0{,}95238,$$

поэтому величина обязательств фонда на 1 января 2003 года равна:

$$5000\, v^{1{,}5} + 3000\, v^{50/12} + 2000\, v^{5{,}75} + 8000\, v^{7{,}25} \approx 14\,222{,}53 \text{ руб.}$$

**Задача 1.6 ([5]).** *Эксперты негосударственного пенсионного фонда предполагают, что на протяжении ближайших пяти лет эффективная годовая процентная ставка будет равна $i_1 = 10\,\%$. На протяжении следующего пятилетия ожидается годовая процентная ставка $i_2 = 6\,\%$. Человек покупает десятилетнюю ренту с выплатой в конце каждого года 1000 руб. Подсчитайте ее стоимость.*

**Решение**

Приведенная ценность в настоящий момент $t_0 = 0$ пяти годовых платежей в моменты 1, 2, 3, 4, 5 равна

$$1000 \cdot a_{\overline{5|}@i_1},$$

где символ $@i_1$ указывает эффективную годовую процентную ставку на промежутке, который рассматривается в качестве единичного, т. е.

$$1000\frac{1-v_1^5}{i_1} \approx 3791 \text{ руб.}$$

Приведенная ценность в момент $t_5 = 5$ пяти годовых платежей в моменты 6, 7, 8, 9, 10 равна

$$1000 \cdot a_{\overline{5|}@i_2} = 1000\frac{1-v_2^5}{i_2} \approx 4212 \text{ руб.}$$

Чтобы привести эту сумму к моменту $t_0 = 0$, умножим ее на $v_1^5$, что даст $\approx$ 2616 руб. Итак, стоимость ренты есть 3791 руб. + 2616 руб. = = 6407 руб.

**Задача 1.7 ([24]).** *Найдите стоимость следующей ренты, которая платится в конце каждого месяца на протяжении пяти лет. Первая выплата в размере 200 руб. производится через месяц после покупки ренты, а каждая последующая выплата на 200 руб. больше предыдущей. Проценты начисляются в соответствии с номинальной процентной ставкой $i^{(4)} = 9\%$.*

**Решение**

Примем 200 руб. в качестве единицы измерения денежных сумм, один месяц — в качестве единицы времени, момент приобретения ренты — в качестве начального. Тогда рассматриваемая рента представляет собой серию из $n = 60$ выплат величиной $1, 2, \ldots, n$, сделанных в моменты $t_1 = 1, t_2 = 2, \ldots, t_n = n = 60$. Такой денежный поток называется *запаздывающей возрастающей рентой* (increasing immediate annuity). Приведенная стоимость этой ренты в момент $t_0 = 0$ в финансовой математике обозначается $(Ia)_{\overline{n}|}$; она равна

$$(Ia)_{\overline{n}|} = v + 2v^2 + \ldots + nv^n = v\left(1 + 2v + \ldots + nv^{n-1}\right) =$$
$$= v\left(v + v^2 + \ldots + v^n\right)' = v\left(\frac{v - v^{n+1}}{1 - v}\right)' = \frac{(1+i)^{n+1} - (n+1)i - 1}{i^2(1+i)^n}.$$

Здесь $i$ — эффективная процентная ставка для единичного промежутка времени (т. е. одного месяца); она легко может быть подсчитана из соотношения

$$(1 + i)^3 = 1 + i_*^{(4)},$$

где

$$i_*^{(4)} = \frac{1}{4} \cdot i^{(4)} = 2{,}25\,\%$$

— эффективная процентная ставка для одного квартала. Итак,

$$i \approx 0{,}7444\,\%,$$

а искомая стоимость ренты равна

$$(Ia)_{\overline{60}|@0{,}7444} \approx 1364{,}607 \text{ (условных единиц)},$$

или в абсолютных цифрах около 272 921 руб.

**Задача 1.8 ([5]).** *Участник пенсионного фонда желал бы получать пенсию раз в год на протяжении 20 лет через пять лет после заключения договора. Первая выплата должна составлять 1000 руб. с последующим увеличением на 200 руб. ежегодно. Считая, что годовая доходность средств, вложенных в пенсионный фонд, равна $i = 8\,\%$, определите стоимость этой ренты в момент заключения договора.*

**Решение**

Пенсию можно рассматривать как объединение двух рент — отсроченной на 5 лет упреждающей постоянной с величиной ежегодных выплат в 800 руб. и отсроченной на 5 лет упреждающей возрастающей с величиной единичных выплат 200 руб. Поэтому стоимость нашей ренты есть

$$800 \cdot {}_{5|}\ddot{a}_{\overline{20}|} + 200 \cdot {}_{5|}(I\ddot{a})_{\overline{20}|}.$$

Здесь

$${}_{5|}\ddot{a}_{\overline{20}|} = \ddot{a}_{\overline{25}|} - \ddot{a}_{\overline{5}|} = a_{\overline{24}|} - a_{\overline{4}|} = 10{,}5288 - 3{,}3121 = 7{,}2167.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} {}_{5|}(I\ddot{a})_{\overline{20}|} &= v^5 \cdot (I\ddot{a})_{\overline{20}|} = v^5 \frac{\ddot{a}_{20|} - 20v^{20}}{1-v} = \\ &= \frac{{}_{5|}\ddot{a}_{\overline{20}|} - 20v^{25}}{1-v} = \frac{7{,}2167 \quad 20 \cdot 0{,}14602}{0{,}074074} = 58{,}000108. \end{aligned}$$

Итак, стоимость рассматриваемой ренты есть

$$800 \cdot 7{,}2167 + 200 \cdot 58{,}000108 \approx 17\,373 \text{ руб. } 38 \text{ коп.}$$

**Задача 1.9 ([7]).** *Рента выплачивается ежегодно с запаздыванием на протяжении 20 лет. Первая выплата имеет величину 8000, а величина каждой последующей выплаты уменьшается на 300 каждый год. Найдите современную стоимость этой ренты при годовой процентной ставке 5%.*

**Решение**

Пусть современная стоимость равна $X$. Тогда

$$X = 8000v + 7700v^2 + 7400v^3 + \ldots + 2600v^{19} + 2300v^{20}$$

и поэтому

$$(1+i)X = 8000 + 7700v + 7400v^2 + \ldots + 2600v^{18} + 2300v^{19}.$$

Вычитая, мы получим:

$$iX = 8000 - 300(v + v^2 + \ldots + v^{19}) - 2300v^{20}$$

и поэтому

$$X = \frac{8000 - 300a_{\overline{19}|} - 2300v^{20}}{i} = \frac{8000i - 300(1-v^{19}) - 2300iv^{20}}{i^2} \approx 70\,151.$$

Использование функций, связанных с возрастающими рентами, позволяет дать более короткое решение.

Рассмотрим эту ренту как постоянную ренту с ежегодной выплатой 8300, минус возрастающая рента, для которой $r$-й платеж имеет величину $300r$. Значит,

$$X = 8300(v + v^2 + v^3 + \ldots + v^{20}) - 300(v + 2v^2 + 3v^3 + \ldots + 20v^{20}) =$$
$$= 8300a_{\overline{20}|} - 300(Ia)_{\overline{20}|} = 8300a_{\overline{20}|} - 300\frac{\ddot{a}_{\overline{20}|} - 20v^{20}}{i} \approx 70\,151.$$

**Задача 1.10 ([21]).** *Стоимость вечной ренты, которая обеспечивает выплату суммы 10 через каждые три года, начиная с конца шестого года после приобретения ренты, равна 32.*

*Используя ту же техническую процентную ставку $i$, найдите стоимость запаздывающей вечной ренты, которая обеспечивает выплату постоянной суммы 1 каждые четыре месяца.*

**Решение**

Пусть $v = 1/(1+i)$ — коэффициент дисконтирования. Тогда стоимость первой ренты равна

$$a' = 10 \cdot \left(v^6 + v^9 + v^{12} + \ldots\right) = 10\frac{v^6}{1 - v^3}.$$

Используя условие $a' = 32$, для $v$ получим следующее уравнение

$$10v^6 + 32v^3 - 32 = 0,$$

откуда

$$v^3 = \frac{4}{5}.$$

Теперь можно найти стоимость $a''$ второй ренты:

$$a'' = v^{1/3} + v^{2/3} + v^{3/3} + \ldots = \frac{v^{1/3}}{1 - v^{1/3}} = \frac{(4/5)^{1/9}}{1 - (4/5)^{1/9}} \approx 39{,}835.$$

**Задача 1.11 ([24]).** *Инвестор покупает вечную ренту с переменной величиной ежегодных выплат. На протяжении пяти первых лет он будет получать (раз в год, в конце года) одну и ту же сумму 10, а начиная с шестого года эта сумма будет ежегодно увеличиваться на $k$ %. Найдите $k$, если при эффективной годовой процентной ставке $i = 9{,}2\%$ современная стоимость этой ренты равна 167,50.*

**Решение**

В соответствии с условием задачи, инвестор будет получать сумму 10 в моменты 1, 2, 3, 4, 5 и сумму $10 \cdot (1 + k/100)^{n-5}$ — в моменты $t_n = n$ для $n = 6, 7, \ldots$ Современная стоимость этого денежного потока равна

$$a = 10\left(v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5\right) + \sum_{n=6}^{+\infty} 10\left(1 + \frac{k}{100}\right)^{n-5} v^n =$$

$$= 10\frac{v - v^6}{1 - v} + 10\frac{(1 + k/100)\,v^6}{1 - (1 + k/100)\,v},$$

откуда

$$k = 100i \cdot \frac{ai - 10}{ai - 10(1 - v^4)} \approx 4.$$

**Задача 1.12 ([13]).** *Новый участник негосударственного пенсионного фонда, только что заключивший пенсионный договор, приобретет право на получение негосударственной пенсии через 7 лет. Он желал бы*

1) *сделать разовый пенсионный взнос в момент заключения пенсионного договора;*

2) *получать пенсию раз в год на протяжении 12 лет;*

3) *размер пенсии должен учитывать инфляцию и быть равен 5000 в нынешних ценах.*

*Предполагается, что на протяжении ближайших 6 лет инфляция будет практически нулевой, а затем составит около 1,2% в год.*

*Фонд размещает пенсионные резервы и обеспечивает участникам фонда инвестиционный доход в размере $i = 6{,}3\%$ годовых.*

*Определите размер разового пенсионного взноса.*

**Решение**

С учетом инфляции номинальный размер $n$-й пенсионной выплаты ($n = 1, \ldots, 12$) будет равен $5000 \cdot 1{,}012^n$, а производиться эта выплата будет в момент $6 + n$ (мы принимаем момент заключения договора в качестве начального, а один год в качестве единицы времени). Современная стоимость этой серии из 12 платежей равна

$$a = \sum_{n=1}^{12} 5000 \cdot 1{,}012^n \cdot (1{,}063)^{-6-n} = \frac{5000}{1{,}063^6} \sum_{n=1}^{12} \left(\frac{1{,}012}{1{,}063}\right)^n =$$

$$= \frac{5000}{1{,}063^6} \frac{(1{,}012/1{,}063) - (1{,}012/1{,}063)^{13}}{1 - 1{,}012/1{,}063} \approx 30\,648.$$

**Задача 1.13 ([5]).** *Человек получает ежемесячно пенсию величиной 1000 руб, которая выплачивается первого числа каждого месяца до 31 мая 2006 года. После получения очередной пенсии 1 сентября*

*2004 года этот человек пожелал получать пенсию два раза в месяц (1 и 15 числа). Определите величину $X$ этой пенсии, если доходность средств, вложенных в фонд, равна $i = 12\%$ в год.*

**Решение**

Будем считать для упрощения расчетов (это обычная практика), что все месяцы имеют одну длину, равную 1/12 года.

Расчеты удобнее всего вести, выбирая месяц и 1/2 месяца в качестве новых единиц времени. Для этого введем в рассмотрение эффективные процентые ставки для одного месяца и 1/2 месяца; они равны соответственно

$$i_*^{(12)} = (1+i)^{1/12} - 1, \quad i_*^{(24)} = (1+i)^{1/24} - 1.$$

Соответствующие коэффициенты дисконтирования есть

$$v_*^{(12)} = (1+i_*^{(12)})^{-1} = (1+i)^{-1/12}, \quad v_*^{(24)} = (1+i_*^{(24)})^{-1} = (1+i)^{-1/24}.$$

После получения пенсии 1 сентября 2004 года осталось выплатить еще 20 ежемесячных пенсий. Приведенная ценность на 1 сентября 2004 года этой ренты есть

$$1000 a_{\overline{20|}@i_*^{(12)}} = 1000\frac{1-(v_*^{(12)})^{20}}{i_*^{(12)}} = 1000\frac{1-(1+i)^{-20/12}}{(1+i)^{1/12}-1}.$$

Полумесячных пенсий за период действия договора нужно будет выплатить 41. Поскольку промежуток времени от 1 сентября 2004 года до первой такой пенсии 15 сентября 2004 года равен 1/2 месяца, приведенная ценность на 1 сентября этой новой ренты есть

$$X a_{\overline{41|}@i_*^{(24)}} = X\frac{1-(v_*^{(24)})^{41}}{i_*^{(24)}} = X\frac{1-(1+i)^{-41/24}}{(1+i)^{1/24}-1}.$$

Поэтому для величины $X$ новой пенсии мы имеем уравнение:

$$X\frac{1-(1+i)^{-41/24}}{(1+i)^{1/24}-1} = 1000\frac{1-(1+i)^{-20/12}}{(1+i)^{1/12}-1},$$

откуда

$$X \approx 487 \text{ руб. } 77 \text{ коп.}$$

**Задача 1.14 ([13]).** *1 января 1985 года Джим начал копить деньги на старость и внес \$ 200 в пенсионный фонд. В последующем он вносил такую же сумму в начале каждого месяца. В конце ноября 1989 года Джим потерял работу и перестал вносить деньги в фонд. В конце 1990 года он нашел работу и с 1 января 1991 опять начал вносить по \$ 200 ежемесячно.*

*Фонд размещает пенсионные резервы и обеспечивает участникам фонда инвестиционный доход в размере $i^{(12)} = 6\%$ годовых, начисляемых на их пенсионные счета ежемесячно.*

*Какую сумму накопил Джим к концу 1999 года?*

**Решение**

Примем один месяц в качестве единицы времени, а \$ 200 — в качестве единицы измерения денежных сумм. Эффективная процентная ставка за этот единичный промежуток равна $i_* = \frac{1}{12} \cdot 0{,}06 = 0{,}005$.

Пенсионные взносы с 1 января 1985 года по 1 ноября 1989 года (включительно) можно рассматривать как постоянную ренту; общее число платежей равно $n = 59$. Стоимость этой серии платежей в момент последнего платежа (1 ноября 1989 года) есть

$$s_{\overline{59|}} = (1+i_*)^{58} + (1+i_*)^{57} + \ldots + (1+i_*) + 1 = \\ = \frac{(1+i_*)^{59} - 1}{i_*} \approx 68{,}42789.$$

От 1 ноября 1989 года до 31 декабря 1999 года пройдет 122 месяца и поэтому к концу 1999 года эта сумма вырастет до

$$s_{\overline{59|}} \cdot (1+i_*)^{122} \approx 125{,}7455688.$$

Пенсионные взносы с 1 января 1991 года по 1 декабря 1999 года (включительно) можно рассматривать как постоянную ренту; общее число платежей равно $n = 108$. Стоимость этой серии платежей в момент последнего платежа (1 декабря 1999 года) есть

$$s_{\overline{108|}} = (1+i_*)^{107} + (1+i_*)^{106} + \ldots + (1+i_*) + 1 = \\ = \frac{(1+i_*)^{108} - 1}{i_*} \approx 142{,}7399.$$

От 1 декабря 1999 года до 31 декабря 1999 года пройдет 1 месяц, и поэтому к концу 1999 года эта сумма вырастет до

$$s_{\overline{108|}} \cdot (1+i_*) \approx 143{,}453599.$$

Поэтому пенсионные накопления к концу 1999 года будут равны 269,1991681 (условных единиц), или, в абсолютных цифрах, примерно \$ 53 839,83.

**Задача 1.15 ([5]).** *Участник пенсионного фонда раз в квартал на протяжении 5 лет вносит в фонд взнос, размер которого увеличивается на 500 рублей каждый квартал. Первоначальный взнос равен 1000 руб. Через 5 лет после заключения договора (т. е. спустя 3 месяца после последнего взноса) этот человек получает раз в год на протяжении 5 лет постоянную пенсию.*

*Определите величину этой пенсии, если годовая доходность средств, вложенных в фонд, равна 10%.*

**Решение**

Поскольку 5 лет = 20 кварталов, принимая один квартал в качестве единицы времени, а момент заключения договора — в качестве начального момента, мы получим следующую формулу для величины взноса в момент $t_k = k$ :

$$c_k = 1000 + 500k, \quad k = 0, 1, \ldots, 19.$$

Накопления к моменту первой пенсии мы можем выразить следующим образом:

$$A = 500 \cdot \ddot{s}_{\overline{20}|} + 500 \cdot (I\ddot{s})_{\overline{20}|} = 500 \cdot \ddot{s}_{\overline{20}|} + 500 \cdot \frac{\ddot{s}_{\overline{20}|} - 20}{d_*} =$$
$$= 500 \cdot \left(1 + \frac{1}{d_*}\right) \cdot \ddot{s}_{\overline{20}|} - \frac{10\,000}{d_*} = 500 \cdot \left(1 + \frac{1}{d_*}\right) \cdot \frac{(1+i_*)^{20} - 1}{d_*} - \frac{10\,000}{d_*}.$$

Здесь $i_*$ и $d_*$ — эффективная квартальная процентная ставка и эффективная квартальная учетная ставка соответственно:

$$i_* = i^{(4)}/4 = (1+i)^{1/4} - 1 \approx 2{,}41\,\%,$$
$$d_* = d^{(4)}/4 = 1 - (1-d)^{1/4} \approx 2{,}3546\,\%.$$

Поскольку

$$(1+i_*)^{20} - 1 = (1+i)^5 - 1 = 61{,}051\,\%,$$

мы без труда получим, что

$$A \approx 138\,800 \text{ руб.}$$

Теперь мы можем оценить величину $X$ регулярной ежегодной пенсии. Ее приведенная ценность на начало пенсионного периода равна

$$X \cdot \ddot{a}_{\overline{5}|} = X \cdot (1 + a_{\overline{4}|}) = X \cdot 4{,}1699.$$

Поэтому

$$X \approx 33\,300 \text{ руб.}$$

**Задача 1.16 ([24]).** *Долг погашается на протяжении пяти лет ежемесячными платежами. Процентная ставка для сделки равна 9 % годовых, начисляемых ежемесячно. Первая выплата производится через месяц после получения ссуды и равна 1000. Каждая последующая выплата на 2 % меньше предыдущей.*

*Найдите размер невыплаченого долга после того, как сделана 40-я выплата.*

**Решение**

Примем один месяц в качестве единицы времени и найдем эффективную процентную ставку $i_*^{(12)}$ для этого периода, соответствующую номинальной процентной ставке $i^{(12)} = 9\,\%$:

$$i_*^{(12)} = \frac{1}{12} i^{(12)} = 0{,}75\,\% = 0{,}0075.$$

Хотя в нашем случае сумма займа неизвестна, размеры последовательных выплат меняются в соответствии с простым законом и могут быть легко определены. Величина $n$-й выплаты, $p_n$, дается формулой:

$$p_n = 1000 \cdot (1 - 0{,}02)^{n-1}, \quad n = 1, \ldots, 60.$$

Поэтому будем находить искомый баланс ${}_{40}V$ перспективным методом. Для этого примем момент 40 в качестве начального, так что для оплаты долга нужно сделать 20 выплат размером

$$1000 \cdot (0{,}98)^{40}, \ 1000 \cdot (0{,}98)^{41}, \ \ldots, \ 1000 \cdot (0{,}98)^{59}$$

в моменты

$$1, 2, \ldots, 20$$

соответственно. Приведенная стоимость этого денежного потока в момент 0 (т. е. сразу после 40-го платежа по займу) равна

$$ {}_{40}V = \sum_{n=1}^{20} 1000 \cdot (0{,}98)^{39+n}(1{,}0075)^{-n} = $$

$$ = 1000\frac{(0{,}98)^{40}(1{,}0075)^{-1} - (0{,}98)^{60}(1{,}0075)^{-21}}{1 - 0{,}98/1{,}0075} \approx 6889{,}11. $$

**Задача 1.17 ([22]).** *1 января 2002 г. человек в возрасте 40 лет заключает договор страхования жизни на 10 лет. Страховая сумма равна 100 000, а период выплаты премий ограничен 5 годами. Известно, что*

1) *страховое возмещение выплачивается в момент смерти;*
2) *премия в размере 4000 платится в начале года на протяжении 5 лет;*
3) $i = 0{,}05$.

*Подсчитайте величину потерь компании по этому договору, приведенную к моменту его заключения, если застрахованный умирает 30 июня 2004 г.*

**Решение**

Описанная в задаче ситуация схематически изображена на рис. 1.7.

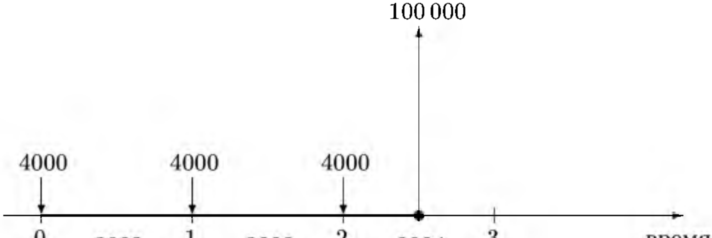


Рис. 1.7

Поскольку остаточное время жизни $T_{40}$ точно известно:

$$T_{40} = 2{,}5,$$

в рассматриваемой ситуации полностью отсутствует фактор случайности.

Мы точно знаем обязательства компании; они заключаются в выплате 100 000 в момент $T_{40} = 2{,}5$ (момент подписания договора принимается в качестве начального). Приведенная стоимость этих обязательств равна

$$100\,000 \cdot (1{,}05)^{-2{,}5} \approx 88\,517.$$

Мы также точно знаем, что страхователь выплатил 3 премии (по 4000 каждая): 1 января 2002 г., 1 января 2003 г. и 1 января 2004 г. Приведенная стоимость этого денежного потока равна

$$4000 \cdot (1 + 1{,}05^{-1} + 1{,}05^{-2}) \approx 11\,438.$$

Поэтому потери компании, приведенные на момент заключения договора, составляют сумму 77 079.

**Задача 1.18 ([17]).** *1 января 1996 г. инвестор вносит в фонд сумму 1000. 1 января 1998 г. он вкладывает еще 1000. Процентная ставка, в соответствии с которой фонд ежегодно увеличивает вклад, меняется от года к году и равна эффективной годовой процентной ставке, соответствующей ставке роста ВВП за последний квартал предыдущего года.*

*Таблица 1.1 содержит данные о росте ВВП (в условных единицах). Через четыре года, 1 января 2000 г., инвестор получает все накопленные средства.*

*Таблица 1.1*

| *год* | *3-й квартал* | *4-й квартал* |
|---|---|---|
| *1995* | *800,0* | *808,0* |
| *1996* | *850,0* | *858,5* |
| *1997* | *900,0* | *918,0* |
| *1998* | *930,0* | *948,6* |

*Найдите внутреннюю ставку доходности этого проекта.*

**Решение**

Эффективная *квартальная* процентная ставка роста ВВП за последний квартал 1995, 1996, 1997, 1998 года равна 1 %, 1 %, 2 % и 2 % соответственно. Поэтому фонд начисляет первые два года $(1{,}01^4 - 1) \approx 4{,}06\,\%$ годовых, а последние два года — $(1{,}02^4 - 1) \approx 8{,}24\,\%$.

К 1 января 2000 г. средства инвестора вырастут до

$$\left(1000 \cdot (1{,}01^4)^2 + 1000\right) \cdot (1{,}02^4)^2 \approx 2440{,}40.$$

Чистый денежный поток, описывающий этот проект, есть:

$$t_1 = 0, \quad t_2 = 1, \quad t_3 = 2, \quad t_4 = 3, \quad t_5 = 4,$$
$$c_1 = -1000, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = -1000, \quad c_4 = 0, \quad c_5 = 2440{,}40.$$

Поэтому уравнение ценности

$$\sum_k c_k (1+i)^{-t_k} = 0$$

выглядит следующим образом:

$$-1000 - 1000 \cdot (1+i)^{-2} + 2440{,}40 \cdot (1+i)^{-4} = 0.$$

Это уравнение легко решается с помощью новой неизвестной $x = (1 + i)^{-2}$: оно имеет два действительных корня

$$i_1 \approx 0{,}067822, \quad i_2 \approx -2{,}067822.$$

Интересующий нас корень должен быть больше, чем $-1$, так что внутренняя ставка доходности равна приблизительно 6,7822 %.

Численно решить уравнение ценности очень удобно с помощью программы Microsoft Excel. Для этого откроем новый файл программы Microsoft Excel и внесем в ячейки A1, B1, C1, D1, E1 появившейся таблицы значения $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$, $c_5$ соответственно; в ячейку F1 введем формулу =IRR(A1:E1). Программа автоматически подсчитает корень соответствующего уравнения ценности (он равен $i_1 \approx 6{,}7822\,\%$) и внесет его в ячейку F1.

# Глава 2
# ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ЖИЗНИ

## 1. Время жизни как случайная величина

Неопределенность момента смерти является основным фактором риска при страховании жизни. Поэтому создание адекватной теории для страхования жизни должно начинаться с разработки системы понятий и определения величин, позволяющих высказывать объективные суждения о продолжительности жизни. Основным является следующий вывод.

Относительно момента смерти отдельного человека нельзя сказать ничего определенного. Однако если мы имеем дело с большой однородной группой людей и не интересуемся судьбой отдельных людей из этой группы, то мы находимся в рамках теории вероятностей как науки о массовых случайных явлениях, обладающих свойством устойчивости частот. Соответственно, *мы можем говорить о продолжительности жизни как о случайной величине* $T$.

*Функция выживания*

В теории вероятностей описывают стохастическую природу любой случайной величины $T$ функцией распределения $F(x)$, которая определяется как вероятность того, что случайная величина $T$ меньше, чем число $x$:

$$F(x) = \mathsf{P}(T < x).$$

В актуарной математике принято работать не с функцией распределения, а с дополнительной функцией распределения $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$. Применительно к продолжительности жизни $1 - F(x)$ — это вероятность того, что человек доживет до возраста $x$ лет. Функция

$$s(x) = 1 - F(x)$$

называется *функцией выживания* (survival function):

$$s(x) = \mathsf{P}(T \geqslant x).$$

Функция выживания обладает следующими характеристическими свойствами:

1. $s(x)$ убывает (при $x \geqslant 0$);
2. $s(0) = 1$;
3. $s(+\infty) = 0$;
4. $s(x)$ непрерывна.

В таблицах продолжительности жизни обычно считают, что существует некоторый *предельный возраст* (limiting age) $\omega$ (как правило, $\omega$ = 100–120 лет) и соответственно $s(x) = 0$ при $x > \omega$. При описании смертности аналитическими законами обычно считают, что время жизни неограниченно, однако подбирают вид и параметры законов так, чтобы вероятность жизни свыше некоторого возраста была бы пренебрежимо мала.

Функция выживания имеет простой статистический смысл. Допустим, что мы наблюдаем за группой из $l_0$ новорожденных (как правило, $l_0 = 100\,000$) и можем фиксировать моменты их смерти. Обозначим число живых представителей этой группы в возрасте $x$ через $L(x)$. Тогда:

$$l_x \equiv \mathsf{E}L(x) = l_0 s(x).$$

Символ $\mathsf{E}$ здесь и ниже используется для обозначения математического ожидания. Итак, функция выживания $s(x)$ равна средней доле доживших до возраста $x$ из некоторой фиксированной группы новорожденных.

В актуарной математике часто работают не с функцией выживания $s(x)$, а с только что введенной величиной $l_x$ (зафиксировав начальный размер группы $l_0$).

*Кривая смертей*

В теории вероятностей принято описывать стохастическую природу непрерывных случайных величин плотностью $f(x)$, которая может быть определена как производная от функции распределения. В актуарной математике график плотности продолжительности жизни $f(x) = -s'(x)$ (или, что практически одно и то же, график функции $l_0 f(x)$) называют *кривой смертей* (the curve of deaths). Величина $l_0 f(x)$ имеет простой статистический смысл. Рассмотрим среднее число представителей исходной группы в $l_0$ новорожденных, умерших в возрасте $x$ лет; эта величина обозначается $d_x$ и равна $l_x - l_{x+1}$. Тогда $d_x \approx l_0 f(x)$.

Функция выживания $s(x)$ может быть восстановлена по плотности:

$$\int_x^\infty f(u)\,du = s(x),$$

так что кривая смертей может быть использована в качестве первичной характеристики продолжительности жизни.

*Интенсивность смертности*

Величина

$$\mu_x = \frac{f(x)}{s(x)}$$

называется *интенсивностью смертности* (the force of mortality). Для человека, дожившего до $x$ лет при малых $t$ величина $\mu_x t$ приближенно выражает вероятность смерти в интервале $(x, x+t)$.

Поскольку функция выживания $s(x)$ может быть восстановлена по интенсивности смертности:

$$s(x) = \exp\left\{ -\int_0^x \mu_u\,du \right\},$$

интенсивность смертности может быть использована в качестве первичной характеристики продолжительности жизни.

*Макрохарактеристики продолжительности жизни*

С практической точки зрения важны следующие макрохарактеристики смертности:

1) среднее время жизни

$$\overset{\circ}{e}_0 \equiv \mathsf{E}T = \int_0^\infty x f(x)\,dx = \int_0^\infty s(x)\,dx,$$

2) дисперсия времени жизни

$$\mathsf{Var}\,T = \mathsf{E}T^2 - (\mathsf{E}T)^2,$$

где

$$\mathsf{E}T^2 = \int_0^\infty x^2 f(x)\,dx = 2\int_0^\infty x s(x)\,dx,$$

3) медиана времени жизни $m(0)$, которая определяется как корень уравнения

$$s(m) = 0{,}5.$$

Медиана времени жизни — это возраст, до которого доживает ровно половина представителей исходной группы новорожденных.

*Аналитические законы смертности*

Для упрощения расчетов, теоретического анализа и т. д. естественно попытаться описать получаемые эмпирическим путем данные о функции выживания или интенсивности смертности с помощью простых аналитических формул.

Простейшее приближение было введено в 1729 г. де Муавром (de Moivre), который предложил считать, что время жизни равномерно распределено на интервале $(0, \omega)$, где $\omega$ — предельный возраст. В модели де Муавра при $0 < x < \omega$

$$f(x) = 1/\omega, \quad F(x) = x/\omega, \quad s(x) = 1 - x/\omega, \quad \mu_x = 1/(\omega - x).$$

Сравнение графиков этих функций с реальными графиками функции выживания $s(x)$, функции смертей $f(x)$, интенсивности смертности $\mu_x$ показывает, что закон де Муавра является не очень хорошим приближением. Например, первая формула означает, что кривая смертей $f(x)$ является горизонтальной линией, в то время как эмпирические данные указывают на пик в районе 80 лет.

В модели, которую предложил в 1825 г. Гомпертц (Gompertz), интенсивность смертности $\mu_x$ приближается показательной функцией вида $Be^{\alpha x}$, где $\alpha > 0$ и $B > 0$ — некоторые параметры. Соответствующая функция выживания $s(x)$ имеет вид

$$s(x) = \exp[-B(e^{\alpha x} - 1)/\alpha],$$

а кривая смертей $f(x) = B\exp[\alpha x - B(e^{\alpha x} - 1)/\alpha]$.

Мэйкхам (Makeham) в 1860 г. обобщил предыдущую модель, приблизив интенсивность смертности $\mu_x$ функцией вида $A + Be^{\alpha x}$. Постоянное слагаемое $A$ позволяет учесть риски для жизни, связанные с несчастными случаями (которые мало зависят от возраста), в то время как член $Be^{\alpha x}$ учитывает влияние возраста на смертность. В этой модели

$$s(x) = \exp[-Ax - B(e^{\alpha x} - 1)/\alpha],$$
$$f(x) = [A + Be^{\alpha x}]\exp[-Ax - B(e^{\alpha x} - 1)/\alpha].$$

Второй закон Мэйкхама, введенный в 1889 году, приближает интенсивность смертности $\mu_x$ функцией вида $A + Hx + Be^{\alpha x}$. В этой модели

$$s(x) = \exp\left[-Ax - Hx^2/2 - B\left(e^{\alpha x} - 1\right)/\alpha\right],$$
$$f(x) = [A + Hx + Be^{\alpha x}]\exp\left[-Ax - Hx^2/2 - B\left(e^{\alpha x} - 1\right)/\alpha\right].$$

Вейбулл (Weibull) в 1939 году предложил приближать интенсивность смертности $\mu_x$ более простой степенной функцией вида $kx^n$. В этой модели

$$s(x) = \exp(-kx^{n+1}/(n+1)), \quad f(x) = kx^n\exp(-kx^{n+1}/(n+1)).$$

## 2. Остаточное время жизни

Страховая компания имеет дело с конкретными людьми, дожившими до определенного возраста. Статистические свойства времени жизни таких людей существенно отличаются от свойств времени жизни новорожденных. Если человек в возрасте $x$ лет обратился в страховую компанию (в актуарной математике такого человека обозначают $(x)$), то заведомо известно, что он дожил до $x$ лет, и поэтому все случайные события, связанные с этим человеком, должны рассматриваться при условии, что $T > x$.

Для человека в возрасте $x$ лет обычно рассматривают не продолжительность жизни $T$, а остаточное время жизни $T_x = T - x$. Распределение случайной величины $T_x$ — это условное распределение величины $T - x$ при условии, что $T > x$:

$$F_x(t) \equiv \mathsf{P}(T_x < t) = \mathsf{P}(T - x < t | T > x) = \frac{\mathsf{P}(x < T < x + t)}{\mathsf{P}(T > x)} = \\ = \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)} = \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x}.$$

Соответствующая функция выживания $s_x(t) \equiv 1 - F_x(t)$ дается формулой:

$$s_x(t) = \frac{s(x+t)}{s(x)},$$

так что плотность $f_x(t)$ случайной величины $T_x$ может быть подсчитана по формуле:

$$f_x(t) = \frac{f(x+t)}{1 - F(x)}, \quad 0 \leqslant t < \infty.$$

Интенсивность смертности, связанная с величиной $T_x$, есть

$$\mu_x(t) \equiv \frac{f_x(t)}{\overline{F}_x(t)} = \frac{f(x+t)/s(x)}{s(x+t)/s(x)} = \frac{f(x+t)}{s(x+t)} = \mu_{x+t}.$$

Это соотношение означает, что интенсивность смертности спустя время $t$ для человека, которому сейчас $x$ лет, равна интенсивности смертности в возрасте $x + t$ для новорожденного. Иными словами, интенсивность смертности в данном возрасте $x + t$ не зависит от уже прожитых лет.

*Основные величины, связанные с остаточным временем жизни*

Вероятность $\mathsf{P}(T_x < t)$ (т. е. вероятность смерти человека возраста $x$ лет в течение ближайших $t$ лет) в актуарной науке обозначается символом ${}_tq_x$. Из приведенных выше формул для $F_x(t)$ следует, что

$${}_tq_x = \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x}.$$

Дополнительная вероятность $\mathsf{P}(T_x > t)$ (т. е. вероятность того, что человек в возрасте $x$ лет проживет еще по меньшей мере $t$ лет) в актуарной науке обозначается символом ${}_tp_x$:

$$ {}_tp_x \equiv \mathsf{P}(T_x > t) = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{l_{x+t}}{l_x}. $$

Случай $t = 1$ играет особую практическую роль и встречается наиболее часто. Для него принято опускать передний индекс у переменных ${}_tq_x$ и ${}_tp_x$. Таким образом, символ $q_x$ обозначает вероятность того, что человек в возрасте $x$ лет умрет в течение ближайшего года, а символ $p_x$ обозначает вероятность того, что человек в возрасте $x$ лет проживет еще по меньшей мере один год. Из приведенных выше общих формул мы имеем:

$$ q_x \equiv \mathsf{P}(T_x < 1) = \frac{s(x) - s(x+1)}{s(x)}, \quad p_x \equiv \mathsf{P}(T_x > 1) = \frac{s(x+1)}{s(x)}. $$

С помощью вероятностей $p_x$ можно подсчитать и более общие вероятности ${}_tp_x$:

$$ {}_tp_x = p_x p_{x+1} \ldots p_{x+t-1}. $$

Рассмотрим теперь более общее событие, заключающееся в том, что человек возраста $x$ проживет еще $t$ лет, но умрет на протяжении $u$ последующих лет.

В терминах остаточного времени жизни $T_x$ это событие можно выразить двойным неравенством: $t < T_x < t + u$. Его вероятность обозначается ${}_{t|u}q_x$:

$$ {}_{t|u}q_x \equiv \mathsf{P}(t < T_x < t+u) = {}_{t+u}q_x - {}_tq_x = \frac{s(x+t) - s(x+t+u)}{s(x)}. $$

Случай $u = 1$ представляет особый интерес для приложений к страхованию жизни. Как обычно, соответствующий индекс принято опускать. Итак, ${}_{t|}q_x$ — это вероятность того, что человек в возрасте $x$ лет проживет еще $t$ лет, но умрет на протяжении следующего года. Приведенные выше общие формулы дают:

$$ {}_{t|}q_x = \frac{s(x+t) - s(x+t+1)}{s(x)}. $$

*Макрохарактеристики остаточного времени жизни*

Среднее значение остаточного времени жизни человека в возрасте $x$ лет, $\mathsf{E}T_x$, обозначается $\mathring{e}_x$ и называется *полной ожидаемой продолжительностью жизни* (the complete-expectation-of-life):

$$\mathring{e}_x \equiv \mathsf{E}T_x = \int\limits_0^\infty \mathsf{P}(T_x > t)\,dt = \frac{1}{s(x)} \int\limits_x^\infty s(u)\,du.$$

Для второго момента $T_x$ верна аналогичная формула:

$$\mathsf{E}\,(T_x)^2 = \frac{2}{s(x)} \int\limits_0^\infty ts(x+t)\,dt.$$

Среднее остаточное время жизни можно выразить и через другие характеристики времени жизни. С этой целью рассмотрим группу из $l_0$ новорожденных и обозначим через $\sigma_x$ суммарное число лет, прожитых представителями этой группы в возрасте $x$ и более. Таким образом, если время жизни $i$-го представителя группы, $T^{(i)}$, меньше чем $x$, его вклад в сумму $\sigma_x$ равен 0. Если же $T^{(i)} > x$, то вклад в сумму равен $T^{(i)} - x$.

Тогда

$$\mathsf{E}\sigma_x = l_x\,\mathring{e}_x\,.$$

Среднее значение величины $\min(T_x, n)$, где $n$ — некоторая положительная константа, называют *частичной средней продолжительностью жизни* и обозначают $\mathring{e}_{x:\overline{n}|}$; для нее верна формула

$$\mathring{e}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{s(x)} \int\limits_x^{x+n} s(u)\,du.$$

## 3. Округленное время жизни

Обычно люди ведут счет прожитых лет целыми годами, а страховые компании обычно заключают договоры страхования жизни на 1, 3, 5 и т. п. целое число лет. В связи с этим естественно рассмотреть наряду с обычной продолжительностью жизни $T_x$ ее целую часть $K_x = [T_x]$. Таким образом, если, например, $T_x = 18$ лет 9 месяцев $= 18{,}75$ лет, то $K_x = 18$ лет. Величина $K_x$ называется *округленной остаточной продолжительностью жизни* (curtate-future-lifetime). Следует подчеркнуть, что округление производится не до ближайшего целого, а всегда с недостатком (т. е. до ближайшего целого, меньшего, чем данное дробное число). В этом смысле английский термин curtate («урезанная») — точнее, чем принятый нами термин «округленная».

*Распределение округленного времени жизни*

Поскольку случайная величина $K_x$ принимает только целые значения, ее стохастическая природа характеризуется (как это принято в теории вероятностей) не функцией распределения, а распределением, т. е. набором вероятностей $\mathsf{P}(K_x = k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Так как событие $\{K_x = k\}$ эквивалентно тому, что $\{k < T_x < k+1\}$, верны равенства:

$$\mathsf{P}(K_x = k) = \frac{s(x+k) - s(x+k+1)}{s(x)} = \frac{l_{x+k} - l_{x+k+1}}{l_x} = \frac{d_{x+k}}{l_x}.$$

*Среднее округленное время жизни и его дисперсия*

Математическое ожидание случайной величины $K_x$ называется *средней округленной продолжительностью жизни* (curtate-expectation-of-life) и обозначается $e_x$:

$$e_x \equiv \mathsf{E}K_x = \frac{1}{s(x)} \sum_{k=1}^{\infty} s(x+k).$$

Подобным же образом для второго момента $\mathsf{E}(K_x)^2$, который необходим для расчета $\mathsf{Var}\, K_x$, мы имеем:

$$\mathsf{E}(K_x)^2 = \frac{2}{s(x)} \sum_{k=1}^{\infty} k s(x+k) - e_x.$$

Более интересной является рекуррентная формула

$$e_x = p_x \cdot (1 + e_{x+1}),$$

откуда вытекает следующее соотношение, связывающее среднее округленное время жизни и вероятность смерти в течение ближайшего года:

$$q_x = \frac{1 + e_{x+1} - e_x}{1 + e_{x+1}}.$$

## 4. Таблицы продолжительности жизни

Статистические данные о продолжительности жизни суммируются в таблицах продолжительности жизни (life tables); иногда их называют таблицами смертности (mortality tables). Простейшим видом таблиц являются таблицы, содержащие информацию о статистических свойствах времени жизни случайно выбранного человека, относительно которого известен только его возраст. Такие таблицы называют *общими* или *упрощенными* (aggregate tables). Они позволяют получить общую приближенную картину смертности. Примером таких таблиц могут служить популяционные таблицы, содержащие данные о смертности населения. В принципе для решения любой задачи достаточно знания функции выживания $s(x)$, однако для наглядности в таблицы обычно включают введенные ранее величины:

1) $l_x = l_0 \cdot s(x)$ — среднее число живых представителей некоторой группы из $l_0 = 100\,000$ новорожденных к возрасту $x$ лет;
2) $d_x = l_x - l_{x+1}$ — число представителей группы, умерших в возрасте от $x$ до $x + 1$ лет;
3) $q_x = d_x / l_x$ — вероятность смерти в течение года для человека в возрасте $x$ лет;
4) $\mathring{e}_x$ — среднее остаточное время жизни.

В качестве шага таблицы обычно рассматривают 1 год, т. е. табулируют значения различных функций от $x$ для $x = 0, 1, 2, \ldots$ лет.

*Таблицы отбора риска*

Очевидно, что статистические свойства продолжительности жизни совершенно различны у жителя высокоразвитой страны Запада и жителя бедного африканского государства, поэтому абсолютно общая таблица вообще не представляет реального интереса.

Однако ясно, что и среди жителей одной страны существуют различные группы людей с разными характеристиками продолжительности жизни. Прежде всего, важно отметить, что смертность среди мужчин в несколько раз выше смертности среди женщин. Вероятно, смертность среди домохозяек меньше, чем среди шахтеров; смертность среди людей, прошедших медицинскую комиссию перед заключением договора страхования, меньше, чем в среднем по стране; смертность среди людей, вышедших на пенсию по болезни, наоборот, выше (конечно, во всех случаях мы должны сравнивать людей в одном возрасте $x$). Но ведь страховая компания имеет дело не с абстрактными людьми, а с вполне конкретными, относительно которых доступна определенная информация (пол, профессия, перенесенные болезни и т. д.). Поэтому ясно, что компания должна иметь целый спектр таблиц продолжительности жизни для различных групп населения. Такие таблицы называются *таблицами с отбором* (select tables) или *таблицами отбора риска*. Обычно создается несколько базовых таблиц, а многочисленные дополнительные риски учитываются с помощью руководств по андеррайтингу, которые дают соответствующие коэффициенты (или аддитивные надбавки) к базовым тарифам. Моральные опасности обычно учитывают юридическими ограничениями и уменьшением страховой суммы.

Термин «отбор» связан с тем, что люди попадают в группу, для которой составляется таблица, после некоторого отбора. Иногда этот отбор кем-то специально проводится (например, медицинской комиссией перед заключением договора страхования), иногда человек сам отбирает себя (например, при оформлении пожизненной ренты), иногда это происходит по причине внешних обстоятельств (например, при оформлении пенсии по болезни). Смертность среди людей, включенных в такую группу, зависит не только от возраста $x$, но и от того, когда произошел отбор. Рассмотрим, например, людей, успешно прошедших медицинский андеррайтинг и заключивших договоры страхования жизни. Ясно, что вероятность смерти в течение ближайшего года человека из этой группы существенно меньше, чем вероятность смерти в течение ближайшего года случайно выбранного человека в том же возрасте. Более интересно то, что вероятность смерти в течение ближайшего года человека, только что прошедшего отбор, меньше, чем вероятность смерти в течение года человека в том же возрасте, но прошедшего отбор несколько лет тому назад. Например, вероятность смерти мужчины в возрасте 52 года по данным страховой статистики Великобритании за 1970–1972 гг. составляет 0,344 % для первого года договора, 0,429 % — если с момента заключения договора прошел уже год и 0,603 %, если договор был заключен 2 или больше лет тому назад.

В связи с этим величины, включенные в таблицы с отбором, имеют два аргумента: один показывает момент отбора $x$, а второй — время $t$, прошедшее с момента отбора. Чтобы указать эту зависимость, в актуарной математике не пишут $f(x,t)$ или $f_{x,t}$ (как мы это сделали бы в общем курсе математики), а употребляют следующее обозначение:

$$f_{[x]+t}.$$

При фиксированном возрасте $x+t$ и моменте отбора $[x]$ (или, что то же самое, промежутке времени $t$, прошедшем с момента отбора) величина вида $f_{[x]+t}$ ничем принципиально не отличается от величины $f_{x+t}$ (мы лишь явно указываем некоторое дополнительное условие, при котором она рассматривается). Поэтому для характеристик продолжительности жизни «отобранных» людей справедливы все приведенные выше результаты, включая введенные там обозначения (точно так же, как для условных вероятностей в классическом курсе теории вероятностей справедливы все теоремы, доказанные для обычных вероятностей). Например,

1) $q_{[x]+t}$ обозначает условную вероятность смерти в течение года человека в возрасте $x+t$ лет, который $t$ лет назад (т. е. в возрасте $x$ лет) был отобран в группу;

2) $p_{[x]+t}$ — это вероятность того, что человек в возрасте $x+t$ лет, который был $t$ лет назад (т. е. в возрасте $x$ лет) отобран в группу, проживет еще по меньшей мере год;

3) ${}_nq_{[x]+t}$ — вероятность того, что человек в возрасте $x+t$ лет, который отобран $t$ лет назад, умрет на протяжении ближайших $n$ лет;

4) ${}_np_{[x]+t}$ — вероятность того, что человек в возрасте $x+t$ лет, который отобран $t$ лет назад, проживет еще по меньшей мере $n$ лет;

5) ${}_{n|m}q_{[x]+t}$ — вероятность того, что человек в возрасте $x+t$ лет, который отобран $t$ лет назад, проживет еще $n$ лет, но умрет на протяжении $m$ последующих лет;

6) ${}_{n|}q_{[x]+t}$ — вероятность того, что человек в возрасте $x+t$ лет, который отобран $t$ лет назад, проживет еще $n$ лет, но умрет на протяжении следующего года.

Все эти вероятности могут быть выражены через вероятности $q_{[x]+t}$; например,

$$p_{[x]+t} = 1 - q_{[x]+t}, \quad {}_np_{[x]+t} = p_{[x]+t} \cdot p_{[x]+t+1} \cdot \ldots \cdot p_{[x]+t+n-1}.$$

*Таблицы с отбором ограниченного действия*

Тонкий статистический анализ показывает, что обычно влияние отбора продолжается неограниченно долго. Однако, как правило, зависимость характеристик смертности от времени, прошедшего с момента отбора, быстро уменьшается и через некоторое время (с той или иной степенью точности) эти характеристики зависят только от достигнутого возраста. Следует подчеркнуть, что само влияние отбора сохраняется, в том смысле, что эти характеристики отличаются от популяционных.

Промежуток времени $r$, после которого зависимостью от момента отбора можно пренебречь и рассматривать все характеристики продолжительности жизни только как функции достигнутого возраста, называется (хотя этот термин не очень верно передает суть дела) *периодом действия отбора* (select period).

Соответствующая таблица называется *таблицей с отбором ограниченного действия* (select-and-ultimate table). Предельные значения $q_x$ (которые заменяют $q_{[x-t]+t}$ при $t \geqslant r$) образуют так называемую *предельную таблицу* (ultimate table). По своей структуре она является таблицей простейшего типа.

Расчет характеристик смертности среди представителей выделенной группы может быть значительно упрощен, если вместо вероятностей $q_{[x]+t}$ ввести в рассмотрение специальные величины $l_{[x]+t}$, которые аналогичны величинам $l_{x+t}$ из общих таблиц смертности.

Рассмотрим некоторую таблицу с отбором, действующим $r$ лет, и определим величины $l_{[x]+t}$ с помощью следующей формулы:

$$l_{[x]+t} = \frac{l_{[x]+t+1}}{p_{[x]+t}}.$$

Поскольку период действия отбора равен $r$, мы полагаем

$$l_{[x]+t} = l_{x+t}, \quad \text{если } t \geqslant r.$$

Тогда

$$p_{[x]+t} = \frac{l_{[x]+t+1}}{l_{[x]+t}}, \quad q_{[x]+t} = \frac{l_{[x]+t} - l_{[x]+t+1}}{l_{[x]+t}},$$

так что величины $l_{[x]+t}$ могут использоваться в качестве первичных характеристик смертности среди представителей выделенной группы. Однако важнее то, что более сложные характеристики смертности, такие как ${}_nq_{[x]+t}$, ${}_np_{[x]+t}$, ${}_{n|m}q_{[x]+t}$, ${}_{n|}q_{[x]+t}$, могут быть проще выражены через величины $l_{[x]+t}$, чем через величины $q_{[x]+t}$. Например,

$$ {}_nq_{[x]+t} = \frac{l_{[x]+t} - l_{[x]+t+n}}{l_{[x]+t}}, \qquad {}_{n|m}q_{[x]+t} = \frac{l_{[x]+t+n} - l_{[x]+t+n+m}}{l_{[x]+t}}. $$

Для дальнейшего упрощения формул можно ввести величины

$$ d_{[x]+t} = l_{[x]+t} - l_{[x]+t+1}, $$

так что, например,

$$ q_{[x]+t} = \frac{d_{[x]+t}}{l_{[x]+t}}. $$

Поэтому часто в таблицы с отбором ограниченного действия включаются только величины $l_{[x]+t}$.

## 5. Приближения для дробных возрастов

Реальные статистические данные о смертности доступны в виде таблиц, в которые входят вероятности $q_x$, величины $l_x$, $e_x$ и т. п. для *целочисленных* значений возраста $x$. Это означает, что все формулы в актуарной математике должны быть приведены к виду, включающему только эти величины. Однако все основные формулы для расчета премий, резервов и других величин, необходимых для ведения страхового бизнеса, содержат *интегралы* (с подынтегральной функцией, включающей функцию выживания $s(x)$). Таким образом, мы должны знать функцию выживания для всех действительных значений аргумента $x$, а не только для целочисленных.

Эта задача может рассматриваться как задача интерполяции. В актуарной математике обычно решают эту задачу, постулируя тот или иной вид функции $s(x)$ между узлами интерполяции, т. е. получают искомую функцию $s(x)$, склеивая в целочисленных точках более простые функции. Основными являются три следующих постулата.

*Равномерное распределение смертей*

Самой простой является интерполяция линейными функциями:

$$ s(x) = (n+1-x)s(n) + (x-n)s(n+1), \qquad n \leqslant x \leqslant n+1. $$

Записывая $x$ в виде $x = n + t$, где $0 \leqslant t < 1$, этой формуле можно придать вид:

$$ s(n+t) = (1-t)s(n) + ts(n+1), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1. $$

Для плотности $f(x)$ это приближение дает:

$$f(x) = -s'(x) = s(n) - s(n+1), \quad n < x < n+1.$$

Соответственно для интенсивности смертности $\mu_x$ мы имеем следующее приближение:

$$\mu_x = \frac{q_n}{1-(x-n)q_n}, \quad n < x < n+1,$$

или, что то же самое,

$$\mu_{n+t} = \frac{q_n}{1-tq_n}, \quad 0 < t < 1.$$

Отметим, что в целочисленных точках плотность $f(x)$ и интенсивность смертности $\mu_x$ не определены.

Одно из наиболее важных следствий предположения о линейной интерполяции функции выживания заключается в следующем. Рассмотрим величину ${}_tq_n$ ($n$ — целое, $t \in (0,1)$). Для нее имеем:

$${}_tq_n = tq_n.$$

Итак, в предположении о линейной интерполяции функции выживания вероятность смерти в течение части года пропорциональна длине этой части.

Верно и обратное утверждение, если вероятность смерти в течение (начальной) части года пропорциональна длине этой части (т. е. ${}_tq_n = tq_n$), то для дробных возрастов (между двумя соседними целыми) функция выживания является линейной.

Введем теперь случайную величину $\tau_x$, равную дробной части величины $T_x$: $\tau_x = \{T_x\}$. Таким образом, $T_x = K_x + \tau_x$, где $K_x$ — округленное время жизни. Величина $\tau_x$ описывает момент смерти внутри года.

Для рассматриваемой интерполяции

1) случайная величина $\tau_x$ равномерно распределена на $(0,1)$;

2) случайные величины $K_x$ и $\tau_x$ — независимы.

Верно и обратное утверждение, если случайная величина $\tau \equiv \tau_0$ равномерно распределена на $(0,1)$ и не зависит от $K \equiv K_0$, то для дробных возрастов (между двумя соседними целыми) функция выживания является линейной.

*Постоянная интенсивность смертности*

Если приближать функцию выживания $s(x)$ на отрезке $n \leqslant x \leqslant n+1$ показательной функцией $a_n e^{-b_n x}$, то

$$s(x) = s(n)p_n^{x-n}, \quad n \leqslant x \leqslant n+1.$$

Записывая $x$ в виде $x = n + t$, где $0 \leqslant t < 1$, этой формуле можно придать вид

$$s(n+t) = s(n)p_n^t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Для плотности $f(x)$ это приближение даст

$$f(x) = -s(n)p_n^{x-n} \ln p_n, \quad n < x < n+1.$$

Отсюда для интенсивности смертности $\mu_x$ мы имеем следующее приближение:

$$\mu_x = -\ln p_n, \quad n < x < n+1,$$

т. е. рассматриваемой интерполяции соответствует предположение о постоянной интенсивности смертности между двумя днями рождений.

*Предположение Балдуччи (Balducci)*

Предположение Балдуччи внешне похоже на предположение о равномерном распределении смертей, однако, в отличие от последнего, линейными функциями интерполируется $1/s(x)$. Это приводит к следующим формулам (ниже $0 < t < 1$):

$$s(n+t) = \frac{s(n+1)}{p_n + tq_n}, \quad f(n+t) = \frac{s(n+1)q_n}{(p_n+tq_n)^2}, \quad \mu_{n+t} = \frac{q_n}{p_n+tq_n}.$$

Одно из наиболее важных следствий предположения Балдуччи заключается в следующем. Рассмотрим величину ${}_{1-t}q_{n+t}$ (вероятность такого рода появляется при оценке резервов для дробных моментов времени). Для нее имеем:

$${}_{1-t}q_{n+t} = (1-t)q_n.$$

Итак, в предположении Балдуччи вероятность смерти до очередного дня рождения пропорциональна времени до этого дня рождения.

Верно и обратное утверждение, если вероятность смерти до очередного дня рождения пропорциональна времени до этого дня рождения (т. е. ${}_{1-t}q_{n+t} = (1-t)q_n$), то для вида функции выживания для дробных возрастов (между двумя соседними целыми) верно предположение Балдуччи.

## 6. Задачи и решения

**Задача 2.1 ([5]).** *Какая из следующих функций может рассматриваться в качестве функции выживания*:

*I.* $s(x) = \exp\left(x - 0{,}(2^x - 1)\right)$;

*II.* $s(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$;

*III.* $s(x) = \exp\left(-x^2\right)$. [1]

(*A*) *только I и II*;

(*B*) *только I и III*;

(*C*) *только II и III*;

(*D*) *I, II и III*;

(*E*) *правильный ответ не дается ни одним из вариантов A, B, C, D.*

**Решение**

Ясно, что для всех трех функций $s(0) = 1$, $s(+\infty) = 0$. Кроме того, все три функции непрерывны. Таким образом, ключевым является вопрос о монотонном убывании.

Функции II и III, очевидно, убывающие.

Для функции I производная показателя экспоненты равна $1 - 0{,}7 \times \times 2^x \cdot \ln 2$. Эта функция должна быть отрицательна при всех $x$. Поскольку она убывающая, достаточно проверить, что она отрицательна при $x = 0$, т. е. $1 - 0{,}7 \cdot \ln 2 < 0$. Однако $\ln 2 < 1$ и поэтому $0{,}7 \cdot \ln 2 < 1$, так что $1 - 0{,}7 \cdot \ln 2 > 0$. Таким образом, функция I не может рассматриваться в качестве функции выживания. Соответственно правильным ответом будет C.

**Задача 2.2 ([5]).** *Покажите, что*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{a^2} e^{-x/a}, & \text{если } 0 < x < +\infty, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

*может рассматриваться как кривая смертей.*

*Найдите соответствующие функцию выживания $s(x)$ и интенсивность смертности $\mu_x$, а также подсчитайте среднюю продолжительность жизни $\overset{\circ}{e}_0$.*

[1] В этой и подобных задачах требуется установить, какой из предложенных вариантов ответов (A, B, C, D или E) является правильным.

**Решение**

1. Поскольку функция $f(x)$ неотрицательна, а при $x > 0$ строго положительна, она может рассматриваться как плотность положительной случайной величины тогда и только тогда, когда

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = 1.$$

Интегрируя по частям, мы получим:

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \frac{1}{a^2}\int_0^\infty xe^{-x/a}\,dx = -\frac{x}{a}e^{-x/a}\Big|_0^\infty + \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-x/a}\,dx = 1.$$

Таким образом, функция $f(x)$ может рассматриваться как кривая смертей.

2. Чтобы определить вид функции выживания $s(x)$, воспользуемся общей формулой

$$s(x) = \int_x^{+\infty} f(u)\,du.$$

В нашем случае имеем:

$$s(x) = \frac{1}{a^2}\int_x^\infty ue^{-u/a}\,du = -\frac{u}{a}e^{-u/a}\Big|_x^\infty + \frac{1}{a}\int_x^\infty e^{-u/a}\,du =$$
$$= \frac{x}{a}e^{-x/a} - e^{-u/a}\Big|_x^\infty = \frac{x+a}{a}e^{-x/a}.$$

Теперь

$$\mu_x = \frac{f(x)}{s(x)} = \frac{x/a^2 \cdot e^{-x/a}}{(x+a)/a \cdot e^{-x/a}} = \frac{x}{a(x+a)}.$$

3. Ожидаемая продолжительность жизни, соответствующая рассматриваемому виду кривой смертей, может быть подсчитана с помощью следующей общей формулы для среднего значения неотрицательной случайной величины:

$$\mathsf{E}T = \int_0^{+\infty} \mathsf{P}(T > x)\,dx.$$

В нашем случае, интегрируя по частям, мы имеем:

$$\overset{\circ}{e}_0 = \int_0^\infty \frac{x+a}{a} e^{-x/a}\,dx = -\int_0^\infty (x+a)\,de^{-x/a} =$$

$$= -(x+a)e^{-x/a}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x/a}\,dx = a + a = 2a.$$

**Задача 2.3 ([5]).** *В табл. 2.1 приведены значения функции выживания.*

*Таблица 2.1*

| $x$ | $s(x)$ | $x$ | $s(x)$ | $x$ | $s(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,000 | 40 | 0,949 | 80 | 0,432 |
| 5 | 0,985 | 45 | 0,936 | 85 | 0,280 |
| 10 | 0,983 | 50 | 0,915 | 90 | 0,142 |
| 15 | 0,982 | 55 | 0,883 | 95 | 0,050 |
| 20 | 0,977 | 60 | 0,837 | 100 | 0,012 |
| 25 | 0,971 | 65 | 0,771 | 105 | 0,002 |
| 30 | 0,965 | 70 | 0,682 | 110 | 0 |
| 35 | 0,958 | 75 | 0,568 | | |

*Подсчитайте среднее значение и дисперсию числа представителей исходной группы в $l_0 = 1000$ новорожденных, которые умрут в возрасте от 50 до 70 лет.*

**Решение**

Пусть $T_i$ — продолжительность жизни $i$-го представителя рассматриваемой группы. Общее число членов группы, которые умрут в возрасте от 50 до 70 лет, ${}_{20}D_{50}$, можно представить в виде суммы

$${}_{20}D_{50} = \sum_{i=1}^{l_0} I(50 < T_i \leqslant 70).$$

Отсюда для среднего числа представителей группы, умерших в возрасте от 50 до 70 лет, имеем:

$${}_{20}d_{50} \equiv \mathsf{E}\left({}_{20}D_{50}\right) = \sum_{i=1}^{l_0} \mathsf{E}I(50 < T_i \leqslant 70) =$$

$$= \sum_{i=1}^{l_0} \mathsf{P}(50 < T_i \leqslant 70) = \sum_{i=1}^{l_0} (s(50) - s(70)) =$$

$$= l_0 \cdot (s(50) - s(70)) = 1000 \cdot (0{,}915 - 0{,}682) = 233 \text{ (чел.)}$$

Для дисперсии случайной величины ${}_{20}D_{50}$ в силу независимости случайных величин $T_i$ имеем:

$$\mathsf{Var}\,({}_{20}D_{50}) = 1000 \cdot \mathsf{Var}\, I(50 < T_i < 70).$$

Но для индикатора $I(A)$ любого события $A$

$$\mathsf{Var}\, I(A) = \mathsf{E}\{I(A)\}^2 - \{\mathsf{E}I(A)\}^2 = \mathsf{E}\{I(A)\} - \{\mathsf{E}I(A)\}^2 = \\ = \mathsf{P}(A) - \{\mathsf{P}(A)\}^2 = \mathsf{P}(A)\cdot(1-\mathsf{P}(A)).$$

Таким образом,

$$\mathsf{Var}\,{}_{20}D_{50} = 1000 \cdot \frac{{}_{20}d_{50}}{1000}\left(1 - \frac{{}_{20}d_{50}}{1000}\right) = 233[1 - 233/1000] = 178{,}711.$$

**Задача 2.4 ([22]).** *Смертность среди застрахованных характеризуется постоянной интенсивностью $\mu$, которая является случайной величиной, равномерно распределенной на промежутке (0, 2).*

*Подсчитайте вероятность того, что случайно выбранный застрахованный умрет на протяжении ближайшего года.*

**Решение**

Если $T$ — остаточное время жизни случайно выбранного застрахованного, то искомая вероятность равна:

$$q = \mathsf{P}(T < 1) = \int_0^2 \mathsf{P}(T < 1|\mu = m)\cdot f_\mu(m)\,dm = \\ = \int_0^2 \left(1 - e^{-m}\right)\cdot\frac{1}{2}\,dm = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-2}\right) \approx 0{,}56767.$$

**Задача 2.5 ([5]).** *Используя табл. 2.1 для функции выживания, определите вероятность ${}_{40|10}q_{20}$ того, что остаточное время жизни человека, которому сейчас 20 лет, $T_{20}$, лежит в промежутке от 40 до 50 лет.*

**Решение**

По формуле условной вероятности мы имеем:

$${}_{40|10}q_{20} \equiv \mathsf{P}(40 < T_{20} < 50) \equiv \mathsf{P}(40 < T - 20 < 50|T > 20) = \\ = \frac{\mathsf{P}(60 < T < 70)}{\mathsf{P}(T > 20)} = \frac{s(60) - s(70)}{s(20)} = \frac{0{,}837 - 0{,}682}{0{,}977} \approx 0{,}16.$$

**Задача 2.6 ([5]).** *Предположим, что в возрасте от 30 до 33 лет интенсивность смертности может быть описана формулой $\mu_x = 0{,}001\,x$. Подсчитайте ${}_{2|}q_{30}$.*

**Решение**

Напомним, что ${}_{t|}q_x$ — это вероятность того, что человек в возрасте $x$ лет проживет еще $t$ лет, но умрет на протяжении следующего года:

$$ {}_{t|}q_x \equiv \mathsf{P}(t < T_x < t+1). $$

По формуле условной вероятности мы имеем:

$$ {}_{t|}q_x \equiv \mathsf{P}(t < T_x < t+1) \equiv \mathsf{P}(t < T - x < t+1 | T > x) = \\ = \frac{\mathsf{P}(x+t < T < x+t+1)}{\mathsf{P}(T > x)} = \frac{s(x+t) - s(x+t+1)}{s(x)}. $$

Поскольку

$$ s(u) = \exp\left(-\int_0^x \mu_v\,dv\right), $$

эту формулу можно записать в виде:

$$ {}_{t|}q_x = \exp\left(-\int_x^{x+t} \mu_v\,dv\right) - \exp\left(-\int_x^{x+t+1} \mu_v\,dv\right). $$

Итак,

$$ {}_{2|}q_{30} = \exp\left(-\int_{30}^{32} \mu_u\,du\right) - \exp\left(-\int_{30}^{33} \mu_u\,du\right) = \\ = e^{-0{,}062} - e^{-0{,}0945} \approx 0{,}03. $$

**Задача 2.7 ([6]).** *Известно, что*

$$ \mu_{x+t} = \frac{1}{85-t} + \frac{3}{105-t}, \quad 0 < t < 85. $$

*Подсчитайте* ${}_{20}p_x$.

**Решение**

$$ {}_{20}p_x \equiv \mathsf{P}(T_x > 20) \equiv s_x(20) = \frac{s(x+20)}{s(x)} = $$

$$ = \frac{\exp\left(-\int\limits_0^{x+20}\mu_u\,du\right)}{\exp\left(-\int\limits_0^{x}\mu_u\,du\right)} = \exp\left(-\int\limits_x^{x+20}\mu_u\,du\right) = \exp\left(-\int\limits_0^{20}\mu_{x+t}\,dt\right) = $$

$$ = \exp\left(\ln(85-t) + 3\ln(105-t)\big|_0^{20}\right) = $$

$$ = \exp(\ln 65 - \ln 85 + 3\ln 85 - 3\ln 105) = \frac{65}{85}\cdot\left(\frac{85}{105}\right)^3 \approx 0{,}4057. $$

**Задача 2.8 ([5]).** *Предположим, что функция выживания дается формулой*

$$ s(x) = \sqrt{1 - x/110}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 110. $$

*Подсчитайте вероятность $q_{50}$ того, что человек в возрасте 50 лет умрет в течение ближайшего года, а также его среднее остаточное время жизни.*

**Решение**

По формуле условной вероятности мы имеем:

$$ q_{50} \equiv \mathsf{P}(T_{50} < 1) \equiv \mathsf{P}(T - 50 < 1 | T > 50) = \frac{\mathsf{P}(50 < T < 51)}{\mathsf{P}(T > 50)} = $$

$$ = \frac{s(50) - s(51)}{s(50)} = 1 - \frac{\sqrt{1 - 51/110}}{\sqrt{1 - 50/110}} = 1 - \sqrt{\frac{59}{60}} \approx 0{,}84\,\%. $$

Дополнительная функция распределения величины $T(50)$ дается формулой:

$$ \mathsf{P}(T(50) > t) \equiv \mathsf{P}(T - 50 > t | T > 50) = \frac{\mathsf{P}(T > t + 50)}{\mathsf{P}(T > 50)} = $$

$$ = \frac{s(50+t)}{s(50)} = \sqrt{1 - t/60}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 60. $$

Поэтому

$$ \mathring{e}_{50} \equiv \mathsf{E}T(50) = \int\limits_0^{60}\sqrt{1 - t/60}\,dt = \frac{2}{3}\cdot(-60)\cdot\left(1 - \frac{t}{60}\right)^{3/2}\Big|_0^{60} = 40 \text{ (лет)}. $$

**Задача 2.9 ([8]).** *Докажите, что*

$$ {}_{m|n}q_x = {}_m p_x - {}_{m+n}p_x. $$

**Решение**

$$ {}_{m|n}q_x \equiv \mathsf{P}\left(m < T_x < m+n\right) = $$
$$ = \mathsf{P}\left(T_x > m\right) - \mathsf{P}\left(T_x > m+n\right) \equiv {}_m p_x - {}_{m+n}p_x. $$

**Задача 2.10 ([22]).** *Специалисты предполагают, что разработка определенного нового типа лекарств увеличит $\overset{\circ}{e}_{30}$ на 4 года. Считая, что смертность описывается (как до разработки лекарств, так и позже) законом де Муавра, определите как изменится предельный возраст.*

**Решение**

Обозначим предельный возраст до (после) разработки лекарств через $\omega$ и $\omega'$ соответственно. Известно, что если смертность описывается законом де Муавра с предельным возрастом $\omega$, то остаточное время жизни $T_x$ равномерно распеределено на промежутке $(0, \omega - x)$. Соответственно, $\overset{\circ}{e}_x = \mathsf{E}T_x = \dfrac{\omega - x}{2}$.

После разработки лекарства $\overset{\circ}{e}{}'_x = \dfrac{w' - x}{2}$. По условию, $\overset{\circ}{e}{}'_x - \overset{\circ}{e}_x = 4$. Отсюда

$$ \frac{\omega' - \omega}{2} = 4, $$

что равносильно тому, что

$$ \omega' = \omega + 8, $$

т. е. предельный возраст увеличится на 8 лет.

**Задача 2.11.** *Найдите $\overset{\circ}{e}_{35:\overline{10}|}$, если*

$$ \mu_t = \begin{cases} 0{,}01 & \text{при } t \in (30, 40), \\ 0{,}02 & \text{при } t \in (40, 50). \end{cases} $$

**Решение**

По определению, частичная средняя остаточная продолжительность жизни $\overset{\circ}{e}_{x:\overline{n}|}$ дается формулой:

$$ \overset{\circ}{e}_{x:\overline{n}|} \equiv \mathsf{E}\left(\min(T_x, n)\right). $$

Для ее расчета найдем дополнительную функцию распределения случайной величины $\min(T_x, n)$, т. е. $\mathsf{P}(\min(T_x, n) > t)$. Прежде всего отметим, что эта функция может быть отлична от нуля только для $t < n$. Кроме того, для $t < n$ событие $\min(T_x, n) > t$ равносильно тому, что $T_x > t$. Значит, верно равенство

$$\mathsf{P}(\min(T_x, n) > t) = \begin{cases} {}_tp_x, & \text{если } 0 \leqslant t < n, \\ 0, & \text{если } t \geqslant n. \end{cases}$$

Величина ${}_tp_x$, в свою очередь, дается формулой:

$${}_tp_x \equiv \mathsf{P}(T_x > t) = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \exp\left(-\int\limits_x^{x+t} \mu_u\, du\right).$$

В нашем случае, при $t \in (0, 5)$

$${}_tp_{35} = \exp\left(-\int\limits_{35}^{35+t} \mu_u\, du\right) = \exp\left(-\int\limits_{35}^{35+t} 0{,}01\, du\right) = e^{-0{,}01t},$$

а при $t \in (5, 10)$

$${}_tp_{35} = \exp\left(-\int\limits_{35}^{40} \mu_u\, du - \int\limits_{40}^{35+t} \mu_u\, du\right) = e^{-5\cdot 0{,}01-(t-5)\cdot 0{,}02} = e^{0{,}05-0{,}02t}.$$

Поэтому

$$\overset{\circ}{e}_{35:\overline{10}|} = \int\limits_0^5 e^{-0{,}01t}\, dt + \int\limits_5^{10} e^{0{,}05-0{,}02t}\, dt =$$

$$= \frac{1-e^{-0{,}05}}{0{,}01} + e^{0{,}05}\frac{e^{-0{,}1}-e^{-0{,}2}}{0{,}02} \approx 9{,}4.$$

**Задача 2.12 ([18]).** *Время жизни некоторого конкретного человека в возрасте 25 лет описывается законом де Муавра с предельным возрастом $\omega = 100$ лет. В наступающем году он предполагает участвовать в серии полетов на воздушном шаре. Поэтому на протяжении этого года его смертность будет характеризоваться постоянной интенсивностью $\mu = 0{,}1$.*

*Как это повлияет на его среднее частичное остаточное время жизни на протяжении 11 ближайших лет?*

**Решение**

Искомая величина $\overset{\circ}{e}_{25:\overline{11}|}$ в общем случае может быть вычислена по формуле:

$$\overset{\circ}{e}_{x:\overline{n}|} \equiv \mathsf{E}\left(\min(T_x, n)\right) = \int\limits_0^n t f_x(t)\, dt + n\mathsf{P}(T_x > n) = \int\limits_0^n s_x(t)\, dt.$$

В исходной ситуации (без участия в полетах), остаточное время жизни, $T_{25}$, равномерно распределено на промежутке $(0, 75)$ и поэтому

$$\overset{\circ}{e}_{25:\overline{11}|} = \int_0^{11} \left(1 - \frac{t}{75}\right) dt = \frac{1529}{150} \approx 10{,}1933 \text{ (лет)}.$$

Далее, в исходной ситуации интенсивность смертности есть

$$\mu_t = \frac{f(t)}{s(t)} = \frac{1/100}{1 - t/100} = \frac{1}{100 - t}, \quad 0 < t < 100.$$

Участие в полетах приводит к тому, что для $t \in (25, 26)$ интенсивность смертности увеличивается до величины 0,1 (ранее в этом возрастном интервале интенсивность смертности была величиной порядка 0,01):

$$\mu_t^* = \begin{cases} 0{,}1, & \text{если } 25 < t < 26, \\ \dfrac{1}{100 - t}, & \text{если } 26 < t < 100. \end{cases}$$

Поэтому функция выживания $s_{25}(t) \equiv \mathsf{P}(T_{25} > t)$ принимает вид:

$$s_{25}^*(t) = \exp\left(-\int_{25}^{25+t} \mu_u^*\, du\right) = \begin{cases} e^{-0{,}1t}, & \text{если } 0 < t < 1, \\ e^{-0{,}1} \cdot \dfrac{75 - t}{74}, & \text{если } 1 < t < 75. \end{cases}$$

Соответственно,

$$\overset{\circ}{e}{}^*_{25:\overline{11}|} = \int_0^{11} s_{25}^*(t)\, dt = \int_0^1 s_{25}^*(t)\, dt + \int_1^{11} s_{25}^*(t)\, dt =$$

$$= \int_0^1 e^{-0{,}1t}\, dt + e^{-0{,}1} \int_1^{11} \frac{75 - t}{74}\, dt \approx 9{,}3886.$$

Таким образом, участие в полетах приведет к уменьшению ожидаемой частичной продолжительности жизни примерно на 0,8047 (лет).

**Задача 2.13.** *Используя данные табл. 2.2, найдите $\overset{\circ}{e}_{30:\overline{5}|}$ в предположении о линейной интерполяции функции выживания для дробных возрастов.*

*Таблица 2.2*

| $x$ | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $l_x$ | 96 307 | 96 117 | 95 918 | 95 709 | 95 490 | 95 260 |

**Решение**

$$\overset{\circ}{e}_{x:\overline{n}|} = \int\limits_0^n {}_tp_x\,dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_k^{k+1} {}_tp_x\,dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_0^1 {}_{k+\tau}p_x\,d\tau =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_0^1 {}_kp_x \cdot {}_\tau p_{x+k}\,d\tau = \sum_{k=0}^{n-1} {}_kp_x \cdot \int\limits_0^1 \left(1 - \tau q_{x+k}\right) d\tau =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} {}_kp_x \cdot \left(1 - \frac{1}{2}q_{x+k}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{l_{x+k}}{l_x}\left(1 + \frac{l_{x+k+1}}{l_{x+k}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2l_x}\left(\sum_{k=0}^{n-1} l_{x+k} + \sum_{k=0}^{n-1} l_{x+k+1}\right) = \frac{1}{2l_x}\left(\sum_{k=0}^{n-1} l_{x+k} + \sum_{k=1}^{n} l_{x+k}\right) =$$

$$= \frac{1}{2l_x}\left(2\sum_{k=1}^{n} l_{x+k} + l_x - l_{x+n}\right) = \frac{1}{l_x}\sum_{k=1}^{n} l_{x+k} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{l_{x+n}}{l_x}\right).$$

Используя эту формулу, в нашем случае мы немедленно имеем:

$$\overset{\circ}{e}_{30:\overline{5}|} \approx 4{,}97.$$

**Задача 2.14.** *Интенсивность смерности описывается законом Мейкхама*

$$\mu_x = A + Be^{\alpha x}, \quad x \geqslant 0,$$

*с параметрами $\alpha = 2$ и $B = 1$.*

*Определите значение параметра $A$, если ${}_{0,4}p_0 = 0{,}50$.*

**Решение**

Поскольку

$${}_tp_x \equiv \mathsf{P}(T_x > t) = \frac{s(x+t)}{s(x)},$$

а для закона Мейкхама

$$s(x) = \exp\left(-Ax - B\frac{e^{\alpha x} - 1}{\alpha}\right),$$

вероятность ${}_{0,4}p_0$ дается формулой:

$${}_{0,4}p_0 = \exp\left(-0{,}4A - \frac{e^{0,8} - 1}{2}\right) \approx \exp(-0{,}4A - 0{,}6128).$$

Отсюда

$$A \approx \frac{\ln 2 - 0{,}6128}{0{,}4} \approx 0{,}2.$$

**Задача 2.15 ([6]).** *Известно, что для некоторого возраста $x$*

$$ {}_tp_x = 1 - \left(\frac{t}{100}\right)^{1,5}, \quad 0 < t < 100. $$

*Подсчитайте* $\overset{\circ}{e}_x$.

**Решение**

Величина ${}_tp_x$ — это $\mathsf{P}(T_x > t)$, то есть, фактически дополнительная функция распределения случайной величины $T_x$. Поэтому

$$ \overset{\circ}{e}_x \equiv \mathsf{E}T_x = \int\limits_0^{+\infty} \mathsf{P}(T_x > t)\,dt = \int\limits_0^{100} \left(1 - \left(\frac{t}{100}\right)^{1,5}\right) dt = $$

$$ = \left(t - \frac{100}{2,5}\left(\frac{t}{100}\right)^{2,5}\right)\Bigg|_0^{100} = 100 - \frac{100}{2,5} = 60 \text{ (лет)}. $$

**Задача 2.16 ([6]).** *Известно, что*

$$ e_{75} = 10{,}5, \quad e_{76} = 10{,}0, \quad e_{77} = 9{,}5. $$

*Подсчитайте вероятность того, что человек в возрасте 75 лет доживет до 77 лет.*

**Решение**

Прежде всего отметим, что

$$ e_x \equiv \mathsf{E}K_x = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(K_x \geqslant n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(T_x \geqslant n). $$

Но

$$ \mathsf{P}(T_x \geqslant n) \equiv {}_np_x = p_x \cdot {}_{n-1}p_{x+1}. $$

Поэтому

$$ e_x = p_x \sum_{n=1}^{\infty} {}_{n-1}p_{x+1} = p_x \sum_{n=0}^{\infty} {}_np_{x+1} = p_x \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} {}_np_{x+1}\right). $$

Сумма

$$ \sum_{n=1}^{\infty} {}_np_{x+1} $$

в силу уже проведенных выкладок равна $e_{x+1}$.

Итак,

$$ e_x = p_x \cdot (1 + e_{x+1}), $$

т. е.

$$p_x = \frac{e_x}{1 + e_{x+1}},$$

так что мы можем подсчитать $p_{75}$ и $p_{76}$:

$$p_{75} = \frac{10,5}{11}, \quad p_{76} = \frac{10}{10,5}.$$

Теперь искомая вероятность есть

$${}_2p_{75} = p_{75} \cdot p_{76} = \frac{10}{11} \approx 0,909.$$

**Задача 2.17.** *Как изменится средняя округленная продолжительность жизни человека в возрасте $x$ лет, если на протяжении ближайшего года его интенсивность смерти увеличится на величину $\delta_t = 0,03 - 0,01t$, $0 < t < 1$?*

**Решение**

Пусть $\mu_t$ — первоначальная интенсивность смерти. По условию новая интенсивность смерти, $\mu_t^*$, дается формулой:

$$\mu_{x+t}^* = \begin{cases} \mu_{x+t} + \delta_t, & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ \mu_{x+t}, & \text{если } t > 1. \end{cases}$$

Поэтому новая вероятность дожить до $x + 1$ лет, $p_x^*$, есть

$$p_x^* = \exp\left(-\int_0^1 \mu_{x+t}^*\,dt\right) = \exp\left(-\int_0^1 \mu_{x+t}\,dt\right) \cdot \exp\left(-\int_0^1 \delta_t\,dt\right) = \\ = p_x e^{-0,025}.$$

Поскольку смертность после $x + 1$ лет не меняется,

$$e_{x+1}^* \equiv e_{x+1}.$$

Используя формулу

$$e_x = p_x(1 + e_{x+1}),$$

для новой средней округленной продолжительности жизни $e_x^*$ мы имеем:

$$e_x^* = p_x^*\left(1 + e_{x+1}^*\right) = p_x e^{-0,025}\left(1 + e_{x+1}\right) = e^{-0,025} \cdot e_x.$$

Отсюда

$$\frac{e_x^*}{e_x} = e^{-0,025} \approx 0,975.$$

Иначе говоря, средняя округленная продолжительность жизни уменьшится на 2,5 %.

**Задача 2.18 ([5]).** *Какие из следующих утверждений верны:*

*I.* ${}_{t+r}p_x \geqslant {}_r p_{x+t}$ $(t, r \geqslant 0)$;

*II.* ${}_r q_{x+t} \geqslant {}_{t|r}q_x$ $(t, r \geqslant 0)$;

*III. Если $s(x)$ описывается законом де Муавра, то медиана остаточного времени жизни $(x)$ равна среднему остаточному времени жизни $(x)$.*

*(A) только I и II;*

*(B) только I и III;*

*(C) только II и III;*

*(D) I, II и III;*

*(E) правильный ответ не дается ни одним из вариантов A, B, C, D.*

**Решение**

Рассмотрим отдельно каждое из утверждений I, II, III.

I. Поскольку ${}_t p_x$ — это вероятность того, что человек в возрасте $x$ лет проживет еще по меньшей мере $t$ лет, наше утверждение можно переписать в терминах остаточного времени жизни в виде:

$$\mathsf{P}(T_x > t + r) \geqslant \mathsf{P}(T_{x+t} > r),$$

что равносильно неравенству

$$\mathsf{P}(T - x > t + r | T > x) \geqslant \mathsf{P}(T - x - t > r | T > x + t).$$

Используя определение условной вероятности, мы можем произвести дальнейшее упрощение:

$$\frac{\mathsf{P}(T > x + t + r)}{\mathsf{P}(T > x)} \geqslant \frac{\mathsf{P}(T > x + t + r)}{\mathsf{P}(T > x + t)},$$

что эквивалентно более простому утверждению

$$s(x + t) \geqslant s(x).$$

Это утверждение ложно, так как функция выживания убывающая.

II. Поскольку ${}_t q_x$ — это вероятность того, что человек в возрасте $x$ лет умрет на протяжении ближайших $t$ лет, а ${}_{t|r}q_x$ — это вероятность того, что человек в возрасте $x$ лет проживет еще по меньшей мере $t$ лет, но умрет на протяжении последующих $r$ лет, наше утверждение можно переписать в терминах остаточного времени жизни в виде:

$$\mathsf{P}(T_{x+t} < r) \geqslant \mathsf{P}(t < T_x < t + r),$$

что равносильно неравенству

$$\mathsf{P}(T - x - t < r | T > x + t) \geqslant \mathsf{P}(t < T - x < t + r | T > x).$$

Используя определение условной вероятности, мы можем произвести дальнейшее упрощение:

$$\frac{\mathsf{P}(x+t<T<x+t+r)}{\mathsf{P}(T>x+t)} \geqslant \frac{\mathsf{P}(x+t<T<x+t+r)}{\mathsf{P}(T>x)},$$

что эквивалентно более простому утверждению

$$s(x) \geqslant s(x+t).$$

Это утверждение истинно, так как выражает свойство монотонного убывания функции выживания.

III. Нетрудно показать, что величина $T_x$ имеет равномерное распределение на промежутке $(0, \omega - x)$. Поэтому среднее остаточное время жизни есть

$$\overset{\circ}{e}_x = \int\limits_0^{\omega-x} s(u)\,du = \int\limits_0^{\omega-x} \left(1 - \frac{u}{\omega - x}\right) du = \frac{\omega - x}{2}.$$

Медиана $m(x)$ остаточного времени жизни находится как корень уравнения

$$\mathsf{P}(T_x > m) = 0{,}5,$$

которое в рассматриваемом случае примет вид:

$$\frac{m}{\omega - x} = 0{,}5.$$

Отсюда

$$m(x) = \frac{\omega - x}{2}$$

и, значит, $\overset{\circ}{e}_x = m(x)$. Соответственно, правильным ответом будет C.

**Задача 2.19 ([14]).** *Найдите вероятность того, что человек в возрасте 80,5 лет умрет на протяжении двух ближайших лет, если*

$$\mu_{80,5} = 0{,}0202, \quad \mu_{81,5} = 0{,}0408, \quad \mu_{82,5} = 0{,}0619,$$

*а для дробных возрастов используется линейная интерполяция функции выживания.*

**Решение**

В предположении о линейной интерполяции функции выживания

$$\mu_{n+t} = \frac{q_n}{1 - tq_n}, \quad 0 < t < 1, \quad n \text{ — целое},$$

или, что эквивалентно,

$$q_n = \frac{\mu_{n+t}}{1 + t\mu_{n+t}},$$

поэтому

$$\begin{aligned} q_{80} &= 0{,}02, & p_{80} &= 0{,}98, \\ q_{81} &= 0{,}04, & p_{81} &= 0{,}96, \\ q_{82} &= 0{,}06, & p_{82} &= 0{,}94. \end{aligned}$$

Теперь для искомой вероятности $\mathsf{P}(T_{80,5} < 2)$ имеем:

$$\mathsf{P}\left(T_{80,5} < 2\right) = 1 - \mathsf{P}\left(T_{80,5} > 2\right) = 1 - \mathsf{P}\left(T - 80{,}5 > 2 | T > 80{,}5\right) =$$

$$= 1 - \frac{s(82{,}5)}{s(80{,}5)} = 1 - \frac{\dfrac{s(83) + s(82)}{2}}{\dfrac{s(81) + s(80)}{2}} = 1 - \frac{\dfrac{s(83)}{s(80)} + \dfrac{s(82)}{s(80)}}{1 + \dfrac{s(81)}{s(80)}} =$$

$$= 1 - \frac{{}_3p_{80} + {}_2p_{80}}{1 + p_{80}} = 1 - \frac{p_{80}p_{81}p_{82} + p_{80}p_{81}}{1 + p_{80}} \approx 0{,}0782.$$

**Задача 2.20 ([22]).** *У господина X от некогда пышной шевелюры к 40 годам осталось всего 3 волоска (и никаких надежд на то, что вырастут новые).*

*Будущая «смертность» этих волосков описывается следующими предположениями*

(1) $_{k|}q_{40} = 0{,}1 \cdot (k + 1)$, $k = 0, 1, 2, 3$;

(2) *выпадение волос для дробных возрастов описывается законом Балдуччи;*

(3) *моменты вападения волос независимы.*

*Подсчитайте вероятность того, что в возрасте 42,5 года господин X будет абсолютно лысым.*

**Решение**

Искомая вероятность $\mathcal{P}$ того, что в возрасте 42,5 года господин X будет абсолютно лысым, равна вероятности того, что на протяжении ближайших 2,5 лет выпадут все волосы; в силу независимости моментов выпадения волос

$$\mathcal{P} = \left({}_{2,5}q_{40}\right)^3.$$

Используя общую формулу:

$$_{t|}q_x = \frac{s(x+t) - s(x+t+1)}{s(x)},$$

мы имеем

$$s(x+k+1) = s(x+k) - s(x) \cdot {}_{k|}q_x.$$

Отсюда (при $x = 40,\ k = 0, 1, 2$) последовательно имеем

$$\begin{aligned} s(41) &= s(40) - s(40) \cdot 0{,}1 = 0{,}9 \cdot s(40), \\ s(42) &= s(41) - s(40) \cdot 0{,}2 = 0{,}7 \cdot s(40), \\ s(43) &= s(42) - s(40) \cdot 0{,}3 = 0{,}4 \cdot s(40). \end{aligned}$$

Соответственно,

$$p_{40} = \frac{s(41)}{s(40)} = \frac{9}{10}, \quad p_{41} = \frac{s(42)}{s(41)} = \frac{7}{9}, \quad p_{42} = \frac{s(43)}{s(42)} = \frac{4}{7}.$$

При предположении Балдуччи,

$$s(n+t) = \frac{s(n+1)}{p_n + tq_n}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

так что

$$s(42{,}5) = \frac{s(43)}{p_{42} + 0{,}5 \cdot q_{42}} = \frac{0{,}4 \cdot s(40)}{\frac{4}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7}} = \frac{28}{55} \cdot s(40).$$

Теперь

$${}_{2{,}5}q_{40} = 1 - \frac{s(42{,}5)}{s(40)} = 1 - \frac{28}{55} = \frac{27}{55},$$

и искомая вероятность равна

$$\mathcal{P} = \left(\frac{27}{55}\right)^3 \approx 0{,}1183.$$

**Задача 2.21 ([22]).** *Обучение в университете длится 4 года. Из поступивших на первый курс $q_0 = 15\,\%$ (по разным причинам) не переходят на второй курс. Из начавших обучение на втором, третьем, четвертом курсе $q_1 = 10\%, q_2 = 5\%, q_3 = 1\%$ не заканчивают соответствующий курс.*

*Предполагая, что внутри года момент ухода имеет равномерное распределение, найдите среднее время, которое студент, переведенный на второй курс, проведет в университете на протяжении ближайших полутора лет.*

**Решение**

В актуарных обозначениях, искомая величина — это $\overset{\circ}{e}_{1:\overline{1,5}|}$. Как известно,

$$\overset{\circ}{e}_{x:\overline{t}|} = \frac{1}{s(x)} \int\limits_{x}^{x+t} s(u)\, du,$$

где $s(u) = \mathsf{P}(T \geqslant u)$ и $T$ — момент ухода из университета. Поскольку $s(x+1) = s(x) \cdot (1 - q_x)$ и $s(0) = 1$, можно подсчитать $s(1), s(2), s(3), s(4)$:

$$s(1) = 0{,}85, \quad s(2) = 0{,}765, \quad s(3) = 0{,}72675, \quad s(4) = 0{,}7194825.$$

Предположение о равномерном распределении момента ухода внутри академического года означает линейную интерполяцию $s(x)$ для нецелых значений $x$. Поэтому

$$\int\limits_{1}^{2{,}5} s(u)\, du$$

можно найти как сумму площадей двух трапеций.

Первая трапеция имеет основания $s(1) = 0{,}85, s(2) = 0{,}765$ и высоту 1. Вторая трапеция имеет основания $s(2) = 0{,}765$, $s(2{,}5) = \frac{s(2) + s(3)}{2} = 0{,}745875$ и высоту 0,5. Поэтому

$$\int\limits_{1}^{2{,}5} s(u)\, du = 0{,}8075 + 0{,}37771875 = 1{,}18521875$$

и, значит,

$$\overset{\circ}{e}_{1:\overline{1,5}|} = 1{,}394375.$$

**Задача 2.22 ([5]).** *Предположим, что $q_{70} = 0{,}04$, а $q_{71} = 0{,}05$. Подсчитайте вероятность того, что человек, которому сейчас 70 лет, умрет в возрасте от $70\frac{1}{2}$ до $71\frac{1}{2}$ лет. Для аппроксимации функции выживания для дробных возрастов используйте предположение Балдуччи. Как изменится результат, если использовать предположение о равномерном распределении смертей?*

**Решение**

Искомая вероятность есть

$$
{}_{0,5|}q_{70} \equiv \mathsf{P}(0{,}5 < T(70) < 1{,}5) \equiv \mathsf{P}(0{,}5 < T - 70 < 1{,}5 | T > 70) = \\
= \frac{\mathsf{P}(70{,}5 < T < 71{,}5)}{\mathsf{P}(T > 70)} = \frac{s(70{,}5) - s(71{,}5)}{s(70)}.
$$

Дальнейший расчет будет зависеть от сделанного предположения о характере смертности для нецелочисленных возрастов.

Напомним, что предположение Балдуччи означает интерполяцию функции $1/s(x)$ для дробных значений $x$ линейными функциями:

$$
\frac{1}{s(n+t)} = \frac{1-t}{s(n)} + \frac{t}{s(n+1)}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.
$$

Отсюда можно получить явную формулу для $s(x)$ на отрезке $n \leqslant x \leqslant$ $\leqslant n+1$:

$$
s(n+t) = \frac{s(n)s(n+1)}{(1-t)s(n+1) + ts(n)} = \frac{s(n+1)}{p_n + tq_n},
$$

где $p_n$ — вероятность того, что человек в возрасте $n$ лет проживет еще по меньшей мере один год, а $q_n$ — вероятность того, что человек в возрасте $n$ лет умрет на протяжении этого года.

Используя эту формулу, можно аппроксимировать $s(70{,}5)$ величиной

$$
\frac{s(71)}{p_{70} + 0{,}5q_{70}} = \frac{s(71)}{0{,}98},
$$

а $s(71{,}5)$ — величиной

$$
\frac{s(72)}{p_{71} + 0{,}5q_{71}} = \frac{s(72)}{0{,}975}.
$$

Таким образом, искомая вероятность равна

$$
\frac{s(71)/0{,}98 - s(72)/0{,}975}{s(70)} = \frac{s(71)}{s(70)}\frac{1}{0{,}98} - \frac{s(72)}{s(70)}\frac{1}{0{,}975} =
$$

$$
= p_{70}/0{,}98 - p_{71}p_{70}/0{,}975 = 0{,}96/0{,}98 - 0{,}95 \cdot 0{,}96/0{,}975 \approx 4{,}42\,\%.
$$

Предположение о равномерном распределении смертей означает интерполяцию функции выживания $s(x)$ для дробных значений $x$ линейными функциями:

$$
s(n+t) = (1-t)s(n) + ts(n+1), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.
$$

Используя эту формулу, мы можем аппроксимировать $s(70{,}5)$ величиной $0{,}5s(70) + 0{,}5s(71)$, а $s(71{,}5)$ — величиной $0{,}5s(71) + 0{,}5s(72)$.

Поэтому искомая вероятность равна

$$0{,}5\frac{s(70)+s(71)-s(71)-s(72)}{s(70)} = 0{,}5\left[1-\frac{s(72)}{s(70)}\right] = 0{,}5\,[1-p_{71}p_{70}] = \\ = 0{,}5[1-0{,}95\cdot 0{,}96] = 4{,}4\,\%.$$

Таким образом, предположение о равномерном распределении смертей привело к незначительному уменьшению искомой вероятности.

**Задача 2.23 ([5]).** *Известно, что* $q_x = 0{,}12$. *Какое из следующих утверждений истинно*:

*I.* ${}_{1/3}q_{x+1/2} = 0{,}0426$, *если принято предположение о равномерном распределении смертей*;

*II.* ${}_{1/3}q_x = 0{,}0435$, *если принято предположение Балдуччи*;

*III.* ${}_{1/2}q_x = 0{,}0619$, *если принято предположение о постоянной интенсивности смертности.*

*(A) только I и II*;

*(B) только I и III*;

*(C) только II и III*;

*(D) I, II и III*;

*(E) правильный ответ не дается ни одним из вариантов A, B, C, D.*

**Решение**

Подсчитаем все величины, фигурирующие в условии задачи:

I. Если принято предположение о равномерном распределении смертей, то

$${}_{1/3}q_{x+1/2} = 1-\frac{s\left(x+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}{s\left(x+\frac{1}{2}\right)} = 1-\frac{s\left(x+\frac{5}{6}\right)}{s\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \\ = 1-\frac{\frac{1}{6}s(x)+\frac{5}{6}s(x+1)}{\frac{1}{2}s(x)+\frac{1}{2}s(x+1)} = \frac{2s(x)-2s(x+1)}{3s(x)+3s(x+1)} = \\ = \frac{2-2(1-q_x)}{3+3(1-q_x)} = \frac{2q_x}{6-3q_x} \approx 0{,}0426,$$

т. е. утверждение I истинно.

II. Если принято предположение Балдуччи, то

$$
{}_{1/3}q_x = 1 - \frac{s\left(x + \frac{1}{3}\right)}{s(x)} = 1 - \frac{s(x+1)}{\left(p_x + \frac{1}{3}q_x\right)s(x)} =
$$

$$
= 1 - \frac{s(x+1)}{s(x+1) + \frac{1}{3}(s(x) - s(x+1))} = 1 - \frac{s(x+1)}{\frac{1}{3}s(x) + \frac{2}{3}s(x+1)} =
$$

$$
= 1 - \frac{p_x}{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}p_x} = \frac{1 - p_x}{1 + 2p_x} = \frac{q_x}{1 + 2(1 - q_x)} \approx 0{,}0435,
$$

т. е. утверждение II истинно.

III. Если принято предположение о постоянной интенсивности смертности, то

$$
{}_{1/2}q_x = 1 - \frac{s\left(x + \frac{1}{2}\right)}{s(x)} = 1 - \frac{s(x)p_x^{1/2}}{s(x)} = 1 - (1 - q_x)^{1/2} \approx 0{,}0619,
$$

т. е. утверждение III истинно.

Соответственно правильным ответом будет D.

**Задача 2.24.** *Смертность описывается табл. 2.3.*

*Таблица 2.3*

| $x$ | $l_x$ | $x$ | $l_x$ | $x$ | $l_x$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 100 000 | 40 | 94 086 | 80 | 35 377 |
| 5 | 98 067 | 45 | 92 164 | 85 | 19 355 |
| 10 | 97 855 | 50 | 89 272 | 90 | 10 142 |
| 15 | 97 679 | 55 | 85 454 | 95 | 6 869 |
| 20 | 97 290 | 60 | 80 404 | 100 | 3 361 |
| 25 | 96 794 | 65 | 74 071 | 105 | 1 052 |
| 30 | 96 192 | 70 | 64 544 | 110 | 381 |
| 35 | 95 354 | 75 | 51 363 | 115 | 0 |

*Найдите вероятность того, что человек в возрасте 20 лет*

1) *доживет до 50 лет,*
2) *умрет в возрасте от 40 лет до 70 лет,*
3) *умрет до 30 лет.*

**Решение**

1. $\mathsf{P}(T_{20} > 30) \equiv {}_{30}p_{20} = \dfrac{l_{50}}{l_{20}} \approx 91{,}8\,\%$,
2. $\mathsf{P}(20 < T_{20} < 50) \equiv {}_{20|30}q_{20} = \dfrac{l_{40} - l_{70}}{l_{20}} \approx 30{,}4\,\%$,
3. $\mathsf{P}(T_{20} < 10) \equiv {}_{10}q_{20} = 1 - {}_{10}p_{20} = 1 - \dfrac{l_{30}}{l_{20}} \approx 1{,}1\,\%$.

**Задача 2.25.** *В таблице 2.4 приведен фрагмент популяционной таблицы продолжительности жизни населения США в 1979–1981 гг.*

*Таблица 2.4*

| $x$ | $l_x$ | $x$ | $l_x$ | $x$ | $l_x$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 97 741 | 25 | 97 110 | 30 | 96 477 |
| 21 | 97 623 | 26 | 96 982 | 31 | 96 350 |
| 22 | 97 499 | 27 | 96 856 | 32 | 96 220 |
| 23 | 97 370 | 28 | 96 730 | 33 | 96 088 |
| 24 | 97 240 | 29 | 96 604 | 34 | 95 951 |

*Предполагая, что известны только значения $l_{20}$, $l_{25}$, $l_{30}$, а смертность от 20 до 34 лет описывается законом Гомпертца, подсчитайте приближенные значения $l_x$ для $x \in [20, 34]$.*

**Решение**

В модели Гомпертца интенсивность смертности на рассматриваемом промежутке $20 \leqslant t \leqslant 34$ приближается показательной функцией вида $Be^{\alpha t}$, где $\alpha > 0$, $B > 0$ — некоторые параметры.

Тогда при $t \in [20, 34]$ функция $l_t$ может быть записана в виде:

$$l_t = l_0 \exp\left(-\int_0^t \mu_u\,du\right) = l_0 \exp\left(-\int_0^{20} \mu_u\,du\right) \cdot \exp\left(-\int_{20}^t \mu_u\,du\right) =$$

$$= l_{20} \exp\left(-\int_{20}^t \mu_u\,du\right) = l_{20} \exp\left(-\frac{B}{\alpha} e^{\alpha u}\Big|_{20}^t\right) =$$

$$= l_{20} \exp\left(-B\frac{e^{\alpha t} - e^{20\alpha}}{\alpha}\right).$$

В частности,

$$l_{25} = l_{20} \exp\left(-B\frac{e^{25\alpha} - e^{20\alpha}}{\alpha}\right), \quad l_{30} = l_{20} \exp\left(-B\frac{e^{30\alpha} - e^{20\alpha}}{\alpha}\right).$$

Отсюда

$$\ln l_{20} - \ln l_{25} = B\frac{e^{25\alpha} - e^{20\alpha}}{\alpha}, \quad \ln l_{20} - \ln l_{30} = B\frac{e^{30\alpha} - e^{20\alpha}}{\alpha}.$$

Разделив эти равенства почленно, мы получим

$$e^{5\alpha} = \frac{\ln l_{25} - \ln l_{30}}{\ln l_{20} - \ln l_{25}} \equiv A,$$

откуда

$$\alpha = \frac{1}{5} \ln A \approx 0{,}001935.$$

Теперь получаем

$$B = \alpha \frac{\ln l_{20} - \ln l_{25}}{A^4(A-1)} \approx 0{,}001240175.$$

Значения величин $l_t$, полученные с помощью приближения Гомпертца, приведены в табл. 2.5 (мы округлили их до целых чисел); они практически не отличаются от точных значений, приведеных в табл. 2.4.

*Таблица 2.5*

| $x$ | $l_x$ | $x$ | $l_x$ | $x$ | $l_x$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 97 741 | 25 | 97 110 | 30 | 96 477 |
| 21 | 97 615 | 26 | 96 984 | 31 | 96 350 |
| 22 | 97 489 | 27 | 96 857 | 32 | 96 223 |
| 23 | 97 363 | 28 | 96 730 | 33 | 96 096 |
| 24 | 97 236 | 29 | 96 604 | 34 | 95 969 |

**Задача 2.26 ([22]).** *Для прогноза смертности в группе из 1000 человек в возрасте 95 лет на ближайшие 3 года актуарий использует предположение, что момент смерти равномерно распределен внутри последнего года жизни. Часть полученных им данных приведена в табл. 2.6.*

*Таблица 2.6*

| *Возраст* | *Число доживших* |
|---|---|
| *95* | *1000* |
| *95,5* | *800* |
| *96* | *600* |
| *96,5* | *480* |
| *97* | — |
| *97,5* | *288* |
| *98* | — |

*Восстановите эту таблицу, соответствующую таблицу смертности для величин $q_x$, $x = 95$, $96$, $97$, а также подсчитайте ожидаемое число доживших до 97,5 лет, если используется предположение о постоянной интенсивности смертности для дробных возрастов.*

**Решение**

Предположение о равномерном распределении момента смерти равносильно линейной интерполяции $l_{n+t}$:

$$l_{n+t} = l_n(1-t) + t l_{n+1}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

В частности,

$$l_{n+0,5} = \frac{l_n + l_{n+1}}{2},$$

так что

$$l_{n+1} = 2 \cdot l_{n+0,5} - l_n,$$

и поэтому

$$l_{97} = 960 - 600 = 360, \quad l_{98} = 576 - 360 = 216.$$

Далее,

$$d_{95} = l_{96} - l_{95} = 400, \quad d_{96} = l_{97} - l_{96} = 240, \quad d_{97} = l_{98} - l_{97} = 144,$$

$$q_{95} = \frac{d_{95}}{l_{95}} = \frac{400}{1000} = 0{,}4, \; q_{96} = \frac{d_{96}}{l_{96}} = \frac{240}{600} = 0{,}4, \; q_{97} = \frac{d_{97}}{l_{97}} = \frac{144}{360} = 0{,}4.$$

В предположении о постоянной интенсивности смертности,

$$l_{97+t} = l_{97} e^{-\mu t}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Отсюда

$$l_{97,5} = l_{97} e^{-0,5\mu} = l_{97}\sqrt{e^{-\mu}} = l_{97}\sqrt{\frac{l_{98}}{l_{97}}} = \sqrt{l_{97} \cdot l_{98}} = \sqrt{360 \cdot 216} \approx 278{,}85.$$

**Задача 2.27 ([5]).** *Таблица 2.7 содержит вероятности $q_{[x]+t}$.*

*Таблица 2.7*

| $[x]$ | $t = 0$ $q_{[x]}$ | $t = 1$ $q_{[x]+1}$ | $t = 2$ $q_{[x]+2}$ | $q_{x+3}$ | $x + 3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 30 | $103 \cdot 10^{-5}$ | $170 \cdot 10^{-5}$ | $209 \cdot 10^{-5}$ | $229 \cdot 10^{-5}$ | 33 |
| 31 | $124 \cdot 10^{-5}$ | $186 \cdot 10^{-5}$ | $222 \cdot 10^{-5}$ | $241 \cdot 10^{-5}$ | 34 |
| 32 | $139 \cdot 10^{-5}$ | $191 \cdot 10^{-5}$ | $231 \cdot 10^{-5}$ | $254 \cdot 10^{-5}$ | 35 |
| 33 | $154 \cdot 10^{-5}$ | $207 \cdot 10^{-5}$ | $244 \cdot 10^{-5}$ | $267 \cdot 10^{-5}$ | 36 |
| 34 | $175 \cdot 10^{-5}$ | $212 \cdot 10^{-5}$ | $251 \cdot 10^{-5}$ | $283 \cdot 10^{-5}$ | 37 |

*Подсчитайте величину ${}_2q_{[32]+1}$.*

**Решение**

Величина ${}_2q_{[32]+1}$ дает вероятность того, что человек в возрасте 33 лет, который был отобран $t = 1$ год тому назад, умрет на протяжении ближайших двух лет (т. е. до наступления 35 лет). Удобно рассчитывать дополнительную вероятность $1 - {}_2q_{[32]+1}$, которая равна вероятности того, что человек доживет до 35 лет. Очевидно, что человек доживет до 35 лет, если:

1) он доживет до 34 лет (вероятность этого события есть $1 - q_{[32]+1}$);

2) при условии, что он дожил до 34 лет, он доживет до 35 лет (так как в возрасте 34 года с момента отбора пройдет 2 года, вероятность этого события есть $1 - q_{[32]+2}$).

Итак,

$$1 - {}_2q_{[32]+1} = (1 - q_{[32]+1}) \cdot (1 - q_{[32]+2}),$$

т. е.

$${}_2q_{[32]+1} = q_{[32]+1} + q_{[32]+2} - q_{[32]+1} \cdot q_{[32]+2} \approx 422 \cdot 10^{-5}.$$

**Задача 2.28 ([5]).** *Для таблицы 2.8 с отбором, действующим 2 года, установите, какое из следующих утверждений верно:*

*I.* ${}_2p_{[31]} > {}_2p_{[30]+1}$;

*II.* ${}_{1|}q_{[31]} > {}_{1|}q_{[30]+1}$;

*III.* ${}_2q_{[33]} > {}_2q_{[31]+2}$.

*Таблица 2.8*

| $[x]$ | $l_{[x]}$ | $l_{[x]+1}$ | $l_{x+2}$ | $x+2$ |
|---|---|---|---|---|
| *30* | *1000* | *998* | *995* | *32* |
| *31* | *996* | *994* | *988* | *33* |
| *32* | *994* | *990* | *982* | *34* |
| *33* | *987* | *983* | *970* | *35* |

*(A) ни одно из них;*

*(B) только I;*

*(C) только II;*

*(D) только III;*

*(E) правильный ответ не дается ни одним из вариантов A, B, C, D.*

**Решение**

I. Величина ${}_2p_{[31]}$ — это вероятность того, что человек в возрасте 31 год, который только что прошел отбор, проживет еще по меньшей мере 2 года. Поэтому

$${}_2p_{[31]} = \frac{l_{[31]+2}}{l_{[31]}} = \frac{l_{33}}{l_{[31]}} = \frac{988}{996} = 0{,}9919679.$$

Величина ${}_2p_{[30]+1}$ — это вероятность того, что человек в возрасте 31 год, который прошел отбор 1 год тому назад, проживет еще по меньшей мере 2 года. Поэтому

$${}_2p_{[30]+1} = \frac{l_{[30]+3}}{l_{[30]+1}} = \frac{l_{33}}{l_{[30]+1}} = \frac{988}{998} = 0{,}98998.$$

Таким образом, как и следовало ожидать,

$$_2p_{[31]} > {}_2p_{[30]+1},$$

т. е. утверждение I истинно.

II. Величина $_{1|}q_{[31]}$ — это вероятность того, что человек в возрасте 31 год, который только что прошел отбор, проживет еще один год, но умрет на протяжении следующего года (т. е. он умрет в возрасте 32 года). Поэтому

$$_{1|}q_{[31]} \equiv {}_{1|1}q_{[31]} = \frac{l_{[31]+1} - l_{[31]+2}}{l_{[31]}} = \frac{994 - 988}{996} = 0{,}0060241.$$

Величина $_{1|}q_{[30]+1}$ — это вероятность того, что человек в возрасте 31 год, который прошел отбор один год тому назад, проживет еще один год, но умрет на протяжении следующего года (т. е. он умрет в возрасте 32 года). Поэтому

$$_{1|}q_{[30]+1} \equiv {}_{1|1}q_{[30]+1} = \frac{l_{[30]+2} - l_{[30]+3}}{l_{[30]+1}} = \frac{l_{32} - l_{33}}{l_{[30]+1}} = \frac{995 - 988}{998} = 0{,}007014.$$

Таким образом, как и следовало ожидать,

$$_{1|}q_{[31]} < {}_{1|}q_{[30]+1},$$

т. е. утверждение II — ложно.

III. Величина $_2q_{[33]}$ — это вероятность того, что человек в возрасте 33 года, который только что прошел отбор, умрет на протяжении ближайших двух лет. Поэтому

$$_2q_{[33]} = \frac{l_{[33]} - l_{[33]+2}}{l_{[33]}} = \frac{l_{[33]} - l_{35}}{l_{[33]}} = \frac{987 - 970}{987} = 0{,}0172239.$$

Величина $_2q_{[31]+2}$ — это вероятность того, что человек в возрасте 33 года, который прошел отбор два года тому назад, умрет на протяжении ближайших двух лет. Поэтому

$$_2q_{[31]+2} = \frac{l_{[31]+2} - l_{[31]+4}}{l_{[31]+2}} = \frac{l_{33} - l_{35}}{l_{33}} = \frac{988 - 970}{988} = 0{,}0182186.$$

Таким образом, как и следовало ожидать,

$$_2q_{[33]} < {}_2q_{[31]+2},$$

т. е. утверждение III — ложно.

Следовательно, правильный ответ — B.

**Задача 2.29 ([5]).** *Для некоторой таблицы с отбором, действующим 2 года, известно, что*

$$1 - \frac{q_{[x]}}{q_x} = 2 \cdot \left(1 - \frac{q_{[x]+1}}{q_{x+1}}\right),$$

*а*

$$l_{[32]} = 90, \quad l_{32} = 100, \quad l_{33} = 90, \quad l_{34} = 63.$$

*Подсчитайте* $l_{[32]+1}$.

**Решение**

Обозначим $1 - \dfrac{q_{[x]+1}}{q_{x+1}}$ через $k$, так что

$$q_{[x]} = (1-2k)q_x, \quad q_{[x]+1} = (1-k)q_{x+1}.$$

Теперь определим неизвестный параметр $k$. Для этого отметим, что

$$p_{32} = \frac{l_{33}}{l_{32}} = \frac{90}{100} = 0{,}9, \quad p_{33} = \frac{l_{34}}{l_{33}} = \frac{63}{90} = 0{,}7.$$

Поэтому

$$q_{32} = 1 - p_{32} = 0{,}1, \quad q_{33} = 1 - p_{33} = 0{,}3,$$

и, значит,

$$q_{[32]} = (1-2k)\cdot 0{,}1 = 0{,}1 - 0{,}2k; \quad q_{[31]+1} = (1-k)\cdot 0{,}1 = 0{,}1 - 0{,}1k;$$

$$q_{[33]} = (1-2k)\cdot 0{,}3 = 0{,}3 - 0{,}6k; \quad q_{[32]+1} = (1-k)\cdot 0{,}3 = 0{,}3 - 0{,}3k.$$

Теперь для $l_{[32]}$ имеем:

$$l_{[32]} = \frac{l_{34}}{p_{[32]}\cdot p_{[32]+1}} = \frac{63}{(0{,}9+0{,}2k)\cdot(0{,}7+0{,}3k)}.$$

Поскольку по условию $l_{[32]} = 90$, мы получим следующее уравнение:

$$63 = (0{,}9+0{,}2k)\cdot(0{,}7+0{,}3k)\cdot 90.$$

Отсюда $k = 1/6$ и поэтому, в частности,

$$p_{[32]} = 0{,}9 + \frac{1}{6}\cdot 0{,}2 = \frac{14}{15}.$$

Теперь

$$l_{[32]+1} = l_{[32]}\cdot p_{[32]} = 90\cdot\frac{14}{15} = 84.$$

**Задача 2.30.** *В таблице 2.9 приведен фрагмент таблицы продолжительности жизни с отбором, действующим 2 года.*

*Таблица 2.9*

| $x$ | $l_{[x]}$ | $l_{[x]+1}$ | $l_{x+2}$ | $x+2$ |
|---|---|---|---|---|
| *60* | *80625* | *79954* | *78839* | *62* |
| *61* | *79137* | *78402* | *77252* | *63* |
| *62* | *77575* | *76770* | *75578* | *64* |

*Предполагая, что момент смерти равномерно распределен внутри последнего года жизни, подсчитайте* ${}_{0,9}q_{[60]+0,6}$.

**Решение**

Поскольку

$$ {}_u q_{[x]+t} = \frac{l_{[x]+t} - l_{[x]+t+u}}{l_{[x]+t}}, $$

для искомой величины ${}_{0,9}q_{[60]+0,6}$ мы имеем:

$$ {}_{0,9}q_{[60]+0,6} = \frac{l_{[60]+0,6} - l_{[60]+1,5}}{l_{[60]+0,6}}. $$

В силу предположения о равномерном распределении смертей,

$$ l_{[60]+0,6} = 0{,}6 \cdot l_{[60]+1} + 0{,}4 \cdot l_{[60]} \approx 80222{,}4, $$
$$ l_{[60]+1,5} = 0{,}5 \cdot l_{[60]+1} + 0{,}5 \cdot l_{62} = 79396{,}5, $$

откуда

$$ {}_{0,9}q_{[60]+0,6} \approx 1{,}03\,\%. $$

**Задача 2.31 ([5]).** *Рассмотрим двух человек в возрасте $x$ и $y$ соответственно. Предположим, что:*

*1) время жизни первого человека описывается законом де Муавра с предельным возрастом $\omega$;*

*2) время жизни второго человека при $t \geqslant y$ характеризуется постоянной интенсивностью смертности $\mu$;*

*3) остаточные времена жизни $T(x)$ и $T(y)$ независимы.*

*Определите вероятность того, что $(x)$ умрет на протяжении ближайших $n$ лет $(n + x < \omega)$ и ранее $(y)$.*

**Решение**

Искомая вероятность может быть выражена как

$$ A = \mathsf{P}(T_x \leqslant n,\ T_x < T_y). $$

В соответствии с формулой полной вероятности

$$ A = \int_0^n \mathsf{P}(T_y > t) \cdot f_x(t)\, dt, $$

где $f_x(t)$ — плотность остаточного времени жизни $(x)$. Как нетрудно показать, $T_x$ описывается законом де Муавра с предельным возрастом $\omega - x$. Поэтому

$$ f_x(t) = \frac{1}{\omega - x}, \qquad 0 < t < \omega - x. $$

Для $\mathsf{P}(T_y > t)$ мы имеем:

$$\mathsf{P}(T_y > t) \equiv \mathsf{P}(T - y > t | T > y) = \frac{\mathsf{P}(T > y + t)}{\mathsf{P}(T > y)} =$$

$$= \frac{s(y+t)}{s(y)} = \exp\left\{ - \int\limits_y^{y+t} \mu_u \, du \right\} = e^{-\mu t}.$$

Поэтому искомая вероятность есть:

$$A = \int\limits_0^n e^{-\mu t} \frac{1}{\omega - x} \, dt = - \frac{1}{\mu(\omega - x)} e^{-\mu t} \Big|_0^n = \frac{1 - e^{-\mu n}}{\mu(\omega - x)}.$$

**Задача 2.32 ([25]).** *Известно, что:*

1) *функция выживания для мужчин имеет вид* $1 - \dfrac{x}{75}$, где $0 < x < 75$;

2) *смертность среди женщин описывается законом де Муавра;*

3) *в возрасте 60 лет интенсивность смертности для женщин составляет 60% от интенсивности смертности для мужчин.*

*Предполагая, что остаточное время жизни мужа (возраст $x = 65$ лет) и жены (возраст $y = 60$ лет) независимы, найдите среднее время до второй смерти.*

**Решение**

Пусть $s_m(x)$ — функция выживания для мужчин, $s_f(x)$ — функция выживания для женщин:

$$s_m(x) = 1 - \frac{x}{75}, \quad 0 < x < 75,$$

$$s_f(x) = 1 - \frac{x}{\omega}, \quad 0 < x < \omega.$$

Для соответствующих интенсивностей смертности имеем:

$$\mu_m(x) = \frac{1}{75 - x}, \quad 0 < x < 75,$$

$$\mu_m(x) = \frac{1}{w - x}, \quad 0 < x < w.$$

По условию

$$\mu_f(60) = 0{,}6 \, \mu_m(60).$$

Отсюда можно найти предельный возраст для женщин:

$$w = 85.$$

Остаточные времена жизни $T_{65}^m$ и $T_{60}^f$ равномерно распределены на промежутках (0,10) и (0,25) соответственно:

$$\mathsf{P}(T_{65}^m < t) = \begin{cases} t/10, & \text{если } 0 < t < 10, \\ 1, & \text{если } t \geqslant 10, \end{cases}$$

$$\mathsf{P}(T_{60}^f < t) = \begin{cases} t/25, & \text{если } 0 < t < 25, \\ 1, & \text{если } t \geqslant 25. \end{cases}$$

Пусть $T = \max\left(T_{65}^m, T_{60}^f\right)$ — момент времени второй смерти. Тогда

$$\mathsf{P}(T < t) = \mathsf{P}\left(T_{65}^m < t, T_{60}^f < t\right) =$$

$$= \mathsf{P}\left(T_{65}^m < t\right) \cdot \mathsf{P}\left(T_{60}^f < t\right) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{250}, & \text{если } 0 < t < 10, \\ \dfrac{t}{25}, & \text{если } 10 < t < 25, \\ 1, & \text{если } t \geqslant 25. \end{cases}$$

Соответственно

$$\mathsf{P}(T > t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{t^2}{250}, & \text{если } 0 < t < 10, \\ 1 - \dfrac{t}{25}, & \text{если } 10 < t < 25, \\ 0, & \text{если } t \geqslant 25. \end{cases}$$

Поэтому

$$\mathsf{E}T = \int_0^{+\infty} \mathsf{P}(T > t)\,dt = \int_0^{10} \left(1 - \frac{t^2}{250}\right) dt + \int_{10}^{25} \left(1 - \frac{t}{25}\right) dt =$$

$$= \left(t - \frac{t^3}{750}\right)\Bigg|_0^{10} + \left(t - \frac{t^2}{50}\right)\Bigg|_{10}^{25} =$$

$$= \left(10 - \frac{1000}{750}\right) + \left(25 - \frac{625}{50}\right) - \left(10 - \frac{100}{50}\right) =$$

$$= \frac{79}{6} = 13\frac{1}{6} = 13 \text{ (лет) } 2 \text{ (месяца).}$$

**Задача 2.33.** *Продолжительность жизни участников пенсионного фонда описывается таблицей с отбором, действующим 2 года. Г-н Иванов, которому сейчас 31 год, и г-н Петров, которому сейчас 33 года, стали участниками фонда в возрасте 30 и 31 соответственно. Известно, что вероятность смерти г-на Иванова на протяжении ближайших четырех лет равна 0,05. Найдите вероятность P того, что на протяжении ближайших двух лет ни один из них не умрет.*

**Решение**

$$\mathsf{P} = {}_2p_{[30]+1} \cdot {}_2p_{33} = \frac{l_{[30]+3}}{l_{[30]+1}} \cdot \frac{l_{35}}{l_{33}} = \frac{l_{33}}{l_{[30]+1}} \cdot \frac{l_{35}}{l_{33}} = \frac{l_{35}}{l_{[30]+1}} =$$
$$= {}_4p_{[30]+1} = 1 - {}_4q_{[30]+1} = 1 - 0{,}05 = 0{,}95.$$

**Задача 2.34 ([11]).** *Страховая компания занимается страхованием жизни. 10% застрахованных в этой компании являются курильщиками. Если застрахованный не курит, вероятность его смерти на протяжении года равна 0,01. Если же он курильщик, то эта вероятность равна 0,05.*

*Какова доля курильщиков среди тех застрахованных, которые умерли в течение года?*

*(A) 5%, (B) 20%, (C) 36%, (D) 56%, (E) 90%.*

**Решение**

Введем события:

1) $H_1$={застрахованный — курильщик}.

2) $H_2$={застрахованный — не курильщик}.

3) $A$={застрахованный умер в течение года}.

Условие задачи означает, что

$$\mathsf{P}(H_1) = 0{,}1, \quad \mathsf{P}(A|H_1) = 0{,}05, \quad \mathsf{P}(A|H_2) = 0{,}01.$$

Кроме того, поскольку события $H_1$ и $H_2$ образуют полную группу попарно несовместимых событий, $\mathsf{P}(H_2) = 1 - \mathsf{P}(H_1) = 0{,}9$.

Интересующая нас вероятность — это $\mathsf{P}(H_1|A)$. Используя формулу Байеса, мы имеем:

$$\mathsf{P}(H_1|A) = \frac{\mathsf{P}(A|H_1)\mathsf{P}(H_1)}{\mathsf{P}(A|H_1)\mathsf{P}(H_1) + \mathsf{P}(A|H_2)\mathsf{P}(H_2)} =$$
$$= \frac{0{,}05 \cdot 0{,}1}{0{,}05 \cdot 0{,}1 + 0{,}01 \cdot 0{,}9} = \frac{5}{14} \approx 0{,}35714,$$

и поэтому верным является вариант (C).

**Задача 2.35 ([20]).** *Страховая компания продает договора страхования жизни трех категорий: стандартные, привилегированные и ультрапривилегированные. 50% всех застрахованных являются стандартными, 40% — привилегированными и 10% — ультрапривилегированными. Вероятность смерти в течение года для* *стандарного застрахованного равна 0,010, для привилегированного — 0,005, а для ультрапривилегированного — 0,001.* [1]

*Чему равна вероятность того, что умерший застрахованный является ультрапривилегированным?*

**Решение**

Введем в рассмотрение следующие события:

1) $H_1$=\{застрахованный является стандартным\}.

2) $H_2$=\{застрахованный является привилегированным\}.

3) $H_3$=\{застрахованный является ультрапривилегированным\}.

4) $A$=\{застрахованный умер в течение года\}.

В терминах этих событий интересующая нас вероятность — это $\mathsf{P}(H_3|A)$.

По условию

$$\mathsf{P}(H_1) = 0{,}5, \quad \mathsf{P}(H_2) = 0{,}4, \quad \mathsf{P}(H_3) = 0{,}1,$$

$$\mathsf{P}(A|H_1) = 0{,}010, \quad \mathsf{P}(A|H_2) = 0{,}005, \quad \mathsf{P}(A|H_3) = 0{,}001.$$

Поскольку события $H_1$, $H_2$, $H_3$ образуют полную группу попарно несовместимых событий, используя формулу Байеса мы имеем:

$$\mathsf{P}(H_3|A) = \frac{\mathsf{P}(A|H_3)\mathsf{P}(H_3)}{\sum_{k=1}^{3} \mathsf{P}(A|H_k)\mathsf{P}(H_k)} = \frac{1}{71} \approx 1{,}4\,\%.$$

**Задача 2.36.** *Интенсивность смертности для человека в возрасте $x$ лет имеет вид*

$$\mu_{x+t} = h\mu_t^*, \quad t > 0,$$

*где параметр $h$ описывает состояние здоровья человека (чем больше $h$ — тем хуже здоровье, чем меньше $h$ — тем лучше здоровье), а $\mu_t^*$ — интенсивность смертности для человека со средним уровнем здоровья.*

*Параметр $h$ является случайной величиной, имеющей гамма-распределение со средним 1 и дисперсией $D$.*

*Допустим, что спустя время $t$ этот человек жив. Что можно сказать о состоянии его здоровья?*

*Найдите $\mathsf{E}(h|T_x > 4)$, если $\mu_t^* = 0{,}001(6+t)$, $D = 2$.*

[1] Привилегированность договора/застрахованного означает меньший риск для страховой компании (по результатам андеррайтинга).

**Решение**

Напомним, что случайная величина $h$ имеет гамма-распределение, если ее плотность дается формулой

$$f_h(z) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} z^{\alpha-1} e^{-\lambda z}, \quad z > 0,$$

где $\alpha > 0$ и $\lambda > 0$ — некоторые параметры. Эти параметры связаны со средним и дисперсией соотношениями

$$\mathsf{E}h = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad \mathsf{Var}\, h = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

Кроме того, для преобразования Лапласа $\mathsf{Var}\,\varphi_h(s) \equiv \mathsf{E}e^{-hs}$ верна формула:

$$\mathsf{Var}\,\varphi_h(s) = \left(1 + \frac{s}{\lambda}\right)^{-\alpha}.$$

Если $\mathsf{E}h = 1$, $\mathsf{Var}\, h = D$, то $\lambda = \alpha = 1/D$ и поэтому

$$f_h(z) = \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} z^{\alpha-1} e^{-\alpha z}, \quad z > 0,$$

$$\mathsf{Var}\,\varphi_h(s) = \left(1 + \frac{s}{\alpha}\right)^{-\alpha}.$$

При фиксированном значении параметра $h$ функция выживания дается формулой

$$\mathsf{P}(T_x > t | h = z) = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+u}\, du\right) = e^{-zM^*(t)},$$

где

$$M^*(t) = \int_0^t \mu_u^*\, du.$$

Поэтому для безусловной функции выживания имеем:

$$\mathsf{P}(T_x > t) = \mathsf{E}e^{-hM^*(t)} = \mathsf{Var}\,\varphi_h(M^*(t)) = (1 + M^*(t)/\alpha)^{-\alpha}.$$

Условная плотность случайной величины $h$ при условии, что $T_x > t$, $f_{h|T_x>t}(z)$, дается формулой

$$f_{h|T_x>t}(z) = \frac{\mathsf{P}(T_x > t | h = z) \cdot f_h(z)}{\mathsf{P}(T_x > t)} =$$
$$= \frac{(\alpha + M^*(t))^\alpha}{\Gamma(\alpha)} z^{\alpha-1} e^{-(\alpha+M^*(t))z}, \quad z > 0.$$

Этот результат означает, что для человека, прожившего $t$ лет, параметр $h$ также имеет гамма-распределение, но с измененными параметрами:

$$\alpha' = \alpha, \quad \lambda' = \alpha + M^*(t).$$

В частности,

$$\mathsf{E}\,(h|T_x > t) = \frac{\alpha'}{\lambda'} = \frac{\alpha}{\alpha + M^*(t)} = \frac{1}{1 + D \cdot M^*(t)}.$$

Для конкретных значений параметров, приведенных во втором вопросе задачи,

$$M^*(t) = 0{,}001\left(6t + \frac{t^2}{2}\right),$$

так что

$$\mathsf{E}\,(h|T_x > 4) = \frac{1}{1 + 0{,}032 \cdot 2} \approx 0{,}94.$$

**Задача 2.37 ([16]).** *Вероятность того, что выбранный наудачу мужчина имеет проблемы с системой кровообращения, равна 0,25. Мужчина, имеющий такие проблемы, является курильщиком с вероятностью в два раза больше, чем мужчина, у которого нет никаких проблем с системой кровообращения.*

*Чему равна условная вероятность того, что мужчина, который курит, имеет проблемы с системой кровообращения.*

(A) $\frac{1}{4}$; (B) $\frac{1}{3}$; (C) $\frac{2}{5}$; (D) $\frac{1}{2}$; (E) $\frac{2}{3}$.

**Решение**

Введем в рассмотрение следующие события:

- $H_1$={у мужчины есть проблемы с системой кровообращения};
- $H_2$={мужчина не имеет никаких проблем с системой кровообращения};
- $A$={мужчина является курильщиком};
- $B$={мужчина не курит}.

В терминах этих событий интересующая нас вероятность — это $\mathsf{P}(H_1|A)$.

По условию $\mathsf{P}(H_1) = 0{,}25$. Поскольку события $H_1$ и $H_2$ образуют полную группу попарно несовместимых событий, $\mathsf{P}(H_2) = 1 - \mathsf{P}(H_1) = 0{,}75$.

Кроме того, мы знаем, что $\mathsf{P}(A|H_1) = 2\mathsf{P}(A|H_2)$. Вспоминая определение условной вероятности, мы можем переписать это равенство в виде:

$$\frac{\mathsf{P}(AH_1)}{\mathsf{P}(H_1)} = 2\frac{\mathsf{P}(AH_2)}{\mathsf{P}(H_2)}.$$

Поскольку события $H_1$ и $H_2$ образуют полную группу попарно несовместимых событий, $\mathsf{P}(AH_1) + \mathsf{P}(AH_2) = \mathsf{P}(A)$. Поэтому можно продолжить преобразования следующим образом:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\mathsf{P}(AH_1)}{0{,}25} & = & 2\dfrac{\mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(AH_1)}{0{,}75} \\ & \Updownarrow & \\ 3\mathsf{P}(AH_1) & = & 2\mathsf{P}(A) - 2\mathsf{P}(AH_1) \\ & \Updownarrow & \\ 5\mathsf{P}(AH_1) & = & 2\mathsf{P}(A) \\ & \Updownarrow & \\ \dfrac{\mathsf{P}(AH_1)}{\mathsf{P}(A)} & = & \dfrac{2}{5} \\ & \Updownarrow & \\ \mathsf{P}(H_1|A) & = & \dfrac{2}{5}, \end{array}$$

так что верным является вариант (C).

**Задача 2.38 ([11]).** *При медицинском андеррайтинге у каждого человека, желающего застраховать свою жизнь, проверяется давление крови. Пусть $X$ — число людей, у которых было проведено измерение кровяного давления, до того, как был выявлен очередной случай повышенного давления крови. Случайная величина $X$ имеет среднее значение 12,5.*

*Подсчитайте вероятность того, что после выявления случая повышенного давления крови следующий такой случай будет выявлен при шестом обследовании.*

*(A) 0,000; (B) 0,053; (C) 0,080; (D) 0,316; (E) 0,394.*

**Решение**

Пусть $p$ — вероятность того, что у человека повышенное давление, $q = 1 - p$ — вероятность того, что у человека нормальное давление. Тогда $\mathsf{P}(X = n) = q^{n-1} \cdot p$, $n \geqslant 1$. [1] Теперь мы можем найти $\mathsf{E}X$. Проще всего это сделать с помощью производящей функции случайной величины $X$:

$$g(z) \equiv \mathsf{E}z^X = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n \mathsf{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n q^{n-1} p = \frac{pz}{1 - qz}.$$

[1] Такое распределение называется геометрическим.

Поэтому

$$\mathsf{E}X = g'(1) = \left.\frac{p \cdot (1 - qz) - pz \cdot (-q)}{(1 - qz)^2}\right|_{z=1} = \left.\frac{p}{(1 - qz)^2}\right|_{z=1} = \frac{1}{p}.$$

По условию $\mathsf{E}X = 12{,}5$. Значит, $p = 0{,}08$, $q = 0{,}92$, и поэтому искомая вероятность $\mathsf{P}(X = 6)$ равна $q^5 \cdot p = 0{,}92^5 \cdot 0{,}08 \approx 0{,}0527$, так что верным является вариант (B).

**Задача 2.39 ([16]).** *Страховая компания перед заключением договора страхования жизни проводит медицинский андеррайтинг, который включает тест для диагностики некоторого заболевания. Этот тест имеет два возможных исхода: $Y = 1$, если тест показывает наличие болезни, и $Y = 0$, если тест не показывает наличие болезни. Пусть $X = 1$ или $0$ в соответствии с тем, имеется или нет в действительности это заболевание. Совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$ есть:*

$$P(X = 0, Y = 0) = 0{,}800, \quad P(X = 1, Y = 0) = 0{,}050,$$

$$P(X = 0, Y = 1) = 0{,}025, \quad P(X = 1, Y = 1) = 0{,}125.$$

*Найдите* $\mathsf{Var}(Y|X = 1)$.

*(A) 0,13; (B) 0,15; (C) 0,20; (D) 0,51; (E) 0,71.*

**Решение**

Прежде всего, подсчитаем условное распределение случайной величины $Y$ при условии, что $X = 1$:

$$\mathsf{P}(Y = 0|X = 1) = \frac{\mathsf{P}(Y = 0, X = 1)}{\mathsf{P}(X = 1)} =$$
$$= \frac{\mathsf{P}(Y = 0, X = 1)}{\mathsf{P}(X = 1, Y = 0) + \mathsf{P}(X = 1, Y = 1)} = \frac{0{,}050}{0{,}050 + 0{,}125} = \frac{2}{7},$$

$$\mathsf{P}(Y = 1|X = 1) = \frac{\mathsf{P}(Y = 1, X = 1)}{\mathsf{P}(X = 1)} =$$
$$= \frac{\mathsf{P}(Y = 1, X = 1)}{\mathsf{P}(X = 1, Y = 0) + \mathsf{P}(X = 1, Y = 1)} = \frac{0{,}125}{0{,}050 + 0{,}125} = \frac{5}{7}.$$

Поэтому,

$$\mathsf{E}(Y|X=1) = 0\cdot\mathsf{P}(Y=0|X=1) + 1\cdot\mathsf{P}(Y=1|X=1) = \\ = \mathsf{P}(Y=1|X=1) = \frac{5}{7},$$

$$\mathsf{E}(Y^2|X=1) = 0^2\cdot\mathsf{P}(Y=0|X=1) + 1^2\cdot\mathsf{P}(Y=1|X=1) = \\ = \mathsf{P}(Y=1|X=1) = \frac{5}{7},$$

$$\mathsf{Var}(Y|X=1) = \mathsf{E}(Y^2|X=1) - (\mathsf{E}(Y|X=1))^2 = \frac{10}{49} = \approx 0{,}2041,$$

так что верным является вариант (C).

## Глава 3
# МОДЕЛИ КРАТКОСРОЧНОГО СТРАХОВАНИЯ

## 1. Краткосрочное страхование жизни

В актуарной математике модели страхования жизни условно делят на две большие группы в зависимости от того, принимается или нет в расчет доход от инвестирования собранных премий. Если ***нет***, то мы говорим о *краткосрочном страховании* (short-term insurance); обычно в качестве такого «короткого» интервала мы будем рассматривать интервал в 1 год. Если же ***да***, то мы говорим о *долгосрочном страховании* (long-term insurance). Конечно, это деление условное и, кроме того, долгосрочное страхование связано с рядом других обстоятельств, например, андеррайтингом.

Простейший вид страхования жизни заключается в следующем.

Страхователь платит страховой компании $p$ руб. (эта сумма называется *страховой премией* — premium); страхователем может быть сам застрахованный или другое лицо (например, его работодатель).

В свою очередь страховая компания обязуется выплатить лицу, в пользу которого заключен договор, страховую сумму (sum assured) [1] $b$ руб. в случае смерти застрахованного в течение года по причинам, перечисленным в договоре (и не платит ничего, если он не умрет в течение года или умрет по причине, которая не покрывается договором).

Страховая сумма часто принимается равной 1 или 1000. Это означает, что премия выражается как доля от страховой суммы или на 1000 страховой суммы соответственно.

[1] В Великобритании для страхования жизни принят термин «assurance», а термин «insurance» используется в страховании «не-жизни»; в США для всех видов страхования используется термин «insurance».

*Нетто-премия*

Величина *страховой выплаты* (benefit), конечно, много больше, чем страховая премия, и нахождение «правильного» соотношения между ними — одна из важнейших задач актуарной математики.

Вопрос о том, какую плату страховая компания должна назначать за то, что принимает на себя тот или иной риск, крайне сложен. При его решении учитывается большое число разнородных факторов: вероятность наступления страхового случая, его ожидаемая величина и возможные флуктуации, связь с другими рисками, которые уже приняты компанией, организационные расходы компании на ведение дела, соотношение между спросом и предложением по данному виду рисков на рынке страховых услуг и т. д. Однако основным обычно является *принцип эквивалентности* финансовых обязательств страховой компании и застрахованного.

В рассматренной выше простейшей схеме страхования, когда плата за страховку полность вносится в момент заключения договора, обязательство застрахованного выражается в уплате премии $p$. Обязательство компании заключается в выплате страховой суммы, *если* наступит страховой случай. Таким образом, денежный эквивалент обязательств страховщика, $X$, является *случайной величиной*:

$$X = \begin{cases} b, & \text{если наступил страховой случай,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В простейшей форме принцип эквивалентности обязательств выражается равенством

$$p = \mathsf{E}X,$$

т. е. в качестве платы за страховку назначается ожидаемая величина убытка. Эта премия называется *нетто-премией* (net premium).

*Защитная надбавка*

Купив за фиксированную премию $p$ руб. страховой полис, страхователь избавил выгодоприобретателя от *риска* финансовых потерь, связанных с неопределенностью момента смерти застрахованного. Однако сам риск не исчез; его приняла на себя страховая компания.

Поэтому равенство $p = \mathsf{E}X$ на самом деле не выражает эквивалентности обязательств страхователя и страховщика. Хотя в среднем и страховщик, и страхователь платят одну и ту же сумму, страховая компания имеет риск, связанный с тем, что в силу случайных обстоятельств ей, может быть, придется выплатить гораздо большую сумму, чем $\mathsf{E}X$. Страхователь же такого риска не имеет. Поэтому было бы справедливо, чтобы плата за страховку включала некоторую надбавку $l$, которая служила бы эквивалентом случайности, влияющей на компанию. Эту надбавку называют *страховой* (или *защитной*) *надбавкой* (или *нагрузкой*) (security loading), а $\theta = l/\mathsf{E}X$ — *относительной* *страховой надбавкой* (relative security loading). Величина защитной надбавки определяется такой, чтобы вероятность того, что компания будет иметь потери по некоторому портфелю договоров («разорится»), была достаточно малой величиной.

Следует отметить, что реальная плата за страховку (брутто-премия или офисная премия) — больше нагруженной нетто-премии (часто в несколько раз). Разница между ними позволяет страховой компании покрыть административные расходы, обеспечить доход и т. д.

*Модель индивидуальных потерь*

Точный расчет защитной надбавки может быть произведен в рамках теории риска.

Простейшей моделью функционирования страховой компании, предназначенной для расчета вероятности разорения, является *модель индивидуального риска.* Она базируется на следующих упрощающих предположениях:

1) анализируется фиксированный относительно короткий промежуток времени (так что можно пренебречь инфляцией и не учитывать доход от инвестирования активов) — обычно это один год;

2) число договоров страхования $N$ фиксировано и неслучайно;

3) премия полностью вносится в начале анализируемого периода; никаких поступлений в течение этого периода нет;

4) мы наблюдаем каждый отдельный договор страхования и знаем статистические свойства связанных с ним индивидуальных потерь $X$. [1]

Обычно предполагается, что в модели индивидуального риска случайные величины $X_1, \ldots, X_N$ — независимы (в частности, исключаются катастрофы, когда одновременно по нескольким договорам наступают страховые случаи).

В рамках этой модели «разорение» определяется суммарными потерями по портфелю $S = X_1 + \ldots + X_N$. Если эти суммарные выплаты больше, чем активы компании, предназначенные для выплат по этому блоку бизнеса, $u$, то компания не сможет выполнить все свои обязательства (без привлечения дополнительных средств); в этом случае говорят о «разорении».

Итак, вероятность «разорения» компании равна

$$R = \mathsf{P}(X_1 + \ldots + X_N > u).$$

[1] Поскольку не все договора приводят к страховому случаю, некоторые из случайных величин $X_1, \ldots, X_N$, где $X_i$ — потери по $i$-му договору, равны нулю.

Иными словами, вероятность «разорения» — это дополнительная функция распределения величины суммарных потерь компании за рассматриваемый промежуток времени.

Поскольку суммарные выплаты $S$ представляют собой сумму независимых случайных величин, распределение случайной величины $S$ может быть подсчитано с помощью классических теорем и методов теории вероятностей.

Прежде всего — это использование сверток. Напомним, что если $X_1$ и $X_2$ — две независимые неотрицательные случайные величины с функциями распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$ соответственно, то функция распределения их суммы $X_1 + X_2$ может быть подсчитана по формуле

$$F(x) = \int_0^x F_1(x-y)\,dF_2(y).$$

Применяя эту формулу несколько раз, можно подсчитать функцию распределения суммы любого числа слагаемых.

Если случайные величины $X_1$ и $X_2$ — непрерывны, то обычно работают с плотностями $f_1(x), f_2(x)$. Плотность суммы может быть подсчитана по формуле

$$f(x) = \int_0^x f_1(x-y) f_2(y)\,dy.$$

Если случайные величины $X_1$ и $X_2$ — целочисленны, то вместо функций распределения обычно работают с распределениями

$$p_1(n) = \mathsf{P}(X_1 = n), \quad p_2(n) = \mathsf{P}(X_2 = n).$$

Распределение суммы $p(n) = \mathsf{P}(X_1 + X_2 = n)$ может быть определено по формуле

$$p(n) = \sum_{k=0}^{n} p_1(k) \cdot p_2(n-k).$$

Подсчет вероятности разорения часто упрощается, если использовать производящие функции и/или преобразования Лапласа.

Обычно число застрахованных в страховой компании очень велико. Поэтому подсчет вероятности разорения предполагает расчет функции распределения суммы большого числа слагаемых. В этом случае точный непосредственный численный расчет может привести к проблемам, связанным с малостью вероятностей. Однако обстоятельство, затрудняющее точный расчет, открывает возможность быстрого и простого приближенного расчета. Это связано с тем, что при росте $N$ вероятность $\mathsf{P}(X_1 + \ldots + X_N \leqslant x)$ часто имеет определенный предел (обычно нужно, чтобы $x$ определенным образом менялось вместе с $N$), который можно принять в качестве приближенного значения этой вероятности. Точность подобных приближений обычно очень велика и удовлетворяет практические потребности. Основным является нормальное (гауссовское) приближение.

Гауссовское приближение основано на центральной предельной теореме теории вероятностей. В простейшей формулировке эта теорема выглядит следующим образом:

если случайные величины $X_1, \ldots, X_N$ независимы и одинаково распределены со средним $a$ и дисперсией $\sigma^2$, то при $N \to \infty$ функция распределения центрированной и нормированной суммы

$$S_N^* = \frac{X_1 + \cdot + X_N - Na}{\sigma\sqrt{N}} = \frac{S_N - \mathsf{E}S_N}{\sqrt{\mathsf{Var}\, S_N}}$$

имеет предел, равный

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt.$$

Существуют многочисленные обобщения центральной предельной теоремы на случаи, когда слагаемые $X_i$ имеют разные распределения, являются зависимыми и т. д. Детальное обсуждение этого вопроса увело бы нас слишком далеко в сторону от изучаемого предмета. Поэтому мы ограничимся утверждением, что если число слагаемых велико (обычно достаточно, чтобы $N$ имело бы порядок нескольких десятков), а слагаемые не очень малы и не очень разнородны, то применимо гауссовское приближение для

$$\mathsf{P}\Big(\frac{S_N - \mathsf{E}S_N}{\sqrt{\mathsf{Var}\, S_N}} < x\Big).$$

Конечно, это утверждение очень неопределенно, но и классическая центральная предельная теорема без точных оценок погрешности не дает ясного указания на сферу применения.

Стандартная гауссовская фунция распределения $\Phi(x)$ детально изучена в теории вероятностей. Существуют подробные таблицы как для самой функции распределения $\Phi(x)$, так и для плотности

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Значения $1 - \Phi(x)$ в наиболее интересном диапазоне $1 < x < 4$ приведены в табл. 3.1.

*Таблица 3.1*

| $x$ | $1-\Phi(x)$ | $x$ | $1-\Phi(x)$ | $x$ | $1-\Phi(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1,0 | 15,87 % | 2,0 | 2,28 % | 3,0 | 0,14 % |
| 1,1 | 13,57 % | 2,1 | 1,79 % | 3,1 | 0,10 % |
| 1,2 | 11,51 % | 2,2 | 1,39 % | 3,2 | 0,069 % |
| 1,3 | 9,68 % | 2,3 | 1,07 % | 3,3 | 0,048 % |
| 1,4 | 8,08 % | 2,4 | 0,82 % | 3,4 | 0,034 % |
| 1,5 | 6,68 % | 2,5 | 0,62 % | 3,5 | 0,023 % |
| 1,6 | 5,48 % | 2,6 | 0,47 % | 3,6 | 0,020 % |
| 1,7 | 4,46 % | 2,7 | 0,35 % | 3,7 | 0,011 % |
| 1,8 | 3,59 % | 2,8 | 0,26 % | 3,8 | 0,007 % |
| 1,9 | 2,87 % | 2,9 | 0,19 % | 3,9 | 0,005 % |

Полезно также иметь таблицу квантилей $x_\alpha$ [1], отвечающих достаточно малой вероятности разорения $1-\alpha$; они приведены в табл. 3.2.

*Таблица 3.2*

| $1-\alpha$ | 0,1 % | 0,5 % | 1 % | 2 % |
|---|---|---|---|---|
| $x_\alpha$ | 3,090 | 2,576 | 2,326 | 2,054 |
| $1-\alpha$ | 3 % | 4 % | 5 % | 10 % |
| $x_\alpha$ | 1,881 | 1,751 | 1,645 | 1,282 |

[1] Квантиль $x_\alpha$ определяется как корень уравнения $\Phi(x)=\alpha$.

## 2. Задачи и решения

**Задача 3.1 ([4]).** *Найдите коэффициент вариации выплат по договору страхования жизни на один год. Страховая сумма $b = 100\,000$ руб., вероятность смерти застрахованного в течение года $q = 0{,}0025$.*

**Решение**

Пусть случайная величина $X$ описывает выплаты по договору. Тогда

$$\mathsf{E}X = b \cdot q = 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-4} = 250 \text{ (руб.)},$$

$$\mathsf{Var}\, X = b^2 \cdot (1 - q) \cdot q = 10^{10} \cdot (1 - 25 \cdot 10^{-4}) \cdot 25 \cdot 10^{-4} \approx 25 \cdot 10^6,$$

так что среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_X = \sqrt{\mathsf{Var}\, X} \approx 5\,000 \text{ (руб.)},$$

а коэффициент вариации

$$c_X = \sigma_X / \mathsf{E}X \approx 5\,000/250 = 20.$$

**Задача 3.2.** *Страховая компания заключила договор группового страхования $N = 60\,000$ работников большого предприятия сроком на один год. Страховая сумма равна 1000. Для каждого работника интенсивность смертности на протяжении этого года не меняется с течением времени и имеет вид*

$$\mu_x = 0{,}001\, h,$$

*где параметр $h$ описывает состояние здоровья работника. Параметр $h$ является случайной величиной, имеющей равномерное распределение на интервале $(1; 9)$. Найдите общую нетто-премию по этому договору.*

**Решение**

Для работника с фиксированным значением состояния здоровья $h$ вероятность смерти в течение рассматриваемого года равна

$$q(h) = 1 - e^{-0{,}001h}.$$

Поэтому для него нетто-премия равна

$$\pi(h) = 1000 q(h) = 1000 \left(1 - e^{-0{,}001h}\right).$$

Для случайно выбранного работника нетто-премия равна

$$\pi = \int_1^9 \pi(h) \frac{1}{8}\, dh = 1000 \left(1 - \frac{e^{-0{,}001} - e^{-0{,}009}}{0{,}008}\right) \approx 4{,}984867.$$

Соответственно общая нетто-премия равна

$$N\pi \approx 299\,092.$$

**Задача 3.3 ([4]).** *Подсчитайте среднее значение и коэффициент вариации выплат по договору страхования жизни на один год с зависимостью страховой суммы от причины смерти. Страховая сумма при смерти от несчастного случая $b_1 = 500\,000$ руб., а при смерти от «естественных» причин $b_2 = 100\,000$ руб. Вероятность смерти в течение года от несчастного случая $q^{(1)} = 0{,}0005$, а вероятность смерти в течение года от «естественных» причин $q^{(2)} = 0{,}0020$.*

**Решение**

Пусть случайная величина $X$ описывает выплаты по договору. Тогда

$$\mathsf{E}X = b_1 \cdot q^{(1)} + b_2 \cdot q^{(2)} = 450 \text{ (руб.)},$$

$$\mathsf{Var}\, X = b_1^2 \cdot q^{(1)} + b_2^2 \cdot q^{(2)} - (\mathsf{E}X)^2 \approx 145 \cdot 10^6,$$

так что среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_X = \sqrt{\mathsf{Var}\, X} \approx 12\,042 \text{ (руб.)},$$

а коэффициент вариации

$$c_X = \sigma_X / m_X \approx 26{,}76.$$

**Задача 3.4 ([16]).** *Актуарий установил, что размер страхового возмещения для определенного вида несчастных случаев является случайной величиной $X$ с производящей функцией моментов* [1]

$$\psi_X(t) = \frac{1}{(1 - 2500t)^4}.$$

*Определите среднее квадратическое отклонение для размера страхового возмещения.*

*(A) 1340; (B) 5000; (C) 8660; (D) 10 000; (E) 11 180.*

---

[1] Производящая функция моментов $\psi_X(t)$ случайной величины $X$ определяется как сумма ряда

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \mathsf{E}(X^n).$$

Переставляя сумму и математическое ожидание, мы получим ряд для экспоненты, что позволяет записать $\psi_X(t)$ как $\mathsf{E}e^{tX}$.

**Решение**

Раскладывая функцию $\psi_X(t) \equiv (1-2500t)^{-4}$ в ряд по степеням $t$ [1], мы получим:

$$\psi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-4}{n} (-2500t)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-4)\cdot(-4-1)\cdot\ldots\cdot(-4-n+1)}{n!} (-2500)^n t^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4\cdot 5\cdot\ldots\cdot(n+3)}{n!} 2500^n t^n.$$

Отсюда

$$\mathsf{E}X^n = 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot(n+3)\cdot 2500^n.$$

В частности,

$$\mathsf{E}X = 4\cdot 2500 = 10\,000, \quad \mathsf{E}X^2 = 4\cdot 5\cdot 2500^2 = 125\,000\,000.$$

Поэтому

$$\mathsf{Var}\,X = \mathsf{E}X^2 - (\mathsf{E}X)^2 = 25\,000\,000, \quad \sigma_X = \sqrt{\mathsf{Var}\,X} = 5\,000.$$

Следовательно, верным является вариант (В).

**Задача 3.5 ([3]).** *Рассмотрим портфель из четырех одинаковых договоров страхования жизни. Страховая сумма зависит от причины смерти; в случае смерти от «естественных» причин страховая сумма равна 250 000 руб., а если смерть наступила от несчастного случая, то выплачивается удвоенная страховая сумма. Для каждого из застрахованных вероятность смерти от несчастного случая равна 0,1, вероятность смерти от естественных причин равна 0,1. Найдите распределение суммарных выплат.*

**Решение (1 способ)**

Примем 250 000 руб. в качестве единицы измерения денежных сумм.

Пусть $X_1$, $X_2$, $X_3$, $X_4$ — индивидуальные выплаты по договорам. Случайные величины $X_1$, $X_2$, $X_3$, $X_4$ независимы в совокупности и имеют одно и то же распределение, задаваемое таблицей

| $n$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p(n)$ | 0,8 | 0,1 | 0,1 |

[1] Напомним, что $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$.

Для подсчета распределения суммы $X_1 + X_2$ образуем матрицу из 3-х строк и 3-х столбцов с элементами $p_1(i)p_2(j)$ :

$$\begin{pmatrix} 0{,}64 & 0{,}08 & 0{,}08 \\ 0{,}08 & 0{,}01 & 0{,}01 \\ 0{,}08 & 0{,}01 & 0{,}01 \end{pmatrix}$$

Для формирования этой матрицы удобно написать слева столбец из вероятностей $p_1(i)$, а сверху — строку из вероятностей $p_2(j)$, а затем перемножить их поэлементно.

Суммируя по линии $i + j = n$, параллельной второй диагонали, мы получим

$$p_1(n)p_2(0) + p_1(n-1)p_2(1) + \ldots + p_1(0)p_2(n)$$

т. е. в точности $\mathsf{P}(X_1 + X_2 = n)$. Поэтому для $q(n) = \mathsf{P}(X_1 + X_2 = n)$ имеем таблицу (поскольку $X_1, X_2 \leqslant 2$, их сумма не превосходит 4):

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $q(n)$ | 0,64 | 0,16 | 0,17 | 0,02 | 0,01 |

Для подсчета $r(n) = \mathsf{P}(X_1 + X_2 + X_3 = n) = \mathsf{P}((X_1 + X_2) + X_3 = n)$ образуем матрицу из трех строк и пяти столбцов с элементами $p_3(i) \cdot q(j)$ :

$$\begin{pmatrix} 0{,}512 & 0{,}128 & 0{,}136 & 0{,}016 & 0{,}008 \\ 0{,}064 & 0{,}016 & 0{,}017 & 0{,}002 & 0{,}001 \\ 0{,}064 & 0{,}016 & 0{,}017 & 0{,}002 & 0{,}001 \end{pmatrix}$$

Поэтому для распределения случайной величины $X_1 + X_2 + X_3$ имеем таблицу:

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r(n)$ | 0,512 | 0,192 | 0,216 | 0,049 | 0,027 | 0,003 | 0,001 |

Наконец, для подсчета распределения $p(n)$ суммарных выплат $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ образуем матрицу из 3 строк и 7 столбцов с элементами $p_4(i)r(j)$ :

$$\begin{pmatrix} 0{,}4096 & 0{,}1536 & 0{,}1728 & 0{,}0392 & 0{,}0216 & 0{,}0024 & 0{,}0008 \\ 0{,}0512 & 0{,}0192 & 0{,}0216 & 0{,}0049 & 0{,}0027 & 0{,}0003 & 0{,}0001 \\ 0{,}0512 & 0{,}0192 & 0{,}0216 & 0{,}0049 & 0{,}0027 & 0{,}0003 & 0{,}0001 \end{pmatrix}$$

Отсюда мы немедленно можем подсчитать распределение $p(n)$ (оно приведено во втором столбце табл. 3.3) и, следовательно, функцию распределения случайной величины $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ (она приведена в третьем столбце табл. 3.3).

*Таблица 3.3*

| $n$ | $p(n)$ | $\mathsf{P}(S \leqslant n)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0,4096 | 0,4096 |
| 1 | 0,2048 | 0,6144 |
| 2 | 0,2432 | 0,8576 |
| 3 | 0,0800 | 0,9376 |
| 4 | 0,0481 | 0,9857 |
| 5 | 0,0100 | 0,9957 |
| 6 | 0,0038 | 0,9995 |
| 7 | 0,0004 | 0,9999 |
| 8 | 0,0001 | 1,0000 |

Подсчет распределения суммы независимых случайных величин с помощью сверток — крайне кропотливое и утомительное занятие, если делать это вручную. Однако при использовании компьютеров никаких проблем не возникает. Для аналитических же расчетов удобнее использовать производящие функции.

Напомним, что производящей функцией $\varphi(z)$ неотрицательной случайной величины $\eta$ с распределением $p(n) = \mathsf{P}(\eta = n)$ называется сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty} z^n p(n)$ (нетрудно понять, что эквивалентным образом мы могли бы определить производящую функцию как $\mathsf{E} z^{\eta}$). Следующие свойства производящих функций используются чаще всего:

1. Если производящие функции $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ двух случайных величин $\eta_1$ и $\eta_2$ совпадают, то совпадают и распределения этих величин. Иными словами, распределение однозначно восстанавливается по своей производящей функции.

2. $\varphi'(1) = \mathsf{E}\eta, \quad \mathsf{Var}\,\eta = \varphi''(1) + \varphi'(1) - [\varphi'(1)]^2.$

3. Если случайные величины $\eta_1$ и $\eta_2$ независимы, то производящая функция их суммы, $\varphi(z)$, равна произведению производящих функций слагаемых: $\varphi(z) = \varphi_1(z)\varphi_2(z)$.

Используя производящие функции, можно предложить следующий **2 способ решения.**

Каждое слагаемое имеет одну и ту же производящую функцию

$$\varphi_1(z) = \varphi_2(z) = \varphi_3(z) = \varphi_4(z) = \\ = 0{,}8 \cdot z^0 + 0{,}1 \cdot z^1 + 0{,}1 \cdot z^2 = 0{,}1(8 + z + z^2).$$

Соответственно их сумма имеет производящую функцию

$$\mathsf{E}z^S = \varphi_1(z)\varphi_2(z)\varphi_3(z)\varphi_4(z) = 0{,}1^4(8+z+z^2)^4 =$$
$$= 10^{-4}\cdot(64+z^2+z^4+16z+16z^2+2z^3)^2 = 10^{-4}(64+16z+17z^2+2z^3+z^4)^2 =$$
$$= 10^{-4}\cdot(4096+256z^2+289z^4+4z^6+z^8+2048z+2176z^2+256z^3+128z^4+$$
$$+544z^3+64z^4+32z^5+68z^5+34z^6+4z^7) =$$
$$= 10^{-4}\cdot(4096+2048z+2432z^2+800z^3+481z^4+100z^5+38z^6+4z^7+z^8).$$

Отбирая коэффициенты при степенях $z$, мы немедленно получим такую же таблицу для вероятностей $p(n) = \mathsf{P}(S = n)$, какую мы получили выше с помощью сверток.

**Замечание.** Уже этот пример позволяет сделать поучительный вывод о величине премии. Допустим, что мы подсчитали нетто-премию в соответствии с принципом эквивалентности обязательств страховщика и страхователя как $p^{(n)} = \mathsf{E}X = 0\cdot 0{,}8+1\cdot 0{,}1+2\cdot 0{,}1 = 0{,}3$ и приняли ее в качестве платы за страховую защиту. Тогда суммарная премия по рассматриваемому портфелю будет 1,2 и, значит, вероятность того, что для выплат не хватит этих средств («вероятность разорения») будет равна $\mathsf{P}(S > 1{,}2) = 0{,}3856$, т.е. недопустимо велика. Из табл. 3.3 видно, что для того, чтобы вероятность разорения не превосходила 10%, мы должны иметь активы в 3 единицы, т.е. стоимость одного полиса должна быть 0,75. Конечно, это слишком большая плата (напомним, что мы взяли в качестве единицы измерения денежных сумм 250 000 руб.) — это связано со слишком малым объемом портфеля. Тем не менее, этот пример показывает, что реальная плата за страховку должна превосходить нетто-премию.

**Задача 3.6 ([5]).** *Предположим, что в компании застраховано $N = 3000$ человек с вероятностью смерти в течение года $q = 0{,}3\%$. Компания выплачивает сумму $b = 250\,000$ руб. в случае смерти застрахованного в течение года и не платит ничего, если этот человек доживет до конца года.*

*Определите суммарную премию, достаточную, чтобы обеспечить вероятность разорения порядка 5%.*

## Решение

Как обычно, примем величину страховой суммы в качестве единицы измерения денежных сумм. В этом случае выплаты по $i$-му договору, $X_i$, принимают два значения: 0 и 1 с вероятностями $1-q$ и $q$ соответственно. Поэтому

$$\mathsf{E}X_i = (1-q)\cdot 0 + q\cdot 1 = q = 0{,}003, \quad \mathsf{E}X_i^2 = (1-q)\cdot 0^2 + q\cdot 1^2 = q,$$
$$\mathrm{Var}\,X_i = \mathsf{E}X_i^2 - (\mathsf{E}X_i)^2 = q - q^2 \approx 0{,}003.$$

Теперь для среднего значения и дисперсии суммарных выплат $S = X_1 + \ldots + X_N$ мы имеем:

$$\mathsf{E}S = N \cdot \mathsf{E}X_i = 3000 \cdot 0{,}003 = 9, \quad \mathsf{Var}\, S = N \cdot \mathsf{Var}\, X_i \approx 3000 \cdot 0{,}003 = 9.$$

Используя гауссовское приближение для центрированной и нормированной величины суммарных выплат, мы можем представить вероятность неразорения компании в следующем виде:

$$\mathsf{P}(S \leqslant u) = \mathsf{P}\left(\frac{S - \mathsf{E}S}{\sqrt{\mathsf{Var}\, S}} \leqslant \frac{u - \mathsf{E}S}{\sqrt{\mathsf{Var}\, S}}\right) \approx \\ \approx \mathsf{P}\left(\frac{S - \mathsf{E}S}{\sqrt{\mathsf{Var}\, S}} \leqslant \frac{u - 9}{3}\right) \approx \Phi\left(\frac{u-9}{3}\right).$$

Если мы хотим, чтобы вероятность разорения была 5 %, величина $(u - 9)/3$ должна быть равной $x_{95\,\%} = 1{,}645$, т. е. $u = 3 \cdot 1{,}645 + 9 \approx 13{,}935$ (величины страховой суммы) или в абсолютных цифрах около 3 483 750 руб.

**Задача 3.7 ([5]).** *Страховая компания заключила $N = 10\,000$ договоров страхования жизни сроком на один год на следующих условиях: в случае смерти застрахованного в течение года от несчастного случая компания выплачивает выгодоприобретателю 1 000 000 руб., а в случае смерти от естественных причин — 250 000 руб. Компания не платит ничего, если застрахованный не умрет в течение года. Вероятность смерти от несчастного случая одна и та же для всех застрахованных и равна 0,0005. Вероятность смерти от естественных причин зависит от возраста. Застрахованных можно разбить на две возрастные группы, содержащие $N_1 = 4000$ и $N_2 = 6000$ человек, с вероятностью смерти в течение года $q_1 = 0{,}0040$ и $q_2 = 0{,}0020$ соответственно.*

*Подсчитайте премию, достаточную для выполнения компанией своих обязательств с вероятностью 95 % без привлечения дополнительных средств. Защитная надбавка для индивидуального договора берется пропорциональной*

1) *нетто-премии;*

2) *дисперсии выплат по договору;*

3) *среднему квадратическому отклонению выплат по договору.*

**Решение**

Примем сумму 250 000 руб. в качестве единицы измерения денежных сумм.

Тогда для первой группы договоров индивидуальный убыток принимает три значения: 0, 1 и 4 с вероятностями 0,9955, 0,0040 и 0,0005 соответственно. Среднее значение и дисперсия величины индивидуального убытка есть

$$m_1 = 1 \cdot 0{,}0040 + 4 \cdot 0{,}0005 = 0{,}0060,$$

$$\sigma_1^2 = 1^2 \cdot 0{,}0040 + 4^2 \cdot 0{,}0005 - m_1^2 \approx 0{,}0120.$$

Для второй группы договоров индивидуальный убыток принимает те же три значения 0, 1 и 4, но с другими вероятностями: 0,9975, 0,0020 и 0,0005. В этой группе среднее значение и дисперсия индивидуального убытка есть

$$m_2 = 1 \cdot 0{,}0020 + 4 \cdot 0{,}0005 = 0{,}0040,$$

$$\sigma_2^2 = 1^2 \cdot 0{,}0020 + 4^2 \cdot 0{,}0005 - m_2^2 \approx 0{,}0100.$$

Таким образом, для договоров первой группы нетто-премия есть $m_1 = 0{,}006$, а для договоров второй группы нетто-премия равна $m_2 = 0{,}004$.

Займемся теперь защитными надбавками.

Среднее значение и дисперсия суммарных выплат по всему портфелю равны:

$$\mathsf{E}S = N_1 \cdot m_1 + N_2 \cdot m_2 = 4000 \cdot 0{,}006 + 6000 \cdot 0{,}004 = 48,$$

$$\mathsf{Var}\, S = N_1 \cdot \sigma_1^2 + N_2 \cdot \sigma_2^2 \approx 4000 \cdot 0{,}012 + 6000 \cdot 0{,}010 = 108.$$

Предположим, что суммарная премия равна $u$. Используя гауссовское приближение для центрированной и нормированной величины суммарных выплат, мы можем представить вероятность неразорения компании в следующем виде:

$$\mathsf{P}(S \leqslant u) = \mathsf{P}\left(\frac{S - \mathsf{E}S}{\sqrt{\mathsf{Var}\, S}} \leqslant \frac{u - \mathsf{E}S}{\sqrt{\mathsf{Var}\, S}}\right) \approx \Phi\left(\frac{u - \mathsf{E}S}{\sqrt{\mathsf{Var}\, S}}\right).$$

Если мы хотим, чтобы вероятность разорения была 5 %, величина $\dfrac{u - \mathsf{E}S}{\sqrt{\mathsf{Var}\, S}}$ должна быть равной $x_{95\,\%} = 1{,}645$, т. е. суммарная премия должна быть равна $u = \mathsf{E}S + x_{95\,\%}\sqrt{\mathsf{Var}\, S}$. Первое слагаемое, $\mathsf{E}S = N_1 \cdot m_1 + N_2 \cdot m_2$, является суммарной нетто-премией (как мы видели, она равна 48), а второе дает общую защитную добавку $l$:

$$l = x_{95\,\%} \cdot \sqrt{\mathsf{Var}\, S} \approx 1{,}645 \cdot \sqrt{108} \approx 17{,}095.$$

Относительно индивидуальных защитных надбавок $l_1, l_2$ для договоров из первой и второй групп соответственно мы знаем пока лишь то, что

$$N_1 \cdot l_1 + N_2 \cdot l_2 = l.$$

1. Если индивидуальные защитные надбавки пропорциональны нетто-премиям:
$$l_1 = \theta m_1, \quad l_2 = \theta m_2,$$
то относительная страховая надбавка $\theta$ одна и та же для всех договоров и равна
$$\theta = \frac{l}{\mathsf{E}S} \approx 35{,}6\,\%.$$
Поэтому для договоров из первой группы премия равна
$$p_1 = m_1 \cdot (1 + \theta) \approx 0{,}00814 = 2034 \text{ руб.}$$
Для договоров из второй группы премия равна
$$p_2 = m_2 \cdot (1 + \theta) \approx 0{,}00542 = 1356 \text{ руб.}$$

2. Если добавочная сумма $l$ делится пропорционально дисперсиям, то коэффициент пропорциональности $k$ есть
$$k = \frac{l}{\mathsf{Var}\, S} \approx 15{,}8\,\%.$$
Поэтому для договоров из первой группы страховая надбавка равна
$$l_1 = k \cdot \sigma_1^2 \approx 0{,}001899,$$
так что премия есть
$$p_1 = m_1 + l_1 \approx 0{,}007899 = 1975 \text{ руб.},$$
а относительная страховая надбавка
$$\theta_1 = \frac{l_1}{m_1} \approx 31{,}7\,\%.$$
Для договоров из второй группы страховая надбавка равна
$$l_2 = k \cdot \sigma_2^2 \approx 0{,}001583,$$
так что премия есть
$$p_2 = m_2 + l_2 \approx 0{,}005583 = 1396 \text{ руб.},$$
а относительная страховая надбавка
$$\theta_2 = \frac{l_2}{m_2} \approx 39{,}6\,\%.$$

3. Если добавочная сумма $l$ делится пропорционально средним квадратическим отклонениям (они равны $\sigma_1 \approx 0{,}1095$ для договоров первой группы и $\sigma_2 = 0{,}1$ для договоров второй группы),

то коэффициент пропорциональности $k$ есть

$$k = \frac{l}{N_1\sigma_1 + N_2\sigma_2} \approx 0{,}0165.$$

Поэтому для договоров из первой группы страховая надбавка равна

$$l_1 = k \cdot \sigma_1 \approx 0{,}001804,$$

так что премия есть

$$p_1 = m_1 + l_1 \approx 0{,}007804 = 1951 \text{ руб.},$$

а относительная страховая надбавка

$$\theta_1 = \frac{l_1}{m_1} \approx 30\,\%.$$

Для договоров из второй группы страховая надбавка равна

$$l_2 = k \cdot \sigma_2 \approx 0{,}001647,$$

так что премия есть

$$p_2 = m_2 + l_2 \approx 0{,}005647 = 1412 \text{ руб.},$$

а относительная страховая надбавка

$$\theta_2 = \frac{l_2}{m_2} \approx 41\,\%.$$

**Замечание.** Изменение принципа назначения индивидуальных премий приводит к уменьшению относительной страховой надбавки для договоров первой группы:

$$\theta_1 = 35{,}6\,\%,\ 31{,}7\,\%,\ 30\,\%.$$

Соответственно для договоров второй группы относительная защитная надбавка увеличивается:

$$\theta_2 = 35{,}6\,\%,\ 39{,}6\,\%,\ 41\,\%.$$

Это связано с тем, что коэффициент рассеяния суммарного ущерба есть

$$\frac{\mathsf{Var}\,S}{\mathsf{E}S} - 1 = 1{,}25,$$

в то время как для договоров первой (второй) группы он равен $\sigma_1^2/m_1 - 1 = 1$ (соответственно, $\sigma_2^2/m_2 - 1 = 1{,}5$). Коэффициент вариации величины индивидуального убытка для договоров первой группы есть

$$c_1 = \sigma_1/m_1 \approx 18{,}26,$$

а для договоров второй группы он равен

$$c_2 = \sigma_2/m_2 = 25.$$

Средний коэффициент вариации, усредненный по всему портфелю с весами $N_i m_i / \mathsf{E}S$, $i = 1, 2$, есть

$$c = c_1 \cdot \frac{N_1 m_1}{\mathsf{E}S} + c_2 \cdot \frac{N_2 m_2}{\mathsf{E}S} = c_1 \cdot \frac{24}{48} + c_2 \cdot \frac{24}{48} = \frac{c_1 + c_2}{2} \approx 21{,}63.$$

Таким образом, хотя дисперсия величины индивидуального убытка для договоров второй группы меньше, чем для договоров первой группы, флуктуации индивидуальных убытков для договоров второй группы (измеренные как коэффициентом рассеяния, так и коэффициентом вариации) превышают средние флуктуации по всему портфелю. Поэтому было бы оправдано принять один из принципов 2 или 3 в качестве основы для назначения индивидуальных премий.

Имея в виду только неразорение компании, совершенно неважно, как общая защитная надбавка распределяется по индивидуальным договорам (в равной степени не играет роли распределение суммарной нетто-премии на индивидуальные нетто-премии). Однако имея в виду маркетинговые соображения, важно сделать это «справедливым» образом. Прежде всего, ясно, что в силу статистической однородности договоров в пределах одной группы (из двух рассматриваемых), защитная надбавка должна быть одной и той же для договоров из одной группы. Однако одного уравнения $N_1 \cdot l_1 + N_2 \cdot l_2 = l$ недостаточно для однозначного определения индивидуальных нагрузок $l_1$, $l_2$. Необходимо некоторое принципиальное решение о «справедливом» соотношении между ними.

**Задача 3.8 ([10]).** *Страховая компания предлагает договора страхования жизни на один год. Информация относительно структуры покрытия приведена в табл. 3.4.*

*Таблица 3.4*

| *Страховая сумма* | *Причина смерти* | *Вероятность* |
|---|---|---|
| *500 000* | *обычная* | *0,10* |
| *1 000 000* | *несчастный случай* | *0,01* |

*Относительная защитная надбавка равна 20%.*

*Предположим, что отдельные полисы независимы и страховщик использует нормальное приближение для распределения суммарных выплат.*

*Определите, сколько договоров должен продать страховщик, чтобы собранная премия с вероятностью 95 % покрывала суммарные выплаты.*

*(A) 550; (B) 560; (C) 570; (D) 580; (E) 590.*

**Решение**

Пусть $N$ — общее число проданных договоров, $X_k$ — выплаты по $k$-му договору, $S = X_1 + \ldots + X_N$ — суммарные выплаты по всему портфелю, $\theta$ — относительная защитная надбавка, так что премия по одному договору равна $p = (1+\theta)\mathsf{E}X_k$.

По условию, $\mathsf{P}(S < Np) = 0{,}95$. С другой стороны,

$$\mathsf{P}(S < Np) = \mathsf{P}\left(\frac{S - \mathsf{E}S}{\sqrt{\mathsf{Var}\,S}} < \frac{Np - \mathsf{E}S}{\sqrt{\mathsf{Var}\,S}}\right) \approx$$
$$\approx \Phi\left(\frac{Np - \mathsf{E}S}{\sqrt{\mathsf{Var}\,S}}\right) = \Phi\left(\sqrt{N}\frac{\theta\cdot\mathsf{E}X_k}{\sqrt{\mathsf{Var}\,X_k}}\right).$$

Поэтому

$$\sqrt{N}\frac{\theta\cdot\mathsf{E}X_k}{\sqrt{\mathsf{Var}\,X_k}} = x_{0,95} \equiv 1{,}645,$$

где $x_{0,95}$ — корень уравнения $\Phi(x) = 0{,}95$ (квантиль порядка 0,95 стандартного гауссовского распределения).

Отсюда для искомого числа договоров имеем:

$$N = \frac{x_{0,95}^2\cdot\mathsf{Var}\,X_k}{\theta^2\cdot(\mathsf{E}X_k)^2}.$$

Поскольку для индивидуального договора,

$$\mathsf{E}X = 500\,000\cdot 0{,}10 + 1\,000\,000\cdot 0{,}01 = 60\,000,$$

$$\mathsf{E}X^2 = 500\,000^2\cdot 0{,}10 + 1\,000\,000^2\cdot 0{,}01 = 35\cdot 10^9, \quad \mathsf{Var}\,X = 314\cdot 10^8,$$

искомое число договоров равно 590 и поэтому верным является вариант (E).

**Задача 3.9 ([9]).** *Предприятие предполагает заключить договор группового страхования жизни для своих сотрудников. Структура персонала приведена в табл. 3.5.*

*Таблица 3.5*

| *профессиональный класс* | *число сотрудников* | *страховая сумма* | *вероятность смерти* |
|---|---|---|---|
| *1* | *100* | *1* | *0,1* |
| *2* | *100* | *1* | *0,2* |
| *3* | *200* | *2* | *0,1* |
| *4* | *200* | *2* | *0,2* |

*Администрация предприятия предполагает внести в страховой фонд сумму, равную ожидаемым выплатам страховых возмещений.*

*Каждый сотрудник, в свою очередь, должен будет внести сумму, равную определенной доле $p$ от размера ожидаемой выплаты. Размер* *этой доли определяется таким образом, чтобы с вероятностью 95 % средств страхового фонда хватило для выплаты страховых возмещений.*

*Определите размер взноса для работников четвертого профессионального класса.*

*(A) 0,060; (B) 0,066; (C) 0,072; (D) 0,078; (E) 0,084.*

**Решение**

Пусть $q$ — вероятность смерти сотрудника, $SA$ — размер страховой суммы. Поскольку индивидуальные потери по договору принимают только два значения: 0 с вероятностью $1 - q$ и $SA$ с вероятностью $q$, среднее значение индивидульных потерь есть $\mathsf{E}X = q \cdot SA$, а дисперсия — $\mathsf{Var}\, X = q(1-q) \cdot SA^2$.

Далее, предполагая, как обычно, независимость времен жизни сотрудников предприятия, можно подсчитать среднее и дисперсию суммарных выплат для каждого профессионального класса. Для этого нужно среднее/дисперсию индивидуальных потерь умножить на число работников в классе:

$$\mathsf{E}S' = N \cdot \mathsf{E}X, \quad \mathsf{Var}\, S' = N \cdot \mathsf{Var}\, X.$$

Результаты расчетов приведены в табл. 3.6.

*Таблица 3.6*

| проф. класс | число сотрудников | $SA$ | $q$ | $\mathsf{E}X$ | $\mathsf{Var}\, X$ | $\mathsf{E}S'$ | $\mathsf{Var}\, S'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 100 | 1 | 0,1 | 0,1 | 0,09 | 10 | 9 |
| 2 | 100 | 1 | 0,2 | 0,2 | 0,16 | 20 | 16 |
| 3 | 200 | 2 | 0,1 | 0,2 | 0,36 | 40 | 72 |
| 4 | 200 | 2 | 0,2 | 0,4 | 0,64 | 80 | 128 |

Чтобы получить среднее значение/дисперсию суммарных выплат $S$ для всего портфеля нужно сложить средние/дисперсии суммарных потерь для всех четырех профессиональных классов, так что

$$\mathsf{E}S = 150, \quad \mathsf{Var}\, S = 225.$$

Размер страхового фонда равен $u = \mathsf{E}S + p \cdot \mathsf{E}S$. По условию, должно быть верно равенство

$$\mathsf{P}(S \leqslant u) = 0{,}95,$$

или, что то же самое,

$$\mathsf{P}\left(\frac{S - \mathsf{E}S}{\sqrt{\mathsf{Var}\, S}} \leqslant \frac{u - \mathsf{E}S}{\sqrt{\mathsf{Var}\, S}}\right) = 0{,}95.$$

Применяя гауссовское приближение для центрированной и нормированной величины общих выплат, мы имеем:

$$\frac{u - \mathsf{E}S}{\sqrt{\mathsf{Var}\, S}} = x_{0,95}.$$

В рассматриваемой ситуации это равенство примет вид:

$$p = 0{,}1x_{0,95} \approx 0{,}1645.$$

Соответственно, защитная надбавка для работников четвертого профессионального класса равна $0{,}1645 \cdot 0{,}4 = 0{,}0658$. Поэтому верным является вариант (В).

**Задача 3.10 ([4]).** *Портфель компании состоит из $N = 20$ тысяч договоров страхования жизни сроком на 1 год. В соответствии с условиями договора компания выплачивает определенную сумму в случае смерти застрахованного в течение года и не платит ничего, если застрахованный доживет до конца года. Все застрахованные имеет одну и ту же вероятность смерти в течение года, равную $q = 0{,}01$. Из 20 тысяч застрахованных $N_1 = 10$ тысяч человек заключили договор на сумму $b_1 = 100\,000$ руб. каждый, $N_2 = 5000$ человек — на сумму $b_2 = 200\,000$ руб. каждый, $N_3 = 4000$ человек — на сумму $b_3 = 500\,000$ руб. каждый и $N_4 = 1000$ человек — на сумму $b_4 = 1$ миллион руб. каждый. Относительная страховая надбавка установлена компанией в размере $\theta = 15\%$.*

*Компания заключила договор перестрахования чрезмерных потерь при пределе удержания $r = 500\,000$ руб. Перестраховочная компания устанавливает свой тариф на основе той же статистики смертности, что и передающая компания, но с относительной страховой надбавкой $\theta^* = 20\%$. Определите, как изменится вероятность «разорения» передающей компании и ее ожидаемый доход.* [1])

**Решение**

Прежде всего найдем вероятность «разорения» и ожидаемый доход при отсутствии перестрахования. Ключевым элементом расчетов (имея в виду применение гауссовского приближения) является определение среднего значения $\mathsf{E}S$ и дисперсии $\mathsf{Var}\, S$ суммарных выплат $S$; они равны соответственно сумме средних значений и сумме дисперсий всех

[1]) Как обычно, «разорение» означает, что для выплат по рассматриваемому портфелю не хватит собранных премий и, значит, придется привлекать дополнительные средства.

индивидуальных потерь:

$$\mathsf{E}S = \sum_{i=1}^{N} \mathsf{E}X_i, \quad \mathsf{Var}\, X = \sum_{i=1}^{N} \mathsf{Var}\, X_i.$$

Поскольку возможные выплаты по индивидуальному договору принимают только два значения: 0 с вероятностью $1-q$ и $b_i$ с вероятностью $q$, мы имеем:

$$\mathsf{E}X_i = q \cdot b_i, \quad \mathsf{Var}\, X_i = q(1-q) \cdot b_i^2.$$

Для подсчета величин $\mathsf{E}S$ и $\mathsf{Var}\, S$ удобно сгруппировать договоры по величине страховой суммы. В нашем случае мы получим 4 группы. Суммы средних значений и дисперсий индивидуальных потерь для договоров из $k$-й группы, $k = 1, 2, 3, 4$, равны $N_k q b_k$ и $Nkq(1-q)b_k^2$ соответственно. Сложив эти величины, мы получим $\mathsf{E}S$ и $\mathsf{Var}\, S$. Для численных расчетов удобно использовать 100 000 руб. как единицу измерения денежных сумм. Результаты расчетов расположены в табл. 3.7, последний столбец которой содержит окончательные результаты для исходной группы из $N = 20\,000$ человек.

*Таблица 3.7. Расчет среднего значения и дисперсии суммарных выплат без перестрахования*

| номер группы | 1 | 2 | 3 | 4 | исходная группа |
|---|---|---|---|---|---|
| число застрахованных (тыс.) | 10 | 5 | 4 | 1 | 20 |
| страховая сумма | 1 | 2 | 5 | 10 | |
| средние выплаты для группы | 100 | 100 | 200 | 100 | 500 |
| дисперсия суммарных выплат для группы | 99 | 198 | 990 | 990 | 2277 |

Общая сумма, собранная в виде страховых премий, есть

$$u = (1+\theta)\mathsf{E}S = 575 \text{ условных единиц,}$$

а ожидаемый доход компании есть

$$u - \mathsf{E}S = \theta \cdot \mathsf{E}S = 75 \text{ условных единиц} = 7{,}5 \text{ миллиона рублей.}$$

Теперь мы можем подсчитать вероятность «разорения» $R$:

$$R \equiv \mathsf{P}(S > u) = \mathsf{P}\left(\frac{S - \mathsf{E}S}{\sqrt{\mathsf{Var}\, S}} > \frac{u - \mathsf{E}S}{\sqrt{\mathsf{Var}\, S}}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{u - \mathsf{E}S}{\sqrt{\mathsf{Var}\, S}}\right) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{575 - 500}{\sqrt{2277}}\right) \approx 1 - \Phi(1{,}57) \approx 5{,}82\,\%.$$

Предположим теперь, что наша компания заключила договор перестрахования с пределом удержания $r = 500\,000$ руб., т. е. $r = 5$ условных единиц. При наступлении страховых случаев по договорам с величиной страховой суммы $b_3 = 5$ и $b_4 = 10$ передающая компания выплачивает одну и ту же сумму $r = 5$. Поэтому все эти договора можно объединить в одну группу. Договора с величиной страховой суммы $b_1 = 1$ и $b_2 = 2$ по прежнему образуют отдельные группы. Результаты расчетов для передающей компании в новой ситуации содержатся в табл. 3.8.

*Таблица 3.8. Расчет среднего значения и дисперсии суммарных выплат передающей компании после перестрахования*

| номер группы | 1 | 2 | 3 | исходная группа |
|---|---|---|---|---|
| число застрахованных (тыс.) | 10 | 5 | 5 | 20 |
| страховая сумма | 1 | 2 | 5 | |
| средние выплаты для группы | 100 | 100 | 250 | 450 |
| дисперсия суммарных выплат для группы | 99 | 198 | 1237,5 | 1534,5 |

Таким образом, средние суммарные выплаты передающей компании уменьшились с 500 до 450, а дисперсия суммарных выплат уменьшилась с 2277 до 1534,5. Одновременно и коэффициент вариации суммарных выплат уменьшился с 9,54 % до 8,71 %.

Разность $\mathsf{E}S - \mathsf{E}S^{(r)} = 500 - 450 = 50$ дает средние суммарные выплаты перестраховочной компании. В соответствии с условиями перестрахования плата за перестрахование равна $1{,}20 \cdot 50 = 60$ Поэтому активы передающей компании уменьшатся с величины $u = 575$ до $u^{(r)} = 515$ и, значит, ожидаемый доход передающей компании составит величину

$$u^{(r)} - \mathsf{E}S^{(r)} = 65 \text{ условных единиц} \equiv 6{,}5 \text{ миллионов рублей.}$$

Для вероятности разорения после перестрахования мы имеем:

$$R^{(r)} \equiv \mathsf{P}(S^{(r)} > u^{(r)}) = \mathsf{P}\left(\frac{S^{(r)} - \mathsf{E}S^{(r)}}{\sqrt{\mathsf{Var}\, S^{(r)}}} > \frac{u^{(r)} - \mathsf{E}S^{(r)}}{\sqrt{\mathsf{Var}\, S^{(r)}}}\right) \approx$$

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{u^{(r)} - \mathsf{E}S^{(r)}}{\sqrt{\mathsf{Var}\, S^{(r)}}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{515 - 450}{\sqrt{1534{,}5}}\right) \approx 1 - \Phi(1{,}66) \approx 4{,}85\,\%.$$

Итак, перестрахование уменьшило вероятность разорения с 5,82 % до 4,85 %. Однако это достигнуто ценой уменьшения ожидаемого дохода с 7,5 миллионов рублей до 6,5 миллионов рублей.

**Задача 3.11 ([4]).** *Компания заключила $N = 10\,000$ однотипных договоров страхования жизни сроком на 1 год. В соответствии с условиями договора компания выплачивает 1 млн рублей в случае смерти застрахованного в течение года от несчастного случая, 100 тыс. рублей в случае смерти застрахованного в течение года от естественных причин и не платит ничего, если застрахованный доживет до конца года. Вероятность смерти от несчастного случая равна $5 \cdot 10^{-4}$, вероятность смерти от естественных причин равна $2 \cdot 10^{-3}$. Компания установила плату за страховку, исходя из 95% вероятности выполнения обязательств по рассматриваемому портфелю только за счет собранных премий.*

*Имея в виду значительный размер страхового возмещения (если смерть застрахованного наступает в результате несчастного случая), страховая компания предполагает заключить договор перестрахования чрезмерных потерь с пределом удержания r между 100 000 руб. и 1 000 000 руб.*

*Перестраховочная компания берет в качестве платы за перестрахование такого риска сумму, равную 160% от величины ожидаемых выплат (т. е. перестраховочная компания устанавливает относительную страховую надбавку, равную 60%).*

*Определите значение предела собственного удержания, которое бы минимизировало вероятность того, что для выплат по рассматриваемому портфелю будет нужно привлекать дополнительные средства (вероятность «разорения»).*

## Решение

Для расчетов удобно использовать 100 000 руб. как единицу измерения денежных сумм, так что выплата $X$ по одному договору принимает значения 10, 1 и 0 с вероятностями $5 \cdot 10^{-4}$, $20 \cdot 10^{-4}$ и $1 - 25 \cdot 10^{-4}$ соответственно. Среднее значение выплаты по одному договору есть

$$\mathsf{E}X = 5 \cdot 10^{-4} \cdot 10 + 20 \cdot 10^{-4} \cdot 1 = 7 \cdot 10^{-3} \text{ (условных единиц)} = 700 \text{ руб.},$$

а дисперсия

$$\mathsf{Var}\, X = \mathsf{E}X^2 - (\mathsf{E}X)^2 = 5 \cdot 10^{-4} \cdot 100 + 20 \cdot 10^{-4} \cdot 1 - 49 \cdot 10^{-6} \approx 5{,}2 \cdot 10^{-2}.$$

Таким образом, нетто-премия $p_0 \equiv \mathsf{E}X = 7 \cdot 10^{-3}$, а поскольку компания установила брутто-премию $p$ такой, чтобы вероятность неразорения была 95 %, мы имеем: [1])

$$p = \mathsf{E}X + \frac{x_{95\,\%}\sqrt{\mathsf{Var}\,X}}{\sqrt{N}} = 7\cdot 10^{-3} + \frac{1{,}645\cdot\sqrt{5{,}2}\cdot 10^{-1}}{10^2} \approx$$

$$\approx 10{,}75\cdot 10^{-3}\ (\text{условных единиц}) \equiv 1075\ \text{руб.},$$

так что общая премия равна $Np = 107{,}5$ (условных единиц).

Предположим теперь, что компания решает перестраховать иски, превышающие $r$ рублей, $100\,000 \leqslant r \leqslant 1\,000\,000$, в перестраховочной компании. Поскольку мы используем 100 000 руб. как единицу измерения денежных сумм, $r$ меняется от 1 до 10. В этом случае выплата передающей компании по одному договору, $X^{(r)}$, принимает три значения: 1, $r$ и 0 с вероятностями $20\cdot 10^{-4}$, $5\cdot 10^{-4}$ и $1-25\cdot 10^{-4}$ соответственно. Ее среднее значение и дисперсия равны

$$\mathsf{E}X^{(r)} = 1\cdot 20\cdot 10^{-4} + r\cdot 5\cdot 10^{-4} = 5\cdot 10^{-4}\cdot(r+4),$$

$$\mathsf{Var}\,X^{(r)} = 1^2\cdot 20\cdot 10^{-4} + r^2\cdot 5\cdot 10^{-4} - 25\cdot 10^{-8}\cdot(r+4)^2 \approx 5(r^2+4)\cdot 10^{-4}.$$

Для перестраховочной компании среднее значение выплаты по одному договору есть

$$\mathsf{E}X - \mathsf{E}X^{(r)} = 70\cdot 10^{-4} - 5\cdot 10^{-4}\cdot(r+4) = 5\cdot 10^{-4}(10-r)$$

и поэтому плата за перестрахование одного договора равна

$$1{,}6\cdot 5\cdot 10^{-4}\cdot(10-r) = 8\cdot 10^{-4}\cdot(10-r).$$

Для передающей компании среднее значение и дисперсия суммарных выплат по всему портфелю, $S^{(r)}$, есть:

$$\mathsf{E}S^{(r)} = N\cdot\mathsf{E}X^{(r)} = 5\cdot(r+4), \quad \mathsf{Var}\,S^{(r)} = N\cdot\mathsf{Var}\,X^{(r)} \approx 5\cdot(r^2+4).$$

Общая плата за перестрахование всего портфеля есть

$$10^4\cdot 8\cdot 10^{-4}\cdot(10-r) = 8\cdot(10-r)$$

[1]) Таким образом, относительная страховая надбавка есть

$$\theta = \frac{x_{95\,\%}}{\sqrt{N}}\cdot\frac{\sqrt{\mathsf{Var}\,X}}{\mathsf{E}X} = \frac{1{,}645\cdot\sqrt{5{,}2}\cdot 10^{-1}}{10^2\cdot 7\cdot 10^{-3}} \approx 53{,}59\,\%.$$

Довольно большое значение $\theta$ связано с очень большим значением коэффициента вариации величины возможных выплат по одному договору; он равен

$$\frac{\sqrt{\mathsf{Var}\,X}}{\mathsf{E}X} = \frac{\sqrt{5{,}2}\cdot 10^{-1}}{7\cdot 10^{-3}} \approx 32{,}58.$$

и поэтому после перестрахования премия, собранная компанией, уменьшится с $Np = 107{,}5$ до величины

$$u^{(r)} = 107{,}5 - 8 \cdot (10 - r) = 27{,}5 + 8r.$$

Для вероятности $R^{(r)}$ того, что суммарные выплаты страховой компании, $S^{(r)}$, больше, чем активы компании, $u^{(r)}$, с помощью гауссовского приближения имеем:

$$R^{(r)} = \mathsf{P}(S^{(r)} > u^{(r)}) = \mathsf{P}\left(\frac{S^{(r)} - \mathsf{E}S^{(r)}}{\sqrt{\mathsf{Var}\, S^{(r)}}} > \frac{u^{(r)} - \mathsf{E}S^{(r)}}{\sqrt{\mathsf{Var}\, S^{(r)}}}\right) \approx$$
$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{u^{(r)} - \mathsf{E}S^{(r)}}{\sqrt{\mathsf{Var}\, S^{(r)}}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{27{,}5 + 8r - 5r - 20}{\sqrt{5r^2 + 20}}\right) =$$
$$= 1 - \Phi\left(\frac{7{,}5 + 3r}{\sqrt{5r^2 + 20}}\right).$$

Таким образом, если мы хотим минимизировать вероятность $R^{(r)}$, нужно выбрать параметр $r$ таким образом, чтобы функция

$$h(r) = \frac{(7{,}5 + 3r)^2}{5r^2 + 20}$$

принимала наибольшее значение. Поскольку

$$h'(r) = \frac{2 \cdot (7{,}5 + 3r)(12 - 7{,}5r)}{5(r^2 + 4)^2},$$

оптимальное значение $r$ равно $\dfrac{12}{7{,}5} = 1{,}6$, что в абсолютных цифрах соответствует 160 000 руб.

**Замечание.** Поскольку $\sqrt{h(1{,}6)} \approx 2{,}15$, вероятность разорения при этом пределе удержания равна приблизительно 1,6 %. Ожидаемый доход компании до перестрахования был равен $Np - Np_0 =$ $=$ 3 750 000 руб. (он подсчитывается как разность между собранными премиями и ожидаемыми выплатами). После перестрахования ожидаемый доход компании стал $u^{(r)} - \mathsf{E}S^{(r)} = 7{,}5 + 3r =$ $= 12{,}3$ (условных единиц) $=$ 1 230 000 руб. Таким образом, уменьшение вероятности разорения достигнуто ценой уменьшения ожидаемого дохода на 2 520 000 руб.. Отметим, кроме того, что для достижения такой же вероятности «разорения» без перестрахования необходимо увеличить премию до величины

$$p' = \mathsf{E}X + \frac{x_{98,4\,\%}\sqrt{\mathsf{Var}\, X}}{\sqrt{N}} = 7 \cdot 10^{-3} + \frac{2{,}2 \cdot \sqrt{5{,}2} \cdot 10^{-1}}{10^2} \approx$$
$$\approx 12{,}02 \cdot 10^{-3} \text{ (условных единиц)} \equiv 1202 \text{ руб.},$$

т. е. на 12 %. Это означает увеличение общей премии по всему портфелю до 12 020 000 руб., а ожидаемого дохода компании до 5 020 000 руб.

Конечно, с точки зрения страховой компании это гораздо лучше, чем 1 230 000 руб. ожидаемого дохода в случае приобретения перестраховочного покрытия, но не надо забывать о рыночных факторах — страхователи могут не согласиться приобретать более дорогой продукт, и тогда придется забыть вообще о любой прибыли.

**Задача 3.12 ([10]).** *Портфель страховщика состоит из независимых договоров страхования жизни на один год; структура этого блока бизнеса приведена в табл. 3.9.*

*Таблица 3.9*

| *число договоров* | *страховая сумма* |
|---|---|
| *500* | *100* |
| *300* | *50* |
| *100* | *40* |

*Страховщик оценивает вероятность наступления страхового случая по одному договору как 0,020 и назначает общую премию за этот блок бизнеса в размере 2000.*

*За перестраховочную премию в размере 860 перестраховщик предлагает покрыть все индивидуальные выплаты сверх собственного удержания страховщика в размере 40 по одному договору.*

*Нагрузка перестраховщика вдвое превышает относительную защитную надбавку страховщика.*

*Определите вероятность наступления страхового случая по одному договору с точки зрения перестраховочной компании.*

*(A) 0,014; (B) 0,018; (C) 0,022; (D) 0,026; (E) 0,030.*

**Решение**

Рассмотрим вначале ситуацию с точки зрения прямого страховщика. Ожидаемые потери по одному договору каждого вида даются табл. 3.10.

*Таблица 3.10*

| число договоров в группе | ожидаемые выплаты по одному договору | ожидаемые выплаты по группе договоров |
|---|---|---|
| 500 | $100 \cdot 0{,}02 = 2$ | $500 \cdot 2 = 1000$ |
| 300 | $50 \cdot 0{,}02 = 1$ | $300 \cdot 1 = 300$ |
| 100 | $40 \cdot 0{,}02 = 0{,}8$ | $100 \cdot 0{,}8 = 80$ |

Поэтому ожидаемые выплаты по рассматриваемому портфелю равны 1380 — это суммарная нетто-премия. Поскольку общая премия равна 2000, относительная защитная надбавка, используемая страховщиком, равна

$$\theta = \frac{2000 - 1380}{1380} \approx 0{,}45.$$

Соответственно, относительная защитная надбавка, используемая перестраховщиком, равна

$$\theta' = 2\theta \approx 0{,}9.$$

Рассмотрим теперь ситуацию с точки зрения перестраховщика. Поскольку он покрывает только превышение индивидуальных выплат над собственным удержанием прямого страховщика в размере 40, по договорам первого типа перестраховщик платит сумму 60, по договорам второго типа — сумму 10, а в договорах третьего типа не участвует вовсе. Поэтому для перестраховщика ожидаемые потери по одному договору каждого вида даются табл. 3.11 (ниже $q$ — оценка вероятности наступления страхового случая перестраховщиком).

*Таблица 3.11*

| число договоров в группе | ожидаемые выплаты по одному договору | ожидаемые выплаты по группе договоров |
|---|---|---|
| 500 | $60 \cdot q = 60\,q$ | $500 \cdot 60\,q = 30\,000\,q$ |
| 300 | $10 \cdot q = 10\,q$ | $300 \cdot 10\,q = 3000\,q$ |
| 100 | 0 | 0 |

Следовательно, для перестраховщика ожидаемые выплаты по перестрахованному портфелю равны $33\,000\,q$ — это суммарная перестраховочная нетто-премия. Поскольку относительная защитная надбавка, используемая перестраховщиком, равна 0,9, общая перестраховочная премия равна $62\,700\,q$. С другой стороны, по условию, эта премия составляет 860. Отсюда $q \approx 0{,}0137$, и поэтому верным является вариант (A).

**Задача 3.13 ([9]).** *Страхователь покупает договор группового страхования для группы, состоящей из четырех человек.*

*Страховщик назначает премию за всю группу в размере 5 и заключает договор перестрахования чрезмерных (индивидуальных) потерь с пределом собственного удержания 1 (по каждому риску). Относительная защитная надбавка, используемая перестраховщиком, равна 20 %.*

*В конце срока действия договора страховщик подсчитывает баланс доходов и расходов. Доходы включают премию, а расходы состоят из выплаченных страховых возмещений (исключая долю перестраховщика), платы за перестрахование и административных* *расходов в размере 20 % от премии. Если доходы превышают расходы, страховщик возвращает разницу страхователю.*

*Определите ожидаемый размер выплаты страхователю по окончании договора, если распределение индивидуальных потерь задается табл. 3.12.*

*Таблица 3.12*

| *величина потерь* | *вероятность* |
|---|---|
| *0* | *0,50* |
| *1* | *0,25* |
| *2* | *0,25* |

*(A) 0,90; (B) 0,92; (C) 0,94; (D) 0,96; (E) 0,98.*

**Решение**

Пусть $X_i$ — размер выплаты $i$-му застрахованному (табл. 3.12 содержит распределение этих случайных величин), $X_i' = \min(X_i, 1)$ — доля страховщика, $X_i'' = \max(X_i - 1, 0)$ — доля перестраховщика в страховом возмещении $i$-му застрахованному.

Распределение случайных величин $X_i'$, $X_i''$ есть:

$$\mathsf{P}(X_i' = 0) = 0{,}50, \quad \mathsf{P}(X_i' = 1) = 0{,}50,$$

$$\mathsf{P}(X_i'' = 0) = 0{,}75, \quad \mathsf{P}(X_i'' = 1) = 0{,}25.$$

Ожидаемые потери перестраховщика по одному застрахованному равны $\mathsf{E}X_i'' = 0{,}25$. Соответственно общие ожидаемые потери перестраховщика равны 1. Значит, плата за перестраховочную защиту есть 1,2.

Пусть $S' = X_1' + X_2' + X_3' + X_4'$ — доля страховщика в суммарных потерях по договору. Найдем распределение этой случайной величины. Для этого подсчитаем ее производящую функцию:

$$\mathsf{E}z^{S'} = \left(\mathsf{E}z^{X_i'}\right)^4 = (0{,}5 + 0{,}5z)^4 = \frac{1}{16}(1+z)^4 = \frac{1}{16}(1+4z+6z^2+4z^3+z^4).$$

Коэффициенты при степенях $z$ дают искомое распределение; оно приведено в табл. 3.13.

*Таблица 3.13*

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathsf{P}(S' = n)$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{4}{16}$ | $\frac{6}{16}$ | $\frac{4}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |

Поскольку премия по договору страхования равна 5, плата за перестраховочное покрытие равна 1,2, административные расходы равны 1, размер выплаты страхователю по окончании договора равен $D = \max(2{,}8 - S', 0)$. Распределение случайной величины $D$ легко получить из распределения случайной величины $S'$; оно приведено в табл. 3.14.

*Таблица 3.14*

| $n$ | 2,8 | 1,8 | 0,8 | 0 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathsf{P}(D = n)$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{4}{16}$ | $\frac{6}{16}$ | $\frac{5}{16}$ |

Поэтому для среднего имеем

$$\mathsf{E}D = \frac{1}{16} \cdot 2{,}8 + \frac{4}{16} \cdot 1{,}8 + \frac{6}{16} \cdot 0{,}8 = 0{,}925,$$

так что верным является вариант (B).

# Глава 4
# МОДЕЛИ ДОЛГОСРОЧНОГО СТРАХОВАНИЯ ЖИЗНИ

## 1. Основные виды долгосрочного страхования жизни

*Пожизненное страхование (whole life insurance)*

При этом виде страхования фиксированная страховая сумма выплачивается в момент смерти.

Поскольку человек рано или поздно умрет, страховая компания совершенно точно выплатит страховую сумму (если только причина смерти не покрывается условиями договора, например, если смерть наступила в результате противоправных действий застрахованного). Если плата за это покрытие полностью вносится в момент заключения договора, то речь идет о довольно большой сумме, соизмеримой со страховой суммой. Поэтому обычно премии выплачиваются периодически в течение всей жизни или вплоть до достижения застрахованным определенного возраста (скажем, пенсионного, когда его доходы резко снижаются).

В этой главе мы для простоты расчетов будем предполагать, что по всем рассматриваемым видам страхования премия полностью вносится в момент заключения договора. Денежные потоки, связанные с пожизненным страхованием такого рода, условно изображены на рис. 4.1.

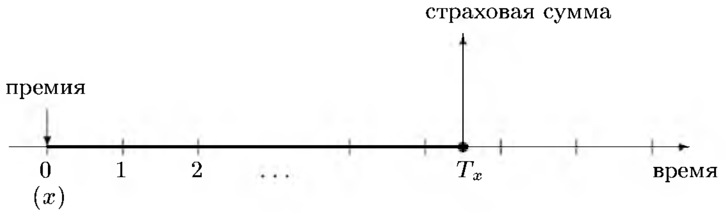


Рис. 4.1

*N-летнее временное страхование жизни (n-year term life insurance)*

При этом виде страхования выплата фиксированной страховой суммы производится в момент смерти, если застрахованный умер в течение срока действия договора, т. е. на протяжении $n$ лет с момента заключения договора. Если же застрахованный прожил эти $n$ лет, то компания не платит ничего.

В типичных случаях вероятность смерти застрахованного в течение срока действия договора мала, так что премия по этому виду страхования относительно невелика. Поэтому временное страхование часто используют в случаях, когда требуется покрытие на большую сумму.

*Страхование с переменной страховой выплатой (varying benefit insurance)*

В рассмотренных выше примерах величина страховой выплаты была фиксирована и не зависела от момента выплаты. Существуют многочисленные виды страхования, когда страховое возмещение может меняться. В качестве примера можно привести пожизненное страхование с непрерывно увеличивающимся страховым возмещением (continuously increasing whole life insurance). При этом виде страхования компания выплачивает в момент смерти сумму, равную $T_x$ (мы считаем, что денежные суммы измеряются у нас некоторой условной единицей). Страхование с уменьшающейся страховой выплатой возникает в кредитном страховании жизни.

*Пожизненное страхование, отсроченное на $m$ лет ($m$-year deferred whole life insurance)*

При этом виде страхования выплата фиксированной страховой суммы производится в момент смерти застрахованного, но только если она произошла по истечении $m$-летнего срока с момента заключения договора. Если застрахованный умрет раньше, чем через $m$ лет после заключения договора, страховое возмещение не выплачивается вовсе.

По аналогии с пожизненным страхованием, отсроченным на $m$ лет, можно ввести и другие виды отсроченного страхования, обобщающие ранее введенные виды обычного страхования.

*Дискретные договоры*

Во всех описанных выше примерах страховое возмещение (benefit) выплачивается в виде одиночной суммы (lump sum) в момент смерти застрахованного (конечно, в реальности как выгодоприобретателю, так и компании требуется определенное время для подготовки документов) — такие виды страхования часто называют непрерывными. Однако возможны выплаты и в другие моменты времени. Наиболее важен (с теоретической точки зрения) случай, когда выплата производится не в момент смерти, а в следующий за ним день рождения застрахованного — такие виды страхования часто называют дискретными. Если считать (как это обычно делается при актуарных расчетах), что возраст застрахованного в момент заключения договора — целое число, то дискретные договоры можно описать как договоры с выплатой страховой суммы в очередную, после момента смерти, годовщину заключения договора.

Например, при пожизненном страховании с выплатой страховой суммы в конце года смерти страховое возмещение выплачивается в момент

$$[T_x] + 1 = K_x + 1,$$

где $K_x$ — округленное время жизни. Для каждого из рассмотренных ранее непрерывных видов страхования существует дискретный аналог с выплатой страховой суммы в конце года смерти.

В пенсионных схемах центральную роль играют договора другого типа, когда выплата страховой суммы производится не в случае смерти, а в случае дожития до определенного момента. В качестве примеров можно привести

*$N$-летнее чисто накопительное страхование (n-year pure endowment insurance)*

При этом виде страхования выплата страховой суммы фиксированной величины производится в момент $n$, если застрахованный дожил до этого момента. В случае смерти застрахованного до момента $n$ страховая сумма не выплачивается (однако обычно такое покрытие предусматривает возврат всех внесенных премий в случае смерти застрахованного до истечения срока действия договора).

*$N$-летнее смешанное страхование (n-year endowment insurance)*

При этом виде страхования выплата фиксированной страховой суммы производится на следующих условиях. Если смерть застрахованного наступит до истечения срока действия договора, то страховая сумма выплачивается в момент смерти. Если же застрахованный дожил до окончания срока действия договора, то страховая сумма выплачивается в момент $n$ окончания срока действия договора. Нетрудно понять, что этот вид страхования выполняет функции как собственно страхования (т. е. обеспечивает доход семье застрахованного в случае его смерти), так и накопления средств (т. е. обеспечивает самого застрахованного). Иногда при смешанном страховании страховые суммы, выплачиваемые в случае смерти и в случае дожития, различаются.

## 2. Актуарная современная стоимость обязательств

С математической точки зрения *долгосрочное страхование* (long-term insurance) характеризуется тем, что при расчетах принимается во внимание изменение ценности денег с течением времени. Поэтому теория долгосрочного страхования существенно опирается на теорию сложных процентов.

В частности, сопоставляя обязательства страхователя и страховщика, мы должны приводить их к одному моменту времени. Скажем, для того, чтобы сформулировать принцип эквивалентности обязательств в момент заключения договора, мы должны привести обязательства страхователя и страховщика именно к этому моменту. Их средние значения называются актуарными современными стоимостями обязательств.

Ниже мы будем предполагать, что интенсивность процентов $\delta$ не меняется с течением времени; $i = e^{\delta} - 1$ будет обозначать эффективную годовую процентную ставку, $v = 1/(1+i)$ — коэффициент дисконтирования и т. д.

Кроме того, поскольку величина страховой суммы, как правило, фиксирована, в актуарных расчетах мы будем принимать ее в качестве единицы измерения денежных сумм.

Величина обязательств страховой компании по договорам страхования жизни с разовой выплатой единичной страховой суммы, приведенная на момент заключения договора, обозначается буквой $Z$ с дополнительными индексами, описывающими структуру покрытия. Во всех случаях возраст застрахованного на момент заключения договора указывается в виде индекса внизу слева. Если страховая сумма выплачивается в момент смерти («непрерывный» договор), то сверху ставится черта; отсутствие верхней черты означает, что договор — «дискретный», т. е. страховое возмещение выплачивается в конце года смерти. Срок действия договора указывается через двоеточие после возраста застрахованного и обрамлен прямым углом (сверху и справа).

Математическое ожидание приведенной стоимости обязательств называется их актуарной современной стоимостью и обозначается буквой $A$ с теми же индексами, что и переменная $Z$.

Например,

для пожизненного страхования

$$\overline{Z}_x = v^{T_x},$$

для временного страхования

$$\overline{Z}^{1}_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} v^{T_x}, & \text{если } T_x < n, \\ 0, & \text{если } T_x > n, \end{cases}$$

для смешанного страхования

$$\overline{Z}_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} v^{T_x}, & \text{если } T_x < n, \\ v^n, & \text{если } T_x > n, \end{cases}$$

для отложенного страхования

$${}_{m|}\overline{Z}_x = \begin{cases} v^{T_x}, & \text{если } T_x > m, \\ 0, & \text{если } T_x < m. \end{cases}$$

## 3. Задачи и решения

**Задача 4.1 ([5]).** *Страховая компания предполагает заключить договор пожизненного страхования на случай смерти на сумму \$ 10 000 с человеком в возрасте $x = 30$ лет. Предположим, что смертность описывается законом де Муавра:*

$$f(x) = \frac{1}{\omega}, \quad 0 < x < \omega,$$

*с предельным возрастом $\omega = 100$, а премия равна \$ 2500. Страховая компания использует при расчетах техническую процентную ставку $i = 6\%$.*

*Учитывая только поступление премий, выплаты страховых сумм и инвестиционный доход, определите среднее значение и среднее квадратическое отклонение приведенного дохода страховщика (на момент заключения договора). Чему равна вероятность того, что договор будет убыточным?*

**Решение**

Прежде всего отметим, что остаточное время жизни $T_x \equiv T_{30}$ равномерно распределено на промежутке $(0, \omega - x) \equiv (0, 70)$. Кроме того, примем страховую сумму в качестве единицы измерения денежных сумм, так что премия равна 0,25 (условных единиц).

При пожизненном страховании страховая сумма выплачивается в момент смерти застрахованного. Поэтому приведенная стоимость (в момент заключения договора) единичной страховой суммы, $\overline{Z}_x$, есть

$$\overline{Z}_x = v^{T_x} = e^{-\delta T_x},$$

где $v = \dfrac{1}{1+i}$ — коэффициент дисконтирования, а $\delta = \ln(1 + i)$ — интенсивность процентов. Соответственно, приведенное значение дохода страховщика есть $0{,}25 - \overline{Z}_x$.

Среднее значение приведенного дохода равно

$$0{,}25 - \mathsf{E}\overline{Z}_x \equiv 0{,}25 - \overline{A}_x,$$

где (в силу принципа эквивалентности обязательств страховщика и страхователя)

$$\overline{A}_x \equiv \mathsf{E}\overline{Z}_x$$

— разовая нетто-премия по рассматриваемому виду страхования:

$$\overline{A}_x \equiv \mathsf{E}\overline{Z}_x = \int\limits_0^\infty v^t f_x(t)\,dt = \int\limits_0^{\omega - x} e^{-\delta t}\frac{1}{\omega - x}\,dt = \frac{1 - e^{-\delta(\omega - x)}}{\delta(\omega - x)}.$$

Для $x = 30$, $\omega = 100$, $\delta = \ln 1{,}06$ мы получим:

$$\overline{A}_{30} = 0{,}241019 \text{ (условных единиц)},$$

так что среднее значение приведенного дохода равно \$ 90.

Чтобы найти дисперсию величины $0{,}25 - \overline{Z}_x$, отметим, что она равна дисперсии величины $\overline{Z}_x$, а

$$\overline{Z}_x^2 = e^{-2\delta T_x},$$

т. е. квадрат величины $\overline{Z}_x$ совпадает с современной стоимостью единичной страховой суммы при использовании технической процентной ставки с удвоенной интенсивностью процентов:

$$\overline{Z}_x^2 = {}^2\overline{Z}_x.$$

Соответственно, второй момент величины $\overline{Z}_x$ совпадает с разовой нетто-премией при использовании технической процентной ставки с удвоенной интенсивностью процентов:

$$\mathsf{E}\overline{Z}_x^2 = {}^2\overline{A}_x = \frac{1 - e^{-2\delta(\omega - x)}}{2\delta(\omega - x)}.$$

Для $x = 30$, $\omega = 100$, $\delta = \ln 1{,}06$ мы получим:

$$\mathsf{E}\overline{Z}_x^2 = 0{,}122549, \quad \mathsf{Var}\,\overline{Z}_x = 0{,}064459.$$

Таким образом, искомое среднее квадратическое отклонение равно приблизительно \$ 2539.

Договор будет убыточным, если в момент смерти застрахованного премия вместе с накопленными процентами меньше выплачиваемой страховой суммы. Вероятность этого события есть:

$$\mathsf{P}(0{,}25 \cdot (1 + i)^{T_x} < 1) = \mathsf{P}\left(T_x < \frac{\ln 4}{\delta}\right) = \mathsf{P}(T_x < 23{,}8) = 23{,}8/70 \approx 34\,\%.$$

**Задача 4.2 ([5]).** *Предположим, что кривая смертей задается формулой*

$$f(t) = 0{,}0004 \cdot t \cdot e^{-0{,}02t}, \quad t \geqslant 0,$$

*а страховщик использует при актуарных расчетах техническую процентную ставку $i = 4\,\%$.*

*Найдите разовую нетто-премию по договору пожизненного страхования со страховой суммой \$ 100 000, заключенному с человеком в возрасте $x = 20$ лет.*

**Решение**

Примем страховую сумму в качестве единицы измерения денежных сумм. Разовая нетто-премия по договору пожизненного страхования, заключенному с человеком в возрасте $x$ лет, дается формулой:

$$\overline{A}_x = \mathsf{E} v^{T_x} = \mathsf{E} e^{-\delta T_x},$$

где $v = \dfrac{1}{1+i}$ — коэффициент дисконтирования, а $\delta = \ln(1+i)$ — интенсивность процентов. Отсюда видно, что $\overline{A}_x$ является преобразованием Лапласа остаточного времени жизни $T_x$ в точке $\delta$.

В нашем случае $f(t)$ имеет вид

$$f(t) = \frac{t}{a^2} e^{-t/a},$$

где $a = 50$. Как было установлено в задаче 2.2, для такой плотности времени жизни функция выживания дается формулой:

$$s(x) = \frac{x+a}{a} e^{-x/a}.$$

Отсюда следует, что плотность остаточного времени жизни имеет вид:

$$f_x(t) = \frac{f(x+t)}{s(x)} = \frac{x}{x+a} \frac{1}{a} e^{-t/a} + \frac{a}{x+a} \frac{t}{a^2} e^{-t/a}, \quad t > 0,$$

т. е. случайная величина $T_x$ имеет распределение, которое является взвешенной суммой с весами $x/(x+a)$ и $a/(x+a)$ экспоненциального распределения со средним $a$ и эрланговского распределения второго порядка со средним $2a$. Поскольку преобразования Лапласа последних хорошо известны (в точке $\delta$ они равны $1/(1+a\delta)$ и $1/(1+a\delta)^2$ соответственно), мы немедленно имеем:

$$\overline{A}_x = \frac{x}{x+a} \cdot \frac{1}{1+a\delta} + \frac{a}{x+a} \cdot \frac{1}{(1+a\delta)^2} = \frac{x+a+ax\delta}{(x+a)(1+a\delta)^2}.$$

Для рассматриваемых значений параметров

$$\overline{A}_x \approx 0{,}177958892 \text{ условных единиц,}$$

так что искомая нетто-премия равна \$ 17 795,89.

**Задача 4.3 ([5]).** *Подсчитайте нетто-премию при заключении договора о 3-х летнем смешанном страховании человека в возрасте 25 лет на сумму 100 тысяч рублей.*

*Фрагмент таблицы продолжительности жизни, используемой страховой компанией, приведен в табл. 4.1.*

*Таблица 4.1*

| $x$ | $q_x$ | $l_x$ | $d_x$ | $L_x$ | $\overset{\circ}{e}_x$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 0,001268 | 97 813 | 124 | 97 750,97 | 59,67 |
| 21 | 0,001321 | 97 689 | 129 | 97 624,47 | 58,75 |
| 22 | 0,001374 | 97 560 | 134 | 97 492,97 | 57,82 |
| 23 | 0,001437 | 97 426 | 140 | 97 355,97 | 56,90 |
| 24 | 0,001501 | 97 286 | 146 | 97 212,96 | 55,98 |
| 25 | 0,001565 | 97 140 | 152 | 97 063,96 | 55,07 |
| 26 | 0,001639 | 96 988 | 159 | 96 908,46 | 54,15 |
| 27 | 0,001714 | 96 829 | 166 | 96 745,95 | 53,24 |
| 28 | 0,001800 | 96 663 | 174 | 96 575,95 | 52,33 |
| 29 | 0,001886 | 96 489 | 182 | 96 397,94 | 51,42 |

*При расчетах используйте эффективную годовую процентную ставку $i = 25\%$ и предположение о равномерном распределении смертей для дробных возрастов.*

**Решение**

При смешанном страховании жизни на $n$ лет, которое выполняет функции как собственно страхования, так и накопления средств, выплата страховой суммы $b$ производится на следующих условиях. Если смерть застрахованного наступит до истечения срока действия договора, то страховая сумма выплачивается в момент смерти. Если же застрахованный дожил до окончания срока действия договора, то страховая сумма выплачивается в момент $n = 3$ окончания срока действия договора.

Поэтому современная стоимость единичной страховой суммы в момент заключения договора с человеком в возрасте $x$ лет, $\overline{Z}_{x:\overline{n}|}$, дается формулой

$$\overline{Z}_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} v^{T(x)}, & \text{если } T_x \leqslant n, \\ v^n, & \text{если } T_x > n. \end{cases}$$

В силу принципа эквивалентности обязательств страховщика и страхователя разовая нетто-премия равна среднему значению случайной величины $\overline{Z}_{x:\overline{n}|}$:

$$\overline{A}_{x:\overline{n}|} \equiv \mathsf{E}\overline{Z}_{x:\overline{n}|} = \int\limits_0^n v^t f_x(t)\,dt + v^n \cdot \mathsf{P}(T(x) > n).$$

Второе слагаемое легко преобразовать к виду, в котором фигурируют только величины из таблицы продолжительности жизни:

$$v^n \cdot \mathsf{P}(T(x) > n) = v^n \cdot \mathsf{P}(T - x > n | T > x) =$$
$$= v^n \cdot \frac{\mathsf{P}(T > x+n)}{\mathsf{P}(T > x)} = v^n \cdot \frac{s(x+n)}{s(x)} = v^n \frac{l_{x+n}}{l_x}.$$

Аналогичное преобразование для первого слагаемого сложнее:

$$\int_0^n v^t f_x(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} v^t f_x(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} v^t \frac{f(x+t)}{s(x)}\,dt =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} v^t \frac{s(x+k) - s(x+k+1)}{s(x)}\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} e^{-\delta t} \frac{d_{x+k}}{l_x}\,dt =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{v^k - v^{k+1}}{\delta} \frac{d_{x+k}}{l_x} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \frac{i}{\delta} \frac{d_{x+k}}{l_x}.$$

Таким образом, искомая нетто-премия есть

$$\overline{A}_{25:\overline{3}|} = \frac{i}{\delta} \frac{v d_{25} + v^2 d_{26} + v^3 d_{27}}{l_{25}} + \frac{v^3 l_{28}}{l_{25}} \approx 51{,}3\,\%,$$

или в абсолютных цифрах приблизительно 51,3 тыс. руб.

**Задача 4.4 ([26]).** *Страховщик использует в актуарных расчетах таблицу смертности 4.2 с отбором, действующим 3 года, и техническую процентную ставку $i = 3\%$.*

*Таблица 4.2*

| $[x]$ | $q_{[x]}$ | $q_{[x]+1}$ | $q_{[x]+2}$ | $q_{x+3}$ | $x+3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 60 | 0,09 | 0,11 | 0,13 | 0,15 | 63 |
| 61 | 0,10 | 0,12 | 0,14 | 0,16 | 64 |
| 62 | 0,11 | 0,13 | 0,15 | 0,17 | 65 |
| 63 | 0,12 | 0,14 | 0,16 | 0,18 | 66 |
| 64 | 0,13 | 0,15 | 0,17 | 0,19 | 67 |

*Человек в возрасте 60 лет заключает отложенный на два года договор страхования жизни на 2 года с выплатой страхового возмещения в конце года смерти. Подсчитайте актуарную современную стоимость этого покрытия, ${}_{2|2}A_{[60]}$ (страховая сумма равна 1).*

**Решение**

Примем момент заключения договора в качестве начального и обозначим через $T_{[60]}$ остаточное время жизни застрахованного.

Страховая компания выплачивает страховую сумму

1) в момент $t = 3$, если застрахованный умрет в течение первого года действия договора, т. е. если $2 < T_{[60]} < 3$;
2) в момент $t = 4$, если застрахованный умрет в течение второго года действия договора, т. е. если $3 < T_{[60]} < 4$.

Значит,

$$
\begin{aligned}
{}_{2|2}A_{[60]} &= v^3 \cdot \mathsf{P}\left(2 < T_{[60]} < 3\right) + v^4 \cdot \mathsf{P}\left(3 < T_{[60]} < 4\right) = \\
&= v^3 p_{[60]} p_{[60]+1} q_{[60]+2} + v^4 p_{[60]} p_{[60]+1} p_{[60]+2} q_{63} = \\
&= v^3 p_{[60]} p_{[60]+1} \left(q_{[60]+2} + v p_{[60]+2} q_{63}\right) \approx 0{,}19026.
\end{aligned}
$$

**Задача 4.5 ([5]).** *Время жизни описывается моделью де Муавра с предельным возрастом $\omega = 120$ лет, а эффективная годовая процентная ставка $i = 15\%$. Подсчитайте нетто-премии для человека в возрасте 40 лет, если заключается договор:*

(*а*) *пожизненного страхования;*

(*б*) *5-летнего страхования жизни;*

(*в*) *5-летнего смешанного страхования жизни;*

(*г*) *пожизненного страхования, отсроченного на 2 года;*

(*д*) *пожизненного страхования со страховой суммой, которая непрерывно увеличивается.*

**Решение**

Остаточное время жизни застрахованного имеет равномерное распределение на промежутке $(0, \omega - x) \equiv (0, 80)$:

$$
f_{40}(t) = \frac{1}{80}, \quad 0 < t < 80.
$$

Интенсивность процентов $\delta = \ln(1+i) \approx 13{,}9762\,\%$, коэффициент дисконтирования $v = 1/(1+i) \approx 86{,}9565\,\%$. После этих предварительных замечаний приступим к расчетам:

(а)

$$
\overline{A}_{40} = \int_0^{80} v^t \frac{1}{80}\, dt = -\frac{1}{80\delta} v^t \Big|_0^{80} = \frac{1 - v^{80}}{80\delta} = 8{,}944\,\%;
$$

(б)

$$
\overline{A}^{\,1}_{40:\overline{5}|} = \int_0^{5} v^t \frac{1}{80}\, dt = -\frac{1}{80\delta} v^t \Big|_0^{5} = \frac{1 - v^{5}}{80\delta} = 4{,}497\,\%;
$$

(в)

$$\overline{A}_{40:\overline{5}|} = \int_0^5 v^t \frac{1}{80}\,dt + v^5 \cdot \int_5^{80} \frac{1}{80}\,dt = \overline{A}^{\,1}_{40:\overline{5}|} + \frac{75}{80}v^5 = 51{,}107\,\%;$$

(г)

$$_{2|}\overline{A}_{40} = \int_2^{80} v^t \frac{1}{80}\,dt = -\frac{1}{80\delta}v^t\Big|_2^{80} = \frac{v^2 - v^{80}}{80\delta} = 6{,}763\,\%;$$

(д)

$$(\overline{IA})_{40} = \int_0^{80} tv^t \frac{1}{80}\,dt = -\int_0^{80} \frac{t}{80\delta}\,dv^t = -\frac{t}{80\delta}v^t\Big|_0^{80} + \int_0^{80} v^t \frac{1}{80\delta}\,dt =$$

$$= -\frac{e^{-80\delta}}{\delta} - \frac{1}{80\delta^2}v^t\Big|_0^{80} = -\frac{v^{80}}{\delta} + \frac{1 - v^{80}}{80\delta^2} = \frac{1 - (1 + 80\delta)v^{80}}{80\delta^2} = 63{,}982\,\%.$$

**Задача 4.6 ([5]).** *Страховая компания заключила $N = 10\,000$ договоров пожизненного страхования со страховой суммой $b = \$\,10\,000$ каждый. Предположим, что остаточное время жизни каждого из застрахованных характеризуется интенсивностью смертности $\mu \equiv 0{,}04$, которая не меняется с течением времени, а интенсивность процентов $\delta = 6\,\%$.*

*Подсчитайте величину премии, которая гарантировала бы 95 % вероятность выполнения компанией своих обязательств без привлечения дополнительных средств.*

## Решение

Примем страховую сумму в качестве единицы измерения денежных сумм.

Подсчитаем вначале нетто-премию:

$$p_0 = \overline{A}_x = \int_0^\infty v^t f_x(t)\,dt,$$

где $f_x(t)$ — плотность остаточного времени жизни. Поскольку интенсивность смертности известна, мы можем найти функцию выживания:

$$s_x(t) = e^{-\mu t},$$

что, в свою очередь, дает следующую формулу для $f_x(t)$:

$$f_x(t) = \mu e^{-\mu t}.$$

Теперь мы можем подсчитать нетто-премию:

$$\overline{A}_x = \int\limits_0^\infty \mu e^{-(\mu+\delta)t}\, dt = \frac{\mu}{\mu+\delta} = \frac{0{,}04}{0{,}04+0{,}06} = 0{,}4.$$

Второй момент современной величины выплат по индивидуальному договору может быть получен из этой формулы заменой $\delta$ на $2\delta$:

$$\mathsf{E}\overline{Z}_x^2 = {}^2\overline{A}_x = \frac{\mu}{\mu+2\delta} = \frac{0{,}04}{0{,}04+0{,}12} = \frac{0{,}04}{0{,}16} = 0{,}25.$$

Следовательно,

$$\mathsf{Var}\,\overline{Z}_x = \mathsf{E}\overline{Z}_x^2 - (\mathsf{E}\overline{Z}_x)^2 = 0{,}25 - 0{,}16 = 0{,}09.$$

Теперь можно подсчитать относительную страховую надбавку:

$$\theta = x_\alpha \frac{\sqrt{\mathsf{Var}\,\overline{Z}_x}}{\overline{A}_x\sqrt{N}} = 1{,}645 \cdot \frac{\sqrt{0{,}09}}{0{,}4\sqrt{10\,000}} = 1{,}23375\,\%.$$

Соответственно, премия есть

$$p = \overline{A}_x \cdot (1+\theta) = 40{,}4935\,\%.$$

Напомним, что величина страховой суммы $b$ используется нами в качестве единицы измерения денежных сумм, так что в абсолютных цифрах $p = \$\,4049{,}35$.

**Задача 4.7.** *1 января 2001 года 400 студентов 3 курса механико-математического факультета организовали общество взаимного страхования на следующих условиях:*

*1) 1 января 2001 года все вносят одну и ту же сумму $P$;*

*2) в случае смерти в течение ближайших 10 лет выплаты не производятся;*

*3) в случае смерти застрахованного после 10-летнего периода выгодоприобретателю немедленно выплачивают 1000.*

*Известно, что смертность описывается постоянной интенсивностью $\mu = 0{,}01$, активы фонда инвестируются и приносят доход, соответствующий интенсивности процентов $\delta = 7\%$.*

*При каком $P$ с вероятностью 95% общество сможет произвести все выплаты?*

($\Phi(1{,}645) = 0{,}95$)

**Решение**

Фактически общество взаимного страхования обеспечивает своим членам пожизненное страхование, отсроченное на $m = 10$ лет. Примем страховую сумму в качестве единицы измерения денежных сумм. Тогда величина страхового возмещения, приведенная к моменту образования общества, дается формулой

$$ {}_{m|}\overline{Z}_x = \begin{cases} v^{T_x}, & \text{если } T_x > m, \\ 0, & \text{если } T_x < m\ . \end{cases} $$

Разовая нетто-премия по этому покрытию есть

$$ {}_{m|}\overline{A}_x = \mathsf{E}\left(v^{T_x}; T_x > m\right) = \int\limits_m^{+\infty} e^{-\delta t}\mu e^{-\mu t}\,dt = $$
$$ = \frac{\mu}{\mu+\delta}e^{-(\mu+\delta)m} \approx 5{,}6166\,\% \text{ (страховой суммы).} $$

Второй начальный момент величины страхового возмещения, приведенной к моменту образования общества, равен

$$ \mathsf{E}\left({}_{m|}\overline{Z}_x\right)^2 = {}^{2}_{m|}\overline{A}_x = \frac{\mu}{\mu+2\delta}e^{-(\mu+2\delta)m} \approx 0{,}014875. $$

Поэтому для дисперсии имеем:

$$ \mathsf{Var}\left({}_{m|}\overline{Z}_x\right) = \frac{\mu}{\mu+2\delta}e^{-(\mu+2\delta)m} - \frac{\mu^2}{(\mu+\delta)^2}e^{-2(\mu+\delta)m} \approx 0{,}01172. $$

Теперь можно найти относительную страховую надбавку:

$$ \theta = x_\alpha \frac{\sqrt{\mathsf{Var}\,{}_{m|}\overline{Z}_x}}{{}_{m|}\overline{A}_x\sqrt{N}} \approx 1{,}645 \cdot \frac{\sqrt{0{,}01172}}{0{,}056166\sqrt{400}} \approx 15{,}85\,\%. $$

Соответственно, индивидуальная премия есть

$$ P = {}_{m|}\overline{A}_x \cdot (1+\theta) = 6{,}507\,\% \text{ (страховой суммы),} $$

или, в абсолютных цифрах, примерно 65.

**Задача 4.8.** *Студенты актуарно-финансовой группы третьего курса механико-математического факультета, напуганные строгостью экзаменов по актуарной математике, в начале учебного года решили организовать страховой фонд на следующих условиях:*

1) *каждый студент вносит одну и ту же сумму $S$;*

2) *если в течение учебного года студента отчисляют из университета, он получает из фонда 1000 рублей;*

3) *все успешно окончившие третий курс получают обратно свой взнос.*

*Предполагая, что*

1) *средства фонда будут приносить $i = 21\,\%$ годовых;*

2) *отчисление возможно только в конце семестра;*

3) *после зимней сессии отчисляют $q_1 = 10\%$ студентов, а после весенней — $q_2 = 11\%$ студентов,*

*определите размер индивидуального взноса $S$, соответствующий принципу эквивалентности обязательств фонда и каждого студента.*

**Решение**

Средние обязательства фонда по отношению к конкретному студенту, приведенные на начало учебного года, равны

$$a_B = 1000q_1(1+i)^{-1/2}+1000(1-q_1)q_2(1+i)^{-1}+S(1-q_1)(1-q_2)(1+i)^{-1}.$$

Обязательства студента заключаются в разовом платеже суммы $S$, и поэтому принцип эквивалентности обязательств означает, что

$$S = 1000q_1(1+i)^{-1/2}+1000(1-q_1)q_2(1+i)^{-1}+S(1-q_1)(1-q_2)(1+i)^{-1},$$

откуда

$$S = 1000\frac{q_1(1+i)^{1/2}+(1-q_1)q_2}{(1+i)-(1-q_1)(1-q_2)} \approx 511 \text{ руб.}$$

**Задача 4.9.** *Производственная компания решила заключить групповой договор пожизненного страхования своих сотрудников с разовой выплатой премии в момент заключения договора. Страховая сумма равна 1000 для каждого работника.*

*Премия, которую запросил страховщик за это покрытие, равна $P_0 = 449{,}35$ на одного застрахованного.*

*Однако страхователь может выделить на одного застрахованного только сумму $P = 400$. Поскольку сумма, которой располагает страхователь, недостаточна для оплаты договора на описанных выше условиях, страховщик предложил отложить покрытие на некоторый срок $m$ (т. е. обеспечить сотрудникам страхователя отсроченное страхование жизни) и за счет этого снизить премию.*

*Найдите значение $m$, предполагая, что страховщик рассчитывает премию так, чтобы с некоторой вероятностью $\alpha$, которая определяется политикой компании и является фиксированной величиной во всех актуарных расчетах, выполнить свои обязательства по этому портфелю без привлечения дополнительных средств. Кроме того, при актуарных расчетах страховщик использует техническую процентную ставку $i = e^{0,06} - 1$ и предполагает, что интенсивность смертности для всех застрахованных постоянна и равна $\mu = 0{,}04$.*

**Решение**

Примем страховую сумму в качестве единицы измерения денежных сумм. Тогда величина страхового возмещения, приведенная к моменту заключения договора, дается формулой

$$
{}_{m|}\overline{Z}_x = \begin{cases} v^{T_x}, & \text{если } T_x > m, \\ 0, & \text{если } T_x < m\ . \end{cases}
$$

Разовая нетто-премия по этому покрытию есть

$$
{}_{m|}\overline{A}_x = \mathsf{E}\left(v^{T_x}; T_x > m\right) = \int\limits_m^{+\infty} e^{-\delta t} \mu e^{-\mu t}\, dt = \frac{\mu}{\mu+\delta} e^{-(\mu+\delta)m}.
$$

Второй начальный момент величины страхового возмещения, приведенной к моменту заключения договора, равен

$$
\mathsf{E}\left({}_{m|}\overline{Z}_x\right)^2 = {}^{2}_{m|}\overline{A}_x = \frac{\mu}{\mu+2\delta} e^{-(\mu+2\delta)m}.
$$

Поэтому для дисперсии имеем:

$$
\mathsf{Var}\left({}_{m|}\overline{Z}_x\right) = \frac{\mu}{\mu+2\delta} e^{-(\mu+2\delta)m} - \frac{\mu^2}{(\mu+\delta)^2} e^{-2(\mu+\delta)m}.
$$

Теперь можно найти относительную страховую надбавку (ниже $N$ — число застрахованных по рассматриваемому групповому договору):

$$
\theta = x_\alpha \frac{\sqrt{\mathsf{Var}\, {}_{m|}\overline{Z}_x}}{{}_{m|}\overline{A}_x \sqrt{N}} = \frac{x_\alpha}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{(\mu+\delta)^2}{\mu(\mu+2\delta)} e^{\mu m} - 1}.
$$

Поэтому премия за одного застрахованного равна

$$
P = {}_{m|}\overline{A}_x \cdot (1+\theta) = \frac{\mu}{\mu+\delta} e^{-(\mu+\delta)m} \left( \frac{x_\alpha}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{(\mu+\delta)^2}{\mu(\mu+2\delta)} e^{\mu m} - 1} + 1 \right).
$$

Исходная ситуация (обычное пожизненное страхование) соответствует случаю $m = 0$, так что верно равенство:

$$
P_0 = \frac{\mu}{\mu+\delta} \left( \frac{x_\alpha}{\sqrt{N}} \frac{\delta}{\sqrt{\mu(\mu+2\delta)}} + 1 \right).
$$

Из этого уравнения можно найти величину $\dfrac{x_\alpha}{\sqrt{N}}$:

$$
\frac{x_\alpha}{\sqrt{N}} = \left( P_0 \frac{\mu+\delta}{\mu} - 1 \right) \frac{\sqrt{\mu(\mu+2\delta)}}{\delta} \approx 0{,}1645.
$$

Теперь приведенную выше формулу для $P$ можно рассматривать как уравнение с одной неизвестной $m$, откуда [1])

$$m \approx 1{,}23798 \approx 1 \text{ год } 3 \text{ месяца}.$$

**Задача 4.10.** *Для того, чтобы застраховать жизнь одного человека в возрасте $x = 30$, была организована специальная страховая компания с капиталом $u_0 = 10$. Премии платятся непрерывно со скоростью $c = 2$ на протяжении всей жизни человека, а страховое возмещение выплачивается немедленно после смерти. В случае смерти от «естественных» причин (условная вероятность 0,9) страховое возмещение равно 40, а в случае смерти от несчастного случая (условная вероятность 0,1) — 80. Известно, что $l_{30} = 96\,307$, $l_{45} = 92\,181$, $l_{65} = 78\,160$, а $i = 0\%$. Подсчитайте вероятность разорения компании.*

**Решение**

Активы страховщика к моменту смерти застрахованного будут равны $u = u_0 + c \cdot T_{30} = 10 + 2T_{30}$. Компания разорится, если размер страхового возмещения (обозначим его через $Y$) будет больше, чем $u$. Поэтому, обозначая через $\mathcal{R}$ событие «компания разорилась», по формуле полной вероятности имеем:

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(\mathcal{R}) &= \mathsf{P}\left(10 + 2T_{30} < Y\right) = \mathsf{P}\left(10 + 2T_{30} < Y | Y = 40\right) \times \\ &\times \mathsf{P}(Y = 40) + \mathsf{P}\left(10 + 2T_{30} < Y | Y = 80\right) \cdot \mathsf{P}(Y = 80) = \\ &= 0{,}9\mathsf{P}\left(T_{30} < 15\right) + 0{,}1\mathsf{P}\left(T_{30} < 35\right) = 0{,}9\frac{l_{30} - l_{45}}{l_{30}} + 0{,}1\frac{l_{30} - l_{65}}{l_{30}} = \\ &= \frac{l_{30} - 0{,}9l_{45} - 0{,}1l_{65}}{l_{30}} \approx 5{,}74\,\%.\end{aligned}$$

**Задача 4.11 ([22]).** *Договор страхования жизни на три года предполагает выплату страхового возмещения в конце последнего года жизни. Страховая сумма составляет 300 000 в случае смерти застрахованного в первый год действия договора, 350 000 в случае смерти застрахованного во второй год действия договора и 400 000 в случае смерти застрахованного в третий год действия договора. При актуарных расчетах компания использует техническую процентную ставку $i = 6\,\%$ и предполагает, что вероятность смерти застрахованного в $k$-й год действия договора, $q_{x+k}$, $k = 0, 1, 2$, дается формулой:*

$$q_{x+k} = 0{,}02 \cdot (k + 1).$$

*Чему равна актуарная современная стоимость обязательств страховщика по выплате страхового возмещения?*

[1]) Численно решить это уравнение очень удобно с помощью программы Microsoft Excel, используя команду Goal Seek (Подбор параметра).

**Решение**

Пусть $T_x$ — остаточное время жизни застрахованного, $K_x = [T_x]$ — округленное время жизни, $v = (1+i)^{-1}$ — коэффициент дисконтирования, $Z$ — приведенная (на момент заключения договора) стоимость страхового возмещения. По условию

$$Z = \begin{cases} 300\,000\,v, & \text{если } K_x = 0, \\ 350\,000\,v^2, & \text{если } K_x = 1, \\ 400\,000\,v^3, & \text{если } K_x = 2. \end{cases}$$

Поэтому

$$\mathsf{E}Z = 300\,000v\cdot\mathsf{P}(K_x = 0) + 350\,000v^2\cdot\mathsf{P}(K_x = 1) + 400\,000v^3\cdot\mathsf{P}(K_x = 2).$$

Но

$$\mathsf{P}(K_x = 0) = \mathsf{P}(T_x < 1) = q_x = 0{,}02,$$

$$\mathsf{P}(K_x = 1) = \mathsf{P}(1 < T_x < 2) = {}_{1|}q_x = p_x \cdot q_{x+1} = 0{,}98 \cdot 0{,}04 = 0{,}0392,$$

$$\mathsf{P}(K_x = 2) = \mathsf{P}(2 < T_x < 3) = {}_{2|}q_x = \\ = p_x \cdot p_{x+1} \cdot q_{x+2} = 0{,}98 \cdot 0{,}96 \cdot 0{,}06 = 0{,}056448.$$

Значит, $\mathsf{E}Z = 36\,829$.

**Задача 4.12 ([14]).** *Страховщик заключил большое число однотипных договоров страхования жизни на два года с выплатой 100 000 в конце года смерти. Одна треть застрахованных является курильщиками, а две трети — нет. Остаточное время жизни описывается законом*

$${}_tp_x = \exp\left(-\left(\frac{t}{\theta}\right)^2\right),$$

*где $\theta = 1{,}5$ для курильщиков и $\theta = 2$ для тех, кто не курит.*

*Компания решила назначить одну разовую премию для всех застрахованных. Определите эту премию, если $i = 5\%$ (нагрузка не учитывается).*

**Решение**

Разовая нетто-премия по рассматриваемому виду страхования есть

$$P = 100\,000A^1_{x:\overline{2|}} = 100\,000 \cdot (v \cdot \mathsf{P}(T_x < 1) + v^2 \cdot \mathsf{P}(1 < T_x < 2)).$$

Но

$$\mathsf{P}(T_x < 1) \equiv q_x = 1 - p_x \equiv 1 - {}_1p_x,$$

$$\mathsf{P}(1 < T_x < 2) = \mathsf{P}(T_x > 1) - \mathsf{P}(T_x > 2) \equiv {}_1p_x - {}_2p_x.$$

Для курильщиков:

$$\mathsf{P}(T_x < 1) = 0{,}35882, \quad \mathsf{P}(1 < T_x < 2) = 0{,}47217.$$

Для тех, кто не курит:

$$\mathsf{P}(T_x < 1) = 0{,}2212, \quad \mathsf{P}(1 < T_x < 2) = 0{,}41092.$$

Поэтому для курильщиков разовая нетто-премия есть $P' = 77\,000$, а для тех, кто не курит — $58\,338$. Усредняя эти премии с весами $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$ соответственно, мы получим $P = 64\,559$.

**Задача 4.13.** *Разовая нетто-премия по договору 20-летнего страхования жизни с человеком в возрасте 40 лет, в соответствии с которым в случае смерти в течение $k$-го года действия договора в конце этого года выплачивается страховая сумма $21 - k$, равна 13. Страховая компания использовала при расчетах техническую процентную ставку $i = 6\%$ и таблицу смертности с $q_{40} = 0{,}2$. Как изменится нетто-премия по этому договору, если $q_{40}$ уменьшится в 2 раза до величины $q^*_{40} = 0{,}1$?*

**Решение**

Исходная нетто-премия, $(DA)^1_{40:\overline{20}|}$, удовлетворяет соотношению:

$$(DA)^1_{40:\overline{20}|} = vq_{40} \cdot 20 + vp_{40} \cdot (DA)^1_{41:\overline{19}|}.$$

Поскольку величина $(DA)^1_{41:\overline{19}|}$ определяется только значениями $q_{41}, \ldots, q_{59}$, для новой нетто-премии верна формула

$$\begin{aligned}(DA^*)^1_{40:\overline{20}|} &= vq^*_{40} \cdot 20 + vp^*_{40} \cdot (DA)^1_{41:\overline{19}|} = \\ &= vq^*_{40} \cdot 20 + vp^*_{40} \frac{(DA)^1_{40:\overline{20}|} - vq_{40} \cdot 20}{vp_{40}} = \\ &= 20vq^*_{40} - 20vq_{40} \cdot \frac{p^*_{40}}{p_{40}} + \frac{p^*_{40}}{p_{40}} \cdot (DA)^1_{40:\overline{20}|} = \\ &= 20v\frac{q^*_{40} - q_{40}}{p_{40}} + \frac{p^*_{40}}{p_{40}} \cdot (DA)^1_{40:\overline{20}|} \approx 12{,}2665.\end{aligned}$$

# Глава 5
# ПОЖИЗНЕННЫЕ РЕНТЫ

## 1. Основные виды рент

*Полная пожизненная рента* (*whole life annuity*)

Простейшая пожизненная рента может быть описана следующим образом. Начиная с некоторого момента $t_0 = 0$ человек раз в год начинает получать определенную сумму (которую обычно принимают в качестве условной денежной единицы). Выплаты производятся только во время жизни человека.

Этот денежный поток изображен на рис. 5.1.

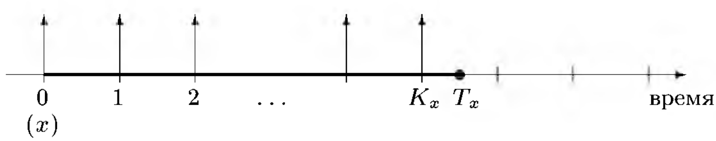


Рис. 5.1

Рента может рассматриваться как регулярный доход для получателя ренты (обычно в старости). С другой стороны, периодические премии, выплачиваемые страхователем по обычному договору страхования жизни, можно рассматривать как ренту, получаемую страховой компанией. Поэтому теория рент важна не только для расчета пенсионных схем, но и для расчета периодических премий.

*Временная пожизненная рента*

Пусть, как и ранее, $t_0 = 0$ — настоящий момент, а возраст человека, которому выплачивается рента — $x$ лет. *$N$-летняя временная пожизненная рента* ($n$-year temporary life annuity) определяется как серия выплат единичной суммы, производимых раз в год пожизненно, начиная с момента $t_0 = 0$, но не более, чем $n$ лет. Таким образом, если человек проживет еще $n$ лет (т. е. если $T_x > n$), то производится ровно $n$ выплат с упреждением; если же $T_x < n$, то производится $K_x + 1$ выплат. Эти два сценария условно изображены на рис. 5.2.

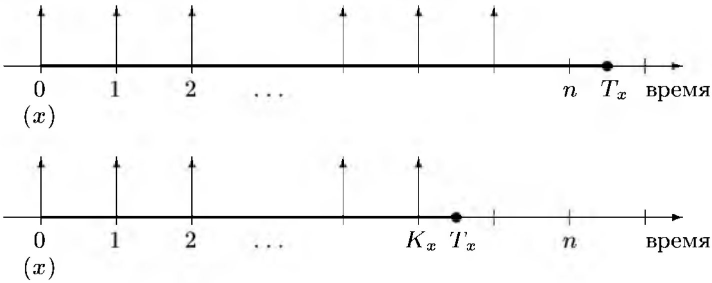


Рис. 5.2

*Отсроченная пожизненная рента*

Пусть, как и ранее, $t_0 = 0$ — настоящий момент, а возраст человека, которому выплачивается рента — $x$ лет. *Отсроченная на $m$ лет пожизненная рента* (deferred life annuity) определяется как серия выплат единичной суммы, производимых раз в год, начиная с момента $t_0 + m = m$, до тех пор, пока человек жив. Однако если человек умрет до момента $m$, то ни одной выплаты не производится.

Эти два сценария условно изображены на рис. 5.3.

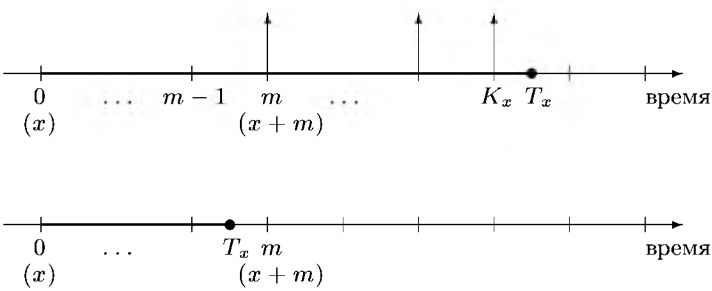


Рис. 5.3

*Пожизненные ренты выплачиваемые с частотой $p$*

В рассмотренных выше примерах предполагалась, что выплаты производятся один раз в год (в начале года). Для приложений к пенсионным схемам гораздо интереснее случай, когда выплаты производятся раз в месяц ($p = 12$), раз в квартал ($p = 4$), раз в неделю ($p = 52$).

В стандартных рентах такого рода в качестве условной денежной единицы рассматривается алгебраическая сумма всех выплат в течение года. Иначе говоря, каждая отдельная выплата имеет величину $1/p$.

*Непрерывные ренты*

Непрерывные ренты можно рассматривать как предельный случай рент, выплачиваемых с частотой $p$ при $p \to +\infty$. Их можно представлять как непрерывный денежный поток (скажем, непрерывную тонкую струю золота), текущий со скоростью 1.

## 2. Оценивание рент

*Метод суммарной выплаты*

Стоимость ренты в начальный момент времени $t_0 = 0$ обозначают символом $Y$ с соответсвующими индексами. Ее можно подсчитать двумя основными способами. При использовании метода суммарной выплаты (aggregate payment technique) пожизненная рента рассматривается как обычная рента, но со случайным числом выплат. Это позволяет получить явную формулу для современной стоимости ренты с помощью формул для детерминированных рент и связать ее с современной стоимостью соответствующего вида страхования. Например,

для пожизненной ренты

$$\ddot{Y}_x = \ddot{a}_{\overline{K_x+1}|} = \frac{1 - v^{K_x+1}}{d} = \frac{1 - Z_x}{d}.$$

для временной пожизненной ренты

$$\ddot{Y}_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{n}|}, & \text{если } T_x > n \\ \ddot{a}_{\overline{K_x+1}|}, & \text{если } T_x < n \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1 - v^n}{d}, & \text{если } T_x > n, \\[2ex] \dfrac{1 - v^{K_x+1}}{d}, & \text{если } T_x < n, \end{cases} = \frac{1 - Z_{x:\overline{n}|}}{d}.$$

для отложенной пожизненной ренты

$${}_{m|}\ddot{Y}_x = \begin{cases} {}_{m|}\ddot{a}_{\overline{K_x+1}|}, & \text{если } T_x > m \\ 0, & \text{если } T_x < m \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{v^m - v^{K_x+1}}{d}, & \text{если } T_x > m, \\ 0, & \text{если } T_x < m, \end{cases} = \frac{Z_{x:\overset{1}{\overline{m}|}} - {}_{m|}Z_x}{d}.$$

Актуарная современная стоимость ренты — это просто математическое ожидание (случайной) современной стоимости. Она обозначается символом $a$ с соответствующими индексами. Поэтому метод суммарного платежа немедленно дает следующие формулы для актуарных современных стоимостей базовых рент:

для пожизненной ренты

$$\ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{d},$$

для временной пожизненной ренты

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d},$$

для отложенной пожизненной ренты

$$_{m|}\ddot{a}_x = \frac{A_{x:\overline{m}|}^{\ \ 1} - {}_{m|}A_x}{d} = \frac{A_{x:\overline{m}|} - A_x}{d}.$$

*Метод текущего платежа*

В отличие от метода суммарной выплаты, который рассматривает пожизненную ренту как сумму случайного числа детерминированных слагаемых, метод текущей выплаты (current payment technique) рассматривает пожизненную ренту как сумму детерминированного (возможно, бесконечного) числа случайных слагаемых.

Например, для пожизненной ренты это означает следующее. В принципе выплаты возможны в любой момент времени $k = 0, 1, \ldots$ Выплата в момент $k$ производится, если человек еще жив, т. е. если $T_x > k$. Поэтому величина выплаты в момент $k$ — это индикатор события $\{T_x > k\}$. Соответственно приведенная ценность этой выплаты в момент $t_0 = 0$ — это случайная величина $v^k I\{T_x > k\}$ и, значит,

$$\ddot{Y}_x = \sum_{k=0}^{+\infty} v^k \cdot I\{T_x > k\}.$$

Поэтому для среднего значения имеем:

$$\ddot{a}_x \equiv \ddot{Y}_x = \sum_{k=0}^{+\infty} v^k \cdot \mathsf{P}(T_x > k) = \frac{1}{v^x l_x} \sum_{k=x}^{+\infty} v^k l_k.$$

Для временной пожизненной ренты соответствующая формула выглядит следующим образом:

$$\ddot{Y}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot I(T_x > k)$$

и, значит,

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} \equiv \mathsf{E}\ddot{Y}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \mathsf{P}(T_x > k) = \frac{1}{v^x l_x} \sum_{k=x}^{x+n-1} v^k l_k.$$

Для отложенной на $m$ лет пожизненной ренты соответствующая формула выглядит следующим образом:

$$_{m|}\ddot{Y}_x = \sum_{k=m}^{+\infty} v^k \cdot I(T_x > k)$$

и, значит,

$$_{m|}\ddot{a}_x \equiv \mathsf{E}_{m|}\ddot{Y}_x = \sum_{k=m}^{+\infty} v^k \mathsf{P}(T_x > k) = \frac{1}{v^x l_x} \sum_{k=x+m}^{+\infty} v^k l_k.$$

## 3. Актуарное накопление

Рассмотрим пенсионный фонд, в который $N$ человек в возрасте $x$ лет каждый внесли по единичной сумме в момент $t_0 = 0$. К моменту $t$ эта сумма вырастет до $N \cdot (1+i)^t$. Одновременно сократится и число участников фонда — в живых останется в среднем $N \cdot \mathsf{P}(T_x > t) = N \times \times l_{x+t}/l_x$ человек. Если на средства фонда могут претендовать только живые участники фонда, то на каждого из них будет приходиться сумма

$$A(x;t) = \frac{l_x}{l_{x+t}} \cdot (1+i)^t.$$

Это *актуарное накопление* больше, чем обычное накопление $(1+i)^t$ в теории сложных процентов, так как пенсионный счет участника растет не только за счет доходов от процентов, но и за счет средств умерших участников фонда.

*Актуарный коэффициент дисконтирования* ${}_t\mathsf{E}_x$ — это средняя сумма, которую нужно иметь в момент $t_0 = 0$ человеку в возрасте $x$, чтобы в момент $t$ получить, *если он еще жив*, единичную сумму:

$${}_t\mathsf{E}_x = v^t \cdot \mathsf{P}(T_x > t) = v^t \cdot \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{1}{A(x;t)}.$$

Используя понятие актуарного дисконтирования, можно записать новые версии формул для введенных выше актуарных стоимостей рент:

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} {}_k\mathsf{E}_x, \quad \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_k\mathsf{E}_x, \quad {}_{m|}\ddot{a}_x = \sum_{k=m}^{\infty} {}_k\mathsf{E}_x = {}_m\mathsf{E}_x \cdot \ddot{a}_{x+m}.$$

## 4. Задачи и решения

**Задача 5.1 ([5]).** *Известно, что*

$$l_{30} = 96\,307, \quad l_{31} = 96\,117, \quad l_{32} = 95\,918.$$

*Подсчитайте актуарную современную стоимость 3-х летней временной пожизненной ренты, выплачиваемой раз в год в начале года в размере 10 000 рублей. Возраст человека на момент заключения договора — 30 лет. Эффективная годовая процентная ставка $i = 25\,\%$.*

**Решение**

Искомая величина равна $10\,000 \cdot \ddot{a}_{30:\overline{3}|}$, где, в свою очередь,

$$\ddot{a}_{30:\overline{3}|} = \frac{1}{l_{30}} \cdot (l_{30} + vl_{31} + v^2 l_{32}) =$$
$$= \frac{96\,307 + 0{,}8 \cdot 96\,117 + 0{,}64 \cdot 95\,918}{96\,307} \approx 2{,}4358,$$

так что актуарная современная стоимость рассматриваемой ренты равна 24 358 руб.

**Задача 5.2 ([5]).** *Предположим, что время жизни описывается моделью де Муавра с предельным возрастом $\omega = 100$ лет, а эффективная годовая процентная ставка $i = 10\,\%$. Подсчитайте актуарную современную стоимость полной пожизненной ренты, которая будет выплачиваться ежемесячно человеку в возрасте $x = 45$ лет в размере 1000 руб. в месяц.*

**Решение**

Искомая величина равна

$$12\,000 \cdot \ddot{a}_{45}^{(12)}.$$

В предположении о равномерном распределении смертей для дробных возрастов, современная стоимость пожизненной ренты, выплачиваемой раз в год, может быть подсчитана по формуле:

$$\ddot{a}_{45}^{(12)} = \alpha(12) \cdot \ddot{a}_{45} - \beta(12),$$

где

$$\alpha(12) = \frac{id}{i^{(12)} d^{(12)}} \approx 1{,}000752, \quad \beta(12) = \frac{i - i^{(12)}}{i^{(12)} d^{(12)}} \approx 0{,}4744916.$$

Для модели де Муавра

$$l_x = l_0 \cdot s(x) = l_0 \cdot (1 - x/\omega).$$

Поэтому

$$\ddot{a}_x = \frac{1}{v^x(\omega - x)} \sum_{n=x}^{\omega-1} v^n(\omega - n).$$

Поскольку

$$\sum_{n=x}^{\omega-1} v^n = \frac{v^x - v^\omega}{1-v},$$

$$\sum_{n=x}^{\omega-1} nv^{n-1} = \left(\frac{v^x - v^\omega}{1-v}\right)' = \frac{(xv^{x-1} - \omega v^{\omega-1})(1-v) + v^x - v^\omega}{(1-v)^2},$$

мы имеем:

$$\ddot{a}_x = \frac{1}{v^x(\omega - x)} \cdot \left[\omega\frac{v^x - v^\omega}{1-v} - \frac{(xv^x - \omega v^\omega)(1-v) + v(v^x - v^\omega)}{(1-v)^2}\right] =$$
$$= \frac{1}{v^x(\omega - x)} \cdot \left[\frac{(\omega - x)v^x}{1-v} - \frac{v}{(1-v)^2}(v^x - v^\omega)\right] =$$
$$= \frac{1}{1-v} - \frac{v}{(\omega - x)(1-v)^2} \cdot (1 - v^{\omega - x}),$$

так что

$$\ddot{a}_{45} \approx 9{,}01$$

и, значит,

$$12\,000 \cdot a_{45}^{(12)} \approx 102\,514 \text{ руб.}$$

**Задача 5.3.** *После страхового случая, который привел к вре́менной нетрудоспособности застрахованного, страховая компания должна выплачивать застрахованному пособие в размере $B$ в год. Предполагая, что выплаты происходят непрерывно, а время до выздоровления имеет гамма-распределение со средним $M$ и дисперсией $V$, подсчитайте актуарную приведенную стоимость обязательств страховщика на момент начала выплат.*

## Решение

Пусть $T$ — период нетрудоспособности; плотность этой случайной величины есть

$$f(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}, \quad t > 0,$$

где

$$M = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad V = \frac{\alpha}{\lambda^2},$$

так что

$$\lambda = \frac{M}{V}, \quad \alpha = \frac{M^2}{V}.$$

Тогда искомая актуарная приведенная стоимость есть

$$\mathsf{E}\bar{a}_{\overline{T|}} = \mathsf{E}\frac{1-e^{-\delta T}}{\delta} = \frac{1-\mathsf{E}e^{-\delta T}}{\delta}.$$

Величина $\mathsf{E}e^{-\delta T}$ — это преобразование Лапласа случайной величины $T$. Как известно

$$\mathsf{E}e^{-\delta T} = \left(\frac{\lambda}{\delta+\lambda}\right)^{\alpha},$$

что в терминах параметров $M$ и $V$ дает следующий результат:

$$\mathsf{E}e^{-\delta T} = \left(\frac{M}{M+\delta V}\right)^{M^2/V}.$$

Итак, искомая величина равна

$$\frac{1-\left(\dfrac{M}{M+\delta V}\right)^{M^2/V}}{\delta}.$$

**Задача 5.4 ([14]).** *Страховая компания приняла на себя обязательство выплачивать ежегодно 150 000 рабочему в возрасте $x$ лет, который получил производственную травму.*

*Выплаты начинаются немедленно и производятся раз в год до тех пор, пока работник жив. После того, как страховщик выплатит 500 000, оставшиеся платежи производит перестраховочная компания. Относительно смертности рабочего после получения травмы известно, что*

$$_tp_x = \begin{cases} (0{,}7)^t, & \text{если } 0 < t < 5{,}5, \\ 0, & \text{если } t > 5{,}5. \end{cases}$$

*Найдите актуарную современную стоимость обязательств перестраховочной компании, если $i = 5\%$.*

## Решение

Воспользуемся методом текущего платежа.

Перестраховщик должен выплатить:

1) 100 000 в момент $t = 3$, если рабочий доживет до этого момента (вероятность этого события $_3p_x$);
2) 150 000 в момент $t = 4$, если рабочий доживет до этого момента (вероятность этого события $_4p_x$);
3) 150 000 в момент $t = 5$, если рабочий доживет до этого момента (вероятность этого события $_5p_x$).

Поскольку по условию задачи рабочий проживет не более 5,5 лет, больше ничего перестраховщику платить не придется.

Поэтому актуарная современная стоимость обязательств перестраховщика есть

$$100\,000 \cdot {}_3p_x v^3 + 150\,000 \cdot {}_4p_x v^4 + 150\,000 \cdot {}_5p_x v^5 \approx 79\,012.$$

**Задача 5.5 ([14]).** *Страховая компания устанавливает плату за пожизненную упреждающую ренту, исходя из технической процентной ставки $i = 0{,}05$ и таблицы смертности 5.1.*

*Таблица 5.1*

| $x$ | *40* | *41* | ... |
|---|---|---|---|
| $q_x$ | *1 %* | *5 %* | ... |

*Известно, что $\ddot{a}_{41} = 6{,}951$. Найдите $\ddot{a}_{40}$.*

*Как изменится $\ddot{a}_{40}$, если $q_{41}$ уменьшится на 60 %?*

**Решение**

Поскольку $\ddot{a}_x = 1 + vp_x\ddot{a}_{x+1}$, то

$$\ddot{a}_{40} = 1 + \frac{1}{1{,}05} \cdot 0{,}99 \cdot 6{,}951 \approx 7{,}5538.$$

Кроме того,

$$\ddot{a}_{42} = \frac{\ddot{a}_{41} - 1}{p_{41}} \cdot (1 + i) = \frac{5{,}951}{0{,}95} \cdot 1{,}05 \approx 6{,}5774.$$

Поскольку $q_{41} = 5\,\%$, уменьшение на 60 % означает, что $q_{41}$ станет равным 2 %, а $p_{41}$ — 98 %:

$$q^*{}_{41} = 2\,\%, \quad p^*{}_{41} = 98\,\%.$$

Величина $\ddot{a}_{42}$ зависит от $p_{42}, p_{43}, \ldots$ и поэтому не изменится при уменьшении $q_{41}$.

Для новых значений $\ddot{a}_{41}, \ddot{a}_{40}$ мы имеем :

$$\ddot{a}^*_{41} = 1 + vp^*{}_{41}\ddot{a}_{42} = 1 + \frac{1}{1{,}05} \cdot 0{,}98 \cdot 6{,}5774 = 7{,}1389,$$
$$\ddot{a}^*_{40} = 1 + vp_{40}\ddot{a}^*_{41} = 7{,}731.$$

Таким образом, $\ddot{a}_{40}$ увеличится примерно на 2,3 %, или, в абсолютных цифрах, примерно на 0,177.

**Задача 5.6 ([14]).** *Известно, что $\mu_t \equiv 0{,}06$ для $t > x$, а $i = 4\%$. Подсчитайте вероятность того, что $\overline{a}_{\overline{T_x|}} > \overline{a}_x$.*

**Решение**

Интенсивность смертности $\mu_x(t)$ для остаточного времени жизни $T_x$ равна $\mu_{x+t}$. Поэтому $T_x$ имеет экспоненциальное распределение с параметром $\mu = 0{,}06$: $\mathsf{P}(T_x > t) = e^{-\mu t}$. Соответственно преобразование Лапласа случайной величины $T_x$ есть $\mathsf{E}e^{-\delta T_x} = \dfrac{0{,}06}{0{,}06+\delta}$.

Поскольку $\overline{a}_{\overline{t}|} = \dfrac{1-v^t}{\delta}$,

$$\overline{a}_x \equiv \mathsf{E}\overline{a}_{\overline{T_x}|} = \frac{1-\mathsf{E}e^{-\delta T_x}}{\delta} = \frac{1-\dfrac{0{,}06}{0{,}06+\delta}}{\delta} = \frac{1}{0{,}06+\delta} \approx 10{,}0785.$$

Поэтому искомая вероятность $\mathcal{P} \equiv \mathsf{P}\left(\overline{a}_{\overline{T_x}|} > \overline{a}_x\right)$ равна:

$$\mathcal{P} = \mathsf{P}\left(\frac{1-v^{T_x}}{\delta} > \frac{1}{0{,}06+\delta}\right) = \mathsf{P}\left(1-e^{-\delta T_x} > \frac{\delta}{0{,}06+\delta}\right) =$$
$$= \mathsf{P}\left(e^{-\delta T_x} < \frac{0{,}06}{0{,}06+\delta}\right) = \mathsf{P}\left(-\delta T_x < \ln\frac{0{,}06}{0{,}06+\delta}\right) =$$
$$= \mathsf{P}\left(T_x > -\frac{1}{\delta}\ln\frac{0{,}06}{0{,}06+\delta}\right) = \exp\left(\frac{\mu}{\delta}\ln\frac{\mu}{\mu+\delta}\right) =$$
$$= \left(\frac{\mu}{\mu+\delta}\right)^{\mu/\delta} = \left(\frac{\mu+\delta}{\mu}\right)^{-\mu/\delta} = \left(1+\frac{\delta}{\mu}\right)^{-\mu/\delta} \approx 0{,}4632.$$

**Задача 5.7 ([26]).** *Подсчитайте актуарную современную стоимость непрерывной пожизненной ренты, выплачиваемой со скоростью 1 человеку, возраст которого в момент заключения договора равен $x$, если $\delta = 0{,}06$, а*

$$\mu_x(t) = \begin{cases} 0{,}01, & \text{если } 0 \leqslant t < 5, \\ 0{,}02, & \text{если } t \geqslant 5. \end{cases}$$

**Решение**

Прежде всего найдем распределение остаточного времени жизни $T_x$:

$$\mathsf{P}(T_x > t) = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \exp\left\{-\int_0^t \mu_{x+u}\,du\right\} = \exp\left\{-\int_0^t \mu_x(u)\,du\right\} =$$
$$= \begin{cases} e^{-0{,}01t}, & \text{если } 0 \leqslant t < 5, \\ e^{-0{,}02t+0{,}05}, & \text{если } t \geqslant 5. \end{cases}$$

Теперь для искомой величины $\overline{a}_x$ имеем:

$$\overline{a}_x = \int\limits_0^{+\infty} v^t \mathsf{P}(T_x > t)\,dt = \int\limits_0^5 e^{-0{,}06t} e^{-0{,}01t}\,dt +$$

$$+ e^{0{,}05} \int\limits_5^{+\infty} e^{-0{,}06t} e^{-0{,}02t}\,dt = \frac{1-e^{-0{,}35}}{0{,}07} + e^{0{,}05}\frac{e^{-0{,}4}}{0{,}08} \approx 13{,}027.$$

**Задача 5.8.** *Пусть $\overline{Y}_x$ — современная стоимость непрерывной пожизненной ренты, которая начинает выплачиваться со скоростью 1 застрахованному, возраст которого равен $x$ лет.*

*Предполагая, что $\mu_{x+t} \equiv \mu$ для $t \geqslant 0$, а техническая процентная ставка $i$, используемая при дисконтировании денежных потоков, дается формулой $i = e^{k\mu} - 1$ для некоторой константы $k$, найдите коэффициент вариации $c = \dfrac{\sqrt{\mathsf{Var}\overline{Y}_x}}{\mathsf{E}\overline{Y}_x}$ случайной величины $\overline{Y}_x$.*

**Решение**

Поскольку

$$\overline{Y}_x = \overline{a}_{\overline{T_x|}} = \int\limits_0^{T_x} e^{-\delta u}\,du = \frac{1-e^{-\delta T_x}}{\delta},$$

для актуарной современной стоимости ренты имеем:

$$\overline{a}_x \equiv \mathsf{E}\overline{Y}_x = \frac{1-\mathsf{E}e^{-\delta T_x}}{\delta}.$$

Величину $\mathsf{E}e^{-\delta T_x}$ можно рассматривать как преобразование Лапласа случайной величины $T_x$ в точке $\delta$. Поскольку $\mu_x(t) = \mu_{x+t} \equiv \mu$, $T_x$ имеет экспоненциальное распределение с параметром $\mu$. Значит,

$$\mathsf{E}e^{-\delta T_x} = \frac{\mu}{\mu+\delta}.$$

Соответственно,

$$\overline{a}_x = \frac{1}{\mu+\delta}.$$

Для дисперсии случайной величины $\overline{Y}_x$ имеем:

$$\mathsf{Var}\,\overline{Y}_x = \frac{1}{\delta^2}\mathsf{Var}\,e^{-\delta T_x} = \frac{1}{\delta^2}\left(\mathsf{E}e^{-2\delta T_x} - \left(\mathsf{E}e^{-\delta T_x}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{\delta^2}\left(\frac{\mu}{\mu+2\delta} - \left(\frac{\mu}{\mu+\delta}\right)^2\right) = \frac{\mu}{(\mu+2\delta)(\mu+\delta)^2}.$$

Теперь можно подсчитать искомый коэффициент вариации:

$$c \equiv \frac{\sqrt{\mathsf{Var}\,\overline{Y}_x}}{\mathsf{E}\overline{Y}_x} = \sqrt{\frac{\mu}{\mu+2\delta}}.$$

Условие $i = e^{k\mu} - 1$ означает, что $\delta \equiv \ln(1+i) = k\mu$. Значит,

$$c = \sqrt{\frac{\mu}{\mu + 2k\mu}} = \sqrt{\frac{1}{1+2k}}.$$

**Задача 5.9.** *Продолжительность жизни, тех кто не курит, имеет экспоненциальное распределение со средним 33 года и 4 месяца; интенсивность смертности для курильщиков вдвое выше, чем интенсивность смертности для тех, кто не курит. Предполагая, что техническая процентная ставка $i = e^{0,04} - 1$, найдите коэффициент вариации величины $\overline{Y}_x = \overline{a}_{\overline{T_x|}}$ для случайно выбранного представителя группы.*

**Решение**

Случайная величина $\overline{Y}_x$, которая является актуарной современной стоимостью стандартной непрерывной ренты, дается формулой:

$$\overline{Y}_x = \frac{1 - e^{-\delta T_x}}{\delta}.$$

Поэтому,

$$\mathsf{E}\overline{Y}_x = \frac{1}{\delta}\left(1 - \mathsf{E}e^{-\delta T_x}\right),$$

$$\mathsf{Var}\,\overline{Y}_x = \frac{1}{\delta^2}\mathsf{Var}\left(e^{-\delta T_x}\right) = \frac{1}{\delta^2}\left(\mathsf{E}\left(e^{-2\delta T_x}\right) - \left(\mathsf{E}e^{-\delta T_x}\right)^2\right).$$

В предположениях задачи интенсивность смертности для тех, кто не курит (курильщиков) постоянна и равна $\mu' = \dfrac{1}{33\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{100}$ $\left(\text{соответственно, } \mu'' = 2\mu' = \dfrac{6}{100}\right)$.

Пусть $T'(T'')$ — остаточное время жизни человека, который не курит (курит). Поскольку эти случайные величины имеют экспоненциальное распределение, их преобразования Лапласа имеют вид:

$$\mathsf{E}e^{-sT'} = \frac{\mu'}{s+\mu'} = \frac{3}{100s+3},$$

$$\mathsf{E}e^{-sT''} = \frac{\mu''}{s+\mu''} = \frac{6}{100s+6}.$$

Поэтому для случайно выбранного представителя группы

$$\mathsf{E}e^{-sT_x} = p' \cdot \mathsf{E}e^{-sT'} + p'' \cdot \mathsf{E}e^{-sT''} = \frac{2,1}{100s+3} + \frac{1,8}{100s+6},$$

и, значит,

$$\mathsf{E}e^{-\delta T_x} = \mathsf{E}e^{-0{,}04T_x} = \frac{2{,}1}{7} + \frac{1{,}8}{10} = 0{,}48,$$

$$\mathsf{E}e^{-2\delta T_x} = \mathsf{E}e^{-0{,}08T_x} = \frac{2{,}1}{11} + \frac{1{,}8}{14} \approx 0{,}3195.$$

Теперь можно подсчитать $\mathsf{E}\overline{Y}_x$ и $\mathsf{Var}\,\overline{Y}_x$:

$$\mathsf{E}\overline{Y}_x = \frac{1}{0{,}04}(1 - 0{,}48) = 13, \quad \mathsf{Var}\,\overline{Y}_x \approx 55{,}675.$$

Значит, искомый коэффициент вариации равен

$$c_{\overline{Y}_x} \equiv \frac{\sqrt{\mathsf{Var}\,\overline{Y}_x}}{\mathsf{E}\overline{Y}_x} \approx 0{,}574.$$

**Задача 5.10 ([18]).** *Человек в возрасте $x = 40$ лет выиграл $B = 10\,000$ в актуарную лотерею. Победитель может вместо немедленной выплаты этой суммы получать пожизненно в каждую годовщину лотереи постоянную сумму $S$ с гарантированной выплатой этой суммы на протяжении 10 лет. Размер ежегодного платежа $S$ определяется как актуарный эквивалент исходного выигрыша $B$. Найдите $S$, если*

1) $i = 0{,}04$;
2) $A_{40} = 0{,}30$;
3) $A_{50} = 0{,}35$;
4) $A^{\,1}_{40:\overline{10}|} = 0{,}09$.

**Решение**

Если победитель лотереи пожелал получать ренту, обязательства устроителей лотереи заключаются

- в выплате 10-летней детерминированной упреждающей ренты,
- в выплате пожизненной ренты, отсроченной на 10 лет.

Поэтому принцип эквивалентности означает, что

$$B = S \cdot \left(\ddot{a}_{\overline{10}|} + {}_{10|}\ddot{a}_{\overline{40}|}\right).$$

Для современной стоимости 10-летней упреждающей детерминированной ренты, $\ddot{a}_{\overline{10}|}$, мы имеем:

$$\ddot{a}_{\overline{10}|} = \frac{1 - v^{10}}{d} \approx 8{,}4353.$$

Для современной актуарной стоимости отсроченной пожизненной ренты, ${}_{10|}\ddot{a}_{\overline{40}|}$, мы имеем:

$${}_{10|}\ddot{a}_{\overline{40}|} = {}_{10}\mathsf{E}_{40} \cdot \ddot{a}_{50}.$$

Величина $\ddot{a}_{50}$ может быть выражена через $A_{50}$:

$$\ddot{a}_{50} = \frac{1 - A_{50}}{d}.$$

Для того, чтобы найти актуарный коэффициент дисконтирования ${}_{10}\mathsf{E}_{40}$, используем следующее равенство:

$$A_{40} = A^{1}_{40:\overline{10}|} + {}_{10}\mathsf{E}_{40} \cdot A_{50}.$$

Отсюда:

$${}_{10}\mathsf{E}_{40} = \frac{A_{40} - A^{1}_{40:\overline{10}|}}{A_{50}}.$$

Следовательно,

$${}_{10|}\ddot{a}_{40} = \frac{(A_{40} - A^{1}_{40:\overline{10}|})(1 - A_{50})}{d \cdot A_{50}} \approx 10{,}14.$$

Теперь для искомой суммы $S$ мы имеем:

$$S = \frac{B}{\ddot{a}_{\overline{10}|} + {}_{10|}\ddot{a}_{40}} \approx 538{,}35.$$

**Задача 5.11 ([22]).** *Для того, чтобы оплатить выигрыши текущего года в лотерею, создается специальный фонд. Вы знаете, что*

1) *общее число победителей — 100; возраст всех — 40 лет,*
2) *каждый победитель получает пожизненно раз в год по сумме 10,*
3) *времена жизни победителей — независимые случайные величины,*
4) *размер фонда определяется с использованием нормального приближения таким образом, чтобы с вероятностью 95% можно было бы осуществить все платежи,*
5) $i = 0{,}06$, $A_{40} = 0{,}1613242$, ${}^2A_{40} = 0{,}0486332$.

*Подсчитайте первоначальный размер фонда.*

**Решение**

По отношению к одному победителю обязательства фонда заключаются в выплате пожизненной упреждающей ренты. Современная стоимость этих обязательств есть:

$$Y = 10 \cdot \ddot{Y}_{40} = 10 \cdot \ddot{a}_{\overline{K_{40}+1}|} = 10 \cdot \frac{1 - v^{K_{40}+1}}{d}.$$

Первые два момента случайной величины $Y$ равны:

$$\mathsf{E}Y \equiv 10 \cdot \ddot{a}_{40} = 10 \cdot \frac{1 - \mathsf{E}v^{K_{40}+1}}{d} = 10 \cdot \frac{1 - A_{40}}{d} = 148{,}166,$$

$$\mathsf{Var}\, Y = \frac{100}{d^2} \cdot \mathsf{Var}\left(v^{K_{40}+1}\right) = \frac{100}{d^2} \cdot \left({}^2\!A_{40} - A_{40}^2\right) = 705{,}55.$$

Для двух первых моментов суммарных обязательств фонда (в силу независимости времен жизни) верны равенства:

$$\mathsf{E} S = 100 \cdot \mathsf{E} Y = 14\,816{,}6, \quad \mathsf{Var}\, S = 100 \cdot \mathsf{Var}\, Y = 70\,555.$$

Если $u$ — искомый размер фонда, то по условию

$$\mathsf{P}(S < u) = 95\,\%.$$

Для центрированной и нормированной величины обязательств:

$$\mathsf{P}\left(\frac{S - \mathsf{E} S}{\sqrt{\mathsf{Var}\, S}} < \frac{u - \mathsf{E} S}{\sqrt{\mathsf{Var}\, S}}\right) = 95\,\%.$$

Используя нормальное приближение, мы имеем:

$$\Phi\left(\frac{u - \mathsf{E} S}{\sqrt{\mathsf{Var}\, S}}\right) \approx 95\,\%,$$

т. е.

$$\frac{u - \mathsf{E} S}{\sqrt{\mathsf{Var}\, S}} \approx x_{95\,\%},$$

откуда

$$u \approx \mathsf{E} S + x_{95\,\%} \cdot \sqrt{\mathsf{Var}\, S} \approx 15\,254.$$

# Глава 6
# ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПРЕМИИ

## 1. Периодические нетто-премии

До сих пор мы предполагали, что покупка страховки или пожизненной пенсии производится в виде одиночной премии в момент заключения договора. Однако обычно премия выплачивается в виде серии платежей в течение некоторого оговоренного срока.

Как и в простейших случаях, обсуждавшихся ранее, полная периодическая премия складывается из нескольких частей. Важнейшая составная часть премии — это нетто-премия, которая определяется из принципа эквивалентности финансовых обязательств страховой компании (пенсионного фонда) и страхователя (участника фонда).

Если символ $A$ (или $a$, в случае пожизненных рент), возможно с некоторыми индексами, используется для обозначения разовой нетто-премии, то символ $P(A)$ используется для обозначения периодической нетто-премии, вносимой все время действия договора. Кроме того, буква $P$ может снабжаться своими индексами, которые характеризуют процесс поступления премий. Например, если премии вносятся с частотой $m$, то вверху справа ставится индекс $(m)$; если премии платятся непрерывно, то над буквой $P$ ставится черта и т. д. Если, кроме того, период платежей ограничен сроком $t$, то соответствующая периодическая премия обозначается ${}_tP(A)$. Для дискретных видов страхования часто букву $A$ опускают и используют только символ $P$, но со всеми индексами, которые были у символа $A$.

В общем виде схема расчета нетто-премий может быть представлена следующим образом.

Пусть $p^{(n)}$ — искомая нетто-премия.

Определим современную актуарную стоимость финансовых обязательств страхователя $a_C$. Эта величина, очевидно, является функцией от искомой премии $p^{(n)}$: $a_C = a_C(p^{(n)})$.

Затем подсчитаем современную актуарную стоимость финансовых обязательств компании $a_B$.

Величина $a_B$, вообще говоря, также зависит от искомой премии $p^{(n)}$: $a_B = a_B(p^{(n)})$.

Принцип эквивалентности финансовых обязательств страховой компании (пенсионного фонда) и страхователя (участника фонда) означает, что

$$a_B(p^{(n)}) = a_C(p^{(n)}).$$

Корень этого уравнения и является искомой нетто-премией.

Для регулярных видов страховок и пожизненных пенсий величина периодических премий определяется в терминах соответствующих пожизненных рент.

## 2. Премии, учитывающие расходы

Заключение и поддержание договоров страхования и договоров пенсионного обеспечения связаны с определенными расходами: комиссионные агентам, за подготовку документации, уплата налогов, анализ страховых случаев перед выплатой страховых возмещений, оплата судебных издержек в спорных случаях и т. д. Некоторые из этих расходов фиксированы (например, оформление документации), некоторые составляют определенный процент от величины премии (например, комиссионные агентам или налоги), некоторые составляют определенный процент от величины страхового возмещения (например, судебные издержки в спорных случаях). Кроме того, часть расходов связана только с моментом заключения договора, а часть появляется периодически при получении очередных премий. Некоторые расходы возникают только при наступлении страховых случаев.

Все эти расходы оплачиваются страхователями за счет определенного увеличения нетто-премий. Очень важно, чтобы это увеличение не было произвольным, а рассчитывалось надлежащим образом. Слишком большое увеличение премий ущемляет интересы страхователей и неприемлемо с точки зрения общества; слишком малые надбавки к премии могут вызвать финансовые проблемы у компании (что также не в интересах ее клиентов).

Расходы на ведение дела можно рассматривать как специфическую форму финансовых обязательств компании. Поэтому премии, учитывающие расходы, определяются из принципа эквивалентности финансовых обязательств страховой компании или пенсионного фонда и застрахованного (участника фонда).

Самые значительные расходы возникают при заключении договора; часто они превышают первую премию, выплаченную страхователем. Разницу компания покрывает из собственных средств (или с помощью перестрахования), а затем постепенно возмещает свои расходы за счет увеличенных премий. Если же страхователь решит разорвать (lapse) договор в течение нескольких первых лет действия договора, то компания терпит убытки (хотя частично они могут быть уменьшены, если потребовать от агентов вернуть комиссионные, или уменьшить выкупную сумму, выплачиваемую страхователю).

## 3. Расчет защитной надбавки

Для защиты от случайных флуктуаций продолжительности жизни нетто-премия $p^{(n)}$ должна быть определенным образом «нагружена», т. е. полная премия $p = p^{(n)} + p^{(s)} = p^{(n)}(1+\theta)$, где $p^{(s)}$ — защитная (страховая) надбавка, а $\theta = p^{(s)}/p^{(n)}$ — относительная страховая надбавка.

Простейший метод расчета страховой надбавки к нетто-премии в случае периодических выплат премий заключается в следующем. Введем в рассмотрение современную величину убытка $L$, связанную с одним договором. Этот убыток определяется как разность между современной величиной $v_B$ страхового возмещения или пенсии и современной величиной $v_C$ потока премий. В общем случае как $v_B$, так и $v_C$ зависят от нагруженной премии $p = p^n(1+\theta)$: $v_B = v_B(p)$, $v_C = v_C(p)$. Соответственно, убыток $L$ также зависит от $p$:

$$L = L(p) = v_B(p) - v_C(p).$$

Для каждого конкретного договора убыток $L$ может быть как положителен, так и отрицателен. Нам хотелось бы, чтобы весь портфель договоров, рассматриваемый как единое целое, не приносил бы убытков (однако, в отдельные моменты времени возможен отрицательный баланс). Иными словами, мы бы хотели, чтобы с большой вероятностью $\alpha$ суммарный убыток $S = L_1 + \ldots + L_N$, где $N$ — число договоров, а $L_i$ — убыток от $i$-го договора, был бы неположителен:

$$\mathsf{P}(S \leqslant 0) = \alpha.$$

Переписывая это условие в виде (мы считаем риски, связанные с различными договорами независимыми)

$$\mathsf{P}\left(\frac{S - \mathsf{E}S}{\sqrt{\mathsf{Var}\, S}} \leqslant -\frac{\mathsf{E}S}{\sqrt{\mathsf{Var}\, S}}\right) = \alpha$$

и применяя гауссовское приближение, мы получим:

$$-\frac{\mathsf{E}L_1 + \ldots + \mathsf{E}L_N}{\sqrt{\mathsf{Var}\, L_1 + \ldots + \mathsf{Var}\, L_N}} = x_\alpha.$$

Для основных принципов назначения страховых надбавок возможно введение единственного параметра $k$. Поэтому на самом деле это уравнение является уравнением относительно одной неизвестной величины $k$ и обычно может быть легко решено.

## 4. Задачи и решения

**Задача 6.1 ([22]).** *Относительно специального пожизненного страхования жизни человека в возрасте $x$ лет известно, что:*

1) *премия платится непрерывно с постоянной интенсивностью на протяжении всего срока действия договора;*
2) *страховое возмещение дается формулой $b_t = (1+i)^t$, где $i$ — актуарная процентная ставка, а $t$ — время действия договора;*
3) *премия подсчитывается на основании принципа эквивалентности.*

*Какое из выражений для приведенной (на момент заключения договора) величины потерь по договору $L$ является верным?*

(A) $\dfrac{v^{T_x} - \overline{A}_x}{1 - \overline{A}_x}$.

(B) $\left(v^{T_x} - \overline{A}_x\right) \cdot \left(1 - \overline{A}_x\right)$.

(C) $\dfrac{v^{T_x} - \overline{A}_x}{1 + \overline{A}_x}$.

(D) $\left(v^{T_x} - \overline{A}_x\right) \cdot \left(1 + \overline{A}_x\right)$.

(E) $\dfrac{v^{T_x} + \overline{A}_x}{1 + \overline{A}_x}$.

**Решение**

Пусть $P$ — интенсивность поступления премий. Обязательства страхователя заключаются в выплате непрерывной ренты с интенсивностью $P$ на протяжении остаточного времени жизни $T_x$. Их приведенная стоимость есть

$$P \cdot \overline{a}_{\overline{T_x}|} = P \cdot \frac{1 - v^{T_x}}{\delta}.$$

Обязательства страховщика заключаются в выплате суммы $b_t$ в момент $t = T_x$. Их приведенная стоимость есть

$$b_{T_x} v^{T_x} = (1+i)^{T_x} \cdot v^{T_x} = 1.$$

Следовательно, приведенная величина потерь по договору дается формулой:

$$L = 1 - P \cdot \frac{1 - v^{T_x}}{\delta}.$$

Принцип эквивалентности означает, что $\mathsf{E}L = 0$, откуда

$$P = \frac{\delta}{1 - \mathsf{E}v^{T_x}} = \frac{\delta}{1 - \overline{A}_x},$$

где $\overline{A}_x = \mathsf{E}v^{T_x}$ — разовая нетто-премия по договору пожизненного страхования.

Поэтому формулу для $L$ можно преобразовать следующим образом:

$$L = 1 - \frac{\delta}{1 - \overline{A}_x} \cdot \frac{1 - v^{T_x}}{\delta} = \frac{v^{T_x} - \overline{A}_x}{1 - \overline{A}_x},$$

так что правильным является вариант (A).

**Задача 6.2 ([5]).** *Страховая компания заключила договор 3-х летнего временного страхования жизни с человеком в возрасте $x = 25$ лет на сумму 1000 руб. с выплатой премии в начале каждого года в течение всего срока действия договора. Заключение и поддержание договора связаны со следующими расходами:*

*1. Комиссионные агенту, заключившему договор: 20% от премии в момент получения первой премии и 5% от премии при получении последующих премий.*

*2. Подготовка документов: 15 рублей в момент заключения договора (т. е. при получении первой премии), 5 рублей при получении последующих премий, 50 рублей при выплате страхового пособия.*

*3. Налоги: 5% от премии в момент получения премии.*

*4. Кроме того, компания увеличивает премию на 2 % от величины страхового пособия для того, чтобы покрыть общие административные расходы.*

*Предполагая, что смертность описывается табл. 6.1 с равномерным распределением момента смерти внутри последнего года жизни, а техническая процентная ставка $i = 25\%$, подсчитайте величину премии, учитывающей перечисленные выше расходы.*

*Таблица 6.1*

| $x$ | $q_x$ | $l_x$ | $d_x$ | $L_x$ | $\mathring{e}_x$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 0,001268 | 97 813 | 124 | 97 750,97 | 59,67 |
| 21 | 0,001321 | 97 689 | 129 | 97 624,47 | 58,75 |
| 22 | 0,001374 | 97 560 | 134 | 97 492,97 | 57,82 |
| 23 | 0,001437 | 97 426 | 140 | 97 355,97 | 56,90 |
| 24 | 0,001501 | 97 286 | 146 | 97 212,96 | 55,98 |
| 25 | 0,001565 | 97 140 | 152 | 97 063,96 | 55,07 |
| 26 | 0,001639 | 96 988 | 159 | 96 908,46 | 54,15 |
| 27 | 0,001714 | 96 829 | 166 | 96 745,95 | 53,24 |
| 28 | 0,001800 | 96 663 | 174 | 96 575,95 | 52,33 |
| 29 | 0,001886 | 96 489 | 182 | 96 397,94 | 51,42 |

**Решение**

Обозначим через $P$ искомую премию, учитывающую расходы.

Обязательства компании прежде всего заключаются в выплате 1000 рублей по договору о 3-х летнем временном страховании; актуарная приведенная стоимость этого обязательства есть $1000 \cdot \overline{A}^{1}_{25:\overline{3}|}$.

Выплату комиссионных агенту можно представить как комбинацию разовой выплаты суммы $0{,}15P$ в момент заключения договора и 3-х летней временной упреждающей пожизненной ренты с величиной ежегодных выплат $0{,}05P$. Поэтому актуарная приведенная стоимость этих обязательств есть $0{,}15P + 0{,}05P \cdot \ddot{a}_{25:\overline{3}|}$.

Расходы по подготовке документов можно рассматривать как комбинацию разовой выплаты суммы 10 рублей в момент заключения договора, 3-х летней временной упреждающей пожизненной ренты с величиной ежегодных выплат 5 рублей и 3-х летнего временного страхования жизни с величиной пособия 50 рублей. Поэтому актуарная приведенная стоимость этих обязательств есть $10 + 5 \cdot \ddot{a}_{25:\overline{3}|} + 50 \cdot \overline{A}^{1}_{25:\overline{3}|}$.

Выплату налогов и 2 % административных расходов можно рассматривать как 3-х летнюю временную упреждающую пожизненную ренту с величиной ежегодной выплаты $0{,}05P + 0{,}02 \cdot 1000 = 20 + 0{,}05P$. Актуарная приведенная стоимость этих обязательств есть

$$(20 + 0{,}05P) \cdot \ddot{a}_{25:\overline{3}|}.$$

Итак, актуарная приведенная стоимость на момент заключения договора всех обязательств компании есть:

$$10 + 0{,}15P + 1050 \cdot \overline{A}^{1}_{25:\overline{3}|} + (25 + 0{,}1P) \cdot \ddot{a}_{25:\overline{3}|}.$$

Обязательство застрахованного заключается в выплате 3-х летней упреждающей временной пожизненной ренты размером P; его актуарная приведенная стоимость на момент заключения договора есть

$$P \cdot \ddot{a}_{25:\overline{3}|}.$$

Принцип эквивалентности обязательств дает:

$$P \cdot \ddot{a}_{25:\overline{3}|} = 10 + 0{,}15P + 1050 \cdot \overline{A}^{1}_{25:\overline{3}|} + (25 + 0{,}1P) \cdot \ddot{a}_{25:\overline{3}|},$$

откуда

$$P = \frac{10 + 1050 \cdot \overline{A}^{1}_{25:\overline{3}|} + 25 \cdot \ddot{a}_{25:\overline{3}|}}{0{,}9 \cdot \ddot{a}_{25:\overline{3}|} - 0{,}15}.$$

Для того, чтобы получить числовой результат, подсчитаем вначале $\ddot{a}_{25:\overline{3}|}$:

$$\ddot{a}_{25:\overline{3}|} = \frac{1}{l_{25}}\left(l_{25} + vl_{26} + v^2 l_{27}\right) = 2{,}43670.$$

Теперь

$$A_{25:\overline{3}|} = 1 - d\ddot{a}_{25:\overline{3}|} = 0{,}51266.$$

Поскольку

$$A_{25:\overset{1}{\overline{3}|}} = \frac{v^3 l_{28}}{l_{25}} = 0{,}50949,$$

мы можем определить $A^1_{25:\overline{3}|}$:

$$A^1_{25:\overline{3}|} = A_{25:\overline{3}|} - A_{25:\overset{1}{\overline{3}|}} = 0{,}00317,$$

а, значит, и $\overline{A}^1_{25:\overline{3}|}$:

$$\overline{A}^1_{25:\overline{3}|} = \frac{i}{\delta} A^1_{25:\overline{3}|} = 0{,}003556.$$

Теперь

$$P \approx 36 \text{ руб. } 54 \text{ коп.}$$

**Задача 6.3 ([5]).** *Человек в возрасте $x = 35$ лет покупает пожизненную пенсию, начиная с возраста 65 лет. Пенсия величиной 1000 рублей должна выплачиваться раз в год. Плата за пенсию $R$ вносится в виде разовой премии в момент заключения договора. При этом в случае смерти до наступления пенсионного возраста плата за пенсию $R$ возвращается наследникам в конце года смерти. Определите $R$.*

**Решение**

На рис. 6.1 условно изображены два возможных сценария развития событий.

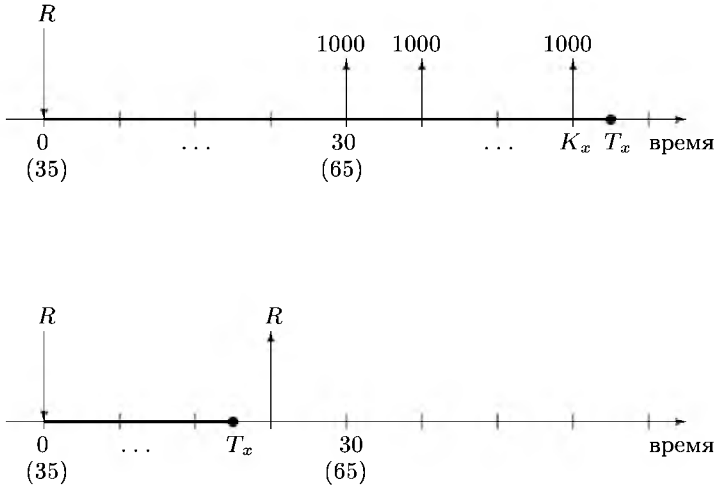


Рис. 6.1

Обязательство участника пенсионного фонда заключается в выплате суммы $R$ в момент заключения договора.

Обязательства пенсионного фонда заключаются в выплате отсроченной на $m = 30$ лет пожизненной ренты (ее приведенная стоимость на момент заключения договора есть $1000 \cdot {}_{30|}\ddot{a}_{35}$) и выплате пособия $R$ по договору дискретного временного (не более $m = 30$ лет) страхования жизни (его приведенная стоимость на момент заключения договора есть $R \cdot A^{1}_{35:\overline{30}|}$).

Принцип эквивалентности обязательств дает:

$$R = 1000 \cdot {}_{30|}\ddot{a}_{35} + R \cdot A^{1}_{35:\overline{30}|},$$

откуда

$$R = 1000 \cdot \frac{{}_{30|}\ddot{a}_{35}}{1 - A^{1}_{35:\overline{30}|}}.$$

**Задача 6.4 ([5]).** *Человек в возрасте $x = 35$ лет покупает пожизненную пенсию, начиная с возраста 65 лет. Пенсия величиной 1000 рублей должна выплачиваться раз в год. Плата за пенсию $R$ вносится в виде разовой премии в момент заключения договора. При этом в случае смерти до наступления пенсионного возраста плата за пенсию $R$ возвращается наследникам в конце года смерти вместе с накопленными процентами. Определите $R$.*

**Решение**

Если человек умрет в возрасте $35+k$ лет, $k=0,1,\ldots,29$, (вероятность этого события есть $\mathsf{P}(K(35)=k)$), то пенсионный фонд выплачивает сумму $R\cdot(1+i)^{k+1}$ в момент $35+k+1$. Поэтому приведенная стоимость этой выплаты есть

$$\sum_{k=0}^{29} R(1+i)^{k+1}v^{k+1}\mathsf{P}(K(35)=k) = R\sum_{k=0}^{29}\mathsf{P}(K(35)=k) = \\ = R\cdot\mathsf{P}(K(35)\leqslant 29) = R\cdot\mathsf{P}(T(35)<30).$$

Принцип эквивалентности дает:

$$R = 1000\cdot {}_{30|}\ddot{a}_{35} + R\cdot\mathsf{P}(T(35)<30),$$

откуда

$$R = 1000\cdot\frac{{}_{30|}\ddot{a}_{35}}{1-\mathsf{P}(T(35)<30)} = 1000\cdot\frac{v^{30}\mathsf{P}(T(35)\geqslant 30)\ddot{a}_{65}}{\mathsf{P}(T(35)\geqslant 30)} = 1000v^{30}\ddot{a}_{65}.$$

**Задача 6.5 ([5]).** *Человек в возрасте $x$ лет заключает договор полного страхования жизни с выплатой страхового возмещения в конце года смерти. Плата за страховку вносится в виде периодической премии $P$ в каждую годовщину заключения договора. Страховое возмещение состоит из заранее оговоренной суммы $C$ и возврата всех ранее внесенных премий без накопленных процентов. Подсчитайте величину периодической нетто-премии.*

**Решение**

Обязательство застрахованного заключается в выплате пожизненной ренты размером $P$ в год. Ее актуарная стоимость в момент заключения договора есть $P\cdot\ddot{a}_x$. Обязательство страховой компании заключается в выплате суммы $C+P\cdot(K(x)+1)$ в конце года смерти. Его можно рассматривать как комбинацию полного дискретного страхования жизни с пособием $C$ (актуарная приведенная стоимость равна $C\cdot A_x$) и дискретного возрастающего страхования с ежегодной выплатой, пропорциональной $P$ (актуарная приведенная стоимость равна $P\cdot(IA)_x$).

Принцип эквивалентности дает:

$$P\cdot\ddot{a}_x = C\cdot A_x + P\cdot(IA)_x,$$

откуда

$$P = C\cdot\frac{A_x}{\ddot{a}_x-(IA)_x}.$$

**Задача 6.6 ([25]).** *Человек в возрасте $x$ лет покупает следующую специальную пожизненную ренту:*

1. *премия фиксированного размера $P$ вносится в каждую годовщину заключения договора на протяжении первых трех лет;*

2. *в случае смерти застрахованного в течение этого трехлетнего периода страховая выплата не производится;*

3. *рента начинает выплачиваться через три года после заключения договора и платится раз в год в годовщину заключения договора;*

4. *первая выплата равна 1000, а каждая последующая выплата больше предыдущей на 4 %.*

*Найдите нетто-премию $P$, если техническая процентная ставка $i = 4\%$, среднее округленное остаточное время жизни застрахованного, $e_x$, равно 11,05, вероятность того, что он проживет 1 год, равна 0,99, 2 года — 0,98.*

**Решение**

В момент заключения договора среднее значение приведенной стоимости потока премий, т. е. актуарная приведенная стоимость обязательств страхователя, дается формулой (мы используем метод текущего платежа):

$$a_C = P\ddot{a}_{x:\overline{3}|} = P\cdot(1+v\cdot\mathsf{P}(T_x>1)+v^2\cdot\mathsf{P}(T_x>2)) =$$
$$= P\cdot\left(1+0{,}99\cdot\frac{1}{1{,}04}+0{,}98\cdot\frac{1}{1{,}04^2}\right)\approx 2{,}858\cdot P.$$

Аналогично, актуарная приведенная стоимость обязательств страховщика есть

$$a_B = \sum_{n=3}^{+\infty} 1000\cdot 1{,}04^{n-3}\cdot v^n\cdot\mathsf{P}(T_x>n) = 1000\cdot v^3\sum_{n=3}^{+\infty}\mathsf{P}(T_x\geqslant n).$$

Среднее округленное время жизни застрахованного, $e_x$, можно записать в виде

$$e_x \equiv \mathsf{E}K_x = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathsf{P}(K_x=n) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathsf{P}(K_x=n) =$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty}\mathsf{P}(K_x=n) = \sum_{k=1}^{+\infty}\mathsf{P}(K_x\geqslant k) = \sum_{k=1}^{+\infty}\mathsf{P}(T_x\geqslant n).$$

Поэтому

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \mathsf{P}(T_x \geqslant n) = e_x - \mathsf{P}(T_x > 1) - \mathsf{P}(T_x > 2) =$$

$$= 11{,}05 - 0{,}99 - 0{,}98 = 9{,}08,$$

и, значит,

$$a_B = 1000 \cdot \frac{1}{1{,}04^3} \cdot 9{,}08 \approx 8072{,}087.$$

Теперь из принципа эквивалентности обязательств можно найти размер годовой премии:

$$P \approx 2824{,}39.$$

**Задача 6.7 ([5]).** *Специальный договор полного страхования жизни, заключенный с человеком в возрасте $x$ лет, гарантирует выплату суммы $C$, если смерть наступит в течение $n$ ближайших лет, и суммы $C/2$, если смерть наступит позже. Плата за страховку вносится в виде ежегодных премий. Премия должна быть постоянной первые $n$ лет и уменьшенной вдвое позже. Определите величину премии.*

**Решение**

Обязательства компании можно рассматривать как комбинацию полного страхования жизни с выплатой пособия $C/2$ и $n$-летнего временного страхования с выплатой пособия $C/2$. Их актуарная стоимость в момент заключения договора есть

$$\frac{C}{2}\overline{A}_x + \frac{C}{2}\overline{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|}.$$

Обязательства застрахованного можно рассматривать как выплату ежегодной пожизненной ренты величиной $P/2$ и $n$-летней временной пожизненной ренты с ежегодным взносом $P/2$. Их актуарная стоимость в момент заключения договора есть

$$\frac{P}{2}\ddot{a}_x + \frac{P}{2}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}.$$

Принцип эквивалентности обязательств дает:

$$\frac{P}{2}\ddot{a}_x + \frac{P}{2}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{C}{2}\overline{A}_x + \frac{C}{2}\overline{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|},$$

откуда

$$P = C\frac{\overline{A}_x + \overline{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_x + \ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = C\frac{2\overline{M}_x - \overline{M}_{x+n}}{2N_x - N_{x+n}}.$$

**Задача 6.8 ([5]).** *Рассмотрим $N = 2500$ договоров 3-х летнего смешанного дискретного страхования жизни со страховым возмещением $b = 1000$ рублей. Премии вносятся в каждую годовщину заключения договора в течение всего срока его действия, возраст всех застрахованных — 30 лет. Компания использует следующую таблицу смертности:*

$$l_{30} = 96\,307, \quad l_{31} = 96\,117, \quad l_{32} = 95\,918,$$

*и техническую процентную ставку $i = 25\%$.*

*Определите величину периодической премии $P$, которая гарантировала бы отсутствие потерь по всему портфелю с вероятностью $\alpha = 99\%$.*

**Решение**

Обязательство застрахованного заключается в выплате 3-х летней временной пожизненной ренты. Приведенная стоимость этого обязательства в момент заключения договора есть $P \cdot \ddot{Y}_{30:\overline{3}|}$ со средним значением $P \cdot \ddot{a}_{30:\overline{3}|}$. Величина $\ddot{a}_{30:\overline{3}|}$ может быть легко подсчитана:

$$\ddot{a}_{30:\overline{3}|} = \frac{1}{l_{30}} \left( l_{30} + v l_{31} + v^2 l_{32} \right) = 2{,}4358.$$

Отметим, кроме того, что для удвоенной интенсивности процентов

$${}^2\ddot{a}_{30:\overline{3}|} = \frac{1}{l_{30}} \left( l_{30} + v^2 l_{31} + v^4 l_{32} \right) = 2{,}0467.$$

Обязательство страховой компании заключается в выплате страховой суммы $b = 1000$ рублей в конце года смерти, если она наступит не позже, чем через 3 года после заключения договора, или в момент окончания срока действия договора, если застрахованный проживет эти 3 года. Приведенная стоимость этого обязательства в момент заключения договора есть $1000 \cdot Z_{30:\overline{3}|}$ со средним значением $1000 \cdot A_{30:\overline{3}|}$. Как известно,

$$A_{30:\overline{3}|} = 1 - d \cdot \ddot{a}_{30:\overline{3}|} = 0{,}51284.$$

Отметим, кроме того, что

$${}^2A_{30:\overline{3}|} = 1 - (1 - v^2) \left( {}^2\ddot{a}_{30:\overline{3}|} \right) = 0{,}2632.$$

и поэтому

$$\mathsf{Var}\, Z_{30:\overline{3}|} = {}^2A_{30:\overline{3}|} - \left( A_{30:\overline{3}|} \right)^2 = 0{,}00018928.$$

Современная величина убытка, связанного с одним договором, может быть записана в виде:

$$L = 1000 \cdot Z_{30:\overline{3}|} - P \cdot \ddot{Y}_{30:\overline{3}|} = 1000 \cdot Z_{30:\overline{3}|} - P \cdot \frac{1 - Z_{30:3|}}{d} =$$
$$= \left(1000 + \frac{P}{d}\right) \cdot Z_{30:\overline{3}|} - \frac{P}{d} = (1000 + 5P) \cdot Z_{30:\overline{3}|} - 5P.$$

Мы бы хотели, чтобы

$$\mathsf{P}(L_1 + \ldots + L_N \leqslant 0) = \alpha.$$

Переписывая это условие в виде

$$\mathsf{P}\left(\frac{L_1 + \ldots + L_N - N \cdot \mathsf{E}L}{\sqrt{N \cdot \mathsf{Var}\, L}} \leqslant -\frac{\sqrt{N} \cdot \mathsf{E}L}{\sqrt{\mathsf{Var}\, L}}\right) = \alpha$$

и используя гауссовское приближение, мы получим:

$$-\frac{\sqrt{N} \cdot \mathsf{E}L}{\sqrt{\mathsf{Var}\, L}} = x_\alpha.$$

Но

$$\mathsf{E}L = (1000 + 5P) \cdot A_{30:\overline{3}|} - 5P = 1000 \cdot A_{30:\overline{3}|} - 5P \cdot (1 - A_{30:\overline{3}|}),$$

$$\mathsf{Var}\, L = (1000 + 5P)^2 \cdot \mathsf{Var}\, Z_{30:\overline{3}|}.$$

Поэтому

$$\frac{5P \cdot (1 - A_{30:\overline{3}|}) - 1000 \cdot A_{30:\overline{3}|}}{(1000 + 5P) \cdot \sqrt{\mathsf{Var}\, Z_{30:\overline{3}|}}} = \frac{x_\alpha}{\sqrt{N}},$$

откуда

$$P = 200 \frac{A_{30:\overline{3}|} + x_\alpha \sqrt{\mathsf{Var}\, Z_{30:\overline{3}|}} / \sqrt{N}}{1 - A_{30:\overline{3}|} - x_\alpha \sqrt{\mathsf{Var}\, Z_{30:\overline{3}|}} / \sqrt{N}} \approx 211 \text{ руб. } 08 \text{ коп.}$$

Нетто-премия по рассматриваемому договору есть

$$P_{30:\overline{3}|} = 1000 \frac{A_{30:\overline{3}|}}{\ddot{a}_{30:\overline{3}|}} \approx 210 \text{ руб. } 54 \text{ коп.}$$

Таким образом, относительная страховая надбавка $\theta \equiv \dfrac{P - P_{30:\overline{3}|}}{P_{30:\overline{3}|}}$ приблизительно равна 0,26 %. Столь малая величина относительной страховой надбавки связана с тем, что при смешанном страховании с вероятностью близкой к 1 выплата производится по окончании срока действия договора. Соответственно флуктуации, связанные со смертностью, крайне малы.

**Задача 6.9.** *Страховая компания «Надежная Защита» продала г-же Петровой полис двухлетнего страхования жизни со страховой суммой $S = 100\,000$ руб. и выплатой страхового возмещения в конце года* *смерти. Премия была рассчитана на основании принципа эквивалентности (расходы и пр. нагрузки не учитывались), была полностью уплачена в момент заключения договора. В момент заключения договора г-жа Петрова заявила, что ей $x = 30$ лет. Через год выяснилось, что на самом деле возраст г-жи Петровой в момент заключения договора был $y = 40$ лет. Хотя пункт 3 статьи 944 ГК РФ давал страховой компании право потребовать признания договора недействительным (так как страхователь сообщил страховщику заведомо ложные сведения об обстоятельствах, имеющих существенное значение для определения вероятности наступления страхового случая), страховщик решил не расторгать договор, а лишь уменьшить размер страховой суммы таким образом, чтобы уплаченная премия соответствовала на основании принципа эквивалетности реальному риску для страховой компании на протяжении всего срока действия договора.*

*Определите новую страховую сумму.*

*Известно, что $i = 10\%$, $q_{30} = 0{,}5\%$, $q_{31} = 0{,}6\%$, $q_{40} = 1\%$, $q_{41} = 1{,}1\%$.*

*При каком условии это решение проблемы возможно?*

**Решение**

Найдем разовую нетто-премию (которая рассчитывалась на базе ложной информации):

$$P = S\left(vq_x + v^2 p_x q_{x+1}\right).$$

Если $SA$ — искомая страховая сумма, то реальная актуарная стоимость обязательств страховщика на момент заключения договора есть

$$a_B = S \cdot vq_y + SA \cdot v^2 p_y q_{y+1}.$$

Она должна равняться уплаченной премии:

$$S\left(vq_x + v^2 p_x q_{x+1}\right) = S \cdot vq_y + SA \cdot v^2 p_y q_{y+1},$$

откуда

$$SA = S\frac{p_x q_{x+1} - (q_y - q_x)(1+i)}{p_y q_{y+1}} \approx 4\ 316 \text{ руб.}$$

Решение проблемы возможно, если числитель этой дроби положителен, т. е.

$$q_y < vp_x q_{x+1} + q_x \approx 1{,}043\,\%.$$

**Задача 6.10.** *Страховая компания «Надежная Защита» продала г-же Ивановой полис 3-х летнего страхования жизни со страховой суммой 1000 и выплатой строхового возмещения в конце года смерти. Премии рассчитаны на основании принципа эквивалентности и платятся раз в год. В момент заключения договора г-жа Иванова заявила, что ей 30 лет. Через 2 года после заключения договора* *компании стало известно, что на самом деле возраст г-жи Ивановой в момент заключения договора был 31 год. Поэтому компания решила уменьшить размер страховой суммы таким образом, чтобы уплаченные премии соответствовали на основании принципа эквивалетности новой страховой сумме и реальному возрасту г-жи Ивановой. Определите новую страховую сумму. Известно, что $i = 4\%$, $q_{30} = 1\%$, $q_{31} = 2\%$, $q_{32} = 3\%$, $q_{33} = 4\%$.*

**Решение**

Прежде всего подсчитаем ежегодную премию $P$, которую выплачивала г-жа Иванова. Поскольку страховщик предполагал, что ее возраст $x$ лет, премия определялась следующим образом:

- обязательства страховщика заключаются в выплате $SA = 1000$ в конце года смерти; их современная актуарная стоимость есть
$$1000A^1_{30:\overline{3}|} = 1000(vq_{30} + v^2p_{30}q_{31} + v^3p_{30}p_{31}q_{32}) \approx 53{,}796726;$$
- обязательства страхователя заключаются в выплате 3-х летней упреждающей ренты; их современная актуарная стоимость есть
$$P \cdot \ddot{a}_{30:\overline{3}|} = P \cdot (1 + vp_{30} + v^2p_{30}p_{31}) \approx P \cdot 2{,}848927.$$

Поэтому, в силу принципа эквивалентности обязательств,
$$P = 1000 \cdot \frac{A^1_{30:\overline{3}|}}{\ddot{a}_{30:\overline{3}|}} \approx 18{,}88315.$$

Реальный риск компании заключался в следующем:

- выплатить человеку, возраст которого в момент заключения договора равен $y = 31$, страховую сумму $SA = 1000$, если смерть наступит на протяжении двух первых лет действия договора, и уменьшенную сумму $SA^*$, если смерть наступит в течение третьего года действия договора;
- поток премий платится человеком в возрасте $y = 31$, а не $x = 30$.

Поэтому актуарная стоимость потерь компании в момент заключения договора есть:
$$1000 \cdot (vq_y + v^2p_yq_{y+1}) + SA^* \cdot v^3p_yp_{y+1}q_{y+2} - P \cdot \ddot{a}_{y:\overline{3}|}.$$

Принцип эквивалентности обязательств означает, что эта величина равна 0, откуда для размера страховой суммы на третий год действия договора мы имеем:
$$SA^* = \frac{-1000 \cdot (vq_y + v^2p_yq_{y+1}) + P\ddot{a}_{y:\overline{3}|}}{v^3p_yp_{y+1}q_{y+2}} \approx 202{,}95.$$

**Задача 6.11.** *Петя Иванов ежегодно устраивает пикник на свой день рождения. В случае плохого самочувствия Петя отменяет пикник и теряет 1000, потраченную на его организацию. После очередной* *отмены пикника из-за плохого состояния здоровья в свой день рождения Петя решил купить на следующие три года страховку, которая покрыла бы возможные потери.*

*Страховая компания моделирует состояние Петиного здоровья как стационарную цепь Маркова с двумя состояниями: состояние «0» соответствует хорошему самочувствию, а состояние «1» — плохому. При этом предполагается, что вероятность плохого самочувствия в какой-то день равна 0,50, если Петя накануне также был не вполне здоров, и равна 0,20, если накануне он чувствовал себя отлично. Техническая процентная ставка $i$, используемая компанией в актуарных расчетах, равна 10%.*

*Подсчитайте разовую нетто-премию по этому договору.*

**Решение**

Примем день заключения договора в качестве начала отсчета времени и обозначим состояние здоровья застрахованного в $k$-й день через $X_k$:

$$X_k = \begin{cases} 0, & \text{если самочувствие хорошее;} \\ 1, & \text{если самочувствие плохое;} \end{cases}$$

Матрица вероятностей перехода $p_{ij} = \mathsf{P}(X_{k+1} = j | X_k = i)$ цепи $X_k$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Поэтому уравнения Колмогорова для стационарного распределения $\pi_0 = \mathsf{P}(X_k = 0)$, $\pi_1 = \mathsf{P}(X_k = 1)$ есть:

$$\pi_0 = \pi_0 \cdot 0{,}8 + \pi_1 \cdot 0{,}5, \quad \pi_1 = \pi_0 \cdot 0{,}2 + \pi_1 \cdot 0{,}5.$$

Поскольку $\pi_0 + \pi_1 = 1$, отсюда без всякого труда получим:

$$\pi_0 = \frac{5}{7}, \quad \pi_1 = \frac{2}{7}.$$

Пусть $T = 365$ — число дней в году. Тогда $X_T$, $X_{2T}$, $X_{3T}$ — состояния здоровья застрахованного в дни рождения, покрытые страховкой. Поскольку $T = 365$ — достаточно большое число, приближенно можно считать, что распределения этих случайных величин совпадают со стационарным распределением:

$$\mathsf{P}(X_T = 1) = \mathsf{P}(X_{2T} = 1) = \mathsf{P}(X_{3T} = 1) \approx \pi_1 = \frac{2}{7}.$$

Современная стоимость обязательств компании по рассматриваемому договору есть:

$$Z = 1000 \cdot \left(v \cdot I(X_T = 1) + v^2 \cdot I(X_{2T} = 1) + v^3 \cdot I(X_{3T} = 1)\right),$$

где $v = 1/(1 + i) = 10/11$ — коэффициент дисконтирования.

Соответственно, актуарная современная стоимость обязательств компании равна

$$\mathsf{E}Z = 1000 \cdot \big(v \cdot \mathsf{P}(X_T = 1) + v^2 \cdot \mathsf{P}(X_{2T} = 1) + v^3 \cdot \mathsf{P}(X_{3T} = 1)\big) = \\ = 1000\pi_1 \cdot (v + v^2 + v^3) = \frac{6\,620\,000}{9\,317} \approx 710{,}53.$$

Принцип эквивалентности обязательств влечет, что разовая нетто-премия равна актуарной современной стоимости обязательств компании, т. е. примерно 710.

**Задача 6.12 ([22]).** *Подсчитайте ежегодную нетто-премию по следующему дискретному договору страхования жизни:*

1) *возраст застрахованного 30 лет;*
2) *страховая сумма равна 1 в течение первых 20 лет действия договора и 5 после этого;*
3) *период выплаты премий не более 35 лет;*
4) *в течение первых 20 лет ежегодная премия должна составлять 1/5 от ежегодной премии в последующие 15 лет;*
5) $i = 0{,}06$;
6) $A^1_{30:\overline{20}|} = 0{,}02933$, $A_{30} = 0{,}1024835$, $A_{30:\overline{20}|} = 0{,}32307$;
7) $\ddot{a}_{30:\overline{35}|} = 14{,}835$.

**Решение**

Обязательства страховщика на момент заключения договора есть

$$Z = \begin{cases} v^{K_{30}+1}, & \text{если } T_{30} < 20, \\ 5 \cdot v^{K_{30}+1}, & \text{если } T_{30} > 20, \end{cases} = 5 \cdot v^{K_{30}+1} - 4 \cdot Z^1_{30:\overline{20}|},$$

где

$$Z^1_{30:\overline{20}|} = \begin{cases} v^{K_{30}+1}, & \text{если } T_{30} < 20, \\ 0, & \text{если } T_{30} > 20. \end{cases}$$

Поэтому актуарная современная стоимость обязательств страховщика есть

$$a_B = 5A_{30} - 4A^1_{30:\overline{20}|} = 0{,}39508.$$

Подобным же образом, актуарная современная стоимость обязательств страхователя есть (ниже $P$ — размер ежегодной премии на протяжении первых 20 лет действия договора):

$$a_C = 5P\ddot{a}_{30:\overline{35}|} - 4P\ddot{a}_{30:\overline{20}|}.$$

Величину $\ddot{a}_{30:\overline{20}|}$ можно подсчитать с помощью $A_{30:\overline{20}|}$:

$$\ddot{a}_{30:\overline{20}|} = \frac{1 - A_{30:\overline{20}|}}{d} \approx 11{,}959.$$

Поэтому

$$a_C \approx 26{,}339 \cdot P.$$

Из принципа эквивалентности мы теперь имеем:

$$P \approx \frac{0{,}39508}{26{,}339} \approx 0{,}015.$$

**Задача 6.13 ([25]).** *Используя принцип эквивалентности, подсчитайте премию по договору пожизненного страхования, который заключен с человеком в возрасте $x = 80$ лет на следующих условиях:*

1) *премия вносится равными долями в момент заключения договора и в начале третьего года его действия (если договор еще действует);*
2) *страховая сумма $SA = 1000$ выплачивается в конце года смерти;*
3) *если застрахованный умирает на протяжении первого или третьего года действия договора, то в конце года смерти дополнительно выплачивается половина премии, внесенной в начале соответствующего года.*

*Известно, что если бы был заключен обычный дискретный договор пожизненного страхования, то разовая нетто-премия была бы равна 665,7528.*

*При актуарных расчетах используйте техническую процентную ставку $i = 0{,}06$ и таблицу продолжительности жизни 6.2.*

*Таблица 6.2*

| $x$ | $l_x$ |
|---|---|
| 80 | 39 143,64 |
| 81 | 36 000,37 |
| 82 | 32 845,41 |
| 83 | 29 704,95 |

## Решение

Пусть $P$ — премия, которая вносится в начале первого и третьего года. Тогда актуарная стоимость обязательств страхователя, приведенная к моменту заключения договора, дается формулой

$$a_C = P + P \cdot v^2 \cdot \mathsf{P}(T_{80} > 2).$$

Актуарная современная стоимость обязательств страховщика дается формулой:

$$a_B = 1000 \cdot A_{80} + \frac{P}{2} \cdot v \cdot \mathsf{P}(T_{80} < 1) + \frac{P}{2} \cdot v^3 \cdot \mathsf{P}(2 < T_{80} < 3).$$

Теперь из принципа эквивалентности $a_C = a_B$ можно найти $P$:

$$P = 1000\,\frac{A_{80}}{1 + v^2 \cdot \mathsf{P}(T_{80} > 2) - \dfrac{1}{2}v \cdot \mathsf{P}(T_{80} < 1) - \dfrac{1}{2}v^3 \cdot \mathsf{P}(2 < T_{80} < 3)}.$$

По условию $A_{80} = 0{,}6657528$, $v = 1/(1+i) \approx 0{,}9434$. Кроме того,

$$\mathsf{P}(T_{80} < 1) = 1 - \frac{l_{81}}{l_{80}} \approx 0{,}08030,$$

$$\mathsf{P}(T_{80} > 2) = \frac{l_{82}}{l_{80}} \approx 0{,}83910,$$

$$\mathsf{P}(2 < T_{80} < 3) = \frac{l_{82} - l_{83}}{l_{80}} \approx 0{,}08023.$$

Поэтому

$$P \approx 397{,}41.$$

**Задача 6.14 ([14]).** *Человек в возрасте $x = 80$ лет хотел бы заключить договор пожизненного страхования на сумму $SA = 1000$ с премией, которая платится непрерывно на протяжении действия договора с постоянной интенсивностью $\pi$. Установленная компанией процедура андеррайтинга позволяет гарантировать с хорошей степенью точности, что остаточное время жизни этого человека будет характеризоваться постоянной интенсивностью смертности $\mu = 0{,}15$. Однако в силу нестабильности общей экономической ситуации, актуарию не было ясно, какую техническую процентную ставку $i$ использовать для расчета нетто-премии, и он решил изучить зависимость $\pi$ от $i$.*

*Найдите эту зависимость.*

**Решение**

Актуарная приведенная стоимость обязательств страховщика в момент заключения договора есть

$$a_B = \mathsf{E}\left(SA \cdot v^{T_x}\right) = \int_0^{+\infty} 1000\, e^{-\delta t} \mu e^{-\mu t}\, dt = \frac{1000\mu}{\delta + \mu}.$$

Актуарная приведенная стоимость обязательств страхователя в момент заключения договора есть

$$a_C = \pi \overline{a}_x = \int_0^{+\infty} \pi e^{-\delta t} e^{-\mu t}\, dt = \frac{\pi}{\delta + \mu}.$$

В силу принципа эквивалентности обязательств,

$$a_B = a_C,$$

откуда

$$\pi = 1000\,\mu = 150,$$

т. е. $\pi$ не зависит от $i$.

**Задача 6.15.** *Страховая компания заключила договор пожизненного страхования с человеком в возрасте $x$ лет с выплатой страховой суммы $S$ в момент смерти.*

*Премия платится непрерывно на протяжении всего срока действия договора; пусть $P$ — величина годовой премии (без учета дисконтирования). Обозначим через $L$ размер потерь по договору, приведенный к моменту его заключения.*

*Компания определяет премию $P$ не на основе принципа эквивалентности обязательств ($\mathsf{E}L = 0$), а на основе принципа «равновероятности потерь и доходов»:*

$$\mathsf{P}(L > 0) = \mathsf{P}(L < 0) = 0{,}5.$$

*Предполагая, что интенсивность смертности постоянна при $t > x$, сравните эту премию с премией, подсчитанной на основе принципа эквивалентности.*

**Решение**

Для рассматриваемого договора

$$L = S \cdot v^{T_x} - P \cdot \overline{a}_{\overline{T_x}|} = S \cdot v^{T_x} - P \cdot \frac{1 - v^{T_x}}{\delta} = \left(S + \frac{P}{\delta}\right) v^{T_x} - \frac{P}{\delta}.$$

Поэтому условие

$$\mathsf{P}(L < 0) = 0{,}5$$

означает, что

$$\mathsf{P}\left(T_x > \frac{1}{\delta}\ln\left(1 + \frac{\delta S}{P}\right)\right) = 0{,}5.$$

Поскольку $\mu_t \equiv \mu$ при $t > x$,

$$\mathsf{P}\,(T_x > t) = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \exp\left(-\int\limits_x^{x+t} \mu_u\,du\right) = e^{-\mu t},$$

т. е. случайная величина $T_x$ имеет экспоненциальное распределение. Значит,

$$\exp\left\{-\frac{\mu}{\delta}\ln\left(1 + \frac{\delta S}{P}\right)\right\} = 0{,}5,$$

откуда можно найти премию:

$$P = \frac{\delta S}{2^{\delta/\mu} - 1}.$$

Если $P^*$ — премия, рассчитанная на основе принципа эквивалентности, то $\mathsf{E}L = 0$, т. е.

$$\left(S + \frac{P^*}{\delta}\right)\mathsf{E}e^{-\delta T_x} = \frac{P^*}{\delta}.$$

Для экспоненциально распределенной случайной величины верна формула:

$$\mathsf{E}e^{-\delta T_x} = \frac{\mu}{\delta + \mu}$$

(это просто формула для преобразования Лапласа величины $T_x$). Поэтому

$$P^* = S\mu.$$

Чтобы сравнить $P$ и $P^*$, рассмотрим величину $\dfrac{1}{P} - \dfrac{1}{P^*}$:

$$\frac{1}{P} - \frac{1}{P^*} = \left(2^{\delta/\mu} - 1\right)\frac{1}{\delta S} - \frac{1}{S\mu} = \frac{1}{\delta S}\left(2^{\delta/\mu} - 1 - \frac{\delta}{\mu}\right).$$

Функция $f(x) = 2^x - 1 - x$ отрицательна при $0 < x < 1$ и положительна при $x > 1$. Поэтому $P^* > P$ при $\delta > \mu$, $P^* < P$ при $\delta < \mu$, $P^* = P$ при $\delta = \mu$.

**Задача 6.16 ([25]).** *Рассмотрим договор страхования жизни на $n = 2$ года с выплатой страховой суммы 1 в конце года смерти. Пусть $x$ — возраст застрахованного в момент заключения договора. Известно, что $p_x = 0{,}75$, $p_{x+1} = 0{,}8$, а наименьшая премия, гарантирующая отсутствие потерь по договору в течение первого года его действия, равна 0,95.*

*Найдите дисперсию современной стоимости обязательств страховщика.*

**Решение**

Поскольку вероятность смерти застрахованного в течение первого года положительна, гарантировать отсутствие потерь можно, только если премия $P$ вместе с процентами не меньше, чем страховая сумма:

$$P \cdot (1 + i) \geqslant SA.$$

Отсюда

$$P_{\min} = v.$$

Обязательства страховщика заключаются в выплате:

1) страховой суммы 1 в момент 1, если застрахованный умрет на протяжении первого года действия договора (вероятность этого события равна $q_x = 0{,}25$);

2) страховой суммы 1 в момент 2, если застрахованный умрет на протяжении второго года действия договора (вероятность этого события равна $p_x \cdot q_{x+1} = 0{,}75 \cdot 0{,}2 = 0{,}15$).

Таким образом, если $Z$ — современная стоимость обязательств страховщика, то случайная величина $Z$ принимает значения $v$ и $v^2$ с вероятностями $q_x$ и $p_x \cdot q_{x+1}$ соответственно. Поэтому

$$\mathsf{E}Z = v \cdot q_x + v^2 \cdot p_x \cdot q_{x+1} = 0{,}95 \cdot 0{,}25 + 0{,}95^2 \cdot 0{,}15 = 0{,}3729,$$

$$\mathsf{E}Z^2 = v^2 \cdot q_x + v^4 \cdot p_x \cdot q_{x+1}s = 0{,}95^2 \cdot 0{,}25 + 0{,}95^4 \cdot 0{,}15 \approx 0{,}3478,$$

$$\mathsf{Var}\, Z = \mathsf{E}Z^2 - (\mathsf{E}Z)^2 \approx 0{,}21.$$

**Задача 6.17.** *Страховая компания заключила договор пожизненного страхования с человеком в возрасте $x$ лет с выплатой страховой суммы $S = 1$ в момент смерти.*

*Премия платится непрерывно с постоянной скоростью на протяжении всего срока действия договора.*

*При актуарных расчетах предполагается, что $\mu_{x+t} = 0{,}02$ для $t \geqslant 0$; $\delta = 0{,}07$; относительная страховая надбавка $\theta = 50\%$.*

*Обозначим через $I$ доход по договору, приведенный к моменту его заключения. Найдите* $\mathsf{Var}\, I$.

**Решение**

В силу условия задачи остаточное время жизни застрахованного имеет экспоненциальное распределение с параметром $\mu = 0{,}01$. Поэтому актуарная современная стоимость обязательств страховщика есть:

$$\overline{A}_x = \mathsf{E}e^{-\delta T_x} = \frac{\mu}{\mu + \delta},$$

а актуарная современная стоимость обязательств страхователя:

$$\overline{a}_x = \frac{1 - \overline{A}_x}{\delta} = \frac{1}{\mu + \delta},$$

и, значит, нетто-премия равна

$$\overline{P}(\overline{A}_x) = \frac{\overline{A}_x}{\overline{a}_x} = \mu.$$

Соответственно, нагруженная премия $P$ равна $(1 + \theta) \cdot \mu$.

Случайную величину $I$ можно записать в виде

$$I = P \cdot \overline{a}_{\overline{T_x|}} - e^{-\delta T_x} = P\frac{1 - e^{-\delta T_x}}{\delta} - e^{\delta T_x} = \frac{P}{\delta} - \left(1 + \frac{P}{\delta}\right) e^{-\delta T_x}.$$

Поэтому

$$\operatorname{Var} I = \left(1+\frac{P}{\delta}\right)^2 \cdot \operatorname{Var} e^{-\delta T_x} = \left(1+\frac{P}{\delta}\right)^2 \cdot \left(\mathsf{E} e^{-2\delta T_x} - \left(\mathsf{E} e^{-\delta T_x}\right)^2\right) =$$
$$= \left(1+\frac{P}{\delta}\right)^2 \cdot \left({}^2\overline{A}_x - (\overline{A}_x)^2\right) = \left(1+\frac{P}{\delta}\right)^2 \cdot \left(\frac{\mu}{\mu+2\delta} - \frac{\mu^2}{(\mu+\delta)^2}\right) =$$
$$= (\delta+P)^2 \frac{\mu}{(\mu+2\delta)(\mu+\delta)^2} = \frac{25}{162} \approx 0{,}154.$$

**Задача 6.18.** *Страховая компания заключила договор пожизненного страхования с человеком в возрасте $x = 30$. Страховая сумма $SA = 1000$ выплачивается в конце года смерти. Премия величиной $P = 20$ платится раз в год в годовщину заключения договора.*

*Найдите вероятность того, что этот договор не будет убыточен для страховщика.*

*Известно, что $i = 5\%$, $l_{30} = 96\,307$, $l_{54} = 87\,621$.*

**Решение**

Пусть $L$ — размер потерь по договору, приведенный к моменту его заключения:

$$L = SA \cdot v^{K_x+1} - P \cdot \ddot{a}_{\overline{K_x+1|}} =$$
$$= SA \cdot v^{K_x+1} - P\frac{1-v^{K_x+1}}{d} = \left(SA + \frac{P}{d}\right) \cdot v^{K_x+1} - \frac{P}{d}.$$

Нас интересует вероятность того, что $L \leqslant 0$. Для нее мы имеем:

$$\mathsf{P}(L \leqslant 0) = \mathsf{P}\left(\left(SA + \frac{P}{d}\right) \cdot e^{-\delta(K_x+1)} \leqslant \frac{P}{d}\right) =$$
$$= \mathsf{P}\left(e^{\delta(K_x+1)} \geqslant 1 + \frac{SA\cdot d}{P}\right) = \mathsf{P}\left(K_x + 1 \geqslant \frac{1}{\delta}\ln\left(1+\frac{SA\cdot d}{P}\right)\right) =$$
$$= \mathsf{P}\left(K_{30}+1 \geqslant \ln\left(1+\frac{1000}{21\cdot 20}\right)\Big/\ln 1{,}05\right) = \mathsf{P}\left(K_{30}+1 \geqslant 24{,}975\right) =$$
$$= \mathsf{P}(K_{30} \geqslant 24) = \mathsf{P}(T_{30} \geqslant 24) = \frac{l_{54}}{l_{30}} \approx 91\,\%.$$

**Задача 6.19.** *Страховая компания заключает договоры пожизненного страхования с выплатой фиксированной страховая суммы $S = 1$ в конце года смерти; постоянная премия $\pi$ платится раз в год в годовщину заключения договора.*

*В таблице 6.3 приведены значения премии $\pi = \pi_x$ и средний доход по одному договору, $I = I_x$, в момент его заключения (для его расчета используется постоянная техническая процентная ставка $i = 0{,}06$) в зависимости от возраста $x$ застрахованного в момент заключения договора*

*Таблица 6.3*

| $x$ | $\pi_x$ | $I_x$ |
|---|---|---|
| 30 | 0,0077 | 0,0200 |
| 31 | 0,0081 | 0,0210 |
| 32 | 0,0086 | 0,0235 |

*Как изменится величина $I_{30}$, если $q_{30}$ уменьшится в два раза?*

**Решение**

Средний доход по одному договору в момент его заключения дается формулой:

$$I_x = \pi_x \cdot \ddot{a}_x - A_x.$$

Поскольку

$$\ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{d},$$

можно найти разовую нетто-премию $A_x$:

$$A_x = \frac{\pi_x - I_x d}{\pi_x + d}.$$

Далее, для $A_x$ верна рекуррентная формула

$$A_x = vq_x + vp_x A_{x+1}.$$

Это позволяет рассчитать вероятности $q_x$:

$$q_x = \frac{(1+i)A_x - A_{x+1}}{1 - A_{x+1}}.$$

В частности, $q_{30} \approx 0{,}1626\,\%$.

Предположим теперь, что вероятность $q_{30}$ уменьшилась в два раза, до величины $q_{30}^* \approx 0{,}0813\,\%$.

Как и раньше, средний ожидаемый доход по одному договору в момент его заключения дается формулой:

$$I_x^* = \pi_x \cdot \ddot{a}_x^* - A_x^*,$$

где верхний индекс * означает, что соответствующая величина подсчитана с измененным значением вероятности $q_{30}$. Поскольку вероятности $q_x$ для $x > 30$ не изменились,

$$A_{30}^* = vq_{30}^* + vp_{30}^* A_{31}, \qquad \ddot{a}_{30}^* = 1 + vp_{30}^* \ddot{a}_{31}.$$

Из аналогичных рекуррентных формул для $A_{30}$ и $\ddot{a}_{30}$ можно $A_{31}$ и $\ddot{a}_{31}$ выразить через $A_{30}$ и $\ddot{a}_{30}$:

$$A_{31} = \frac{(1+i)A_{30} - q_{30}}{p_{30}}, \qquad \ddot{a}_{31} = (1+i)\frac{\ddot{a}_{30} - 1}{p_{30}},$$

что, в свою очередь, позволяет выразить $A^*_{30}$ и $\ddot{a}^*_{30}$ через $A_{30}$ и $\ddot{a}_{30}$:

$$A^*_{30} = \frac{p^*_{30}}{p_{30}} A_{30} + v\frac{q^*_{30} - q_{30}}{p_{30}}, \qquad \ddot{a}^*_{30} = \frac{p^*_{30}}{p_{30}}\ddot{a}_{30} + \frac{q^*_{30} - q_{30}}{p_{30}}.$$

Теперь для $I^*_{30}$ мы имеем:

$$I^*_{30} = \pi_{30} \cdot \ddot{a}^*_{30} - A^*_{30} = \frac{p^*_{30}}{p_{30}} (\pi_{30} \cdot \ddot{a}_{30} - A_{30}) + \frac{q^*_{30} - q_{30}}{p_{30}} (\pi_{30} - v) =$$
$$= \frac{p^*_{30}}{p_{30}} I_{30} + \frac{q^*_{30} - q_{30}}{p_{30}} (\pi_{30} - v)\, s \approx 0{,}020778.$$

Итак, уменьшение $q_{30}$ приведет к увеличению $I_{30}$ примерно на $4\,\%$.

**Задача 6.20 ([26]).** *Договор страхования семейной пары предполагает выплату страховой суммы $S = 1$ в момент второй смерти. Премии платятся непрерывно с постоянной скоростью $P$ до момента первой смерти.*

*Предполагая, что моменты смерти жены и мужа являются независимыми случайными величинами с одной и той же постоянной интерсивностью смертности $\mu = 0{,}07$, а интенсивность процентов, используемая для расчетов премий, равна $\delta = 0{,}05$, подсчитайте $P$.*

**Решение**

Пусть $T_x^{(f)}$ ($T_y^{(m)}$) — время жизни жены (мужа),

$T_{x:y} = \min\left(T_x^{(f)}, T_y^{(m)}\right)$ — момент первой смерти,

$T_{\overline{xy}} = \max\left(T_x^{(f)}, T_y^{(m)}\right)$ — момент второй смерти.

В силу независимости величин $T_x^{(f)}$ и $T_y^{(m)}$, распределение случайных величин $T_{x:y}$ и $T_{\overline{xy}}$ дается формулами (ниже $t > 0$):

$$\mathsf{P}(T_{x:y} > t) = \mathsf{P}\left(T_x^{(f)} > t, T_y^{(m)} > t\right) =$$
$$= \mathsf{P}\left(T_x^{(f)} > t\right) \cdot \mathsf{P}\left(T_y^{(m)} > t\right) = e^{-0{,}14t},$$

$$\mathsf{P}(T_{\overline{xy}} < t) = \mathsf{P}\left(T_x^{(f)} < t, T_y^{(m)} < t\right) =$$
$$= \mathsf{P}\left(T_x^{(f)} < t\right) \cdot \mathsf{P}\left(T_y^{(m)} < t\right) = \left(1 - e^{-0{,}07t}\right)^2.$$

Обязательство страховщика заключается в выплате страховой суммы в момент $T_{\overline{xy}}$. Его стоимость в момент заключения договора равна

$$\overline{Z}_{\overline{xy}} = v^{T_{\overline{xy}}}.$$

Соответственно, актуарная современная стоимость обязательства страховщика равна

$$\overline{A}_{\overline{xy}} = \int_0^{+\infty} e^{-\delta t}\, d\mathsf{P}(T_{\overline{xy}} < t) = \int_0^{+\infty} e^{-0,05t} \cdot 2 \cdot \left(1 - e^{-0,07t}\right) \times$$
$$\times\, 0,07e^{-0,07t}\, dt = 0,14 \cdot \left(\frac{1}{0,12} - \frac{1}{0,19}\right) = \frac{49}{114}.$$

Обязательство страхователя заключается в выплате непрерывной ренты со скоростью $P$ до момента $T_{x:y}$. Его актуарную стоимость в момент заключения договора проще всего подсчитать методом текущего платежа; она равна

$$P \cdot \overline{a}_{x:y} = P \cdot \int_0^{+\infty} e^{-\delta t}\mathsf{P}(T_{x:y} > t)\, dt = P \cdot \int_0^{+\infty} e^{-0,19t}\, dt = \frac{100}{19} P.$$

Теперь из принципа эквивалентности обязательств можно найти $P$:

$$P = \frac{49}{600} \approx 0,0817.$$

# Глава 7
# РЕЗЕРВЫ

## 1. Понятие резерва

Рассмотрим некоторый договор страхования и примем момент его заключения за начальный момент времени. Предположим, что спустя время $t$ договор все еще сохраняет силу (так что застрахованный еще жив) и обозначим актуарную приведенную стоимость обязательств компании (застрахованного) в этот момент через ${}_t a_B$ (соответственно, ${}_t a_C$). Величина ${}_t a_B$ определяет среднюю сумму, которую предстоит выплатить в будущем страховой компании по рассматриваемому договору. Только часть средств (в среднем ${}_t a_C$) поступит от застрахованного. Недостающую сумму (в среднем ${}_t a_B - {}_t a_C$) компания должна покрыть из других источников. Однако поскольку необходимость этой дополнительной суммы ясна уже в момент $t$, компания должна предусмотреть *резерв* (reserve) ${}_t V$ величиной ${}_t a_B - {}_t a_C$ в этот момент:

$$ {}_t V = {}_t a_B - {}_t a_C . $$

Подчеркнем, что резерв, который определяется этой формулой, не учитывает случайных флуктуаций выплат и поступлений, связанных со случайностью времени жизни.

Определение резерва, данное выше, связано с анализом будущего (перспективного) развития событий. Поэтому метод расчета резерва непосредственно по определению называют *перспективным методом* (prospective method).

Для конкретного договора страхования с разовой нетто-премией, которая обозначена буквой $A$ (или, в случае пожизненных рент, буквой $a$) с соответствующими индексами, резерв спустя время $t$ после заключения договора обозначается ${}_t V(A)$. Кроме того, буква $V$ может снабжаться своими индексами, которые характеризуют процесс поступления премий. Эти индексы аналогичны индексам, которые используются для обозначения периодических нетто-премий. Например, если премии вносятся с частотой $m$, то вверху справа ставится индекс $(m)$; если премии платятся непрерывно, то над буквой $V$ ставится черта и т. д. Если период выплат премий ограничен некоторым числом $h$, то его ставят слева вверху (а не слева внизу как при обозначении нетто-премий, так как это место уже занято для указания момента $t$). Для дискретных видов страхования букву $A$ часто опускают и используют только символ $V$, но со всеми индексами, которые были у символа $A$.

Особо обратим внимание на следующее обстоятельство. Обычно термин «резерв» употребляется для обозначения каких-то запасов. Например, тепловая электростанция создает резервный запас угля для того, чтобы обеспечить бесперебойное функционирование агрегатов в случае сбоев в регулярных поставках топлива с шахт. Страховщик (как и любая другая компания или физическое лицо) может иметь определенный резерв финансовых средств для того, чтобы без задержек финансировать какие-нибудь непредвиденные расходы. Однако мы употребляем термин «резерв» совсем в другом смысле. *Резерв в страховании* — это измеренная в денежных единицах стоимость будущих обязательств компании. Поскольку величина этих обязательств зависит от случайных факторов, относящихся к далекому будущему, строго говоря, измерить их в настоящем вообще невозможно. Поэтому резерв — это некоторая разумная и, как правило, консервативная оценка баланса будущих расходов и доходов. Соответственно, нет и не может быть однозначного определения резерва. Определение, данное выше, является одним из самых простых и наиболее распространенных.

Имея в виду эти обстоятельства, было бы разумно использовать при оценке резерва завышенную смертность (в страховании, и заниженную смертность — при оценке рент и пенсий), заниженную процентную ставку и т. д. Иначе говоря, оценивая будущее развитие событий, нужно быть немного пессимистом (уровень этого пессимизма обычно предписывается страховым компаниям регулирующими органами).

Если при оценке резерва используется нетто-премия и те же таблица смертности и техническая процентная ставка, что и при расчете нетто-премии, то резерв называют *нетто-резервом* или *резервом нетто-премий* (net premium reserve). Если же премия, используемая при расчете резерва, учитывает расходы, и/или при расчете резерва используется особая таблица смертности (valuation table) и/или измененная техническая процентная ставка, то резерв называется специальным или модифицированным.

## 2. Дополнительные методы расчета резервов

*Рекуррентная формула для резервов*

Рассмотрим следующую общую схему страхования:

1) договор страхования заключен в момент $t = 0$ на срок $n$ лет;
2) возраст застрахованного в момент заключения договора — $x$ лет;
3) премия вносится в каждую годовщину заключения договора и на $k$-й год, $k = 1, \ldots, n$, равна $P_k$.
4) обязательства страховщика на $k$-й год действия договора заключаются в выплате в конце года страховой суммы $S_k$, если застрахованный умер в течение этого года, и суммы $M_k$, если застрахованный дожил до конца этого года.

Допустим, что в конце $k$-го года (т. е. в момент $t = k$) договор все еще сохраняет силу (так что застрахованный еще жив и его возраст равен $x + k$). Этот договор

- немедленно принесет в виде премии сумму $P_{k+1}$ (индекс $k + 1$ указывает, что начался $k + 1$-й год действия договора)

и, кроме того,

- с вероятностью $q_{x+k}$ приведет к выплате страховой суммы $S_{k+1}$ в момент $k + 1$ (ее приведенная стоимость в момент $k$ равна $S_{k+1}v$),
- а с вероятностью $p_{x+k}$ будет действовать и в момент $k + 1$, что потребует
  – выплаты суммы $M_{k+1}$ (ее приведенная стоимость в момент $k$ равна $vM_{k+1}$).
  – и (в среднем) наличия суммы ${}_{k+1}V$ для выполнения страховщиком своих обязательств после момента $k + 1$ (ее приведенная стоимость в момент $k$ равна $v \cdot {}_{k+1}V$).

Поэтому средняя сумма, необходимая страховщику в момент $k$ для выполнения своих обязательств по договору (т. е. нетто-резерв ${}_kV$) равна

$${}_kV = -P_{k+1} + vS_{k+1}q_{x+k} + vM_{k+1}p_{x+k} + p_{x+k} \cdot {}_{k+1}V \cdot v.$$

Это и есть рекуррентная формула для резервов в конце последовательных лет действия договора.

*Ретроспективная формула для нетто-резерва*

Если премия по некоторому виду страхования или пенсионной схеме определена из принципа эквивалентности, то в среднем компания не должна привлекать собственные средства для выполнения финансовых обязательств перед клиентами. Это означает, что резерв в момент $t$, необходимый для выполнения будущих финансовых обязательств по каждому еще действующему договору, должен быть равен сумме, накопленной к моменту $t$ на каждый действующий договор.

Поэтому мы можем оценивать резервы, исходя из прошлого (ретроспективного) развития событий:

$$_kV = {}_ks_C - {}_ks_B,$$

где $_ks_C$ — актуарное накопление к моменту $k$ за счет премий, а $_ks_B$ — актуарная накопленная стоимость в момент $k$ всех выплат на промежутке $(0, k)$.

Этот метод расчета резервов называется *ретроспективным* (retrospective).

Ретроспективная формула удобна при расчете резервов для отсроченных видов страхования и рент до наступления периода страховых выплат. В этом случае резерв — это просто актуарная накопленная стоимость всех внесенных премий.

## 3. Задачи и решения

**Задача 7.1 ([5]).** *Докажите, что для $n$-летнего смешанного страхования жизни с выплатой страхового пособия в конце года смерти резерв в момент $t = k$, $k = 0, 1, \ldots, n$, может быть подсчитан по формуле*

$$ {}_kV_{x:\overline{n}|} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}. $$

**Решение**

Перспективный метод непосредственно дает:

$$ {}_kV_{x:\overline{n}|} = A_{x+k:\overline{n-k}|} - P_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}, $$

где периодическая нетто-премия $P_{x:\overline{n}|}$ определяется из соотношения:

$$ 0 = A_{x:\overline{n}|} - P_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}. $$

Поэтому

$$ {}_kV_{x:\overline{n}|} = A_{x+k:\overline{n-k}|} - \frac{\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \cdot A_{x:\overline{n}|}. $$

Мы можем исключить из этой формулы разовые нетто-премии $A_{x+k:\overline{n-k}|}$ и $A_{x:\overline{n}|}$, что и дает искомый результат.

**Задача 7.2 ([5]).** *Рассмотрим договор 10-летнего временного страхования жизни, заключенный в момент $t_0 = 0$ с человеком в возрасте $x = 20$ лет. Предполагая, что премии платятся непрерывно в течение всего срока действия договора, а смертность описывается законом де Муавра с предельным возрастом $\omega = 100$, определите величину нетто-резерва в момент $t = 4$. Эффективная годовая процентная ставка есть $i = 9\%$.*

**Решение**

Прежде всего подсчитаем нетто-премию $\overline{P}(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|})$.

Используя принцип эквивалентности, мы имеем:

$$ \overline{P}(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|}) = \frac{\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|}}{\overline{a}_{x:\overline{n}|}}. $$

Поскольку остаточное время жизни $T(x)$ равномерно распределено на промежутке $(0, \omega - x)$,

$$ \overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta u} f_x(u)\, du = \frac{1 - v^n}{\delta(\omega - x)}, $$

$$\overline{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta u} \mathsf{P}(T(x) > u)\, du = \frac{(\omega - x) - (\omega - x - n)v^n - (1 - v^n)/\delta}{\delta(\omega - x)}.$$

Поэтому

$$\overline{P}(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|}) = \frac{1 - v^n}{(\omega - x) - (\omega - x - n)v^n - (1 - v^n)/\delta}.$$

Используя полученные выше формулы для $\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$ и $\overline{a}_{x:\overline{n}|}$, мы получим следующую формулу для нетто-резерва в момент $t$:

$$\begin{aligned} {}_t\overline{V}(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|}) &= \overline{A}^{1}_{x+t:\overline{n-t}|} - \overline{P}(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|}) \cdot \overline{a}_{x+t:\overline{n-t}|} = \\ &= \frac{t(1 - v^n) + nv^n(1 - v^{-t})}{\delta(\omega - x - t)\left[(\omega - x) - (\omega - x - n)v^n - \dfrac{1 - v^n}{\delta}\right]}. \end{aligned}$$

Подставляя в эту формулу числовые данные задачи ($x = 20$, $n = 10$, $t = 4$, $\omega = 100$, $i = 0{,}09$), мы получим:

$${}_4\overline{V}(\overline{A}^{1}_{20:\overline{10}|}) = 0{,}2\,\%.$$

**Задача 7.3.** *Для договора смешанного страхования жизни на 3 года со страховой суммой $b = 3$, выплачиваемой в конце года смерти, и периодическими премиями известно, что нетто-резерв в конце первого года равен 0,66, а в конце второго года — 1,56. Техническая годовая процентная ставка, используемая при расчете нетто-резервов, $i = 20\%$.*

*Найдите вероятности $q_x$ и $q_{x+1}$, используемые страховщиком при расчете нетто-резервов ($x$ — возраст застрахованного в момент заключения договора).*

### Решение

Решение базируется на рекуррентной формуле для последовательных резервов:

$$({}_kV + P) \cdot (1 + i) = q_{x+k} \cdot b + p_{x+k} \cdot {}_{k+1}V.$$

Поскольку ${}_3V = b \equiv 3$, из этой формулы при $k = 2$ можно найти нетто-премию $P$:

$$P = bv - {}_2V = 0{,}94.$$

Рассмотрим теперь случай $k = 1$. Поскольку величина $P$ уже известна, мы можем найти $q_{x+1}$:

$$q_{x+1} = \frac{({}_1V + P) \cdot (1 + i) - {}_2V}{b - {}_2V} = 0{,}25.$$

И, наконец, поскольку ${}_0V = 0$, при $k = 0$ имеем:

$$q_x = \frac{P \cdot (1+i) - {}_1V}{b - {}_1V} = 0{,}2.$$

**Задача 7.4.** *В соответствии с договором страхования жизни 60-летнего мужчины на три года:*

*(1) премия, размер которой не меняется, вносится в начале каждого года действия договора,*

*(2) в случае смерти застрахованного в течении $k$-го года действия договора ($k = 1, 2, 3$), страховое возмещение выплачивается в конце текущего года действия договора и составляет $b_k = 4 - k$.*

*При актуарных расчетах страховщик использует техническую процентную ставку $i = 5\%$ и таблицу смерности, фрагмент которой приведен в табл. 7.1.*

*Таблица 7.1*

| $x$ | $l_x$ |
|---|---|
| 60 | 70 000 |
| 61 | 66 500 |
| 62 | 59 850 |
| 63 | 52 668 |

*Определите нетто-резерв сразу после поступления второй премии.*

**Решение**

Прежде всего подсчитаем нетто-премию $P$ по рассматриваемому договору.

Актуарная стоимость обязательств страховщика на момент заключения договора есть:

$$a_B = 3 \cdot q_{60}v + 2 \cdot p_{60}q_{61}v^2 + 1 \cdot p_{60}p_{61}q_{62}v^3.$$

Поскольку

$$p_{60} = \frac{l_{61}}{l_{60}} = 0{,}95, \quad q_{60} = 1 - p_{60} = 0{,}05,$$

$$p_{61} = \frac{l_{62}}{l_{61}} = 0{,}9, \quad q_{61} = 1 - p_{61} = 0{,}1,$$

$$p_{62} = \frac{l_{63}}{l_{62}} = 0{,}88, \quad q_{62} = 1 - p_{62} = 0{,}12,$$

нетрудно подсчитать, что $a_B \approx 0{,}403822481$.

Актуарная стоимость обязательств страхователя на момент заключения договора есть:

$$a_C = P \cdot \ddot{a}_{60:\overline{3}|}.$$

Поскольку

$$\ddot{a}_{60:\overline{3}|} = \frac{l_{60} + vl_{61} + v^2 l_{62}}{l_{60}} \approx 2{,}680272109,$$

из принципа эквивалентности обязательств мы имеем:

$$P \approx 0{,}150664733.$$

После уплаты второй премии приведенные обязательства страховщика составляют

$$a_B = 2 \cdot q_{61} v + 1 \cdot p_{61} q_{62} v^2 \approx 0{,}288435374,$$

а обязательства страхователя —

$$a_C = P \cdot p_{61} v \approx 0{,}1291412.$$

Поэтому искомый резерв равен

$$a_B - a_C \approx 0{,}159294174.$$

**Задача 7.5 ([22]).** *Страховая компания «Наша жизнь — игра» заключила следующий специальный договор страхования жизни с человеком в возрасте 25 лет:*

1. *В конце года смерти производится случайный выбор: с вероятностью 0,2 страховое возмещение равно 1000, а с вероятностью 0,8 страховое возмещение равно 0.*
2. *В начале каждого года действия договора производится случайный выбор: с вероятностью 0,8 платится премия $\pi$, а с вероятностью 0,2 на текущий год страхователь освобождается от уплаты премии.*
3. *Все описанные выше случайные испытания — независимы.*
4. *$A_{25} = 0{,}0816496$, $A_{35} = 0{,}1287194$.*
5. *$i = 0{,}06$.*
6. *$\pi$ определяется с использованием принципа эквивалентности.*

*Подсчитайте нетто-резерв в конце десятого года действия договора.*

**Решение**

Пусть $Z_x$ — стоимость страхового возмещения, приведенная на момент заключения договора. По условию,

$$Z_x = 1000 \cdot v^{K_x} J_0,$$

где случайная величина $J_0$ принимает значения 1 и 0 с вероятностями 0,2 и 0,8 соответственно. Поэтому актуарная приведенная стоимость обязательств страховщика есть

$$\mathsf{E}Z_x = 1000 \cdot \mathsf{E}\left(v^{K_x} \cdot J_0\right) = 1000 \cdot \mathsf{P}(J_0 = 1) \cdot \mathsf{E}\left(v^{K_x}\right) = 200 \cdot A_x.$$

Далее, пусть $Y_x$ — общая стоимость потока премий, приведенная на момент заключения договора. По условию,

$$Y_x = \pi \cdot \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot I_k \cdot I\left(T_x > k\right),$$

где случайные величины $I_k$ независимы в совокупности и одинаково распределены по закону

$$\mathsf{P}(I_k = 0) = 0{,}2, \quad \mathsf{P}(I_k = 1) = 0{,}8.$$

Поэтому актуарная современная стоимость обязательств страховщика есть

$$\mathsf{E}Y_x = \pi \cdot \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot \mathsf{P}(I_k = 1) \cdot \mathsf{P}(T_x > k) =$$

$$= \pi \cdot \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot 0{,}8 \cdot {}_k p_x = 0{,}8\pi \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x = 0{,}8\pi \ddot{a}_x.$$

Принцип эквивалентости обязательств означает, что $\mathsf{E}Z_{25} = \mathsf{E}Y_{25}$, откуда

$$\pi = \frac{200 \cdot A_{25}}{0{,}8 \cdot \ddot{a}_{25}} = 250 \frac{A_{25}}{1 - A_{25}} \cdot d \approx 1{,}258145984.$$

В конце десятого года действия договора приведенные потери по договору равны $Z_{35} - Y_{35}$. Поэтому искомый резерв есть

$${}_{10}V \equiv \mathsf{E}Z_{35} - \mathsf{E}Y_{35} = 200 \cdot A_{35} - 0{,}8 \cdot \pi \ddot{a}_{35} =$$

$$= 200 \cdot A_{35} - 0{,}8 \cdot \pi \frac{1 - A_{35}}{d} \approx 10{,}25.$$

**Задача 7.6 ([22]).** *Относительно дискретного пожизненного страхования на случай смерти с 20-летним периодом платежа премии известно, что:*

1) *возраст застрахованного в момент заключения договора равен $x$;*

2) *страховая сумма равна 1000;*

3) *$i = 0{,}06$;*

4) *$q_{x+19} = 0{,}01254$;*

5) *премия в размере 13,72 платится раз в год;*

6) *резерв нетто-премий в конце 19 года действия договора равен 342,03;*

7) *надбавки к нетто-премии отсутствуют.*

*Допустим, что застрахованный решил бы заключить договор бессрочного страхования жизни на сумму 1000 с ежегодными постоянными премиями и выплатой страховой суммы в конце года смерти только в возрасте $x+20$. Подсчитайте величину этой премии.*

**Решение**

Примем страховую сумму в качестве единицы и подсчитаем резерв по исходному договору в конце 20-го года его действия:

$$
{}_{20}V = \frac{({}_{19}V + P)(1+i) - q_{x+19}}{p_{x+19}} = \\
= \frac{(0{,}34203 + 0{,}01372)\cdot 1{,}06 - 0{,}01254}{0{,}98746} \approx 0{,}36918.
$$

Поскольку премии с этого момента застрахованный уже не платит, ${}_{20}V$ равняется актуарной современной стоимости обязательств компании. Эти обязательства заключаются в выплате страховой суммы в конце последнего года жизни и поэтому их актуарная стоимость в конце 20-го года равна $A_{x+20}$ ($x+20$ — возраст застрахованного в рассматриваемый момент). Итак,

$$A_{x+20} = 0{,}36918.$$

Отсюда в свою очередь можно найти $\ddot{a}_{x+20}$:

$$\ddot{a}_{x+20} = \frac{1 - A_{x+20}}{d},$$

где $d = \dfrac{i}{1+i}$ — учетная ставка.

Искомая премия $P_{x+20}$ теперь может быть подсчитана из принципа эквивалентности обязательств:

$$P_{x+20} = \frac{A_{x+20}}{\ddot{a}_{x+20}} \approx 0{,}0331 = 3{,}31\,\% \text{ (от страховой суммы)}.$$

**Задача 7.7 ([22]).** *Мужчина в возрасте 55 лет заключил дискретный договор смешанного страхования жизни на 20 лет. По условиям договора, премия, величина которой не меняется, платится раз в год в годовщину заключения договора. Страховая сумма на $k$-й год действия договора составляет $b_k = 21 - k$. Пусть ${}_kV$ обозначает резерв нетто-премий в конце $k$-го года действия договора. Известно, что ${}_{10}V = 5$, ${}_{19}V = 0{,}6$, $q_{65} = 10\%$, $i = 8\%$. Подсчитайте ${}_{11}V$.*

**Решение**

Пусть $P$ — величина ежегодной премии. В конце 19-го года действия договора обязательства страхователя заключаются в немедленной выплате последней премии, а обязательства страховщика — в выплате суммы $b_{20} = 1$ в конце срока действия договора (вне зависимости от того, умрет или нет застрахованный на протяжении 20-го года действия договора). Поэтому

$$ {}_{19}V = 1 \cdot v - P, $$

что позволяет подсчитать премию:

$$ P = v - {}_{19}V \approx 0{,}325925926. $$

Теперь для ${}_{11}V$ мы имеем:

$$ {}_{11}V = \frac{({}_{10}V + P)(1+i) - q_{65} \cdot b_{11}}{p_{65}} = $$
$$ = \frac{({}_{10}V + v - {}_{19}V)(1+i) - 10 \cdot q_{65}}{p_{65}} \approx 5{,}28. $$

**Задача 7.8 ([14]).** *Страховщик заключил договор страхования на два года. Страховая сумма $SA = 400$ выплачивается в конце года смерти, а премия вносится двумя равными суммами $P = 74{,}33$ в начале каждого года действия договора. Известно, что резерв нетто-премий в конце первого года равен ${}_1V = 16{,}58$. Считая, что премия не включает нагрузок, подсчитайте дисперсию потерь по договору в момент его заключения. Техническая процентная ставка, используемая страховщиком, равна $i = 10\%$.*

**Решение**

Прежде всего, найдем предполагаемую смертность застрахованного в ближайшие два года.

Предположим, что застрахованный еще жив спустя год после заключения договора, и подсчитаем обязательства сторон в начале второго года действия договора (момент $t = 1$).

Обязательства застрахованного (страхователя) заключаются в немедленной выплате единственной премии $P$.

Обязательства страховщика заключаются в выплате страховой суммы $SA = 400$ в момент $t = 2$, если застрахованный умрет на протяжении второго года действия договора (вероятность этого события равна $q_{x+1}$). Среднее значение этого обязательства в рассматриваемый момент $t = 1$ равно $SA \cdot q_{x+1} \cdot v$, где $v = 1/(1+i)$.

Чистые обязательства компании есть $SA \cdot q_{x+1} \cdot v - P$ — это (по определению) резерв нетто-премий в момент $t = 1$:

$$ SA \cdot q_{x+1} \cdot v - P = {}_1V. $$

Отсюда

$$ q_{x+1} = \frac{P + {}_1V}{SA} \cdot (1+i) = 0{,}25. $$

Чтобы найти вероятность $q_x$, воспользуемся ретроспективной формулой для резерва ${}_1V$. Актуарное накопление в момент $t = 1$ за счет премий равно $P \cdot (1+i)/p_x$, а накопленная стоимость страхования равна $SA \cdot q_x/p_x$. Поэтому

$$ {}_1V = \frac{P \cdot (1+i) - SA \cdot q_x}{p_x}. $$

Отсюда

$$ q_x = \frac{P \cdot (1+i) - {}_1V}{SA - {}_1V} \approx 0{,}17. $$

Теперь оценим потери $L$ на момент заключения договора.

С вероятностью $q_x$ застрахованный умрет в первый год действия договора, что приведет к выплате суммы $SA$ в момент $t = 1$. Приведенная стоимость этой выплаты в момент $t = 0$ заключения договора равна $SA \cdot v$. Поскольку в момент $t = 0$ внесена премия $P$, приведенные потери страховщика в этом случае равны $SA \cdot v - P = 289{,}30$.

С вероятностью $p_x q_{x+1}$ застрахованный умрет во второй год действия договора, что приведет к выплате суммы $SA$ в момент $t = 2$. Приведенная стоимость этой выплаты в момент заключения договора равна $SA \cdot v^2$. Поскольку в момент $t = 0$ и $t = 1$ внесена премия $P$, приведенные потери страховщика в этом случае равны

$$ SA \cdot v^2 - P - P \cdot v = 188{,}68. $$

И, наконец, с вероятностью $p_x \cdot p_{x+1}$ застрахованный доживет до конца действия договора, так что приведенные потери страховщика будут равны $-(P + P \cdot v) = -141{,}90$ (отрицательные потери означают доход).

Отсюда

$$ \mathsf{E}L^2 = 34150. $$

Поскольку $\mathsf{E}L = 0$ (премия определялась из принципа эквивалентности обязательств),

$$ \mathsf{Var}\, L = \mathsf{E}L^2 = 34150. $$

**Задача 7.9 ([14]).** *Человек в возрасте $x = 35$ лет покупает отложенную на 10 лет пожизненную ренту, которая будет выплачиваться непрерывно со скоростью $\rho = 1$.*

*Премии также платятся непрерывно; период оплаты ограничен 10 годами.*

*Считая, что смертность описывается законом де Муавра с предельным возрастом $\omega = 85$ лет, а $i = 0$, определите нетто-резерв к концу пятого года.*

**Решение**

Прежде всего посчитаем скорость $\pi$, с которой платятся нетто-премии.

Поскольку остаточное время жизни застрахованного в момент заключения договора равномерно распределено на промежутке $(0, 50)$, актуарная современная стоимость обязательств застрахованного (страхователя) равна

$$a_C = \pi \int_0^{10} \mathsf{P}(T_{35} > t)\,dt = \pi \int_0^{10} \left(1 - \frac{t}{50}\right)\,dt =$$
$$= \pi \left(10 - \left.\frac{t^2}{100}\right|_0^{10}\right) = \pi \cdot (10 - 1) = 9\pi.$$

Актуарная современная стоимость обязательств страховщика есть

$$a_B = \int_{10}^{50} \mathsf{P}(T_{35} > t)\,dt = \int_{10}^{50} \left(1 - \frac{t}{50}\right)\,dt = 40 - \left.\frac{t^2}{100}\right|_{10}^{50} = 40 - 25 + 1 = 16.$$

Поэтому

$$\pi = \frac{16}{9}.$$

Если застрахованный еще жив в момент $t = 5$, то его возраст равен 40 лет. Поэтому его остаточное время жизни равномерно распределено на промежутке $(0, 45)$. С другой стороны, период выплаты премий ограничен уже 5 годами. Значит, актуарная приведенная стоимость обязательств застрахованного (страхователя) равна

$$_5a_C = \pi \int_0^{5} \mathsf{P}(T_{40} > t)\,dt = \pi \int_0^{5} \left(1 - \frac{t}{45}\right)\,dt =$$
$$= \pi \left(5 - \left.\frac{t^2}{90}\right|_0^{5}\right) = \pi \left(5 - \frac{5}{18}\right) = \pi \cdot \frac{85}{18} \approx 8{,}3951.$$

Актуарная приведенная стоимость обязательств страховщика есть

$$_5a_B = \int_5^{45} \mathsf{P}(T_{40} > t)\,dt = \int_5^{45} \left(1 - \frac{t}{45}\right)\,dt = 40 - \left.\frac{t^2}{90}\right|_5^{45} =$$
$$= 40 - \frac{45^2 - 5^2}{90} = 40 - \frac{50 \cdot 40}{90} = \frac{360 - 200}{9} = \frac{160}{9} \approx 17{,}7778.$$

Поэтому искомый резерв равен

$$_5V \equiv {_5a_B} - {_5a_C} \approx 9{,}38.$$

**Задача 7.10 ([14]).** *На сколько увеличится резерв за второй год действия договора по чисто дискретному договору смешанного страхования жизни на сумму $SA = 1000$ на срок $n = 3$ года с ежегодными премиями, если $q_x = q_{x+1} = 0{,}2$, $i = 0{,}06$.*

**Решение**

Прежде всего найдем ежегодные премии Р.

Актуарная приведенная стоимость обязательств страховщика в момент заключения договора есть

$$a_B = SA\left(vq_x + v^2 p_x q_{x+1} + v^3 p_x p_{x+1}\right).$$

Актуарная приведенная стоимость обязательств страхователя в момент заключения договора есть

$$a_C = P \cdot \left(1 + vp_x + v^2 p_x p_{x+1}\right).$$

В силу принципа эквивалентности обязательств,

$$a_B = a_C,$$

откуда

$$P \approx 373{,}63.$$

Для резерва в конце первого года:

$${}_1V \cdot p_x = P \cdot (1+i) - SA \cdot q_x,$$

откуда

$${}_1V \approx 245{,}06.$$

Для резерва в конце второго года:

$${}_2V \cdot p_{x+1} = ({}_1V + P) \cdot (1+i) - SA \cdot q_{x+1},$$

откуда

$${}_2V \approx 569{,}77,$$

поэтому увеличение резерва равно 324,71.

**Задача 7.11.** *Найдите нетто-резерв в конце десятого года действия договора пожизненного страхования с непрерывно выплачиваемой премией. В момент заключения договора возраст застрахованного $x = 40$ лет, остаточное время жизни равномерно распределено на промежутке $[0, 60]$, техническая процентная ставка $i = 5\%$.*

**Решение**

Годовой размер непрерывной нетто-премии $\overline{P}(\overline{A}_x)$ по рассматриваемому договору дается формулой

$$\overline{P}(\overline{A}_x) = \frac{\overline{A}_x}{\overline{a}_x} = \frac{\delta \overline{A}_x}{1 - \overline{A}_x},$$

где $\overline{A}_x$ — разовая нетто-премия и, как обычно, $\delta = \ln(1+i)$. Разовая нетто-премия, в свою очередь, может быть записана в виде (ниже $\omega_x = 60$ — предельное остаточное время жизни):

$$\overline{A}_x \equiv \mathsf{E} e^{-\delta T_x} = \int\limits_0^{\omega_x} e^{-\delta t} \frac{1}{\omega_x}\, dt = -\frac{1}{\delta\omega_x} e^{-\delta t}\Big|_0^{\omega_x} = \frac{1 - e^{-\delta\omega_x}}{\delta\omega_x} \approx 0{,}323311.$$

Непосредственно из определения, для искомого нетто-резерва в момент $t$, ${}_t\overline{V}\left(\overline{A}_x\right)$, имеем:

$$ {}_t\overline{V}\left(\overline{A}_x\right) = \overline{A}_{x+t} - \overline{P}(\overline{A}_x) \cdot \overline{a}_{x+t} = \overline{A}_{x+t} - \frac{\delta \overline{A}_x}{1-\overline{A}_x} \cdot \frac{1-\overline{A}_{x+t}}{\delta} = \frac{\overline{A}_{x+t} - \overline{A}_x}{1-\overline{A}_x}. $$

В момент $t$ возраст застрахованного равен $x+t$ и его остаточное время жизни равномерно распределено на промежутке $(0, \omega_x - t)$ Поэтому,

$$ \overline{A}_{x+t} = \frac{1 - e^{-\delta(\omega_x - t)}}{\delta(\omega_x - t)} \approx 0{,}374172, $$

и, значит,

$$ {}_{10}\overline{V}\left(\overline{A}_{40}\right) \approx 0{,}075162. $$

**Задача 7.12** (**[25]**). *Найдите нетто-резерв в конце второго года действия специального договора пожизненного страхования, который заключен с человеком в возрасте $x = 65$ лет на следующих условиях:*

1) *премия платится непрерывно с постоянной скоростью на протяжении всего срока действия договора;*
2) *страховая сумма в момент заключения договора равна $b_0 = 1000$, а затем непрерывно увеличивается по закону $b_t = 1000 \cdot e^{\delta t}$, где $\delta$ — интенсивность процентов, используемая при дисконтировании денежных потоков.*

*Техническая база расчетов: $\delta = 0{,}04$, $\mu_{65}(t) \equiv \mu = 0{,}02$.*

**Решение**

Пусть Р — скорость с которой платится премия. Тогда в момент заключения договора актуарная приведенная стоимость обязательств страховщика есть

$$ a_B = \mathsf{E}\left(b_{T_{65}} \cdot v^{T_{65}}\right) = \mathsf{E}\left(1000 \cdot e^{0{,}04 T_{65}} \cdot e^{-0{,}04 T_{65}}\right) = 1000. $$

Аналогично, актуарная приведенная стоимость обязательств страхователя дается формулой:

$$ a_C = P \cdot \overline{a}_{65|} = P \cdot \int_0^{+\infty} e^{-\delta t} \cdot \mathsf{P}(T_{65} > t)\, dt = P \cdot \frac{1}{\mu + \delta}. $$

Применяя принцип эквивалентности обязательств, для годовой нетто-премии $P$ имеем:

$$ P = 1000 \cdot (\mu + \delta) = 60. $$

Для искомого нетто-резерва ${}_2V$ непосредственно из определения (перспективная формула) имеем:

$$ {}_2V = \mathsf{E}\left(b_{2+T_{67}} \cdot v^{T_{67}}\right) - P \cdot \overline{a}_{\overline{67}|}. $$

В предположениях задачи случайная величина $T_{67}$ (так же как и $T_{65}$) имеет экспоненциальное распределение с параметром $\mu$. Поэтому

$$
{}_2V = \mathsf{E}\left(1000 \cdot e^{0,04(2+T_{67})} \cdot e^{0,04T_{67}}\right) - P \cdot \frac{1}{\mu+\delta} = \\
= 1000 \cdot e^{0,08} - 1000 = 1000 \cdot \left(e^{0,08} - 1\right) \approx 83,29.
$$

**Задача 7.13 ([25]).** *В соответствии с условиями специального договора пожизненного страхования, заключенного с человеком в возрасте $x$ лет,*

1. *страховая сумма $SA = 5000$ выплачивается в конце года смерти;*
2. *в случае, если застрахованный умрет в течение первого года действия договора, страховая выплата не производится;*
3. *фиксированная премия платится в каждую годовщину заключения договора.*

*Найдите нетто-резерв по этому договору в конце десятого года его действия, если $q_x = 0{,}05$, $\ddot{a}_x = 5$, ${}_{10}V_x = 0{,}2$, $v = 0{,}9$.*

**Решение**

Прежде всего, найдем нетто-премию $P$.

Обязательство страхователя заключается в выплате пожизненной упреждающей ренты величиной $P$ в год. Его актуарная современная стоимость равна $P \cdot \ddot{a}_x = 5P$. Актуарная современная стоимость обязательств страховщика дается формулой:

$$
SA \cdot {}_{1|}A_x = SA \cdot A_x - SA \cdot q_x \cdot v = SA \cdot (1 - d \cdot \ddot{a}_x) - SA \cdot q_x \cdot v.
$$

Из принципа эквивалентности обязательств теперь имеем

$$
P = SA \cdot \frac{{}_{1|}A_x}{\ddot{a}_x} = 455.
$$

В конце десятого года действия договора обязательства страхователя равны $P \cdot \ddot{a}_{x+10}$, а обязательства страховщика — $SA \cdot A_{x+10}$. Поэтому искомый нетто-резерв ${}_{10}V$ дается формулой:

$$
{}_{10}V = SA \cdot A_{x+10} - P \cdot \ddot{a}_{x+10}.
$$

Нетто-резерв в конце десятого года по соответствующему договору пожизненного страхования с единичной страховой суммой, ${}_{10}V_x$, может быть подсчитан с помощью формулы

$$
{}_kV_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x},
$$

откуда имеем:

$$
\ddot{a}_{x+10} = 4.
$$

Следовательно, $A_{x+10} = 1 - d \cdot \ddot{a}_{x+10} = 0{,}6$ и поэтому искомый резерв равен 1180.

**Задача 7.14.** *Для специального 20-летнего договора страхования жизни с человеком в возрасте $x = 70$ лет:*

1) *страховое возмещение выплачивается в конце года смерти и равно 1000 плюс нетто-резерв;*
2) $q_{70+t} = 0{,}03$, $t \geqslant 0$;
3) $i = 0{,}07$.

*Найдите разовую нетто-премию по этому договору.*

**Решение**

Примем 1000 в качестве единицы измерения денежных сумм и обозначим через $P$ искомую премию. Для резерва в конце $k$-го года действия договора, ${}_kV$, справедливо следующее соотношение:

$$ {}_kV \cdot (1+i) = p_{x+k} \cdot {}_{k+1}V + q_{x+k} \cdot (1 + {}_{k+1}V), $$

если $k = 1, \ldots, 19$;

$$ P \cdot (1+i) = p_x \cdot {}_1V + q_x \cdot (1 + {}_1V) $$

(случай $k = 0$), что равносильно более простым формулам:

$$ {}_{k+1}V \cdot v^{k+1} = {}_kV \cdot v^k - q_{x+k} \cdot v^{k+1}, $$

если $k = 1, \ldots, 19$;

$$ {}_1V \cdot v = P - q_x \cdot v $$

(случай $k = 0$).

Суммируя по $k = 0, \ldots, 19$ и учитывая, что ${}_{20}V = 0$, мы получим

$$ P = \sum_{k=0}^{19} v^{k+1} \cdot q_{x+k} = 0{,}03 \frac{v - v^{21}}{d} \approx 0{,}31782, $$

или, в абсолютных цифрах,

$$ P \approx 3178{,}2. $$

**Задача 7.15.** *Страховая компания заключила $N = 10\,000$ однотипных договоров пожизненного страхования с выплатой страховой суммы величиной $S = 1\,000$ в конце года смерти; премии платятся пожизненно в каждую годовщину заключения договора. Размер премии определяется на основе принципа эквивалентности (нагрузки не учитываются) с использованием технической процентной ставки $i = 5\%$ и таблицы смертности 7.2. Возраст всех застрахованных — $x = 30$ лет.*

*Этот портфель перестрахован в перестраховочной компании на базе ежегодно возобновляемых премий, с собственным удержанием*

*$1 - f = 10\%$. Иначе говоря, перестрахочная премия ежегодно определяется на каждый действующий договор с использованием в качестве страховой суммы — суммы под риском, т. е. разности между фактической страховой суммой и резервом на конец текущего года.*

*Таблица 7.2*

| $x$ | $l_x$ | $\ddot{a}_x$ |
|---|---|---|
| 30 | 96 307 | 15,50099 |
| 31 | 96 117 | 15,25614 |
| 32 | 95 918 | 15,00000 |

*Перестраховщик получает фиксированную долю $f = 90\%$ от этой премии и в случае смерти застрахованного выплачивает в конце года прямому страховщику 90% от суммы под риском. Перестраховщик использует для расчетов ту же таблицу смертности, что и прямой страховщик, но не предпологает возможности инвестирования собранных премий. Определите ожидаемый размер общей премии, полученной перестраховщиком в начале 2-го года действия договора перестрахования.*

**Решение**

Прежде всего отметим, что к началу $k$-го года число действующих договоров является случайной величиной $\nu_k$ со средним

$$\mathsf{E}\nu_k = N \cdot {}_{k-1}p_x = N\frac{l_{x+k-1}}{l_x},$$

так что

$$\mathsf{E}\nu_2 \approx 9980.$$

Для ежегодной премии $\mathsf{P}$ из принципа эквивалентности имеем:

$$S \cdot A_x = \mathsf{P}\ddot{a}_x,$$

откуда

$$P = S\frac{A_x}{\ddot{a}_x}.$$

Но

$$\ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{d},$$

так что

$$P = S\frac{1 - d\ddot{a}_x}{\ddot{a}_x}.$$

Резерв на конец $k$-го года действия договора равен:

$${}_kV_x = S \cdot A_{x+k} - P \cdot \ddot{a}_{x+k},$$

и поэтому перестраховочная премия на этот год равна:

$$\pi_k = q_{x+k-1} \cdot (S - {}_kV_x) = q_{x+k-1} \cdot (S - S \cdot A_{x+k} + P \cdot \ddot{a}_{x+k}) =$$
$$= q_{x+k-1} \cdot (Sd \cdot \ddot{a}_{x+k} + P \cdot \ddot{a}_{x+k}) = q_{x+k-1} \cdot (Sd + S\frac{1 - d\ddot{a}_x}{\ddot{a}_x})\ddot{a}_{x+k} =$$
$$= \frac{l_{x+k-1} - l_{x+k}}{l_{x+k-1}} \cdot \frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x} \cdot S.$$

Для $k = 2$ имеем

$$\pi_2 \approx 2{,}0035.$$

Поэтому ожидаемый размер общей премии, полученной перестраховщиком в начале $k$-го года действия договора перестрахования, равен

$$\mathsf{E}\nu_k \cdot f \cdot \pi_k = fNS\,\frac{l_{x+k-1} - l_{x+k}}{l_x} \cdot \frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x} \cdot \frac{l_{x+k-1}}{l_x}.$$

Подставляя числовые значения, мы получим, что искомая величина равна примерно 17 996.

# Список литературы


1. *Benjamin B., Pollard J.H.* The Analysis of Mortality and Other Actuarial Statistics. — Butterworth-Heinemann, 1980.
2. *Bowers N.L. et al.* Actuarial Mathematics. — Itasca, 1986
3. *Фалин Г.И., Фалин А.И.* Введение в актуарную математику. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1994.
4. *Фалин Г.И.* Математический анализ рисков в страховании. — М.: Российский юридический издательский дом, 1994.
5. *Фалин Г.И.* Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем. — М.: Изд-во мех.-матем. ф-та МГУ, 1996.
6. *Gerber H.U.* Life Insurance Mathematics. — Springer, 1995.
7. *McCutcheon J.J., Scott W.F.* An Inroduction to the Mathematics of Finance. — Butterworth-Heinemann, 1986.
8. *Neil A.* Life Contingencies. — London: Heinemann, 1989.
9. *Exam* 151 — *Risk Theory.* Society of Actuaries, May 1994.
10. *Exam* 151 — *Risk Theory.* Society of Actuaries, May 1999.
11. *Course 1* (*Mathematical Foundations of Actuarial Science*) — *Revised Sample Exam.* The Society of Actuaries and the Casualty Actuarial Society, August 1999.
12. *Course/Exam* 1 — *Mathematical Foundations of Actuarial Science.* The Society of Actuaries and the Casualty Actuarial Society, May 2000.
13. *Course/Exam* 2 — *Economics, Finance and Interest Theory.* The Society of Actuaries and the Casualty Actuarial Society, May 2000.
14. *Course/Exam* 3 — *Actuarial Models.* The Society of Actuaries and the Casualty Actuarial Society, May 2000.
15. *Course/Exam* 4 — *Actuarial Modeling.* The Society of Actuaries and the Casualty Actuarial Society, May 2000.

16. *Course/Exam* 1 — *Mathematical Foundations of Actuarial Science.* The Society of Actuaries and the Casualty Actuarial Society, November 2000.
17. *Course/Exam* 2 — *Economics, Finance and Interest Theory.* The Society of Actuaries and the Casualty Actuarial Society, November 2000.
18. *Course/Exam* 3 — *Actuarial Models.* The Society of Actuaries and the Casualty Actuarial Society, November 2000.
19. *Course/Exam* 4 — *Actuarial Modeling.* The Society of Actuaries and the Casualty Actuarial Society, November 2000.
20. *Course/Exam* 1 — *Mathematical Foundations of Actuarial Science.* The Society of Actuaries and the Casualty Actuarial Society, May 2001.
21. *Course/Exam* 2 — *Economics, Finance and Interest Theory.* The Society of Actuaries and the Casualty Actuarial Society, May 2001.
22. *Course/Exam* 3 — *Actuarial Models.* The Society of Actuaries and the Casualty Actuarial Society, May 2001.
23. *Course/Exam* 1 — *Mathematical Foundations of Actuarial Science.* The Society of Actuaries and the Casualty Actuarial Society, November 2001.
24. *Course/Exam* 2 — *Economics, Finance and Interest Theory.* The Society of Actuaries and the Casualty Actuarial Society, November 2001.
25. *Course/Exam* 3 — *Actuarial Models.* The Society of Actuaries and the Casualty Actuarial Society, November 2001.
26. *Course/Exam* 3 — *Actuarial Models.* The Society of Actuaries and the Casualty Actuarial Society, November 2002.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

*ФАЛИН Геннадий Иванович*
*ФАЛИН Анатолий Иванович*

**АКТУАРНАЯ МАТЕМАТИКА В ЗАДАЧАХ**

Редактор *И.Л. Легостаева*
Оригинал-макет: *М.В. Башевой*
Оформление переплета: *А.Ю. Алехина*

ЛР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 25.07.03.
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 12. Уч.-изд. л. 13,2. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997 Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ФГУП «Ивановская областная типография»
153008, г. Иваново, ул. Типографская, 6.
E-mail: 091-018@adminet.ivanovo.ru

ISBN 5-9221-0451-9

9 785922 104517